ТРЯП. Домашнее задание № 6

Шарапов Денис, Б05-005

Задача 1

Будет ли регулярным язык L_3 всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые представляют числа в двоичной записи, дающие остаток два при делении на три?

Решение.

Зададим отношение L_3-эквивалентности на языке всех слов алфавита $\Sigma = \{0, 1\}$. Разобъем Σ^* на классы эквивалентности L_0, L_1, L_2, где

L_0 — язык всех слов, дающих остаток 0 при делении на 3,

L_1 — язык всех слов, дающих остаток 1 при делении на 3,

L_2 — язык всех слов, дающих остаток 2 при делении на 3.

Проверим, являются ли эти множества классами эквивалентности по остатку при делении на 3.

1. $\forall i\ \forall v, u \in L_i \hookrightarrow u \sim_{L_3} v$.
2. Пусть слова $u \in L_i$ и $v \in L_j$ принадлежат разным классам эквивалентности L_i и L_j. Тогда к словам u и v припишем справа некоторое слово $z \in \Sigma^*$, которое имеет остаток q при делении на 3. Получим, что остатки у получившихся слов отличаются, значит они принадлежат разным классам эквивалентности.
3. Возможные остатки при делении на 3: 0, 1 или 2. Т. е. выбранные множества покрывают Σ^*.

Получили, что у L_3 конечное число классов эквивалентности, что по теореме Майхилла-Нероуда равносильно его регулярности. $\square$

Задача 2

Описать классы эквивалентности Майхилла-Нероуда для языка L над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$. В случае конечности множества классов построить минимальный полный ДКА, распознающий L, где L — язык

а) $\Sigma^* ab \Sigma^*$;

б) $\mathrm{PAL} = \{w : w = w^R\}$;

в) $\{w : |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$.

Решение.

а) Разобъём множество Σ^* на три множества:

1. $L_1 = \{xaby : x, y \in \Sigma^*\}$,
2. $L_2 = \{w : w \in b^*\}$,
3. $L_3 = \{xay : x \in b^*, y \in a^*\}$.

Слова из L_2 L-эквивалентны друг другу, т. к. какое слово бы не приписали, они одновременно либо лежат, либо не лежат в языке L (их одновременная принадлежность зависит от приписываемого слова).

Слова из L_3 L-эквивалентны друг другу, т. к. по построению все слова из этого языка заканчиваются на a, и их одновременная принадлежность записит только от приписываемого слова.

Пусть $z = a$ — различающее слово. Припишем его к трём произвольным словам из L_1, L_2, L_3. Тогда слова из L_2 и L_3 не принадлежат языку L, а слово из L_1 принадлежит языку L.

Пусть $z = b$ — различающее слово. Припишем его к произвольным словам из L_2, L_3. Тогда слово из L_2 не будет принадлежать языку L, а слово из L_3 будет принадлежать языку L.

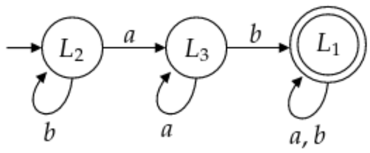
Таким образом показано, что произвольная пара слов, взятая из разных множеств L_1, L_2, L_3, не является L-эквивалентой.

Покажем, что выбранные множества покрывают Σ^*. Пусть $w \in \Sigma^*$ — произвольное слово из множества всех слов над алфавитом Σ. Тогда в нём либо есть ab в качестве подслова, либо в нем нет ab в качестве подслова. Если есть, то оно попадает во множество L_1. Если нет, то в нём есть слово a в качестве подслова, и тогда оно попадает во множество L_3. Если в нём нет слова a в качестве подслова, то оно попадает во множество L_2.

Т. е. было показано, что произвольное слово $w \in \Sigma^*$ попадает в объединение

$$w \in \bigcup_i L_i = \Sigma^*.$$

Теперь построим полный ДКА:



б) Покажем, что классов L-эквивалентности бесконечно много. Рассмотрим некоторое множество L_i, которое может являться классом L-эквивалентности. Рассмотрим теперь два произвольных слова $u \in L_i, v \in L_i$. Они являются L-эквивалентными, т. к., если к ним приписать справа одно и то же слово, то они оба будут одновременно либо принадлежать L_i, либо не принадлежать L_i.

Пусть нашёлся ещё один класс L-эквивалентности L_j (в предположении их бесконечно много). Рассмотрим два произвольных слова $u \in L_i, v \in L_j$. Пусть $z = u$ — разделяющее слово. Действительно, из того, что $u = u^R$ следует, что $uz = uu \in L$. Но $vz = vu \notin L$.

Получившиеся множества L_i покрывают всё множество Σ^*, т. к. каждое слово над алфавитом Σ попадает в свой класс L-эквивалентности.

Таким образом получили бесконечно много классов эквивалентности, что по теореме Майхилла-Нероуда равносильно нерегулярности языка L.

