

Работа 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Шарапов Денис, Б05-005

Содержание

| | | |
|-----|--|---|
| 1 | Аннотация | 2 |
| 2 | Теоретические сведения | 2 |
| 2.1 | Спектральное разложение | 2 |
| 2.2 | Разложение сложных сигналов на периодические колебания | 2 |
| 2.3 | Периодическая последовательность прямоугольных импульсов | 3 |
| 2.4 | Периодическая последовательность цугов | 3 |
| 2.5 | Амплитудно-модулированные колебания | 3 |
| 3 | Результаты измерений и обработка данных | 4 |
| 3.1 | Исследование спектра периодической последовательности прямоуголь- ных импульсов | 4 |
| 3.2 | Исследование спектра периодической последовательности цугов гармо- нических колебаний | 5 |
| 3.3 | Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по ам- плитуде. | 6 |
| 4 | Вывод | 7 |

1 Аннотация

Цель работы: Изучение спектрального состава периодических электрических сигналов.

В работе используются: анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов, генератор сигналов специальной формы, осциллограф.

2 Теоретические сведения

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности пугов и амплитудно-модулированных гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью промышленного анализатора спектра и сравниваются с рассчитанными теоретически.

2.1 Спектральное разложение

Рассмотрим функцию вида

$$f(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos \omega_n t - \alpha_n,$$

где A_n , ω_n , α_n — постоянные величины. Множество пар $(\omega_1, A_1), \dots, (\omega_n, A_n)$ называется спектром функции $f(t)$. N может быть конечным или бесконечным.

2.2 Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если сигнал четен относительно $t = 0$, так что $f(t) = f(-t)$ в тригонометрической записи остаются только косинусные члены. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь t_1 — время, с которого начинается отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n :

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}. \quad (4)$$

2.3 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Введем некоторые величины:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (5)$$

Здесь V_0 — амплитуда сигнала. Поскольку функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть у нас τ кратно T . Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (6)$$

2.4 Периодическая последовательность цугов

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right).$$

2.5 Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (7)$$

Коэффициентом m называется *глубина модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1-m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1+m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \quad (8)$$

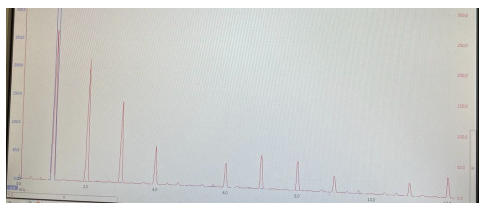
С помощью тригонометрического преобразования уравнения (8) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t. \quad (9)$$

3 Результаты измерений и обработка данных

3.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Установим прямоугольные колебания с $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и длительностью импульса $\tau = 100$ мкс. Получим на экране спектр сигнала и изучим его поведение при изменении τ и $f_{\text{повт}}$.



$f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 100$ мкс



$f_{\text{повт}} = 2$ кГц, $\tau = 100$ мкс

Опытным путём получаем, что при увеличении τ уменьшается $\Delta\nu$, а при увеличении $f_{\text{повт}}$ увеличивается расстояние между пиками.

Проведём измерения зависимости ширины спектра от длительности импульса при увеличении τ от 40 до 200 мкс при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц. Результаты измерений внесены в таблицу 1.

| τ , мкс | $\Delta\nu$, кГц | $1/\tau$, мкс ⁻¹ · 10 ² |
|--------------|-------------------|--|
| 40 | 24 | 2,50 |
| 60 | 16 | 1,67 |
| 80 | 12 | 1,25 |
| 100 | 9 | 1,00 |
| 120 | 8 | 0,83 |
| 140 | 6 | 0,71 |
| 160 | 5 | 0,63 |
| 180 | 4,2 | 0,56 |
| 200 | 3,8 | 0,50 |

