ТРЯП. Домашнее задание № 2

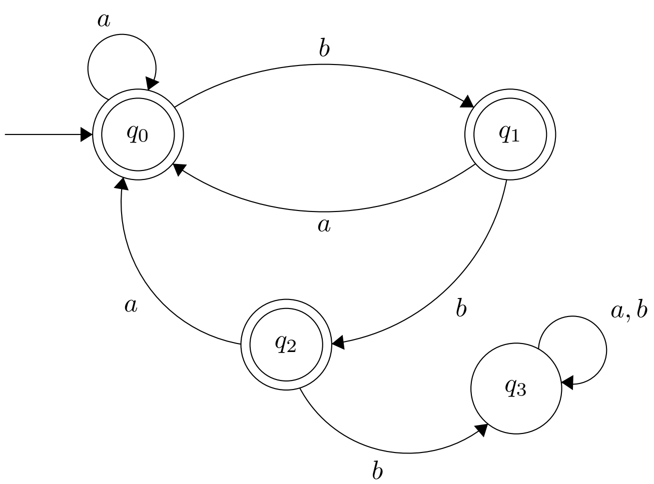
Шарапов Денис, Б05-005

Задача 1

Язык $T \subseteq \{a, b\}^*$ состоит из всех слов, в которых нет трёх букв b подряд. Построить конечный автомат, принимающий T.

Решение.

Построим ДКА $L(\mathcal{A})$, принимающий язык T.



Утверждение. $T \subseteq L(\mathcal{A})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $w \in T$. Докажем утверждение по индукции числа n букв a в слове w. База индукции $n = 0$:

- $w = \varepsilon$: $(q_0, w) = (q_0, \varepsilon)$;
- $w = b$: $(q_0, w) = (q_0, b) \vdash (q_1, \varepsilon)$;
- $w = bb$: $(q_0, w) = (q_0, bb) \vdash (q_2, \varepsilon)$;

Предположение индукции: пусть верно для $n = k$: $|x|_a = k$, $x \in T$, $x \in L(\mathcal{A})$. Переход индукции $n = k + 1$: рассмотрим слово $w \in T$, $|w|_a = k + 1$.

Без ограничения общности, пусть слово x заканчивается на букву a (это можно потребовать, т. к., если оно заканчивается на b или bb, то по построению автомата попадём в состояния q_1 или q_2 соответственно, а они являются принимающими, и поэтому для них рассуждения аналогичные). Представим слово w следующими способами:

1. $w = xa$: $(q_0, w) = (q_0, xa) \vdash^* (q_0, a) \vdash (q_0, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$;
2. $w = xab$: $(q_0, w) = (q_0, xab) \vdash^* (q_0, ab) \vdash (q_0, b) \vdash (q_1, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$;
3. $w = xabb$: $(q_0, w) = (q_0, xabb) \vdash^* (q_0, abb) \vdash (q_0, bb) \vdash (q_1, b) \vdash (q_2, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$.

Таким образом, требуемое утверждение доказано. □

Утверждение. $L(\mathcal{A}) \subseteq T$.

Доказательство. От противного. Рассмотрим слово $w \in L(\mathcal{A})$. Пусть в слове w встретилась непрерывная последовательность из $k > 2$ букв b подряд. Заметим, что построенный автомат — ДКА, поэтому путь по графу определён однозначно.

Представим слово w в виде $w = uv$, где u — слово, в котором нет трёх букв b подряд (т. е. $u \in T$); v — суффикс слова w, в котором есть непрерывная последовательность из трёх букв b. Без ограничения общности, пусть u заканчивается на букву a (можно потребовать по тем же причинам, что и в доказательстве прошлого утверждения). Тогда

$$(q_0, w) = (q_0, uv) \vdash (q_0, v).$$

На следующих тактах автомат дойдёт до непрерывной последовательности букв b. Пусть, без ограничения общности, последовательность букв b началась в состоянии q_0. Тогда на следующих трёх тактах автомат перейдёт в состояние q_3, где и завершит свою работу после обработки оставшейся части слова. Поэтому слово w не принимается автоматом.

В других случаях (если число букв b, идущих подряд, меньше трёх) автомат перейдёт в одно из принимающих состояний: $q_0, q_1, q_2 \in F$.

Таким образом, требуемое утверждение доказано. □

Задача 2

Автоматы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ заданы диаграммами. Выполнить следующие задания.

