

挡位离散型车辆经济性加速策略的伪谱法优化

李升波¹ 徐少兵¹ 王文军¹ 成波¹

摘要 加速过程中, 车辆的油耗与驾驶员的操作策略密切相关. 本文通过最优控制方法量化地研究了挡位离散型车辆的经济性加速策略. 将加速策略的辨识构建为一个 Bolza 型最优控制问题 (Optimal control problem, OCP), 设计了考虑加速距离影响的经济性定量评价指标. 该问题含有离散型控制变量, 隶属于混合整型最优控制问题, 且性能函数和状态方程呈现强非线性. 为高效地求解该问题, 结合变速器挡位切换规律, 将该整型问题转化为多段光滑问题的协同优化, 采用 Legendre 伪谱拼接法实现变速器挡位、换挡时机、发动机力矩的数值求解. 解析分析了经济性加速策略的形成机理, 总结了实用化的经济性加速选择策略和挡位切换规律. 仿真验证了所求策略的节油潜力.

关键词 最优控制, 伪谱法, 经济性驾驶, 加速过程

引用格式 李升波, 徐少兵, 王文军, 成波. 挡位离散型车辆经济性加速策略的伪谱法优化. 自动化学报, 2015, 41(3): 475–485

DOI 10.16383/j.aas.2015.c140403

Pseudospectral Optimization of Economical Accelerating Strategy for Vehicles with Discontinuous Gear Ratio

LI Eben Sheng-Bo¹ XU Shao-Bing¹ WANG Wen-Jun¹ CHENG Bo¹

Abstract The fuel consumption of ground vehicles in accelerating scenarios is significantly affected by how they are driven. This paper quantitatively studies the fuel optimal accelerating strategies for vehicles with discontinuous gear ratio under the optimal control framework. The identification of economical accelerating strategy is converted into a Bolza-typed optimal control problem (OCP), in which an equivalent fuel consumption index is proposed to eliminate the difference of accelerating distances. The converted OCP has discontinuous input, i.e. gear ratio of transmission, and nonlinear cost function and plant model, which naturally casts in the mixed-integer OCP. Considering the gear shifting rules of mechanical transmission, we transform the discontinuous OCP into multiple but interconnected continuous problems. The multiple-phase knotting technology combining Legendre pseudospectral discretization is used to obtain the optimal numerical solutions to gear position, gear shifting time, and engine torque. The mechanism of the fuel optimal accelerating strategy is analyzed, and the practical rules of gear shifting and acceleration selection are also summarized. The fuel benefit of the economical accelerating strategy is validated by simulations.

Key words Optimal control, pseudo-spectral method, eco-driving, acceleration

Citation Li Eben Sheng-Bo, Xu Shao-Bing, Wang Wen-Jun, Cheng Bo. Pseudospectral optimization of economical accelerating strategy for vehicles with discontinuous gear ratio. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(3): 475–485

出于能源安全、环境保护、消费者需求等原因, 提高车辆的燃油经济性是汽车工业的基础课题之一^[1]. 国务院颁布的《节能与新能源汽车产业发展规划》指出, 乘用车平均百公里油耗至 2020 年须从 2010 年的 7.71 L 降至 5 L. 严格的法规将极大地促进各类汽车节能技术的发展. 实际上, 车辆的行驶油耗不仅与本身性能相关, 而且很大程度上取决于驾

驶员的驾驶方式. 研究表明, 经济性的驾驶方式具有 10~15% 的节油潜力^[1-2], 将成为汽车节能减排的重要技术方向. 经济性加速是经济性驾驶方式的重要组成部分. 加速过程是一种高能耗且频繁出现的驾驶状态, 文献 [3] 对 19 230 份驾驶数据进行因素分析指出: 加速过程和怠/低速过程是导致驾驶员油耗差异的两个最重要原因, 因此探索加速过程的经济性操作策略对降低行车油耗具有积极意义.

目前, 经济性加速策略的获取多基于实验统计分析的方法. Ericsson 对实际交通流数据研究显示, 激进加速 ($>1.5 \text{ m/s}^2$) 影响油耗的显著性指标是正常加速的约 2.5 倍^[4]. Vlieger 对实车数据分析显示: 激进的加速和制动会导致油耗提高 30~40%^[5]. Shawarby 等研究了温和、中等、激进 (约为最大加速度的 40%、60%、100%) 的加速过程, 却发现温和和加速过程总油耗是激进加速过程的近 3 倍 (从 0

收稿日期 2014-06-04 录用日期 2014-09-27
Manuscript received June 4, 2014; accepted September 27, 2014
国家自然科学基金 (51205228), 清华大学自主科研计划项目 (2012THZ0) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (51205228), and Independent Research Project of Tsinghua University (2012THZ0)
本文责任编辑 张毅
Recommended by Associate Editor ZHANG Yi
1. 清华大学汽车安全与节能国家重点实验室 北京 100084
1. State Key Laboratory of Automotive Safety and Energy, Tsinghua University, Beijing 100084

到 100 km/h)^[6]. 而 Johansson 等的研究认为应采用中等加速度, 并尽快换到高档位^[7]. 上述不同结论反映了实验方法的弊端, 即无法量化地表达节油策略, 且难以解释内在的节油机理. 此外, 实验方法需要投入大量实验成本, 且实验结论在不同车型之间迁移性差.

为此, 含笔者在内的学者提出以“车辆模型 + 最优控制”为框架的油耗最优驾驶策略辨识概念, 认为以最小化行车油耗为目标的经济性驾驶问题本质上是一个最优控制问题, 可采用解析或数值方法求解出经济性驾驶策略. 典型研究如针对巡航工况和跟车工况的策略优化. 最早的研究源于 Johns Hopkins 大学的 Gilbert^[8]. 该文证明了巡航工况下, 周期控制优于匀速行车策略, 而后者通常被误认为具有“油耗最优性”. Li 等针对装备速比连续型变速器的车辆, 通过最优控制的方法优化出: 跟随以中速匀速行驶的前车, 油耗最优驾驶是一种周期性的“加速-滑行” (Pulse and glide, PnG) 策略, 并利用图解法定量地分析了 PnG 策略的形成原因以及关键参数^[9], 利用轮毂试验台验证了该类策略的省油能力^[10], 基于该策略设计的周期切换型的自适应巡航控制器与传统准稳态控制器相比, 省油能力达到 13% 以上^[11]. 实际上, 典型的经济性驾驶策略辨识均可构建为一个最优控制问题, 包括加速过程, 类似研究如: Kuriyama 等建立了电动汽车坡道工况下的能耗最优控制问题, 采用动态规划法优化出车辆速度和加速曲线^[12]; Galpin 建立了交通灯约束下的油耗最优控制问题, 通过 Dijkstra 算法优化得到车辆速度曲线^[13].

本文研究了装备传统机械式变速器 (Mechanical transmission (MT), 典型特征是变速比不连续, 为离散型变量) 的车辆在加速过程中的经济性加速策略. 目前, 对该问题的理论研究基本空白. 一个重要原因是因变速器速比离散, 其最优控制问题本质上不连续, 隶属于混合整型问题, 理论和数值求解均十分困难. 针对该问题, 本文构建了挡位离散型车辆的经济性最优加速问题, 结合伪谱法提出通用的数值求解方法, 并对加速工况进行优化和分析, 形成量化的经济性加速策略. 本文主要结构为: 第 1 节提出并构建经济性加速最优控制问题; 第 2 节对构建的非连续问题进行转化, 采用伪谱拼接法实现数值求解; 第 3 节展示并分析数值求解结果; 第 4 节简要分析最优加速策略的机理; 第 5 节仿真分析所求策略的节油潜力; 第 6 节总结全文.