Таблица 1: результаты измерений зависимости $\Delta\nu$ от τ

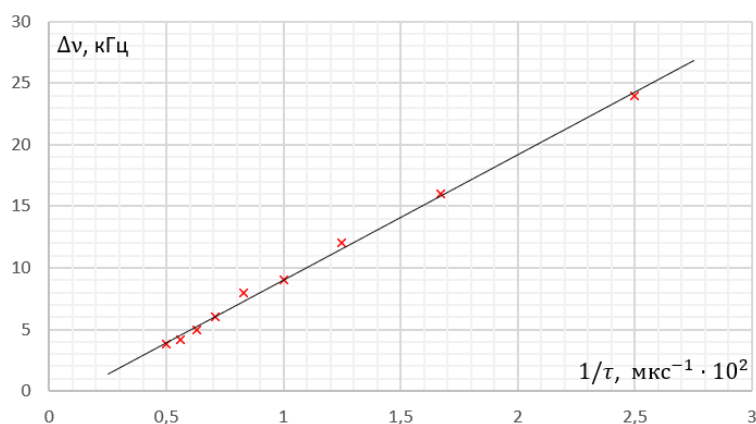
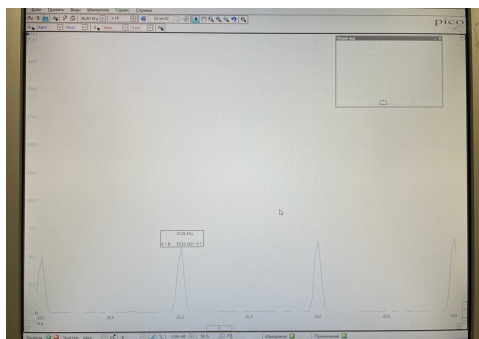


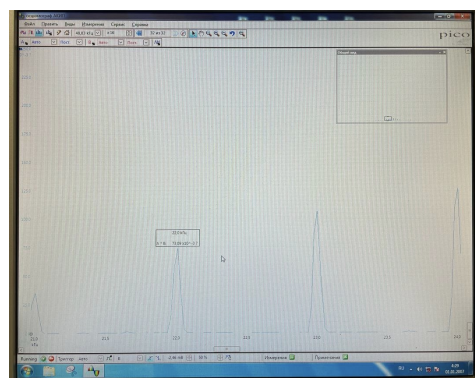
Рис. 1: график зависимости ширины спектра от длительности импульса

3.2 Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

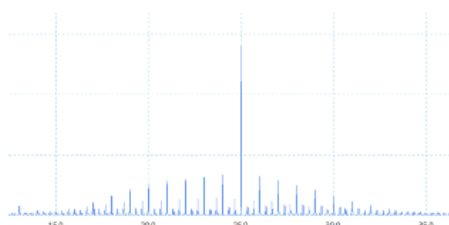
Проанализируем, как изменится вид спектра при увеличении длительности импульса вдвое от 100 до 200 мкс.



$\tau = 100$ мкс, локально



$\tau = 200$ мкс, локально



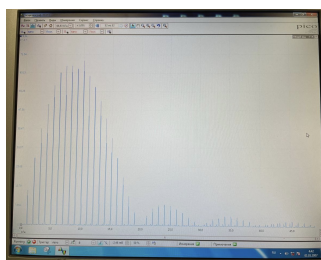
$\tau = 100$ мкс, общий вид



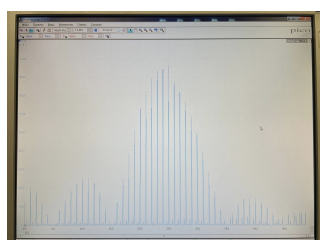
$\tau = 200$ мкс, общий вид

Из данных видно, что при изменении τ значение $\Delta\omega$ изменяется обратно пропорционально.

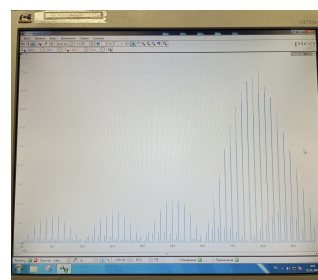
Установим длительность импульса $\tau = 100$ мкс. Проанализируем, как меняется картина спектра при изменении несущей частоты ν_0 .



$\nu_0 = 10$ кГц



$\nu_0 = 25$ кГц

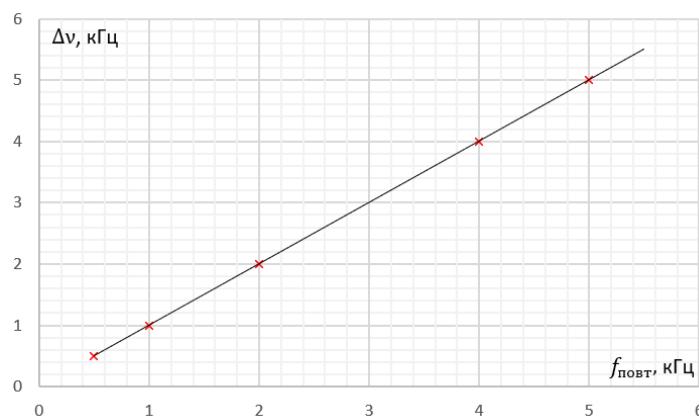


$\nu_0 = 40$ кГц

Из данных видно, что при изменении ν_0 картина смещается без изменения расстояния между спектральными компонентами.

