Представление функций класса L^r рядами по системе Виленкина

Аннотация

Пусть $W_k(x)_{k=0}^{\infty}$ система Виленкина ограниченного типа и пусть $\epsilon \in (0,1), r > 1$. Тогда для любой функции $f \in \mathrm{L}^r$ $[0,\ 1)$ $\exists g \in \mathrm{L}^r$ $[0,\ 1) mes\{x \in [0,1) : g \neq f\} < \epsilon$, жадный алгоритм которой по системе Виленкина сходится к ней по норме L^r $[0,\ 1)$, r > 1.

1 Введение

Рассмотрим произвольную последовательность натуральных чисел $P \equiv \{p_1, p_22, ..., p_kk, ...\}$ где $p_j \geq 2$ для всех $j \in N$.

Положим

$$m_k = \prod p_j (p_j \geq 2). \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что для каждой точки $x \in [0,1)$ и для каждого $n \in N$ существуют числа $x_j, a_j \in \{0, 1, ...p_j1\}$ такие, что

$$n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j m_{j-1} \tag{2}$$

и

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j} \tag{3}$$

(т.е. верны P -ичные разложения) Отметим, что точки вида $fraclm_k, l \in N, 0 \leq l \leq \{m_k - 1lN$, имеют два различных разложения—конечные и бесконечные, и чтобы мы имели только однозначные разложения, договоримся для этих точек взять только конечные разложения, в результате получаются следующие соответствия:

$$n \longrightarrow \{a_1, a_2, ..., a_k, ...\}; x \longrightarrow \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}. \tag{4}$$

Мультипликативная система соответствующая последовательности P , определяется следующим образом:

$$W_0(x) \equiv 1; W_n(x) = exp(2\pi i \sum_{j=1}^{k} a_i \frac{x_j}{p_j}) \tag{5}$$

Выражение (...) можем записать в следующем форме:

$$W_n(x) = exp(2\pi i \sum_{j=1}^{k} a_j \frac{x_j}{p_j}) = \prod (exp(2\pi i \frac{x_j}{p_j}))^{a_j}. \tag{6}$$

Из (...) следует что

$$W_{m_j - 1}(x) = exp(2\pi i \frac{x_j}{p_j}) \tag{7}$$

следовательно для n-ой функции получим следующее выражение:

$$W_n(x) = \prod (W_{mj-1}(x))^{a_j} \tag{8}$$

Очевидно, что системы соответствующие разным последовательностьям p_k отличаются друг от друга (в случае, когда $P \equiv \{2,,2,...\}$ система Виленкина $W_n(x)_{n=1}^{\infty}$ совпадает с системой Уолша $\omega_n(x)_{n=1}^{\infty}$). Теория таких систем была построена Н.Я. Виленкином в 1946 году.В случае $sup\{p_k\} < \infty$ система $\{W_n(x)\}$ называется системой Виленкина ограниченного типа. В противном случае—системой неограниченного типа.

Пусть f (x) вещественная функция из L^r [0, 1), r $\geq$ 1. Обозначим коэффициенты Фурье функции f по системе Виленкина через $c_n(f)$, а частичные суммы через $S_n(x; f)$ т.е. $c_n(f) = \int f(x)\bar{W}_k(x)dx, S_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)W_k(x)$

$$\int W_n(t)\bar{W}_k(t)dt = \begin{cases} 1, & \text{k=n} \\ 0, & \text{k} \neq n \end{cases} \tag{9}$$

Отметим, что в 1957 году Ватари доказал, что система Виленкина с $sup\{p_k\} < \infty$ является базисом в L^r при r $>$ 1. Затем, в 1976 году, Янг Восанг для произвольной последовательности$\{p_k\}$ установил базисность системы Виленкина в L^r при r $>$ 1. Для каждой функции $f \in L[0, 1)$, и для любых $n \in N$ и $y \in (0, \infty)$ им получено также неравенство

$$mes\{x : |S_n 9x, f)| > y\} \leq \frac{C||f||_{L[0,1)}}{y} \tag{10}$$

где C обсалютная постаянная.Далее для мультипликативных систем получены интересные результат.

