Odvození vzorců pro výpočty derivací

Definice: Nechť f je funkce definovaná v okolí bodu $x_\circ \in \mathbb{R}$. Potom limitu (pokud tato limita existuje!):

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$$

nazýváme *derivace funkce f v bodě $x_\circ$*. Značíme $f'(x_\circ)$.

Pomocí této definice odvodíme pravidla pro počítání s derivacemi a pro samotné výpočty už definici využívat nebudeme - podobně jako limity nevypočítáváme z definice, ale pomocí různých usnadňujících pravidel.

1. Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funcí

Nechť f, g jsou funkce, které jsou definované v okolí bodu $x_\circ \in \mathbb{R}$. Potom vzorce pro výpočet jejich součtu, rozdílu, součinu a podílu (pro podíl předpokládáme, že $g(x_\circ) \neq 0$ v okolí bodu $x_\circ \in \mathbb{R}$) odvodíme následovně:

a. ***součet***:

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{x \to x_\circ} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_\circ) + g(x_\circ))}{x - x_\circ} = \lim_{x \to x_\circ} \frac{(f(x) - f(x_\circ)) + (g(x) - g(x_\circ))}{x - x_\circ} =$$

$$= \lim_{x \to x_\circ} \left(\frac{(f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} + \frac{(g(x) - g(x_\circ))}{x - x_\circ} \right) = \lim_{x \to x_\circ} \left(\frac{(f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \right) + \lim_{x \to x_\circ} \left(\frac{(g(x) - g(x_\circ))}{x - x_\circ} \right) =$$

$$= f'(x_\circ) + g'(x_\circ)$$

b. vztah pro ***derivaci rozdílu*** dvou funkcí dokážeme zcela analogicky

$$(f(x) - g(x))' = \lim_{x \to x_\circ} \frac{(f(x) - g(x)) - (f(x_\circ) - g(x_\circ))}{x - x_\circ} = \lim_{x \to x_\circ} \frac{(f(x) - f(x_\circ)) + (-g(x) + g(x_\circ))}{x - x_\circ} =$$

$$= \lim_{x \to x_\circ} \left(\frac{(f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} - \frac{(g(x) - g(x_\circ))}{x - x_\circ} \right) = \lim_{x \to x_\circ} \left(\frac{(f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \right) - \lim_{x \to x_\circ} \left(\frac{(g(x) - g(x_\circ))}{x - x_\circ} \right) =$$

$$= f'(x_\circ) - g'(x_\circ)$$

c. Pro ***součin*** dvou funkcí platí:

$$(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{x \to x_\circ} \frac{(f(x) \cdot g(x)) - (f(x_\circ) \cdot g(x_\circ))}{x - x_\circ} =$$

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{(f(x) \cdot g(x)) - f(x) \cdot g(x_\circ) + f(x) \cdot g(x_\circ) - (f(x_\circ) \cdot g(x_\circ))}{x - x_\circ} =$$

$$= \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) \cdot (g(x) - g(x_\circ)) + g(x_\circ) \cdot (f(x) - f(x_\circ))}{x - x_\circ} =$$

$$= \lim_{x \to x_\circ} f(x_\circ) \left(\frac{(g(x) - g(x_\circ))}{x - x_\circ} \right) + \lim_{x \to x_\circ} g(x_\circ) \left(\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \right) =$$

$$= f(x_\circ) \cdot \lim_{x \to x_\circ} \left(\frac{(g(x) - g(x_\circ))}{x - x_\circ} \right) + g(x_\circ) \cdot \lim_{x \to x_\circ} \left(\frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \right) = f(x_\circ) \cdot g'(x_\circ) + f'(x_\circ) \cdot g(x_\circ)$$

