Aufgabe2

Zerlegen Sie jeweils in Linearfaktoren

b)

$$b(x) = -x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 17x^2 - 12x + \frac{52}{3}$$

Man beachte, dass der erste koeffizient ungleich 1 ist. Nachdem alle Nullstellen berechnet wurden muss man noch mit diesem Koeffizienten multiplizieren um auf die Ausgangsfunktion zu kommen.

Polynomdivision

Für die Polynomdivision teilt man das Polynom durch die bekannten Nullstellen.

$$\begin{array}{l}
\big(-x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 17x^2 - 12x + \frac{52}{3}\big) \div \big(x+2\big) = -x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{31}{3}x + \frac{26}{3} \\
\quad x^4 + 2x^3 \\
\hline
\quad -\frac{10}{3}x^3 - 17x^2 \\
\quad \frac{10}{3}x^3 + \frac{20}{3}x^2 \\
\hline
\quad -\frac{31}{3}x^2 - 12x \\
\quad \frac{31}{3}x^2 + \frac{62}{3}x \\
\hline
\quad \frac{26}{3}x + \frac{52}{3} \\
\quad -\frac{26}{3}x - \frac{52}{3} \\
\hline
\quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\big(-x^3 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{31}{3}x + \frac{26}{3}\big) \div \big(x - \frac{2}{3}\big) = -x^2 - 4x - 13 \\
\quad x^3 - \frac{2}{3}x^2 \\
\hline
\quad -4x^2 - \frac{31}{3}x \\
\quad 4x^2 - \frac{8}{3}x \\
\hline
\quad -13x + \frac{26}{3} \\
\quad 13x - \frac{26}{3} \\
\hline
\quad 0
\end{array}$$

Nullstellen quadratische Gleichung

Nun müssen nur noch die Nullstellen, mittels pq-Formel, des oben erhaltenen Ausdrucks bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
x^2 + 4x + 13 &= 0 \\
\Rightarrow x_{1/2} &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 13} \\
x_{1/2} &= -2 \pm \sqrt{-9} \\
x_1 = -2 + 3i \quad x_2 &= -2 - 3i
\end{aligned}$$

Linearfaktoren

Aus allen Nullstellen und dem ersten Vorfaktor ergibt sich folgende Zerlegung:

$$b(x) = -(x+2)(x - \frac{2}{3})(x - (-2+3i))(x - (-2-3i))$$

c)

$$c(x) = 4x^4 - 4x^3 - 17x^2 - 16x + 4$$

Man beachte, dass der erste koeffizient ungleich 1 ist. Nachdem alle Nullstellen berechnet wurden muss man noch mit diesem Koeffizienten multiplizieren um auf die Ausgangsfunktion zu kommen.

Polynomdivision

Für die Polynomdivision teilt man das Polynom durch die bekannten Nullstellen.

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ 4x^4 - 4x^3 + 17x^2 - 16x + 4\big) \div \big(x - \tfrac{1}{2}\big) = 4x^3 - 2x^2 + 16x - 8 \\
\underline{-4x^4 + 2x^3} \\
\qquad -2x^3 + 17x^2 \\
\qquad \underline{\ \ 2x^3 \quad - x^2} \\
\qquad\qquad 16x^2 - 16x \\
\qquad\qquad \underline{-16x^2 \ + 8x} \\
\qquad\qquad\qquad -8x + 4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\ \ 8x - 4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ 4x^3 - 2x^2 + 16x - 8\big) \div \big(x - \tfrac{1}{2}\big) = 4x^2 + 16 \\
\underline{-4x^3 + 2x^2} \\
\qquad\qquad 16x - 8 \\
\qquad\qquad \underline{-16x + 8} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Nullstellen quadratische Gleichung

Nun werden die restlichen Nullstellen bestimmt.

$$\begin{aligned}
4x^2 + 16 &= 0 \\
x^2 + 4 &= 0 \\
\Rightarrow x_1 = 2i \quad x_2 &= -2i
\end{aligned}$$

Linearfaktoren

Aus allen Nullstellen und dem ersten Vorfaktor ergibt sich folgende Zerlegung:

$$c(x) = 4(x - \frac{1}{2})^2(x - 2i)(x + 2i)$$