无锡学院　试卷

2024 — 2025 学年 第 2 学期

高等数学Ⅱ (2) 课程期中试卷

注意：1、本课程为 必修 （注明必修或选修）， 学时为 96 ，学分为 6

2、考试类型 闭卷 （注明开、闭卷）

3、本试卷共 4 页；考试时间 90 分钟； 出卷时间： 2025 年 4 月

4、姓名、学号等必须写在指定地方； 考试时间： 2025 年 5 月

5、本考卷适用专业年级： 2024 级文科各专业

题　号	一	二	三	四	五	总　分
得　分						
阅卷人						

（以上内容为教师填写）

专业＿＿＿＿＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 教师＿＿＿＿＿

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、选择题（每题 4 分，共 72 分）

1. 已知 $y=\mathrm{e}^{-2x}$ 是微分方程 $y''+2y'+ay=2\mathrm{e}^{-2x}$ 的一个解，则 a 的值为(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. 2

2. 过点 $(0,2)$ 且满足关系式 $y'=y$ 的曲线方程为(　　).

A. $y=2\mathrm{e}^{-x}$　　B. $y=\ln|x|$　　C. $y=-\ln|x|$　　D. $y=2\mathrm{e}^{x}$

3. 微分方程 $y'=3x^2y$ 的通解为(　　).

A. $y=C\mathrm{e}^{x^3}$　　B. $y=\mathrm{e}^{x^3}+C$　　C. $y=C\mathrm{e}^{x^2}$　　D. $y=\mathrm{e}^{x^2}+C$

4. 下列说法错误的是(　　).

A. 设 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=x\mathrm{e}^x$ 是二阶齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解，则 $y=y_1-y_2$ 也是该齐次线性微分方程的解.

B. 设 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=2\mathrm{e}^x$ 是二阶齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是该齐次线性微分方程的通解，其中 C_1,C_2 是任意常数.

C. 设 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=x\mathrm{e}^x$ 是二阶齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是该齐次线性微分方程的通解，其中 C_1,C_2 是任意常数.

D. 设 $y_1=\mathrm{e}^x, y_2=x\mathrm{e}^x$ 是二阶齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解，则 $y=y_1+ky_2$（其中 k 为任意实数）也是该齐次线性微分方程的解.

5. 微分方程 $y'''=\sin x$ 的通解为(　　).

A. $y=\cos x+C_1x^2+C_2x+C_3$　　B. $y=-\sin x+\dfrac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3$

C. $y=-\cos x+C$　　D. $y=\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$

6. 微分方程 $y''+4y'+5y=0$ 的通解为(　　).

A. $y=\mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$　　B. $y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

C. $y=\mathrm{e}^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$　　D. $y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

7. 以 $y=\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}\left(C_1+C_2x\right)$ 为通解的二阶常系数线性齐次微分方程为(　　).

A. $4y''-20y'+25y=0$　　B. $y''-20y'+25y=0$

C. $4y''+20y'+25y=0$　　D. $y''+20y'+25y=0$

8. 微分方程 $y''+3y'-10y=0$ 的通解为(　　).

A. $y=C_1\mathrm{e}^{-5x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$　　B. $y=C_1\mathrm{e}^{-5x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$

C. $y=C_1\mathrm{e}^{5x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$　　D. $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$

9. 微分方程 $y''+3y'-4y=x^2\mathrm{e}^x$ 具有特解形式(　　).

A. $y=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x$　　B. $y=(ax+b)\mathrm{e}^x$

C. $y=x(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^x$　　D. $y=x(ax+b)\mathrm{e}^x$

10. 下列关于二元函数的结论错误的是(　　).

A. 设函数 $f\left(x,y\right)=xy+\dfrac{x}{y}$，则 $f\left(x+y,1\right)=2(x+y)$.

B. 设函数 $f\left(x+y,x-y\right)=x^2-y^2$，则 $f\left(x,y\right)=xy$.

C. 函数 $f\left(x,y\right)=\sqrt{4-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 的定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2\le 4\}$.

D. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

11. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在，则 $f_y(x_0,y_0)=$(　　).

A. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+2\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$　　B. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)-f(x_0,y_0-\Delta y)}{\Delta y}$

C. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$　　D. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0-\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

12. 下列结论正确的是(　　).

