

# UN PROBLEMA DI CONVERGENZA: IMPLEMENTAZIONE DI UN METODO ITERATIVO PER LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI RICHARDS

AARON IEMMA

SOMMARIO. I flussi liquidi attraverso i mezzi porosi sono ben descritti e caratterizzati dall'equazione di Richards, un'equazione differenziale fortemente non lineare non risolubile in forma chiusa, se non con alcune semplificazioni. Si propone di seguito l'implementazione di un innovativo metodo di risoluzione ai volumi finiti dell'equazione, che riscritta nella forma mista in termini di contenuto d'umidità volumetrico  $\theta$  e di prevalenza più altezza potenziale  $\psi+z$ , fornisce una risoluzione ai volumi finiti *mass-conservative* anche in condizioni di saturazione. L'implementazione viene presentata all'interno del *framework Java OMS3 (Object Modelling System)*, garanzia della costruzione di un modello basato sulle componenti facilmente riusabile e reimplementabile.

## INDICE

1. Introduzione	2
2. Il metodo	2
2.1. Iterazioni esterne: il metodo di Picard	4
2.2. Iterazioni interne: linearizzazione con il metodo di Newton e risoluzione con il metodo del gradiente coniugato	5
3. Implementazione: Java e OMS3	5
Appendice A. Derivazione della forma $\psi - \theta$ dell'equazione di Richards	6
Appendice B. Dall'infinitamente piccolo al finitamente piccolo: il metodo iterativo	7
Appendice C. Conservare la massa: le iterazioni di Picard	13
Appendice D. Attacco alla variabilità: le SWRC	13
Riferimenti bibliografici	14
Articoli	14

## 1. INTRODUZIONE

Il presente lavoro deve quasi tutto alla chiarezza espositiva di un articolo di Vincenzo Casulli e Paola Zanolli, apparso per la prima volta nel 2010 sul *Journal* del SIAM [1]. In esso è ampiamente discussa, in uno stile chiaro e conciso, la creazione di un nuovo modello ai volumi finiti per la forma mista  $\psi - \theta$  dell'equazione di Richards:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi) \nabla(\psi + z)] + S$$

dove  $\theta$  è il contenuto volumetrico d'acqua ( $\theta = V_w/V_t$ ),  $\psi$  la prevalenza,  $z$  la coordinata verticale,  $t$  il tempo,  $\mathbf{K}$  la matrice di diffusività e  $S$  rappresenta le eventuali sorgenti interne al volume di controllo (il concetto di 'volume di controllo' sarà presto più chiaro, eventualmente, per una derivazione dell'equazione di cui sopra si faccia riferimento alle Appendici A).

Purtroppo, l'equazione include un termine, il contenuto d'acqua  $\theta(\psi)$ , che è in generale variabile *non linearmente* con la prevalenza (per un approfondimento, si vedano le Appendici, in particolare, le sezioni dedicate alle *Soil Water Retention Curve* D). Proprio questo termine rende la risoluzione numerica delle equazioni di Richards difficile, in particolare in presenza di particolari *spikes* in uno dei termini che la compongono (ad esempio, una improvvisa variazione di  $\mathbf{K}$  per un cambio di tipologia di suolo). È in questo punto che entrano in gioco degli opportuni schemi di linearizzazione: seguendo le orme dell'articolo di Casulli, adotteremo di seguito uno schema monodimensionale ai volumi finiti utilizzando come schemi di linearizzazione delle iterazioni "alla Newton" derivate linearizzando la differenza di contenuto d'acqua di due volumi combacianti ( $\theta_1(\psi)$  e  $\theta_2(\psi)$ ), contemporaneamente garantendo la conservazione della massa innestando nel ciclo principale una *iterazione di Picard* (si vedano a questo proposito le appendici C)

## 2. IL METODO

Il primo passo per la costruzione del metodo è la derivazione di una formulazione implicita ai volumi finiti per l'equazione di Richards in forma mista, che tenga conto della variabilità sia spaziale (del mezzo, di  $K$ , ...) che temporale (variazione di  $\theta$ , di  $K$ , ...).