1 经济性加速最优控制问题构建

对于挡位离散型车辆, 从对象特性上说, 总存在一类加速策略, 通过合理地选择换挡时机以及控制

发动机力矩, 使车辆在一次加速过程中油耗最低. 图 1 为各挡位对应的加速度范围以及两个示例加速策略. 假设车辆需要从 S 点加速至 E 点: 策略 1 采用较小的恒定加速度; 策略 2 采用较大的变加速度. 两种策略的加速度、挡位、换挡时机均不同, 对应的经济性亦不同. 实际上存在无穷种策略完成该加速任务, 因此辨识策略的本质问题是: 如何选用挡位、换挡时机、各挡的加速度, 使加速过程的油耗最小.

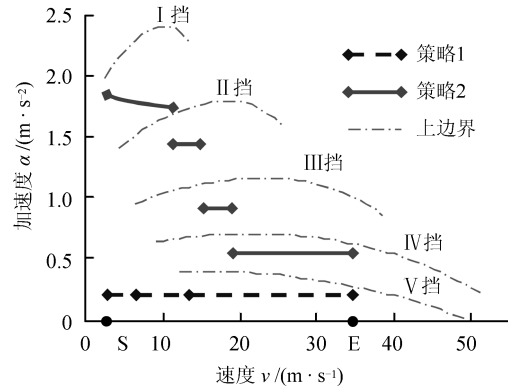


图 1 不同加速策略示意图

Fig. 1 Schematic of different accelerating strategies

经济性加速策略的辨识本质上可转化为一最优控制问题. 其控制变量为发动机力矩以及变速器速比, 性能指标为发动机油耗的函数, 状态方程服从车辆纵向动力学模型, 约束集合为车辆的性能约束. 下面将分别模型化性能指标、状态方程以及约束集合, 从而构建对应的最优控制问题.

1.1 性能指标—当量油耗指标

建立经济性衡量指标是研究节油加速策略的基础. 考虑车辆从初速度 v_0 加速至末速度 v_f , 加速距离为 s_f , 发动机总油耗为

$$J_L = \int_0^{t_f} \mathcal{F}_e(T_e, w_e) dt \quad (1)$$

其中, t_f 为终端时间, T_e 、 w_e 分别为发动机的转矩、转速, $\mathcal{F}_e(\cdot)$ 表示发动机的瞬时喷油率, J_L 为时间域内总油耗.

实际上, 仅通过总油耗无法准确衡量加速过程的经济性. 一个主要原因是不同加速策略对应的行车距离是不同的. 为此, 本文提出“当量油耗性能指标”来衡量加速过程的经济性, 其由发动机总油耗和距离修正项组成. 距离修正项 J_M 定义如下:

$$J_M = -k_s s_f \quad (2)$$

其中, k_s 为距离修正系数, 本文设计为

$$k_s = -\frac{\mathcal{F}_C(v_{eco})}{v_{eco}} \quad (3)$$

其中, v_{eco} 为车辆匀速行驶时百公里油耗最低所对应的速度 (经济性车速), $\mathcal{F}_C(v_{eco})$ 表示该速度下发动机的喷油率. 其物理意义是: 对于任意策略, 在总油耗的基础上, 减去车辆以经济车速 v_{eco} 行驶加速距离 s_f 对应的油耗, 从而消除不同策略之间加速距离差异的影响.

综上, 得到加速过程 Bolza 型当量油耗指标:

$$J = J_M + J_L = -k_s s_f + \int_0^{t_f} \mathcal{F}_e(T_e, w_e) dt \quad (4)$$

对于上式, 须建立发动机喷油率 \mathcal{F}_e 的解析表达. 本文采用发动机实验标定油耗估计瞬时喷油率^[14]. 所研究发动机为 2.0 L 自然吸气式汽油机, 通过最小二乘法拟合建立喷油率的解析模型:

$$\mathcal{F}_e(T_e, w_e) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^i k_{\mathcal{F}, 1+j+\sum_0^i n} T_e^{i-j} w_e^j \quad (5)$$

其中, $k_{\mathcal{F}, \#}$ 为拟合系数. 对 \mathcal{F}_e 简单变换即可得到燃油消耗率 $b_e(T_e, w_e)$, 得到的发动机万有特性 (Brake specific fuel consumption, BSFC) 如图 2 所示. 力矩外特性采用 4 次多项式拟合得:

$$T_{\max}(w_e) = \sum_{i=0}^4 k_{\max, i} w_e^i \quad (6)$$

其中, k_{\max} 为拟合系数, T_{\max} 拟合结果如图 2 所示.

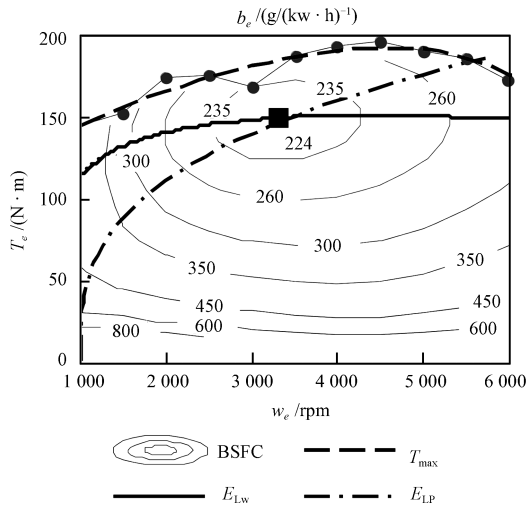


图 2 发动机万有特性图

Fig. 2 The engine brake specific fuel consumption

另外, 为方便后续分析, 简介发动机的两类经济性曲线: 1) 不同转速下对应的效率最高点连线, 见图 2 中的 E_{Lw} ; 2) 不同输出功率对应的效率最高点连线, 见图 2 中 E_{LP} .

实际上, 发动机在动态过程中, 由于发动机转速的变化, 气缸充量系数和燃油雾化等随之发生变化,

当喷射相同燃油时, 动态过程的有效发动机输出力矩与稳态过程存在差异, 一般取决于发动机转速的变化剧烈程度. 为降低误差, 本文采用文献 [15] 所述模型进行修正:

$$T_{ed} = T_e \left(1 - \gamma_d \frac{dw_e}{dt} \right) \quad (7)$$

其中, γ_d 为动态修正系数, T_{ed} 为动态有效输出力矩.

1.2 状态方程

经济性加速最优控制问题的状态方程服从车辆动力学模型. 本文所研究的车辆传动系包括发动机、离合器、挡位离散型变速器等. 兼顾简洁性和准确性, 对研究对象进行适当简化: 1) 忽略发动机以及变速器旋转部件的高阶动态特性, 以及传动系的间隙和扭转变形; 2) 离合器动态过程中无滑磨现象; 3) 假设传动系在不同传动比、不同传动功率下传动效率一致; 4) 忽略换挡瞬间的冲击、滑磨以及停顿.

