

量子物理复习概述

又名 现代物理基础导论·我要迪士尼

目录

波粒二象性的初步提出 (PPT10 光子 and 电子)	3
光波的相干性—光的波粒二象性	3
电子的波动性	3
物质波理论的实验验证	4
哥本哈根解释理论三支柱&量子力学的四表征 (PPT11&12)	4
量子力学的第一个表述: 海森堡“矩阵力学”(物理学史)	4
量子力学的第二个表述: 波动力学与薛定谔方程 (1926)	5
“哥本哈根解释”支柱之一: 玻恩-波函数的统计解释	6
“哥本哈根解释”支柱之二: 海森堡不确定性原理	6
“哥本哈根解释”支柱之三: 互补原理	8
量子力学的第四个表述: 费曼与费曼路径积分	10
量子力学的第三个表述: 算子力学 (主要是狄拉克算符的介绍。)	11
Further discussions on 波粒二象性 (PPT13 光子 and 电子)	12
分束器与不相符实验——波粒二象性的一个实验验证	12
单光子干涉, 量子力学的第三个基本原则	14
延迟选择实验 (1979)	15
电子的波函数理论	16
电子双缝干涉: 测量的效应	16
玻色-爱因斯坦凝聚 (1925) ——电子波动性的证明	17
由哥本哈根解释引出的思考 (PPT14)	18
1927 第五届索尔维会议	18
1930 第六届索尔维会议: 爱因斯坦光箱实验	19
1935 EPR 佯谬	19
1935 薛定谔的猫	20
1979 惠勒延迟选择实验与“参与性宇宙”模型	21
“多世界解释”	21
量子叠加与量子纠缠 (PPT15)	22
相干叠加态	22
量子纠缠	24
不可克隆定理与量子复制 (PPT16)	27
克隆与超光速通信	28
量子不可克隆原理	28
量子复制与保真度 F	29

EPR 佯谬与贝尔定理 (PPT17)	30
EPR 佯谬及其思想实验 (增补)	30
定域隐变量理论: 哥本哈根学派, 我要 diss 你!	31
Bell 不等式	32

波粒二象性的初步提出（PPT10 光子 and 电子）

光波的相干性—光的波粒二象性

单个光子与其自身干涉：

当波与物质相互作用时，在交换能量的瞬间，能量包立刻显现出来。

电子的波动性

德布罗意物质波（物质也具有波动性）

在玻尔原子模型中，原子中电子的角动量、能量都出现了一些整数，如电子的轨道角动量

$$L = mvr = n\hbar, n = 1, 2, 3, \dots$$

德布罗意把这种整数现象与波的特征联系起来。

1923 年，德布罗意发表三篇论文：第一篇，《波和量子》，运动粒子总伴随着一系列正弦波，粒子与波永远保持相同的相位。第二篇，《光量子、衍射和干涉》，明确提出相干波的概念。第三篇，《量子、气体运动理论以及费马原理》，文中阐述了波与粒子的对应关系。

1924 年，他在博士论文中提出，既然光具有波动性和粒子性，那电子也可能具有波动性；氢原子中电子轨道角动量的量子化反映了电子的波动性。

波动性应有波动的量来反映。德布罗意假定，对机械能量为 E ，动量为 p 和静止质量为 m_0 的实物粒子，有相应的波动量频率 ν 和波长 λ 与之相联系：

$$\nu = E/h$$

$$\lambda = h/p \text{ (德布罗意波长公式——具有动量的物质也具有波长)}$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

它们被称为德布罗意关系。

从上面式子可看出，实物粒子的波长频率之间的关系：

$$\nu = \sqrt{c^2/\lambda^2 + m_0^2 c^4/h^2} = \frac{c}{\lambda} \sqrt{1 + m_0^2 c^2 \lambda^2/h^2}$$

或用圆频率写出来

$$\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}$$

此注：你应当掌握的是——德布罗意波长公式的相关计算

例 一个棒球的质量 $m=1\text{ kg}$ ，速度 $v=10\text{ m/s}$
求 它的德布罗意波长

解 $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{1 \times 10} = 6.6 \times 10^{-25}\text{ m}$ 当今最精密的仪器也无法测出

例 计算经过电势差 $U_1=150\text{ V}$ 和 $U_2=10^4\text{ V}$ 加速的电子的德布罗意波长（不考虑相对论效应）。

解 根据 $\frac{1}{2}m_0v^2 = eU$ ，加速后电子的速度为 $v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$
 根据德布罗意关系 $p = h/\lambda$ ，电子的德布罗意波长为

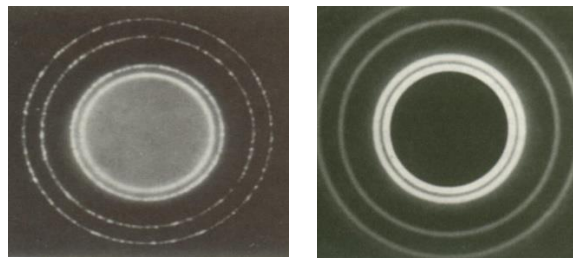
$$\lambda = \frac{h}{m_0v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU}} = \frac{1.225}{\sqrt{U}}\text{ nm}$$

可以通过晶体衍射证实电子的波动性

波长分别为 $\lambda_1 = 0.1\text{ nm}$ $\lambda_2 = 0.0123\text{ nm}$
 以2%光速运动的电子，其德布罗意波长： 10^{-10}m 质量为0.02kg，速度330m/s的子弹，其德布罗意波长： 10^{-34}m

物质波理论的实验验证

德布罗意认为这两个波动量描写了一个与实物粒子相联系的波，称为**物质波**。实物粒子的粒子性已有大量实验事实支持。**1925**年，贝尔实验室，戴维逊与革末利用电子束轰击金属镍块，证实了实物粒子的波动性。他们用电子束打出了同 X 射线一样的衍射图样，更精确测出了电子波的波长，定量确认了德布罗意关系式。



如图，左图为**电子束**衍射图样，右图为**X 射线**衍射图样

此后，还有许多物理学家成功进行实验，验证了物质波的正确性。1961 年，约恩逊成功进行了第一个电子双缝干涉实验。证实了质子、中子和原子等实物粒子都具有波动性，并满足德布罗意关系。

哥本哈根解释理论三支柱&量子力学的四表征（PPT11&12）

量子力学的第一个表述：海森堡“**矩阵力学**”（物理学史）

矩阵力学的创立者**海森伯**原是索末菲的学生。1922 年 6 月玻尔应邀到哥廷根讲学，索末菲带领海森伯和泡利一起去听讲。在讲演后的讨论中，海森伯发表的意见引起玻尔的关注，尔后两人一起散步继续讨论。玻尔对这位年轻的学者印象深刻，邀请他和泡利在适当的时候到哥本哈根去作研究。1922 年海森伯就去了，开始了他们之间的长期合作。1924 年海森伯又到哥本哈根跟玻尔和克拉末斯合作研究光的色散理论。

在研究中，海森伯认识到，不仅描写电子运动的偶极振幅的傅里叶分量的绝对值平方决定相应辐射的强度，而且振幅本身的位相也是有观察意义的。海森伯由这里出发，假设电子运动的偶极和多极电矩辐射的经典公式在量子理论中仍然有效。然后运用玻尔的对应原理，用**定态能量差决定的跃迁频率**来改写经典理论中电矩的傅里叶展开式。谱线频率和

谱线强度的振幅都是**可观察量**。这样，海森伯就不再需要电子轨道等经典概念，代之以频率和振幅的二维数集。

但是令海森伯奇怪的是，这样做的结果，计算中的乘法却是不可对易的。当时他还不知道这就是矩阵运算，于是他把论文拿给他的另一位导师、格丁根大学教授**玻恩**，请教有没有发表价值。玻恩开始也感到茫然，经过几天的思索，记起了这正是大学学过的矩阵运算，认出海森伯用来表示观察量的二维数集正是线性代数中的矩阵。从此以后，海森伯的新理论就叫**“矩阵力学”**。

玻恩认识到海森伯的工作有重要意义，立即推荐发表，并着手运用矩阵方法为新理论建立一套严密的数学基础。一次偶然的机会，玻恩遇见了年轻的数学家约丹。约丹正是这方面的内行，欣然应允合作。**1925**年9月，两人联名发表了《论量子力学》一文，首次给矩阵力学以严格表述。

接着，玻恩、约丹和海森伯三人合作，又写了一篇文章，把以前的结果推广到多自由度和有简并的情况，系统地论述了本征值问题、定态微扰和含时间的定态微扰，导出了动量和角动量守恒定律，以及强度公式和选择定则，还讨论了塞曼效应等问题，从而奠定了矩阵力学的基础。

海森伯等人的工作很快得到了英国剑桥大学**狄拉克**的响应。**1925**年狄拉克得知海森伯提出了矩阵力学，立即产生了新的想法。他利用哈密顿力学，发现矩阵力学中的对易关系形式上与**经典力学中的泊松括号**相当。**1925**年11月他以《量子力学的基本方程》为题，运用对应原理，很简单地把经典力学方程改造为量子力学方程。**1926**年1月又发表《量子力学和氢原子的初步研究》，建立了一种代数方法，用于氢原子光谱，推导出了巴耳末公式。

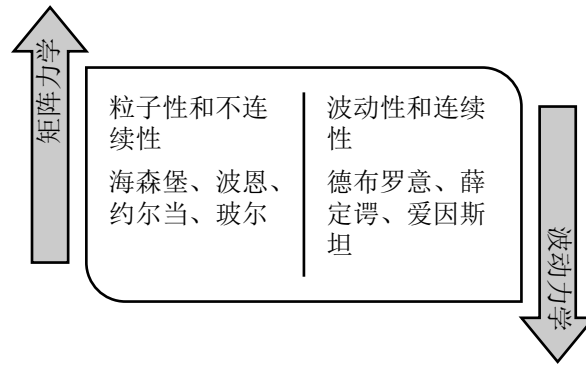
量子力学的第二个表述：**波动力学与薛定谔方程**（1926）

薛定谔在德布罗意思想的基础上，**1926**年在《量子化就是本征值问题》的论文中，提出氢原子中**电子所遵循的波动方程(薛定谔方程)**，并建立了以此为基础的**波动力学和量子力学的近似方法**。薛定谔方程在量子力学中占有极其重要的地位，它与经典力学中的牛顿运动定律的价值相似。薛定谔对原子理论的发展贡献卓著，**1933**年与英国物理学家狄拉克同获诺贝尔物理奖。

薛定谔方程是描述低速的微观粒子在外力场中运动的波动微分方程。质量 m 的粒子在外力场中运动，势能函数 $V(r, t)$ ，薛定谔方程为（推导不作要求）

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(\vec{r}, t)$$

1930年，狄拉克出版了经典的量子力学教材，两种力学被完美地统一起来。数学上的一致并不能阻止人们对它进行不同的诠释。



波函数的统计解释、不确定性原理、互补原理 是量子力学“哥本哈根解释”的三大支柱。

“哥本哈根解释”支柱之一：玻恩-波函数的统计解释

薛定谔说：**波函数描述的是电子在空间的分布状态**：每当电子高速振动时，它将幻化为波形阵列舒卷扩散。由于电子总在运动，我们捕捉不到它颗粒状的身影，因而展现在仪器面前的永远是无数相互纠缠、相互叠加的波，就像一团“云雾”在核子周围翻腾涌动。

在一般的量子力学问题中，系统的状态可以很复杂。为了描写复杂的状态，我们把在衍射、干涉中采用的办法直接推广而假定：**系统的状态用波函数来完全描写，而波函数是概率振幅**。这是量子力学的第一个假定。把波函数解释为概率振幅，是玻恩在 1926 年提出来的，称为波函数的概率解释。

波函数 $\Psi(x, y, z, t)$ 的统计解释：“**概率云**”。波函数模的平方代表某时刻 t 在空间某点 (x, y, z) 附近单位体积内发现粒子的概率，即 $|\Psi|^2$ 代表概率密度。

“哥本哈根解释”支柱之二：海森堡不确定性原理

原理内容：

1. 动量 - 坐标不确定关系

微观粒子的位置坐标 x 、动量分量 p_x 不能同时具有确定的值：

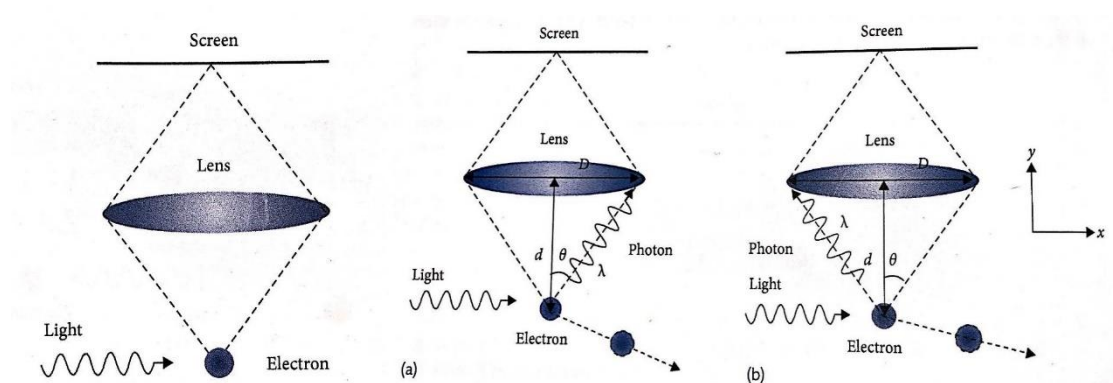
$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

