## Aufgabe 4

Bei allen Aufgaben handelt es sich um eine geometrische Reihe weswegen folgende Gleichung verwendet werden kann:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \tag{1}$$

Achtung $a_0$ bezeichnet hier den **ersten** Summand der jeweiligen Reihe.

### a)

Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i\right)$

Der erste Summand dieser Reihe ist $a_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ und $q = \frac{1}{3}$ Dadurch ergibt sich für die Aufgabe mit Gleichung (1):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}\right)\\
&= 1\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

### b)

Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\sqrt{a}\right)^i\right)$ für $0 \le a < 1$

Der erste Summand dieser Reihe ist $a_2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ und $q = \sqrt{a}$ Dadurch ergibt sich für die Aufgabe mit Gleichung (1):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=2}^{n}\left(\sqrt{a}\right)^i\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a\cdot\frac{1-\left(\sqrt{a}\right)^n}{1-\sqrt{a}}\right)$$

Da die Wurzel einer Zahl kleiner 1 auch kleiner 1 ist strebt $\sqrt{a}^n$ für $n \to \infty$ gegen 0

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=2}^{n}\left(\sqrt{a}\right)^i\right) = \frac{a}{1-\sqrt{a}}$$

**c)**

Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a^i+b^i\right)\right)$ für $-1<a,b<1$

Zunächst schreiben wir die Summe auf und Ordnen diese danach geschickt an

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(a^i+b^i\right) &= a^1+b^1+a^2+b^2+\cdots+a^n+b^n \\
&= \underbrace{a^1+a^2+\cdots+a^n}_{\sum_{i=1}^{n}a^i}+\underbrace{b^1+b^2+\cdots+b^n}_{\sum_{i=1}^{n}b^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}a^i+\sum_{i=1}^{n}b^i
\end{aligned}
$$

Wir haben nun zwei geometrische Reihen deren Grenzwerte wir nun mit Gleichung (1) bestimmen können. Die ersten Summanden sind $a_1=a^1=a$ und $b_1=b^1=b$ sowie $q_a=a$ und $q_b=b$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a^i+b^i\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a^i\right)\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(b^i\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(a\cdot\frac{1-a^n}{1-a}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(b\cdot\frac{1-b^n}{1-b}\right)
\end{aligned}
$$

Aus der Aufgabe geht hervor, dass $|a|,|b|<1$ ist. Somit streben $a^n$ und $b^n$ für $n\to\infty$ gegen 0.

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a^i+b^i\right)\right)=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}
$$