A questo punto, il metodo dei volumi finiti è esplicitato, cassando per semplicità il termine di generazione interna  $S$  (che, essendo assunto indipendente dal tempo e dalle proprietà del mezzo, è sempre reintroducibile in un secondo momento, essendo semplicemente un flusso che va a sommarsi/sottrarsi a quello computato ad ogni tempo) con i seguenti passi:

- Prima di tutto, integrando l'equazione di Richards sul dominio  $V$ :

$$(2.1) \quad \int_V \frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \int_V \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi) \nabla(\psi + z)] + S$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo membro, ottengo:

$$(2.2) \quad \int_V \frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \int_{\partial V} ([\mathbf{K}(\psi) \nabla(\psi + z)] \cdot \hat{n} + S) dS$$

Dove l'integrale esteso al secondo membro è esteso alla superficie  $\partial V$  del volume di controllo  $V$

- Infine, discretizzando la precedente usando una formulazione implicita (*metodo di Eulero*) sia nel tempo che nello spazio. Definisco quindi le variabili di interesse (nella formulazione monodimensionale, non tutte verranno usate) su un dominio spaziale  $\Omega^1$  partizionato da una griglia ortogonale non strutturata costituita da  $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, N_v$  volumi di controllo senza sovrapposizioni e separati da  $M$  facce interne  $F_j, j = 1, 2, \dots, M$  ciascuna con area  $A_j$ , identifico:
  - un set  $F_i$  di facce interne (escludendo le eventuali facce di confine) per ogni  $i$ -esimo volume di controllo in numero arbitrario;
  - il volume di controllo  $\wp(i, j)$  "vicino" del volume di controllo  $i$  che condivide la faccia  $j$  con lo stesso volume di controllo  $i$ , cosicchè  $1 \leq \wp(i, j) \leq N_v$  per ogni  $j \in F_i$ ;
  - la distanza  $\delta_j$  tra i centri di due volumi adiacenti che condividono la stessa  $j$ -esima faccia interna;
  - le variabili discrete  $\theta_i$  e  $\psi_i$ , localizzate nel centro dell' $i$ -esimo volume di controllo;
  - una suddivisione temporale in  $n$  istanti di lunghezza  $\Delta t$ ;
  - l'indice  $i$  ( $1, 2, \dots, N$ ) a *pedice* per indicare il volume di controllo, e l'indice  $n$  ad *apice* per indicare il passo temporale.

$$(2.3) \quad \frac{\theta_i(\psi_i^n) - \theta_i(\psi_i^n)}{\Delta t} = \sum_{j \in F_i} K^n \frac{(\psi + z)_{\wp(i, j)}^n - (\psi + z)_i^n}{\delta_j} + \sum_{j \in F_i} K^n n_{i, j}^z + S_i^n$$

Dove:

- $K_j^n = A_j \max[K_i(\psi_i^n, K_{\wp(i, j)}(\psi_{\wp(i, j)}^n))]$ , ovvero, l'area della  $j$ -esima faccia moltiplicata per la maggior conduttività idraulica scelta in un insieme che comprende quella dello stesso volume  $n$  e quelle di ogni volume adiacente: si noti come questa condizione specifica un flusso favorito nella direzione della massima conduttività idraulica;
- $n_{i, j}^n$  è la proiezione, nella direzione della congiungente il centro del volume  $n$  con il  $j$ -esimo volume adiacente, della normale (diretta verso l'esterno) alle facce di confine dello stesso volume  $n$ ;
- $S_i = \int_{\Omega_i} S d\Omega$  è la sorgente *totale* all'interno dell' $i$ -esimo volume di controllo, compresi eventuali flussi al contorno;
- $\theta_i(\psi) = \int_{\Omega_i} \theta(\psi) d\Omega$  è l' $i$ -esimo volume d'acqua.

---

<sup>1</sup>Volendo ricondurre i dettagli il più possibile a [1], se ne manterrà la nomenclatura delle variabili.