1. Автомат задан через граф переходов. Запишите определение автомата в виде $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Опишите элементы каждого множества.
2. Является ли автомат детерминированным?
3. Описать последовательность конфигураций автомата $\mathcal{A}$ при обработке слова $w = 011001$. Верно ли, что $w \in L(\mathcal{A})$?
4. Принимает ли автомат $\mathcal{B}$ слово $v = 0101001$?
5. Укажите по одному слову, принадлежащему $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$ и по одному слову, не принадлежащему $L(\mathcal{A})$, $L(\mathcal{B})$. Все 4 слова должны быть различными.

Решение.

1. $\mathcal{A}$: (Q) $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ — множество состояний;
   (Σ) $\Sigma = \{0, 1\}$ — алфавит;
   (δ) $\delta(q_0, 0) = q_0$, $\delta(q_0, 1) = q_1$;
   $\delta(q_1, 0) = q_2$, $\delta(q_1, 1) = q_0$;
   $\delta(q_2, 0) = q_1$, $\delta(q_2, 1) = q_2$;
   (q_0) q_0 — начальное состояние;
   (F) $F = \{q_1\}$ — множество принимающих состояний.

   $\mathcal{B}$: (Q) $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ — множество состояний;
   (Σ) $\Sigma = \{0, 1\}$ — алфавит;
   (δ) $\delta(q_0, 0) = q_0$, $\delta(q_0, 1) = q_1$;
   $\delta(q_1, 0) = \{q_0, q_2\}$, $\delta(q_1, 1) = \varnothing$;
   $\delta(q_2, 0) = q_1$, $\delta(q_2, 1) = q_2$;
   (q_0) q_0 — начальное состояние;
   (F) $F = \{q_1\}$ — множество принимающих состояний.

2. $\mathcal{A}$: Да, является по определению детерминированного автомата, т. к. нет переходов по ε–слову и для каждого состояния и для каждой буквы алфавита переход по этой букве осуществляется не более одного раза.

   $\mathcal{B}$: Нет, не является по определению детерминированного автомата, т. к. есть более одного перехода по одному состоянию: $\delta(q_1, 0) = \{q_0, q_2\}$.

3. $w = 011001$, автомат $\mathcal{A}$:

$$(q_0, 011001) \vdash (q_0, 11001) \vdash (q_1, 1001) \vdash (q_0, 001) \vdash (q_0, 01) \vdash (q_0, 1) \vdash (q_1, \varepsilon),$$

   q_1 — принимающее состояние, поэтому $w \in L(\mathcal{A})$.

4. По определению автомат $\mathcal{B}$ принимает слово, если существует последовательность конфигураций такая, что автомат $\mathcal{B}$ при обработке данного слова заканчивает работу в принимающем состоянии и с пустой лентой. Рассмотрим слово $v = 0101001$ и автомат $\mathcal{B}$:

$$(q_0, 0101001) \vdash (q_0, 101001) \vdash (q_1, 01001) \vdash (q_0, 1001) \vdash (q_1, 001) \vdash (q_0, 01) \vdash (q_0, 1) \vdash (q_1, \varepsilon),$$

   q_1 — принимающее, поэтому автомат $\mathcal{B}$ принимает слово v.

5. $w_1 = 0001 \in L(\mathcal{A}), w_2 = 101 \notin L(\mathcal{A})$, $w_3 = 10101 \in L(\mathcal{B})$, $w_4 = 10 \notin L(\mathcal{B})$.

□

Задача 3

Построить ДКА, распознающий язык $\Sigma^* aab \Sigma^*$.

Решение.

Воспользуемся алгоритмом построения ДКА по РВ. Вычисления приведены на рисунке ниже:

