Aufgabe 11b

Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von $f(x) = (x \cdot \ln(x))^2$ um die Stelle $x_0 = 1$ bis zum Grad 2.
Bestimmen Sie den Unterschied von $f(x)$ und dieser Näherung and der Stelle $x = 1,1$

$$T_2 f(x; x_0) = \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \qquad \forall x, x_0 \in \mathbb{C} \tag{1}$$

x_0 ist hierbei die Entwicklungsstelle. In der Mathemathik wird gerne x_0 verwendet um eine beliebige Zahl zu verwenden, die aber konstant bleibt

Ableitungen

$$f^{(0)}(x) = (x \cdot \ln(x))^2$$
$$f^{(0)}(1) = (1 \cdot \ln(1))^2 = 0$$

$$f^{(1)}(x) = 2(x \cdot ln(x)) \cdot (\ln(x) + 1) = 2x \cdot \ln^2(x) + 2x \cdot \ln(x)$$
$$f^{(1)}(1) = 2 \cdot 1 \cdot \ln^2(1) + 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) = 0$$

$$f^{(2)}(x) = 2 \cdot \ln^2(x) + 4x \cdot \ln^2(x) \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot ln(x) + 2 = 2 \cdot \ln^2(x) + 6x \cdot \ln(x) + 2$$
$$f^{(2)}(1) = 2 \cdot \ln^2(1) + 6 \cdot 1 \cdot \ln(1) + 2 = 2$$

Taylor-Reihe

Nun setzen wir die Ergebnisse der Ableitungen in Gleichung 1 ein und erhalten folgenden Ausdruck

$$T_2 f(x; 1) = \frac{0}{0!}(x-1)^0 + \frac{0}{1!}(x-1)^1 + \frac{2}{2!}(x-1)^2 = (x-1)^2$$

absoluter Fehler

Berechne$f(1,1) - T_2 f(1,1; 1)$

$$f(1,1) \approx 0,011$$
$$T_2 f(1,1; 1) = 0,01$$
$$\Rightarrow f(1,1) - T_2 f(1,1; 1) \approx 0,001$$

Dies entspricht einem relativen Fehler von ca 10%