2. 能量 - 时间不确定关系

反映了原子能级宽度 ΔE 和原子在该能级的平均寿命 Δt 之间的关系。

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

推导：“海森堡的显微镜”思想实验



海森堡显微镜是维尔纳·海森堡提出的一项思想实验，它已成为一些普遍持有的量子力学思想的核心。特别是，它在经典光学原理的基础上为不确定性原理提供了论证。

推导过程：

如图所示，显微镜直径为 D ，焦距为 F ，电子在显微镜前距离 d 处。

由动量守恒定律：

$$\hbar k + 0 = \hbar k \sin\theta + p_x$$

$$p_x = \hbar k \sin\theta - \hbar k$$

由此可知：

$$(p_x)_{\min} = \hbar k - \hbar k \sin\theta$$

$$(p_x)_{\max} = \hbar k + \hbar k \sin\theta$$

即

$$\Delta(p_x) = 2\hbar k \sin\theta$$

由 $\hbar k = h/\lambda$ ，且 θ 角度极小，知

$$\Delta(p_x) \approx 2 \frac{h}{\lambda} \theta$$

根据瑞利判据，结合右图，可知：

$$\theta_{\min} = \frac{\lambda}{D}$$

$$\theta_{\min} \approx \tan\theta_{\min} = \frac{\Delta x}{d}$$

得

$$\Delta x \cong d \frac{\lambda}{D} = \lambda \frac{1}{2 \tan\theta} \cong \frac{\lambda}{2\theta}$$

即

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\theta}$$

将两式相乘可知：

$$\Delta x \Delta p \cong \frac{\lambda}{2\theta} \frac{2h\theta}{\lambda} \cong h$$

又

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

即得出海森堡不确定原理表达式。不确定的根源是“波粒二象性”，这是自然界的根本属性。

关于海森堡不确定原理，你应当掌握“不确定量”的计算方法：

例 原子的线度约为 10^{-10} m ，求原子中电子速度的不确定量。

解 原子中电子的位置不确定量 10^{-10} m ，由不确定关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

电子速度的不确定量为

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4 \times 3.14 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 10^{-10}}$$

说明 $= 5.8 \times 10^5 \text{ m/s} \sim v_x$

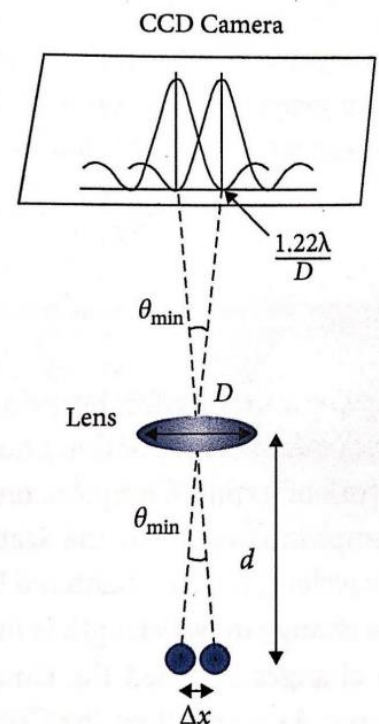
例 子弹 ($m = 0.10 \text{ g}$, $v = 200 \text{ m/s}$) 穿过 0.2 cm 宽的狭缝。

求 沿缝方向子弹的速度不确定量。

$$\text{解} \quad \Delta x = 2 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

子弹速度的不确定量为

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4 \times 3.14 \times 0.1 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-3}} \\ = 1.64 \times 10^{-11} \text{ m/s} \ll v_x$$



这两个例子对比一下，可以发现：宏观不确定关系不起作用。

“哥本哈根解释”支柱之三：互补原理

概述

在实验上，在微观领域里，仪器与物体的相互作用在原则上是不可避免、不可控制、也不可被忽略的。在理论上，我们无法区分出测量结果中仪器与物体相互作用的部分。

不能用同一个实验去测量物体所有的性质。

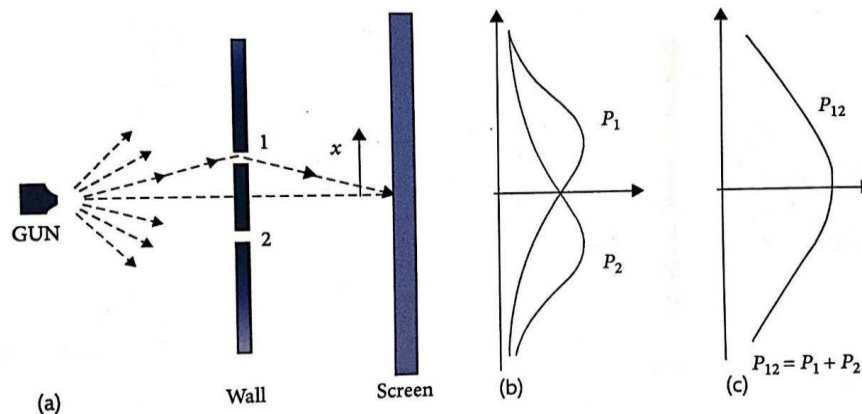
互补原理的解释：

①描述微观物体的行为时，必须同时思考其波动性与粒子性，不可能单独用一种概念描述整体的量子现象。

②实验方面，再精致的实验设计，也无法展现出全部量子现象，观测时仪器对物质的作用是不可避免，不可控制，不可忽略的。

电子双缝干涉实验：互补原理的体现

子弹双缝实验



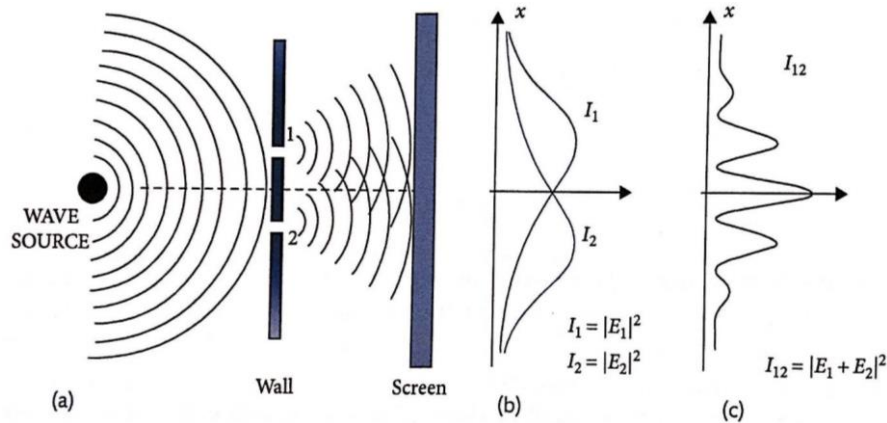
如图，想象一条机枪向一堵开有双缝的不可通过子弹的装甲板连续随机发射子弹。墙上的双缝的宽度只能恰好让一颗子弹穿过。在这个携带双缝的墙面后方有个布满探测器的后障。由于子弹与缝的边缘存在空间上的碰撞和相互作用，它们在后障上的具备一定的概率分布特点。

首先，遮蔽子弹的缝 2，仅使得缝 1 可以通过子弹，我们可以在后障的探测器上得到子弹沿 x 方向的概率分布曲线 $P_1(x)$ ，同理，将缝 1 遮蔽，仅使得缝 2 可以通过子弹。我们将可以得到与 $P_1(x)$ 关于双缝中心的另一条概率曲线 $P_2(x)$ 。最后，我们将双缝同时打开让子弹通过，我们得到双缝的概率分布曲线 $P_{12}(x)$

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$$

也就是说，子弹通过双缝的事件相互独立，实验并未显出干涉的结果。

水波双缝实验



做完上面有关于子弹的实验后，我们继续同样的场景。如上图，在一个浅水槽中由一个马达带动震源上下振动产生水波，后面同样设置一堵开有双缝的墙，其后又是一道能吸收波的后障。该后障上布满了检测器。这样，我们就定量地看到到达这道后障的光的强度分布。

仿照上面有关于子弹的实验，我们首先将缝 2 遮盖，使得水波全部从缝 1 通过，我们得到了振幅沿 x 方向的分布 $I_1(x)$ 。下面，我们将缝 1 遮盖，仅使得水波从缝 2 处通过，我们得到了另一个强度分布 $I_2(x)$ 。这时，我们如果和子弹实验中概率分布 P 的函数所比对的化，会发现，得到的光强 I 的两条曲线 $I_1(x)$ 和 $I_2(x)$ 与 $P_1(x)$, $P_2(x)$ 具有相同的趋势。

现在，我们将双缝同时打开，我们得到了一条双缝情形的光强分布曲线 $I_{12}(x)$ 。这时，我们发现，这条曲线与仅一条缝的曲线的线性叠加大相径庭。令

$$A_1(x) = |A_1(x)|e^{i\varphi_1(x)}$$

同理

$$A_2(x) = |A_2(x)|e^{i\varphi_2(x)}$$

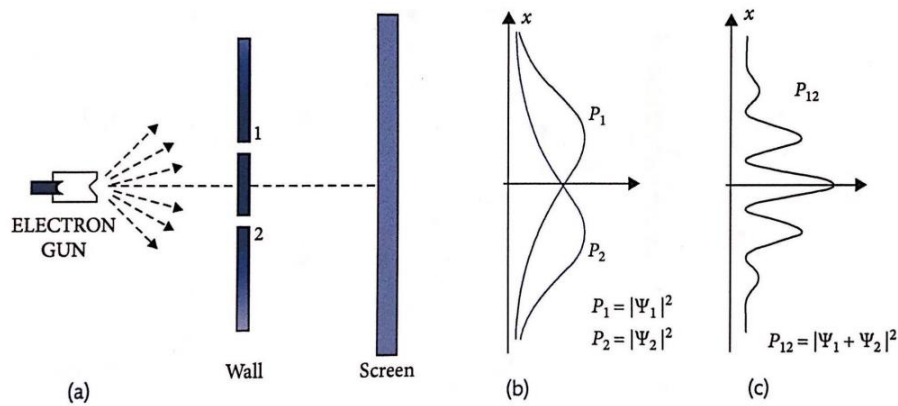
当两缝同时开放时

$$\begin{aligned} I_{12}(x) &= |A_1(x) + A_2(x)|^2 \\ &= [A_1^*(x) + A_2^*(x)] \cdot [A_1(x) + A_2(x)] \\ &= A_1^*(x)A_1(x) + A_2^*(x)A_2(x) + A_1^*(x)A_2(x) + A_1(x)A_2^*(x) \\ &= |A_1(x)|^2 + |A_2(x)|^2 + 2|A_1(x)| \cdot |A_2(x)| \cdot \cos[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] \\ &= I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x)I_2(x)} \cos[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] \end{aligned}$$

这便是我们看到的干涉现象。

电子双缝实验

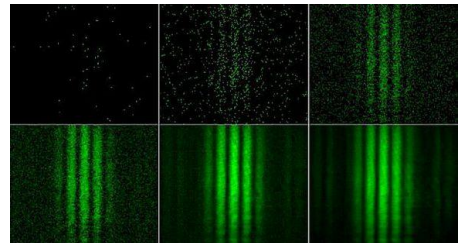
如图，现有一个电子枪向开有双缝的屏发射电子，再后面是接受电子的后障。在这个后障上同样布满了检测器。我们不妨假设这个检测器上链接有电子倍增器和扩音器，使得当电子击打在接收器上时，实验者都能听到发出的声响。



与前面的实验相同，我们将分别将缝 2 和缝 1 遮盖，得到两条分布曲线。这两条分布曲线与子弹双缝实验所获得的曲线 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 具有高度的相似性。同时打开双缝，电子分布概率曲线则呈现出波动性的干涉特性。

若在缝后放置一光源，在电子通过缝后探知其轨迹，电子所形成的概率分布曲线不再呈现出类似波的特点，而是粒子性的现象。

以上描述的是理想实验。直到 1970 年代才有人发表真实实验的结果，如图所示。随着电子流强的增大，图样由离散的随机斑点过渡到连续分布的干涉条纹。



用光束做实验可以得到类似的结果：如果我们可以通过某种手段获得光子的路径信息，则干涉条纹消失。这是波粒二象性或者玻尔**互补原理**的核心：**当我们不知道具体路径信息时，电子或光子表现波动性，而当我们知道了具体路径信息后，它们表现为粒子性。**

观测行为：

观测前：电子的概率在空间中展开“电子无处不在，而又无处不在”

观测时：电子按照概率分布随机作出一个选择，并以小点的形式出现在感光屏的某处。

量子力学的第四个表述：费曼与费曼路径积分

出于数学上的好奇，狄拉克试图构造了量子力学中的拉格朗日描述。他在论文中指出这个作用量在经典和量子世界之间存在着直接的类比。费曼对这个语焉不详的描述发生了浓厚兴趣，当即在图书馆的一块黑板上进行了演算，发现所谓的“类比”就是简单的正比关系。由此，他找到了将他和惠勒的电动力学量子化的途径。

在量子世界里，粒子可以同样地勘测起始两点之间所有可能路径的作用量。但它不再只是选取作用量最小的那一条而对其它路径视而不见。这时，**所有的路径都对粒子的运动有着贡献**，其大小取决于那条路径的**作用量**。

或者说，粒子还是在按照作用量的大小选择路径。作用量越小的路径“获选”的可能性越大。作用量大的路径被选上的几率很小，但也不再是零。

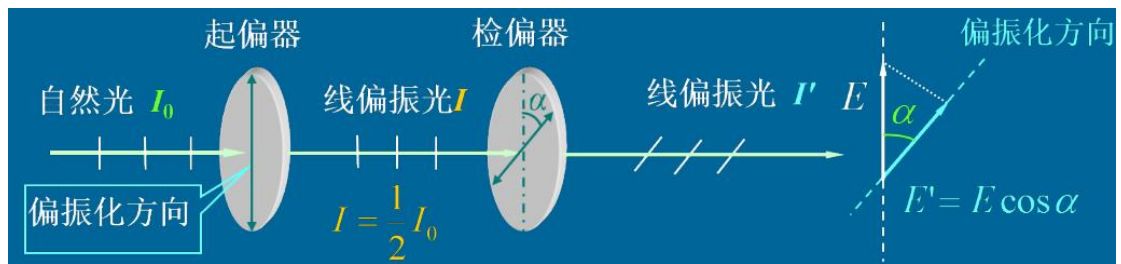
这样，粒子的运动便是这所有可能性的总和或平均。因为这样的路径数目无限地多，这个加法其实是一个积分。费曼把它称作“**路径积分** (path integral)”。这依然是他们那个

“一切都是粒子”的世界，没有场也没有波。但因为不同路径的可能性是一个复数，它们相加时也不是简单的累计，而是有时相互叠加，有时互相抵消。这样，它们也会在结果中自然地出现类似波动的干涉、衍射图像，与薛定谔的波函数无异。