加速过程中, 车辆的行驶阻力包括空气阻力和滚动阻力:

$$F_R(v) = \frac{1}{2} C_D \rho_a A_v v^2 + M g f \quad (8)$$

其中, F_R 记为整车行驶阻力, C_D 为风阻系数, ρ_a 为空气密度, A_v 为车辆迎风面积, f 为滚动阻力系数, M 为整车质量, g 为重力加速度. 简记为

$$F_R(v) = k_a v^2 + k_f \quad (9)$$

车辆的驱动力来源于发动机输出力矩, 经过传动系作用于轮胎. 因此由整车受力平衡可得:

$$\frac{i_0 \eta_T}{r_w} i_g T_{ed} = \delta_{i_g} M \dot{v} + F_R \quad (10)$$

其中, i_0 为主减速器速比, η_T 为传动系传动总效率, r_w 为轮胎半径, i_g 为变速器速比, δ_{i_g} 为速比为 i_g 时的旋转质量系数. 车辆的行驶距离 s 、速度 v 、加速度 a 满足:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= v \\ \dot{v} &= a \end{aligned} \quad (11)$$

发动机转速 w_e 经过变速器、主减速器两次减速传递至轮胎, 因此 w_e 与 v 满足:

$$w_e = 60 \times \frac{v}{2\pi r_w} i_g i_0 = k_w v i_g \quad (12)$$

结合式 (7)~(12), 得到状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{s} &= v \\ \dot{v} &= \frac{i_0 \eta_T}{\delta_{ig} M r_w} i_g T_{ed} - \frac{k_a v^2 + k_f}{\delta_{ig} M} \\ T_{ed} &= T_e \left(1 - \gamma_d \frac{dw_e}{dt} \right) \\ w_e &= k_w v i_g\end{aligned}\quad (13)$$

1.3 约束集合

加速过程中, 约束集合包括发动机转速、转矩、变速器速比约束:

$$\begin{aligned}w_{e,\min} &\leq w_e \leq w_{e,\max} \\ 0 &< T_e \leq T_{\max}(w_e) \\ i_g &\in \{i_{g1}, i_{g2}, i_{g3}, i_{g4}, i_{g5}\}\end{aligned}\quad (14)$$

求解加速策略中, 对加速时间 t_f 和加速距离 s_f 均不设置约束, 即为自由变量.

1.4 最优控制问题及特征

在性能指标、状态方程和约束集模型化的基础上, 建立经济性加速策略辨识最优控制问题:

$$J = -k_s s_f + \int_0^{t_f} \mathcal{F}_e(T_e, w_e) dt$$

s. t.

$$\begin{aligned}\dot{s} &= v \\ \dot{v} &= \frac{i_0 \eta_T}{\delta_{ig} M r_w} i_g T_{ed} - \frac{k_a v^2 + k_f}{\delta_{ig} M} \\ T_{ed} &= T_e \left(1 - \gamma_d \frac{dw_e}{dt} \right) \\ w_e &= k_w v i_g \\ w_{e,\min} &\leq w_e \leq w_{e,\max} \\ 0 &< T \leq T_{\max}(w_e) \\ i_g &\in \{i_{g1}, i_{g2}, i_{g3}, i_{g4}, i_{g5}\}\end{aligned}\quad (15)$$

其中, 状态变量为距离 s 、速度 v , 记为 $\mathbf{x} = [s, v]^T$, 控制变量为发动机力矩 T_e 、变速器速比 i_g , 记为 $\mathbf{u} = [T_e, i_g]^T$. 该问题具有如下特征:

1) 性能函数和状态方程呈强非线性. 由式 (4) 和 (5) 可知, 性能函数为高阶非线性函数, 并非传统意义上的二次型; 由式 (13) 可知, 状态方程亦为强非线性函数.

2) 问题不光滑且不连续. 对于 MT 型车辆, 变速器的速比是非连续的, 只能在 5 个挡位之间切换. 因此该问题是一个典型的混合整型最优控制问题.

2 伪谱拼接法求解

2.1 基本原理

针对上述非线性混合整型最优控制问题, 传统的变分法、极大值原理要求哈密顿函数对状态变量连续可微, 且需要求解边值问题, 难以适用于该问题. 离散型动态规划法理论上适用, 但是该方法存在维数灾难, 求解效率和精度严重依赖于格点密度^[16]. 而常用的数值解法, 如打靶法、配点法等, 无法直接处理具有离散变量的整型最优控制问题, 且无法保证所求数值解满足最优性^[17].

考虑经济性加速问题 (15) 的两个特点: 1) 特定挡位下, 问题是连续光滑的; 2) 加速过程中, 变速器换挡具有一定的先验规律, 即顺序升挡, 如升挡过程总是服从 一档 \rightarrow 二挡 $\rightarrow \dots \rightarrow$ 五挡 的顺序. 因此可将该整型最优控制问题转化为多段连续最优控制问题, 从而可通过谱拼接法求解. 其基本思想是: 根据挡位的切换规律, 将问题切分为多段, 每段内速比不变, 为一个连续光滑最优控制问题, 通过多段之间的协同优化实现该问题的求解. 每段对应的光滑问题可通过打靶法、配点法或伪谱法转化为非线性规划问题 (Non-linear programming, NLP). 伪谱法是一种全局配点法, 相对于传统打靶法、配点法等具有更好的求解精度和收敛速度, 初值敏感度低, 且数值解已被证明可满足最优性^[18-19], 因此本文采用伪谱法求解. 对于存在边界约束的最优控制问题, Legendre 伪谱法比 Gauss 和 Radau 伪谱法具有更好的收敛性^[20], 同时 Legendre 伪谱法的配点包括边界点, 对于多段之间添加连接约束尤为方便, 因此本文采用 Legendre 伪谱法. 该求解思路本质上是将一个整型最优控制问题转化为多段光滑问题, 每段通过 Legendre 伪谱法转化, 因此称之为 Legendre 伪谱拼接法^[20].

2.2 整型最优控制问题转化

为将问题 (15) 转化为多段光滑问题, 首先需要确定段数, 本质上是确定加速起始挡位和加速终止挡位. 对于 MT 型车辆, 同一车速可通过不同挡位实现. 定义 $i_{g,\min}(v)$ 和 $i_{g,\max}(v)$ 表示速度 v 可以对应的最低和最高挡位.

首先确定加速起始挡位. 考虑两种情况: 1) 不允许退挡, 即加速过程只能从当前挡位 $i_g(t_0)$ 继续升挡; 2) 允许退挡, 但由于不能确定退至何挡最优, 因此设定均先退到最低挡位 $i_{g,\min}(v_0)$. 两种情况如图 3 的示意. 实际上, 前者更接近普通驾驶员的操作习惯, 而后者在加速经济性上存在优于前者的可能性. 需要说明的是, 退挡仅发生在加速开始时刻, 之后只能顺序升挡.

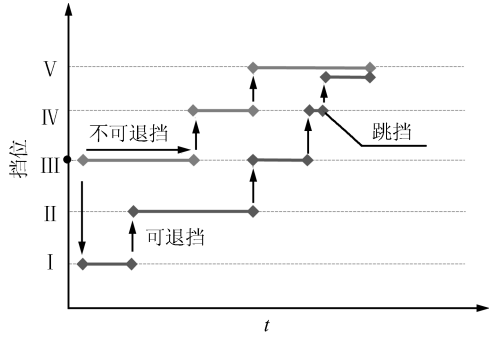


图3 加速起始挡位和终止挡位示意图

Fig. 3 The conception of setting initial and terminal gear

因此, 加速起始挡位 i_{gs} 为

$$i_{gs} = \begin{cases} i_g(t_0), & \text{不可退挡} \\ i_{g,\min}(v_0), & \text{可退挡} \end{cases} \quad (16)$$

加速终止挡位 i_{ge} 取为终端速度对应的最高挡位 $i_{g,\max}(v_f)$. 若不考虑研究对象的特点, 仅从算法的角度来说, 初始挡位、终止挡位、以及挡位顺序均可任意指定.

