2024-2025 学年第 1 学期《高等数学 I(1)》

期末模拟试卷 1

一、选择与填空（每题 3 分，共 30 分）

1. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续是 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微的（　）条件

A. 充分　　B. 必要　　C. 充要　　D. 没有关系

2. 当$x\to 0$时，$f(x)=3(1-\sqrt[3]{1-x})$是x的（　　）.

A. 高阶无穷小　　B. 同阶无穷小，但不是等价无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

3. 对于函数 $f\left(x\right)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 的水平渐近线和铅直渐近线分别为（　）

A. 水平渐近线为 $y=0$，铅直渐近线为 $x=\pm\sqrt{2}$

B. 水平渐近线为 $y=0$，铅直渐近线为 $x=\sqrt{2}$

C. 水平渐近线为 $y=0$，铅直渐近线为 $x=-\sqrt{2}$

D. 水平渐近线不存在，铅直渐近线为 $x=\pm\sqrt{2}$

4. 下列广义积分收敛的是（　）

A. $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$　　B. $\int_0^1\dfrac{1}{x^2}dx$　　C. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x+1}dx$　　D. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx$

5. 微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$的特解为（　　）.

A. $y=xe^{-2x}$　　B. $y=xe^{2x}$　　C. $y=x^2e^{x}$　　D. $y=x^2e^{-x}$

6. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{2x+100}=$_______________.

7. 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为___________.

8. 微分方程 $\sin ydx-\cos ydy=e^{-x}\cos ydy$ 满足 $y\big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{6}$ 的特解为_______________.

9. 曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1\le x\le 3$ 的一段弧的长度 $s=$____________.

10. 设函数$f(x)=\begin{cases}e^{kx}, & x>2\\ x^2+1, & x\le 2\end{cases}$ 在$x=2$处连续，则$k=$____________.

二、解答题(每题 6 分，共 60 分)

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x\left(\frac{1}{t}+1\right)\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

2. 求定积分 $\int_{-2}^{0}\dfrac{1}{x^2+2x+2}dx$.

3. 求定积分 $\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

4. 求不定积分 $\int\tan^3 x\sec x dx$

5. 设方程 $e^y + xy = e$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 以及 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

6. 设 $\begin{cases} x = e^{2t} - 1, \\ y = 2e^t, \end{cases}$ ，其中 t 为参数，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

7. 求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 及 $x = 2$ 所围平面图形的面积.

8. 求 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^5}$ 的凹凸区间和拐点.

9. 求微分方程 $xy' + y = \sin x$ 满足初始条件 $y|_{x=\pi} = 0$ 的特解。

10. 若 $f(x)=\begin{cases} x^2, x \le 0 \\ x^2+1, 0<x<1, \\ \dfrac{3}{x}-1, x \ge 1, \end{cases}$ 在 $x=a$ 点处连续，但不可导，求 a 的值.

三、（10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明:

至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)+3\xi^2 f(\xi)=0$.