Aufgabe1

Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge D, die Wertemenge W, die Gleichung $y = f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion f^{-1}. Prüfen Sie, ob $f^{-1} \circ f$ die identische Funktion auf D_f und $f \circ f^{-1}$ die identische Funktion auf W_f ist

b)

$f(x) = \frac{1-x}{2x+1}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$W_f = \mathbb{R}$

Berechnung der Inversen

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-x}{2x+1} && \mid \cdot (2x+1) \\ 2xy + y &= 1 - x && \mid + x - y \\ 2xy + x &= 1 - y \\ x(2y+1) &= 1 - y && \mid \div (2y+1) \\ x &= \frac{1-y}{2y+1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f^{-1} = f$

Überprüfung der Inversen

Da f seine eigene Inverse ist muss nur eine Richtung überprüft werden.

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= \frac{1 - \frac{1-x}{2x+1}}{2\left(\frac{1-x}{2x+1}\right) + 1} \\ &= \frac{\frac{2x+1-(1-x)}{2x+1}}{\frac{2-2x+2x+1}{2x+1}} \\ &= \frac{2x+1-(1-x)}{2-2x+2x+1} \\ &= \frac{3x}{3} \\ f \circ f^{-1} &= x \end{aligned}$$

Der Graph der Funktionen befindet sich im Anhang

c)

$f(x) = \ln(x + 2)$

$D_f = (-2, \infty)$

$W_f = \mathbb{R}$

Berechnung der Inversen

$$\begin{aligned} y &= \ln(x+2) \quad |e^{(\cdots)} \\ e^y &= x + 2 \quad | - 2 \\ x &= e^y - 2 \\ \Rightarrow f^{-1} &= e^x - 2 \end{aligned}$$

Überprüfung der Inversen

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1} &= \ln(e^x - 2 + 2) \\ &= \ln(e^x) \\ f \circ f^{-1} &= x \\ \\ f^{-1} \circ f &= e^{\ln(x+2)} - 2 \\ &= x + 2 - 2 \\ f^{-1} \circ f &= x \end{aligned}$$

Der Graph der Funktionen befindet sich im Anhang

d)

$f(x) = \cos(x)$

$D_f = (-\infty, \infty)$

$W_f = [-1, 1]$

Berechnung der Inversen

Die Cosiunusfunktion kann nicht auf seinem kompletten Definitionsbereich invertiert werden. Da mehrere x-Werte den selben Funktionswert ergeben. Damit man eine Umkehrfunktion bilden kann muss der Definitionsbereich eingeschränkt werden, sodass jeder erhaltene Funktionswert eindeutig ist. Man schränkt hierfür den Wertebereich auf $[0, \pi]$ ein. In diesem Bereich kann eine Umkehrfunktion gebildet werden. Der vorher gennante Wertebereich ändert sich dabei nicht.

Der Graph der Funktionen befindet sich am Ende des Dokumentes

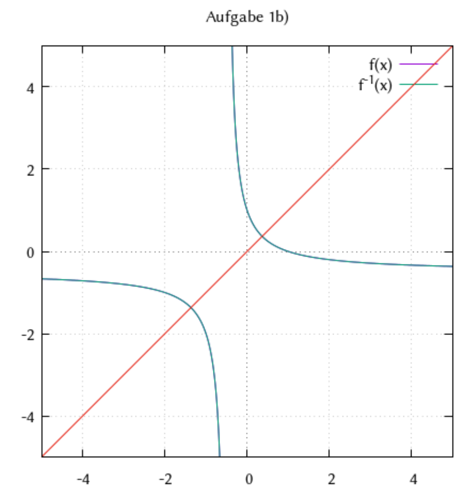

Abbildung 1: Graph der Funktion $f(x) = \frac{1-x}{2x+1}$ und seiner Inversen. Da beide Funktionen identisch sind überlagern sich die Farbe

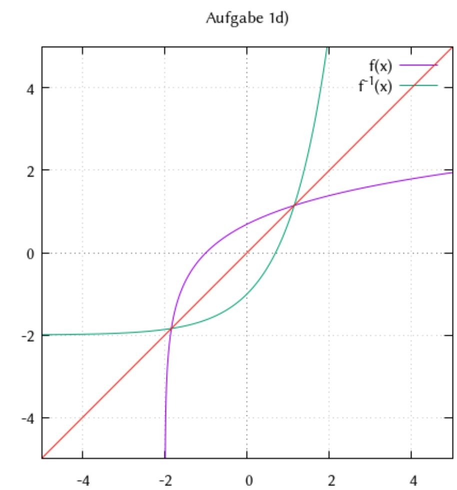

Abbildung 2: Graph der Funktion $f(x) = \ln(x+2)$ und seiner Inversen.

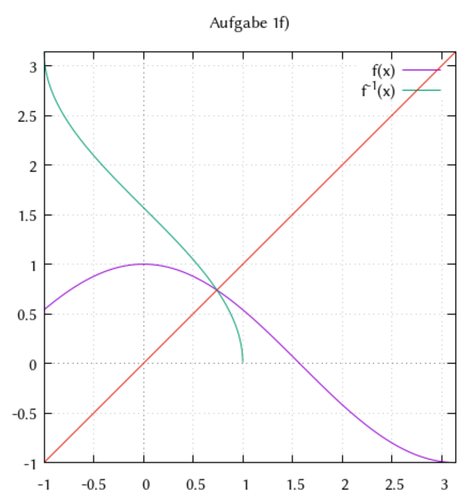

Abbildung 3: Graph der Funktion $\cos(x)$ und seiner Inversen. Die Umkehrung f indet nur im Bereich $x = [0:\pi]$ statt