综上, 可确定分段数, 即 $i_{gs} - i_{ge} + 1$ 段, 记为 Q 段, 存在 $Q - 1$ 个分段点, 记为 T_1, T_2, \dots, T_{Q-1} . 为方便表达, 将初始时间 t_0 和终端时间 t_f 记为 T_0 和 T_Q . 其中分段点满足约束 $T_0 < T_1 < \dots < T_Q$. 在数值计算中, 为保证数值稳定, 一般设置任意两分段点间距需大于设定的参数 δ_t , 即

$$T_q - T_{q-1} \geq \delta_t, \quad q \in [1, Q] \cap \mathbf{Z}^+ \quad (17)$$

实际上, 若在某一挡的持续时间为 δ_t , 如图3所示的四挡, 可视为此挡位被跳挡, 即从三挡直接进入五挡. 分段点位置和末态时间 T_1, T_2, \dots, T_Q 均是待优化变量, 将由数值求解得到.

2.3 Legendre 伪谱拼接法求解

在将问题 (15) 转化为多段光滑问题的基础上, Legendre 伪谱拼接法求解步骤如下:

1) 时域转化

将各段的时间域 $[T_{q-1}, T_q]$ 统一转化为标准区间 $[-1, 1]$, 以与 Legendre 正交多项式的定义区间一致,

$$\tau = \frac{2t - (T_q + T_{q-1})}{T_q - T_{q-1}}, \quad \tau \in [-1, 1] \quad (18)$$

2) 配点与离散化

Legendre 伪谱法采用 LGL (Legendre-Gauss-Lobatto) 配点, 为 Legendre 正交多项式一阶导数的根加上 -1 和 1 两点, 等价于多项式 $(1 - \tau^2) \dot{P}_N(\tau)$ 的根, 共 $N+1$ 个配点. 对于谱拼接方法, 各段可设

置不同的配点个数, 记为 $N_q + 1$, 每段内配点记为 $\tau_{q,i}$, 其中 $i = 0, 1, \dots, N_q$; $q = 1, 2, \dots, Q$. 将各段内的状态变量距离 s 、车速 v 在 LGL 点离散化为

$$X_q = \begin{bmatrix} S_{q,0} & S_{q,1} & \cdots & S_{q,N_q} \\ V_{q,0} & V_{q,1} & \cdots & V_{q,N_q} \end{bmatrix} \quad (19)$$

同理, 控制变量发动机转矩 T_e 离散化为 $T_{q,i}$. 伪谱拼接法求解中仅优化得到上述离散值和分段点位置, 状态和控制变量动态曲线 $\mathbf{x}_q(\tau)$ 和 $\mathbf{u}_q(\tau)$ 通过 Lagrange 插值多项式逼近:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_q(\tau) &\approx \sum_{i=0}^{N_q} L_{q,i}(\tau) X_{q,i} \\ \mathbf{u}_q(\tau) &\approx \sum_{i=0}^{N_q} L_{q,i}(\tau) U_{q,i} \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $L_{q,i}(\tau)$ 为 Lagrange 插值基函数:

$$L_{q,i}(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^{N_q} \frac{\tau - \tau_{q,j}}{\tau_{q,i} - \tau_{q,j}} \quad (21)$$

3) 状态方程转化

将各段连续问题离散化后, 状态变量本质上是通过 Lagrange 插值多项式逼近, 因此对状态的微分运算可转化为对插值基函数的微分运算:

$$\dot{\mathbf{x}}_q(\tau_{q,k}) = \sum_{i=0}^{N_q} \dot{L}_{q,i}(\tau_{q,k}) X_{q,i} = \sum_{i=0}^{N_q} D_{ki}^q X_{q,i} \quad (22)$$

其中, $k = 0, 1, 2, \dots, N_q$, D^q 为微分矩阵, 表示各 Lagrange 基函数在各 LGL 配点处的微分值, 具有显式表达^[19]:

$$D_{ki}^q = \begin{cases} \frac{P_{N_q}(\tau_{q,k})}{P_{N_q}(\tau_{q,k} - \tau_{q,i})}, & i \neq k \\ -\frac{N_q(N_q + 1)}{4}, & i = k = 0 \\ \frac{N_q(N_q + 1)}{4}, & i = k = N_q \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (23)$$

针对式 (13) 所述的动力学方程, 在谱拼接法中, 每段内的速比 i_g 为常数, 因此对发动机转速的微分本质上可转化为对速度的微分, 即

$$T_{ed} = T_e \left(1 - \gamma_d \frac{dw_e}{dt} \right) = T_e (1 - \gamma_d k_w i_g \dot{v}) \quad (24)$$

因此, 将式 (13) 化简整理得:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= v \\ \dot{v} &= \frac{\frac{i_g i_0 \eta_T T_e}{r_w} - k_a v^2 - k_f}{\delta_{i_g} M + \frac{i_0 \eta_T \gamma_d k_w i_g^2 T_e}{r_w}} \end{aligned} \quad (25)$$

结合式 (22) 和 (23) 可将状态方程 (25) 转化为在配点处的等式约束:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_q} D_{ki}^q S_{q,i} &= \frac{T_q - T_{q-1}}{2} V_{q,k} \\ \sum_{i=0}^{N_q} D_{ki}^q V_{q,i} &= \frac{T_q - T_{q-1}}{2} \frac{\frac{i_g i_0 \eta_T T_{q,k}}{r_w} - k_a V_{q,k}^2 - k_f}{\delta_{i_g} M + \frac{i_0 \eta_T \gamma_d k_w i_g^2 T_{q,k}}{r_w}} \end{aligned} \quad (26)$$

4) 性能函数转化

性能函数的积分项则可以通过数值积分进行逼近. 在 Legendre 伪谱拼接法中, 加速过程总油耗为各段油耗的总和, 积分项可通过 Gauss-Lobatto 积分方法计算:

$$J = -k_s S_{Q,N_Q} + \sum_{q=1}^Q \frac{T_q - T_{q-1}}{2} \sum_{i=0}^{N_q} w_{q,i} \mathcal{F}_e(T_{q,i}, \mathbb{W}_{q,i}) \quad (27)$$

其中, $T_{q,i}$ 为发动机输出力矩, $\mathbb{W}_{q,i}$ 为发动机转速的离散值, w 为积分权重, 定义为^[19]

$$w_{q,i} = \int_{-1}^1 L_{q,i}(\tau) d\tau = \frac{2}{N_q(N_q+1)P_{N_q}^2(\tau_{q,i})} \quad (28)$$