正如最小作用量原理与牛顿动力学方程等价，费曼也证明了他的路径积分与薛定谔方程完全等价，是继矩阵、波动、算子之后量子力学的第三个表述。

量子力学的第三个表述：算子力学（主要是狄拉克算符的介绍。）

从经典光学的马吕斯定律到单光子马吕斯定律



马吕斯定律：

$$I_T = I_0 \cos^2 \alpha$$

由 $I = n\hbar\nu$ 知

$$n_T = n_0 \cos^2 \alpha$$

What if 光子通过偏振片？

单个光子与光束的最大区别：单个光子无法用强度来描述。单个光子要么作为一个整体通过偏振片，要么完全不通过。→从“强度”转换为“概率”

为了描述具有特定偏振方向的单个光子，我们引入态矢量。

$$\hat{e}_\alpha = \cos \alpha \hat{e}_H + \sin \alpha \hat{e}_V$$

对于马吕斯定律：

$$\vec{E} = E \cos \alpha \vec{x} + E \sin \alpha \vec{y}$$

$$\vec{n} = \cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{y}$$

则

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{E} &= (\cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{y}) \cdot (E \cos \alpha \vec{x} + E \sin \alpha \vec{y}) \\ &= E \cos (\alpha - \phi) \end{aligned}$$

得到马吕斯定律的一般形式：

$$I_T = |\vec{n} \cdot \vec{E}|^2 = I_0 \cos^2 (\alpha - \phi)$$

引入描述光子量子态的记号——狄拉克符号

狄拉克符号（1939）

对于态矢量 $\hat{e}_\alpha = \cos \alpha \hat{e}_H + \sin \alpha \hat{e}_V$ ，可用右矢描述为：

$$|\alpha\rangle = \cos \alpha |H\rangle + \sin \alpha |V\rangle$$

矢量的点积：

$$\langle \phi | | \alpha \rangle = \langle \phi | \alpha \rangle$$

其物理意义是 $|\alpha\rangle$ 态在 $|\phi\rangle$ 方向的投影。

那么！偏振方向沿 ϕ 方向的偏振片可以表示为

$$|\phi\rangle = \cos \phi |H\rangle + \sin \phi |V\rangle$$

处于 $|\alpha\rangle$ 态的光子通过处于 $|\phi\rangle$ 态的偏振片的概率幅

$$\langle\phi|\alpha\rangle = (\cos \phi \langle H| + \sin \phi \langle V|)(\cos \alpha |H\rangle + \sin \alpha |V\rangle) = \cos(\alpha - \phi)$$

光子通过偏振片的概率为

$$P_\alpha = |\langle\phi|\alpha\rangle|^2 = \cos^2(\alpha - \phi)$$

即为单光子马吕斯定律。

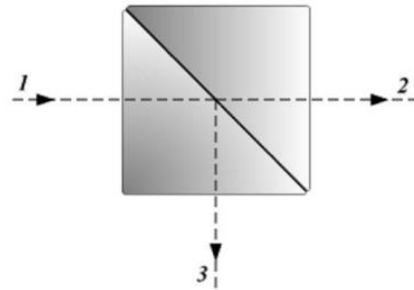
Further discussions on 波粒二象性（PPT13 光子 and 电子）

分束器与不相符实验——波粒二象性的一个实验验证

分束器

分束器：当光束与镜面成 45° 入射时，50%的光线反射，50%透射。

5mW 的激光，每秒 1.6×10^{16} 个光子入射， 平均每秒分别反射和透射 8×10^{15} 个光子。



量子力学的第一、二个基本原则

量子力学的第一个基本原则：

为了计算每个光电倍增管测到光子的概率，首先确定一个复数的概率幅

$$z = x + iy = r e^{i\phi}$$

一个概率幅乘以它的共轭复数，即为光子被探测到的概率。即一个事件发生的概率

$$P = |z|^2 = z^* z = r^2$$

设想作为光源的一个激光放置在光电倍增管前方距离为 x 处。探测到光子的概率为 100%，即 1。

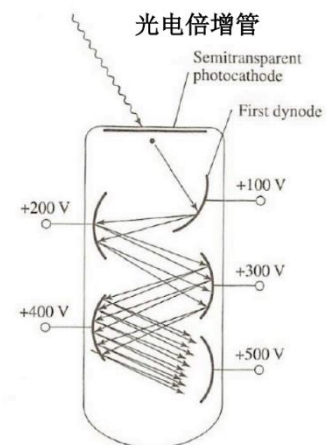
量子力学的第二个基本原则：

如果把距离 x 分成两段 x_1 和 x_2 : $x = x_1 + x_2$

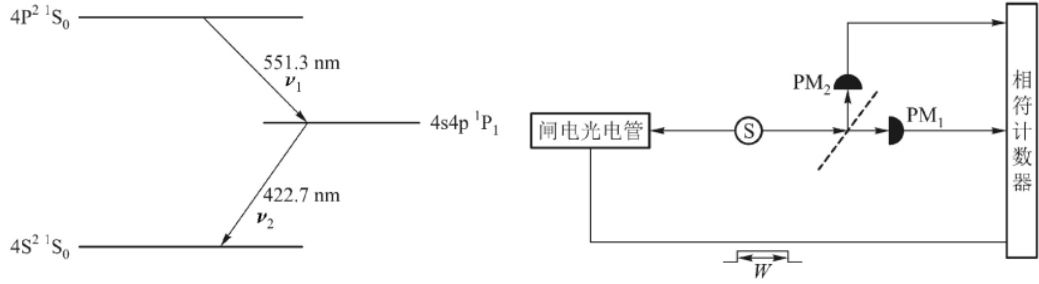
$$e^{ikx} = e^{ik(x_1+x_2)} = e^{ikx_1} e^{ikx_2}$$

假如一个过程可以看成是分成几步发生的话——例如一个光子通过 x_1 后又通过距离 x_2 ——要得到这个过程的概率幅，只需把过程中的每一步的概率幅相乘在一起：

$$Z = Z_a Z_b$$



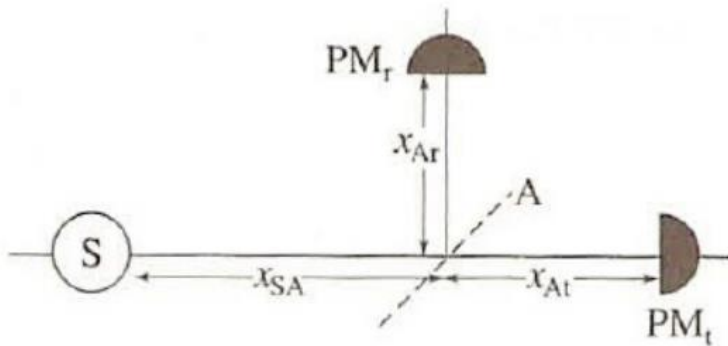
不相符实验



1986 年，A. Aspect, P. Grangier 和 G. Roger 在实验中利用激发态 Ca 的级联辐射衰变来产生单个光子，如图。这个级联辐射衰变放射出两个频率分别为 ν_1 和 ν_2 的光子，第一个光子被位于图 2 的闸光电管探测到，该光子被称为触发光子，然后电子讯号就被送到接有光电倍增管 PM_1 和 PM_2 的电路，使它们接通一段时间 $2\tau_s$ ，其中 $\tau_s = 4.7 \text{ ns}$ 是图 1 中间能级的寿命。接通时间如此之短，且光电倍增管与频率为 ν_1 的光子的发射同步，因此保证了每次仅有一个频率为 ν_2 的光子被 PM_1 和 PM_2 中某一光电倍增管所探测到。在单光子源和光电探测器 PM_1 和 PM_2 之间有一个射束分离器，反射、透射率均为 50%，以保证光子到达 PM_1 和 PM_2 的概率相等。

如果光子是经典的波，则光波在射束分离器上，会一分为二，一半反射，一半透射。对于大量光子组成的波，可以一部分光子参与反射一部分参与透射，但对于单光子而言，只能将其一分为二，按照能量守恒定律，反射和透射光子的能量就会比入射的小，而引起波长增加。

但事实并不如此，因为反射光与透射光的颜色与入射光是一样的。并且实验显示， PM_1 和 PM_2 之中每次只有其中一个，而不是两个同时有记录光子到达的计数显示。日常生活经验告诉我们，一个粒子应该具有确定的位置，而波才会在空间展开，才会既出现在 PM_1 处又出现在 PM_2 处。上述实验中光子既有可能出现在 PM_1 处又有可能出现在 PM_2 处，没有确定的位置；但又不能在空间展开，不可能同时出现在 PM_1 和 PM_2 处，因此，被称为不相符实验。不相符实验证明光子既不是经典的粒子，也不是经典的波，它既作为一个整体不可分割，在空间又具有一定的分布，因此，具有波粒二象性。



$$z_t^* z_t + z_r^* z_r = 1$$

$$d_t = x_{SA} + x_{At}$$

$$d_r = x_{SA} + x_{Ar}$$

$$z_t = e^{ikx_{SA}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{ikx_{At}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikd_t}$$

$$z_r = e^{ikx_{SA}} \left(\frac{e^{i\pi}}{\sqrt{2}} \right) e^{ikx_{Ar}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikd_r}$$

$$z_t^* z_t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ikd_t} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikd_t} \right) = \frac{1}{2}$$

$$z_r^* z_r = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ikd_r} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikd_r} \right) = \frac{1}{2}$$

单光子干涉，量子力学的第三个基本原则

将不相符实验做一个简单的改动，即在单光子光源和分束器之间再加入一个分束器和两个反射平面镜。实验通过移动平面镜 B 的位置改变光子通过其中一路(ABD)的长度，每次移动 $\lambda/25$ 。

实验结果再次显示了光的波粒二象性。第一，在试验过程中 PM_1 和 PM_2 一次只可能接收到一个光子，但 PM_1 和 PM_2 不可同时接收到光子，显示了光的粒子性。第二， PM_1 和 PM_2 接收到光子的数量与分束器 A 与反光镜 B 之间的距离有关，具体数据如图 4 所示。

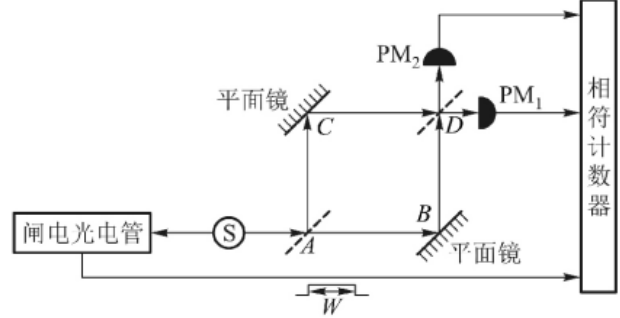
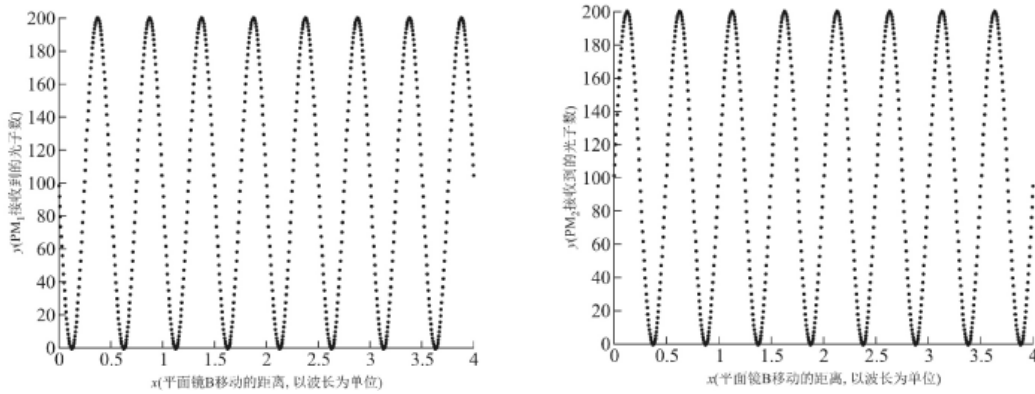


图 4 所示是一个典型的干涉图样，说明了光具有波动性。这种粒子的干涉性很好的解释了波函数的叠加原理。

设光子沿路径 ABD 到达 PM_1 和 PM_2 的波函数为



$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi} \left(\frac{e^{i\pi}}{\sqrt{2}} \right) e^{ikd_1} = \frac{1}{2} e^{ikd_1}$$

式中引入 $e^{i\pi}$ 是因为光被反射时引起了 π 相位的突变; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 是波数, d_1 是沿着路线 ABD 到达 PM_1 所通过的路程。

沿路径 ABD 到达 PM_1 的概率为

$$P_{ABD} = \Psi(r) \Psi^*(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi} \left(\frac{e^{i\pi}}{\sqrt{2}} \right) e^{ikd_1} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi} \left(\frac{e^{-i\pi}}{\sqrt{2}} \right) e^{-ikd_1} = \frac{1}{4}$$

同理，沿路径 ACD 到达 PM_1 的波函数为

$$\Psi'(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi} \left(\frac{e^{i\pi}}{\sqrt{2}} \right) e^{ikd_2}$$

沿路径 ACD 到达 PM_1 的概率为

$$P_{ACD} = \Psi'(r)\Psi'^*(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi} \left(\frac{e^{i\pi}}{\sqrt{2}}\right) e^{ikd_2} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi} \left(\frac{e^{-i\pi}}{\sqrt{2}}\right) e^{-ikd_2} = \frac{1}{4}$$

光子被 PM1 探测到的概率为

$$P_1 = P_{ABD} + P_{ACD} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

综上推导，无论光子是从 A 到达 B 或者从 A 到达 C，到达光电管 PM₁ 和 PM₂ 的概率必定各是 50%，并且与反光镜 B 的位置无关，但是此结果与实验完全不符，因此，在量子理论中概率相加是不成立的。

这就体现了量子力学的第三个基本原则——**态叠加原理**：假如一个事件的发生可以通过多种途径的话（在目前的情况下，就是光所能通过的多条路径），我们就把所有途径的**概率幅**加在一起。

光子经过 C 和 B 到达 D 都是可能的路径，当我们把各种可能的状态加和所得到的方程作为表示粒子状态的波函数，我们得到光子经过 C 或 B 到达 D 后继而到达 PM₁ 的波函数为

$$\Psi_{PM_1} = C_1 \Psi_{ABD} + C_2 \Psi_{ACD} = \frac{1}{2} e^{ikd_1} + \frac{1}{2} e^{ikd_2}$$

