## Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики Кафедра «Прикладная математика»

#### Отчет по лабораторной работе №4

по дисциплине "Математическая статистика"

Выполнил студент Группы 3630102/80101

шао Цзяци

Проверил доцент, к.ф.-м.н.

Баженов Александр Николаевич

# Содержание

1.	Постановка задачи	4
2.	Теория	4
	2.1. Рассматриваемые распределения	4
	2.2. Эмпирическая функция распределение	4
	2.3. Ядерные оценки плотности вероятности	5
3.	Реализация	5
4.	Результаты	6
	4.1. Эмпирическая функция распределения	6
	4.2. Ядерные оценки плотности распределения	8
5.	Обсуждение	15

# Список иллюстраций

1	Нормальное распределение	6
2	Нормальное распределение	6
3	Нормальное распределение	7
4	Нормальное распределение	7
5	Нормальное распределение	8
6	Нормальное распределение $n=20$	8
7	Нормальное распределение $n=60$	Ö
8	Нормальное распределение $n=60$	Ĝ
9	Распределение Коши $n=20$	10
10	Распределение Коши $n=60$	10
11	Распределение Коши $n=100\ldots\ldots$	11
12	Распределение Лапласа $n=20$	11
13	Распределение Лапласа $n=60$	12
14	Распределение Лапласа $n=100$	12
15	Распределение Пуассона $n=20$	13
16	Распределение Пуассона $n=60$	13
17	Распределение Пуассона $n=100\ldots\ldots$	14
18	Равномерное распределение $n=20$	14
19	Равномерное распределение $n=60$	15
20	$P_{\text{ариомериов распределение } n = 100$	1 5

#### 1. Постановка задачи

Сгенерировать выборки размером 20, 60 и 100 элементов. Построить на них эмпирические функции распределения и ядерные оценки плотности распределения на отрезке [-4,4] для непрерывных распределений и на отрезке [6,14] для распределения Пуассона.

### 2. Теория

#### 2.1. Рассматриваемые распределения

Плотности распределений

• Нормальное распределение

$$N(x,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1}$$

• Распределение Коши

$$C(x,0,1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1} \tag{2}$$

• Распределение Лапласа

$$L(x,0,\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|x|}$$
(3)

• Распределение Пуассона

$$P(k,10) = \frac{10^k}{k!}e^{-10} \tag{4}$$

• Равномерное распределение

$$U(x, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}, |x| \le \sqrt{3} \\ 0, |x| \ge \sqrt{3} \end{cases}$$
 (5)

### 2.2. Эмпирическая функция распределение

C тамистический p n - последовательность различных элементов выборки  $\{z_i\}_{i=1}^k$ , расположенных по возрастанию, с указанием частот  $\{n_i\}_{i=1}^k$ , с которыми эти элементы содержатся в выборке.

Эмпирическая функция - это относительная частота события X < x, полученная по данной выборке:

$$F_n^*(x) = P^*(X < x) \tag{6}$$

Его можно найти по формуле

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{x_i < x} \tag{7}$$

где, 1 - это индикаторная функция. Эмпирическая функция распределения является оценкой, т. е. приближённым значением, генеральной функции распределения  $F_n^*(x) \approx F_X(x)$ .

#### 2.3. Ядерные оценки плотности вероятности

Оценка плотности вероятности f(x) - построенная на основе выборки функция  $\widehat{f}(x)$  :  $\widehat{f}(x) \approx f(x)$ 

Непрерывная ядерная оценка задается формулой:

$$\widehat{f}_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K(\frac{x - x_i}{h_n}) \tag{8}$$

где K(u) - ядро, т. е. непрерывная функция, являющаяся плотностью вероятности,  $x_1,...,x_n$  - элементы выборки, последовательность  $\{h_n\}$ :

$$h_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0; nh_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.$$
 (9)

Используется Гауссово ядро:

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \tag{10}$$

А также правило Сильвермана:

$$h_n = 1.06\hat{\sigma}n^{-1/5} \tag{11}$$

где  $\hat{\sigma}$  - выборочное стандартное отклонение.

