Работа 3.6.1
Спектральный анализ электрических сигналов

Шарапов Денис, Б05-005

Содержание

1 Аннотация 2
2 Теоретические сведения 2
  2.1 Спектральное разложение 2
  2.2 Разложение сложных сигналов на периодические колебания 2
  2.3 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов 3
  2.4 Периодическая последовательность цугов 3
  2.5 Амплитудно-модулированные колебания 3
3 Результаты измерений и обработка данных 4
  3.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов 4
  3.2 Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний 5
  3.3 Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде. 6
4 Вывод 7

1 Аннотация

Цель работы: Изучение спектрального состава периодических электрических сигналов

В работе используются: анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов, генератор сигналов специальной формы, осциллограф.

2 Теоретические сведения

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности пугов и амплитудно-модулированных гамонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаюся с помощью промышленного анализатора спектра и справниваются с рассчитанными теоретически.

2.1 Спектральное разложение

Рассмотрим функцию вида

$$f(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos \omega_n t - \alpha_n,$$

где A_n, ω_n, α_n — постоянные величины. Множество пар $(\omega_1, A_1), \ldots, (\omega_n, A_n)$ называется спектром функции $f(t)$. N может быть конечным или бесконечным.

2.2 Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\Omega_1 t\right) + b_n \sin\left(n\Omega_1 t\right)\right] \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\Omega_1 t - \psi_n\right). \tag{2}$$

Если сигнал четен относительно $t = 0$, так что $f(t) = f(-t)$ в тригонометрической записи остаются только косинусные члены. Для нечетной наоборот.
Коэффициенты определяются по формуле

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos\left(n\Omega_1 t\right) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin\left(n\Omega_1 t\right) dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь t_1 — время, с которого начинается отсчет.
Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}. \tag{4}$$

2.3 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Введем некоторые величины:

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

где T — период повторения импульсов.
Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t)\, dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \tag{5}$$

Здесь V_0 - амплитуда сигнала. Поскольку функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть у нас τ кратно T. Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедится при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \tag{6}$$

2.4 Периодическая последовательность цугов

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t)\, dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1)\dfrac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\dfrac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1)\dfrac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\dfrac{\tau}{2}} \right).$$

2.5 Амплитудно-модулированные колебания

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0 \left[1 + m\cos\Omega t\right] \cos\omega_0 t. \tag{7}$$

Коэффициентом m называется *глубина модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1-m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1+m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \tag{8}$$

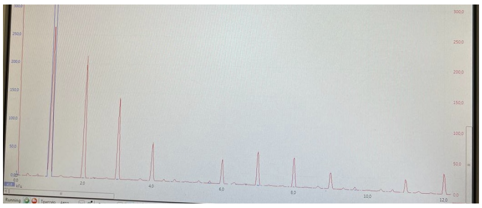
С помощью тригонометрического преобразования уравнения (8) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos\omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)\, t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)\, t. \tag{9}$$

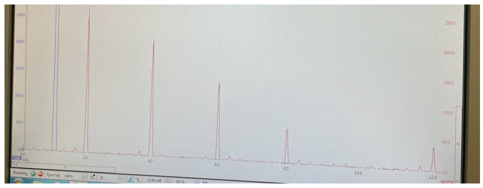
3 Результаты измерений и обработка данных

3.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Установим прямоугольные колебания с $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и длительностью импульса $\tau = 100$ мкс. Получим на экране спктр сигнала и изучим его поведение при изменении τ и $f_{\text{повт}}$.



$f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 100$ мкс



$f_{\text{повт}} = 2$ кГц, $\tau = 100$ мкс

Опытным путём получаем, что при увеличении τ уменьшается $\Delta\nu$, а при увеличении $f_{\text{повт}}$ увеличивается расстояние между пиками.

Проведём измерения зависимости ширины спектра от длительности импульса при увеличении τ от 40 до 200 мкс при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц. Результаты измерений внесены в таблицу 1.