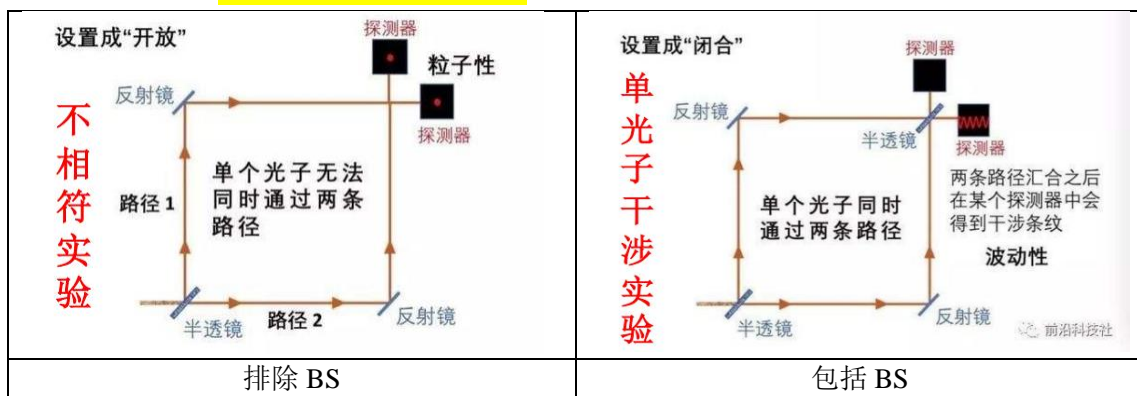
光子经过 C 或 B 到达 D 后继而到达 PM₁ 的概率为

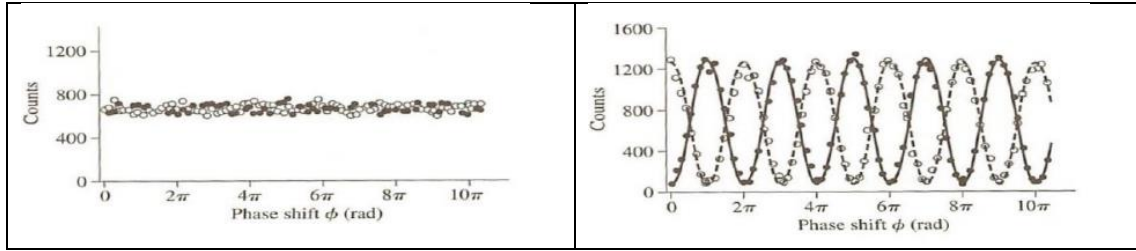
$$P_1 = \Psi_{PM_1} \Psi_{PM_1}^* = \left(\frac{1}{2} e^{ikd_1} + \frac{1}{2} e^{ikd_2}\right) \left(\frac{1}{2} e^{-ikd_1} + \frac{1}{2} e^{-ikd_2}\right) = \cos^2 \left[\frac{k(d_1 - d_2)}{2}\right]$$

上式结果与实验结果完全吻合，这就说明如果光子在光源和探测器之间存在多个可以通过的途径，其波函数必须把每一条途径都包含进去。

延迟选择实验（1979）

延迟选择思想实验中，对粒子性和波动性的界定被延迟到了测量阶段。包括还是排除第二个 BS 的决定是在光子进入干涉仪以后才作出的，所以当光子通过第一个 BS 时，它不可能“知道”接着将会是哪一个实验。因此，光子在实验中既能表现粒子性，又能表现出波动性。事实上，**取决于测量的时间和方式**，光也可以同时以这两种形态存在。





“任何一种基本量子现象只在其被记录之后才是一种现象”（玻尔），在光子上路之前还是途中作出决定，这在量子实验中是没有区别的。光子在通过第一个透镜到插入第二个透镜之间“到底”在哪里，是什么，都是一个无意义的问题，它不是一个“客观真实”！我们不能改变过去发生的事实，但可以延迟决定过去“应当”怎样发生。

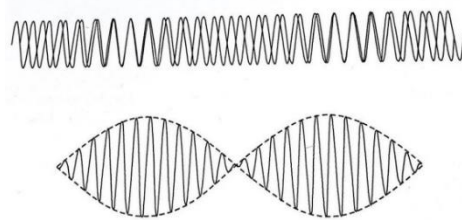
电子的波函数理论

如何将电子（或者有质量的粒子）的波动性和粒子性协调统一到一起？如何在考虑波粒二象性的前提下描述一个存在于有限空间中的局域的粒子？

一个局域的粒子可以描述为多个不同波长的波的叠加：

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A \sin((k + \Delta k)x) \\ \psi_2(x) &= A \sin((k - \Delta k)x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi_1(x) + \psi_2(x) \\ &= A \sin((k + \Delta k)x) + A \sin((k - \Delta k)x) \\ &= 2A \sin(kx) \cos(\Delta kx)\end{aligned}$$



为了描述一个局域在很小区域内的单个电子（或任何粒子），需要的波包是只在一个局域的区域内有值而在其他任何地方值均为零。这样的波包可以由波长连续分布的一系列波叠加构成，其中心波数为 k ，波数分布范围 Δk 。

随着波的数目的增加，总的波包越来越局域化。当采用连续波长分布，即波的数目无限大时，对于波数范围 Δk 的波包，局域在 $\Delta x = \pi / \Delta k$ 。

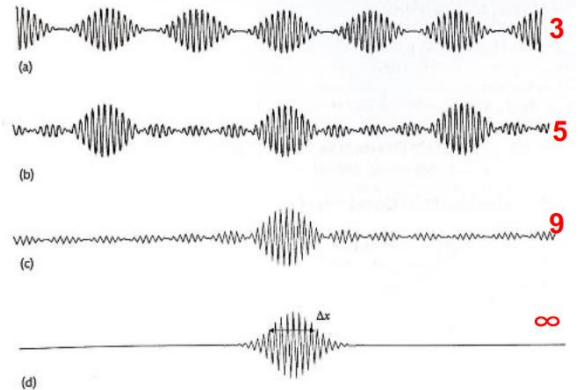
$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} e^{ik_0 x}$$

中心位置在 $x = 0$ 宽度为 $\Delta x = \sigma$ 的高斯波包, 对应的德布罗意波长为 $\lambda \cong 2\pi/k_0$

$$\phi(k) = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\sigma^2(k-k_0)^2}$$

中心波长 $2\pi/k_0$ ，波长范围为 $\frac{2\pi}{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}$ 到 $\frac{2\pi}{k_0 + \frac{\Delta k}{2}}$

平均波数 k_0 ，对应着一个动量为 $p_0 = \hbar k_0$ 的粒子。



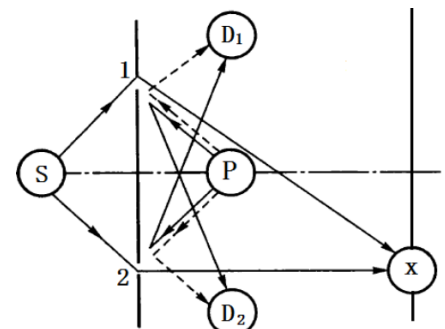
电子双缝干涉：测量的效应

现象：测量得知电子从哪个缝穿过，则干涉条纹消失

如图：用光子和透过狭缝的电子作用，通过在不同探测器记录散射的光子来确定电子的路径(电子从狭缝 1 或狭缝 2 通过)

对电子：

$$\psi_1 = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | S \rangle, \quad \psi_2 = \langle x | 2 \rangle \langle 2 | S \rangle$$



对光子，考虑对称性

$$\varphi_1 = \langle D_1 | 1 \rangle \langle 1 | P \rangle = \langle D_2 | 2 \rangle \langle 2 | P \rangle$$

$$\varphi_2 = \langle D_2 | 1 \rangle \langle 1 | P \rangle = \langle D_1 | 2 \rangle \langle 2 | P \rangle$$

探测器 D1 和 D2 无法辨别电子从狭缝 1 和 狭缝 2 通过，即光子的波长很长，探测器 D1 和 D2 都能探测到散射光子。

光子被 D1 记录，电子从狭缝 1 到达 x，波函数

$$\langle x | 1 \rangle \langle 1 | S \rangle \langle D_1 | 1 \rangle \langle 1 | P \rangle = \psi_1 \varphi_1$$

光子被 D1 记录，电子从狭缝 2 到达 x，波函数

$$\langle x | 2 \rangle \langle 2 | S \rangle \langle D_1 | 2 \rangle \langle 2 | P \rangle = \psi_2 \varphi_2$$

光子被 D1 记录，电子到达 x 的波函数

$$\langle x | S \rangle \langle D_1 | P \rangle = \psi_1 \varphi_1 + \psi_2 \varphi_2$$

光子被 D2 记录，电子从狭缝 1 通过，波函数

$$\langle x | 1 \rangle \langle 1 | S \rangle \langle D_2 | 1 \rangle \langle 1 | P \rangle = \psi_1 \varphi_2$$

光子被 D2 记录，电子从狭缝 2 通过，波函数

$$\langle x | 2 \rangle \langle 2 | S \rangle \langle D_2 | 2 \rangle \langle 2 | P \rangle = \psi_2 \varphi_1$$

光子被 D2 记录，电子到达 x 的波函数

$$\langle x | S \rangle \langle D_2 | P \rangle = \psi_1 \varphi_2 + \psi_2 \varphi_1$$

不论光子被 D1 记录还是被 D2 记录，电子到达 x 的概率

$$\begin{aligned} |\langle x | S \rangle|^2 &= |\langle x | S \rangle \langle D_1 | P \rangle|^2 + |\langle x | S \rangle \langle D_2 | P \rangle|^2 \\ &= |\psi_1 \varphi_1 + \psi_2 \varphi_2|^2 + |\psi_1 \varphi_2 + \psi_2 \varphi_1|^2 \\ &= (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) + (\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*)(\varphi_1^* \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^*) \end{aligned}$$

探测器 D1 和 D2 的光子无法辨别电子从狭缝 1 和狭缝 2 通过，屏幕上出现电子的干涉条纹，完全无法区分，即 $\varphi_1 = \varphi_2$

$$|\langle x | S \rangle|^2 = 2 |\psi_1 + \psi_2|^2 |\varphi_1|^2 \quad (\text{拆项之后有干涉项，所以有干涉条纹})$$

若光子的波长很短，从光子被 D1(D2)记录可辨别电子从狭缝 1 (狭缝 2)通过，光子和从狭缝 2(狭缝 1)的电子散射再跑到 D1(D2)的概率很小，即

$$\varphi_2 \rightarrow 0$$

电子到达 x 的概率

$$|\langle x | S \rangle|^2 \rightarrow (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) |\varphi_1|^2 \quad (\text{拆项之后无干涉项，所以无干涉条纹})$$

也即若光子的波长很短，足以从光子被探测器 D1 或 D2 记录来辨别电子从狭缝 1 或狭缝 2 通过，屏幕上电子的干涉条纹将消失。

通俗的说，人们不知道电子的路径，即不知道从狭缝 1(狭缝 2)通过，屏幕上干涉条纹出现，人们通过测量知道电子的路径时，干涉条纹消失。可见人们的测量行为会影响(改变)测量的结果。

玻色-爱因斯坦凝聚（1925）——电子波动性的证明

玻色-爱因斯坦凝聚是电子波动性的例证，解释：温度低，原子动量小，根据 $\lambda = h/p$ ，波长长大（原子占据体积变大，大于空间中分配的平均体积），波之间相互干涉，发生谐振。

公式推导：

将原子想象成球体：

$$r \approx \frac{\lambda_{dB}}{2} = \frac{h}{2mv}$$

凝聚的临界条件（原子的总体积大于空间体积）：

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{h}{2mv} \right)^3 > \frac{V}{N}$$

结合

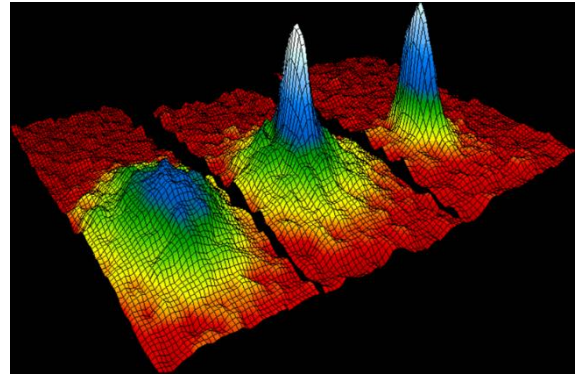
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

可推出临界温度：

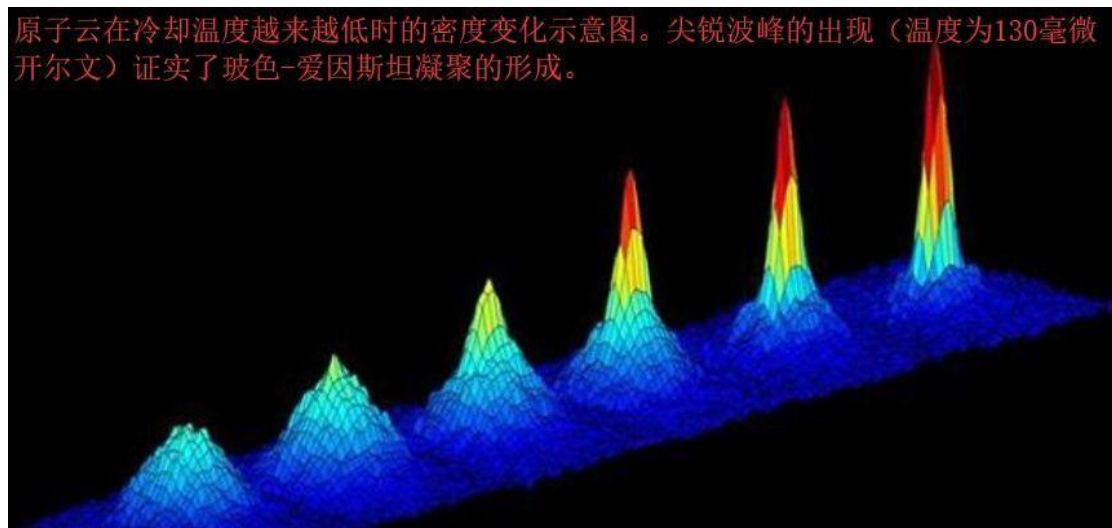
$$T_c \cong \left(\frac{\pi N}{6V} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{3mk_B}$$

