2024-2025 学年第 1 学期《高等数学 I(1)》

期末模拟试卷 2 参考答案

一、选择与填空（每题 3 分，共 30 分）

1. $f(x)$ 为 $f'(x)$ 的原函数，则下面正确的是（ C ）

A. $\int f'(x)dx = f(x)$ B. $\int df(x) = f'(x)$ C. $\int f'(x)dx = f(x)+C$ D. $\int df'(x) = f'(x)$

2. $x=0$是函数$f(x)=\dfrac{e^x-1}{x(x-1)}$的（ A ）

A. 可去间断点 B. 振荡间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

3. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(0\le x\le 3\pi)$ 与 x 轴所围成的面积可表示为（ C ）

A. $-\int_0^{3\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$

B. $\int_0^{3\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$

D. $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x-\int_{2\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$

4. 下列无穷限广义积分发散的是（ B ）

A. $\int_1^{+\infty}e^{-x}dx$ B. $\int_1^{+\infty}e^{x}dx$ C. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$ D. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx$

5. 微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解为（ A ）.

A. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ B. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$

C. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$ D. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$

6. 已知 $f'(5)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5-h)-f(5)}{2h}=$ ____-1____.

7. $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=$ ___π___.

8. 微分方程 $y'=e^{2x-y}$ 满足 $y\big|_{x=0}=0$ 的特解为__$e^y=\dfrac{1}{2}(e^{2x}+1)$__.

9. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$ __$\dfrac{1}{2}$__.

10. 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}, & x<1,\\ a+x, & x\ge 1.\end{cases}$ 若$f(x)$在点$x=1$处连续，则常数$a=$ __1__.

二、解答题（每题 6 分，共 60 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$.

解：$lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctan\,x-x}{ln\left(1+2x^3\right)}=lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctan\,x-x}{2x^3}=lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}=-\dfrac{1}{6}$.

2. 计算不定积分 $\int\left(\sin x-\sin^3 x\right)dx$

解：$\int\left(\sin x-\sin^3 x\right)dx=\int\sin x\left(1-\sin^2 x\right)dx=\int\sin x\cos^2 xdx$

$$=\int\cos^2 xd\left(-\cos x\right)=-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

3. 求定积分 $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

令$x=2\,sin\,t$,则$dx=2\,cos\,tdt$,且当$x=0$时, $t=0$，当$x=2$时, $t=\dfrac{\pi}{2}$，于是

解：$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2 t\,cos^2 tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2 2tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-cos4t\right)dt$

$$=2\left(t-\frac{1}{4}sin\,4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

4. 求定积分 $\int_0^2\dfrac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx$.

令$x=2\,tan\,t$,则$dx=2\,sec^2 tdt$,且当$x=0$时, $t=0$，当$x=2$时, $t=\dfrac{\pi}{4}$，于是

解：$\int_0^2\dfrac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^3 t\,sec\,tdt=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}tan^2 td\left(sec\,t\right)$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(sec^2 t-1\right)d\left(sec\,t\right)=8\left(\frac{1}{3}sec^3 t-sec\,t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{3}\left(2-\sqrt{2}\right).$$

5. 求由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定的隐函数 $y=y\left(x\right)$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程.

解：方程 $xy+2\ln x=y^4$ 两边对 x 求导可得 $y+xy'+\dfrac{2}{x}=4y^3y'$，于是 $y'=\dfrac{y+\dfrac{2}{x}}{4y^3-x}$，

$y'\big|_{x=1}=1$，因此切线方程为 $y=x$

6. 设$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=1-t \end{cases}$，其中$t$为参数，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$以及$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{-1}{t}=-\dfrac{1}{t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{t}\right)'}{x'(t)}=\dfrac{\dfrac{1}{t^2}}{t}=\dfrac{1}{t^3}$

7. 由$\mathrm{y}=x^3$, $x=2$, $y=0$围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转，计算所得两个旋转体的体积.

