Aufgabe1

Es sei:
$A := \{1, 17, 53\}$
$B := \{2, 17, 23\}$

a)

Berechne die Vereinigung ($\cup$) von A und B
$A \cup B = \{1, 17, 53\} \cup \{2, 17, 23\} = \{1, 2, 17, 23, 53\}$

b)

Berechne den Schnitt ($\cap$) von A und B
$A \cap B = \{1, 17, 53\} \cap \{2, 17, 23\} = \{17\}$

c)

Berechne das kartesische Produkt ($\times$) von A und B
$A \times B = \{1, 17, 53\} \times \{2, 17, 23\} =$
$\{(1, 2), (1, 17), (1, 23), (17, 2), (17, 17), (17, 23), (53, 2), (53, 17), (53, 23)\}$

d)

Berechne die Differenz ($\setminus$) von A und B
$A \setminus B = \{1, 17, 53\} \setminus \{2, 17, 23\} = \{1, 53\}$

Aufgabe2

a)

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
Die Potenzmenge der leeren Menge ist eine Menge welche die leere Menge als Element besitzt.
$\Longrightarrow |\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$

b)

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
Wir ersetzen die innere Potenzmenge nun mit der vorherig berechneten Potenzmenge
In Worten bestimmen wir die Potenzmenge der Ein-elementigen Menge mit der leeren Menge als Element.
$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\Longrightarrow |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))| = |\mathcal{P}(\{\emptyset\})| = 2$
Es gilt im allg.: Die Potenzmenge einer einelementigen Mengen hat zwei Elemente. Einmal die leere Menge und die ganze Menge.

c)

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$
Auch hier ersetzt man die inneren Potenzmengen durch die vorher berechnete Potenzmenge

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{ & \\ & \emptyset, \\ & \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \\ & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ & \}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = |\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})| = 4$

Bemerkung

Es lohnt sich nicht die Potenzmengenfunktion von außen nach innen aufzulösen.
Es gilt im allgemeinen **nicht**: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))\}$
Hier liegt eine verstecke Annahme drin, dass $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ eine einelementige Menge ist.
Eine gültige Aussage lautet:
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))\} \cup \{\text{alle echten Teilmengen von } \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \setminus \emptyset\}$
Wenn wir dies weiterauflösen wird das ganze sehr lang und kompliziert
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset, \mathcal{P}(\emptyset)\} \cup \{\text{alle echten Teilmengen von } \mathcal{P}(\emptyset) \setminus \emptyset\}\} \cup \{\text{alle echten Teilmengen von } \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \setminus \emptyset\}$

Aufgabe 3

a)

Bestimme die Kardinalität des Schnitts ($\cap$) von $\{x, y, z\}$ und $\{x, \{y, z\}, \{a\}\}$
$|\{x, y, z\} \cap \{x, \{y, z\}, \{a\}\}| = |\{x\}| = 1$

b)

Bestimme die Kardinalität des kartesischen Produktes von $\mathbb{N} \cap [3, 6)$ und $\{5\}$
$\mathbb{N} \cap [3, 6) = \{3, 4, 5\}$
$\{3, 4, 5\} \times \{5\} = \{(3, 5), (4, 5), (5, 5)\}$
$|\{(3, 5), (4, 5), (5, 5)\}| = 3$
Die Menge besteht aus 3 2-Tupeln

Aufgabe 4

$$M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$R := \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

reflexiv/irreflexiv

Die Relation ist irreflexiv, da für alle Elemente m in M (m, m) nicht in der Relation R ist und somit kann diese nicht reflexiv sein. Reflexiv und irreflexiv schließen sich gegenseitig aus. Eine Relation ist entweder reflexiv oder irreflexiv, bzw keines der beide.

Es gilt: $\forall m \in M : (m, m) \notin R$

symetrisch

Die Relation ist nicht symetrisch da $(2, 4) \in R$ gilt, aber $(4, 2) \notin R$ ist, was von der Symetrie gefordert ist.

antisymetrisch

Die Relation ist nicht antisymetrisch da $\{(3, 5), (5, 3)\} \subset R$ gilt. Antisymetrie fordert, dass nur eines der beiden 2-Tupel in R liegt.

transitiv

Die Relation ist nicht transitiv da $\{(3, 5), (5, 3)\} \subset R$ gilt aber $(3, 3) \notin R$

total

Die Relation ist nicht total, da Totalität Reflexivität fordert und die Relation wie oben beschrieben irreflexiv ist.

Aufgabe 5

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists z \in \mathbb{N} : y = z \cdot x\}$$

Die Relation ist weder eine Halb- noch Totalordnung da sie nicht antisymetrisch ist.
Weder $(3, 2)$ noch $(2, 3)$ sind Elemente der Relation und somit ist diese nicht antisymetrisch und damit auch keine Halb- oder Totalordnung, da hier Antisymetrie gefordert wird