通过谱拼接法转化后, 经济性加速最优控制问题 (15) 转为一个 NLP 问题, 具体形式如下:

$$J = -k_s S_{Q,N_Q} + \sum_{q=1}^Q \frac{T_q - T_{q-1}}{2} \sum_{i=0}^{N_q} w_{q,i} \mathcal{F}_e(\cdot)$$

s. t.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_q} D_{ki}^q S_{q,i} &= \frac{T_q - T_{q-1}}{2} V_{q,k} \\ \sum_{i=0}^{N_q} D_{ki}^q V_{q,i} &= \frac{T_q - T_{q-1}}{2} \frac{\frac{i_g i_0 \eta_T T_{q,k}}{r_w} - k_a V_{q,k}^2 - k_f}{\delta_{i_g} M + \frac{i_0 \eta_T \gamma_d k_w i_g^2 T_{q,k}}{r_w}} \\ w_{e,\min} &\leq \mathbb{W}_{q,k} \leq w_{e,\max} \\ 0 &< T_{q,k} \leq T_{\max}(\mathbb{W}_{q,i}) \\ T_q - T_{q-1} &\geq \delta_t \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $k = 0, 1, 2, \dots, N_q$. 待优化变量为 LGL 点处的距离 $S_{q,k}$ 、速度 $V_{q,k}$ 、发动机输出力矩 $T_{q,k}$, 以

及挡位的切换时刻 T_1, T_2, \dots, T_Q . 该问题本质上是一个高维稀疏非线性规划问题, 待优化变量个数为 $Q + 3 \sum_q (N_q + 1)$. 该类问题的求解已较成熟, 本文选择 SNOPT 求解器, 核心算法为序列二次规划法^[21].

3 经济性加速策略求解结果

模型参数均基于实际车辆设置, 除发动机模型已在第 1.1 节中介绍外, 其他参数如表 1 所示.

表 1 车辆主要参数

Table 1 Key Parameters of Vehicle Dynamics

参数	数值	参数	数值
C_D	0.316	η_T	0.9
A_v	2.22 m ²	γ_d	0.003 s ² /rad
r	0.307 m	k_s	0.0646 g/m
M	1600 kg	δ_t	0.25
f	0.028	$w_{e,\min}$	1000 rpm
i_0	3.863	$w_{e,\max}$	6000 rpm
i_g	3.620, 1.925, 1.285, 0.933, 0.692		
δ	1.322, 1.112, 1.067, 1.049, 1.041		
ρ_a	1.2258 kg/m ³		

3.1 典型加速过程求解结果

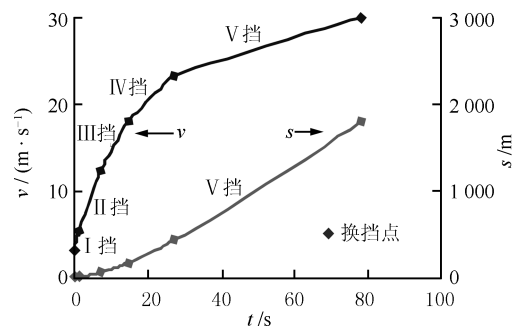
根据初始速度 v_0 、终端速度 v_f 、初始和终端挡位, 设置如表 2 所示 4 种加速任务, 记为 PA, PB, PC 和 PD:

表 2 加速过程设置

Table 2 The setting of accelerating tasks

编号	v_0 (m/s)	v_f (m/s)	i_{gs}	i_{ge}
PA	3	30	1	5
PB	7	20	3	4
PC	7	20	1	4
PD	7	20	3	5

采用谱拼接法求解, 根据初始和末态挡位将问题分为多段, 各段配点个数均设置为 15. 加速问题 PA 的加速度、挡位切换时刻、发动机工作点等优化结果如图 4 所示.



(a) 时间-速度/距离曲线

(a) Time-velocity/distance trajectory

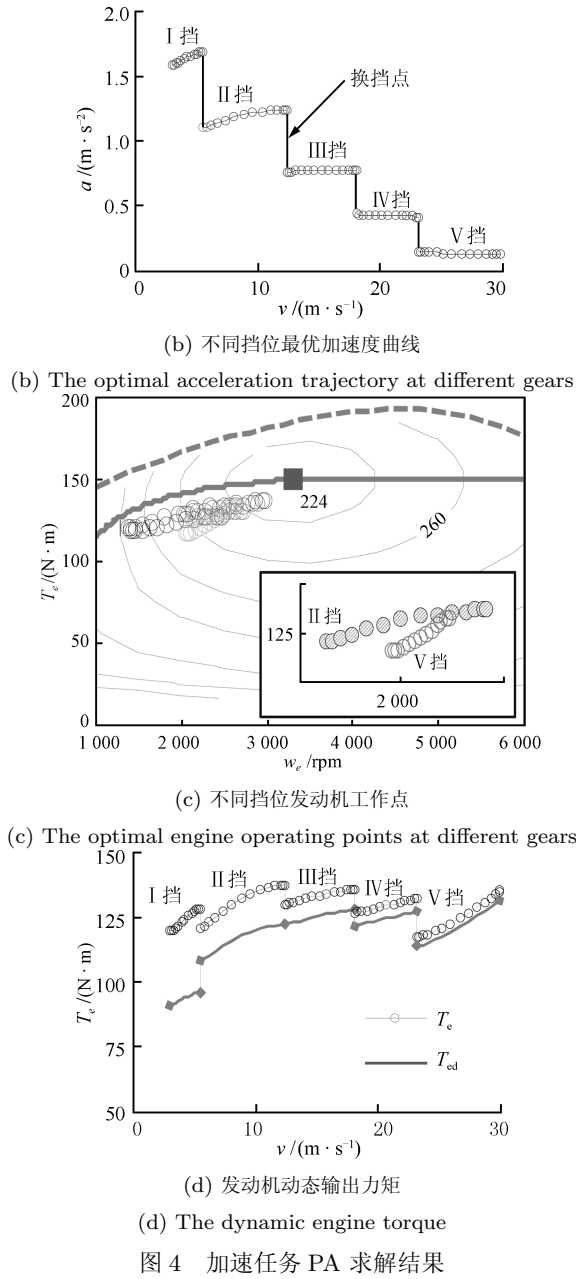


图 4 加速任务 PA 求解结果

Fig. 4 The optimization results of task PA

由图 4 可知, 本文采用的谱拼接法可有效求解该类问题. 图 4(a) 显示了加速过程的速度、距离. 各挡对应的加速度如图 4(b) 所示: 低速时, 最优加速度较大, 而高速时, 最优加速度变小. 各挡对应的发动机工作点如图 4(c) 所示, 该例中发动机工作于经济性曲线 E_{Lw} 附近. 由于发动机动态因素的影响, 实际有效输出力矩 T_{ed} 与 T_e 相对关系如图 4(d) 所示: 对于低挡, 相同速度变化对应的发动机转速变化更剧烈, 因此动态影响更大, 力矩损失更多.

加速任务 PB、PC、PD 求解结果如图 5 所示. 三个任务的速度设置均相同, 但初始和终端挡位不同. 由图 5 可知: 1) 对比 PB 和 PC 结果, 性能指

标分别为 20.125 g 和 19.375 g (相差 3.73 %), 因此 PC 更为经济, 表明该加速任务下, 先退挡再加速更为经济. PC 的一挡持续时间仅 δ_t , 表明无需退到一挡, 正确操作为退至二挡, 加速至 12.39 m/s 再换入三挡. 2) 对比 PB 和 PD, 性能指标分别为 20.125 g 和 20.128 g, 两者基本等同, 表明应以四挡加速至目标车速, 而无需使用五挡加速.

