

---

# FONCTIONS LOCALEMENT ANALYTIQUES SUR $\mathbf{Z}_p$

par

Pierre Colmez & Shanwen Wang

---

**Résumé.** — Nous donnons une preuve par dualité du théorème d'Amice sur les coefficients de Mahler des fonctions localement analytiques sur  $\mathbf{Z}_p$ .

**Abstract.** — We give a proof by duality of Amice's result on Mahler coefficients of locally analytic functions on  $\mathbf{Z}_p$ .

## 1. Transformée d'Amice et théorème de Mahler

Soit  $L$  une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$ . Soit  $\mathcal{C}$  l'espace des  $\phi : \mathbf{Z}_p \rightarrow L$  continues. On munit  $\mathcal{C}$  de la valuation  $v_{\mathcal{C}}(\phi) = \inf_{x \in \mathbf{Z}_p} v_p(\phi)$  (c'est une valuation car  $\mathbf{Z}_p$  est compact) ; cela fait de  $\mathcal{C}$  un  $L$ -banach. On note  $\text{Mes}$  son dual que l'on munit de la topologie en faisant un  $L$ -smith (i.e. la boule unité  $\text{Mes}_0$  de  $\text{Mes}$  est munie de la topologie de la convergence faible et  $\text{Mes} = \varinjlim p^{-n} \text{Mes}_0$  est muni de la topologie de la limite inductive) de telle sorte que le dual de  $\text{Mes}$  est  $\mathcal{C}$ .

Comme  $\mathbf{Z}_p$  est profini, l'espace  $\text{LC}$  des fonctions localement constantes est dense dans  $\mathcal{C}$ . Il s'ensuit que  $\text{Mes}_0$  est aussi  $\text{Hom}(\text{LC}_0, \mathcal{O}_L)$ , où  $\text{LC}_0$  est la boule unité de  $\text{LC}$ . Mais  $\text{LC} = \varinjlim_h \text{LC}^{(h)}$ , où  $\text{LC}^{(h)} = \mathcal{C}(\mathbf{Z}/p^h)$ , et donc le dual de  $\text{LC}^{(h)}$  est  $L[\mathbf{Z}/p^h] \cong L[T]/((1+T)^{p^h} - 1)$  où  $a \in \mathbf{Z}$  s'envoie sur  $(1+T)^a$  ; la boule unité correspondant à  $\mathcal{O}_L[[T]]/((1+T)^{p^h} - 1)$ . En passant à la limite, on en déduit un isomorphisme  $\text{Mes}_0 \cong \mathcal{O}_L[[T]]$ , la masse de Dirac  $\delta_a$  en  $a \in \mathbf{Z}_p$  s'envoyant sur  $(1+T)^a = \sum_{n \geq 0} \binom{a}{n} T^n$ . Si  $\mu \in \text{Mes}$ , on note  $A_\mu$  son image dans  $\mathcal{O}_L[[T]]\left[\frac{1}{p}\right]$  ; c'est la *transformée d'Amice* de  $\mu$ .

Mais  $\binom{a}{n} = \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \delta_a$ , et donc  $A_{\delta_a} = \sum_{n \geq 0} (\int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \delta_a) T^n$  et, comme l'espace engendré par les masses de Dirac est dense dans  $\text{Mes}$ , la formule ci-dessus est valable pour tout  $\mu$  :

$$A_\mu = \sum_{n \geq 0} \left( \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \mu \right) T^n$$

Or  $T^n$  correspond à  $(\delta_1 - \delta_0)^{*n}$ , et donc les  $(\delta_1 - \delta_0)^{*n}$  forment une base orthonormale de  $\text{Mes}$ . La relation  $\binom{x+1}{n} - \binom{x}{n} = \binom{x}{n-1}$  permet de montrer que la base orthonormale de  $\mathcal{C}$ , duale de la base des  $(\delta_1 - \delta_0)^{*n}$ , est constituée des  $\binom{x}{n}$ . Si  $\phi \in \mathcal{C}$ , on a alors  $\phi = \sum_{n \geq 0} (\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(\delta_1 - \delta_0)^{*n}) \binom{x}{n}$ . Si on définit les *coefficients de Mahler* de  $\phi$  par :

$$a_n(\phi) := \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(\delta_1 - \delta_0)^{*n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \phi(n-k)$$

on obtient le théorème de Mahler [4] :

**Théorème 1.** — (Mahler) *Si  $\phi \in \mathcal{C}$ , alors  $a_n(\phi) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,  $\phi = \sum_{n \geq 0} a_n(\phi) \binom{x}{n}$  et  $\phi \mapsto (a_n(\phi))_n$  est une isométrie de  $\mathcal{C}$  sur<sup>(1)</sup>  $\ell_0^\infty(\mathbf{N})$ .*

**Exemple 2.** — (i) Si  $v_p(z) > 0$ , alors  $x \mapsto (1+z)^x := \sum_{n \geq 0} z^n \binom{x}{n}$  est un caractère continu de  $\mathbf{Z}_p$ ; ses coefficients de Mahler sont  $(z^n)_n$ .

