无锡学院　试卷

2023 — 2024 学年 第 1 学期

高等数学Ⅰ（1） 课程试卷

试卷类型 B (注明 A、B 卷)　　**考试类型 闭卷（注明开、闭卷）**

注意：1、本课程为 必修（注明必修或选修），学时为 96，学分为 6

2、本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟；　　出卷时间：2023 年 12 月

3、姓名、学号等必须写在指定地方；　　考试时间：2024 年 1 月 10 日

4、本考卷适用专业年级：23 级理工科各专业

题　号	一	二	三	四	五	六	总　分
得　分							
阅卷人							

（以上内容为教师填写）

专业________　年级________　班级________

学号________　姓名________　教师________

请仔细阅读以下内容：

1、 考生必须遵守考试纪律。
2、 所有考试材料不得带离考场。
3、 考生进入考场后，须将学生证或身份证放在座位的左上角。
4、 考场内不许抽烟、吃食物、喝饮料。
5、 考生不得将书籍、作业、笔记、草稿纸带入考场，主考教师允许带入的除外。
6、 考试过程中，不允许考生使用通讯工具。
7、 开考 15 分钟后不允许考生进入考场，考试进行 30 分钟后方可离场。
8、 考生之间不得进行任何形式的信息交流。
9、 除非被允许，否则考生交卷后才能离开座位。
10、考试违纪或作弊的同学将被请出考场，其违纪或作弊行为将上报学院。

本人郑重承诺：我已阅读上述 10 项规定，如果考试是违反了上述 10 项规定，本人将自愿接受学校按照有关规定所进行的处理。上面姓名栏所填姓名即表示本人已阅读本框的内容并签名。

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

（1）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x-1}{x^3+3x^2+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin cx}{x}$，则 $c=$ _________ $\underline{2}$ _______________.

（2）设 $f(x)=\arcsin\dfrac{1}{1+x}$，则 $f'(1)=$ _________ $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ _______________.

（3）函数 $y=\sin 2x$ 的微分 $\mathrm{d}y=$ __________ $\underline{2\cos 2x\mathrm{d}x}$ ______________.

（4）二阶方程 $y''+6y'+9y=0$ 的通解为 $y=$ ________ $\underline{\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^{-3x}}$ ________________.

（5）定积分 $\int_{-2}^{2}\left(1+\sin x\right)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=$ __________ $\underline{2\pi}$ _______________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

（1）设 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$，则点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的（　A　）.

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷型断点　　D. 连续点

（2）关于函数 $y=\ln(2+x^2)$，下列说法正确的是（　C　）.

A. 有极大值点 $x=0$　　B. 有增区间 $\left(-\infty,0\right)$

C. 有凹区间 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$　　D. 没有拐点

（3）不定积分 $\int\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=$（　B　）.

A. $\ln(\mathrm{e}^x-1)+C$　　B. $2\ln(\mathrm{e}^x+1)-x+C$

C. $\ln(\mathrm{e}^x+1)+C$　　D. $x-2\ln(\mathrm{e}^x+1)+C$

（4）计算圆 $r=a\cos\theta$ 所围图形的面积 S，下列表达式正确的是（　C　）.

A. $S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\theta\mathrm{d}\theta$　　B. $S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(a\cos\theta\right)^2\mathrm{d}\theta$

C. $S=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(a\cos\theta\right)^2\mathrm{d}\theta$　　D. $S=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(a\cos\theta\right)^2\mathrm{d}\theta$

（5）反常积分 $\int_{-2}^{2}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=$（　D　）.

A. 0　　B. $2\ln 2$　　C. ∞　　D. 发散

三、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln x$

解： $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}$ ……………………………………（4 分）

$=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$. ……………………………………（2 分）

或者： $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}$ ……………………（4 分）

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{\sin^2 x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2}{x}\right)=0$. ……………………………（2 分）

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x-\sin x}$.

解：利用洛必达法则和等价无穷小替换，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ ……………………………………（3 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$. ……………………………………（3 分）

（3）求不定积分 $\int\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解： $\int\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\cos\sqrt{x}\mathrm{d}\sqrt{x}$ ……………………………………（3 分）

$=2\sin\sqrt{x}+C$ ……………………………………（3 分）

或者：令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$， ……………………………（2 分）

于是$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{\cos t}{t}2t\mathrm{d}t=2\int \cos t\mathrm{d}t=2\sin t+C$

$=2\sin\sqrt{x}+C$. ……………………………………………………………………（4 分）

（4）求定积分$\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$.