Отметим, что в 1939г. Д.Е.Меньшов доказал следующую фундаментальную теорему

Теорема (Меньшов).
Пусть f (x) измеримая функция, конечная почти всюду на [0, 2]. Каково бы не было $\epsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию $\mathbf{g(x)}$, совпадающую с $\mathbf{f(x)}$ на некотором множестве $\mathbf{E}, |\mathbf{E}| > \mathbf{2}\pi - \epsilon$ и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[\mathbf{0}, \mathbf{2}\pi]$.

автору этой статьи удалось доказать, что как тригономическая система $\{e^{i2\pi kx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, так и система Уолша $\{\omega_k(x)\}$ обладают усиленным жадным L^1 -свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем: для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0,1]$, совпадающую с $f(x)$ на E, и такую, что как ряд Фурье так и жадный алгоритм которой по тригонометрической системе (соответственно по системе Уолша) сходятся к ней по $L^1[0,1]$ норме. Отметим также, что если для некоторой функции$f \in L^p, p > 2; |\{x \in [0,1]; f(x) = g(x)\}| > 0$, то ее жадный алгоритм $\{G_m(x, \psi, f)\}$ по системе ψ расходится в $L^p(0,1)$.

Обозначим через$\wedge(f) = specf$ спектр функции f (x) (т.е. $\wedge(f)$– множество номеров ненулевых коэффициентов $\{c_k(f)\}_{k=0}^{\infty}$.

В настоящей работе доказывается
Теорема 1 Пусть $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ система Виленкина ограниченного типа. Тогда для любых $0 < \epsilon < 1, r \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^r[0,1)$ можно найти функцию $g \in L^r[0,1) mes\{x \in [0,1); g \neq f < \epsilon$, для которой члены последовательности $\{|c_k(g)|, k \in \wedge(g)\}$ расположены в убывающем порядке.

Очевидно, что из $\{|c_k(f)|, k \in \wedge(f)\}$ следует, что существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{N_m\}_{m=1}^{\infty}$, такая, что

Принимая во внимание тот факт, что система Виленкина является базисом во всех пространствах $L^r, r > 1$, из теоремы 1 вытекает

Теорема 2 Пусть $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ мультипликативная система Виленкина ограниченного типа. Тогда для любого , $r \in (0,1)$ и для каждой функции $f \in L^r[0,1)$ можно найти ряд по м по системе Виленкина с $\{|c_k(f)|, k \in \wedge(f)\}$ которий сходится к в метрике L^r .

Вопрос 3. Верны ли Теоремы 1 и 2 для систем Виленкина неогрониченного типа?

2 Доказательство основных лемм

Обозначим

$$\triangle_n^{(k)} = \left(\frac{n}{m_k}, \frac{n+1}{m_k}\right) n = 0, 1, .., m_k - 1. \tag{11}$$

Обозначим через $\chi E(x)$ характеристическую функцию множества E, т.е.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{x} \in E \\ 0, & \text{x} \notin E. \end{cases} \tag{12}$$

Рассмотрим множество $\{\gamma; \Delta\}$ зависящее от двух параметров, где γ пробегает все вещественные числа, а Δ пробегает множество всех интервалов вида $\Delta_j^{(k)}$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\nu_0} \gamma_k \chi \Delta_k(x), (\gamma_k; \Delta_k) \in \{\gamma; \Delta\}, \Delta_k \bigcap \Delta_k' {=} \varnothing, k \neq k' \tag{13}$$

обозначим через B, т.е.

$$B = \{f(x) : f(x) = \sum_{k=1}^{\nu_0} \gamma_k \chi \Delta_k; (\gamma_k, \Delta_k) \in \{\gamma, \Delta\}, \Delta_k \bigcap \Delta_k' {=} \varnothing, k \neq k'\} \tag{14}$$

В этой статье мы используем следующие свойства системы Виленкина: $W_n(x) = W_n(\frac{j}{m_k})$ для всех $x \in \Delta_j^{(k)}$ при $0 \leqslant n \leqslant m_k - 1$ и $0 \leqslant j < m_k$.