### 3. Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования python в среде разработки Pycharm с дополнительными библиотеками.

- scipy
- numpy
- matplotlib
- math
- seaborn
- statsmodels

Исходный код лабораторной работы размещен в Github-репозитории. URL: https://github.com/Shaots/shaoMathStatistic/tree/master/Lab4

# 4. Результаты

# 4.1. Эмпирическая функция распределения

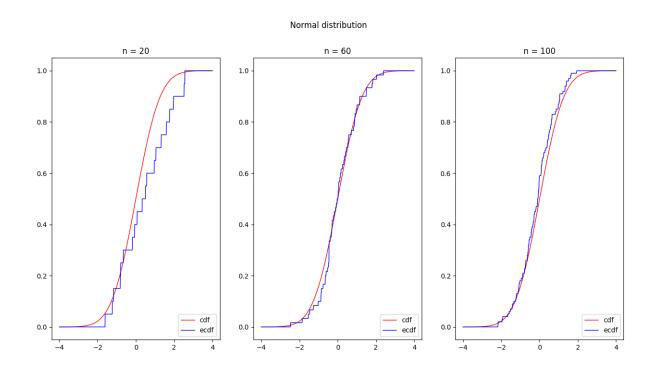


Рис. 1. Нормальное распределение

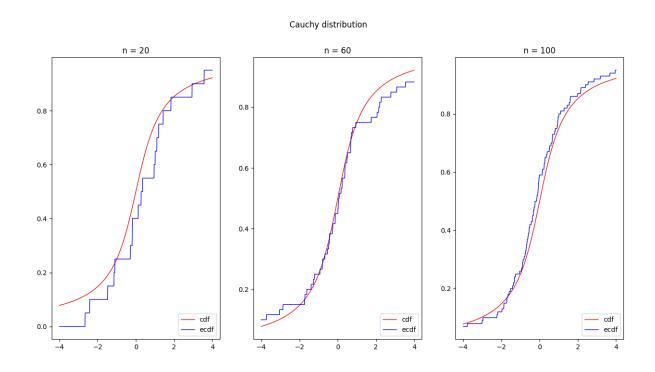


Рис. 2. Нормальное распределение

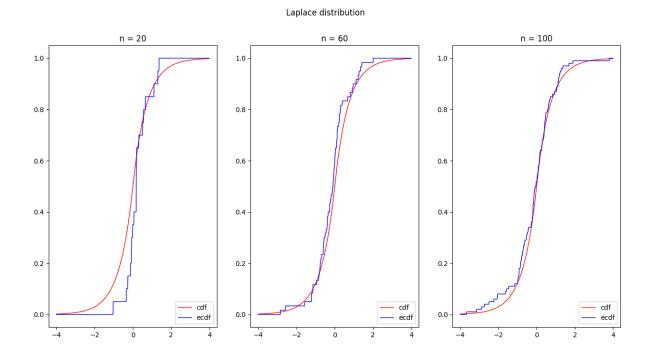


Рис. 3. Нормальное распределение

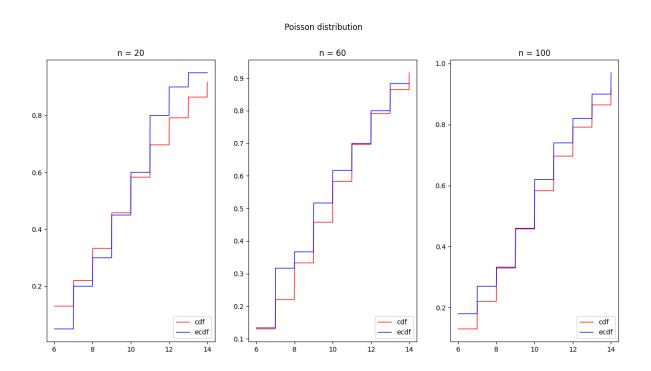


Рис. 4. Нормальное распределение

