Aufgabe 10

Bestimmen Sie einige Summanden der Taylor-Reihe von $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ um die Stelle $x_0 = 1$

$$Tf(x;x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \qquad \forall x, x_0 \in \mathbb{C} \tag{1}$$

x_0 ist hierbei die Entwicklungsstelle. In der Mathemathik wird gerne x_0 verwendet um eine beliebige Zahl zu verwenden, die aber konstant bleibt

$$\binom{q}{n} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(q-i)}{n!} \qquad \forall q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Ableitungen

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x_0) &= & (x_0)^{\frac{1}{2}} \qquad & f^{(0)}(1) = 1\\
f^{(1)}(x_0) &= & (\frac{1}{2}) \cdot (x_0)^{-\frac{1}{2}} \qquad & f^{(1)}(1) = (\frac{1}{2})\\
f^{(2)}(x_0) &= & (-\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (x_0)^{-\frac{3}{2}} \qquad & f^{(2)}(1) = (\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2})\\
f^{(3)}(x_0) &= & (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (x_0)^{-\frac{5}{2}} \qquad & f^{(3)}(1) = (\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})
\end{aligned}$$

Taylor-Reihe

Es ist nun zu sehen dass $f^{(n)}(1)$ sich durch folgenden Ausdruck berechnen lässt.

$$f^{(n)}(1) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - i\right) \tag{3}$$

Setzen wir nun Gleichung 3 in Gleichung 1 ein erhalten wir folgendenden Ausdruck:

$$Tf(x;1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} - i\right)}{n!} \cdot (x-1)^n \tag{4}$$

Hier ist nun zu erkennen dass der Bruch sich mittels Gleichung 2 vereinfachen lässt, zu

$$Tf(x;1) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \cdot (x-1)^n$$

Hierbei handelt es sich um einen ähnlichen Ausdruck für die Funktionswerte wie bei der Mc-Laurin-Entwicklung der Funktion $f(x) = \sqrt{(x+1)}$ um $x_0 = 0$. Der Unterschied besteht nur darin, dass die Funktion auf der x-Achse verschoben wurde. Der Konvergenzradius kann damit direkt übernommen werden, da dieser nur von den Koeffezienten der Potenzreihe abhängt und diese sich bei Verschiebung und anschließender Entwicklungstelleanpassung nicht verändern.