Задание 1

Регулярные языки и регулярные выражения

Все ответы должны быть обоснованы, если не указано противное! (Ответы без обоснований не считаются решениями.)

Во всех задачах данного листка языки определены над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$

Задача 1.

1. $(b, 1) \overset{?}{\in} \{1, 2, 3\} \times \{a, b\}$.

2. Пусть A и B — конечные множества. Найдите $|A \times B|$.

3. Опишите множество $\mathbb{N} \times \varnothing$.

Задача 2. Верно ли, что
а) $\varepsilon \in \{a, aab, aba\}$; **б)** $\varnothing \in \{a, aab, aba\}$?

Задача 3. Вычислить (выписать регулярное выражение) $\{a, a^3, a^5 \ldots\} \cdot \{a, a^3, a^5 \ldots\}$.

Задача 4. Построить регулярное выражение (РВ) для

а) языка, который содержит все слова, в которых есть как буква a, так и буква b;

б) языка из слов, содержащих в качестве подслова ровно одно слово ab;

в) языка, слова которого не содержат подслово ab;

Замечание. В этой задаче необходимо доказать, что построенное РВ порождает требуемый язык. Доказательство корректности является важной частью решения, это относится и ко всем последующим задачам!

Задача 5. Определим язык $L \subseteq \{a, b\}^*$ индуктивными правилами:

1. $\varepsilon, b, bb \in L$;
2. вместе с любым словом $x \in L$ в L также входят слова $ax, bax, bbax$;
3. никаких других слов в L нет.

Язык $T \subseteq \{a, b\}^*$ состоит из всех слов, в которых нет трёх букв b подряд.

1. Докажите или опровергните, что $L = T$.[1]

2. Запишите язык T в виде регулярного выражения.

Задача 6. 1. Задайте множество $\{a^n \mid n > 0\} \times \{b^n \mid n \geqslant 0\}$ формулой, которая не использует символ $\times$.

2. Опишите язык $\{a^{3n} \mid n > 0\} \cap \{a^{5n+1} \mid n \geqslant 0\}^*$ регулярным выражением.

---

[1] Если равенство неверно, то нужно явно указать слово, принадлежащее одному языку и не принадлежащее другому. Если равенство верно, то нужно провести доказательство по индукции в обе стороны: $L \subseteq T$ и $T \subseteq L$.