(ii) Si  $z = \zeta - 1$ , avec  $\zeta \in \mu_{p^\infty}$ , le caractère  $x \mapsto (1+z)^x = \zeta^x$  est localement constant, et les  $x \mapsto \zeta^x$  pour  $\zeta \in \mu_{p^\infty}$  forment une base de l'espace des fonctions localement constantes. Par exemple,  $\mathbf{1}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(x) = \frac{1}{p^n} \sum_{\zeta \in \mu_{p^n}} \zeta^{-i} \zeta^x$ .

**Remarque 3.** — On dispose d'un certain nombre d'actions naturelles sur l'espace de mesures. Par transport de structure, celles-ci induisent des actions sur  $\mathcal{O}_L[[T]]$ .

•  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p \setminus \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$  agit par  $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(ax+b) \mu(x)$ . Si  $\lambda = \begin{pmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu$ , avec  $k \geq 0$  et  $a \in \mathbf{Z}_p^*$ , on a  $A_\lambda = (1+T)^b \varphi^k(\sigma_a(A_\mu))$ , avec

$$(\varphi(F))(T) = F((1+T)^p - 1) \quad \text{et} \quad (\sigma_a(F))(T) = F((1+T)^a - 1)$$

• On définit  $\psi(\mu)$  par  $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \psi(\mu) := \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi(p^{-1}x) \mu$ . Comme  $\mathbf{1}_{p\mathbf{Z}_p}(x) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta \in \mu_p} \zeta^x$ , on a

$$A_{\psi(\mu)} = \psi(A_\mu), \quad \text{avec } (\psi(F))(T) := \varphi^{-1}\left(\frac{1}{p} \sum_{\zeta \in \mu_p} F((1+T)\zeta - 1)\right)$$

Si  $\lambda = \text{Res}_{i+p^h \mathbf{Z}_p} \mu$ , avec  $h \geq 1$  et  $i \in \mathbf{Z}_p$ , on a :

$$A_\lambda = (1+T)^i \varphi^h(\psi^h((1+T)^{-i} A_\mu))$$

Notons que l'action de  $\left( \begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p \setminus \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$  s'étend à  $L[[T]]$  mais que celle de  $\psi$  ne s'étend qu'au sous-anneau des fonctions convergeant sur la boule fermée  $\{z, v_p(z) \geq \frac{1}{p-1}\}$  car  $v_p(\zeta - 1) = \frac{1}{p-1}$  si  $\zeta^p = 1$  et  $\zeta \neq 1$ .

## 2. Le théorème d'Amice

Si  $h \geq 0$ , soit  $\text{LA}^{(h)}$  l'espace des  $\phi : \mathbf{Z}_p \rightarrow L$ , analytiques sur  $i + p^h \mathbf{Z}_p$  pour tout  $i \in \mathbf{Z}_p$  (ou, de manière équivalente, pour  $i \in \{0, 1, \dots, p^h - 1\}$ ). En particulier,  $\text{LA}^{(0)}$  est l'espace des fonctions de la forme  $\phi(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ , avec  $a_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ; muni de la valuation  $v^{(0)}$  définie par  $v^{(0)}(\phi) = \inf_{n \geq 0} v_p(a_n)$ ,  $\text{LA}^{(0)}$  est un banach, et

---

1. Espace des suites d'éléments de  $L$  tendant vers 0.

les  $x^n$ , pour  $n \geq 0$ , en forment une base orthonormale. Comme la matrice de passage des  $n! \binom{x}{n}$  aux  $x^n$  est à coefficients dans  $\mathbf{Z}_p$ , triangulaire avec des 1 sur la diagonale, les  $n! \binom{x}{n}$  forment aussi une base orthonormale de  $\text{LA}^{(0)}$ . Le th. 5 ci-dessous généralise ce résultat à  $\text{LA}^{(h)}$ .

**Exemple 4.** — (i) Si  $v_p(z) > \frac{1}{p-1}$ , alors  $x \mapsto (1+z)^x$  est élément de  $\text{LA}^{(0)}$ .  
(ii) Si  $h \geq 1$  et si  $v_p(z) > \frac{1}{(p-1)p^h}$ , alors  $x \mapsto (1+z)^x$  est élément de  $\text{LA}^{(h)}$ .