L'equazione è attaccabile prima di tutto individuando una parametrizzazione di  $\theta(\psi)$  e di  $K(\psi)$ , ovvero, una relazione costitutiva che, in base ai parametri del terreno considerato, leghi biunivocamente  $\theta$  e  $K$  a  $\psi$ . Il modello generalmente adoperato è quello di *van Genuchten*, dettagliato nell'appendice D. Ci si limita qua a ricordare che il contenuto d'acqua di un generico volume di controllo  $i$  si ottiene dal modello di van Genuchten integrando la capacità idrica specifica:

$$(2.4) \quad \theta(\psi) = \theta_r + \int_{-\infty}^{\psi} c(\xi) d\xi = \theta_s - \int_{\psi}^{+\infty} c(\xi) d\xi$$

ove con  $\theta_r$  e con  $\theta_s$  si sono indicati rispettivamente il contenuto idrico residuo (la parte di umidità che non può essere eliminata tramite la semplice suzione) del suolo e la porosità dello stesso.

Il modello di van Genuchten esplicita bene il carattere non lineare dell'equazione di Richards: le derivate di  $\theta(\psi)$ , in particolare in prossimità delle condizioni di saturazione, esibiscono cambiamenti repentini che rendono la soluzione numerica del problema computazionalmente onerosa se si desidera arrivare a convergenza entro piccole tolleranze.

È tuttavia possibile attaccare il problema dividendolo in due parti risolvibili separatamente, in un unico algoritmo:

- (1) la continuità della funzione che descrive il contenuto d'acqua all'interno del dominio: è necessario minimizzare il carattere discontinuo del solutore numerico, obbligandolo in qualche modo a convergere ad una soluzione che sia sotto una certa tolleranza prefissata;
- (2) la risoluzione di un sistema linearizzato che assegni i contenuti d'acqua ad ogni volume di controllo.

Di conseguenza, è necessario settare:

- (1) un *ciclo iterativo esterno* che controlli la convergenza della suzione  $\psi$  (e quindi, indirettamente, nel contenuto d'acqua  $\theta(\psi)$ ) in ogni volume di controllo ad un certo istante di tempo  $i$ , e che venga eventualmente ripetuto, sempre nell'istante di tempo  $i$ , fino a quando la differenza (errore) tra la suzione al passo  $m$  rispetto al contenuto d'acqua al passo  $m - 1$  non sia sotto una certa soglia;
- (2) un *ciclo iterativo interno* che si occupi di risolvere il sistema linearizzato per ottenere il contenuto d'acqua ad un certo passo temporale  $i$  per tutto il dominio di definizione, fino a raggiungere una tolleranza prefissata

In particolare, è fondamentale implementare un metodo *efficiente* che dovrà risolvere  $m * l$  sistemi linearizzati, ove  $m$  ed  $l$  sono rispettivamente il numero di iterazioni esterne ed interne.

## 2.1. Iterazioni esterne: il metodo di Picard.

**2.2. Iterazioni interne: linearizzazione con il metodo di Newton e risoluzione con il metodo del gradiente coniugato.** L'equazione 2.3 può essere facilmente riscritta in forma matriciale più compatta:

### 3. IMPLEMENTAZIONE: JAVA E OMS3

# APPENDICE A. DERIVAZIONE DELLA FORMA $\psi - \theta$ DELL'EQUAZIONE DI RICHARDS

L'equazione di Richards è sostanzialmente una forma della generica *equazione di diffusione*, nella quale viene descritta la variazione nel tempo e nello spazio di una quantità vettoriale (nel nostro caso, il flusso d'acqua  $\vec{q}$ ) soggetta a delle limitazioni imposte sul flusso dalle condizioni al contorno (direttamente sul flusso o sulle sue derivate), e condizionata dalle proprietà del mezzo in cui varia (qui riassunte nel tensore  $\mathbf{K}$ ).

In generale quindi, l'equazione di Richards non è altro che l'applicazione del teorema della divergenza di Gauss: ragionando per un volume di controllo arbitrario, ho che:

$$(A.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \theta dV = \iint_S \vec{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Ovvero, la variazione nel tempo del contenuto d'acqua volumetrico  $\theta$  equivale al flusso netto uscente  $\vec{q}$  attraverso le facce del volume: in questa forma è particolarmente evidente la relazione tra il teorema di Gauss ed un bilancio di massa!