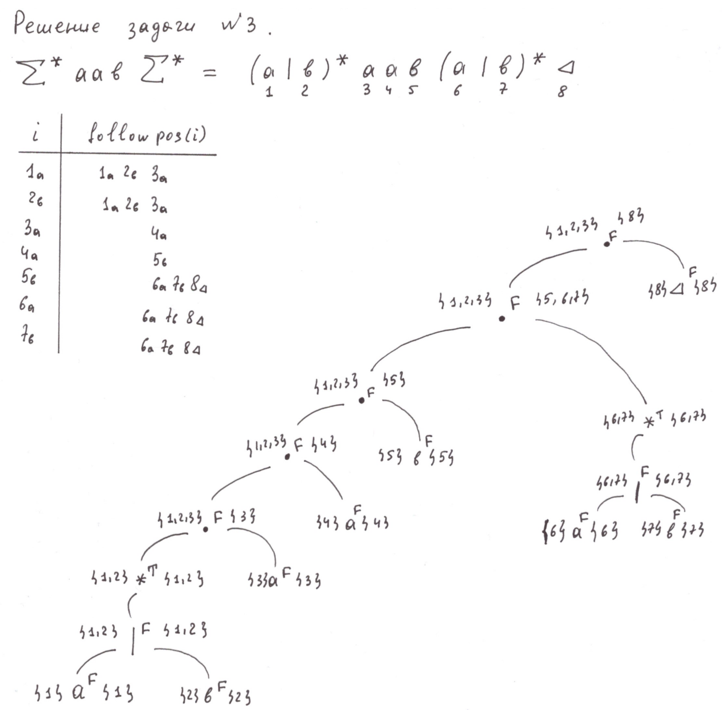
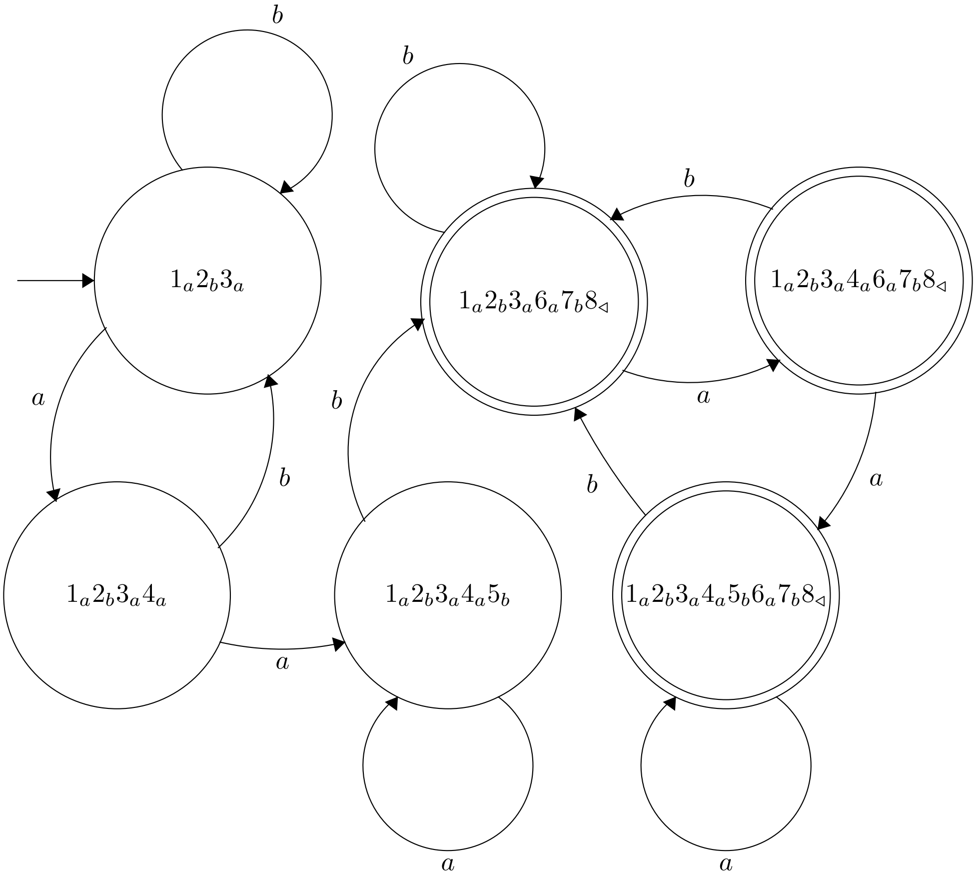


Рисунок к задаче 3

Теперь построим ДКА по полученной таблице (на рисунке):



