对公式

$$\mathbf{w(t,x)}=\boldsymbol{2\omega al}\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{+\infty}\frac{(\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{n+1}}}{(\boldsymbol{\omega l})^{\boldsymbol{2}}-(\boldsymbol{n\pi a})^{\boldsymbol{2}}}\mathbf{sin}\frac{\boldsymbol{n\pi at}}{\boldsymbol{l}}\mathbf{sin}\frac{\boldsymbol{n\pi x}}{\boldsymbol{l}}$$

当$\mathbf{w}\rightarrow\frac{\mathbf{n\pi a}}{\mathbf{l}}$时的分析

廖洲洲 PB17081504

一、问题的引出

设弦的一端(x=0)固定，另一端(x=l)以 sinwt 作周期振动，且初值为零，试研究弦的自由振动。

得到定解问题:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0<x<l,t>0),\\ u(t,0)=0,u(t,l)=\sin\omega t\left(\omega\neq\frac{n\pi a}{l}\right),\\ u(0,x)=0,u_t(0,x)=0\end{cases}$$

将边界齐次化，令$\mathrm{u(t,x)=v(t,x)+w(t,x)}$,其中$v(t,x)=\frac{sin\frac{\omega x}{a}}{sin\frac{\omega l}{a}}sin\,\omega t$，则得到方程

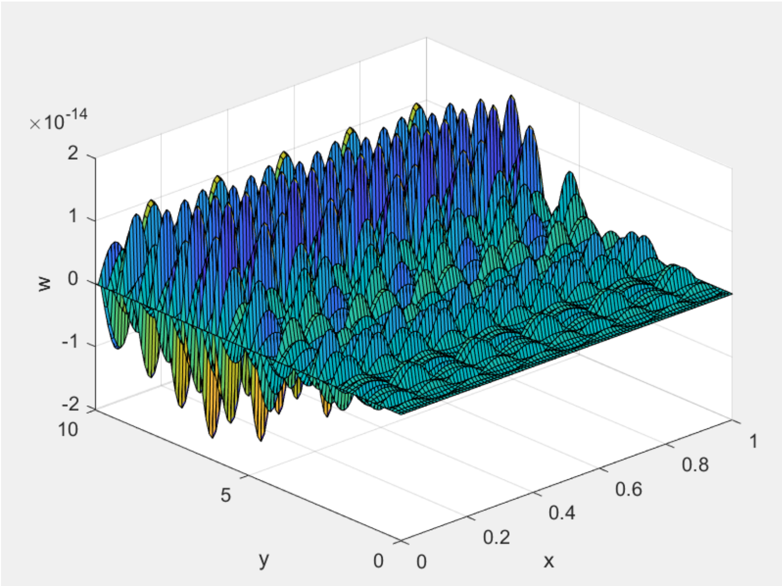
$$\begin{cases}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0<x<l,t>0),\\ w(t,0)=0,w(t,l)=0\\ w(0,x)=0,w_t(0,x)=-w\frac{sin\frac{\omega x}{a}}{sin\frac{\omega l}{a}}\end{cases}$$

解得

$$\mathrm{w(t,x)}=2\omega al\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\omega l)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

