ТРЯП. Домашнее задание № 4

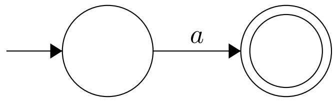
Шарапов Денис, Б05-005

Задача 1

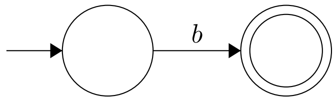
Построить НКА по регулярному выражению $(a(a \mid b))^*b$.

Решение.

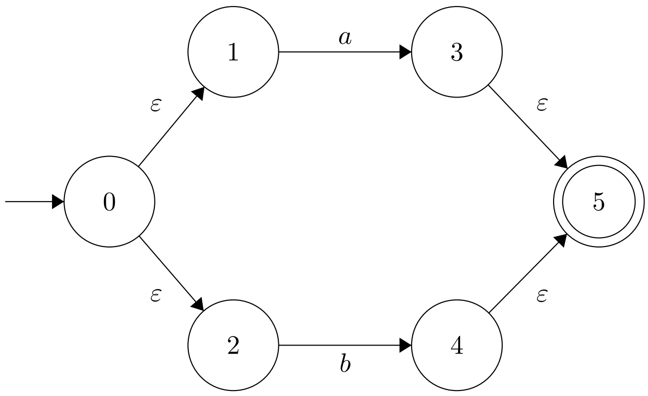
1. Автомат для РВ a:



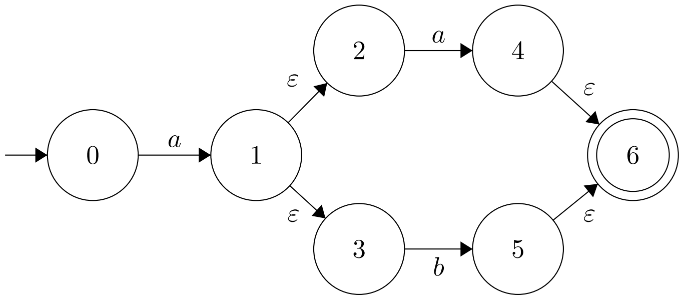
Автомат для РВ b:



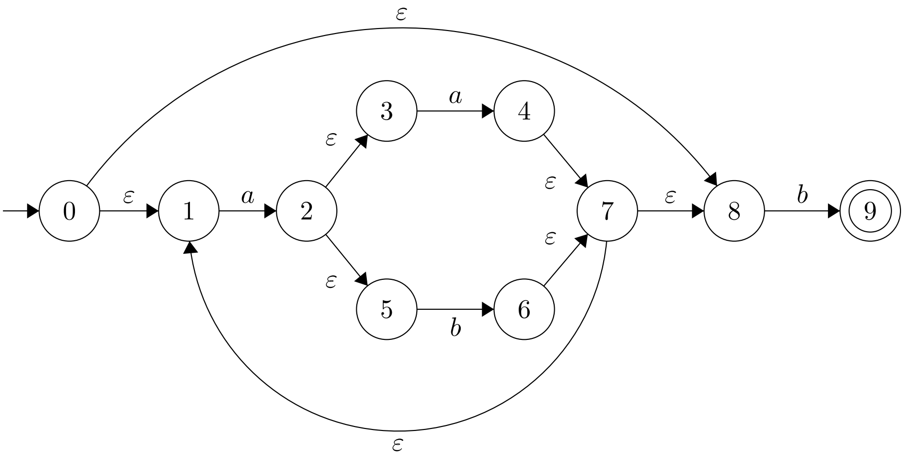
2. Автомат для РВ $(a \mid b)$:



3. Автомат для РВ $a(a \mid b)$:



4. Автомат для РВ $(a(a \mid b))^*b$:



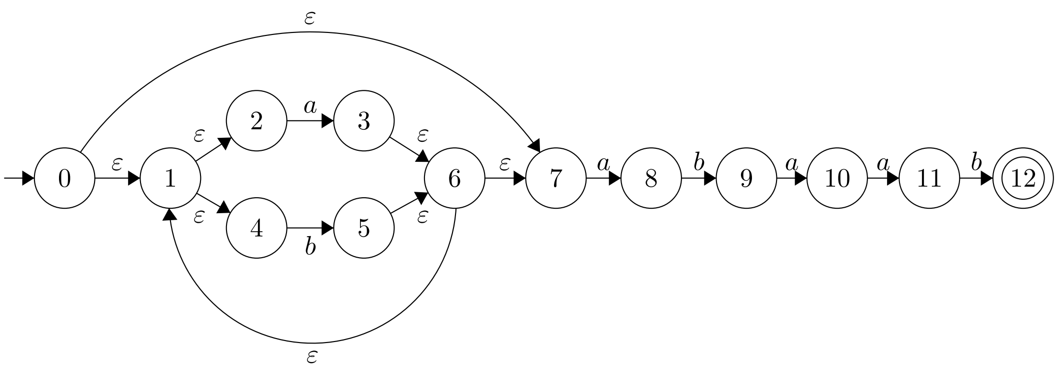
$\square$

Задача 2

Построить НКА $\mathcal{A}$, распознающий слова с суффиксом $abaab$.

Решение.

Построим автомат $\mathcal{A}$ по алгоритму построения НКА для РВ $(a \mid b)^*abaab$:



$\square$

Задача 3

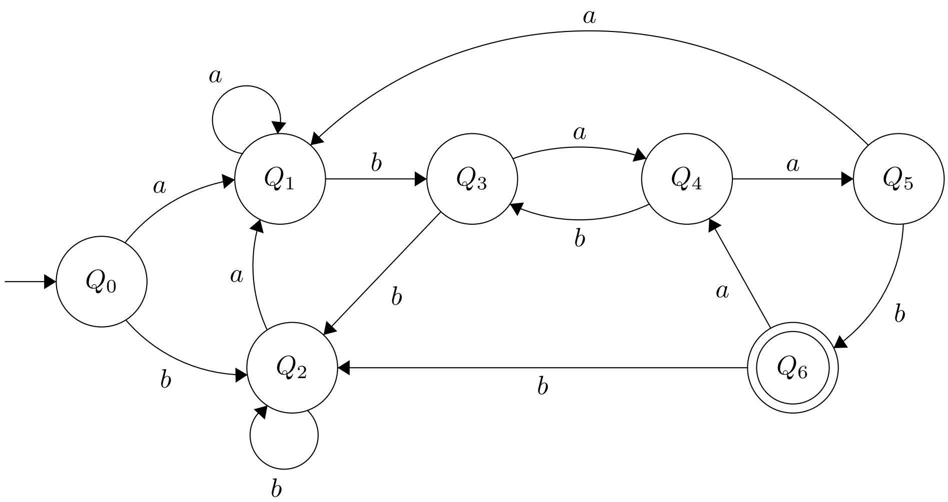
Постройте по НКА $\mathcal{A}$ из предыдущей задачи эквивалентный ДКА $\mathcal{B}$ по алгоритму НКА — ДКА.

Решение.

После построения НКА построим таблицу, содержащую состояния ДКА, множества состояний НКА и переходы по буквам алфавита в ДКА.

ДКА	Состояния	a	b
$\to Q_0$	0, 1, 2, 4, 7	Q_1	Q_2
Q_1	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8	Q_1	Q_3
Q_2	1, 2, 4, 5, 6, 7	Q_1	Q_2
Q_3	1, 2, 4, 5, 6, 7, 9	Q_4	Q_2
Q_4	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10	Q_5	Q_3
Q_5	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11	Q_1	Q_6
Q_6	1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 12	Q_4	Q_2

По таблице построим ДКА (красным помечено принимающее состояние).



□

Задача 4

L – конечный язык. Выполняется для него лемма о накачке?

Решение.

Регулярные языки замкнуты относительно операции объединения, а значит они замкнуты относительно конечного числа объединений. Любой конечный язык — конечное объединение слов, а каждое слово — регулярный язык. Поэтому конечный язык — регулярный язык. Следовательно, для него выполняется лемма о накачке («*Если L — регулярный язык, то существует такая константа ...*»). □

Задача 5

Будут ли регулярными следующие языки?

