Aufgabe 11a)

Bestimme die McLaurin-Reihe und den Konvergenzradius für

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$$

Bestimmung der McLaurin-Reihe

Zunächst berechnet man ein paar Ableitungen um ein Muster zu erkennen.

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= (x+1)^{-\frac{1}{3}} & f^{(0)}(0) &= 1 \\
f^{(1)}(x) &= (-\frac{1}{3}) \cdot (x+1)^{-\frac{4}{3}} & f^{(1)}(0) &= (-\frac{1}{3}) \\
f^{(2)}(x) &= (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot (x+1)^{-\frac{7}{3}} & f^{(2)}(0) &= (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{4}{3}) \\
f^{(3)}(x) &= (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot (-\frac{7}{3}) \cdot (x+1)^{-\frac{10}{3}} & f^{(3)}(0) &= (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot (-\frac{7}{3})
\end{aligned}$$

Folgende Muster kann man erkennen

- Es ist zu erkennen, dass für gerade Ableitungen das Vorzeichen positiv ist und für ungerade Ableitungen negativ. Folglich benötigen wir den Term $(-1)^n$ um dies zu erzeugen
- In der n-ten Ableitung wird mit n "Dritteln"multipliziert. Die Zähler sind zunächst egal. Aus diesem Muster können wir schließen, dass der Ausdruck 3^n im Nenner stehen hat.
- Die Zähler bilden eine Folge $(1, 1, 4, 7, 10, \dots)$ und werden miteinander multipliziert. Ignoriert man das nullte Folgenglied so erhält man folgenden expliziten Ausdruck: $a_n = (1 + 3(j-1))$ Dies wird nun in ein Produktzeichen das alle Folgenglieder von 1 bis n multipliziert.
- Dieses Produktzeichen in Gleichung (1) hat jetzt aber ein Problem. Was passiert mit der 0-ten Ableitung. Es soll das Produkt der Folgenglieder von 1 bis 0 berechnet werden. Dies ist ein Sonderfall, wenn die obere Grenze kleiner ist als der Startwert ist, und wird '**leeres Produkt**' genannt. Mit dem Ergebnis von 1. Damit erzeugt das Produkt die Zähler der Ableitung.

Mit all diesen Mustern erhält man folgende Gleichung:

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n}{3^n} \cdot \prod_{j=1}^{n} \Big(1 + 3(j-1)\Big) \tag{1}$$

Nun lässt sich das ganze in die Definition der McLaurin-Reihe einsetzen.

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{n} \left(x^i \cdot \underbrace{\frac{1}{i!} \cdot \frac{(-1)^i}{3^i} \cdot \prod_{j=1}^{i} \Big(1 + 3(j-1)\Big)}_{a_i} \right)$$

Jetzt werden die ersten 3 a_i berechnet

$$\begin{aligned}
i = 0 : a_0 &= \frac{1}{0!} \cdot \frac{(-1)^0}{3^0} \cdot \prod_{j=1}^{0} \Big(1 + 3(j-1)\Big) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\
i = 1 : a_1 &= \frac{1}{1!} \cdot \frac{(-1)^1}{3^1} \cdot \prod_{j=1}^{1} \Big(1 + 3(j-1)\Big) \\
&= 1 \cdot -\frac{1}{3} \cdot (1 + 3(1-1)) = -\frac{1}{3} \\
i = 2 : a_2 &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{(-1)^2}{3^2} \cdot \prod_{j=1}^{2} \Big(1 + 3(j-1)\Big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot (1 + 3(1-1)) \cdot (1 + 3(2-1)) = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 9} = \frac{2}{9} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Konvergenzradius

Um den Konvergenzradius zu berechnen, muss man nun den oben genannten Ausdruck für a_i in die folgende Gleichung(Quotientenkriterium) einsetzen.

$$r = \lim_{n \to \infty} \left(\left| \frac{a_n}{1} \cdot \frac{1}{a_{n+1}} \right| \right)$$

Dadurch erhält man:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left| \frac{(-1)^n \cdot \prod_{j=1}^{n} \Big(1 + 3(j-1)\Big)}{3^n \cdot n!} \cdot \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(-1)^{n+1} \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \Big(1 + 3(j-1)\Big)} \right| \right)$$

Zunächst können wir die $(-1)^n$ Terme entfernen, da uns nur positive Ergebnisse Intessieren. Weiterhin kürzen wir 3^n und 3^{n+1} sowie die Fakultäten.

$$\frac{\prod_{j=1}^{n} \Big(1 + 3(j-1)\Big) \cdot 3 \cdot (n+1)}{\prod_{j=1}^{n+1} \Big(1 + 3(j-1)\Big)} = \frac{\prod_{j=1}^{n} \Big(1 + 3(j-1)\Big) \cdot 3 \cdot (n+1)}{\prod_{j=1}^{n} \Big(1 + 3(j-1)\Big) \cdot (1 + 3((n+1)-1))}$$

Jetzt kürzt man die Produkte miteinander. Sie haben die selben Faktoren. Im Nenner bleibt aber der letzte Faktor übrig.

$$r = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3(n+1)}{1 + 3((n+1)-1)} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+3}{3n+1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{1}{n}} \right) = 1$$