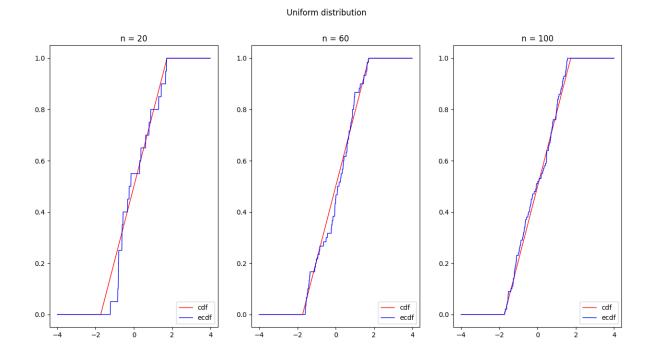


Рис. 5. Нормальное распределение

## 4.2. Ядерные оценки плотности распределения

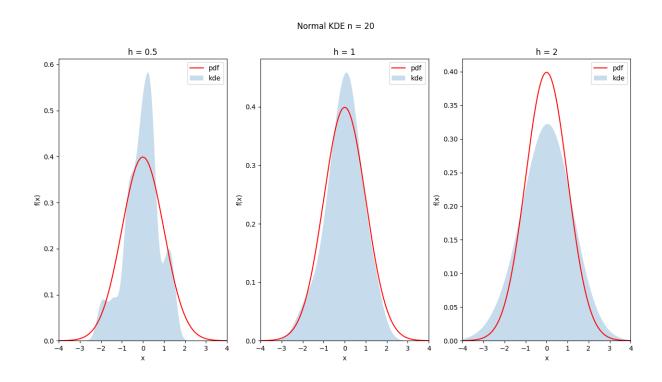


Рис. 6. Нормальное распределение n = 20

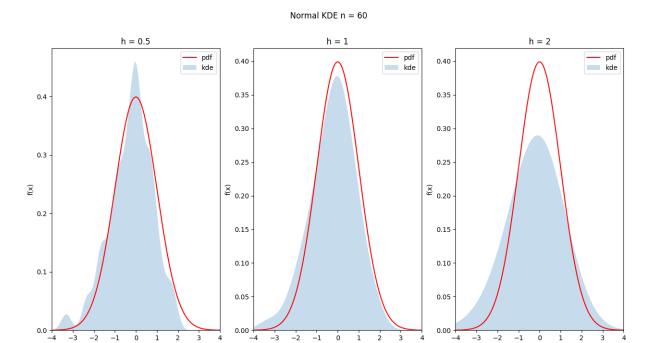


Рис. 7. Нормальное распределение n = 60

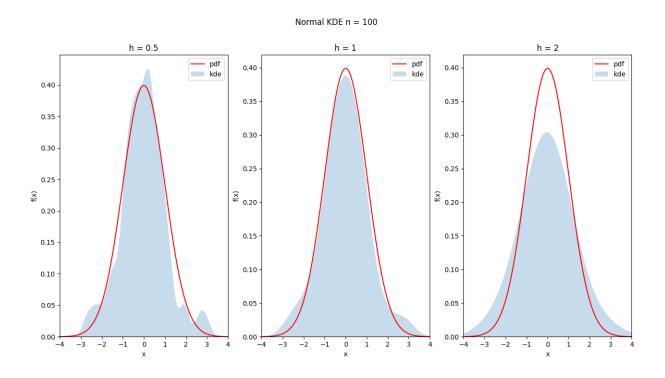


Рис. 8. Нормальное распределение n = 60

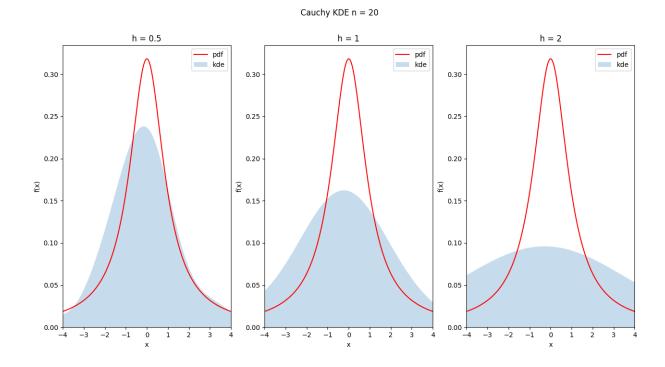


Рис. 9. Распределение Коши  ${\rm n}=20$ 

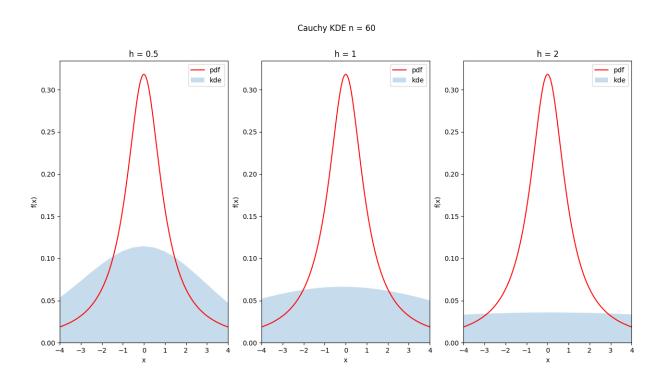


Рис. 10. Распределение Коши n=60

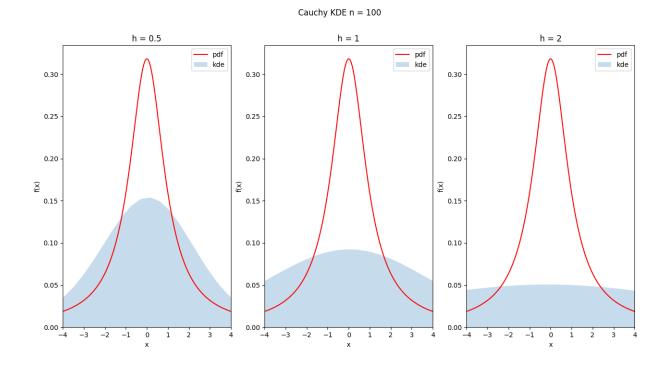


Рис. 11. Распределение Коши n=100

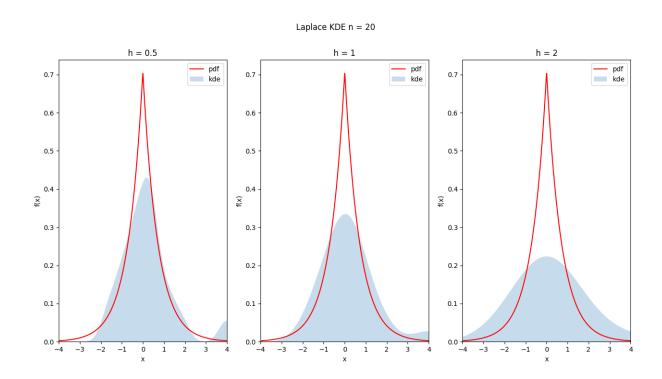