Задача 4

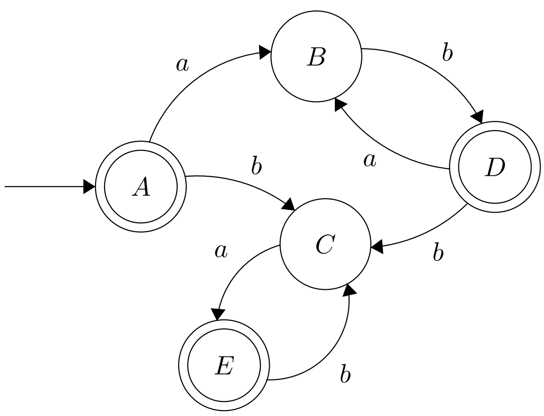
Порождает ли регулярное выражение $(ab)^*(ba)^*$ тот же язык, что распознаёт ДКА $M = \{\{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \delta, A, \{A, D, E\}\}$, где функция переходов задана следующим образом:

$$\delta(A, a) = B,\ \delta(A, b) = C,\ \delta(B, b) = D,\ \delta(C, a) = E,$$

$$\delta(D, a) = B,\ \delta(D, b) = C,\ \delta(E, b) = C.$$

Решение.

Пусть $R = (ab)^*(ba)^*$. Построим заданный ДКА $\mathcal{A}$:



Утверждение. $R \subseteq L(\mathcal{A})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $w \in R$. Оно имеет вид:

$$w = (ab)^i (ba)^j,\ i, j \geq 0.$$

Рассмотрим конфигурации автомата:

$$(A, (ba)^j) \vdash^* (A, \varepsilon), \qquad (i = 0, j \neq 0)$$

$$(A, (ab)^i) \vdash^* (D, \varepsilon), \qquad (i \neq 0, j = 0)$$

$$(A, (ab)^i (ba)^j) \vdash^* (D, (ba)^j) \vdash^* (E, \varepsilon), \qquad (i \neq 0, j \neq 0)$$

где A, D, E — принимающие состояния. Поэтому

$$\forall w \in R \hookrightarrow w \in L(\mathcal{A}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} R \subseteq L(\mathcal{A}).$$

$\square$

Утверждение. $L(\mathcal{A}) \subseteq R$.

Доказательство. По контрапозиции. Рассмотрим конфигурации автомата при обработке слова $w = a^u b^i (ab)^k (ba)^l b^j a^v$ (u и i, а также j и v одновременно не могут быть равны 1 (иначе получим слово, распознаваемое автоматом)):

$$(A, (ab)^k (ba)^l a^v) \vdash^* (B, a^{v-1}). \qquad (j = 0, v \neq 0)$$

$$(A, a^u b^i (ab)^k (ba)^l b^j a^v) \vdash (B, a^{u-1} b^i (ab)^k (ba)^l b^j a^v), \qquad (u \neq 0)$$

$$(A, (ab)^k (ba)^l b^j a^v) \vdash^* (C, b^{j-1} a^v), \qquad (u = 1, i = 1, j \neq 0)$$

$$(A, b^i (ab)^k (ba)^l b^j a^v) \vdash^* (C, b^{i-1} (ab)^k (ba)^l b^j a^v), \qquad (u = 0, i \neq 1)$$

Без ограничения общности были выбраны состояния B и C. При переходах в другие состояния рассуждения аналогичные.

Таким образом удалось показать, что другие слова, отличные от тех, которые задаются РВ R, не принимаются автоматом. Следовательно, если автоматом принимается слово, то оно из R. $\square$

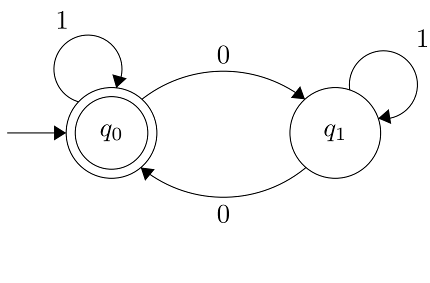
Задача 5

Постройте ДКА, который

1. распознаёт язык, все слова которого содержат четное число нулей.
2. распознает язык, все слова которого содержат нечётное число единиц.
3. распознает язык, все слова которого содержат четное число нулей и нечетное число единиц.

Решение.

1. Пусть $L =$ «язык, все слова которого содержат четное число нулей.» Построим ДКА:



Утверждение. $L \subseteq L(\mathcal{A})$.

