# ТРЯП. Домашнее задание № 6

Шарапов Денис, Б05-005

## Задача 1

Будет ли регулярным язык $L_3$ всех слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые представляют числа в двоичной записи, дающие остаток два при делении на три?

**Решение.**

Зададим отношение $L_3$-эквивалентности на языке всех слов алфавита $\Sigma = \{0, 1\}$. Разобъем $\Sigma^*$ на классы эквивалентности $L_0, L_1, L_2$, где

$L_0$ — язык всех слов, дающих остаток 0 при делении на 3,

$L_1$ — язык всех слов, дающих остаток 1 при делении на 3,

$L_2$ — язык всех слов, дающих остаток 2 при делении на 3.

Проверим, являются ли эти множества классами эквивалентности по остатку при делении на 3.

1. $\forall i \; \forall v, u \in L_i \hookrightarrow u \sim_{L_3} v$.
2. Пусть слова $u \in L_i$ и $v \in L_j$ принадлежат разным классам эквивалентности $L_i$ и $L_j$. Тогда к словам $u$ и $v$ припишем справа некоторое слово $z \in \Sigma^*$, которое имеет остаток $q$ при делении на 3. Получим, что остатки у получившихся слов отличаются, значит они принадлежат разным классам эквивалентности.
3. Возможные остатки при делении на 3: 0, 1 или 2. Т. е. выбранные множества покрывают $\Sigma^*$.

Получили, что у $L_3$ конечное число классов эквивалентности, что по теореме Майхилла-Нероуда равносильно его регулярности. $\square$

## Задача 2

Описать классы эквивалентности Майхилла-Нероуда для языка $L$ над алфавитом $\Sigma = \{a, b\}$. В случае конечности множества классов построить минимальный полный ДКА, распознающий $L$, где $L$ — язык

а) $\Sigma^* ab \Sigma^*$;

б) $\mathrm{PAL} = \{w : w = w^R\}$;

в) $\{w : |w|_{ab} = |w|_{ba}\}$.

**Решение.**

а) Разобъём множество $\Sigma^*$ на три множества:

1. $L_1 = \{xaby : x, y \in \Sigma^*\}$,
2. $L_2 = \{w : w \in b^*\}$,
3. $L_3 = \{xay : x \in b^*, y \in a^*\}$.

Слова из $L_2$ $L$-эквивалентны друг другу, т. к. какое слово бы не приписали, они одновременно либо лежат, либо не лежат в языке $L$ (их одновременная принадлежность зависит от приписываемого слова).

Слова из $L_3$ $L$-эквивалентны друг другу, т. к. по построению все слова из этого языка заканчиваются на $a$, и их одновременная принадлежность записит только от приписываемого слова.

Пусть $z = a$ — различающее слово. Припишем его к трём произвольным словам из $L_1, L_2, L_3$. Тогда слова из $L_2$ и $L_3$ не принадлежат языку $L$, а слово из $L_1$ принадлежит языку $L$.

Пусть $z = b$ — различающее слово. Припишем его к произвольным словам из $L_2, L_3$. Тогда слово из $L_2$ не будет принадлежать языку $L$, а слово из $L_3$ будет принадлежать языку $L$.

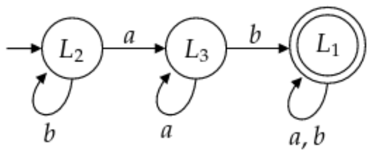
Таким образом показано, что произвольная пара слов, взятая из разных множеств $L_1$, $L_2$, $L_3$, не является $L$-эквивалентой.

Покажем, что выбранные множества покрывают $\Sigma^*$. Пусть $w \in \Sigma^*$ — произвольное слово из множества всех слов над алфавитом $\Sigma$. Тогда в нём либо есть $ab$ в качестве подслова, либо в нем нет $ab$ в качестве подслова. Если есть, то оно попадает во множество $L_1$. Если нет, то в нём есть слово $a$ в качестве подслова, и тогда оно попадает во множество $L_3$. Если в нём нет слова $a$ в качестве подслова, то оно попадает во множество $L_2$.