$$\int W_n(x) dx = 0, n \geqslant m_k, 0 \leqslant j < m_k. \tag{15}$$

$$W_l mk + \beta(x) = W_l mk(x) W_\beta(x), \beta < m_k (l, \beta \in N) \tag{16}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая элементарная

Лемма 1. Пусть даны произвольные натуральные числа k, ν. Тогда для произвольных $l \in \{1, ..., \frac{m_k+\nu}{m_k} - 1\}$, и $j \in \{0, 1, ...m_k - 1\}$ имеет место $W_l mk(x) = 1$ для всех $x \in \Theta_j = [\dfrac{j}{m_k}, \frac{j}{m_k} + \frac{1}{m_{k+\nu}})$.

Доказательство леммы 1.

Пусть x произвольное число принадлежящее сегменту $\Theta_j = [\dfrac{j}{m_k}, \frac{j}{m_k} + \frac{1}{m_{k+\nu}})$. и $n = lm_k$ и пусть коэффициенты P -ичных разложений чисел x и n (легко видеть что для всех $x_s = 0$ для всех $s \in \{k+1, ...k+\nu\}$ и $a_s = 0$ для всех $s \in \{1, ...k\} \cup \{k+\ nu+1, ...\}$ следовательно $a_s x_s = 0$ для всех $s \in N$. Получим $W_l m_k(x) = 1$.
Лемма 1 доказана.
Лемма 2. Пусть $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ система Виленкина ограниченного типа. Для всех $r \in (0,1), \gamma \neq 0)\delta > 0; N_0 \in N$ и $\Delta_a^{(k_0)} = [\frac{a}{mk_0}, \frac{a+1}{mk_0} := \Delta$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ и полином $Q(x)$ по системе Виленкина вида:

$$Q(x) = \sum_{n=N_0}^{N} c_n W_n(x) \tag{17}$$

такие, что
1. ненулевые коэффициенты в $\{|c_n|\}_n = N_0^N$ равны $|\gamma||\Delta|$,

2. $Q(x) = 0, x \in [0,1)\ \Delta$

3. $sup_{N_0 < m \leqslant N}(\int |\sum\limits_{n=N_0}^{m} c_n W_n(x)|^r dx)^{\frac{1}{r}} \leqslant \delta^{\frac{1}{1-r}} \frac{(b|\gamma|^{\frac{1-2r}{1-r}}}{|\Delta|^{\frac{1+r}{2(1-r)}}}$ (где b=$b = sup\{p_k\}$)

4. $\int |Q(x) - \gamma\chi\Delta(x)|^r dx < \delta$

Доказательство леммы 2.

Пусть $k_1 = [log_2 N_0] + 1 + k_0$, где $[x]$ означает целую часть числа x Очевидно, что

$$N_0 \leqslant 2^{k_1 - k_0} < m_k 1 \tag{18}$$

Положим

$$\varepsilon = (\frac{\delta}{|\gamma|^r b^r |\Delta|})^{\frac{1}{1-r}}, b = sup\{p_k\} \tag{19}$$

Возмем ν такое, что$m_{k_1+\nu-1}/m_{k1} \leqslant 1/\varepsilon < m_{k_1+\nu}/m_{k1}$ Отсюда

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{m_{k_1+\nu}}{m_{k1}} \leqslant \frac{b}{\varepsilon}, b = sup\{p_k\} \tag{20}$$

Пусть $\Theta_j = [\frac{j}{m_{k1}}, \frac{j}{m_{k1}} + \frac{1}{m_{k_1+\nu}})$ очевидно, что $\Theta_j = \Delta^{(k_1+\nu)}_{jm_{k1+\nu/m_{k1}}}$ где $j = 0, 1, 2, ..., m_{k1} - 1$.
Положим

$$I_{k_1}^{(\nu)}(k_0, x) = \begin{cases} 1 - \frac{m_{k_1+\nu}}{m_{k1}} \chi\Theta_j x \in \Delta_j^{(k_1)} \subset \Delta \\ 0x \notin \Delta \end{cases}$$

