Aufgabe1

Es sei:
$A := \{1, 17, 53\}$
$B := \{2, 17, 23\}$

a)

Berechne die Vereinigung ($\cup$) von A und B
$A \cup B = \{1, 17, 53\} \cup \{2, 17, 23\} = \{1, 2, 17, 23, 53\}$

b)

Berechne den Schnitt ($\cap$) von A und B
$A \cap B = \{1, 17, 53\} \cap \{2, 17, 23\} = \{17\}$

c)

Berechne das kartesische Produkt ($\times$) von A und B
$A \times B = \{1, 17, 53\} \times \{2, 17, 23\} =$
$\{(1, 2), (1, 17), (1, 23), (17, 2), (17, 17), (17, 23), (53, 2), (53, 17), (53, 23)\}$

d)

Berechne die Differenz ($\setminus$) von A und B
$A \setminus B = \{1, 17, 53\} \setminus \{2, 17, 23\} = \{1, 53\}$

Aufgabe2

a)

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
Die Potenzmenge der leeren Menge ist eine Menge welche die leere Menge als Element besitzt.
$\implies |\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$

b)

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
Wir ersetzen die innere Potenzmenge nun mit der vorherig berechneten Potenzmenge
In Worten bestimmen wir die Potenzmenge der Ein-elementigen Menge mit der leeren Menge als Element.
$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\implies |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))| = |\mathcal{P}(\{\emptyset\})| = 2$
Es gilt im allg.: Die Potenzmenge einer einelementigen Mengen hat zwei Elemente. Einmal die leere Menge und die ganze Menge.

c)

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$
Auch hier ersetzt man die inneren Potenzmengen durch die vorher berechnete Potenzmenge

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{ & \\ & \emptyset, \\ & \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \\ & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ & \}\end{aligned}$$

$\implies |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = |\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})| = 4$

Bemerkung

Es lohnt sich nicht die Potenzmengenfunktion von außen nach innen aufzulösen.
Es gilt im allgemeinen **nicht**: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))\}$
Hier liegt eine verstecke Annahme drin, dass $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ eine einelementige Menge ist.
Eine gültige Aussage lautet:
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))\} \cup \{$alle echten Teilmengen von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \setminus \emptyset\}$
Wenn wir dies weiterauflösen wird das ganze sehr lang und kompliziert
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset, \mathcal{P}(\emptyset)\} \cup \{$alle echten Teilmengen von $\mathcal{P}(\emptyset) \setminus \emptyset\}\} \cup \{$alle echten Teilmengen von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \setminus \emptyset\}$

Aufgabe 3

a)

Bestimme die Kardinalität des Schnitts ($\cap$) von $\{x, y, z\}$ und $\{x, \{y, z\}, \{a\}\}$
$|\{x, y, z\} \cap \{x, \{y, z\}, \{a\}\}| = |\{x\}| = 1$

b)

Bestimme die Kardinalität des kartesischen Produktes von $\mathbb{N} \cap [3, 6)$ und $\{5\}$
$\mathbb{N} \cap [3, 6) = \{3, 4, 5\}$
$\{3, 4, 5\} \times \{5\} = \{(3, 5), (4, 5), (5, 5)\}$
$|\{(3, 5), (4, 5), (5, 5)\}| = 3$
Die Menge besteht aus 3 2-Tupeln

Aufgabe 4

$$M := \{1,2,3,4,5\}$$
$$R := \{(1,2),(1,4),(2,4),(3,2),(3,4),(3,5),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

reflexiv/irreflexiv

Die Relation ist irreflexiv, da für alle Elemente m in M (m,m) nicht in der Relation R ist und somit kann diese nicht reflexiv sein. Reflexiv und irreflexiv schließen sich gegenseitig aus. Eine Relation ist entweder reflexiv oder irreflexiv, bzw keines der beide.

Es gilt: $\forall m \in M : (m,m) \notin R$

symetrisch

Die Relation ist nicht symetrisch da $(2,4) \in R$ gilt, aber $(4,2) \notin R$ ist, was von der Symetrie gefordert ist.

antisymetrisch

Die Relation ist nicht antisymetrisch da $\{(3,5),(5,3)\} \subset R$ gilt. Antisymetrie fordert, dass maximal nur eines der beiden 2-Tupel in R liegt.

transitiv

Die Relation ist nicht transitiv da $\{(3,5),(5,3)\} \subset R$ gilt aber $(3,3) \notin R$

total

Die Relation ist nicht total, da Totalität Reflexivität fordert und die Relation wie oben beschrieben irreflexiv ist.

Aufgabe 5

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists z \in \mathbb{N} : y = z \cdot x\}$$

Halbordnug

Reflexiv

Die Relation ist reflexiv da für z=1 gilt $(x, x) \in R \quad \forall x \in \mathbb{N}$

Antisymetrie

Seien $(m_1, m_2), (m_2, m_1) \in R$ Dadurch folgt dass zwei ganze Zahlen mit denen gilt:

$$m_2 = z_1 \cdot m_1 \quad m_1 = z_2 \cdot m_2$$

Setzt man nun die rechte Gleichung in die linke ein erhält man folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} m_2 &= z_1 \cdot z_2 \cdot m_2 \quad | : m_2 \\ 1 &= z_1 \cdot z_2 \end{aligned}$$

Da aber z_1 und z_2 ganze Zahlen sind, muss $1 = z_1 = z_2$ gelten und daher $m_2 = m_1$. Was der Definition der Antisymetrie entspricht.

Transitivität

Seien $(m_1, m_2), (m_2, m_3) \in R$ Daraus folgen folgende Aussagen:

$$\begin{aligned} m_2 &= z_1 \cdot m_1 \\ m_3 &= z_2 \cdot m_2 \end{aligned}$$

Setzt man nun die obere Gleichung in die untere ein erhält man

$$m_3 = z_2 \cdot z_1 \cdot m_1$$

Wenn man zwei ganze Zahlen miteinander multipliziert ergibt dies eine weitere ganze Zahl (förmlich ausgedrückt: Die ganzen Zahlen sind unter Multiplikation geschlossen) und somit ist die Transitivität erfüllt.

Die Relation ist somit eine **Halbordnung**.

Totalordnung

Die Halbordnung wurde schon bewiesen. Es fehlt nur noch die Totalität.

Totalität.

Die Relation ist nicht total,da weder (5,3) noch (3,5) Element von R ist. Somit ist die Relation **keine Totalordnung**