即

$$T_c \cong 3.3125 \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{mk_B} \sim 500nK - 2\mu K$$



玻色-爱因斯坦凝聚图示：



由哥本哈根解释引出的思考（PPT14）

爱因斯坦始终拥护因果论，而质疑量子论。因此他多次对哥本哈根学派展开攻击！此外，薛定谔、惠勒等科学家提出的问题和实验等又延拓了量子的理论。

1927 第五届索尔维会议

会议主题：“电子和光子”

劳伦斯·布拉格	X射线的实验
康普顿	康普顿实验及其和经典电磁理论的不一致
德布罗意	粒子的德布罗意波

波恩和海森堡	量子力学的矩阵理论
薛定谔	波动力学
玻尔	量子公设和原子新理论；互补原理

第一种观点：这里没有“一个电子”，只有“一团电子云”，是一个空间中的实在，为德布罗意-薛定谔波所描述；

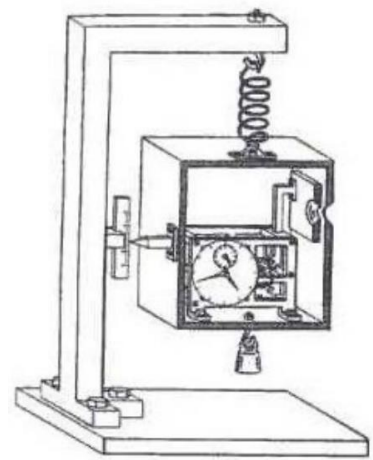
第二种观点：的确有一个电子，而 Ψ 是它的“概率分布”，电子本身不扩散到空中，而是它的概率波。

爱因斯坦承认观点 II 比观点 I 更加完备，但仍不得不反对观点 II，因为这种随机性表明，同一个过程会产生许多不同的结果。则感应屏上的许多区域就要同时对电子的观测作出反应，这似乎暗示了一种超距作用，从而违背相对论。

1930 第六届索尔维会议：爱因斯坦光箱实验

光箱的设计：

把光子箱中装有一定数量的放射性物质，下面放一只钟作为**计时控制器**，它能在某一时刻将盒子右上方的**小洞**打开，放出一个光子，这样**光子跑出来的时间**就能从计时钟上准确获知。少了一个粒子，**小盒的重量差**则可由小盒左方的**计量尺**和下面的砝码准确地反映出来，根据爱因斯坦质能公式 $E=mc^2$ ，质量的减少可以折合成**能量的减少**；因此，放出一个粒子准确的时间和能量都能准确测得，盒子里的时钟定时后，在适当的时刻打开挡板。



玻尔的回应：

玻尔请大家回忆爱因斯坦创立的广义相对论。在爱因斯坦的广义相对论中，一个重要的成果是引力的“**时钟的延迟效应**”，也就是**在引力场越强的地方，时钟越慢**。如果一只钟挂在天花板上，另一只钟放在地板上，地板上的钟要比天花板上的钟慢 3×10^{-16} 秒。

玻尔抓住了这个细节。当“光盒子”失去一个光子时，因为失去一份能量，质量也随之减轻，盒子必然上升，事先与实验室钟表调整好同步的钟就失去了同步，因而**不可能精确测量光子逃逸出去的时间**，所以**能量与时间不可能同时测准**，又会导出测不准关系。可见，如果用这套装置来精确测定粒子的能量，就不能准确控制粒子跑出的时间。

1935 EPR 佯谬

EPR 佯谬-Einstein-Podolsky-Rosen 佯谬——爱因斯坦对哥本哈根派发起的最后一次攻击

EPR 的攻击：超光速通信违背了相对论原理

如果自旋方向在观测的那一刻才决定，则 A 与 B 必须同时做出反应，不管其间相距多远。它们怎么能做到**及时的相互通信**？爱因斯坦等人认为，既然**不可能由超过光速的信号传播**，那么量子论所说的粒子在观测时才变成真实的说法显然**违背了相对论的原理**，其中涉及了瞬间传播的信号。唯一的可能是两个粒子从分离的那一刹那，其状态已经客观的确定了，就像在经典世界中所描绘的那样。

哥本哈根学派的回应：坍缩前只有“一个粒子”

在观测前“现实”中并不存在两个自旋的粒子，自旋只有和观测联系起来才有意义，在那之前两个粒子只能看成“一个整体”。

爱因斯坦不言而喻的假定，EPR 实验中的两个粒子在观察前，分别都有个“客观”的自旋状态存在，就算是概率混合，但粒子客观地存在于那里。

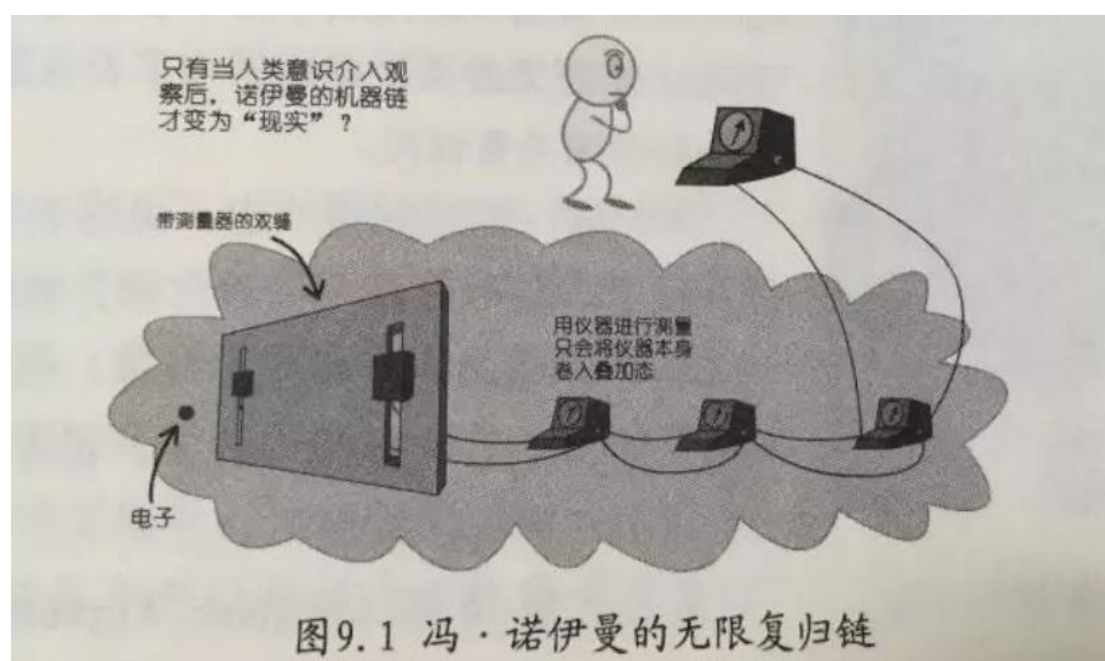
玻尔认为，当没有观测的时候，不存在一个客观独立的世界，所谓“实在”只有和观测手段连起来讲才有意义。在观测之前，并没有“两个粒子”，而只有“一个粒子”。

A 和 B“本来”没有自旋，直到我们采用某种方式观测了它们之后，所谓的“自旋”才具有物理意义，两个粒子才变成真实，变成客观独立的存在。但在那之前，它们仍然是互相联系的一个虚无的整体，对于其中任一个的观察必定扰动另一个的状态。并不存在超光速的信号，两个遥远的、具有相反自旋的粒子本是协调的一体，之间无须传递什么信号。其实是这个系统没有实在性（reality），而不是没有定域性（locality）。

1935 薛定谔的猫

冯·诺依曼的无限复归

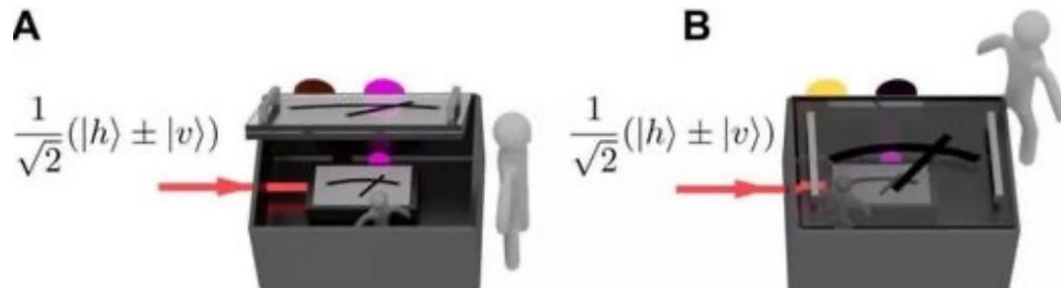
冯诺伊曼提出，如果用仪器观测，仪器本身的干扰便会掺杂进去，被观测物的状态虽然坍缩了，但是仪器此时又处于不确定状态了，如果再用一个仪器去观测这个仪器，这个链条最后一端的仪器总是处于不确定状态中，这被称为“无限复归”。如果把测量的仪器加入这个大系统，那么这个系统变从未坍缩过。那是什么导致我们看到实验最终确定的结果呢？难道是我们的自由意识？



“维格纳的朋友”

尤金·维格纳认为意识在触动波函数中担当了重要的角色。他提出一个思维实验，被称为“维格纳的朋友”。他想象在薛定谔的猫系统中，某个熟人戴着防毒面罩在猫的旁边观

察这只猫，而维格纳则不在这个房间中。对于维格纳而言，他可以假设箱子处于活猫/开心的朋友，和死猫/伤心的朋友。但是当维格纳事后询问他的朋友时，后者一定会否认这种叠加状态。所以维格纳总结到，当他的朋友，或者是有意识的人参与到这个系统中时，叠加态便不适用了。

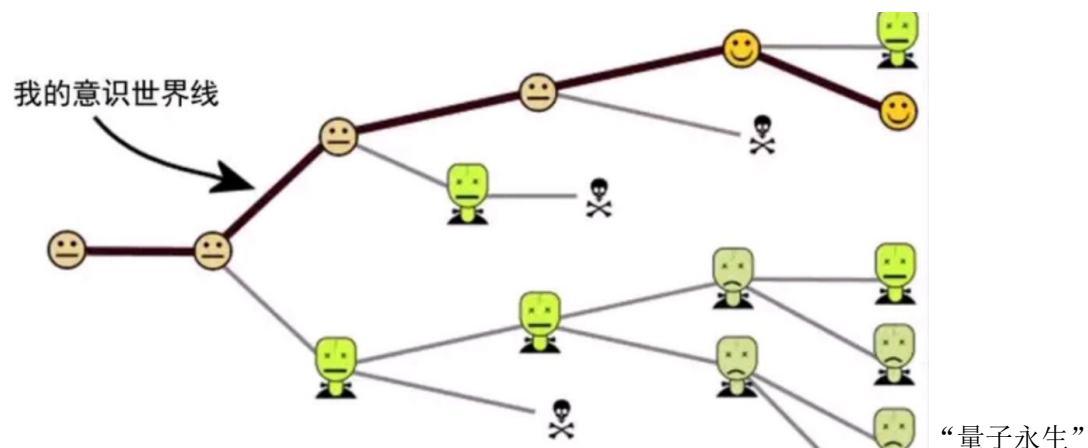
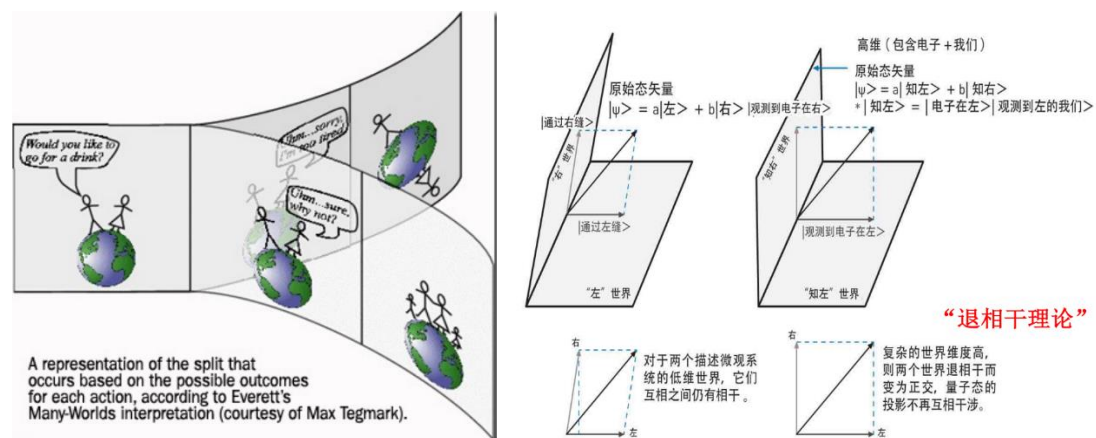


1979 惠勒延迟选择实验与“参与性宇宙”模型

宇宙的历史，可以在它实际发生后才被决定究竟是如何发生的。这样一来，宇宙本身是由一个有意识的观测者创造出来，也是有可能的事情。虽然宇宙的行为在理论上来讲已经存在了几百亿年，但某种延迟使得它直到被一个高级生物观测后才成为确定的事实。我们的观测行为本身参与了宇宙的创造过程。这就是所谓的“参与性宇宙模型”。

“多世界解释”

“平行宇宙”：高维“母宇宙”在三维世界投影的“子宇宙”



量子叠加与量子纠缠 (PPT15)

相干叠加态

量子的相干叠加态:

$$|\alpha\rangle = \cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle$$

考虑将 $|H\rangle$ 与 $|V\rangle$ 这一对基组变换为 $|+\rangle$ 与 $|-\rangle$:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle + |H\rangle)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle - |H\rangle)$$

即得

$$|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

用 $|+\rangle$ 与 $|-\rangle$ 基组表示 $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \cos\beta|+\rangle + \sin\beta|-\rangle$$

