讲座目的：分享一些资料，分享学习经验，

复习些重要的知识点，关于课内知识的作用与扩展

↳ 问题可以交由老师、助教解决

Part 1. 课内重要知识复习（罗列知识点，要求看到能说出定义）

I. 集合论

1. 集合的相等 → 例子：1. 幂集与 Cantor 悖论 (Cantor定理)
2. Russell 悖论

2. 集合的运算与运算律

3. Cartesian 积 与关系

4. 等价关系与商集 → 例子：1. 同余，2. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 与复数
3. identification space（粘连的操作）

5. 映射："左满右唯一"

→ 例子：集合的"势"，可数、不可数
连续统假设

☆ $\forall \lambda \in \Lambda$，$f$ 在 A_λ 上有定义，$f: A \to B$

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) \qquad f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_\lambda B_\lambda\right) = \bigcup_\lambda f^{-1}(B_\lambda) \qquad f^{-1}\left(\bigcap_\lambda B_\lambda\right) = \bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$$

→ 例子："选择公理"与满射有右逆。

6. 实数集的完备性与 Archimedean 公理

7. 整数集 ↳ 扩展：$\mathbb{R}$ 的可分性：$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$。
可以做出"至多可数个不交开区间"

II. 不等式：分析的工具（来自于实际问题需要）
需要大家勤练提高能力。

没有什么好讲的，技巧性强，需多积累。

$$a \le b+c \Rightarrow \frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

III. 函数 $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的映射

1. 基本性质：奇偶性、周期性、有界性、凹凸性、单调性

↳ 例子：无最小正周期的周期函数 D

Ex. $\mathbb{R}$上严格凸函数无界（考试面试）

$$f''(x) \ge \varepsilon$$

$$\Rightarrow f'(x) - f'(0) = f''(\xi)x \ge \varepsilon x.$$

$$\Rightarrow f'(x) \ge \varepsilon x + f'(0).$$

$\forall x \ge 1$ $\quad f(x) - f(1) = f'(\xi)(x-1)$

$$\ge (\varepsilon\xi + f'(0))(x-1)$$

$$\ge \varepsilon x + \text{const}$$

↳ 例子：单调函数只有至多可数个间断点.

2. 连续性：

↳ 例子："连续性"与"可导性"

3. 有界闭区间上连续函数：①有界 ②取得最值 ③介值性（定义域的"连通性"）

本质上是$\mathbb{R}$的完备性。

4. Cauchy方程：

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{\text{单调/有界/连续}} \text{线性函数}$$

IV. 三角函数：记公式、多做题

$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$

Part 2. 关于课内知识的作用

1. 等价关系的用处

① $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$

2. 凸函数定义域有无要求?

3. $f: X \to Y$ 满射 $\Rightarrow$ f 有右逆

$\exists\ h: Y \to X$ s.t. $f \circ h = I_Y$.

proof: $\forall y \in Y$, $A_y = \{x \in X : f(x) = y\} \neq \phi$. $\mathcal{A} = \{A_y : y \in Y\}$.

根据选择公理, $\exists\ h_1: \mathcal{A} \to \bigcup_{y \in Y} A_y$.

$A_y \longmapsto x \in X,\ f(x) = y$.

令 $h: Y \to X$, $h = h_1(A_y) = h_1 \circ g$

$(g: Y \to \mathcal{A},\ y \mapsto A_y)$

$\Rightarrow f \circ h: Y \to Y$, $f(h(y)) = f(x) = y$.