Aufgabe 6

Monotonie

Für diese Aufgabe werden zwei mathematische "Tricks" benötigt um diese zu lösen.
Im Folgenden steht die allgemeine Beschreibung der Folge für a_n und a_{n+1}.

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)-2} + \frac{1}{2(n+1)-1} + \frac{1}{2(n+1)}$$
$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Durch geschicktes Übereinanderschreiben erkennt man, dass sich die Folgenglieder Terme teilen. Dies ist der **erste Trick** (Übereinanderschreiben) und nutzen diesen nun prompt aus wenn wir $a_{n+1} - a_n$ berechnen.
Man erkennt dass sich fast alle Terme aufheben. Es bleibt dann folgender Ausdruck übrig

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

Zu sehen ist, dass von a_{n+1} nur die letzen beiden Terme und von a_n nur der erste Term übrig bleibt. Nun wird alles auf einen Nenner gebracht.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{2(n+1)}{2(n+1)(2n+1)} - \frac{2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}$$
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2+2n+1-(4n+2)}{2(n+1)(2n+1)}$$
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

Mit dieser Gleichung können wir nun argumentieren, dass die Folge streng monoton steigt. Da sie für alle natürliche Zahlen immer positiv ist.

Beschränktheit

Der **zweite Trick** ist es die einzelnen Terme der Reihe nach oben abzuschätzen.
Der größte Term in der Reihe ist immer der erste mit $\frac{1}{n+1}$

Wir schätzen nun die Reihe $R_1 = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$ (Die Reihe welche unsere Folgenglieder erzeugt) mit der Reihe $R_2 = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1}$ ab.

$$R_1 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}$$
$$R_2 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1}$$

Für R_2 gilt nun dass wir den Term $\frac{1}{n+1}$, $(2n - (n+1) + 1)$ mal aufsummieren.
Dadurch lässt sich R_2 folgend aufschreiben:

$$R_2 = \frac{1}{n+1}(2n - (n+1) + 1) = \frac{1}{n+1}(n) = \frac{n}{n+1}$$

Dieser Ausdruck ist immer kleiner als 1 somit ist unsere Folge mit 1 nach oben beschränkt.