Доказательство. По индукции числа n нулей в слове $w \in L$. База индукции $n = 0$:

$$w \in 1^* : (q_0, w) = (q_0, 1^*) \vdash^* (q_0, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{A}).$$

Предположение индукции: пусть верно

$$\forall x \in L,\ \forall k \in \mathbb{N} : |x|_0 = 2k \hookrightarrow x \in L(\mathcal{A}).$$

Переход индукции: $w \in L,\ |w|_0 = 2k + 2$:

$$(q_0, w) = (q_0, x1^i01^j01^l) \vdash^* (q_0, 1^i01^j01^l) \vdash^*$$
$$\vdash^* (q_0, 01^j01^l) \vdash (q_1, 1^j01^l) \vdash^* (q_1, 01^l) \vdash (q_0, 1^l) \vdash^* (q_0, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{A}).$$

□

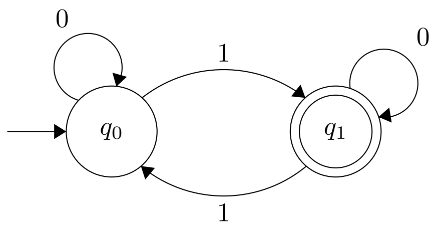
Утверждение. $L(\mathcal{A}) \subseteq L$.

Доказательство. По контрапозиции. Пусть w такое, что $|w|_0 = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$. Представим слово w в виде $w = x1^i01^j$ $(|x|_0 = 2k)$. Тогда:

$$(q_0, x1^i01^j) \vdash^* (q_0, 1^i01^j) \vdash^* (q_0, 01^j) \vdash (q_1, 1^j) \vdash (q_1, \varepsilon) \Rightarrow w \notin L(\mathcal{A}).$$

При этом заметим, что автомат — детерминированный. Следовательно, путь по нему определён однозначно. □

2. Пусть $L =$ «язык, все слова которого содержат нечетное число единиц.» Построим ДКА:



Утверждение. $L \subseteq L(\mathcal{B})$.

Доказательство. Докажем по индукции числа n букв 1 в слове $w \in L$. База индукции $n = 1$:

$$(q_0, w) = (q_0, 0^i10^j) \vdash^* (q_0, 10^j) \vdash (q_1, 0^j) \vdash^* (q_1, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{B}).$$

Предположение индукции $n = 2k + 1$: пусть верно

$$\forall x \in L,\ \forall k \in \mathbb{N} : |x|_1 = 2k + 1 \hookrightarrow x \in L(\mathcal{B}).$$

Переход индукции $n = 2k + 3$:

$$(q_0, w) = (q_0, x0^i10^j10^l) \vdash^* (q_1, 0^i10^j10^l) \vdash^* (q_1, 10^j10^l) \vdash$$
$$\vdash (q_0, 0^j10^l) \vdash^* (q_0, 10^l) \vdash (q_1, 0^l) \vdash^* (q_1, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{B}).$$

□

Утверждение. $L(\mathcal{B}) \subseteq L$.

Доказательство. По контрапозиции. Рассмотрим слово w такое, что $|w|_1 = 2k$, где $k \in\ \mathbb{N}$. Представим его в виде $w = x0^i10^j$, где $x \in L$. По доказанному ранее утверждению верно

$$\forall x \in L \hookrightarrow x \in L(\mathcal{B}).$$

Рассмотрим конфигурации автомата при обработке слова w:

$$(q_0, w) = (q_0, x0^i10^j) \vdash^* (q_1, 0^i10^j) \vdash^* (q_1, 10^j) \vdash (q_0, 0^j) \vdash^* (q_0, \varepsilon) \Rightarrow w \notin L(\mathcal{B}).$$

При этом автомат $\mathcal{B}$ — детерминированный. Следовательно, путь по нему определен однозначно. □

3. Пусть $L(\mathcal{C})$ — искомый язык. Тогда $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$.

Зафиксируем описание автоматов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} = (Q_{\mathcal{A}},\ \Sigma,\ q_0^{\mathcal{A}},\ \delta_{\mathcal{A}},\ F_{\mathcal{A}}),$$
$$\mathcal{B} = (Q_{\mathcal{B}},\ \Sigma,\ q_0^{\mathcal{B}},\ \delta_{\mathcal{B}},\ F_{\mathcal{B}}).$$

Теперь построим автомат $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = ((Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}}),\ \Sigma,\ (q_0^{\mathcal{A}},\ q_0^{\mathcal{B}}),\ \delta_{\mathcal{C}},\ F_{\mathcal{A}} \times F_{\mathcal{B}}),$$

где

$$\delta_{\mathcal{C}}((q_{\mathcal{A}},\ q_{\mathcal{B}}),\ \sigma) = (\delta_{\mathcal{A}}(q_{\mathcal{A}}, \sigma),\ \delta_{\mathcal{B}}(q_{\mathcal{B}}, \sigma)).$$