Da semplici considerazioni geometriche (in sostanza si effettua un bilancio dei flussi su un volume di controllo cubico infinitesimo per ogni faccia), in forma differenziale lo stesso teorema risulta:

$$(A.2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}$$

Ove l'operatore divergenza  $\nabla \cdot$  fornisce la divergenza di un campo vettoriale (in uno spazio euclideo,  $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, x_3) \hat{x}_i$ ), ovvero la tendenza del campo a formare pozzi (punti di attrazione) e sorgenti (punti di fuga) nel suo dominio di definizione.

Esplorata la relazione tra flusso e contenuto d'acqua, ora serve una relazione costitutiva che legghi il primo con le forze che ne condizionano il moto: ovvero, è necessaria una relazione *costitutiva* tra il flusso ed il mezzo in cui esso è libero di variare. Questa relazione è data dalla legge empirica di Darcy, che si esplica nella forma:

$$(A.3) \quad \frac{Q}{A} = \frac{-k}{\mu} \frac{(P_2 - P_1)'}{L} = q$$

... ovvero, il flusso per unità di superficie attraverso un'area  $A[m^2]$  è dato dal prodotto tra la permeabilità intrinseca del mezzo  $k[m^2]$  e il salto di pressione per unità di lunghezza  $(P_2 - P_1)/L[N/m^2]$ , il tutto diviso per la lunghezza della colonna sulla quale avviene il salto di pressione  $L[m]$  e per la viscosità  $\mu[N/sm^2]$ .

Facendo tendere a zero la lunghezza del salto di pressione, ottengo la stessa equazione in forma differenziale:

$$(A.4) \quad q = -\mathbf{K} \nabla \vec{P}$$

dove in  $\mathbf{K}$ , la diffusività idraulica, si sono riassunte le opposte proprietà di permeabilità intrinseca del mezzo (nel caso generale, variabile da punto a punto nel materiale) e di viscosità del fluente (costante per composizioni dei liquidi e per temperature poco variabili). Generalmente, la natura segue dei percorsi di minimo (di dissipazione, di energia, ...), quindi tende a passare da uno stato a potenziale maggiore ad uno a potenziale maggiore: da qua la necessità del segno negativo di fronte all'equazione, ad indicare che l'acqua fluisce nel verso di *massimo decremento* del gradiente delle pressioni.

Combinando il teorema di Gauss e l'equazione di Darcy nelle loro forme differenziali, si ottiene:

$$(A.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\nabla \cdot (-\mathbf{K} \nabla \vec{P}) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \vec{P}) \\ &= \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi) \nabla (\vec{P} + \vec{z})] \end{aligned}$$

dove si è usata la scomposizione del gradiente delle pressioni nel gradiente del carico più la prevalenza, e si è esplicitata la dipendenza del contenuto d'acqua da  $\psi$  in condizioni di suolo insaturo. Questa ulteriore dipendenza, non evidente dalla deduzione di cui sopra, è uno dei parametri del modello OMS3 implementato, ed è esplicitabile attraverso una descrizione parametrica delle SWRC, *Soil Water Retention Curves*: si veda la prossima sezione per ulteriori dettagli sui modelli parametrici utilizzati, in particolare, sul modello di van Genuchten.

## APPENDICE B. DALL'INFINITAMENTE PICCOLO AL FINITAMENTE PICCOLO: IL METODO ITERATIVO

Come è realizzato il metodo iterativo, partendo dall'equazione di Richards in forma mista? In questa sezione si vuole porre una base molto semplificata (il "*building block*" del resto del metodo) che aiuti a capire come il problema della creazione del metodo iterativo possa essere affrontato, e allo stesso tempo, fornisce una buona intuizione di come il contenuto d'acqua possa variare, date certe condizioni al contorno, nel tempo e nello spazio.

Esaminiamo quindi nel dettaglio una forte semplificazione dell'equazione di Richards, in questo caso quella che si ottiene:

- Supponendo la colonna di suolo omogenea ( $\mathbf{K}(\psi) = \text{const} = K$ ) e monodimensionale;
- Supponendo che l'effetto della gravità sia completamente ininfluenza sulla dinamica del problema, e quindi, che la colonna di suolo sia ribaltata sull'orizzontale;
- Supponendo che non vi siano sorgenti o pozzi all'interno del dominio;
- Supponendo infine che  $\theta(\psi) = \theta$ .