Рис. 12. Распределение Лапласа n=20

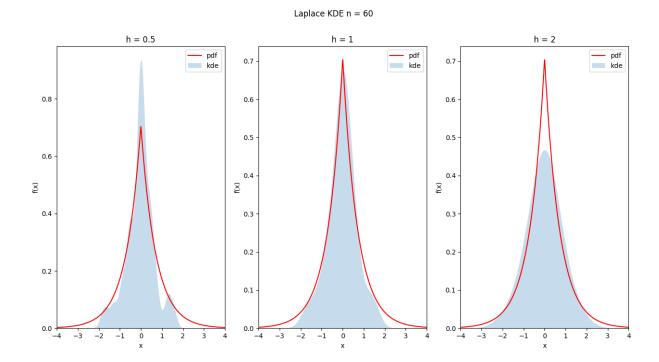


Рис. 13. Распределение Лапласа n=60

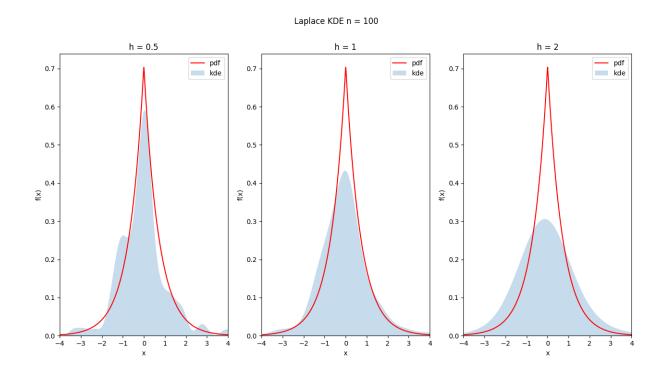


Рис. 14. Распределение Лапласа n = 100

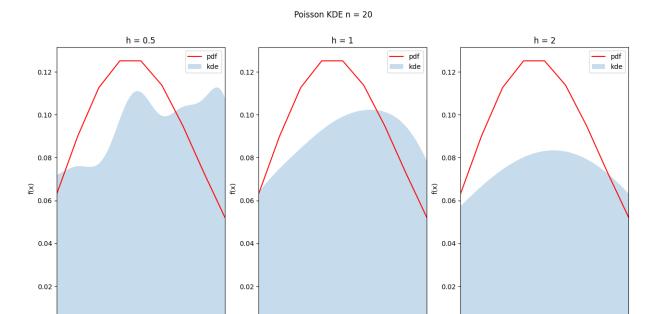


Рис. 15. Распределение Пуассона n=20

0.00

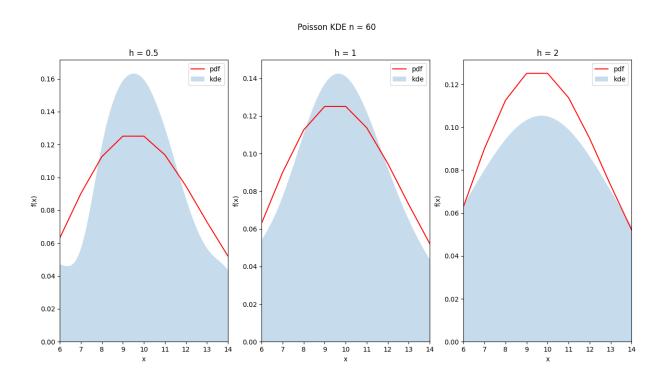


Рис. 16. Распределение Пуассона n=60

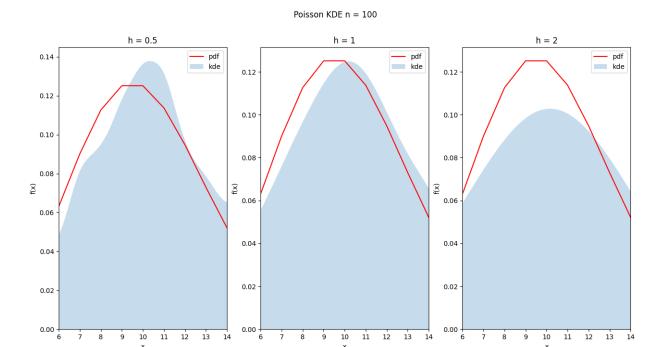


Рис. 17. Распределение Пуассона n=100

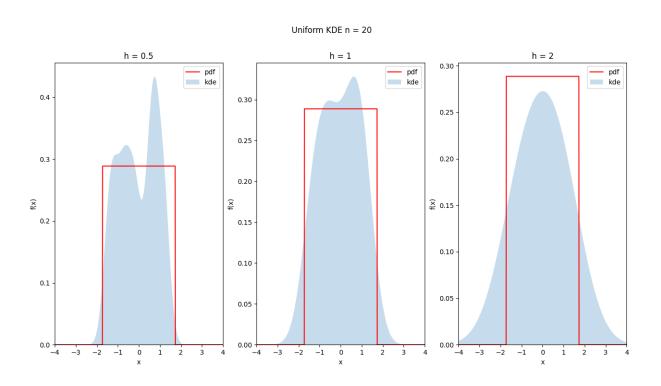


Рис. 18. Равномерное распределение n = 20

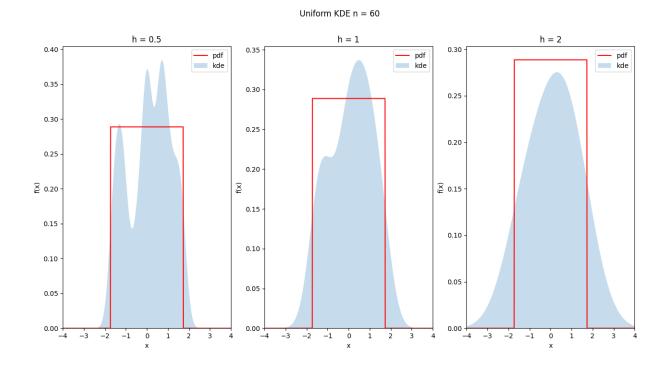


Рис. 19. Равномерное распределение n = 60

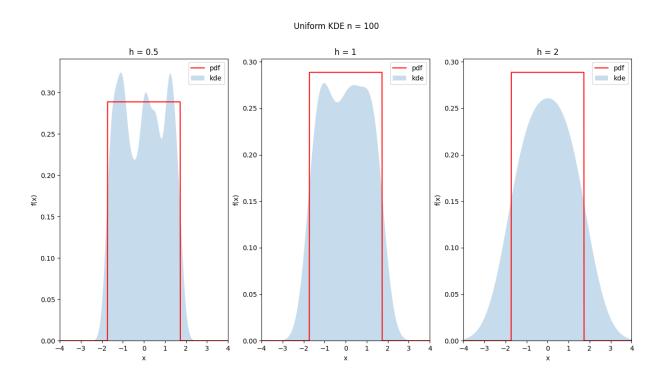