得

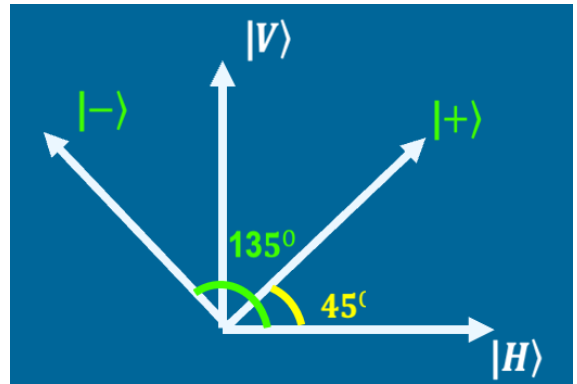
$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

如果我们在 (H, V) 基组下测量光子的偏振, 则输出为 $|H\rangle$ 或 $|V\rangle$, 对应的概率分别为 $\cos^2\alpha$ 和 $\sin^2\alpha$ 。但是, 如果我们在 $(+, -)$ 基组下测量光子的偏振, 则输出为 $|+\rangle$ 或 $|-\rangle$, 对应的概率分别为 $\cos^2\beta$ 和 $\sin^2\beta$ 。这说明**观测装置决定实验结果**。

能否用两个偏振 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\nearrow\rangle$ 描述同一光子? 否。

玻尔互补原理的一个例子: 如果对其中一个观测值的精确认识意味着衡量另一个观测值的所有可能结果具有完全相同的概率, 那么这两个观测值就是互补的。级联 Stern-Gerlach 实验就是一个具体的例子:



级联 Stern-Gerlach 实验¹

级联斯特恩-盖拉赫实验，我们一共做了三次。

第一次实验：

我们让银原子通过 z 方向的不均匀磁场，银原子分裂成了两束。然后，我们把下面那一束挡住，让上面那一束再次经过 z 方向不均匀磁场。

结果是，第一次通过 z 方向磁场的银原子，再次立马通过 z 方向磁场，银原子依然**只有一束**，并没有再次分裂成两束。银原子第二次没有分裂成两束，意味着银原子们第二次只受到了一个力的作用。只受到一个力，自然就意味着第二次银原子角动量的取值，只有一个。这就说明，一开始银原子在 z 方向的角动量可以取两个值，经过第一个 z 方向磁场以后，上面一束银原子的角动量在 z 方向上就只能取一个值了。这样，它们在第二次通过 z 方向磁场时，才能不分裂为两束。

第二次实验：

跟实验一不同，银原子第一次通过 z 方向的磁场分裂成两束后，再次通过的磁场是 x 方向的。结果是，银原子经过第二个 x 方向的磁场时，又再次分裂成了两束。这意味着通过第二个磁场的时候，银原子在 x 方向上的角动量可以取两个值。

第三次实验

在实验二的基础上，我们又加了一个 z 方向的磁场。经过了一次 z 方向磁场，一次 x 方向磁场之后，再让一束银原子再次经过 z 方向的磁场，结果是，银原子在 z 方向又分裂成了两束。

那么，银原子在 z 方向的自旋状态为什么会改变呢？状态改变了，当然是受到了其它因素的影响，受什么影响呢？我们再看看第一组级联斯特恩-盖拉赫实验：如果银原子通过

¹ 可参考：[什么是量子力学？——框架篇（上） - 哔哩哔哩 \(bilibili.com\)](https://www.bilibili.com/video/BV18t4y1g7uY/)

z 方向磁场后发生了分裂，我们让其中一束再次通过 z 方向磁场，它是不会分裂的。

但是，到了第三组实验，我们只不过在第一组实验的两个 z 方向磁场之间再加了一个 x 方向磁场，然后，第二次通过 z 方向磁场的银原子就分裂了。第一组没分裂，中间加了一个 x 方向磁场（第三组）以后就分裂了，这样一对比就会发现：能够影响银原子 z 方向自旋状态的，就只可能是中间测量银原子在 x 方向自旋这个操作了。

如果我们想描述斯特恩-盖拉赫实验，就必须发展一套全新的力学体系，因为这个实验展现出来的特性已经跟经典力学的根本观念发生了冲突。在这种全新的力学体系里，“测量”将具有完全不同于它在经典力学里的含义，它不再是简简单单地把某个确定的值读出来，而是会改变系统的状态，会参与到系统的演化中去。

我们不能再非黑即白地看待银原子的自旋。你不能认为一个银原子要么自旋向上，要么自旋向下，它也可以同时具备这两种状态，处于它们的叠加态。你去测量银原子的自旋，结果就既可能自旋向上，也可能自旋向下，一人分饰二角。只有这样，我们才能既满足“所有银原子的状态都一样”（都是自旋向上和自旋向下的叠加态），又满足“包含自旋向上和自旋向下两种状态”，从而解开上面的死结。

在第三组实验里，通过 x 方向磁场的银原子接下来会第二次通过 z 方向磁场，并且发生分裂。银原子通过第二个 z 方向磁场后分裂了，就说明银原子在通过第二个 z 方向磁场前必然是处于z 方向的自旋叠加态。而通过第二个 z 方向磁场前跟通过 x 方向磁场后是同一时刻，于是，在通过 x 方向磁场前后，银原子在 z 方向的自旋状态也都清楚了：通过 x 方向磁场前，银原子处于 z 方向自旋向上本征态；通过 x 方向磁场后（第二个 z 方向磁场前），银原子处于 z 方向的自旋叠加态。

也就是说，测量银原子 x 方向的自旋（通过 x 方向磁场），不仅让银原子在 x 方向上从叠加态变成了本征态，也让银原子在 z 方向上从自旋向上本征态变成了叠加态。

量子纠缠

两个或多个粒子经过短暂耦合之后，不论它们相隔多远，单独搅扰其中任意一个，将不可避免地影响到其他粒子。被拟人化的叫做“量子纠缠”。

量子纠缠——薛定谔在阅读 EPR 论文之后，形容两个暂时耦合的粒子，不再耦合之后彼此之间依旧维持的关联。量子纠缠不只是量子力学的某个很有意思的性质，而是量子力学的特征性质；量子纠缠在量子力学与经典思路之间做了一个完全切割。（量子纠缠似乎违反在相对论中对于信息传递所设定的速度极限。后来，爱因斯坦更讥讽量子纠缠为鬼魅般的超距作用。）

分离态和纠缠态的概念：

分离态可以写成两个光子的独立状态的乘积，即：

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$$

比如

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V_A\rangle|V_B\rangle + |V_A\rangle|H_B\rangle) = |V_A\rangle[\frac{1}{\sqrt{2}}(|V_B\rangle + |H_B\rangle)]$$

$|\psi_{AB}\rangle$ 可以写成两个光子的独立状态的乘积:

$$\begin{aligned} |\psi_A\rangle &= |V_A\rangle \\ |\psi_B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|V_B\rangle + |H_B\rangle) \end{aligned}$$

纠缠态不能写成两个光子的独立状态的乘积, 即:

$$|\psi_{AB}\rangle \neq |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$$

比如

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_A\rangle|V_B\rangle + |V_A\rangle|H_B\rangle)$$

无法写成两个光子的独立状态的乘积。且无论如何引入坐标变换, 都不能。比如可以引入如下的坐标变换

$$\begin{aligned} |V\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \\ |H\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \end{aligned}$$

得

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}[|+_A\rangle(|V_B\rangle + |H_B\rangle) + |-_A\rangle(|H_B\rangle - |V_B\rangle)]$$

还是无法写出两个光子的独立状态的乘积。当然, 也可以用反证法证明 $|\psi_{AB}\rangle$ 无论如何不能写成两个光子的独立状态的乘积: 假设以上状态是可分离态, 即

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$$

不妨设

$$\begin{aligned} |\psi_A\rangle &= c_1|V_A\rangle + c_2|H_A\rangle \\ |\psi_B\rangle &= d_1|V_B\rangle + d_2|H_B\rangle \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} |c_1|^2 + |c_2|^2 &= 1 \\ |d_1|^2 + |d_2|^2 &= 1 \end{aligned}$$

如果是可分离态, 则

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|H_A\rangle|V_B\rangle + |V_A\rangle|H_B\rangle) = (c_1|V_A\rangle + c_2|H_A\rangle)(d_1|V_B\rangle + d_2|H_B\rangle)$$

以上等式只在如下条件下成立

$$\begin{aligned} c_1d_2 &= c_2d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_1d_1 &= c_2d_2 = 0 \end{aligned}$$

两条条件不可能同时成立! 因此, 假设不成立。则 AB 处于纠缠态。

纠缠度 C 与贝尔态

对于光子 1 和光子 2, 其所有可能的状态:

$$|0_1, 0_2\rangle, |0_1, 1_2\rangle, |1_1, 0_2\rangle, |1_1, 1_2\rangle$$

则光子 1 和 2 的状态则为叠加态

$$|\psi_{12}\rangle = c_{00}|0_1, 0_2\rangle + c_{01}|0_1, 1_2\rangle + c_{10}|1_1, 0_2\rangle + c_{11}|1_1, 1_2\rangle$$

其中四个系数是待定的概率幅，满足

$$|c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 + |c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 = 1$$

物理意义是双粒子状态的联合测量概率

$$P(0_1, 0_2) = \langle 0_1, 0_2 | \psi_{12} \rangle^2 = |c_{00}|^2$$

$$P(0_1, 1_2) = \langle 0_1, 1_2 | \psi_{12} \rangle^2 = |c_{01}|^2$$

$$P(1_1, 0_2) = \langle 1_1, 0_2 | \psi_{12} \rangle^2 = |c_{10}|^2$$

$$P(1_1, 1_2) = \langle 1_1, 1_2 | \psi_{12} \rangle^2 = |c_{11}|^2$$

则对于单光子的不同状态

$$P(0_1) = P(0_1, 0_2) + P(0_1, 1_2) = |c_{00}|^2 + |c_{01}|^2$$

$$P(1_1) = P(1_1, 0_2) + P(1_1, 1_2) = |c_{10}|^2 + |c_{11}|^2$$

$$P(0_2) = P(0_1, 0_2) + P(1_1, 0_2) = |c_{00}|^2 + |c_{10}|^2$$

$$P(1_2) = P(0_1, 1_2) + P(1_1, 1_2) = |c_{01}|^2 + |c_{11}|^2$$

那么什么条件以下 $|\psi_{12}\rangle$ 是纠缠态？

我们定义 C (concurrence)，纠缠的度量

$$C = 2|c_{00}c_{11} - c_{01}c_{10}|$$

当且仅当 $C > 0$ 时，两粒子处于纠缠态。

当 $C = 0$ 时，两粒子是不纠缠的，或者可分离的。

当 $C = 1$ 时，两粒子最大纠缠。——两粒子的最大纠缠态：贝尔基态/贝尔态：

$$|B_{00}(1,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 0_2\rangle + |1_1, 1_2\rangle)$$

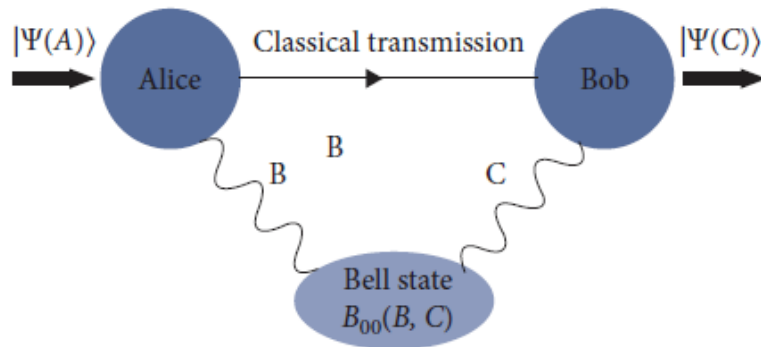
$$|B_{01}(1,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 1_2\rangle + |1_1, 0_2\rangle)$$

$$|B_{10}(1,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 0_2\rangle - |1_1, 1_2\rangle)$$

$$|B_{11}(1,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 1_2\rangle - |1_1, 0_2\rangle)$$

这些状态都是相互正交的。贝尔态的一个重要意义是我们可以把一般的纠缠态写成贝尔态的线性叠加。

量子隐形传态



第一步：纠缠态制备——制备贝尔基态

$$|B_{00}(B, C)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0_B, 0_C\rangle + |1_B, 1_C\rangle]$$

$$\begin{aligned}
|\psi(A, B, C)\rangle &= |\psi(A)\rangle |B_{00}(B, C)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [c_0(|0_A, 0_B, 0_C\rangle + |0_A, 1_B, 1_C\rangle) + c_1(|1_A, 0_B, 0_C\rangle + |1_A, 1_B, 1_C\rangle)] \\
|0_A, 0_B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|B_{00}(A, B)\rangle + |B_{10}(A, B)\rangle] \\
|0_A, 1_B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|B_{01}(A, B)\rangle + |B_{11}(A, B)\rangle] \\
|1_A, 0_B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|B_{01}(A, B)\rangle - |B_{11}(A, B)\rangle] \\
|1_A, 1_B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|B_{00}(A, B)\rangle - |B_{10}(A, B)\rangle]
\end{aligned}$$

代入贝尔基态表示

$$\begin{aligned}
|\psi(A, B, C)\rangle &= \frac{1}{2} [|B_{00}(A, B)\rangle (c_0|0_C\rangle + c_1|1_C\rangle) \\
&\quad + |B_{01}(A, B)\rangle (c_0|1_C\rangle + c_1|0_C\rangle) \\
&\quad + |B_{10}(A, B)\rangle (c_0|0_C\rangle - c_1|1_C\rangle) \\
&\quad + |B_{11}(A, B)\rangle (c_0|1_C\rangle - c_1|0_C\rangle)]
\end{aligned}$$

第二、三步：用贝尔基组联合测量 A 和 B；Alice 与 Bob 经典信道告知结果（基矢和结果）

$$|B_{00}(A, B)\rangle \rightarrow c_0|0_C\rangle + c_1|1_C\rangle$$

发现 C 光子与 A 光子同构，实现了量子叠加态的传输。而

$$|B_{01}(A, B)\rangle \rightarrow c_0|1_C\rangle + c_1|0_C\rangle$$

$$|B_{10}(A, B)\rangle \rightarrow c_0|0_C\rangle - c_1|1_C\rangle$$

$$|B_{11}(A, B)\rangle \rightarrow c_0|1_C\rangle - c_1|0_C\rangle$$

是 C 的叠加态通过幅度转换或/和相位转换实现的。

幅度转换： $|0_C\rangle \rightarrow |1_C\rangle, |1_C\rangle \rightarrow |0_C\rangle$

相位转换： $|0_C\rangle \rightarrow |0_C\rangle, |1_C\rangle \rightarrow -|1_C\rangle$