τ, мкс	$\Delta\nu$, кГц	$1/\tau$, мкс$^{-1} \cdot 10^2$
40	24	2,50
60	16	1,67
80	12	1,25
100	9	1,00
120	8	0,83
140	6	0,71
160	5	0,63
180	4,2	0,56
200	3,8	0,50

Таблица 1: Результаты измерений зависимости $\Delta\nu$ от τ

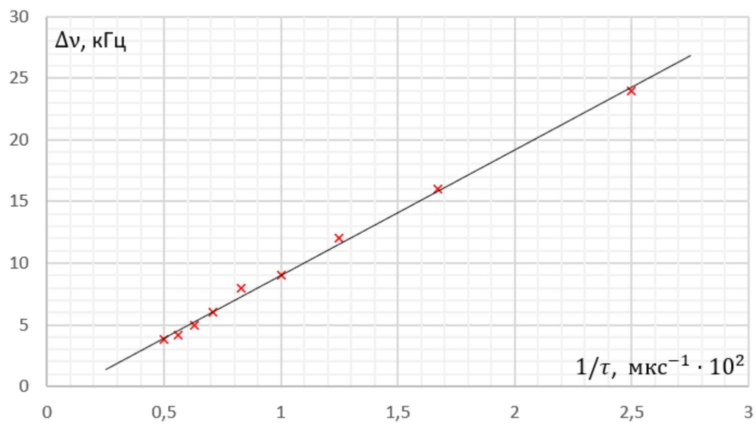
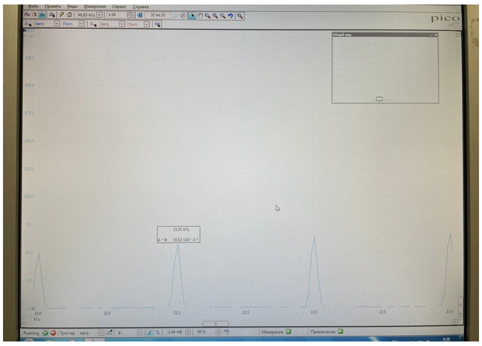


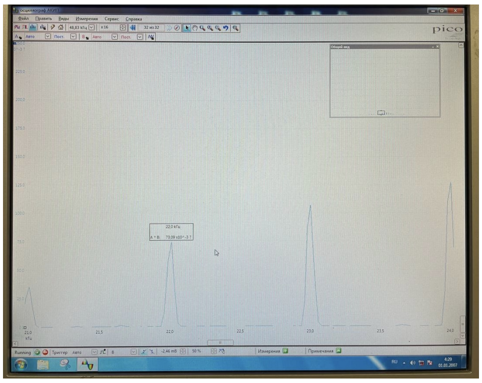
Рис. 1: График зависимости ширины спектра от длительности импульса

3.2 Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

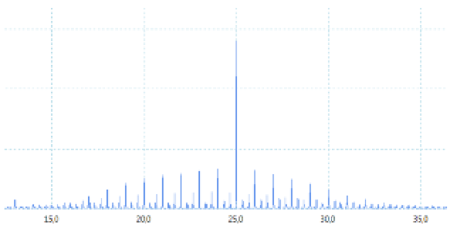
Проанализируем, как изменится вид спектра при увеличении длительности импульса вдвое от 100 до 200 мкс.



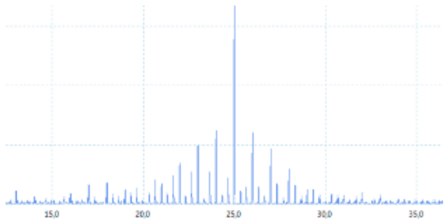
$\tau = 100$ мкс, локально



$\tau = 200$ мкс, локально



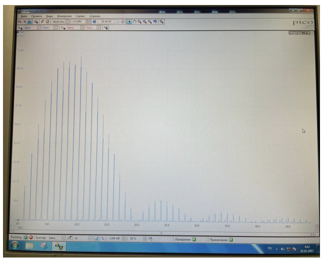
$\tau = 100$ мкс, общий вид



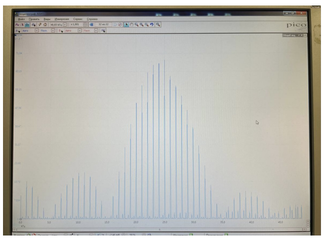
$\tau = 200$ мкс, общий вид

Из данных видно, что при изменении τ значение $\Delta\omega$ изменяется обратно пропорционально.