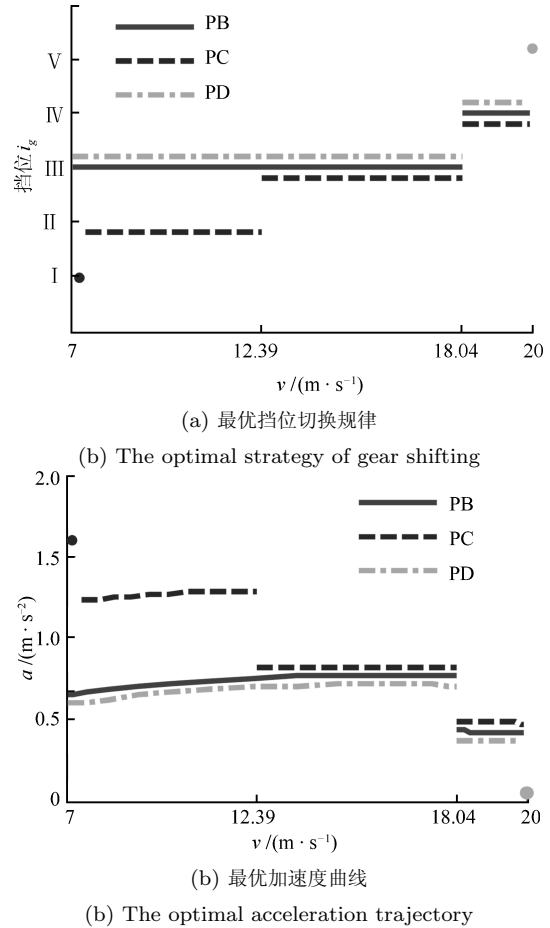


图 5 加速任务 PB/PC/PD 求解结果

Fig. 5 The optimization results of task PB, PC, and PD

3.2 不同性能函数的求解结果

最优控制问题 (15) 以能耗最低为目标, 为一能耗最优问题, 但未充分考虑加速时间的影响, 如 PA 工况加速耗时长达 78 s. 为此, 在性能函数中引入时间惩罚项:

$$\mathbb{J} = \left(-k_s s_f + \int_0^{t_f} \mathcal{F}_e(T_e, w_e) dt \right) + \beta_t t_f \quad (30)$$

其中, β_t 为时间惩罚系数. 对于 PA 工况, 当 β_t 取 0, 0.5, 100 时, 速度曲线优化结果如图 6 所示, 随着 β_t 增大, 加速时间减小, 当 $\beta_t = 100$ 时, 加速时间为 16.7 s.

该例说明了所提出的方法不仅可求解上述能耗最优问题,亦可求解时间最优问题.实际上,当问题的性能函数发生变化或者增加新的约束时,本方法仍然适用,是这类问题的一种通用的数值解法.

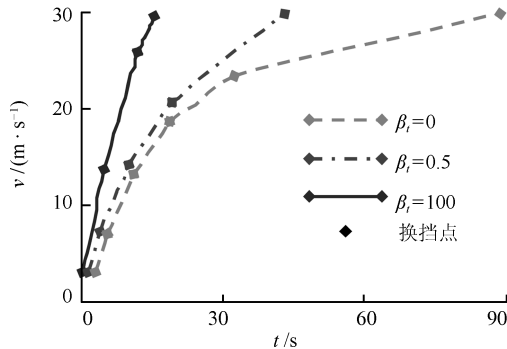


图 6 不同性能函数时加速任务 PA 求解结果

Fig. 6 The optimization results of PA under different performance indexes

3.3 优化方法比较

针对问题 (15), 在转化为多段光滑问题基础上, 同时采用传统配点法进行求解, 选择等间距配点离散化状态和控制变量, 利用分段线性函数逼近状态和控制变量, 从而将最优控制问题转化为非线性规划问题. 针对 PA 工况, 两种方法求解得到的性能指标与配点个数关系如图 7 所示. 由图 7 可知, 伪谱法在每段配点数大于 5 时, 性能指标以小于 10^{-3} 的误差逼近最优解, 而传统配点法在配点数等于 5 时误差达到 0.3, 在 13 个配点时误差仍达 0.02, 由此可知, 伪谱法收敛速度明显高于传统配点法. 实际上, 已有研究已经对谱方法和传统直接法的精度做过详细比较^[22], 并理论证明了伪谱法可达到谱精度^[19-22], 而传统配点法的精度受限于局部插值多项式的阶次.

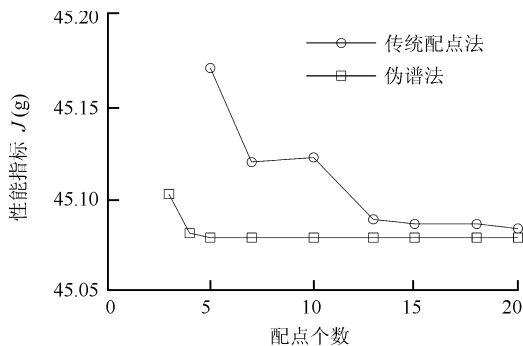


图 7 伪谱法与传统配点法收敛速度比较

Fig. 7 The comparison of convergence between pseudospectral method and traditional collocation method

4 机理分析

在数值求解基础上, 下面将进一步解析分析无

约束条件下, 以当量油耗为性能指标的经济性加速策略的影响因素. 考虑图 8 所示微元模型:

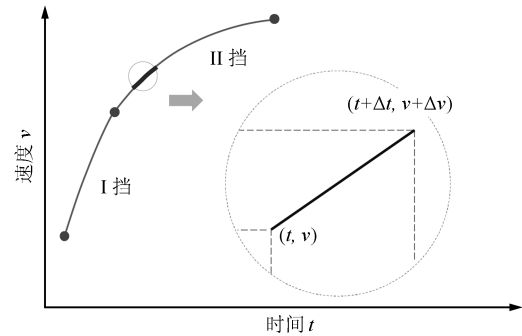


图 8 加速过程微元模型示意图

Fig. 8 The schematic of infinitesimal model in accelerating

车辆从 (t, v) 匀加速至 $(t + \Delta t, v + \Delta v)$, 加速度 a 、加速距离 Δs 满足:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta v}{a} \\ \Delta s &= \frac{\Delta v (2v + \Delta v)}{2a} \approx \Delta v \frac{v}{a} \end{aligned} \quad (31)$$

对于 MT 型车辆, 加速过程一般伴随着换挡, 下面首先考虑以某一特定挡位加速的情况.

在此微元模型中, 加速单位速度所需油耗 E_1 为

$$\begin{aligned} \min_{T_e} E_1 &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{J}{v} = \\ &= \frac{-k_s v + \mathcal{F}_e(T_e, w_e)}{\left(\frac{i_g i_0 \eta_T T_e - k_a v^2 - k_f}{r_w \delta_{i_g} M + i_0 \eta_T \gamma_d k_w i_g^2 T_e} \right)} \end{aligned} \quad (32)$$

若不考虑风阻、滚阻和发动机动态特性, 即 k_a 、 k_f 、 γ_d 均为零, 此时性能函数也无需对距离进行修正, 即 k_s 也为零, 式 (32) 等效为

$$\min_{T_e} E_1 = \frac{\mathcal{F}_e(T_e, w_e)}{\left(\frac{i_g i_0 \eta_T T_e}{r_w \delta_{i_g} M} \right)} \propto \frac{\mathcal{F}_e(T_e, w_e)}{T_e} \propto b_e \quad (33)$$

即在速度 v 或 w_e 一定时, 若要最小化 E_1 , 需选择 \mathcal{F}_e/T_e 最小所对应的控制变量 T_e , 即燃油消耗率 b_e 最小对应的力矩. 此时, 发动机效率是决定性因素, 因此发动机应工作在如图 2 所示的效率最高曲线 E_{Lw} 上, 此时燃油化学能可以最高效地转化为动能.