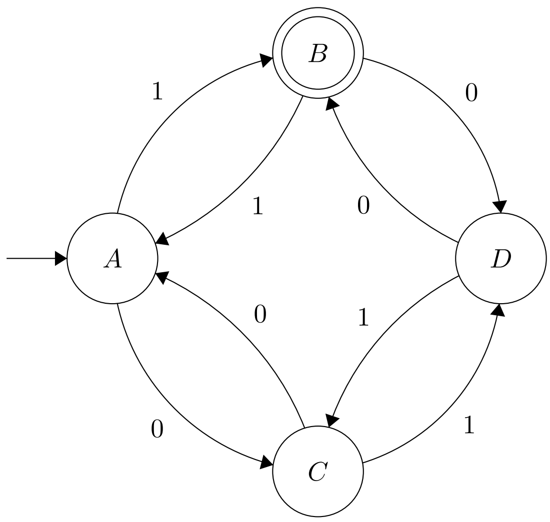
Опишем каждый элемент автомата:

$$Q_{\mathcal{C}} = \{(q_0^{\mathcal{A}}, q_0^{\mathcal{B}}),\ (q_0^{\mathcal{A}}, q_1^{\mathcal{B}}),\ (q_1^{\mathcal{A}}, q_0^{\mathcal{B}}),\ (q_1^{\mathcal{A}}, q_1^{\mathcal{B}})\},$$
$$\Sigma = \{0,\ 1\},$$
$$q_0^{\mathcal{C}} = (q_0^{\mathcal{A}}, q_0^{\mathcal{B}}),$$
$$F_{\mathcal{C}} = (q_0^{\mathcal{A}}, q_1^{\mathcal{B}}).$$

Вычислим функциюю $\delta_{\mathcal{C}}$ для каждой буквы алфавита и введём обозначения:

- $(q_0^{\mathcal{A}}, q_0^{\mathcal{B}}) = A$ — начальное состояние,
- $(q_0^{\mathcal{A}}, q_1^{\mathcal{B}}) = B$ — принимающее состояние,
- $(q_1^{\mathcal{A}}, q_0^{\mathcal{B}}) = C$,
- $(q_1^{\mathcal{A}}, q_1^{\mathcal{B}}) = D$.

Теперь построим автомат:



Пусть L = «язык, все слова которого содержат четное число нулей и нечетное число единиц».

Утверждение. $L \subseteq L(\mathcal{C})$.

Доказательство. По индукции числа $n,\ t$ букв 0 и 1 соответственно в слове $w \in L$. База $n = 0,\ t = 1$:

$$(A, w) = (A, 1) \vdash (B, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{C}).$$

Предположение индукции $n = 2k,\ t = 2p + 1$: пусть верно

$$\forall x \in L,\ \forall k, p \in \mathbb{N} : |x|_0 = 2k,\ |x|_1 = 2p + 1 \hookrightarrow x \in L(\mathcal{C}).$$

Переход индукции $n = 2k + 2,\ t = 2p + 3$:

- $w = x1001 : (A, x1001) \vdash^* (B, 1001) \vdash^* (B, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{C})$;
- $w = x0101 : (A, x0101) \vdash^* (B, 0101) \vdash^* (B, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{C})$;
- $w = x0011 : (A, x0011) \vdash^* (B, 0011) \vdash^* (B, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{C})$;
- $w = x0110 : (A, x0110) \vdash^* (B, 0110) \vdash^* (B, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{C})$;
- $w = x0110 : (A, x1010) \vdash^* (B, 1010) \vdash^* (B, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{C})$;
- $w = x1100 : (A, x1100) \vdash^* (B, 1100) \vdash^* (B, \varepsilon) \Rightarrow w \in L(\mathcal{C})$.

$\square$

Утверждение. $L(\mathcal{C}) \subseteq L$.

Доказательство. Опирается на доказательстве утверждений $L \subseteq L(\mathcal{A})$ и $L \subseteq L(\mathcal{B})$. При чётном количестве букв 1 в слове $w \in L(\mathcal{C})$ «часть» автомата $\mathcal{C}$, отвечающая за нечётность количества единиц (автомат $\mathcal{B}$), не перейдёт в принимающее состояние. Аналогичные рассуждения связаны с автоматом $\mathcal{A}$. $\square$