TP n°2 :

Minimisation sous contrainte égalité

Objectifs du TP :

- Formuler un problème d'optimisation sous contraintes-égalités
- Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour déterminer les points critiques d'un problème d'optimisation sous contraintes-égalités
- Mettre en œuvre la méthode du gradient à pas optimal et la comparer à la méthode du gradient à pas fixe.
- Utiliser les fonctions `root` et `minimize` de la bibliothèque `scipy.optimize`

Exercice 1 :

Dans le repère $(0, u, v)$, on considère la parabole P_1 d'équation $u + \frac{1}{2}(v-2)^2 - 1 = 0$ et la parabole P_2 d'équation $v - (u-3)^2 - 2 = 0$. Soient M_1, un point appartenant à P_1 et M_2 un point appartenant à P_2. On souhaite déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2 de façon à minimiser la distance entre M_1 et M_2.

- Faire une figure représentant les données du problème, puis mettre le problème sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes-égalités (variables de décision, fonction coût, contraintes).

- Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour résoudre le problème. Le système d'équations obtenu sera résolu numériquement par la fonction `scipy.optimize.root`.

- Faire une figure montrant la solution et les élements géométriques remarquables.

Exercice 2 :

On reprend la fonction du TP 1 , $J(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 2(x_1^2 - x_2)^2$, mais on souhaite maitenant mettre en œuvre la méthode du gradient à pas optimal pour déterminer le minimum de cette fonction.

- Une itération de la méthode du gradient à pas optimal consiste à déterminer $(x_{1,n+1}, x_{2,n+1})$ le minimum de J dans la direction du gradient de J au point $(x_{1,n}, x_{2,n})$, solution approchée en début d'itération. Formuler ce problème comme un problème de minimisation sous contrainte-égalité.

- Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour résoudre le problème posé ci-dessus (1 itération de la méthode du gradient optimal). Vous pouvez utiliser la fonction `scipy.optimize.root` pour la résolution du système d'équations obtenu. Attention, la fonction `root` peut ne pas réussir à résoudre le système. Comme pour toute méthode numérique, il faut donc tester l'indicateur de succès de la fonction (voir documentation) avant d'en accepter les résultats.

- Faire une figure montrant 1 itération de la méthode du gradient optimal et les élements géométriques remarquables.

- Enchainer quelques itérations de la méthode du gradient optimal et faire une figure montrant le résultat et les élements géométriques remarquables.

- Maintenant que vous savez comment ça marche, utiliser la fonction `scipy.optimize.minimize` pour ne plus avoir à implémenter d'algorithme de recherche de minimum !