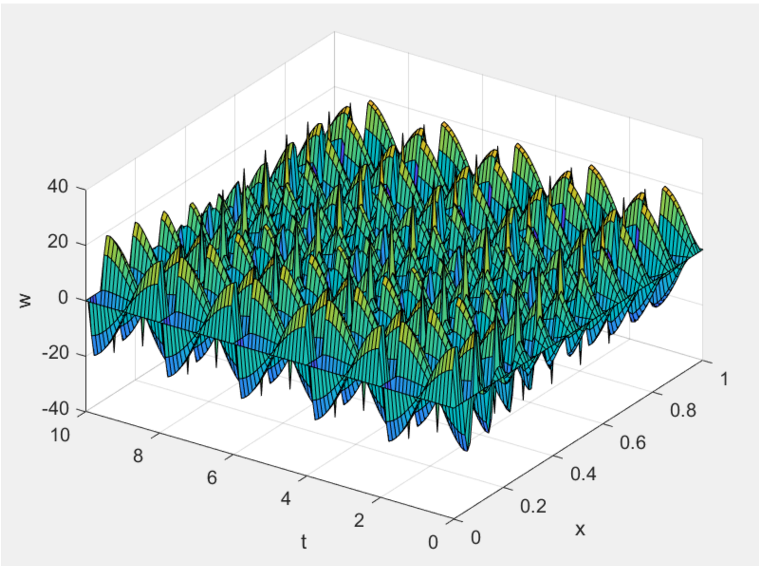
二、MATLAB 绘图分析

1. 首先对 w(t,x)中的单个项进行分析，当常数$\mathrm{a,l},\omega\left(\omega\neq\frac{n\pi a}{l}\right)$均固定时，$2\omega al\frac{(-1)^{n+1}}{(\omega l)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$是个绝对值小于$\left|\frac{2\omega al}{(\omega l)^2-(n\pi a)^2}\right|$的数，绘图如下：(这里选取常数$l=a=1$，$w=20\pi,n=10$)(代码见附 a)

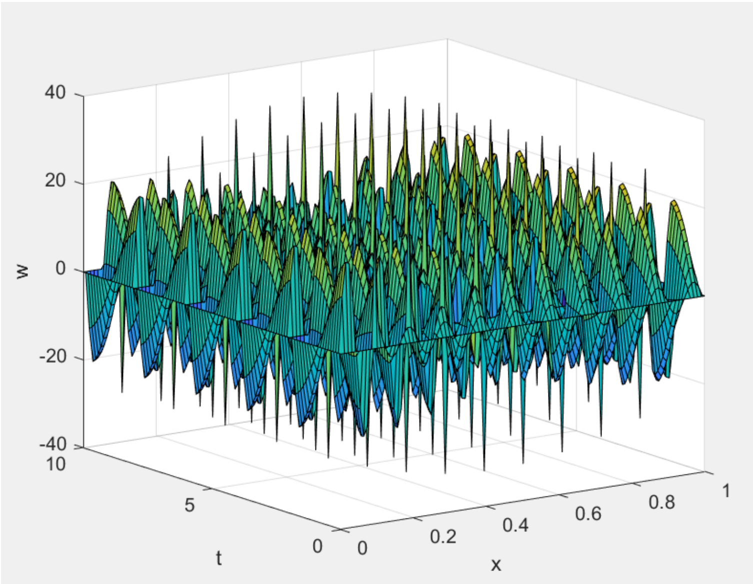


这里可以看出公式中单个项是个很小的值

2. 当$\omega \neq \frac{n\pi a}{l}$时对公式的绘图（这里选取常数$l = a = 1$，$w = 20.5\pi$),对 n=500,1000 进行了级数求和，得到了两个图：(代码见附 b)