где

$$\Delta = \cup\Delta_j^{(k_1)}, A = \left[\frac{am_{k1}}{m_{k0}}, \frac{(a+1)m_{k1}}{m_{k0}}\right)$$

Ясно, что $A \subset [0, m_{k1})$.
Пусть

$$G(x) = \gamma I_{k_1}^{\nu}(k_0, x), c_n = \int G(t)W_n(t)dtn = 0, 1, 2... \tag{21}$$

Вычислим коэффициенты c_n : для всех $0 \leqslant n \leqslant m_{k1} - 1$ и $j \in A$ получаем

$$\begin{gathered} \int G(t)W_n(t)dt = \gamma W_n(\tfrac{j}{m_{k1}}) \int I_{k_1}^{(\nu)}(k_0, t)dt) = \\ \gamma W_n(\tfrac{j}{m_{k1}}) \int (1 - \tfrac{m_{k_1+\nu}}{m_{k1}} \chi\Theta_j(t))dt = \gamma W_n(\tfrac{j}{m_{k1}})(\tfrac{1}{m_{k1}} - |\Theta_j| \tfrac{m_{k_1+\nu}}{m_{k1}}) = 0 \end{gathered} \tag{22}$$

очевидно, что $c_n = 0$ при $n \leqslant m_{k1} - 1$
Для всех $q \in \{0, 1, ..., m_{k_1+\nu} - 1\}$ и $n \geq m_{k_1+\nu}$ получаем $\int W_n(t)dt = 0$. Отсюда следует, что $c_n = 0$ если $n \geq m_{k_1+\nu}$
Пусть теперь $m_{k1} \leqslant n \leqslant m_{k_1+\nu} - 1 := N$ Очевидно, что существуют натуральные числа $l_n, \beta_n \in N, 1 \leqslant l_n \leqslant \frac{m_{k_1+\nu}}{m_{k_1}} - 1; 0 \leqslant \beta_n \leqslant m_{k1} - 1$ такие, что $n = l_n m_{k1} + \beta_n$
Принимая во внимание,что $W_{l_n m_{k1}}(t) = 1$ при $t \in \bigcup \Theta_j$ (см. лемма 1) и что $W_{\beta n}(t) \equiv W_{\beta n}(\frac{j}{m_{k1}})$ при $t \in \Delta_j^{(k_1)}$ получим

$$c_n = (t)W_n(t)dt = \gamma \int I_{k_1}^{(\nu)}(k_0, t)W_{l_n m_{k1}}(t)W_{\beta n}(t)dt =$$

$$= \gamma \sum_{j \in A} \{W_{\beta n}(\tfrac{j}{m_{k1}}) \int (1 - \tfrac{m_{k_1+\nu}}{m_{k1}} \chi\Theta_j(t))W_{l_n m_{k1}}(t)dr\}$$

$$= \gamma \sum_{j \in A} \{W_{\beta n}(\tfrac{j}{m_{k1}})(-\tfrac{m_{k_1+\nu}}{m-k_1}) \int W_{l_n m_{k1}}(t)dt = -\gamma \sum_{j \in A} W_{\beta n}(\tfrac{j}{m_{k1}} \tfrac{1}{m_{k1}} = -\gamma \int W_{\beta n}(t)dt \tag{23}$$

$$\gamma \int W_{\beta n}(t)dt = \begin{cases} -\gamma|\Delta|W_{\beta n}(\frac{a}{m_{k0}}), 0 \leqslant \beta_n \leqslant m_{k0} - 1 \\ 0, m_{k0} \leqslant \beta_n < m_{k1}. \end{cases} \tag{24}$$

