Aufgabe 5 L'Hôpital

Bestimmen Sie den Grenzwert mit L'Hôpital
Die Regel von L'Hôpital lautet:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x^r} = \frac{-\infty}{0}$$

$$\stackrel{\text{LH}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \qquad \stackrel{\text{LH}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{1} = 3 \qquad \stackrel{\text{LH}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{rx^{r-1}} = \frac{1}{rx^r} = \infty$$

$$\lim_{x\to x^+} x^x = 0^0$$

Aus 0^0 ist keine Aussage möglich. Wenn wir jedoch die Funktion anders hinschreiben ist eine Aussage möglich

$$\begin{aligned} x^x &= id \circ x^x \\ x^x &= f \circ f^{-1} \circ x^x \\ x^x &= \exp(\ln(x^x)) \\ x^x &= e^{\ln(x^x)} \\ x^x &= e^{x\ln(x)} \end{aligned}$$

von diesem Ausdruck kann man nun den Grenzwert berechnen

$$\Rightarrow \lim_{x\to x^+} x^x = \lim_{x\to x^+} e^{x\ln(x)}$$

Da die Exponentialfunktion eine stetige Funktion ist und stetige Funktionen den Grenzwert erhalten, können wir "limïn den Exponenten schreiben und den Grenzwer von $x\ln(x)$ betrachten

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x^+} e^{x\ln(x)} &= \exp(\lim_{x\to x^+} x\ln(x)) \\ \Rightarrow \lim_{x\to x^+} x\ln(x) &= \lim_{x\to x^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \frac{-\infty}{\infty} \\ \stackrel{\text{LH}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{-1} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^x &= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$