n=500

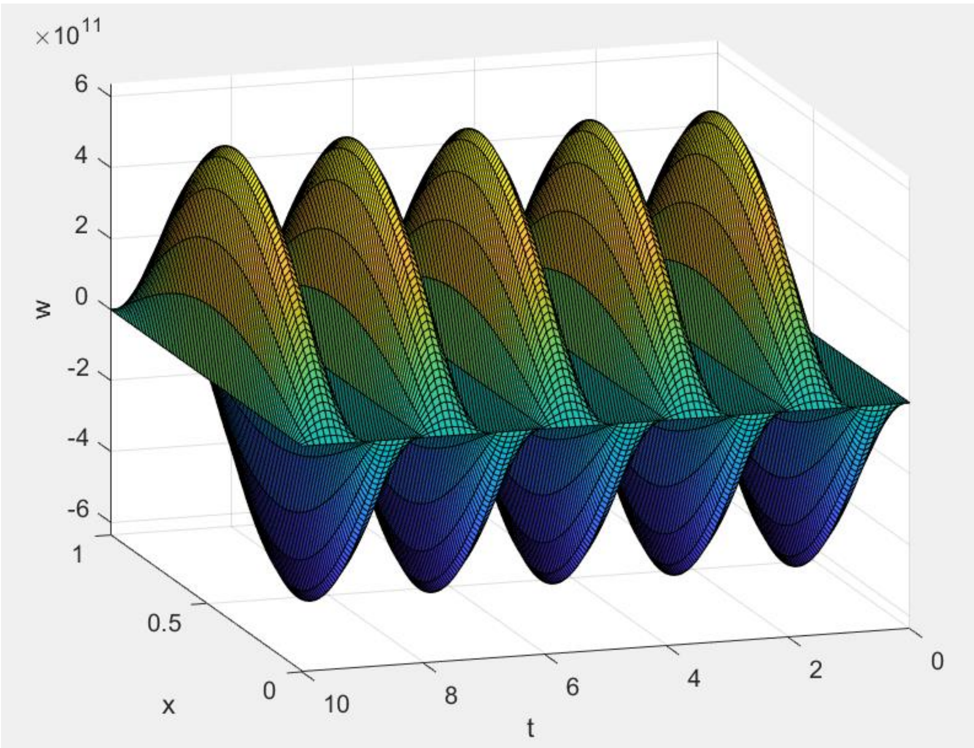


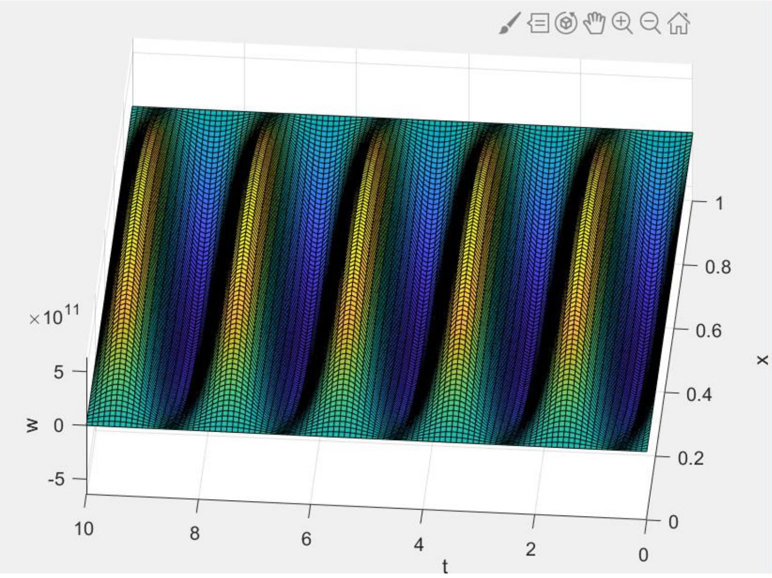
n=1000

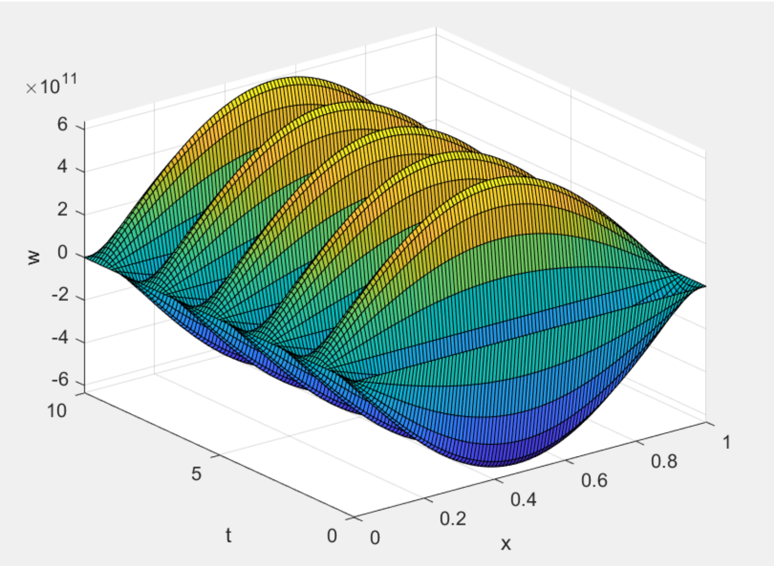
可以看出当$\omega \neq \frac{n\pi a}{l}$时 w(t,x)时一个收敛的级数.