Определим расстояние $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами для разных частот повторения импульсов $f_{\text{повт}}$. Проведём измерения для $f_{\text{повт}} = 0,5, 1, 2, 4, 5$ кГц. Результаты измерений занесём в таблицу 2.

| $f_{\text{повт}}, \text{кГц}$ | $\delta\nu, \text{кГц}$ |
|-------------------------------|-------------------------|
| 0,5 | 0,5 |
| 1,0 | 1,0 |
| 2,0 | 2,0 |
| 4,0 | 4,0 |
| 5,0 | 5,0 |

Таблица 2: результаты измерений $\delta\nu$ Рис. 2: график зависимости расстояния $\delta\nu$ от частоты повторения $f_{\text{повт}}$

3.3 Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде.

Меняя двойную амплитуду сигнала от 0,2 до 2 В, измерим для каждого значения максимальной A_{max} и минимальную A_{min} амплитуды сигналов модулированного колебания. После чего рассчитаем m и k :

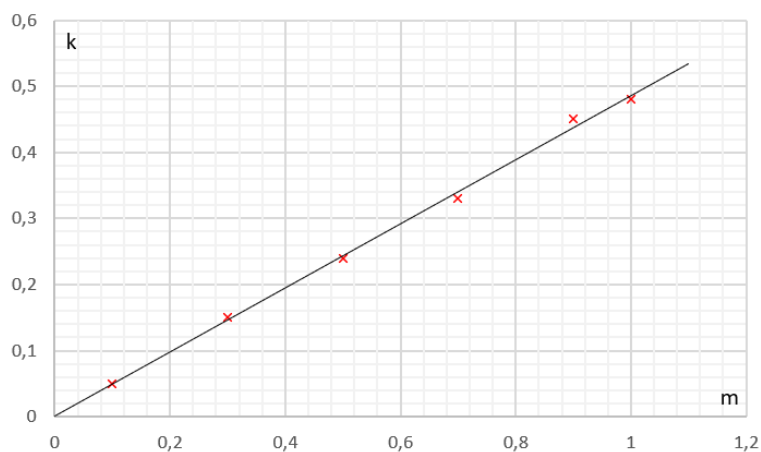
$$m = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}},$$

$$k = \frac{A_{\text{бок}}}{A_{\text{осн}}}.$$

Результаты представлены в таблице 3.

| $(A_{\text{max}} - A_{\text{min}}), \text{В}$ | $A_{\text{бок}}, \text{В}$ | m | k |
|---|----------------------------|-----|------|
| 0,2 | 0,016 | 0,1 | 0,05 |
| 0,6 | 0,050 | 0,3 | 0,15 |
| 1,0 | 0,080 | 0,5 | 0,24 |
| 1,4 | 0,100 | 0,7 | 0,33 |
| 1,8 | 0,140 | 0,9 | 0,45 |
| 2,0 | 0,155 | 1,0 | 0,48 |

Таблица 3: результаты измерения коэффициентов m и k

Рис. 3: график зависимости коэффициента k от m

Из МНК получим коэффициент наклона прямой μ :

$$\mu = \frac{k}{m} = 0,48 \pm 0,02.$$

4 Вывод

В данной работе было изучено понятие спектра и спектрального анализа, а также был изучен спектральный состав периодических электрических сигналов.

Также в ходе выполнения работы

1. был исследован спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов. С помощью графика (рис. 1) было подтверждено соотношение неопределенностей;
2. был исследован спектр периодической последовательности цугов гармонических колебаний. С помощью графика (рис. 2) было установлено, что погрешность результатов (из наклона прямой) совпала с погрешностью генератора ($\pm 0,5$ Гц);
3. был исследован спектр гармонических сигналов, модулированных по амплитуде. С помощью графика (рис. 3) была исследована глубина модуляции m .