Di conseguenza, la nostra equazione di Richards prende la forma, molto evocativa e probabilmente altrettanto conosciuta:

$$(B.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} &= \nabla \cdot [\mathbf{K}(\psi) \nabla (\psi + z)] + S \\ &= K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned}$$

...che è una equazione differenziale ordinaria di secondo grado a coefficienti costanti (*equazione di diffusione*)! In questa forma, come vedremo più avanti, l'equazione di Richards è pure risolvibile in forma esatta: questa consapevolezza servirà come test di validità del metodo di discretizzazione utilizzato.

Ora, discretizzando il dominio spaziale e temporale tramite differenze finite (sostanzialmente, costruendo l'espansione di Taylor dei vari termini), ottengo per il problema in esame la discretizzazione:

$$(B.2) \quad \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\Delta t} = K \frac{\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}}{\Delta x^2}$$

FIGURA 1. Una porzione della *mesh* usata per il calcolo della diffusione di contenuto d'acqua nella colonna di suolo. Le quantità utili vengono calcolate direttamente nei punti della *mesh*, indicizzati con una  $\theta_{i,j}$ , ove l'indice  $i$  indica il passo spaziale, mentre l'indice  $j$  quello temporale. In rosso sono evidenziati i punti utilizzati per il calcolo di  $\theta$  ad un generico passo  $i,j$ .

Un minimo riarrangiamento dei termini dell'equazione porta alle seguenti semplificazioni:

$$(B.3) \quad \begin{aligned} \theta_{i,j+1} - \theta_{i,j} &= \left(K \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) (\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}) \\ &= \lambda (\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}) \\ \theta_{i,j+1} &= \lambda \theta_{i-1,j} + (1 - 2\lambda) \theta_{i,j} + \lambda \theta_{i+1,j} \\ \theta_{i,j} &= \lambda \theta_{i-1,j-1} + (1 - 2\lambda) \theta_{i,j-1} + \lambda \theta_{i+1,j-1}^* \end{aligned}$$

\* Nell'ultimo passaggio, si è fatto scorrere indietro l'indice temporale della mesh di una unità



Il parametro  $\lambda$  è caratteristico della discretizzazione usata e del problema fisico (tipo di terreno) trattato: in esso sono infatti riassunti sia i parametri di cella della *mesh* (la distanza sia spaziale che temporale, quindi le dimensioni della cella) sia il coefficiente di diffusività. Da notare poi che, con questa espressione, il contenuto d'acqua è immediatamente calcolabile per ogni cella del dominio ad ogni tempo  $t$ : infatti,  $\theta_{i,j}$  non dipende altro che dai valori dei punti di griglia nel suo intorno al tempo immediatamente precedente a quello per cui se ne vuole calcolare il valore.

Sulla colonna di suolo scegliamo di imporre due semplici condizioni al contorno costanti nel tempo:

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0: \text{ per } x = 0, t \geq 0; \\ \theta &= \theta_1: \text{ per } x = L, t \geq 0; \\ \theta &= \theta_1: \text{ per } t = 0, 0 \leq x \leq L;\end{aligned}$$

Si riporta di seguito un esempio di semplice *script* MATLAB che implementa efficacemente quanto discusso sopra:

```

1 | %-----
2 | % Condizioni al contorno per il contenuto di acqua
3 | %-----
4 | Theta0=0.3; % Contenuto di acqua mantenuto costante sulla cima della
5 |             % colonna di suolo per tutta la durata della simulazione.
6 | Theta1=0.1; % Contenuto di acqua lungo la colonna a t=0, e anche
7 |             % il contenuto di acqua mantenuto costante al termine della
8 |             % colonna. Notare che Theta1 < Theta0, quindi per diffusione
9 |             % ci aspettiamo che si instauri un flusso dalla cima al piede
10 |            % della colonna.
11 |
12 | %-----
13 | % Dimensioni del problema ①
14 | %-----
15 | % Lunghezza della colonna
16 | L=0.1;%meters
17 | % Numero di punti della griglia spaziale
18 | I=100;
19 | % Intervallo spaziale
20 | Delta_x=L/I;
21 |
22 | % Secondi interessati dalla simulazione
23 | T=60*60*24; % Un giorno
24 | % Numero di punti nella griglia temporale
25 | J=10000;
26 | % Intervallo temporale
27 | Delta_t=T/J;
28 |
29 | % Coefficiente di diffusione per un terreno semipermeabile