*Démonstration.* — On a  $(1+z)^x = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} n! \binom{x}{n}$  et le (i) résulte de ce que les  $n! \binom{x}{n}$  forment une base orthonormale de  $\text{LA}^{(0)}$  et  $v_p\left(\frac{z^n}{n!}\right) \geq (v_p(z) - \frac{1}{p-1})n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Pour prouver le (ii), il suffit de prouver que la restriction de  $x \mapsto (1+a)^x$  est analytique sur  $p^h \mathbf{Z}_p$  (l'analyticité de sa restriction à  $i + p^h \mathbf{Z}_p$  en découle immédiatement). Ceci est équivalent à ce que  $x \mapsto (1+a)^{p^h x}$  soit analytique sur  $\mathbf{Z}_p$ . Or cela suit du (i) et de ce que  $v_p((1+a)^{p^h} - 1) \geq \inf(1, p^h v_p(a)) > \frac{1}{p-1}$  si  $v_p(a) > \frac{1}{(p-1)p^h}$ .  $\square$

Maintenant,  $\phi \in \text{LA}^{(h)}$  s'écrit, de manière unique,  $\phi(x) = \sum_{i=0}^{p^h-1} \mathbf{1}_{i+p^h \mathbf{Z}_p} \phi_i(\frac{x-i}{p^h})$ , avec  $\phi_i \in \text{LA}^{(0)}$ . On en déduit un isomorphisme  $(\text{LA}^{(0)})^{\oplus p^h} \xrightarrow{\sim} \text{LA}^{(h)}$ , et on munit  $\text{LA}^{(h)}$  de la valuation  $v^{(h)}$  telle que cet isomorphisme soit une isométrie. Alors  $\text{LA}^{(h)}$ , muni de  $v^{(h)}$ , est un  $L$ -banach ; notons  $\mathcal{D}^{(h)}$  son  $L$ -dual et notons  $\mathcal{D}_0^{(h)}$  la boule unité de ce  $L$ -smith.

Notre but est de donner une preuve du résultat suivant d'Amice [1, 2], par dualité ; une démonstration directe peut se trouver dans [3].

**Théorème 5.** — (Amice) Les  $\lfloor \frac{n}{p^h} \rfloor! \binom{x}{n}$  forment une base orthonormale de  $\text{LA}^{(h)}$ .

*Démonstration.* — Le résultat est immédiat pour  $h = 0$ , comme expliqué ci-dessus. Si  $h \geq 0$ , soit  $\mathcal{O}_L[T]^{(h)} \subset L[[T]]$  l'ensemble des  $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{T^n}{[n/p^h]!}$ , avec  $a_n \in \mathcal{O}_L$  pour tout  $n$ . Alors  $\mathcal{O}_L[T]^{(h)}$  est un sous-anneau<sup>(3)</sup> de  $L[[T]]$ . Par dualité, l'énoncé du théorème équivaut à ce que  $\mu \mapsto A_\mu$  induise un isomorphisme  $\mathcal{D}_0^{(h)} \cong \mathcal{O}_L[T]^{(h)}$ .

L'isomorphisme  $(\text{LA}^{(0)})^{\oplus p^h} \xrightarrow{\sim} \text{LA}^{(h)}$  induit, par dualité, une décomposition de  $A_\mu$  pour  $\mu \in \mathcal{D}^{(h)}$ , de manière unique, sous la forme

$$A_\mu = \sum_{i=0}^{p^h-1} (1+T)^i \varphi^h(A_{\mu_i}), \quad \text{avec } \mu_i \in \mathcal{D}^{(0)}.$$

Il résulte du lemme 7 que  $A_{\mu_i} = \psi^h((1+T)^{-i} A_\mu)$ , et on cherche à prouver que

$$A_\mu \in \mathcal{O}_L[T]^{(h)} \iff A_{\mu_i} \in \mathcal{O}_L[T]^{(0)} \text{ pour tout } i.$$

---

2. Si  $N = a_0 + pa_1 + \dots + p^r a_r$  avec  $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ , on a  $v_p(N!) = \frac{N-S(N)}{p-1}$ , avec  $S(N) := a_0 + a_1 + \dots + a_r$ .

3. Complété de l'anneau des puissances divisées relativement à l'idéal  $(p, T^{p^h})$  de  $\mathcal{O}_L[T]$ .

Pour cela, il suffit d'utiliser le lemme 6 ci-dessous, pour  $0 \leq k \leq h - 1$ .  $\square$

**Lemme 6.** — Si  $k \geq 0$ , on a

$$\varphi(\mathcal{O}_L[T]^{(k)}) \subset \mathcal{O}_L[T]^{(k+1)} \quad \text{et} \quad \psi(\mathcal{O}_L[T]^{(k+1)}) \subset \mathcal{O}_L[T]^{(k)}$$

*Démonstration.* —  $\mathcal{O}_L[T]^{(k)}$  est le complété de l'enveloppe à puissance divisée de  $\mathcal{O}_L[T]$  relativement à l'idéal  $(T^{p^k})$  ou à l'idéal  $(p, T^{p^k})$  (car  $p$  a des puissances divisées) ou encore  $(\varphi^k(T))$  (car  $\varphi^k(T) - T^{p^k} \in (p)$ ).