Рис. 20. Равномерное распределение n = 100

# 5. Обсуждение

Из иллюстрации с эмпирическими функциями вытекает, что чем больше выборка, ступенчатая эмпирическая функция распределения тем лучше приближает функцию распределения

реальной выборки. Так и согласится с теоремой Гливенко — Кантелли, что  $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}|F_n^*(x)-F(x)|=0$  почти наверное.

Иллюстрации ядерных оценок плотностей распределения демонстрируют в большинстве случаев приближение ядерной оценки к функции плотности вероятности по всем h с увеличением размерности выборки. Однако оптимальным значением для распределения Коши можно назвать размерность выборки, равной 60.

Каждое распределение имеет свой самый подходящий параметр h для описания ядерной оценки: для нормального, равномерного и пуассоновского распределений оптимальным значением параметра является  $h=h_n$ , а для распределений Коши и Лапласса -  $h=h_n/2$ .

Также можно увидеть, что чем больше коэффициент при параметре сглаживания  $h_n$  тем меньше изменений знака производной у аппроксимирующей функции, вплоть до того, что при  $h=2h_n$  функция становится унимодальной на рассматриваемом промежутке. Также видно, что при  $h=2h_n$  по полученным приближениям становится сложно сказать плотность вероятности какого распределения они должны повторять, так как они очень похожи между собой.