6. 实验[6] 汉明码译码器设计

6.1 实验目的

通过实验加深对线性分组码基本概念及原理的掌握。

充分理解汉明码的基本原理，熟练掌握其编码译码过程。

6.2 实验主要器材和设备

电脑，LabVIEW 程序开发和应用环境。

6.3 实验原理

6.3.1 线性分组码及其校正子

二进制线性分组码用长度为n的一组码字，来传送k比特长的信息分组，经常记作(n,k)。其中，n是码组程度，简称码长；k是信息比特位数。另外，$r=n-k$表示一个码组中监督码元位数。

奇偶校验码是简单的线性分组码之一，其校验方程为

$$a_{n-1}\oplus a_{n-2}\oplus\dots\oplus a_1\oplus a_0=0 \quad (1)$$

式中，a_0为校验位（监督码元），其他为信息位。

线性分组码的每一监督码元只与本组的信息码元发生关系，而与其他组的码元无关，且监督码元和信息码元之间由一些线性代数方程相关联。以由式 1 构成的偶校验码为例，在接收端进行译码校验实际上就是计算

$$S=a_{n-1}\oplus a_{n-2}\oplus\dots\oplus a_1\oplus a_0 \quad (2)$$

若$S=0$，就认为无错码；若$S=1$，就认为有错码。这一联系监督位和信息位的模二和代数方程式（式 2）称为监督关系式，S称为校正子。

6.3.2 汉明码举例

汉明码是一种特殊但在工程上又十分常用的线性分组码。对二进制汉明码而言，满足$n=2^r-1$和$k=2^r-1-r$的关系式。

考虑构造（7,4）汉明码，则监督位数为 3。用$a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$表示该（7,4）码的 7 位码元，其中$a_2a_1a_0$是监督码，$a_6a_5a_4a_3$是信息码。若用S_1、S_2、S_3表示三个监督关系式中的校正子，假如将$S_1S_2S_3$的取值与错码位置的对应关系设定如表 6-1 所示。

表 6-1 （7,4）分组码的校正子与错码位置的关系

$S_1S_2S_3$	错码位置	$S_1S_2S_3$	错码位置
001	a_0	101	a_4
010	a_1	110	a_5
100	a_2	111	a_6
011	a_3	000	无错

由表 6-1 中的设定可知，当$S_1=1$时有错码，错码位置在a_6,a_5,a_4,a_2，意味着这四个码元构成的偶校验关系

$$S_1=a_6\oplus a_5\oplus a_4\oplus a_2 \quad (3)$$

同理，$S_2=1$时有错码，错码位置在a_6,a_5,a_3,a_1，则有

$$S_2=a_6\oplus a_5\oplus a_3\oplus a_1 \quad (4)$$

同理，$S_3=1$时有错码，错码位置在a_6,a_4,a_3,a_0，则有

$$S_3=a_6\oplus a_4\oplus a_3\oplus a_0 \quad (5)$$

在发送端编码时，信息码a_6,a_5,a_4,a_3的取值取决于输入传输信息。而监督码a_2,a_1,a_0则应根据信息码的取值，通过式 3、4、5 计算而定。由偶校验关系可知，只有当三个校正子S_1、S_2、S_3均为零时，才能确定监督码，所以

$$\left.\begin{array}{l} a_6 \oplus a_5 \oplus a_4 \oplus a_2 = 0 \\ a_6 \oplus a_5 \oplus a_3 \oplus a_1 = 0 \\ a_6 \oplus a_4 \oplus a_3 \oplus a_0 = 0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

可解出监督码

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_6 \oplus a_5 \oplus a_4 \\ a_1 = a_6 \oplus a_5 \oplus a_3 \\ a_0 = a_6 \oplus a_4 \oplus a_3 \end{array}\right\} \tag{7}$$

1. 生成矩阵与编码

式 7 可以改写为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

或者

$$[a_2 \quad a_1 \quad a_0] = [a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3]\boldsymbol{Q} \tag{9}$$

显然，Q 为 k×r 阶矩阵，是 P 的转置，即

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^T \tag{10}$$

若给定 Q，则根据式 9 可以由信息码元计算出监督码元。

在 Q 的左边加上一个 k×k 阶单位矩阵就构成一个 n×k 的新矩阵 G：

$$\mathbf{G} = [I_k \vdots \boldsymbol{Q}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