解：图形绕 x 轴旋转，该体积为

$$V=\int_0^2\pi(x^3)^2dx=\frac{128}{7}\pi\ .$$

图形绕 y 轴旋转，则该立体可看作圆柱体减去曲线$x=\sqrt[3]{y}, y=8, x=0$所围成的图形绕 y 轴旋转所得到的立体，因此体积为

$$V=\pi\cdot 2^2\cdot 8-\int_0^8\pi(\sqrt[3]{y})^2dy=\frac{64}{5}\pi.$$

8. 确定$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间和极值。

解：$f(x)$在$\left(-\infty,1\right]$和$\left(2,+\infty\right)$上单调递增；在$\left(1,2\right]$上单调递减（区间开闭的写法不唯一）.

难易程度：易

答案解析：由$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$可知，驻点为$x_1=1, x_2=2$. 因此，由于以下表格可知：$f(x)$在$\left(-\infty,1\right]$和$\left(2,+\infty\right)$上单调递增；在$\left(1,2\right]$上单调递减.

区间	$\left(-\infty,1\right)$	$\left(1,2\right)$	$\left(2,+\infty\right)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↑	↓	↑

9. 求微分方程$(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$的通解.

方法一　先求解对应齐次方程的通解，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2x}{1+x^2}y=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\Rightarrow y=C(1+x^2)$$

将齐次方程通解中的常数C换成待定函数$u(x)$，

即令非齐次方程的通解为$y=u(1+x^2)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1+x^2)+2xu$$

将$y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$代入原方程可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1+x^2)+2xu-\frac{2x}{1+x^2}u(1+x^2)=1+x^2$$

化简整理得到关于u的方程，所以$u(x)=x+C$

故原方程的通解为

$$y=(1+x^2)(x+C)$$

方法二　直接利用一阶非齐次线性微分方程的通解公式，这里

$P(x)=-\frac{2x}{1+x^2},Q(x)=1+x^2,$代入通解公式，得

解:

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}+C\right]\\&=e^{-\int(-\frac{2x}{1+x^2})\mathrm{d}x}\left[\int(1+x^2)e^{\int(-\frac{2x}{1+x^2})\mathrm{d}x}+C\right]\\&=(1+x^2)(x+C)\end{aligned}$$

10. 若 $f(x)=\begin{cases}2e^{x-1},x>1,\\ax^2+bx+1,x\le 1\end{cases}$ 在 $x=1$ 点处可导，求 a,b 的值.

解：$\because f(x)$在$x=1$处可导

$\therefore f(x)$在$x=1$处连续

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

即$\lim\limits_{x\to 1^+} 2e^{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^2+bx+1)$

$\therefore 2=a+b+1$

$\therefore a+b=1$

又$\because f(x)$在$x=1$处可导

$\therefore f_+'(1)=f_-'(1)$

而$f_+'(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2e^{x-1}-(a+b+1)}{x-1}=2\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}=2$

$f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{ax^2+bx+1-(a+b+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}=2a+b$

$\therefore 2a+b=2$

$\therefore a=1,b=0$

三、（10 分） 已知 $f\left(x\right)$的一个原函数为e^{-x^2}，求$\int_1^e \dfrac{\ln xf'\left(\ln x\right)}{x}dx$.

解：

令$t=\ln x$,则

$$\int_1^e \frac{\ln xf'\left(\ln x\right)}{x}dx=\int_1^e \ln xf'\left(\ln x\right)d\left(\ln x\right)=\int_0^1 tf'\left(t\right)dt$$

$$=tf\left(t\right)\Big|_0^1-\int_0^1 f\left(t\right)dt=f\left(1\right)-e^{-t^2}\Big|_0^1=f\left(1\right)-e^{-1}+1,$$

又$f\left(x\right)=\left(e^{-x^2}\right)'=-2xe^{-x^2}$,所以$f\left(1\right)=-2e^{-1}$，故$\int_1^e \dfrac{\ln xf'\left(\ln x\right)}{x}dx=1-3e^{-1}$.