```

```

30 % Vedi FAO ②
31 K=6.3e-9;%m/s
32
33 Lambda=K*(Delta_t)/((Delta_x)^2);
34
35 % Check per la convergenza della rappresentazione ③
36 if Lambda<=0||Lambda>0.5
37     disp('Il parametro Lamba deve essere compreso tra 0 e 0.5 affinché
38         la soluzione sia stabile.')
39     disp('Correggi gli intervalli spaziali e temporali per ovviare al
40         problema.');
```

err\_lambda = strcat('Lambda = ',num2str(Lambda));

```

42     disp(err_lambda);
43     pause;
44 end
45
46 %-----
47 % Creazione della matrice dei contenuti di acqua per la colonna di suolo
48 % La variabile temporale è sulle colonne, mentre quella spaziale
49 % sulle righe ④
50 %-----
51
52
53 Theta=zeros(I,J);
54 Theta(:,1)=Theta1; % Il contenuto di acqua è uguale a Theta1 tranne
55                     %che sulla cima della colonna
56 % Condizioni al contorono sulla cima e sul termine della colonna
57 Theta(1,:)=Theta0; % Ad ogni tempo, il contenuto di acqua sulla
58                     %cima della colonna è assunto costante
59 Theta(I,:)=Theta1; % ..Idem per il piede della colonna, ma
60                     % settato a Theta1
61
62 %-----
63 % Calcolo di Theta(x,t) con schema esplicito ⑤
64 %-----
65
66 for j=2:(J)
67     for i=2:(I-1)
68         Theta(i,j)=
69             Lambda*Theta((i-1),(j-1))+
70             (1-2*Lambda)*Theta(i,(j-1))+
71             Lambda*Theta((i+1),(j-1));
72     end
73 end
74

```

```

75 | %-----
76 | %   Visualizza Theta(x,t) ⑥
77 | %-----

```

Di seguito si specificano i vari punti del codice che meritano di essere, brevemente, approfonditi:

- ①: qui è possibile impostare i parametri dimensionali del problema, come la lunghezza della colonna, il tempo computazionale, la grandezza della *mesh*, ecc. . . ;
- ②: per approfondimenti sulla misura della permeabilità intrinseca dei suoli con metodi semplici, ma fattivamente applicabili anche in contesti difficili senza alcun mezzo meccanico tranne un orologio, si veda [ftp://ftp.fao.org/fi/CDrom/FA0\\_Training/FA0\\_Training/General/x6706e/x6706e09.htm](ftp://ftp.fao.org/fi/CDrom/FA0_Training/FA0_Training/General/x6706e/x6706e09.htm);
- ③: un test sulla convergenza è necessario: da come è stata scritta l'equazione B.2, è chiaro (da  $(1 - 2\lambda)\theta_{i,j-1}$ ) come la definizione di  $\lambda$  non possa coprire qualsiasi numero, ma anzi attestarsi su un campo piuttosto ristretto affinché la convergenza del metodo sia garantita (al limite inferiore di  $\lambda$ , un termine della *mesh* scompare del tutto, mentre invece al limite superiore inizia ad entrare in gioco un termine *negativo* non desiderabile);
- ④: a questo punto, la matrice che terrà traccia delle variazioni di  $\theta$  nel tempo e nello spazio viene inizializzata, con le opportune condizioni iniziali;
- ⑤: qui il calcolo del valore di contenuto d'acqua in un generico punto  $i,j$  della *mesh*, come descritto dall'equazione B.2;
- ⑥: da questo punto in poi, il codice non fa altro che produrre i grafici sottoriportati.