A. 函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导存在，则 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

B. 函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

C. 函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导存在，则 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

D. 函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则 $z=f\left(x,y\right)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导存在.

13. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)}\dfrac{1-\cos(xy)}{xy^2}=($　　　$)$.

A.0　　　　　　　B. -2　　　　　　　C. 2　　　　　　　D. 1

14. 设 $z=uv, u=x+y, v=x-y$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=($　　　$)$.

A. x　　　　　　　B. $2x$　　　　　　　C. $-y$　　　　　　　D. $-2y$

15. 设 $z=\mathrm{e}^{xy}$，则全微分 $\mathrm{d}z=($　　　$)$.

A. $(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)\mathrm{e}^{xy}$　　　　　　　B. $y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x$

C. $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$　　　　　　　D. $(x+y)\mathrm{e}^{xy}$

16. 设 $z=x\ln(xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=($　　　$)$.

A. $\dfrac{1}{xy}$　　　　　　　B. x　　　　　　　C. $-\dfrac{x}{y^2}$　　　　　　　D. $\dfrac{1}{y}$

17. 设积分区域 $D=\left\{(x,y)\middle|4\le x^2+y^2\le 6, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，则 $\iint\limits_D 2\mathrm{d}\sigma=($　　　$)$.

A. 2π　　　　　　　B. π　　　　　　　C. $\dfrac{1}{2}\pi$　　　　　　　D. 4π

18. 设积分区域 D 是由 x 轴，y 轴以及直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域，$I_1=\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$，

$I_2=\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，则 I_1, I_2 的大小关系是(　　　).

A. $I_1=I_2$　　　　　　　B. $I_1\ge I_2$　　　　　　　C. $I_1\le I_2$　　　　　　　D. 不能确定

二、（7 分）求微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}+y=x^3$ 的通解.

三、（7 分）求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+3$ 的极值.

四、（7 分）设函数 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x+y^2+z^3-xy=2z$ 所确定的隐函数，求 $\mathrm{d}z$.

五、（7 分）求微分方程 $2y''+y'-y=4\mathrm{e}^x$ 的通解.

无锡学院

2024 — 2025 学年 第 2 学期

高等数学Ⅱ (2) 课程期中试卷评分标准及参考答案

一、选择题（每题 4 分，共 72 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
选项	D	D	A	B	A	A	A	B	C
题号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
选项	D	B	B	C	D	A	D	B	B

二、（7 分）

解： 原方程可化为 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=x^2$

由方程可得 $P(x)=\dfrac{1}{x},Q(x)=x^2$ ………………… 2 分

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

$$=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int x^2e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int x^2\cdot x dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{4}x^3+\frac{C}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3分$$

三、（7 分）

解： 由方程组 $\begin{cases}f_x(x,y)=3x^2-8x+2y=0\\ f_y(x,y)=2x-2y=0\end{cases}$ 可得驻点 $(0,0),(2,2)$. ………. 3 分

令 $A=f_{xx}(x,y)=6x-8$，$B=f_{xy}(x,y)=2$，$C=f_{yy}(x,y)=-2$，从而

在点 $(0,0)$ 处，$A=-8$，$B=2$，$C=-2$，$AC-B^2=12>0$ 且 $A=-8<0$，所以函数

$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值，极大值为 $f(0,0)=3$. ………………… 2 分

在点 $(2,2)$ 处，$A=4$，$B=2$，$C=-2$，$AC-B^2=-12<0$，所以点 $(2,2)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点. 2分

四、（7分）

解：设$F(x,y,z)=x+y^2+z^3-xy-2z$

$F_x=1-y, F_y=2y-x, F_z=3z^2-2, F_z\neq 0$时 3分

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{y-1}{3z^2-2}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{x-2y}{3z^2-2}\cdots\cdots\cdots 2分$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{y-1}{3z^2-2}\mathrm{d}x+\frac{x-2y}{3z^2-2}\mathrm{d}y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

五、（7分）

解：非齐次微分方程的特征方程为$2r^2+r-1=0$，则$r_1=\dfrac{1}{2}, r_2=-1$，

而$\lambda=1$不是特征方程的根，.............................3分

故设非齐次方程的特解为$y^*=Ce^x$ 2分

将特解 $y^*=Ce^x$ 带入原方程，解得$C=2$

故微分方程的通解为

$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-x}+2e^x$ 2分