d. ***Podíl*** dvou funkcí lze odvodit dvěma způsoby. Buď přímo (jak níže předvedeme), nebo tak, že nejprve odvodíme derivaci funkce $\frac{1}{g(x)}$ a posléze dokazujeme vztah pro podíl jako součin dvou funkcí $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$. Přímé odvození vypadá takto:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{x\to x_\circ} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_\circ)}{g(x_\circ)}}{x - x_\circ} = \lim_{x\to x_\circ} \frac{\frac{f(x)g(x_\circ) - f(x_\circ)g(x)}{g(x)g(x_\circ)}}{x - x_\circ} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x_\circ)} \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)g(x_\circ) + f(x_\circ)g(x_\circ) - f(x_\circ)g(x_\circ) - f(x_\circ)g(x)}{x - x_\circ} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x_\circ)} \lim_{x\to x_\circ} \frac{g(x_\circ)[f(x) - f(x_\circ)] - f(x_\circ)[g(x) - g(x_\circ)]}{x - x_\circ} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x_\circ)} \left(\left(g(x_\circ) \lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}\right) - \left(f(x_\circ) \lim_{x\to x_\circ} \frac{g(x) - g(x_\circ)}{x - x_\circ}\right)\right) = \frac{f'(x_\circ)g(x_\circ) - f(x_\circ)g'(x_\circ)}{g^2(x_\circ)}$$

2. Derivace elementárních funcí

Postupně odvodíme derivace všech elementárních funkcí.

a. **konstantní funkce** $f : y = c, \quad c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \lim_{x\to x_\circ} \frac{c - c}{x - x_\circ} = 0$$

b. **mocninná funkce** $f : y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \lim_{x\to x_\circ} \frac{x^n - x_\circ^n}{x - x_\circ} = \lim_{x\to x_\circ} \frac{(x - x_\circ)(x^{n-1} + x^{n-2}x_\circ + x^{n-3}x_\circ^2 + \cdots + xx_\circ^{n-2} + x_\circ^{n-1})}{x - x_\circ} =$$

$$= \lim_{x\to x_\circ} (\underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}x_\circ + x^{n-3}x_\circ^2 + \cdots + xx_\circ^{n-2} + x_\circ^{n-1}}_{n \text{ členů}}) = n \cdot x_\circ^{n-1}$$

Je třeba mít na paměti, že toto odvození má smysl pouze pro přirozené mocniny. Pro libovolnou reálnou mocninu vztah odvodíme ve chvíli, kdy budeme mít odvozený vzorec pro exponenciální funkci.

c. **exponenciální funkce** Začneme funkcí $f : y = e^x$ a při důkazu využijeme alternativní definice derivace - derivace jako limita $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h}$ a dále v postupu využijeme známého faktu, že $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1$, tedy postupujeme takto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_\circ+h} - e^{x_\circ}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_\circ} \cdot (e^h - 1)}{h} = e^{x_\circ} \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right) = e^{x_\circ}$$

Pokud chceme dokázat vztah pro obecný základ exponenciální funkce, tedy pro základ $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$, musíme využít stejné limity jako v předchozím důkazu a navíc známého vztahu $a^h = e^{(\ln a^h)} = e^{(h\cdot\ln a)}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{(x_\circ+h)} - a^{x_\circ}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x_\circ}(a^h - 1)}{h} = a^{x_\circ} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)}{h} = a^{x_\circ} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{(h\cdot\ln a)} - 1}{h} =$$

$$= a^{x_\circ} \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{\ln a}{\ln a} \frac{e^{(h\cdot\ln a)} - 1}{h}\right) = a^{x_\circ} \ln a \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{(h\cdot\ln a)} - 1}{h \cdot \ln a}\right) = a^{x_\circ} \ln a$$

Je třeba si uvědomit, že výše uvedené odvození využívá faktu, že výrazy a^x a $\ln a$ nezávisí na měnícím se h. Dále je zřejmé, že $\forall a \in \mathbb{R}$ platí, že $h \cdot \ln a = 0$ pro $h \to 0$. Bez těchto dvou vlastností by důkaz nebyl možný.

d. **logaritmická funkce** - při odvozování vzorce pro logaritmickou funkci využijeme vzorce pro derivaci **inverzní funkce** (tvrzení uvedeme bez důkazu). Začneme přirozeným logaritmem:

