Aufgabe 9

Bestimmen Sie die ersten drei Summanden, welche nicht null sind, der Maclaurin-Reihe von $f(x) = tan(x)$.
Die Mclaurin-Reihe lautet:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} \cdot x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} \cdot x^2 \dots$$

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Nach der Quotientenregel ergibt sich die erste Ableitung

$$tan'(x) = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)}$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten zu kürzen. Entweder wird $cos^2(x)+sin^2(x) = 1$ gesetzt oder man löst den Bruch auf. Je nach Aufgabe erleichtert die eine oder andere Darstellung. Hier wird folgender Ausdruck verwendet

$$\begin{aligned} tan'(x) &= \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} \\ tan'(x) &= 1 + tan^2(x) \end{aligned}$$

Die restlichen Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}
&f^{(1)}(x) = 1 + tan^2(x) && f^{(1)}(0) = 1 \\
&f^{(2)}(x) = 2 \cdot tan(x) + tan^3(x) && f^{(2)}(0) = 0 \\
&f^{(3)}(x) = 2 + 8 \cdot tan^2(x) + 6 \cdot tan^4(x) && f^{(3)}(0) = 2 \\
&f^{(4)}(x) = 16 \cdot tan(x) + 40 \cdot tan^3(x) + 24 \cdot tan^5(x) && f^{(4)}(0) = 0 \\
&f^{(5)}(x) = 16 + 136 \cdot tan^2(x) + 240 \cdot tan^4(x) + 120 \cdot tan^6(x) && f^{(5)}(0) = 16
\end{aligned}$$

Setzen wir das nun in die Definition der Mclaurin Reihe erhält man folgenden Ausdruck:

$$tan(x) \approx 0 + x + 0 + \frac{2}{3!}x^3 + 0 + \frac{16}{5!}x^5 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

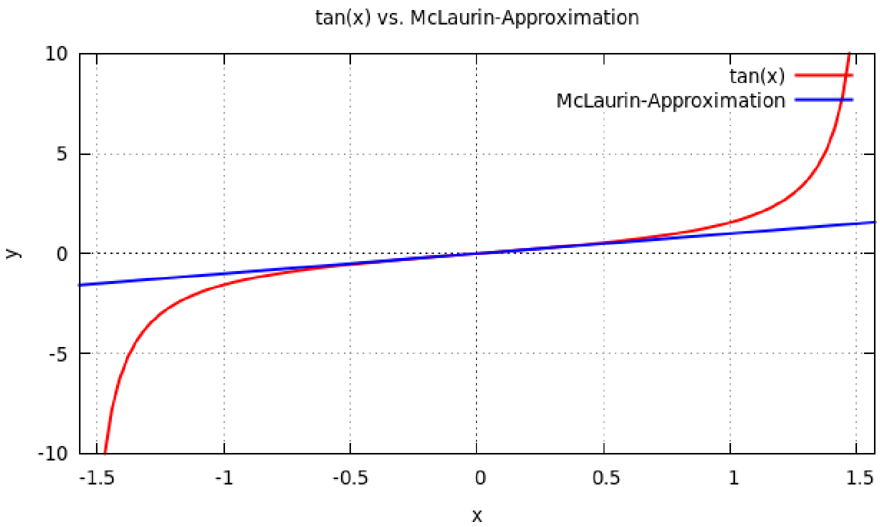

Abbildung 1: Plot der Tangensfunktion (rot) und der McLaurin-Approximation (blau) im Bereich von -$\pi/2$ bis $\pi/2$