# Aufgabe 9

Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$

Zunächst wird der Ausdruck mit Hilfe der 3. binomischen Formel erweitert. Dies ist die Standardvorgehensweise wenn man hässliche Wurzeln vor sich hat.

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2-n+1}-n &= \sqrt{n^2-n+1}-n\cdot\frac{\sqrt{n^2-n+1}+n}{\sqrt{n^2-n+1}+n}\\
&= \frac{\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2-n+1}+n\right)}{\sqrt{n^2-n+1}+n}\\
&= \frac{n^2-n+1-n^2}{\sqrt{n^2-n+1}+n}\\
&= \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck sieht auf den ersten Blick nicht besser aus wenn man ihn mit $\frac{1}{n}$ erweitert wird das ganze wieder schöner

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-n+1)\cdot\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{n^2-n+1}+n\right)\cdot\frac{1}{n}}\\
&= \frac{-1+\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}+1}
\end{aligned}$$

ersetzt man nun das n im Nenner durch $\sqrt{n^2}$ und zieht das in die Wurzel erhält man folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}+1}\\
&= \frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}
\end{aligned}$$

Hiervon kann man nun den Grenzwert bilden

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}\right)=\frac{-1+0}{\sqrt{1-0+0}+1}=-\frac{1}{2}$$