在隐形传态过程中使用的重要资源是量子纠缠。测量时，C 光子坍缩成与 A 同构的本征态。但由于可能的幅度/相位转换的存在，需要通信以使得 Bob 得知具体的状态。隐形传态过程中，B 光子只起到辅助的作用。并且 c_0 和 c_1 在传态过程中始终保密，这种特性可用于保密学。

- 首先，我们注意到传送信息的过程不能超过光速。物理信息的传递需要载体—经典信道 Classical transmission
- 第二点是，在传送过程中，状态在 Alice 端被破坏，同时在 Bob 端被创建。但这并不是量子复制！

不可克隆定理与量子复制（PPT16）

海森堡的测不准关系和玻尔的互补原理构成了量子力学的基础。在不破坏原始状态的情况下，是否有可能制造出一个未知量子态的完美拷贝或克隆？如果这成为可能，那么我们就可以复制尽可能多的量子态。我们就可以用任意精度测量任何变量，从而违反海森堡

测不准关系和互补原理。(有了多个一样的量子，多次测量求平均值就可以测出准确的 x 和 p)

克隆与超光速通信

如果我们能复制出量子态的相同副本，那么我们就可以实现比光速更快的超光速通信。根据爱因斯坦的相对论，任何信息的传输速度都不可能超过光速。也即，我们无法完美复制量子态。

对于叠加态，选取两个共轭基： $\{| \rightarrow \rangle, | \uparrow \rangle\}$ 和 $\{| \nearrow \rangle, | \nwarrow \rangle\}$

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow_A\rangle|\uparrow_B\rangle + |\uparrow_A\rangle|\rightarrow_B\rangle)$$

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nearrow_A\rangle|\nearrow_B\rangle - |\nwarrow_A\rangle|\nwarrow_B\rangle)$$

如果 Alice 想要传输一个“0”，她在 $\{| \rightarrow \rangle, | \uparrow \rangle\}$ 的基上测量她的光子。

$$|\rightarrow_A\rangle \Rightarrow \langle \rightarrow_A | \psi_{AB} \rangle = |\uparrow_B\rangle$$

$$|\uparrow_A\rangle \Rightarrow \langle \uparrow_A | \psi_{AB} \rangle = |\rightarrow_B\rangle$$

如果 Alice 想要传输一个“1”，她在 $\{| \nearrow \rangle, | \nwarrow \rangle\}$ 的基上测量她的光子。

$$|\nearrow_A\rangle \Rightarrow \langle \nearrow_A | \psi_{AB} \rangle = |\nearrow_B\rangle$$

$$|\nwarrow_A\rangle \Rightarrow \langle \nwarrow_A | \psi_{AB} \rangle = |\nwarrow_B\rangle$$

Alice 测量完光子的偏振后，Bob 的状态会根据 Alice 的选择而变为一种状态。鲍勃的策略是：

第一步，克隆他的光子，并制作大量相同的副本。

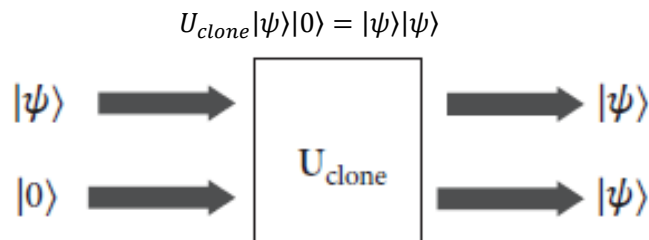
第二步，他将对所有克隆的光子进行 $\{| \rightarrow \rangle, | \uparrow \rangle\}$ 测量。

若 Alice 发送“0”，即以 $\{| \rightarrow \rangle, | \uparrow \rangle\}$ 为基测量光子：Bob 在 $\{| \rightarrow \rangle, | \uparrow \rangle\}$ 的基上测量他所有的克隆光子，结果都将是 $|\uparrow_B\rangle$ 。

若 Alice 发送“1”，即以 $\{| \nearrow \rangle, | \nwarrow \rangle\}$ 为基测量光子：Bob 在 $\{| \rightarrow \rangle, | \uparrow \rangle\}$ 的基上测量他所有的克隆光子，结果将是 $|\rightarrow_B\rangle, |\uparrow_B\rangle$ 各 50%。Bob 在 $\{| \nearrow \rangle, | \nwarrow \rangle\}$ 的基上测量他所有的克隆光子，结果都将是 $|\nearrow_B\rangle$ 。

量子不可克隆原理

首先我们假设：在量子信息中给出 Cloning Machine 的定义：克隆机器是满足某种操作的么正变换 U ：这种变换为：



令空白比特为 $|0\rangle$,目标比特为 $|0\rangle$ 或者 $|1\rangle$ ，copy machine 要满足以下关系：

$$U|0\rangle|0\rangle = |0\rangle|0\rangle; U|1\rangle|0\rangle = |1\rangle|1\rangle$$

对任意的 $|\phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \in H$,有归一化条件： $|a|^2 + |b|^2 = 1$

$$\begin{aligned} U|\phi\rangle|0\rangle &= U(a|0\rangle + b|1\rangle)|0\rangle = aU|0\rangle|0\rangle + bU|1\rangle|0\rangle \\ &= a|0\rangle|0\rangle + b|1\rangle|1\rangle \end{aligned}$$

根据 copy machine 定义，有：

$$\begin{aligned} U|\phi\rangle|0\rangle &= |\phi\rangle|\phi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)(a|0\rangle + b|1\rangle) \\ &= a^2|0\rangle|0\rangle + b^2|1\rangle|1\rangle + ab|0\rangle|1\rangle + ab|1\rangle|0\rangle \end{aligned}$$

显然二结果并不相符，克隆不可能实现。

量子复制与保真度 F

如果我们不能精确地复制量子态，我们能多大程度上复制一个任意态？

定义保真度

$$F = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$$

衡量复制的有多好的标准。

如果我们想将状态 $|\phi\rangle$ 复制到另一个状态 $|\phi\rangle$ 上，那么 $|\langle\phi|\phi\rangle|^2$ 是对复制质量的度量。

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle \\ F &= |\langle\phi|0\rangle|^2 = \cos^2\theta \end{aligned}$$

考虑将一个系统的状态（如光子）复制到另一个系统。原始状态的质量降低，使得两个系统的质量相同。将原件复制到空白页上。复印机准备两份相同的复制件，使两份的质量都低于原件。

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= \cos\theta|0_1\rangle + \sin\theta|1_1\rangle \\ U_{clone}|\phi_1\rangle|0_2\rangle &= |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle \end{aligned}$$

为了获得最大的保真度，我们需要一个辅助系统 3，初态 $|0_3\rangle$ 。则系统初态

$$|\Phi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle = \cos\theta|0_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle + \sin\theta|1_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle$$

可通过以下量子变换获得保真度最高的复印机：

$$\begin{aligned} U_{clone}|0_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|0_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}(|0_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle + |1_1\rangle|0_2\rangle|1_3\rangle) \\ U_{clone}|1_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}|1_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}(|0_1\rangle|1_2\rangle|0_3\rangle + |1_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle) \end{aligned}$$

代入上述变换可得：

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle &= U_{copy}|\Phi_{123}\rangle = U_{copy}|\phi_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\theta|000\rangle - \sin\theta|111\rangle) - \frac{\cos\theta}{\sqrt{6}}(|011\rangle + |101\rangle) + \frac{\sin\theta}{\sqrt{6}}(|010\rangle + |100\rangle) \end{aligned}$$

但我们并非需要同时关心三个光子的状态，而是只需单独考虑某一个光子是否保真。比如，考虑第一个量子任何首项为 $|\phi_1\rangle$ 的 $|\Phi_{123}\rangle$ 都应与 $|\Psi_{123}\rangle$ 计算保真度并加和。比如：

$$\begin{aligned} \langle\phi 00|\Psi_{123}\rangle &= \cos\theta\langle 000|\Psi_{123}\rangle + \sin\theta\langle 100|\Psi_{123}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos^2\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin^2\theta \\ \langle\phi 01|\Psi_{123}\rangle &= \cos\theta\langle 001|\Psi_{123}\rangle + \sin\theta\langle 101|\Psi_{123}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

$$\langle \phi_{10} | \Psi_{123} \rangle = \cos\theta \langle 010 | \Psi_{123} \rangle + \sin\theta \langle 110 | \Psi_{123} \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin\theta \cos\theta$$

$$\langle \phi_{11} | \Psi_{123} \rangle = \cos\theta \langle 011 | \Psi_{123} \rangle + \sin\theta \langle 111 | \Psi_{123} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} \cos^2\theta - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin^2\theta$$

四式相加，得到

$$F_1 = |\langle \phi_{00} | \Psi_{123} \rangle|^2 + |\langle \phi_{01} | \Psi_{123} \rangle|^2 + |\langle \phi_{10} | \Psi_{123} \rangle|^2 + |\langle \phi_{11} | \Psi_{123} \rangle|^2 = \frac{5}{6}$$

同理可算出

$$F_2 = |\langle 0\phi_0 | \Psi_{123} \rangle|^2 + |\langle 0\phi_1 | \Psi_{123} \rangle|^2 + |\langle 1\phi_0 | \Psi_{123} \rangle|^2 + |\langle 1\phi_1 | \Psi_{123} \rangle|^2 = \frac{5}{6}$$

保真度与状态 $|\phi_i\rangle$ 中的 θ 无关。

EPR 佯谬与贝尔定理（PPT17）²

EPR 佯谬及其思想实验（增补）

定域实在论假设

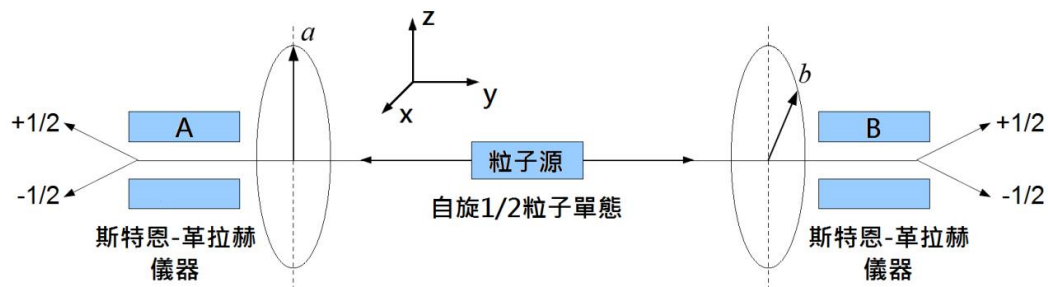
EPR 佯谬是基于这样两个假设，来导出正统量子力学的不完备性的。这两个假设是：

定域论：某区域发生的事件**不能以超过光速的传递方式**影响其它区域。对粒子 A 的测量不会影响到粒子 B 的状态。

实在论：做实验观测到的现象是出自于某种物理实在，而这物理实在**与观测无关**。

这里引出了一个概念：“物理实在”（Physical Reality）。它是指，在不对系统进行任何程度的扰动下，如果我们能准确预测物理量的值，那么就存在一个物理实在的元素与这个物理量对应。

EPR 佯谬是基于这样一个思想实验。我们有一个粒子源，它能够同时产生两个自旋 1/2 的粒子。单个电子的自旋方向是不确定的，但是粒子源保证了这两个电子的自旋总是相反的，即双电子体系的总自旋为 0。



² 可参考：[EPR 佯谬与定域隐变量理论 - 小时百科 \(wuli.wiki\)](http://wuli.wiki/wiki/EPR_佯谬与定域隐变量理论)

其中一个电子我们设为 A ，它经过左侧的斯特恩-格拉赫²实验装置，被测量其自旋沿某一方向上的投影分量。根据量子力学的**坍缩假设**，电子的状态会坍缩到沿这一方向上自旋为 $1/2$ 或 $-1/2$ 的本征态，它们是相应自旋算符的本征态：例如可以是 S_z 或 S_x 。以 S_z 的两个本征态 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 为自旋空间的基底，那么自旋算符在数学上可以写为泡利算符乘以 $1/2$ 。（本文中我们采用自然单位制，即忽略所有的 c 或 \hbar 。）

由于 A, B 两粒子体系的量子态是自旋单态，在对 A 作测量时，根据正统量子力学， B 粒子的状态“似乎也发生了坍缩”。例如当 A 粒子测得的 $S_z = 1/2$ 时， B 粒子测得的 S_z 就一定是 $-1/2$ ，这是两电子的总自旋为 0 的必然要求。那么，似乎有一种鬼魅般的超距作用在起作用

.....