实际上, 最优控制输入 T_e 不仅取决于发动机效率, 而且与风阻、滚阻、发动机动态特性密切相关, 最优解是提高发动机效率、降低风阻、降低发动机动态力矩损失的协同优化. 各挡位对应的经济性加速度 $a_{eco}(i_g)$ 数值解如图 9 所示.

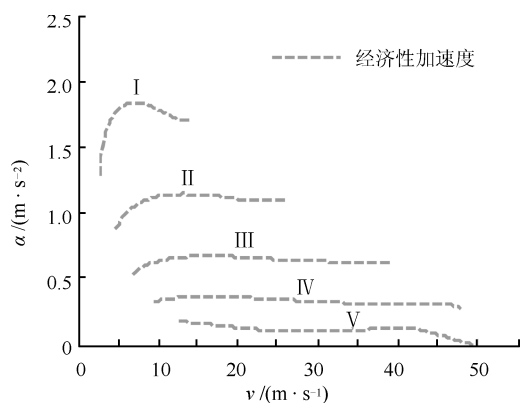


图9 各挡对应的经济性加速度

Fig. 9 The optimal acceleration of different gears

上述分析得到各挡的“最优”加速度, 考虑可换挡加速时, 还须确定挡位切换规则. 不同速度下的最优挡位应使得 E_1 最小, 即

$$i_{g,eco} = \arg \min_{i_g} \{E_1(v, a_{eco}(i_g), i_g)\} \quad (34)$$

各挡位上经济性加速度对应的 E_1 如图 10 所示, 相邻两条曲线交接点即为最优的换挡点. 值得注意的是, 本节方法仅适用于确立无约束条件、以当量油耗作为性能函数时的最优加速度和换挡点, 属于特殊工况的简化计算. 当约束集合和性能函数变动时, 仍需第 2 节提出的通用数值解法.

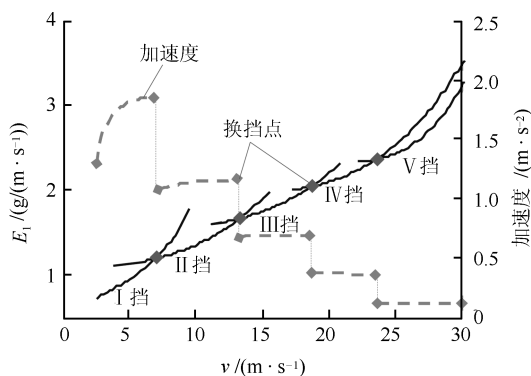


图10 各挡加速单位速度能耗

Fig. 10 The fuel consumption of increasing unit speed using different gears

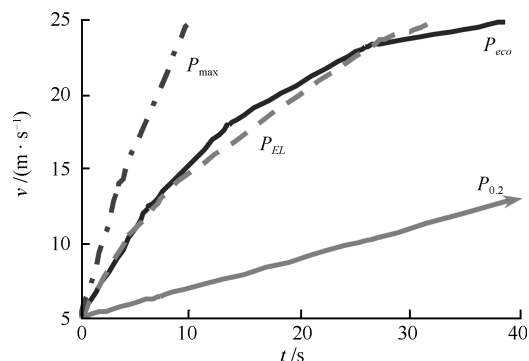
5 节油能力分析

为说明经济性加速策略的节油能力, 考虑从速度 $v_0 = 5 \text{ m/s}$ 加速到经济性车速 $v_f = 25 \text{ m/s}$ 的过程, 采用 4 种加速策略: 1) 前文所求的经济性加速度, 记为 P_{eco} ; 2) 发动机工作于最高效率曲线 E_{Lw} 上, 记为 P_{EL} ; 3) 以恒定加速度 0.2 m/s^2 加速, 记为 $P_{0.2}$; 4) 激进加速, 即以最小化加速时间为目标:

$$J = t_f, \quad (35)$$

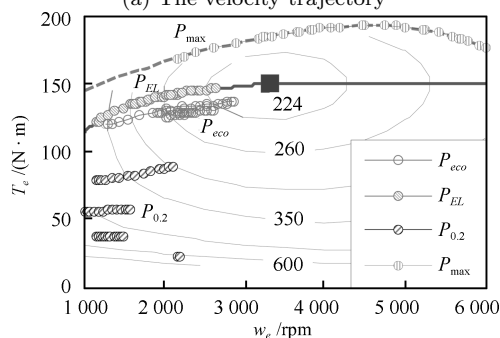
记为 P_{max} .

策略 P_{EL} 和 $P_{0.2}$ 对应的最优控制问题即在原问题的基础上分别新增力矩和加速度约束, 策略 P_{max} 改变性能函数为时间最优. 4 种策略的求解方法仍采用第 2 节所述谱拼接法, 对应的速度曲线如图 11(a) 所示, 对应的发动机工作点如图 11(b) 所示.



(a) 速度曲线

(a) The velocity trajectory



(b) 发动机工作点

(b) The engine operating points

图 11 4 种加速策略求解结果

Fig. 11 The results of the four accelerating strategies

4 种加速策略的加速时间、距离、油耗等信息如表 3 所示.

表 3 不同加速策略结果对比

Table 3 The comparison of different accelerating strategies

	P_{eco}	P_{EL}	$P_{0.2}$	P_{max}
时间 (s)	38.79	32.72	100.00	9.96
距离 (m)	732.84	571.09	1 500.00	159.04
J_L (g)	78.70	69.81	136.03	63.46
J_M (g)	-47.35	-36.90	-96.92	-10.28
J (g)	31.35	32.91	39.11	53.18
耗油比率	—	4.99 %	24.76 %	69.64 %

结合表 3 和图 11 可知: 1) 不同加速过程对应的的时间和距离各不相同, 行驶距离最大相差达到

1 341 m, 其中极限加速策略 P_{\max} 仅耗费 9.96 s, 对应的总油耗 J_L 最小, 这佐证了仅考虑加速总油耗是无法反映加速过程经济性的, 必须引入 J_M 指标消除距离差异的影响. 2) 从综合指标 J 的相对大小可以看出, P_{\max} 加速策略经济性最差, 与 P_{eco} 相比多消耗燃油 69.64%; 以 0.2 m/s^2 恒定加速度同样会多消耗 24.76%. 由此说明, 过于激进或者过于温和的加速策略均会使得燃油经济性变差. 3) 比较策略 P_{EL} 和策略 P_{eco} 知, 发动机即使恒工作于最高效率曲线上也无法达到最优, 两者相差约 5%, 因此最优策略需综合考虑发动机动态特性以及风阻等影响因素.