Derivace *inverzní funkce* - tedy derivace funkce $y_\circ = f^{-1}(x_\circ)$, kde $x_\circ = f(y_\circ)$:

$$y'_\circ = (f^{-1})'(x_\circ) = \frac{1}{f'(y_\circ)}$$

Nechť tedy $y = f^{-1}(x) = \ln x$, tedy $x = e^y$. Dále $f(x) = e^x, f'(x) = e^x$ ($\Rightarrow f'(y) = e^y$). Ze vzorce pro derivaci inverzní funkce vyplývá, že:

$$(\ln x_\circ)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{(\ln x)}} = \frac{1}{x}$$

Snadno už získáme derivaci

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Nyní už můžeme přistoupit k rozšíření mocnin v mocninné funkci na všechna reálná čísla:

e. **mocninná funkce** - tedy funkce $f : y = x^n, \quad n \in \mathbb{R}$. Odvodíme pomocí derivace složené funkce.

Derivace *složené funkce* $F(x) = f[g(x)]$:

$$F'(x_\circ) = f'[g(x_\circ)] \cdot g'(x_\circ)$$

Důkaz: Nechť f, g jsou funkce a $f(g(x))$ značí hodnotu funkce, která je složená z funkcí f, g. Můžeme značit $y = g(x)$ a $k = g(x+h) - g(x)$. Potom zcela jistě $g(x+h) = g(x) + k = y + k$. Majíce v paměti tyto vztahy můžeme psát:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot g'(x)$$

jedná se tedy o součin limity

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}$$

a derivace funkce g. Čemu se ale rovná ona limita? Využijeme dříve uvedené vztahy $k = g(x+h) - g(x)$ a $g(x+h) = g(x) + k = y + k$. Dále využijeme faktu, že jestliže se h blíží nule, pak se blíží nule i hodnota výrazu $g(x+h) - g(x)$ a tedy k se blíží nule.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(y+k)) - f(y)}{k} = f'(y) = f'(g(x))$$

Proto pro složenou funkci platí $(f(g))' = f'(g) \cdot g'$

Nechť tedy

$$(x^a)' = \left(e^{(\ln x^a)}\right)' = \left(e^{(a \cdot \ln x)}\right)' = (e^{(a \cdot \ln x)}) \cdot (a \cdot \ln x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

f. **funkce sinus** $f : y = \sin x$. Využijeme vzorec pro rozdíl $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ a dále také známou limitu $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

$$\lim_{x\to x_\circ} \frac{\sin x - \sin x_\circ}{x - x_\circ} = \lim_{x\to x_\circ} \frac{2\sin\frac{x-x_\circ}{2}\cos\frac{x+x_\circ}{2}}{x - x_\circ} =$$

$$= \lim_{x\to x_\circ} \left(\frac{\sin\frac{x-x_\circ}{2}}{\frac{x-x_\circ}{2}}\right) \cdot \lim_{x\to x_\circ} \left(\cos\frac{x+x_\circ}{2}\right) = 1 \cdot \cos\frac{2x_\circ}{2} = \cos x_\circ$$

g. **funkce cosinus:** protože $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, platí:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2} = -\sin x$$

Vzorec lze odvodit i zcela analogický způsobem jako vzorec pro sinus.
h. **funkce tangens a cotangens:** lze odvodit snadno jako derivace podílů funkcí

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{a} \quad \mathrm{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Pro zajímavost ukážeme **odvození vzorců pro cyklometrické funkce** pomocí vzorce pro derivaci inverzních funkcí. Začněme s $y = \arcsin x$, tedy $x = \sin y$. Dále využijeme vztah $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ a vzorec pro derivaci inverzní funkce:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Nechť $y = \arccos x$, tedy $x = \cos y$. Dále využijeme vztah $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$ a vzorec pro derivaci inverzní funkce:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Nechť $y = \mathrm{arctg}x$, tedy $x = \mathrm{tg}y$. Dále využijeme goniometrickou jedničku a vzorec pro derivaci inverzní funkce:

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Analogicky lze odvodit derivaci funkce $y = \mathrm{arccotg}x$, jako $y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$