解：令$t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$，则$x=\ln(1+t^2)$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}$，

当$x=0$时，$t=0$，当$x=\ln 2$时，$t=1$， ………………………………………………………（2 分）

于是$\int_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 t\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$ ……………………………（2 分）

$=2\left(t-\arctan t\right)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}$. ……………………………………………………（2 分）

四、求解下列各题（每小题 8 分，共 32 分）

（1）求方程$y'+y=x$的通解.

解：这是一阶线性方程，其中$P(x)=1$，$Q(x)=x$，

通解$y=\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$=\left[\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-x}$ ……………………………………………………………（4 分）

$=\left[x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-x}$ ……………………………………………………（2 分）

$=\left[x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C\right]\mathrm{e}^{-x}=x-1+C\mathrm{e}^{-x}$ ………………………………………（2 分）

（2）设$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x<0,\\ \mathrm{e}^{2x}, & x\ge 0,\end{cases}$ 求其导函数$f'(x)$.

解：当$x<0$时，$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$， ……………………………（2 分）

当$x>0$时，$f'(x)=\left(\mathrm{e}^{2x}\right)'=2\mathrm{e}^{2x}$， ………………………………………………………（2 分）

当$x=0$时，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x}=2,$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故 $f'(0)$ 不存在.

综上， $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x<0,\\ 2e^{2x}, & x>0.\end{cases}$ ……………………………………………………（4 分）

（3）设 $\begin{cases}x=3t^2+2t,\\ e^y\sin t-y^3+1=0,\end{cases}$ ，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解： $\dfrac{dx}{dt}=6t+2$ ， $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=2$ ， ……………………………………………………（2 分）

方程 $e^y\sin t-y^3+1=0$ 两边对 t 求导得 $e^y\dfrac{dy}{dt}\sin t+e^y\cos t-3y^2\dfrac{dy}{dt}=0$ ， ………（2 分）

当 $t=0$ 时 $y=1$，代入上式得 $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\dfrac{e}{3}$ ， ……………………………………………（2 分）

因此 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\dfrac{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}}{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}}=\dfrac{e}{6}$. ……………………………………………………（2 分）

（4）设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$ ，求 $f'(x)$ 以及 $\int_0^\pi f(x)dx$.

解： $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\pi-x}$ ， ……………………………………………………………（2 分）

利用分部积分， $\int_0^\pi f(x)dx=xf(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi xf'(x)dx$ ……………………………（3 分）

$$=\pi f(\pi)-\int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}dx=\pi\int_0^\pi\frac{\sin t}{\pi-t}dt-\int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}dx=\pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{\pi-x}dx-\int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}dx$$

$=\int_0^\pi\dfrac{(\pi-x)\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^\pi\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^\pi=2$. ………………………………………（3 分）

五、（本题共 8 分）设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，

（1）求切点坐标和切线方程；

（2）求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1）设切点为 $\left(x_0,\sqrt{x_0-1}\right)$，则切线斜率 $k=y'\big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}$，

切线方程为 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x$， ……………………………………………………………（2 分）

切点在切线上，有 $\sqrt{x_0-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x_0$，解得 $x_0=2$，

因此切点坐标为 $(2,1)$，切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$. ……………………………………（2 分）

（2）由旋转体体积公式知

$V=\int_0^2\pi\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2\mathrm{d}x-\int_1^2\pi\left(\sqrt{x-1}\right)^2\mathrm{d}x$ ……………………………………………（2 分）

$=\dfrac{1}{12}\pi x^3\Big|_0^2-\pi\dfrac{1}{2}(x-1)^2\Big|_1^2=\dfrac{\pi}{6}$. ……………………………………………………（2 分）

六、（本题共 6 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$，证明对于任意正整数 n，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{nf(\xi)}{\xi}$.

证：令 $g(x)=x^n f(x)$， ……………………………………………………………………（4 分）

则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $g(0)=0$，$g(1)=f(1)=0$，

由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $g'(\xi)=0$，即 $n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$，

由 $\xi>0$ 得 $f'(\xi)=-\dfrac{nf(\xi)}{\xi}$. ……………………………………………………………（2 分）