"工程问题建模与仿真"指导材料

案例 2 系统可用性数值的理论求解方法介绍

《一个多节点声纳系统中同步时钟机制的可靠性评估和系统优化问题(基本条件和实验要求)》一文（下称案例 2 课题要求）描述了本课程案例 2 中的工程问题，其中提出了求解目标系统可靠性的要求。本文介绍一种理论估算方法。

在数学上，直接推导求解该系统可靠性的难度较大，且过程十分繁琐，所以本文使用概率论知识，通过一定的理论推断和数值计算，求解该系统的可用性，用可用性作为其可靠性的近似。

1. 用系统可用性作为系统可靠性的近似

案例 2 课题要求中给出了系统可靠性的定义，为该系统工作寿命超过某一定值 w 的概率。系统在 $0 < t \le w$ 期间一直有效工作，即

$R(w) = \mathrm{Pr}(\text{The system is not failed during the whole operation time } t\text{=0 to } w)$

而系统可用性的则是指该系统在时刻 t=w，瞬时状态为正常工作的概率。即

$A(w) = \mathrm{Pr}(\text{The system is not failed at the time intant } t\text{=}w)$

在本案例中，上述两个概率因下面分析的所谓"复活"现象而有所差异。

至少在两种特定的情况下，案例 2 系统会发生先失效而后又恢复功能的所谓"复活"现象。所以，可用性数值会比可靠性为高。

情况一，同时有两个 g_{MO} 节点，系统应时钟总线阻塞而失效。假如两个中至少一个 g_{MO} 节点内部切换器状态组合为 g_{A0} g_{B1}（见表 1），其后某一时刻切换器 A 发生 A3 故障，节点状态转为 g_{DN}（g_{A3} g_{B1}）。由于两个 g_{MO} 节点争抢总线的情况消失，于是系统可能恢复功能。

情况二，系统处于 G_{sys4} 状态，g_{DM} 节点未能成为主节点，有效节点少于 k 个，系统失效。g_{DM} 节点的切换器状态组合为 g_{A2} g_{B0}，其后某一时刻切换器 B 发生 B1 故障，节点状态转为 g_{MO}（g_{A2} g_{B1}），于是必然成为主节点，使系统内有效节点增加 1 个，系统功能得以恢复。

由于上述"复活"现象的发生概率比较小，所以可以用系统可用性的计算结果作为系统可靠性的近似解。本文第 2 部分给出求解提示。

当然，若能进一步分析"复活"现象的概率，对可用性数值加以修正，则可以更精确地得到可靠性的理论估算值。

2. 关于系统可用性数值求解的提示

2.1 节点处于各状态的概率

首先，运用概率论知识对该系统进行分析，获得节点各个状态的概率表达式。

当系统处于工作时刻 t 时，切换器 A 正常工作的概率为

$$p_{A0}(t) = e^{-\lambda_A t} \qquad \text{（式 1）}$$

从而 A 发生故障 A1，A2，A3 的概率分别为

$$p_{A1}(t)=p_{EA1}\cdot\Pr(T_A<t)=p_{EA1}(1-e^{-\lambda_A t})$$ （式 2a）

$$p_{A2}(t)=p_{EA2}\cdot\Pr(T_A<t)=p_{EA2}(1-e^{-\lambda_A t})$$ （式 2b）

$$p_{A3}(t)=p_{EA3}\cdot\Pr(T_A<t)=p_{EA3}(1-e^{-\lambda_A t})$$ （式 2c）

切换器 B 正常工作的概率为

$$p_{B0}(t)=e^{-\lambda_B t}$$ （式 3）

从而 B 发生故障 B1，B2 的概率分别为

$$p_{B1}(t)=p_{EB1}(1-e^{-\lambda_B t})$$ （式 4a）

$$p_{B2}(t)=p_{EB2}(1-e^{-\lambda_B t})$$ （式 4b）

于是，根据相关的节点状态情况分析，可以确定节点的六种状态所对应的概率分别为

$$P_{PF}(t)=P_{A0}(t)P_{B0}(t)$$ （式 5a）

$$P_{MO}(t)=P_{A0}(t)P_{B1}(t)+P_{A2}(t)P_{B1}(t)$$ （式 5b）

$$P_{SO}(t)=P_{A0}(t)P_{B2}(t)+P_{A1}(t)P_{B0}(t)+P_{A1}(t)P_{B2}(t)$$ （式 5c）

$$P_{FB}(t)=P_{A1}(t)P_{B1}(t)$$ （式 5d）

$$P_{DM}(t)=P_{A2}(t)P_{B0}(t)$$ （式 5e）

$$P_{DN}(t)=P_{A2}(t)P_{B2}(t)+P_{A3}(t)\left(P_{B0}(t)+P_{B1}(t)+P_{B2}(t)\right)$$ （式 5f）

2.2 系统处于各状态的概率

案例 2 课题要求中，已将系统状态划分成 4 种，分别用G_{sys1}、G_{sys2}、G_{sys3}、G_{sys4}表示。系统包含 n 个节点。在时刻 t，每个节点可能处于 6 种节点状态之一，n 个节点整体上会构成 6 项分布。编写 MATLAB 程序，可以穷举分析所有可能的组合，求取数值解。

以 n=7，t=w 为例，如下思路可供参考。

1) 如表 1 所示，穷举所有可能组合；

表 1 节点状态分布组合的穷举分析

PF	MO	SO	FB	DM	DN
7	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0
6	0	1	0	0	0
…					
3	2	0	1	1	0
…					
0	0	0	0	0	7

2）考虑单个节点状态概率和某一组合出现频次，可以分别计算表 1 中每一组合的出现概率；例如表 1 中第 6 行组合，概率应该是 $C_7^3C_4^2C_2^0C_2^1C_1^1C_0^0 \cdot P_{PF}^3(w)P_{MO}^2(w)P_{FB}(w)P_{DM}(w)$，C 是组合数符号；

3）逐个考查每一种节点状态分布组合，计算其出现概率，按条件 C1 至 C9 分析判断每一种组合各应归入哪种系统状态，累计求解系统各状态的概率；

4）*t*=*w* 时系统处于 G_{sys2}、G_{sys3} 的概率之和，即所求的系统可用性。

（袁焱 李安琪改编，2022 年 4 月 21 日）