Bicolor_Hanoi双色汉诺塔

问题描述：设 A、B、C 是 3 个塔座。开始时，在塔座 A 上有一叠共 n 个圆盘，这些圆盘自下而上，由大到小地叠放在一起。各圆盘从小到大编号为 1, 2, …, n，奇数号圆盘着红色，偶数号圆盘着蓝色，如图 2-19 所示。现要求将塔座 A 上的这一叠圆盘移到塔座 B 上，并仍按同样顺序叠置。在移动圆盘时应遵守以下移动规则：

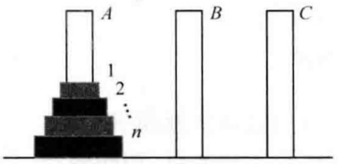

图 2-19 双色 Hanoi 塔

规则Ⅰ：每次只能移动 1 个圆盘；

规则Ⅱ：任何时刻都不允许将较大的圆盘压在较小的圆盘之上；

规则Ⅲ：任何时刻都不允许将同色圆盘叠放在一起；

规则Ⅳ：在满足移动规则Ⅰ～Ⅲ的前提下，可将圆盘移至 A、B、C 中任一塔座上。

试设计一个算法，用最少的移动次数将塔座 A 上的 n 个圆盘移到塔座 B 上，并仍按同样顺序叠置。

算法设计：对于给定的正整数 n，计算最优移动方案。

数据输入：由文件 input.txt 给出输入数据。第 1 行是给定的正整数 n。

结果输出：将计算出的最优移动方案输出到文件 output.txt。文件的每行由一个正整数 k 和 2 个字符 c_1 和 c_2 组成，表示将第 k 个圆盘从塔座 c_1 移到塔座 c_2 上。

输入文件示例	输出文件示例
input.txt	output.txt
3	1 A B
	2 A C
	1 B C
	3 A B
	1 C A
	2 C B
	1 A B

问题分析

这题的实质是盘子初始编号奇偶性堆叠的问题，同奇或同偶的盘子不能放在一起，可通过把颜色信息转换为正整数的奇偶信息。若可以通过数学归纳法证明，朴素汉诺塔的最优解与此题的最优解等价。证明过程中的(1)(2)(3)三条分别为原汉诺塔的规则。

数学归纳法

前提声明：一共有三根塔柱A, B, C. 分别为初始塔、辅助塔、目标塔。且塔内移动规则满足题目所述。初始情况下，共有n个盘子编号$\{1,2,3,...,n\}$在A塔上。为证明方便，设函数$f(X_{tower1}, Y_{tower2})$为奇偶性判断函数，同奇偶为0这是不能直接移动,不同为1这时可以直接移动。

假设：

> 当$n=1$时直接从A塔移动到C塔即可。
> 当$n>1$，$n=k-1$时候相邻盘子奇偶性不同，且**初始塔与目标塔塔奇偶相同，初始塔与辅助塔奇偶相反**。

证明：

> 当$n=k$时，
>
> (1)将k-1个盘子，从A塔借助C塔，移动到B塔是合法的。
>
> - 此时移动k-1个盘子，A塔相当于初始塔，C塔相当于辅助塔，B塔相当于目标塔。
> - 根据假设，初始塔与目标塔塔奇偶相同，初始塔与辅助塔奇偶相反。(引入假设)
> - $\Rightarrow f(A_{k-1}, C_{k-1})=1, f(A_{k-1}, B_{k-1})=0$

> - 在A塔中，$f(A_{k-1}, A_k) = 1$(下标表示总盘子个数时候的情况)
> - 额外的$\Rightarrow$ $f(A_k, B_k) = 1, f(A_k, C_k) = 0$，证明同时满足假设条件。A塔盘移动到B塔盘合法。$_{可放在(2)中}$
>
> > 这一步完成了k-1个盘子从全局初始塔A塔到辅助塔B塔的移动
>
> (2)将第k号盘子，从初始塔A塔，移动到目标塔C塔，是合法的。
>
> - 续(1)，由于已经将所有k-1个盘子移动到B塔，此时B塔空置。
> - 根据假设中的平凡情况，可以直接移动到C塔
>
> > 这一步完成了第k个盘子从全局初始塔A塔到目标塔C塔的移动。
>
> (3)将k-1个盘子，从B塔借助A塔，移动到C塔，是合法的。
>
> - 此时B塔相当于初始塔，A塔是辅助塔，C塔是目标塔。
> - 根据假设，此时$f(B_{k-1}, A_{k-1}) = 1, f(B_{k-1}, C_{k-1}) = 0$。B塔盘移动到A塔盘合法。
> - 间接地，$\Rightarrow$ $f(A_{k-1}, C_{k-1}) = 1$。A塔盘移动到C塔盘合法。
>
> > 这一步完成了把剩下k-1个盘子从辅助塔B到目标塔C的移动。
>
> 综上三点，原朴素汉诺塔问题中的规则已经解决了奇偶编号堆放问题，也就是颜色问题。

所以用原汉诺塔的代码即可，不过这个证明能够更加深入理解汉诺塔。