Aufgabe 11b

Bestimmen Sie einige Summanden der Taylor-Reihe von $f(x) = \frac{1}{x^{-\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$ um die Stelle $x_0 = 1$

$$Tf(x;x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \qquad \forall x, x_0 \in \mathbb{C} \tag{1}$$

x_0 ist hierbei die Entwicklungsstelle. In der Mathemathik wird gerne x_0 verwendet um eine beliebige Zahl zu verwenden, die aber konstant bleibt

$$\binom{q}{n} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(q-i)}{n!} \qquad \forall q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Ableitungen

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x_0) &= & (x_0)^{-\frac{1}{3}} \qquad & f^{(0)}(1) = 1 \\
f^{(1)}(x_0) &= & (-\frac{1}{3}) \cdot (x_0)^{-\frac{4}{3}} \qquad & f^{(1)}(1) = (-\frac{1}{3}) \\
f^{(2)}(x_0) &= & (-\frac{4}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (x_0)^{-\frac{7}{3}} \qquad & f^{(2)}(1) = (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{4}{3}) \\
f^{(3)}(x_0) &= & (-\frac{7}{3}) \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot (x_0)^{-\frac{10}{3}} \qquad & f^{(3)}(1) = (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot (-\frac{7}{3})
\end{aligned}$$

Taylor-Reihe

Es ist nun zu sehen dass $f^{(n)}(1)$ sich durch folgenden Ausdruck berechnen lässt.

$$f^{(n)}(1) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{3} - i\right) \tag{3}$$

Setzen wir nun Gleichung 3 in Gleichung 1 ein erhalten wir folgendenden Ausdruck:

$$Tf(x;1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{3} - i\right)}{n!} \cdot (x-1)^n \tag{4}$$

anschließend ersetzen wir das Produkt in der Reihe mit Gleichung 2 und erhalten unseren abschließenden Ausdruck mit dem man die Reihenglieder berechnen kann.

$$Tf(x;1) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/3}{n} \cdot (x-1)^n \tag{5}$$

Für Taylorreihen deren Koeffizienten sich nur mit Binominalkoeefizeinten ausdrücken lassen gilt: Der Konvergenzradius beträgt 1. (Siehe Skript Kapitel 1 Seite 11 Beispiel b)