в) Рассмотрим множества:

$$A_i = \{w = w_0w_1 \dots w_k \dots a : |w|_{ab} - |w|_{ba} = i\},$$
$$B_i = \{w = w_0w_1 \dots w_k \dots b : |w|_{ab} - |w|_{ba} = i\}.$$

Покажем, что два произвольно выбранных слова из одного множества L-эквиваленты. Действительно, разность у слов одинаковая, и приписывание произвольного слова $z \in \Sigma^*$ изменит эту разность одинаково (т. е. слова будут либо одновременно принадлежать языку L, либо не принадлежать языку L).

Покажем, что два произвольно выбранных слова из разных множеств не являются L-эквивалентыми. Если оба слова выбраны одновременно из одной последовательности A_i или B_i, то приписывание справа произвольного слова $z \in \Sigma^*$ изменит количество ba и ab на одно и то же число, и разности останутся неравными. Если одно слово выбрано из A_i, а другое выбрано из B_i, то приписывание справа произвольного слова $z \in \Sigma^*$ в одном слове изменит разность, а в другом — нет.

Выбранные множества покрывают Σ^*, так как они выбраны на множестве всех слов.

Таким образом получили бесконечно много классов эквивалентности, что по теореме Майхилла-Нероуда равносильно нерегулярности языка L. □

Задача 3

Язык L состоит из двоичных записей (без ведущих нулей) положительных чисел n, входящих в пару (n, m) некоторого решения уравнения $5n + 3m = 17$ в целых числах. Описать классы эквивалентности Майхилла-Нероуда языка L. Является ли язык L регулярным?

Решение.

С помощью расширенного алгоритма Евклида получим решение уравнения:

$$n = 3k + 1.$$

Аналогично задаче 1 найдём классы L-эквивалентности и получим, что язык L — регулярный, где L — язык всех слов, дающих в остатке 1 при делении на 3.

Классы L-эквивалентности:

L_0 — язык всех слов, дающих остаток 0 при делении на 3,

L_1 — язык всех слов, дающих остаток 1 при делении на 3,

L_2 — язык всех слов, дающих остаток 2 при делении на 3.

Ответ: Да, является регулярным.

Задача 4

Являются ли регулярными следующие языки:

а) $\{xy : |x| > |y|,\ x \text{ содержит букву } a\}$,

б) $\{xy : |x| < |y|,\ x \text{ содержит букву } b\}$?

Решение.

а) Пусть

$$L = \{xy : |x| > |y|,\ x \text{ содержит букву } a\}.$$

Выберем два множества: L_1 — язык всех слов, содержащих букву a, L_2 — язык всех слов, не содержащих букву a. Проверим, являются ли они классами L-эквивалентности.

Если взять два произвольных слова из одного множества L_1 или L_2, то приписывание произвольного слова $z \in \Sigma^*$ меняет принадлежность к L получившихся слов одновременно (в случае L_1 можно взять, например, $y = \varepsilon$).

Пусть теперь $u \in L_1, v \in L_2$ и $z = b$ — разделяющее слово. Видно, что при приписывании справа слова z к словам u и v получаем, что $uz \in L$, а $vz \notin L$.

Заданные множества покрывают Σ^*.

Таким образом получили два класса L-эквивалентности, что по теореме Майхилла-Нероуда равносильно регулярности языка L. □

Задача 5

Левым языком L_q для состояния q автомата назовём множество

$$L_q = \{x : q_0 \xrightarrow{x} q\}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ — полный ДКА, распознающий язык L. Доказать, что

а) Каждый левый язык L_q является подмножеством некоторого класса L-эквивалентности.

б) Для каждого класса эквивалнтности $[x]$ существует такое подмножество состояний $Q_x \subseteq Q_{\mathcal{A}}$, что

$$[x] = \bigcup_{q \in Q_x} L_q.$$

в) Если $x \in L_q$, то

$$L_p \subseteq [x] \Longleftrightarrow R_q = R_p.$$

Решение.

а) Требуется доказать, что слова из L_q лежат в одном классе L-эквивалентности. Действительно, рассмотрим два произвольных слова из L_q. Автомат $\mathcal{A}$ — полный ДКА, поэтому количество состояний конечно и в нём определены переходы по всем буквам алфавита Σ. Припишем к двум произвольным словам из L_q произвольное слово $z \in \Sigma^*$. Запустим автомат. Через некоторое время работы автомат придёт в состояние q по определению множества L_q для обоих слов. Далее он будет обрабатывать слово z для двух слов из L_q, поэтому он одновременно для них обоих придёт либо в принимающее состояние, либо в непринимающее состояние. Т. е. все слова из L_q принадлежат некоторому классу L-эквивалентности. $\square$

б) Рассмотрим все вершины автомата $\mathcal{A}$ (их конечное множество). Для каждой вершины рассмотрим множество L_q. Далее будем рассматривать L-эквивалентность слов из двух разных L_q. Если окажется, что некоторые слова являются эквивалентными, то в дальнейшем будем рассматривать эти два языка вместе (должна выполняться транзитивность). Таким образом получится некоторое разбиение множества всех L_q для каждой вершины автомата на множества L_{q_i} (которые попарно неэквивалентны). Т. е. существует такое подмножество состояний, что каждому классу эквивалентности соответсвует язык L_q, который представим в виде объединения L_{q_i} по всем состояниям из рассматриваемого подмножества состояний. $\square$