Il grafico che rappresenta l'infiltrazione all'interno della colonna di suolo nel tempo è il seguente:

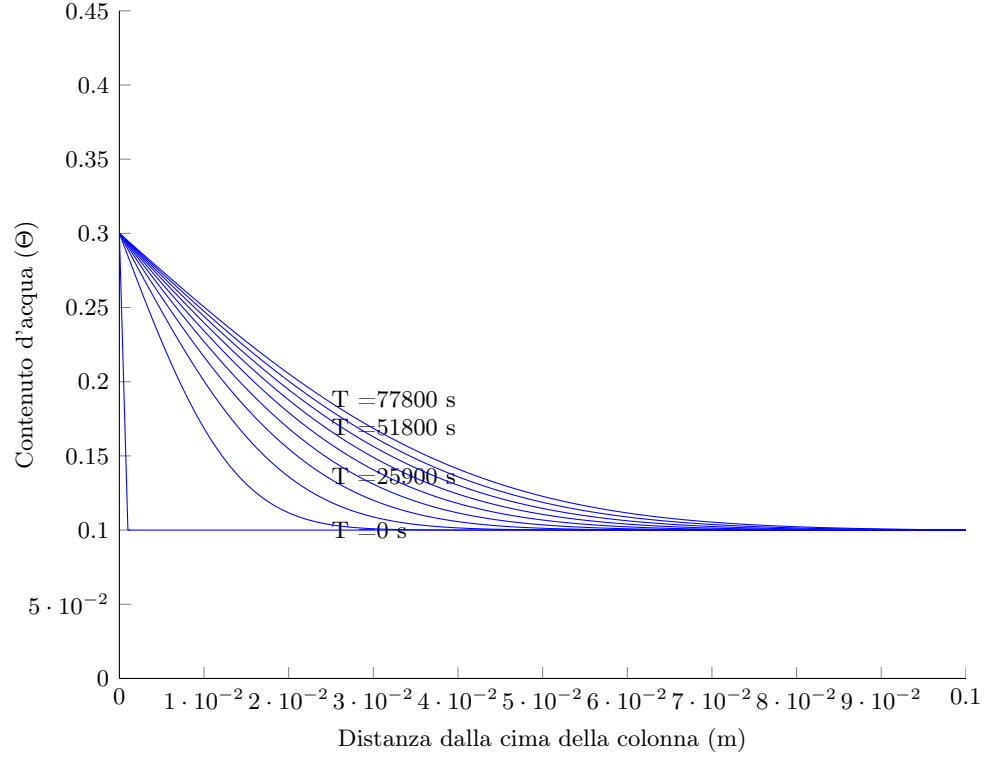
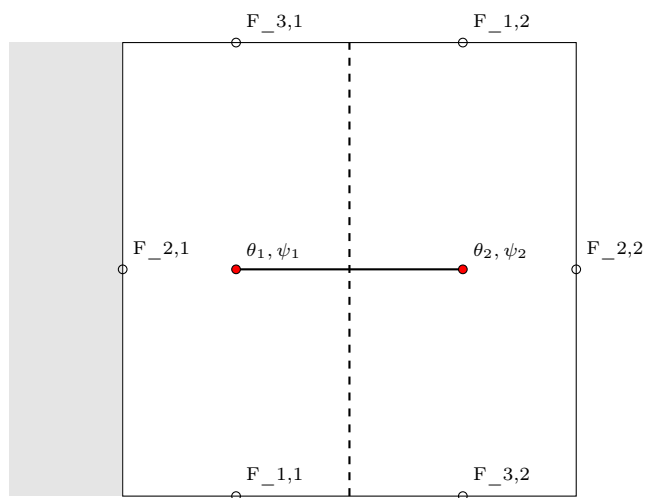


FIGURA 2. Infiltrazione nella colonna d'acqua diagrammata per vari tempi

Da notare la somiglianza delle curve d'infiltrazione con quelle che descrivono l'andamento della temperatura nel tempo in una sbarra rigida innestata tra due capi mantenuti a temperature  $T_1$  e  $T_2$  costanti nel tempo.



APPENDICE D. ATTACCO ALLA VARIABILITÀ: LE SWRC

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

### Articoli.

- [1] Vincenzo Casulli e Paola Zanolli. “A nested Newton-type algorithm for finite volume methods solving Richardsì equation in mixed form”. In: *SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics* 4.32 (2010). DOI: [10.1137/100786320](https://doi.org/10.1137/100786320).

DICAM, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO, ITALY

*E-mail address:* `aaron.iemma@studenti.unitn.it`

*URL:* `https://github.com/Shappiro`