Soit  $s_r := v_p(p^r!) = \frac{p^r - 1}{p - 1}$ ; on a  $s_{r+1} = ps_r + 1$ , et  $v_p(m!) = \sum_{j \geq 0} i_j(m)s_j$  si  $m = \sum_{j \geq 0} i_j(m)p^j$  est le développement de  $m$  en base  $p$ .

On écrit  $n \geq 0$  sous la forme  $p^k b(n) + r(n)$ , avec  $b(n) = \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$  et  $0 \leq r(n) \leq p^k - 1$ . Alors

$$(a_n)_{n \geq 0} \mapsto \sum_{n \geq 0} \left( a_n T^{r(n)} \cdot \prod_{j \geq 0} \left( \frac{\varphi^k(T)^{p^j}}{p^{s_j}} \right)^{i_j(b(n))} \right)$$

est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_L$ -modules<sup>(4)</sup> de  $\mathcal{O}_L^\mathbf{N}$  sur  $\mathcal{O}_L[T]^{(k)}$ . Le résultat s'en déduit facilement (en utilisant le fait que  $\psi(x\varphi(y)) = \psi(x)y$  pour le cas de  $\psi$ ).  $\square$

**Lemme 7.** — Soit  $r \leq \frac{p}{p-1}$ .

(i) Si  $F \in \mathcal{O}(p^{-1}r)$ , il existe  $\psi(F) \in \mathcal{O}(r)$ , unique, telle que

$$\frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} F((1+T)\zeta - 1) = \psi(F)((1+T)^p - 1) \quad [= (\varphi(\psi(F)))(T)]$$

(ii) Si  $F \in \mathcal{O}(p^{-1}r)$ , il existe  $G_i \in \mathcal{O}(r)$  pour  $0 \leq i \leq p-1$ , uniques, tels que  $F = \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(G_i)$ , et on a  $G_i = \psi((1+T)^{-i}F)$ .

(iii) Si  $F \in \mathcal{O}(p^{-h}r)$  avec  $h \geq 1$ , et si  $G_i \in \mathcal{O}(r)$  pour  $0 \leq i \leq p^h - 1$  sont telles que  $F = \sum_{i=0}^{p^h-1} (1+T)^i \varphi^h(G_i)$ , alors  $G_i = \psi^h((1+T)^{-i}F)$ .

*Démonstration.* —  $x \mapsto (1+x)^p - 1$  fait de  $B(0, p^{-1}r)$  un revêtement étale de  $B(0, r)$ , de groupe de Galois  $\mu_p$ , l'action de  $\zeta \in \mu_p$  étant  $z \mapsto (1+z)\zeta - 1$ . D'où le (i).

Pour le (ii), l'unicité des  $G_i$  et la formule découlent du fait que  $(1+T)^i$  est vecteur propre de  $\mu_p$  pour le caractère  $\zeta \mapsto \zeta^i$ .

Enfin, le (iii) se déduit du (ii) par une récurrence facile.  $\square$

## Références

- [1] Y. AMICE, Interpolation  $p$ -adique, Bull. SMF **92** (1964), 117–180. 3
- [2] Y. AMICE, Duals. Proc. of a conf. on  $p$ -adic analysis (Nijmegen 1978), 1-15, Nijmegen, Math. Institut Katholieke Univ., 1978. 3
- [3] P. COLMEZ, Fonctions d'une variable  $p$ -adique, Astérisque **330** (2010), 13–59. 3

---

4. La matrice de passage des  $\frac{T^n}{b(n)!}$  aux  $T^{r(n)} \cdot \prod_{j \geq 0} (p^{-s_j} T^{p^{k+j}})^{i_j(b(n))}$  est diagonale à coefficients diagonaux inversibles dans  $\mathbf{Z}_p$  d'après la formule ci-dessus pour  $v_p(n!)$ ; la matrice de passage des  $T^{r(n)} \cdot \prod_{j \geq 0} (p^{-s_j} T^{p^{k+j}})^{i_j(b(n))}$  aux  $T^{r(n)} \cdot \prod_{j \geq 0} (p^{-s_j} \varphi^k(T)^{p^j})^{i_j(b(n))}$  est triangulaire à coefficients dans  $\mathbf{Z}_p$ , avec des 1 sur la diagonale.

- [4] K. MAHLER, An interpolation series for continuous functions of a  $p$ -adic variable, J. reine angew. Math. **199** (1958), 23–34. 2

---

PIERRE COLMEZ, C.N.R.S., IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France  
*E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr*

SHANWEN WANG, School of mathematics, Renmin University of China, 59 ZhongGuanCun Street,  
100872 Beijing, P.R. China • *E-mail : s\_wang@ruc.edu.cn*