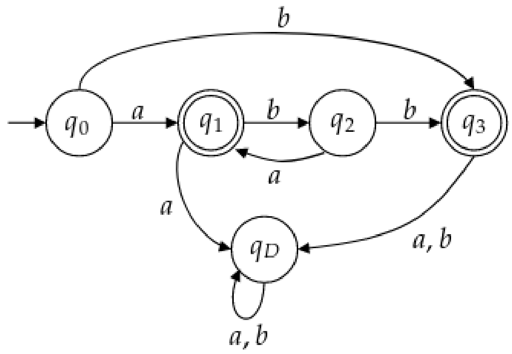
в) Если слова из L_p и L_q лежат в одном классе эквивалентности, то приписывание к ним справа произвольного слова $z \in \Sigma^*$ равносильно тому, что автомат закончит работу в одном и том же состоянии. Если при этом известно, что автомат закончил работу в принимающем состоянии, то это эквивалентно условию $R_q = R_p$ (в противном случае было бы противоречие принадлежности одному классу эквивалентности). $\square$

Задача 6

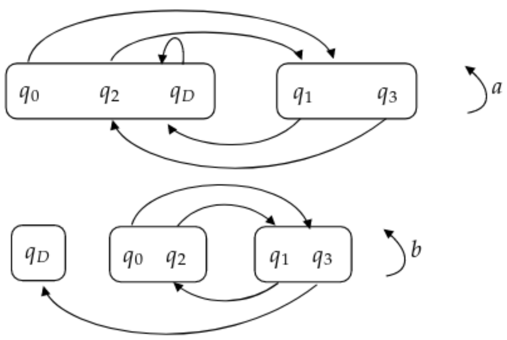
Построить минимальный ДКА по диаграмме.

Решение.

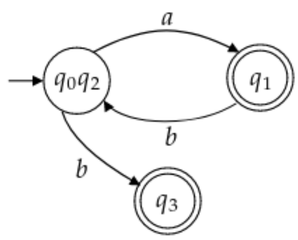
Воспользуемся алгоритмом минимазации ДКА. С помощью вершины D дополним ДКА, заданный диаграммой:



Далее воспользуемся алгоритмом:



Откуда построим минимальный ДКА:



□

Задача 7

Показать, что следующий язык удовлетворяет лемме о разрастании для регулярных языков, но сам регулярным не является:

$$L = \{ab^{2i} : i \geq 0\} \cup \{b^j : j \geq 0 \ \} \cup \{a^m b^n : m > 1, n \geq 0\}.$$

Решение.

Пусть

$$L_1 = \{ab^{2i} : i \geq 0\},$$

$$L_2 = \{b^j : j \geq 0 \},$$

$$L_3 = \{a^m b^n : m > 1, n \geq 0\}.$$

Покажем, что выполняется лемма о накачке для языка $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Пусть $p = 1, x = \varepsilon$, $y = a, z = b^{2i}$ для $i \geq 0$. Тогда:

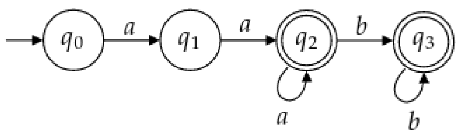
$$\text{при } k = 0 \text{ выполнено } w = b^{2i} \in L_2 \subseteq L,$$

$$\text{при } k = 1 \text{ выполнено } w = ab^{2i} \in L_1 \subseteq L,$$

$$\text{при } k > 0 \text{ выполнено } w = a^k b^{2i} \in L_3 \subseteq L.$$

Аналогично даказываем выполнимость леммы о накачке для слов, взятых из L_2 ($p = 1$, $x = \varepsilon$, $y = b$).

Для языка L_3 построим автомат ДКА, распознающий его (корректность доказывается по индукции числа букв a и b в слове):



Теперь покажем, что L не является регулярным. От противного. Предположим, что язык L является регулярным: $L \in \text{REG}$. Регулярные языки замкнуты относительно разности (дополнения) и объединения. Тогда верно следующее:

$$L_1 \cap L_2 = \varnothing,\ L_2 \cap L_3 = \varnothing\ L_1 \cap L_3 = \varnothing \Longrightarrow L_1 = L \setminus (L_2 \cup L_3).$$

Докажем, что $L_1 \notin \text{REG}$.

Рассмотрим слово $w = ab^{2p}$, где p — константа леммы. Тогда для него существует разбиение (при котором выполняются условия леммы) такое, что

$$x = a,\ y = b^{p-1},\ z = b^{p+1}.$$

Если L_1 был бы регулярным, то условие $xy^iz \in L_1$ выполнялось для любого i. Но в данном случае условие выполняется в зависимости от чётности i (для любого $p \geq 1$ сможем подобрать такое i, что принадлежность не выполняется). Т. е. выполняется отрицание леммы о накачке.

Таким образом показали, что для языка L выполняется лемма о накачке, но он не является регулярным в силу нерегулярности L_1 и регулярности L_2 и L_3. $\square$