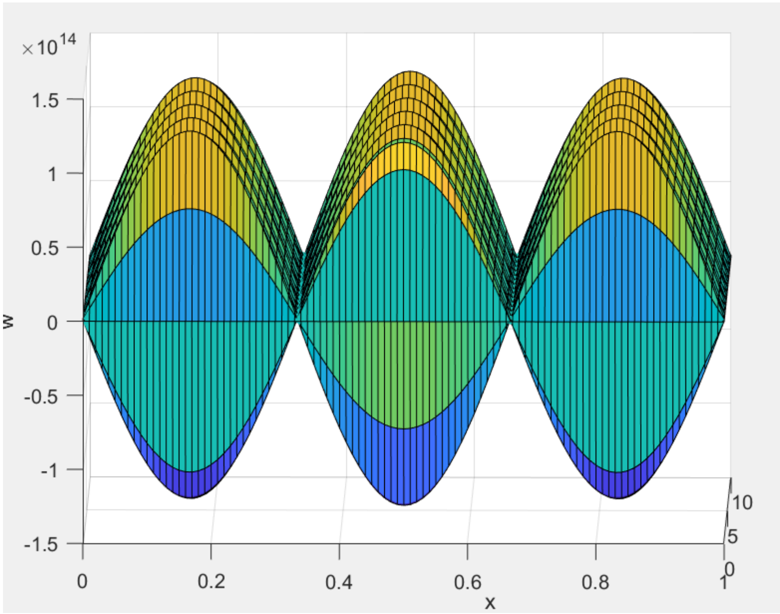
3. 当$\omega \to \frac{m\pi a}{l}$时(这里 m 只是一个常数)的绘图,选取 m=1,为了表示趋近,另$\omega = \frac{1.0000001\pi a}{l}$.绘制得到图形如下:这里直接取 n=1000 进行求和(代码见附 c)