G 为生成矩阵，由 G 和信息码组 m 就可以产生许用码组 A。

$$\boldsymbol{A} = [a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0] = [a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3] \cdot \boldsymbol{G} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{G} \tag{12}$$

2. 监督矩阵与译码

将监督方程组式 6 改写成如下形式：

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot a_6 \oplus 1 \cdot a_5 \oplus 1 \cdot a_4 \oplus 0 \cdot a_3 \oplus 1 \cdot a_2 \oplus 0 \cdot a_1 \oplus 0 \cdot a_0 = 0 \\ 1 \cdot a_6 \oplus 1 \cdot a_5 \oplus 0 \cdot a_4 \oplus 1 \cdot a_3 \oplus 0 \cdot a_2 \oplus 1 \cdot a_1 \oplus 0 \cdot a_0 = 0 \\ 1 \cdot a_6 \oplus 0 \cdot a_5 \oplus 1 \cdot a_4 \oplus 1 \cdot a_3 \oplus 0 \cdot a_2 \oplus 0 \cdot a_1 \oplus 1 \cdot a_0 = 0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

其矩阵形式可以表达为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_6 \\ a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (mod2) \tag{14}$$

简记为

$$\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{A}^T = \mathbf{0}^T \tag{15}$$

其中，

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = [a_6 \quad a_5 \quad a_4 \quad a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0]$$

$$\boldsymbol{0} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

H 为监督矩阵，反应监督码元与信息码元之间的校验关系。

显然，（7,4）汉明码的生成矩阵、监督矩阵以及校正子与错码位置的对应关系不是唯一的。本实验中，生成矩阵、监督矩阵等将与以上举例有所不同。

6.4 实验内容与要求

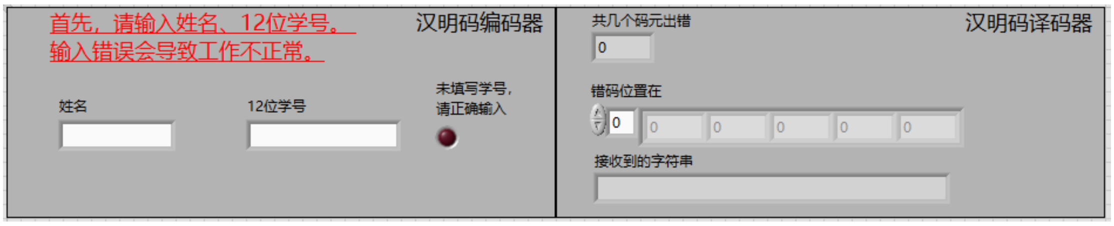

图 1 编码器/译码器前面板

请从课程 CANVAS 网站下载指定的 LABVIEW 程序。该程序 3 个 vi 的调用层次关系为：LAB6_tamplate.vi 调用 LAB6_sub.vi，后者进一步调用 decimal_to_binary.vi。其中已含一个汉明码编码器（源代码加密且进制破译），学生需要在前面板（如图 1 左部）准确输入个人学号，它才能正确工作。已知原始信息是一段 10 个字符的 ASCII 码序列，每个字符对应 8 比特。按（7,4）汉明码，生成矩阵如式 16。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

对原始信息每 4 比特编制一个 7 比特码组，然后模拟随机产生错误码元。生成共 140 比特的二进制码元序列。每个码组最多 1 位差错；整个序列的错误码元限定为 3 到 5 个。

6.4.1 实验任务 6_1

请写出指定汉明码编码的监督矩阵 H。

请填表写出校正子 S 与错误图像 E 及错码位置的对应关系。注：用 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0表示一个码组的 7 位码元。

表 6-2 指定编码器的校正子 S 与错误图像 E 及错码位置的关系

S	E	错码位置	S	E	错码位置
001	0000001	a_0	101		
010			110		
100			111		
011			000	0000000	无错

6.4.2 实验任务 6_2

请分析以上问题，编写完善 LabVIEW 程序完成相应的译码，指出误码数量和所在位置，正确纠错和回复原始字符串，前面板应采用图 1 右部样式。

6.5 实验报告

本实验仅需提交简易实验结果记录报告，可参考课程提供的本实验的报告模板。

（袁焱 李安琪 编写 2022 年 12 月 14 日）