Un problema di convergenza: implementazione di un metodo iterativo per la soluzione dell'equazione di Richards

Aaron Iemma

UNITN - Università degli Studi di Trento
Dipartimento di Ingegneria Ambientale

26 gennaio 2014

Definizione del problema

Risoluzione dell'equazione di Richards in forma mista:

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi)\nabla(\psi + z)] + S \tag{1}$$

. . . non lineare!

Servono:

- Metodo di linearizzazione
- Relazioni costitutive $\psi - \theta$
- Solutore per matrici definite positive
- *Framework* di implementazione

a) Metodo di Newton;
b) SWRC - *Soil Water Retention Curves*;
c) CG - *Conjugate gradient*;
d) `OMS3`

Definizione del problema

Risoluzione dell'equazione di Richards in forma mista:

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi)\nabla(\psi + z)] + S \tag{1}$$

. . . non lineare!

Servono:

- Metodo di linearizzazione
- Relazioni costitutive $\psi - \theta$
- Solutore per matrici definite positive
- *Framework* di implementazione

a) Metodo di Newton;
b) SWRC - *Soil Water Retention Curves*;
c) CG - *Conjugate gradient*;
d) `OMS3`

Definizione del problema

Risoluzione dell'equazione di Richards in forma mista:

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi) \nabla (\psi + z)] + S \tag{1}$$

... non lineare!

Servono:

- Metodo di linearizzazione
- Relazioni costitutive $\psi - \theta$
- Solutore per matrici definite positive
- *Framework* di implementazione

a) Metodo di Newton;
b) SWRC - *Soil Water Retention Curves*;
c) CG - *Conjugate gradient*;
d) `OMS3`

Definizione del problema

Risoluzione dell'equazione di Richards in forma mista:

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi)\nabla(\psi + z)] + S \tag{1}$$

...non lineare!

Servono:

- Metodo di linearizzazione
- Relazioni costitutive $\psi - \theta$
- Solutore per matrici definite positive
- *Framework* di implementazione

a) Metodo di Newton;
b) SWRC - *Soil Water Retention Curves*;
c) CG - *Conjugate gradient*;
d) `OMS3`

Definizione del problema

Risoluzione dell'equazione di Richards in forma mista:

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi) \nabla(\psi + z)] + S \tag{1}$$

... non lineare!

Servono:

- Metodo di linearizzazione
- Relazioni costitutive $\psi - \theta$
- Solutore per matrici definite positive
- *Framework* di implementazione

a) Metodo di Newton;
b) SWRC - *Soil Water Retention Curves*;
c) CG - *Conjugate gradient*;
d) `OMS3`

Definizione del problema

Risoluzione dell'equazione di Richards in forma mista:

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi) \nabla (\psi + z)] + S \qquad (1)$$

...non lineare!

Servono:

- Metodo di linearizzazione
- Relazioni costitutive $\psi - \theta$
- Solutore per matrici definite positive
- *Framework* di implementazione

a) Metodo di Newton;
b) SWRC - *Soil Water Retention Curves*;
c) CG - *Conjugate gradient*;
d) `OMS3`

Definizione del problema

Risoluzione dell'equazione di Richards in forma mista:

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi)\nabla(\psi + z)] + S \tag{1}$$

... non lineare!

Servono:

- Metodo di linearizzazione
- Relazioni costitutive $\psi - \theta$
- Solutore per matrici definite positive
- *Framework* di implementazione

a) Metodo di Newton;
b) SWRC - *Soil Water Retention Curves*;
c) CG - *Conjugate gradient*;
d) `OMS3`

Definizione del problema

Risoluzione dell'equazione di Richards in forma mista:

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi) \nabla(\psi + z)] + S \tag{1}$$

...non lineare!

Servono:

- Metodo di linearizzazione
- Relazioni costitutive $\psi - \theta$
- Solutore per matrici definite positive
- *Framework* di implementazione

a) Metodo di Newton;
b) SWRC - *Soil Water Retention Curves*;
c) CG - *Conjugate gradient*;
d) `OMS3`

Definizione del problema

Risoluzione dell'equazione di Richards in forma mista:

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi)\nabla(\psi + z)] + S \qquad (1)$$

...non lineare!

Servono:

- Metodo di linearizzazione
- Relazioni costitutive $\psi - \theta$
- Solutore per matrici definite positive
- *Framework* di implementazione

a) Metodo di Newton;
b) SWRC - *Soil Water Retention Curves*;
c) CG - *Conjugate gradient*;
d) `OMS3`

Il primo pezzo: un esempio semplice

Un caso molto semplice: *diffusione* (eh si!) monodimensionale con $\mathbf{K}(\psi) = K = \mathit{cosst}$ senza carico gravitativo

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{2}$$

Lo schema numerico è presto creato:

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} = \\ \lambda\theta_{i-1,j-1} + \\ (1-2\lambda)\theta_{i,j-1} + \\ \lambda\theta_{i+1,j-1} \\ \text{con } \lambda = K\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Il primo pezzo: un esempio semplice

Un caso molto semplice: *diffusione* (eh si!) monodimensionale con $\mathbf{K}(\psi) = K =$ *cosst* senza carico gravitativo

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \quad K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{2}$$

Lo schema numerico è presto creato:

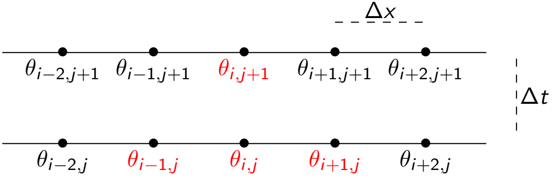
$$\begin{aligned} \theta_{i,j} &= \\ \lambda\theta_{i-1,j-1} &+ \\ (1-2\lambda)\theta_{i,j-1} &+ \\ \lambda\theta_{i+1,j-1} & \\ \text{con } \lambda = K\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \end{aligned} \tag{3}$$

Il primo pezzo: un esempio semplice

Un caso molto semplice: *diffusione* (eh si!) monodimensionale con $\mathbf{K}(\psi) = K = \mathit{cosst}$ senza carico gravitativo

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \quad K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \tag{2}$$

Lo schema numerico è presto creato:



$$\begin{aligned} \theta_{i,j} = \\ \lambda\theta_{i-1,j-1} + \\ (1-2\lambda)\theta_{i,j-1} + \\ \lambda\theta_{i+1,j-1} \\ \text{con } \lambda = K\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Il primo pezzo: un esempio semplice

La soluzione, e finora nessuna sorpresa