（科目：　　）数　学　作　业　纸

编号：　　班级：　　姓名：　　第　　页

1.a 最小二乘估计

$$RSS(\beta) = (Y - X\beta)^T (Y - X\beta)$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \beta} = -2X^T(Y - X\beta) \qquad \frac{\partial^2 RSS}{\partial\beta\partial\beta^T} = 2X^TX$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow X^TY = X^TX\beta \Rightarrow \beta = (X^TX)^{-1}X^TY$$

极大似然估计

$$p(y|x,\beta) = N(Y|W^Tx, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \ell = \sum_{i=1}^{N} \log p(y_i|x_i,\theta) = \sum_{i=1}^{N} \log\left[\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \beta^T x_i)^2\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} RSS(\beta) - \frac{N}{2}\log(2\pi\sigma^2)$$

其中后一项为常数项　取 ℓ 最大 也即使 $RSS(\beta)$ 最小，与最小二乘估计等价

得证.

1.b 单变量回归：$y = x_i\beta_i^* + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

利用上述结果有 $\beta_i^* = 1/x_i^Tx_i \cdot x_i^Ty = \dfrac{x_i^Ty}{x_i^Tx_i}$

如果把矩阵逆看作矩阵的倒数，那么对应的多元线性回归模型：

$$\beta = \frac{X^TY}{X^TX}$$

若要使 $\beta = [\beta_1^*, \beta_2^* \cdots \beta_p^*]^T$ 则 $(X^TX)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/x_1^Tx_1 & & & \\ & 1/x_2^Tx_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/x_p^Tx_p \end{bmatrix}$

也即各变量之间无多重共线性时 $\beta_i = \beta_i^*$

否则 $\beta \neq [\beta_1^*, \beta_2^* \cdots \beta_p^*]^T$