ТРЯП. Домашнее задание № 3

Шарапов Денис, Б05-005

Задача 1

Заменим в конструкции произведения для пересечения регулярных языков последний пункт на

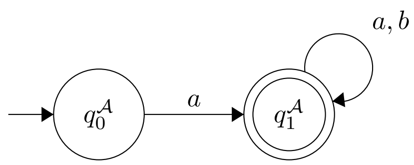
$$F_{\mathcal{C}} = F_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}} \cup Q_{\mathcal{A}} \times F_{\mathcal{B}}.$$

Верно ли, что автомат $\mathcal{C}$ распознает объединение $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$?

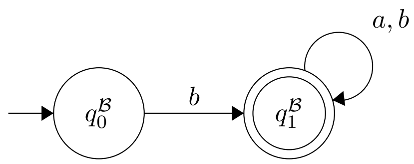
Решение.

Нет, неверно. Рассмотрим автоматы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Автомат $\mathcal{A}$:

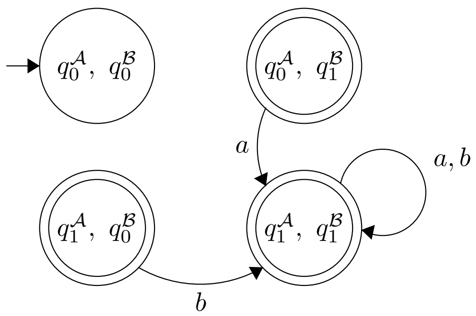


Автомат $\mathcal{B}$:



Теперь построим автомат C по заданным правилам:

Автомат $\mathcal{C}$:



Видно, что слово $w = ab$, распознаваемое автоматом $\mathcal{A}$, не распознается автоматом $\mathcal{C}$.

Ответ: Нет, не верно.

Задача 2

Обозначим через S_w язык слов с суффиксом w. Докажите или опровергните следующие утверждения:

1. ДКА, распознающий язык S_w, имеет не менее $|w| + 1$ состояний.
2. Для каждого w существует ДКА с $|w| + 1$ состоянием, распознающий язык S_w.

Решение.

1. Утверждение верно. Докажем его по индукции числа n букв в суффиксе w.

   База индукции $n \geq 1$: представим слово $v \in S_w$ в виде $v = xw$, где x — некоторое слово.

   Для данного случая потребуется автомат с двумя состояниями. Действительно, если автомат не может распознать слово w одним единственным состоянием, то он не сможет распознать и слово v этим состоянием. Но не всякое слово длины 1 (w) можно распознать автоматом с одним состоянием: например, автомат ничего не принимает, либо принимает пустое слово и ещё некоторые слова, если есть переход в это состояние, и оно является принимающим. Таким образом, автомат с одним состоянием не сможет принять все слова $v \in S_w$. Откуда следует, что состояний не менее $|w| + 1 = 2$.

   Предположение индукции $n = k - 1$: пусть слово с суффиксом w длины $|w| = k - 1$ распознается автоматом, который имеет не менее k состояний.

   Переход индукции $n = k$: покажем, что для распознания слова с суффиксом $w = w_1 w_2 \ldots w_k$ необходимо ещё одно состояние.

   В автомате для распознавания слова $w = w_1 w_2 \ldots w_{k-1}$ единственным принимающим состоянием является состояние под номером k (иначе принимались бы слова, являющиеся префиксами слова w, и тогда принимались бы не все слова из S_w). Тогда переход из состояния n возможен только в новое состояние, которое должно быть принимающим (конструктивно это выглядит так: берётся последняя буква и по ней берётся переход в последнее состояние, которое является принимающим). Отсюда следует, что необходимо ещё одно состояние. $\square$

2. Утверждение верно. Приведём конструктивное доказательство.

Задача 3

Зафиксируем последовательность языков R_i над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$, состоящих из слов, в которых на i-ом месте от конца стоит a. Докажите, что любой ДКА $\mathcal{A}_n$, распознающий язык R_n имеет не менее 2^n состояний.

Решение.

От противного. Пусть существует ДКА $\mathcal{A}_n$ меньшего размера. Пусть в результате обработки произвольного слова w автомат $\mathcal{A}_n$ окажется в некотором состоянии q_w (слово wab^{n-1} должно было быть принято). По принципу Дирихле среди всех слов длины n найдётся хотя бы два различных слова, для которых $q_u = q_v$.

Слова различаются, следовательно,

$$\exists i : u[i] \neq v[i].$$

Без ограничения общности пусть $u[i] = a$, $v[i] = b$. Автомат $\mathcal{A}_n$ принимает слово ub^{n-i+1}, т. к. оно принадлежит языку R_n. Тогда существует последовательность конфигураций:

$$(q_u, \sigma) \vdash^* (q_f, \varepsilon),$$

где $q_f \in F_{\mathcal{A}_n}$.

Но при этом автомат $\mathcal{A}_n$ принимает слово vb^{n-i+1}, т. к. существует последовательность конфигураций:

$$(q_v, \sigma) \vdash^* (q_f, \varepsilon).$$

Но в этом слове на n-ом месте от конца стоит символ b, поэтому $vb^{n-i+1} \notin R_n$. Противоречие.

$\square$