- m->1 时的 w 图形



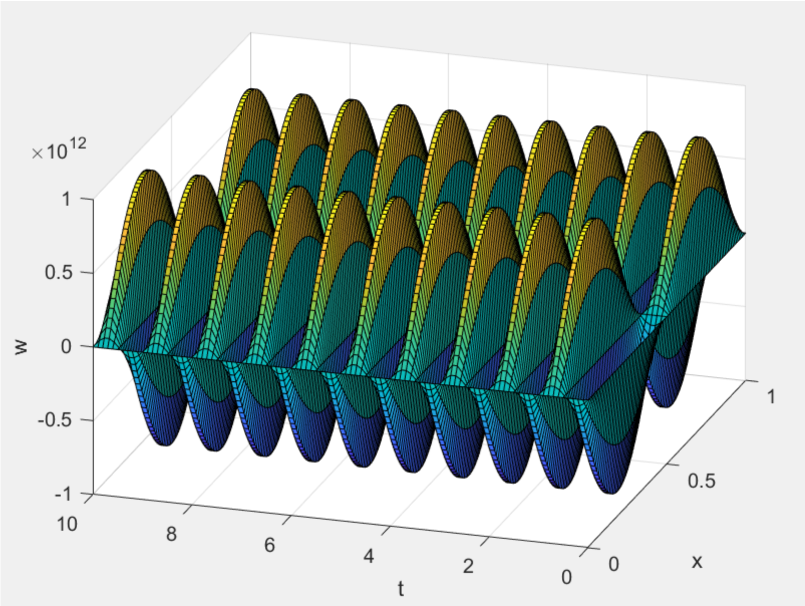




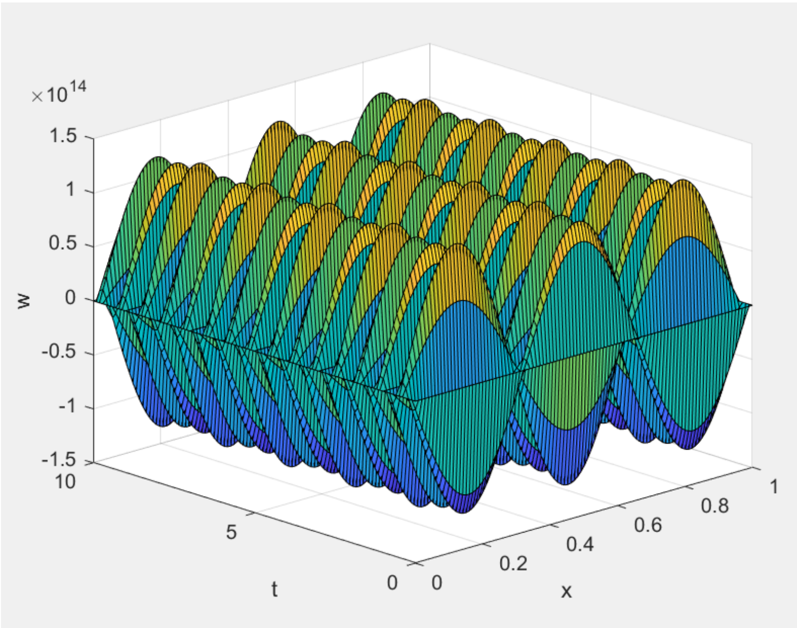


这里可以看出 w(x,t)是沿着时间 t 在进行循环震荡的,其振幅趋于无穷.

- m->2 时的 w 图形



- m->2 时的 w 图形



三、从上述绘图结果可以看出,当$\omega \to \frac{m\pi a}{l}$时,w(x,t)是在正负无穷间进行震荡的.并且振幅基本保持不变.

四、数学分析

对于公式

$$\mathrm{w(t,x)} = 2\omega al\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\omega l)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

当$\omega \to \frac{m\pi a}{l}$时,我们可以将这个公式写为

$w(t,x)=2ma^2\pi(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(m\pi a)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}+$

$\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(m\pi a)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}+\lim_{X\to m\pi a}\frac{(-1)^{m+1}}{(X)^2-(m\pi a)^2}\sin\frac{m\pi at}{l}\sin\frac{m\pi x}{l})$

其中$\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(m\pi a)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(m\pi a)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$ 是收敛的,

而 $\lim_{X\to m\pi a}\frac{(-1)^{m+1}}{(X)^2-(m\pi a)^2}\sin\frac{m\pi at}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}$ 是发散的,故 w(t,x)会在正负无穷间震荡.

五、总结

- 公式$w(t,x)=2\omega al\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\omega l)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$在$\omega\to\frac{m\pi a}{l}$时其值会在正负无穷间进行震荡
- 通过这次分析,学习了 MATLAB 二元函数三维图像绘制的方法,明白了图像分析对于数学分析的重要性.

✧ 附 MATLAB 代码:

代码a:

```
clear;
x=0:0.01:1;
t=0:0.1:10;
[X,T]=meshgrid(x,t);
W=2.*20.*pi.*(-1).*11./((20.*pi)^2-
(10.*pi)^2).*sin(10.*pi.*T).*sin(10.*pi.*X);
surf(X,T,W);
xlabel("x");
ylabel("y");
zlabel("w");
```

代码b:

```
clear;
x=0:0.01:1;
t=0:0.1:10;
[X,T]=meshgrid(x,t);
W=0;
for n=1:1000
    W=W+2.*(20.5).*pi.*(-1).*(n+1)./(((20.5).*pi)^2-
(n.*pi)^2).*sin(n.*pi.*T).*sin(n.*pi.*X);
end
surf(X,T,W);
xlabel("x");
```

```
ylabel("t");
zlabel("w");
```

代码c：

```
clear;
x=0:0.01:1;
t=0:0.1:10;
[X,T]=meshgrid(x,t);
W=0;
w=3.00000000000001;
for n=1:1000
    W=W+2.*(w).*pi.*(-1).*(n+1)./(((w).*pi)^2-
(n.*pi)^2).*sin(n.*pi.*T).*sin(n.*pi.*X);
end
surf(X,T,W);
xlabel("x");
ylabel("t");
zlabel("w");
```