无锡学院 2023-2024 学年第一学期 高等数学 I (1)

课程试卷参考答案与评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分） $y=1,\ e^2,\ (1,-3/2),\ 0<q<1,\ y=-3+Cx$

1. 函数 $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$ 的图形的水平渐近线的方程为 $\underline{\quad y=1 \quad}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\cot^2 x}=\underline{\quad e^2 \quad}$.

3. 曲线 $y=x^2(\ln x-\dfrac{3}{2})$ 的拐点坐标为 $\underline{\quad (1,-3/2) \quad}$.

4. 若反常积分 $\int_a^b \dfrac{1}{(x-a)^q}dx,(q>0)$ 是收敛的，则 q 的取值范围是 $\underline{\quad 0<q<1 \quad}$.

5. 微分方程 $xy'-y=3$ 的通解为 $\underline{\quad y=-3+Cx \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分） D C A C B

1. 下列各对函数中，表示同一个函数的是（ D ）.

(A) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 和 $y=x-1$ (B) $y=\ln(x^2)$ 和 $y=2\ln x$

(C) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 和 $y=\sin x$ (D) $y=|x|$ 和 $y=\sqrt{x^2}$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0 \qquad\quad x=0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ C ）.

(A) 不连续 (B) 连续但不可导

(C) 连续且可导 (D) 可导但不连续

3. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{2h}=$（ A ）.

(A) $\dfrac{3}{2}f'(x_0)$ (B) $\dfrac{1}{2}f'(x_0)$ (C) $2f'(x_0)$ (D) $f'(x_0)$

4. 二阶常微分方程 $y''-3y'+2y=0$ 通解的形式正确的是（ C ）.

（A） $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$ （B） $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$

（C） $y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$ （D） $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$

5. 设 $I_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}dx$，$I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\tan x}dx$，$I_3=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}dx$，则 I_1,I_2,I_3 的大小关系为（ B ）.

(A) $I_1>I_2>I_3$ (B) $I_2>I_3>I_1$ (C) $I_3>I_2>I_1$ (D) $I_2>I_1>I_3$

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1+x)-(1-e^{-x})}{x(1-e^{-x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x-(1-e^{-x})}{x^2}\cdots\cdots3分$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x+1-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\cdots3分$$

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y-xy=e$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 方程两边分别对 x 求导，得

$$e^y\frac{dy}{dx}-y-x\frac{dy}{dx}=0\cdots\cdots\cdots4分$$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{e^y-x}\cdots\cdots\cdots2分$

3. 计算不定积分 $\int\dfrac{1}{x^2-2x+6}dx.$

解 $\int\dfrac{1}{x^2-2x+6}dx=\int\dfrac{1}{(x-1)^2+(\sqrt{5})^2}dx\cdots\cdots\cdots3分$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C\cdots\cdots\cdots3分$$

4. 计算定积分 $\int_0^1\arctan\sqrt{x}dx$.

解 令 $t=\sqrt{x}$, 则 $x=t^2$, $dx=2tdt$,

$$\int_0^1\arctan\sqrt{x}dx=\int_0^1\arctan t\ dt^2=[t^2\arctan t]_0^1-\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}\ dt\ \cdots\cdots\cdots3分$$

$$=\frac{\pi}{4}-[t-\arctan t]_0^1=\frac{\pi}{4}-(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}-1\ \cdots\cdots\cdots3分$$

5. 已知 $y_1 = xe^x + e^x$，$y_2 = xe^x + e^{3x}$，$y_3 = xe^x + e^x + e^{3x}$ 是某二阶非齐次线性微分方程的 3 个特解，求此方程的通解，并写出此微分方程.

解 由于 $y_3 - y_1 = e^{3x}$， $y_3 - y_2 = e^x$ 是对应的齐次方程的解， xe^x 是此方程的特解，故其通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + xe^x \cdots\cdots\cdots 3$分

设所求微分方程为

$$y'' - 4y' + 3y = h(x),$$

将特解 xe^x 代入上式，得 $h(x) = -2e^x$，从而所求方程为

$$y'' - 4y' + 3y = -2e^x. \quad \cdots\cdots\cdots 3分$$

四、解答题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 设参数方程为 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = -a\cos t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}; \cdots\cdots\cdots 4$分

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\cos t(1-\cos t) - \sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2} \cdots\cdots\cdots 4分$$

2. 计算定积分 $\int_{-2}^{2}(\dfrac{x^2\sin x}{1+x^4} + x^2\sqrt{4-x^2})\,dx$.

解 $\int_{-2}^{2}(\dfrac{x^2\sin x}{1+x^4} + x^2\sqrt{4-x^2})\,dx = 0 + 2\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx. \cdots\cdots\cdots 3$分

令 $x = 2\sin t (0 < t < \dfrac{\pi}{2})$，则 $dx = 2\cos t dt$， $x = 0$ 时， $t = 0$； $x = 2$ 时， $t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\therefore \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cos^2 t\,dt \cdots\cdots\cdots 3分$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt = 2[t - \frac{\sin 4t}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

所以，原积分 $= 2\pi \cdots\cdots\cdots 2$分

3. 求椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ 绕 x 轴旋转而得到的旋转体的体积.

解 由对称性 $V=2\int_0^2 \pi y^2\,dx\cdots\cdots\cdots 4$分

$$=10\pi\int_0^2 (1-\frac{x^2}{4})\,dx=10\pi[x-\frac{x^3}{12}]_0^2=\frac{40\pi}{3}\cdots\cdots\cdots 4\text{分}$$

4. 设 $f(x)=\int_0^{x^2}(1-\cos\sqrt{t})\,dt,\ x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,求此函数的极值点和极值.

解 $f'(x)=2x(1-\cos x).\cdots\cdots\cdots 3$分

当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时， $f'(x)<0$; 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时， $f'(x)>0,\ \cdots\cdots\cdots 2$分

且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $x=0$ 是极小值点，极小值 $f(0)=0.\ \cdots\cdots\cdots 3$分

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(2)=4f(1)$. 证明至少存在一点 $c\in(1,2)$，使得 $cf'(c)=2f(c)$.

证明 令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，则 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且

$$g(1)=f(1),\ g(2)=\frac{f(2)}{4}=\frac{4f(1)}{4}=f(1)=g(1),$$

即 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上满足罗尔中值定理的条件. $\cdots\cdots\cdots 4$分

由于 $g'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$，存在 $c\in(1,2)$，使得

$g'(c)=\frac{cf'(c)-2f(c)}{c^3}=0$, 从而 $cf'(c)=2f(c).\cdots\cdots\cdots 4$分