Wohldefiniertheit der Mulltiplikation und Addition auf $\mathbb{Q}$

Es seien M eine Menge und R eine Äquivalnzrelation wiefolgt:

$$\begin{aligned} M &:= (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \\ R &:= \{((a,b),(c,d)) \in M \times M \quad | \quad a \cdot d = c \cdot b\} \end{aligned}$$

Auf der Relation sind folgende Operationen definiert:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{o}{p} := \frac{m \cdot n}{n \cdot p}$$

$$\frac{m}{n} + \frac{o}{p} := \frac{m \cdot p + o \cdot n}{n \cdot p}$$

Es seien $m_1, m_2, o_1, o_2 \in \mathbb{Z}$ und $n_1, n_2, p_1, p_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ beliebig. und für die nächsten Abschnitte so definiert.
Zeigen sie die Operationen sind wohldefiniert.

Multiplikation

Aus $[(m_1, n_1)]_R = [(m_2, n_2)]_R$ und $[(o_1, p_1)]_R = [(o_2, p_2)]_R$ folgt $[(m_1 \cdot o_1, n_1 \cdot p_1)]_R = [(m_2 \cdot o_2, n_2 \cdot p_2)]_R$
Aus den Implikationen ergeben sich folgende Gleichungen.

$$m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \tag{1}$$
$$o_1 \cdot p_2 = o_2 \cdot p_1 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} & m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \qquad | \cdot (o_1 \cdot p_2) \\ \Leftrightarrow \quad & m_1 \cdot n_2 \cdot o_1 \cdot p_2 = m_2 \cdot n_1 \cdot o_1 \cdot p_2 \\ \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad & m_1 \cdot n_2 \cdot o_1 \cdot p_2 = m_2 \cdot n_1 \cdot o_2 \cdot p_1 \\ \Leftrightarrow \quad & m_1 \cdot o_1 \cdot n_2 \cdot p_2 = m_2 \cdot o_2 \cdot n_1 \cdot p_1 \\ \Leftrightarrow \quad & [(m_1 \cdot o_1, n_1 \cdot p_1)]_R = [(m_2 \cdot o_2, n_2 \cdot p_2)]_R \end{aligned}$$

Addition

Aus $[(m_1, n_1)]_R = [(m_2, n_2)]_R$ und $[(o_1, p_1)]_R = [(o_2, p_2)]_R$ folgt $[(m_1 \cdot p_1 + o_1 \cdot n_1, n_1 \cdot p_1)]_R = [(m_2 \cdot p_2 + o_2 \cdot n_2, n_2 \cdot p_2)]_R$
Aus den Implikationen ergeben sich folgende Gleichungen.

$$m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1 \tag{3}$$
$$o_1 \cdot p_2 = o_2 \cdot p_1 \tag{4}$$

Zunächst passen wir die Gleichungen an

$$\begin{aligned} m_1 \cdot n_2 &= m_2 \cdot n_1 \qquad | \cdot (p_1 \cdot p_2) \\ m_1 \cdot n_2 \cdot p_1 \cdot p_2 &= m_2 \cdot n_1 \cdot p_2 \cdot p_1 \\ m_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot n_2 &= m_2 \cdot p_2 \cdot n_2 \cdot p_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o_1 \cdot p_2 &= o_2 \cdot p_1 \qquad | \cdot (n_1 \cdot n_2) \\ o_1 \cdot p_2 \cdot n_1 \cdot n_2 &= o_2 \cdot p_1 \cdot n_2 \cdot n_1 \\ o_1 \cdot n_1 \cdot p_2 \cdot n_2 &= o_2 \cdot n_2 \cdot n_1 \cdot p_1 \end{aligned}$$

Nun addieren wir beide Gleichungen und erhalten folgende Gleichung

$$\begin{aligned} & m_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot n_2 + o_1 \cdot n_1 \cdot p_2 \cdot n_2 = m_2 \cdot p_2 \cdot n_2 \cdot p_1 + o_2 \cdot n_2 \cdot n_1 \cdot p_1 \\ \Leftrightarrow \quad & (m_1 \cdot p_1 + o_1 \cdot n_1) \cdot p_2 \cdot n_2 = (m_2 \cdot p_2 + o_2 \cdot n_2) \cdot n_1 \cdot p_1 \\ \Leftrightarrow \quad & [(m_1 \cdot p_1 + o_1 \cdot n_1, n_1 \cdot p_1)]_R = [(m_2 \cdot p_2 + o_2 \cdot n_2, n_2 \cdot p_2)]_R \end{aligned}$$