6 结论

本文主要量化地研究了挡位离散型车辆的经济性加速策略. 提出了考虑加速距离影响的经济性评价指标, 将经济性策略辨识问题构建为一最优控制问题, 结合谱拼接法实现了发动机力矩、挡位、挡位切换时机的数值优化, 并进一步分析了经济性加速度的影响因素和机理. 所得结论如下:

1) 挡位离散型车辆的经济性加速策略辨识为一不连续且强非线性的整型最优控制问题. 本文提出的谱拼接法利用了变速器的挡位切换规律, 将不连续问题转化为连续问题协同优化, 可有效实现该类不光滑系统的最优控制.

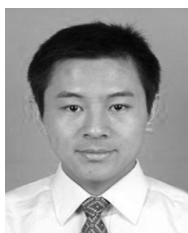
2) 构建的当量油耗指标一定程度上消除了加速距离的影响, 可作为衡量加速过程经济性的量化指标. 根据数值优化和机理分析得到了量化的经济性挡位和加速度选择策略. 整体上, 过于激进或过于平缓的加速均会造成经济性变差. 经济性加速策略本质上是发动机效率、发动机动态特性、空气阻力等影响因素的综合影响结果.

本文重在提供一种处理该类问题的思路, 在构建车辆动力学模型时, 难以考虑换挡过程中的滑磨、冲击、动力中断等动态特性, 所构建的解析模型与实际物理模型不可避免存在一定的误差, 后续工作将建立更加精确的模型加以研究.

References

- Barkenbus J N. Eco-driving: an overlooked climate change initiative. *Energy Policy*, 2010, **38**(2): 762–769
- Chen Hong, Gong Xun, Hu Yun-Feng, Liu Qi-Fang, Gao Bing-Zhao, Guo Hong-Yan. Automotive control: the state of the art and perspective. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 322–346
(陈虹, 宫询, 胡云峰, 刘奇芳, 高炳钊, 郭洪艳. 汽车控制的研究现状与展望. *自动化学报*, 2013, **39**(4): 322–346)
- Kamal M A S, Mukai M, Murata J, Kawabe T. Ecological driver assistance system using model-based anticipation of vehicle-road-traffic information. *IET Intelligent Transport Systems*, 2010, **4**(4): 244–251
- Ericsson E. Independent driving pattern factors and their influence on fuel-use and exhaust emission factors. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 2001, **6**(5): 325–345
- De Vlieger I. On board emission and fuel consumption measurement campaign on petrol-driven passenger cars. *Atmospheric Environment*, 1997, **31**(22): 3753–3761
- El-Shawarby I, Ahn K, Rakha H. Comparative field evaluation of vehicle cruise speed and acceleration level impacts on hot stabilized emissions. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 2005, **10**(1): 13–30
- Johansson H, Färnlund J, Engström C. Impact of Eco Driving on Emissions and Fuel Consumption, Technical Report 1999:165E. Swedish National Road Administration, Swedish, 1999.
- Gilbert E G. Vehicle cruise: improved fuel economy by periodic control. *Automatica*, 1976, **12**(2): 159–166
- Li S E, Peng H. Strategies to minimize the fuel consumption of passenger cars during car-following scenarios. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 2012, **226**(3): 419–429
- Lee J. Vehicle Inertia Impact on Fuel Consumption of Conventional and Hybrid Electric Vehicles Using Acceleration and Coast Driving Strategy [Ph.D. dissertation], Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, 2009.
- Li S E, Peng H, Li K Q, Wang J Q. Minimum fuel control strategy in automated car-following scenarios. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2012, **61**(3): 998–1007
- Kuriyama M, Yamamoto S, Miyatake M. Theoretical study on Eco-driving technique for an electric vehicle with dynamic programming. In: Proceedings of the 2010 International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS). Incheon, Korea: IEEE, 2010. 2026–2030
- Galpin T. Fuel Minimization of a Moving Vehicle in Suburban Traffic [Master dissertation], University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, 2013.
- Kamal M A S, Mukai M, Murata J, Kawabe T. On board Eco-driving system for varying road-traffic environments using model predictive control. In: Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Control Applications. Yokohama, Japan: IEEE, 2010. 1636–1641
- Hu Ming-Hui. Study on Energy Management Strategy for Mild Hybrid Electrical Vehicle with CVT [Ph.D. dissertation], Chongqing University, China, 2007.
(胡明辉. CVT 轻度混合动力汽车能量管理策略研究 [博士学位论文], 重庆大学, 中国, 2007.)
- Zhang Hua-Guang, Zhang Xin, Luo Yan-Hong, Yang Jun. An overview of research on adaptive dynamic programming. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 303–311
(张化光, 张欣, 罗艳红, 杨珺. 自适应动态规划综述. *自动化学报*, 2013, **39**(4): 303–311)
- Hu Yun-Qing, Liu Xing-Gao, Xue An-Ke. A penalty method for solving inequality path constrained optimal control problems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(12): 1996–2001
(胡云卿, 刘兴高, 薛安克. 带不等式路径约束最优控制问题的惩罚函数法. *自动化学报*, 2013, **39**(12): 1996–2001)

- 18 Elnagar G, Kazemi M A, Razzaghi M. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, **40**(10): 1793–1796
- 19 Fahroo F, Ross I M. Advances in pseudospectral methods for optimal control. In: *Proceedings of the 2008 AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. Honolulu, Hawaii, USA: AIAA, 2008. 18–21
- 20 Ross I M, Fahroo F. Pseudospectral knotting methods for solving nonsmooth optimal control problems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, **27**(3): 397–405
- 21 Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: an SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM Review*, 2005, **47**(1): 99–131
- 22 Elnagar G N, Kazemi M A. Pseudospectral Chebyshev optimal control of constrained nonlinear dynamical systems. *Computational Optimization and Applications*, 1998, **11**(2): 195–217

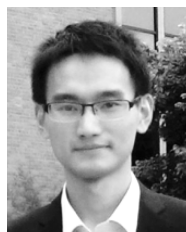


李升波 清华大学汽车工程系副教授。主要研究方向为智能车辆, 最优控制, 驾驶辅助系统, 锂电池能量管理。

E-mail: lisb04@gmail.com

(**LI Eben Sheng-Bo** Associate professor in the Department of Automotive Engineering, Tsinghua University.

His research interest covers autonomous vehicles, optimal control, driver assistance systems, and lithium ion battery management.)



徐少兵 清华大学汽车工程系博士研究生。主要研究方向为最优控制理论, 车辆动力学控制。本文通信作者。

E-mail: xsbing2008@foxmail.com

(**XU Shao-Bing** Ph. D. candidate in the Department of Automotive Engineering, Tsinghua University. His research interest covers optimal control

theory and vehicle dynamics control. Corresponding author of this paper.)



王文军 清华大学汽车工程系助理研究员。主要研究方向为车辆动力学与控制, 驾驶行为与轨道车辆动力学。E-mail: wangxiaowenjun@tsinghua.edu.cn

(**WANG Wen-Jun** Assistant professor in the Department of Automotive Engineering, Tsinghua University. His research interest covers vehicle system

dynamics and control, driving behavior, and dynamics of railway vehicle.)



成波 清华大学汽车工程系教授。主要研究方向为车辆人机工程, 驾驶辅助系统, 主动安全, 智能车辆。

E-mail: chengbo@tsinghua.edu.cn

(**CHENG Bo** Professor in the Department of Automotive Engineering, Tsinghua University. His research interest covers vehicular ergonomics,

driver assistance systems, active safety, and autonomous vehicles.)