Окончательно получаем:

$$|c_n| = |\gamma||\Delta| \text{ для } n \in spec(G) \subset [N_0, N].$$

Положим

$$Q(x) = \sum_{n=N_0}^{N} c_n W_n(x). \tag{25}$$

получим

$$Q(x) = G(x)x \in [0,1). \tag{26}$$

Положим

$$E \equiv \{x : Q(x) = \gamma\}$$

получим

$$Q(x) = \begin{cases} \gamma, x \in E \\ \gamma, (1 - \frac{m_{k_1+\nu}}{m_{k1}}, x \in \Delta/E \\ 0, x \notin \Delta \end{cases} \tag{27}$$

будем иметь

$$E = \bigcup (\Delta_j^{(k_1)} / \Theta_j) \tag{28}$$

для всех $s \geq 1$

$$\int |Q(x)|^s dx < 2|\gamma|^s |\Delta| (\frac{m_{k_1+\nu}}{m_{k1}})^{s-1} \leqslant 2|\gamma|^s |\Delta| (b/\varepsilon)^{s-1} \tag{29}$$

для всех $M \in [N_0, N]$ получим

$$(\int |\sum_{n=n_0}^{M} c_n W_n(x)|^r dx)^{\frac{1}{r}} \leqslant (\sum_{n=N_0}^{N} |c_n|^2)^{\frac{1}{2}} = (\int |Q(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2|\gamma||\Delta|^{\frac{1}{2}} (b/\varepsilon) = \delta^{\frac{1}{1-r}} \frac{(b|\gamma|)^{\frac{1-2r}{1-r}}}{|\Delta|^{\frac{1+r}{2(1-r)}}} \tag{30}$$

следует, что для всех

$$\int |Q(x) - \gamma\chi_\Delta(x)|^r dx = \int |\gamma(I_{k_1}^{(\nu)}(k_0, x) - 1)|^r dx = |\gamma|^r (b/\varepsilon)^r |\Delta| \varepsilon = |\gamma|^r b^r |\Delta| \varepsilon^{1-r} = \delta \tag{31}$$

Лемма доказана.

Список литературы

[1] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.-М.: Наука 1987.
[2] Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.
[3] Виленкин Н.Я. об одном классе полных ортогональных систем // Изв. АН СССР. Сер. мат.-1947.-Т. 11.-С. 363-400.
[4] Watari C. On generalizes Walsh-Fourier series, I. PProc. Japan Acad., 73, 1957, N 8, 435-438.
[5] Young W.-S. Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc., 218, 1976, 311-320.
[6] Зубакин А.М. О теоремах исправления Меньшова для одного класса мультипликативных ортонормированных систем функций. Изв. вузов. Математика, 1969, N 12, 34-46.
[7] Gosselin J.A. Convergence a.e. Vilenkin-Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc., 185, 1973, 345-370.
[8] Блюмин С.Л. Некоторые свойства одного класса мультипликативных систем и вопросы приближения функций полиномами по этим системам. Изв. Вузов. Математика, 1968,No4, 13-22. 8 1+r || 2(1r)[9] Price J.J. Certain groups of orthonormal step functions. Canad. J. Math., 9, 1957, N 3, 413-425.
[10] Wojtaszczyk P., Greedy Algorithm for General Biorthogonal Systems, Journal of Approximation Theory, 107(2000), 293-314.
[11] DeVore R.A., Temlyakov V. N., Some remarks on greedy algorithms, Advances in Computational Math. 5(1996), 173-187.
[12] Konyagin S.V. and Temlyakov V.N., A remark on Greedy approximation in Banach spaces, East Journal on Approximations, 5:1(1999), 1-15.
[13] K o rner T.W., Divergence of decreasing rearranged Fourier series, Ann. of Math., 144(1996), 167-180.
[14] –, Decreasing rearranged Fourier series, J. Fourier Anal. Appl. 5 (1999), 1-19.
[15] Temlyakov V.N., Nonlinear methods of approximation, Found. Comput. Math. 3 (2003), 33-107.
[16] Gribonval R., Nielsen M., On the quasi-greedy prop- erty and uniformly bounded orthonormal systems, http://www.math.auc.dk/research/reports/R-2003-09.pdf.
[17] Men'shov D. E., Sur la representation des fonctions measurables des series trigonometriques , Mat. Sbornik, 9(1941) 667-692.
[18] Grigorian M.G. and Zink R.E., Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system,Proc. of the Amer. Mat. Soc., 134:12(2006), 3495-3505.
[19] Григорян М.Г. О сходимостьи в метрике L p гриди алгоритма по тригонометрической системе Известия НАН Армении. Математика, 39, No5, 2004, 37-52
[20] Grigorian M.G., Kazarian K.S., Soria F., Mean convergence of or- thonormal