1. $L = \{a^{2019n+5} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\} \cap \{a^{503k+29} \mid k = 401, 402, \ldots\} \subseteq \{a^*\}$;
2. $L = \{a^{200n^2+1} \mid n = 1000, 1001, \ldots\} \subseteq \{a^*\}$.

Решение.

1. Пусть $A = \{a^{2019n+5} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$, $B = \{a^{503k+29} \mid k = 401, 402, \ldots\} \subseteq \{a^*\}$. Тогда

$$A = \{a^{2019n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\} \cdot \{a^5\},$$

$$\{a^5\} \in \mathrm{REG}, \quad \{a^{2019}\} \in \mathrm{REG} \Rightarrow \{a^{2019}\}^* \in \mathrm{REG}. \text{ Следовательно, } A \in \mathrm{REG}.$$

Теперь представим B в следующем виде:

$$B = \{a^{503(401+m)+29} \mid m = 0, 1, 2, \ldots\} = \{a^{503m} \mid m = 0, 1, 2, \ldots\} \cdot \{a^{503 \cdot 401+29}\},$$

$\{a^{503\cdot401+29}\} \in \mathrm{REG}$, $\{a^{503}\} \in \mathrm{REG} \Rightarrow \{a^{503}\}^* \in \mathrm{REG}$. Следовательно, $B \in \mathrm{REG}$.

Пересечение регулярных языков — регулярный язык. Поэтому $L = A \cap B \in \mathrm{REG}$.

2. Нет, не будет. Преобразуем язык L:

$$L = \{a^{200(999+p)^2} \mid p = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Запишем отрицание леммы о накачке:

$$\forall p \geq 1\ \exists w \in L,\ |w| \geq p : \forall x, y, z : w = xyz \hookrightarrow$$
$$\hookrightarrow\ 1)\ |y| \geq 1,\ 2)\ |xy| \leq p,\ 3)\ \exists i \geq 0 : xy^iz \notin L.$$

Зафиксируем произвольные p, x, y, z, удовлетворяющие условиям теоремы. Рассмотрим слово $w = xyz$, $x = a^m$, $y = a^k$, $z = a^l$:

$$w = a^{m+k+l},\ k \geq 1,\ m + k \leq p,\ m + k + l = 200(999 + p)^2.$$

Предположим, что выполняется лемма о накачке. Тогда рассмотрим слово

$$w' = xy^iz = a^{200(999+p)^2}$$

для некоторого p. Тогда

$$m + ki + l = 200(999 + p)^2. \tag{1}$$

Лемма о накачке утверждает, что разность длин двух последовательных слов из регулярного языка ограничена линейной функцией.

Тогда рассмотрим последовательность количества букв в слове w'. С одной стороны (слева), это последовательность $\{c_t\}_{t=m+l}^{\infty}$. С другой стороны , это последовательность, порядка t^2. Рассмотрим предел их отношения при $t \to \infty$ и получим нуль ($t/t^2 \to 0,\ t \to \infty$). Получили противоречие, следовательно, язык не является регулярным.

Ответ: 1) Да, будет; 2) нет, не будет.

Задача 6

Пусть R — регулярный язык. Верно ли, что F — регулярный язык, если

1. $F \cap R$ — регулярный язык;
2. языки $F \cap R$ и $F \cap \bar{R}$ являются регулярными?

Решение.

1. Нет, неверно. Рассмотрим $R = \varnothing \in \mathrm{REG}$. Тогда

$$F \cap R = F \cap \varnothing = \varnothing \in \mathrm{REG}.$$

Но при этом F может быть и нерегулярным языком: $F \notin \mathrm{REG}$.

2. Да, верно. Проведём серию преобразований:

$$F \cap R \in \mathrm{REG}, \quad F \cap \bar{R} \in \mathrm{REG},$$
$$(F \cap R) \cup (F \cap \bar{R}) \in \mathrm{REG},$$
$$F \cap (R \cup \bar{R}) \in \mathrm{REG},$$
$$F \cap U \in \mathrm{REG},$$
$$F \in \mathrm{REG},$$

где $U = R \cup \bar{R}$ — юниверсум.

Ответ: 1) Нет, неверно; 2) да, верно.