2024-2025 学年第 1 学期《高等数学 I(1)》

期末模拟试卷 1 参考答案

一、选择与填空（每题 3 分，共 30 分）

1. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续是 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微的（ B ）条件

A. 充分　　B. 必要　　C. 充要　　D. 没有关系

2. 当$x\to 0$时，$f(x)=3(1-\sqrt[3]{1-x})$是x的（ D ）.

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小，但不是等价无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

3. 对于函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的水平渐近线和铅直渐近线分别为（ A ）

A. 水平渐近线为 $y=0$，铅直渐近线为 $x=\pm\sqrt{2}$

B. 水平渐近线为 $y=0$，铅直渐近线为 $x=\sqrt{2}$

C. 水平渐近线为 $y=0$，铅直渐近线为 $x=-\sqrt{2}$

D. 水平渐近线不存在，铅直渐近线为 $x=\pm\sqrt{2}$

4. 下列广义积分收敛的是（ D ）

A. $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$　　B. $\int_0^1\dfrac{1}{x^2}dx$　　C. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x+1}dx$　　D. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx$

5. 微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的特解为（ A ）.

A. $y=xe^{-2x}$　　B. $y=xe^{2x}$　　C. $y=x^2e^x$　　D. $y=x^2e^{-x}$

6. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{2x+100}=$ ______ e^{-4} ________.

7. 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为____-2______.

8. 微分方程 $\sin y dx-\cos y dy=e^{-x}\cos y dy$ 满足 $y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{6}$ 的特解为 $4\sin y=1+e^x$__.

9. 曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1\le x\le 3$ 的一段弧的长度 $s=$__ $2\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}$ ___.

10. 设函数$f(x)=\begin{cases} e^{kx}, & x>2 \\ x^2+1, & x\le 2 \end{cases}$ 在$x=2$处连续，则$k=$ $\underline{\ \frac{\ln 5}{2}\ }$.

二、解答题(每题 6 分，共 60 分)

1. 计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x\left(\frac{1}{t}+1\right)\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x\left(\frac{1}{t}+1\right)\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x\left(\frac{1}{t}+1\right)\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+1}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+1=1.$

2. 求定积分$\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{x^2+2x+2}dx.$

解 :

方法一：$\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{x^2+2x+2}dx=\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{(x+1)^2+1}dx=\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)$

$=arctan(x+1)\Big|_{-2}^{0}=\dfrac{\pi}{2}.$

方法二：令$x+1=tan\,t$,则$dx=sec^2\,tdt$,当$x=-2$时,$t=-\dfrac{\pi}{4}$，当$x=0$时,$t=\dfrac{\pi}{4}$，于是

$\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{(x+1)^2+1}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{1+tan^2\,t}\cdot sec^2\,tdt=\dfrac{\pi}{2}$

3. 求定积分$\int_{1}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$

解:

$$\begin{aligned}&\text{令}x=2\sin t,\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\cdot 2\cos tdt=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt\\&=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi}{3}+\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).\end{aligned}$$

4. 求不定积分$\int\tan^3 x\sec xdx$

解:

$$\begin{aligned}&\int\tan^3 x\sec xdx=\int\tan^2 xd(\sec x)\\&=\int(\sec^2 x-1)d(\sec x)\\&=\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C\end{aligned}$$

5. 设方程$\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$确定隐函数$y=y(x)$, 求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ 以及$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$

解：从原方程可知当$x=0$时，$y=1$；方程$\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$两边对$x$求导得$\mathrm{e}^y y'+y+xy'=0$，将 $x=0, y=1$ 代入可得 $y'|_{x=0}=-\frac{1}{\mathrm{e}}$；方程 $\mathrm{e}^y y'+y+xy'=0$ 两边再对 x 求导得 $\mathrm{e}^y y'^2+\mathrm{e}^y y''+y'+y'+xy''=0$，将$x=0, y=1, y'=-\frac{1}{\mathrm{e}}$代入可得$y''|_{x=0}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

6. 设$\begin{cases} x=\mathrm{e}^{2t}-1, \\ y=2\mathrm{e}^t, \end{cases}$，其中$t$为参数，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$x'(t)=2\mathrm{e}^{2t}$，$y'(t)=2\mathrm{e}^t$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\mathrm{e}^{-t}$，$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\mathrm{e}^{-t}\right)'}{x'(t)}=\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{2\mathrm{e}^{2t}}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$

7. 求曲线$\mathrm{y}=\frac{1}{x}$与直线$\mathrm{y}=x$及$x=2$所围平面图形的面积。

解：取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为$[1,2]$，相应于$[1,2]$上的任一小区间$[x, x+dx]$的窄条面积近似于高为$x-\frac{1}{x}$、底为dx的窄矩形面积，因此有

$$A=\int_1^2 (x-\frac{1}{x})dx=[\frac{1}{2}x^2-\ln x]_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

8. 求 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^5}$ 的凹凸区间和拐点.

答案:凸区间$\left[0,\frac{1}{4}\right]$，凹区间$\left(-\infty,0\right],\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$，拐点$\left(0,0\right),\left(\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^5}\right)$.

难易程度：易

答案解析：定义域为$\left(-\infty,+\infty\right)$，且 $f(x)=x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{5}{3}}, f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$. 因此 $f''(x)=\frac{40}{9}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}(4x-1)$.进而可能的拐点：$x_1=0, x_2=\frac{1}{4}$.由下表即得到答案:

x	$\left(-\infty,0\right)$	0	$\left(0,\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$
$f''(x)$	+		-	0	+
$f(x)$	凹	拐点	凸	拐点	凹

9. 求微分方程$xy'+y=\sin x$满足初始条件$y|_{x=\pi}=0$的特解。

将方程写成标准形式

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$$

这是一阶非齐次线性微分方程，其中$P(x) = \frac{1}{x}$，$Q(x) = \frac{\sin x}{x}$，

根据通解公式，得

解：
$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x) e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$$
$$= e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$
$$= e^{-\ln x}\left(\int \frac{\sin x}{x} \bullet e^{\ln x}\mathrm{d}x + C\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(-\cos x + C\right)$$

10. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2, x \le 0 \\ x^2 + 1, 0 < x < 1, \\ \frac{3}{x} - 1, x \ge 1, \end{cases}$ 在 $x = a$ 点处连续，但不可导，求 a 的值.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1$$
$\therefore f(x)$在$x = 0$处不连续

$\therefore a \ne 0$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}\left(\frac{3}{x} - 1\right) = 2$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}(x^2 + 1) = 2$$
$\therefore f(x)$在$x = 1$处连续

$$f_+'(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{3}{x} - 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{3(1 - x)}{x(x - 1)} = -3$$
$$f_-'(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2$$
$$f_+'(1) \ne f_-'(1)$$

解：$\therefore f(x)$在$x = 1$处不可导

$\therefore a = 1$

三、（10 分） 设 $f(x)$ 在$\left[0,1\right]$上连续，在$\left(0,1\right)$内可导，且 $f(1)=1, f(0)=0$，则在$\left(0,1\right)$内至少存在一点ξ，使$e^{\xi-1}[f(\xi)+f'(\xi)]=1$.

证明：设辅助函数$F(x)=f(x)e^{x^3}$

则$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$F(a)=F(b)=0$

根据罗尔中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=[f'(\xi)+3\xi^2 f(\xi)]e^{\xi^3}=0$

即 $f'(\xi)+3\xi^2 f(\xi)=0$.