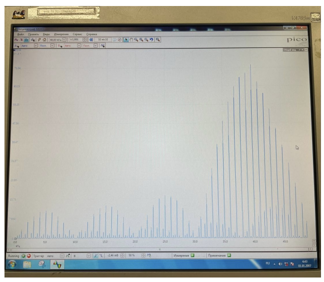
Установим длительность импульса $\tau = 100$ мкс. Проанализируем, как меняется картина спектра при изменении несущей частоты ν_0.



$\nu_0 = 10$ кГц



$\nu_0 = 25$ кГц



$\nu_0 = 40$ кГц

Из данных видно, что при изменении ν_0 картина смещается без изменения расстояния между спектральными компонентами.

Определим расстояние $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами для разных частот повторения импульсов $f_{\text{повт}}$. Проведём измерения для $f_{\text{повт}} = 0,5, 1, 2, 4, 5$ кГц. Результаты измерений занесём в таблицу 2.

$f_{\text{повт}}$, кГц	$\delta\nu$, кГц
0,5	0,5
1,0	1,0
2,0	2,0
4,0	4,0
5,0	5,0

Таблица 2: Результаты измерений $\delta\nu$

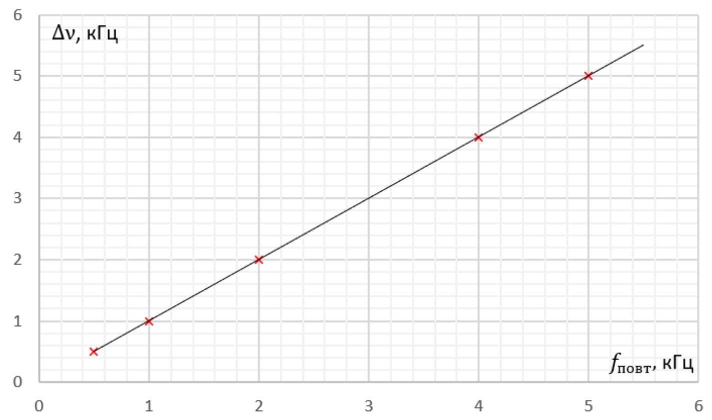


Рис. 2: График зависимости расстояния $\delta\nu$ от частоты повторения $f_{\text{повт}}$

3.3 Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде.

Меняя двойную амплитуду сигнала от 0,2 до 2 В, измерим для каждого значения максимальную A_{max} и минимальную A_{min} амплитуды сигналов модулированного колебания. После чего рассчитаем m и k:

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}},$$

$$k = \frac{A_{\text{бок}}}{A_{\text{осн}}}.$$

Результаты представлены в таблице 3.

$(A_{max} - A_{min})$, В	$A_{\text{бок}}$, В	m	k
0,2	0,016	0,1	0,05
0,6	0,050	0,3	0,15
1,0	0,080	0,5	0,24
1,4	0,100	0,7	0,33
1,8	0,140	0,9	0,45
2,0	0,155	1,0	0,48

Таблица 3: Результаты измерения коэффициентов m и k

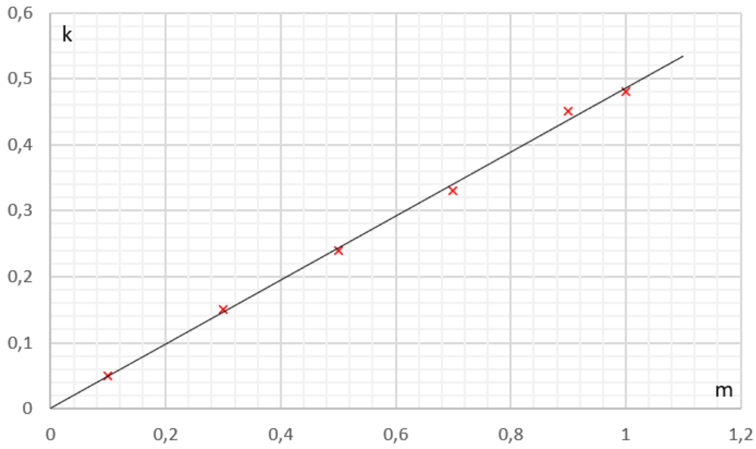


Рис. 3: График зависимости коэффициента k от m

Из МНК получим коэффициент наклона прямой μ:

$$\mu = \frac{k}{m} = 0,48 \pm 0,02.$$

4 Вывод