现在回到 Bell 实验。当我们对电子 A 测量得到 $S_z = 1/2$ 的结果时，根据两电子处于一个自旋单态（总自旋为 0 ），我们就能够精准预测电子 B 的 S_z 测量结果为 $-1/2$ 。这就意味着，在对 A 测量得到 $S_z = 1/2$ 的结果时， B 电子的 S_z 是一个物理实在。再根据定域论假设，对 A 的测量不可能通过超光速的作用影响 B 的状态，也就是说 B 电子的 S_z 早已是物理实在，它自粒子源产生粒子源起就诞生了。

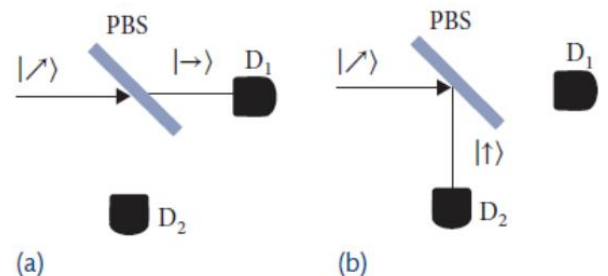
注意我们除了能对电子 A 测量 S_z ，还能测量 S_x, S_y 。那么根据定域实在论，似乎对于 B 电子而言 S_x, S_y, S_z 都是物理实在。这就造成了矛盾。电子三个方向自旋算符是两两不对易的。因此 EPR 佯谬最终导出一个结论：正统量子力学的波函数无法给出关于物理实在的完整描述。换句话说，正统量子力学是不完备的。除非我们推翻定域论或实在论这看似非常合理的假设。爱因斯坦和玻尔曾经围绕 EPR 佯谬展开辩论，辩论的焦点在论文中定域论和实在论的合理性。从现代的观点看，处于纠缠态的系统具有不可分割性，这种不可分割性是独立于空间的性质，因此局域性完全有可能违背。

定域隐变量理论：哥本哈根学派，我要 diss 你！

德布罗意，隐变量假说：量子效应表面的随机涨落实则是由一些人类尚不知晓的**隐形变量与已知变量相互作用共同铸就的**。我们无法预测单独一个粒子的运动趋势，或许并不是因为它没有严格遵循因果关系，而是由于我们的理论或实验水平还不够，无法感知到这些隐变量。

这两个光子间有什么区别？在通过 PBS 之前，这两个光子之间有什么区别？如果我们知道它们之间的区别，我们就能搞清楚为什么它们在通过 PBS 之后表现不同。

量子力学告诉我们，两个光子间没有区别，然而最后它们一个处于 $|\rightarrow\rangle$ ，一个处于 $|\uparrow\rangle$ 。



如果我们可以在两套互补基组下定义具有明确偏振方向的光子，那么量子理论应该可以确定的预测光子通过不同偏振方向的 PBS 后的测量结果。

爱因斯坦 diss 道：正统量子力学的波函数无法给出关于物理实在的完整描述!!!

EPR 论文的最后给出了一个解决方案，他们认为存在一个完备的描述，即在波函数外还存在一种隐变量，导致能够得到正统量子力学所预言的结果。这被称为是定域隐变量

理论 (Hidden-variable Theory)。然而这一理论的数学必然是复杂的，我们对隐变量的结构一无所知。从而是否存在一个定域隐变量理论与正统量子力学等价，这件事是十分困难的。以至于自 EPR 佯谬提出以后，人们很长一段时间停滞在关于这个问题哲学和思辨层面的讨论。直到 1964 年 Bell 提出著名的 Bell 不等式，人们终于能够进行实验上定量的测量来检验两个理论孰是孰非。下面我们先对定域隐变量理论进行简要的介绍。

我们知道，根据量子力学，假设 A 粒子和 B 粒子处于一个自旋单态（总自旋为 0。我们也可以取成其他的纠缠态。），那么对 A 粒子和 B 粒子的测量的统计结果是不独立的。我们用 $P(a|x)$ 表示经过测量 x 得到结果 a 的概率。 $P(ab|xy)$ 表示，A 粒子经过测量 x ，B 粒子经过测量 y 后，分别得到结果 a, b 的概率。那么有

$$P(ab|xy) \neq P(a|x)P(b|y). \quad (2)$$

我们希望引入一个隐变量 λ ，它能够完备地给出物理实在的刻画。那么根据定域实在论的假设，当 x, y, λ 确定后，A 和 B 粒子的测量结果将在统计上是独立的，这也意味着能够将它们分割成两个独立的互不干扰的系统。变量 $\lambda \in \Lambda$ 自粒子源产生两粒子的时候就被随机采样了，其采样的分布函数是 $q(\lambda)$ ，并且隐变量被 A 和 B 随身“携带”。最后 A 粒子的测量结果同时与 x 和 λ 有关，B 粒子的测量结果同时与 y 和 λ 。我们有

$$P(ab|xy, \lambda) = P(a|x, \lambda)P(b|y, \lambda). \quad (3)$$

然而隐变量无法被我们直接观测到，实验上能测量得到的统计结果是 $P(a|x), P(b|y), P(ab|xy)$ 。它们可以被表达为

$$\begin{aligned} P(a|x) &= \int d\lambda q(\lambda) P(a|x, \lambda), \\ P(b|y) &= \int d\lambda q(\lambda) P(b|y, \lambda), \\ P(ab|xy) &= \int d\lambda q(\lambda) P(ab|xy, \lambda). \end{aligned} \quad (4)$$

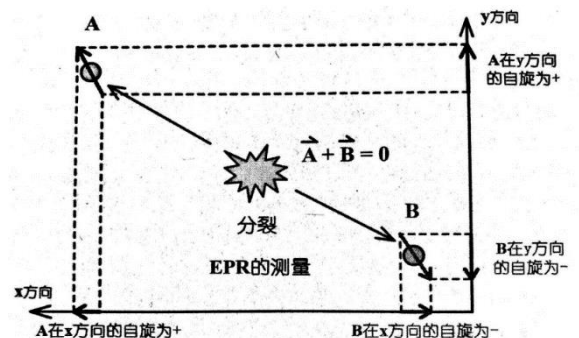
以上就是定域隐变量理论的基本内容。

Bell 不等式

贝尔不认同教科书上对于量子论的“正统解释”。他想要的是一个确定的、客观的物理理论，他把自己描述为爱因斯坦的一个忠实追随者。毕业后主要工作集中在加速器和粒子物理领域，但仍对量子物理保持浓厚兴趣。他为隐变量理论的想法着迷，认为它恢复了实在论和决定论，使世界重新回到客观独立、优雅确定、严格遵守因果关系的轨道上。认为隐变量理论可以完成对量子力学的完备化。

相关性

(A, B) 的相关性: (A+, B-) 相关性为 1;
(A+, B+) 相关性为 -1; 若 B 取值和 A 毫无关系，完全随机，则相关性为 0。



在三个方向（x, y, z）上进行观测。不要求它们相互垂直，任意取即可。那么，结果矩阵为：

$$\dots \begin{pmatrix} Ax & Ay & Az & Bx & By & Bz & \text{概率} \\ + & + & + & - & - & - & N_1 \\ + & + & - & - & - & + & N_2 \\ + & - & + & - & + & - & N_3 \\ + & - & - & - & + & + & N_4 \\ - & + & + & + & - & - & N_5 \\ - & + & - & + & - & + & N_6 \\ - & - & + & + & + & - & N_7 \\ - & - & - & + & + & + & N_8 \end{pmatrix}$$

显然 $N_1 + N_2 + \dots + N_8 = 1$

（Ax+, By+）？观察每一行，若满足 Ax 与 By 同号即为+1，反之为-1：

$$P_{xy} = -N_1 - N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 - N_7 - N_8$$

同理

$$P_{xz} = -N_1 + N_2 - N_3 + N_4 + N_5 - N_6 + N_7 - N_8$$

$$P_{zy} = -N_1 + N_2 + N_3 - N_4 - N_5 + N_6 + N_7 - N_8$$

$$\begin{aligned} |P_{xz} - P_{zy}| &= |-2N_3 + 2N_4 + 2N_5 - 2N_6| = 2|-N_3 + N_4 + N_5 - N_6| \\ &\leq 2(|N_4 + N_5| + |N_3 + N_6|) \\ &= 2(N_3 + N_4 + N_5 + N_6) \\ &= 1 + P_{xy} \end{aligned}$$

即得经典概率下的贝尔不等式

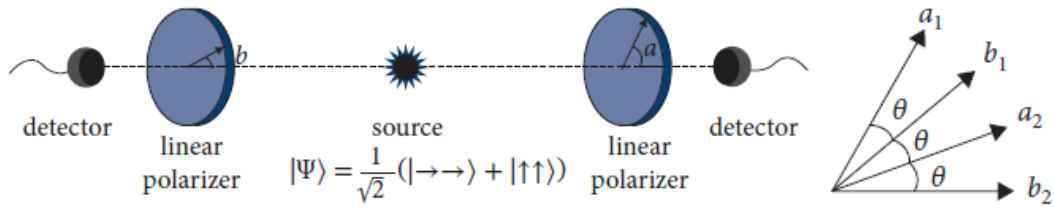
$$|P_{xz} - P_{zy}| \leq 1 + P_{xy}$$

隐变量理论中，对于两个粒子的描述：无论观察与否，两个粒子始终存在于客观现实之内，它们的状态从分裂的一刹那起就都是确定无疑的。若禁止超光速信号传播，则理论上在同时观察两个粒子的时候，它们之间无法交换任何信息，它们所能达到的最大相关度限于经典世界所给出的极限，即贝尔不等式。如果实验检验能够发现违背 Bell 不等式，则说明定域隐变量理论是错误的。

如果世界的本质是经典的，即如果世界满足定域实在性，那么我们任意取三个方向观测 A 和 B 的自旋，他们所表现出来的相关度必定要受限于贝尔不等式之内。

在量子论中，只要我们把 x 和 y 之间的夹角取得足够小，则贝尔不等式是可以被突破的。即，在量子主宰的世界里，A 和 B 在相隔非常遥远的情况下，在不同方向上仍表现出很高的相关度，以至于贝尔不等式不成立。1972 年，Freedman and Clauser 做了第一个贝尔检验（Bell test），结果违反 Bell 不等式。然而因为存在定域性漏洞，即纠缠的粒子间距离太小，不足以说明纠缠的非局域性，结果不具有说服力。

简化的 Bell 不等式



$$\frac{p_{12}(a_1, b_1) - p_{12}(a_1, b_2) + p_{12}(a_2, b_1) + p_{12}(a_2, b_2)}{p_1(a_2) + p_2(b_1)} \leq 1$$

$P_1(a)$, $P_1(b)$ 独立于方向的选择, 而联合概率 $P_{12}(a, b)$ 仅取决于 a 和 b 之间的角度 θ :

$$P_{12}(a, b) = P_{12}(\theta)$$

则贝尔不等式

$$S(\theta) = \frac{3p_{12}(\theta) - p_{12}(3\theta)}{p_1 + p_2} \leq 1.$$

量子力学预测及实验验证

$$|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle + |\rightarrow_1\rangle|\rightarrow_2\rangle)$$

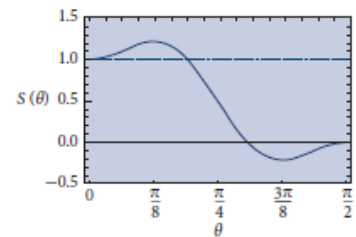
$$\begin{aligned} p_{12}(a, b) &= |\langle a|\langle b|\psi_{12}\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\langle a|\uparrow_1\rangle\langle b|\uparrow_2\rangle + \langle a|\rightarrow_1\rangle\langle b|\rightarrow_2\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}[\sin a \sin b + \cos a \cos b]^2 = \frac{1}{2}\cos^2(a - b) = \frac{1}{2}\cos^2 \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(a) &= |\langle a|\langle\uparrow_2|\psi_{12}\rangle|^2 + |\langle a|\langle\rightarrow_2|\psi_{12}\rangle|^2 = \frac{1}{2}(|\langle a|\uparrow_1\rangle\langle\uparrow_2|\uparrow_2\rangle|^2 + |\langle a|\rightarrow_1\rangle\langle\rightarrow_2|\rightarrow_2\rangle|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\sin^2 a + \cos^2 a) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

可将贝尔不等式化为

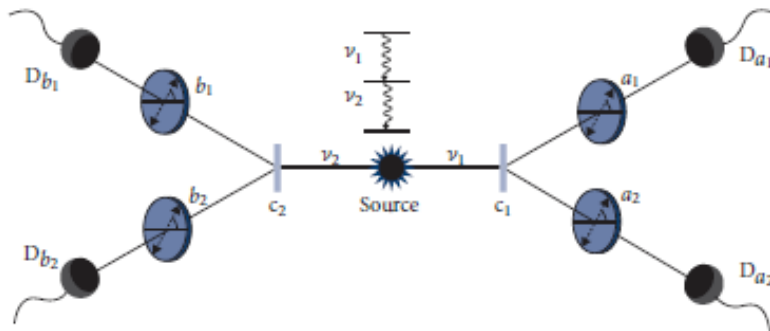
$$S(\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - \cos^2 3\theta).$$

由 S 函数图像可以看出: S 可以大于 1, 量子力学违反了 Bell 不等式。定域性和实在性在量子力学中是不共存的!



随后, 1982 年 Aspect, Grangier, and Roger 等人及后来更精密的实验观测都肯定正统量子力学理论是正确的, 定域隐变量理论所给出的不等式与实验结果不符。我们的世界不可能如爱因斯坦所梦想的那样, 既是定域的 (没有超光速信号的传播), 又是实在的 (存在一个客观确定的世界, 可以为隐变量所描述)。定域实在性 (local realism) 被排除。则要么放弃定域性, 要么放弃实在性。

Aspect 的实验装置：³



用实验验证贝尔不等式，其根本目的之一就是要验证量子力学到底是定域的，还是非定域的？非定域性的意思是说，如果测量纠缠光子对中一个光子的偏振，将会影响到它的孪生兄弟--另一个光子的偏振方向。这种影响的发生，不允许两个光子之间的任何沟通。换句话说，贝尔不等式体现了定域条件对两个光子的关联协作程度的限制。或者说，对他们的逻辑能力的限制。

在实验中也得做到这一点：要保证两个纠缠光子间没有交换信号的可能性。阿斯派克特在第三个实验中，采取延迟决定偏光镜方向的方法，就是为了保证这点。或者说，他在克劳瑟等人实验的基础上，再多加了一道闸门，完全排除了纠缠光子间交换信号的可能性。阿斯派克特在实验中不预先设定两个检偏镜的角度，而是将这个决定延迟到两个光子已经从纠缠源飞出，快要最后到达检偏镜的那一刻。

他的两个检偏镜距离纠缠源分别大约 6.5 米左右。因此，当两个光子快到检偏镜的那一刻，它们之间的距离大约是 13 米。最快的信息传递速度是光速，光也需要 40ns（ns 是纳秒=10 万万分之一秒）的时间来走完 13 米的路程。因此，阿斯派克特发明出了一种基于声光效应的设备，能使得检偏镜在每 10ns 的时间内旋转一次。这样，两个纠缠光子就不可能有足够的时间来互相通知对方了。

实验以高精度证明，结果违反 Bell 不等式，而与量子力学相符。

³ 参考：[科学网—走近量子纠缠-11-阿斯派克特的实验 - 张天蓉的博文 \(scincenet.cn\)](http://scincenet.cn)