Fourier series of modified functions, Trans. Amer. Math. Soc. (TAMS), 352:8(2000), 3777-3799.
[21] Григорян М.Г. Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация, Матем. сб., 203:3 (2012), 49-78
[22] Арутюнян, Ф. Г. О рядах по системе Хаара, Доклады Арм. ССР 42 (1966) No3, 134-140.
[23] Price J. J., Walsh series and adjustment of functions on small sets, Illinois is J. Math., 1969, v. 13, p. 131-136.
[24] Олевский А. М., Модификация функций и ряды Фурье, УМН, 40:3(243) (1985), 157-193.
[25] Grigorian M. G., On convergence of Fourier series in complete orthonormal systems in the L 1 metric and almost everywhere, Mat. Sb. 181 (1990), 1011-1030 (in Russian); English transl. Math. USSR-Sb. 70 (1991), 445- 466.
[26] Grigorian M. G. On the representation of functions by orthogonal series in weighted L p spaces, Studia. Math., 1999, 134(3), 207-216.
[27] Grigorian M. G., On the L p -strong property of orthonormal systems, Matem. Sbornik, 194:10(2003), 1503-1532.
[28] Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд (Москва, 1951).
[29] А. А. Талаляе, "О ряд.х ? универсальных относительно перестановок сер. матем. 24, 567-604 (1960).
[30] Г. М. Мушегян, "Об универсальности рядов относительно перестановок Изв. АН АРМ. ССР, сер. матем. 12 (4), 278-302 (1977).
[31] M. C. Grigorian, "On the Convergence of Fourier Series in the Metric of L 1 17 (3), 211-237,
[32] М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, "О переставленных рядах по системе Хаара Изв. НАН Армении, сер. матем. 42 (2), 92-108, 2007.
[33] Д. Е. Меньшов, "О частичных суммах тригонометрических рядов Мат. сборник 20 (2), 197-238 (1947).
[34] В. Я. Козлов, "О полных системах ортогональных функций Мат. сборник 26 (3), 351-364 (1950).
[35] А. А. Талалян, "О сходимости почти всюду подпоследовательностей частичных сумм об- щих ортогональных рядов Изв. АН Арм. ССР, сер. матем. 10 (3), 17-34 (1957).
[36] А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами УМН 15 (5), 567-604 (1960).
[37] В. И. Иванов, "Представление функций рядами в метрических симметричных простран- ствах без линейных функционалов Труды МИАН СССР 189, 34-77 (1989).
[38] П. Л. Ульянов, "О рядах по системе Хаара Мат. Сборник, 6 3 (1 0 5) (3), 356-391 (1964).
[39] Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций кратными рядами ДАН Арм. ССР 64 (2), 72-76 (1976).
[40] Н. Г Погосян, "Представление измеримых функций базисами L p0 $,p > 2\ .64(4), 205 - 209(1976)$.
[41]$W.Orlicz, "Uberdieunabhangigvonder Anordnung fastuberallkonvergentenReihen\ Bullde1'Academie$
125(1927).

[42] М. Г. Григорян, "Представление функций классов L p , 1 < p < 2 ортогональными рядами! ДАН Арм. ССР 67 (5), ??? (1978). L 1 ортонормированным системам Мат. сборник 181 (8), 1011-1030 (1990).
[43] M. G. Grigorian, "On the Representation of Functions by Orthogonal Series in Weighted L p Spaces Studia. Math., 134 (3), 207-216 (1999).
[44] М. Г. Григорян , "Пример универсального ортогонального ряда Изв. НАН Армении, сер. матем. 35 (4), 44-64 (2000).

Содержание