Т. е. было показано, что произвольное слово $w \in \Sigma^*$ попадает в объединение

$$w \in \bigcup_i L_i = \Sigma^*.$$

Теперь построим полный ДКА:




б) Покажем, что классов $L$-эквивалентности бесконечно много. Рассмотрим некоторое множество $L_i$, которое может являться классом $L$-эквивалентности. Рассмотрим теперь два произвольных слова $u \in L_i, v \in L_i$. Они являются $L$-эквивалентными, т. к., если к ним приписать справа одно и то же слово, то они оба будут одновременно либо принадлежать $L_i$, либо не принадлежать $L_i$.

Рассмотрим два различных множества $L_i$ и $L_j$. Пусть $u \in L_i$, $v \in L_j$. Тогда, если длины этих слов совпадают, то за разделяющее слово $z \in \Sigma^*$ достаточно взять $z = u^R$. Если длины не совпадают, то рассматриваем слова $u$ и $v$ следующим образом. Допустим, что на $l+1$-ом месте слова $u$ стоит буква $b$. Тогда достаточно рассмотреть разделяющее слово $z = au^R$, т. к. $uau^R \in L$, а $vau^R \notin L$ (на $l$-ом месте при чтении с конца и сначала стоят разные буквы).

Получившиеся множества $L_i$ покрывают всё множество $\Sigma^*$, т. к. каждое слово над алфавитом $\Sigma$ попадает в свой класс $L$-эквивалентности.

Таким образом получили бесконечно много классов эквивалентности, что по теореме Майхилла-Нероуда равносильно нерегулярности языка $L$.

в) Рассмотрим множества:

$$A_i = \{w = w_0 w_1 \dots w_k \dots a : |w|_{ab} - |w|_{ba} = i\},$$
$$B_i = \{w = w_0 w_1 \dots w_k \dots b : |w|_{ab} - |w|_{ba} = i\},$$
$$C = \{\varepsilon\}.$$

Покажем, что два произвольно выбранных слова из одного множества $L$-эквиваленты. Действительно, разность у слов одинаковая, и приписывание произвольного слова $z \in \Sigma^*$ изменит эту разность одинаково (т. е. слова будут либо одновременно принадлежать языку $L$, либо не принадлежать языку $L$).

Покажем, что два произвольно выбранных слова из разных множеств не являются $L$-эквивалентыми. Если оба слова выбраны одновременно из одной последовательности $A_i$ или $B_i$, то приписывание справа произвольного слова $z \in \Sigma^*$ изменит количество $ba$ и $ab$ на одно и то же число, и разности останутся неравными. Если одно слово выбрано из $A_i$, а другое выбрано из $B_i$, то приписывание справа произвольного слова $z \in \Sigma^*$ в одном слове изменит разность, а в другом — нет (конструктивно: если слово заканчивается на $a$, то разделяющим словом берём $z = bw, |w|_{ab} = |v|_{ab} - 1, |w|_{ba} = |v|_{ba}$, где $v \in A_i$).

Выбранные множества покрывают $\Sigma^*$, так как они выбраны на множестве всех слов.

Таким образом получили бесконечно много классов эквивалентности, что по теореме Майхилла-Нероуда равносильно нерегулярности языка $L$. □

# Задача 3

Язык $L$ состоит из двоичных записей (без ведущих нулей) положительных чисел $n$, входящих в пару $(n, m)$ некоторого решения уравнения $5n + 3m = 17$ в целых числах. Описать классы эквивалентности Майхилла-Нероуда языка $L$. Является ли язык $L$ регулярным?

**Решение.**

С помощью расширенного алгоритма Евклида получим решение уравнения:

$$n = 3k + 1.$$

Аналогично задаче 1 найдём классы $L$-эквивалентности и получим, что язык $L$ — регулярный, где $L$ — язык всех слов, дающих в остатке 1 при делении на 3.

Классы $L$-эквивалентности:

$L_0$ — язык всех слов, дающих остаток 0 при делении на 3,

$L_1$ — язык всех слов, дающих остаток 1 при делении на 3,

$L_2$ — язык всех слов, дающих остаток 2 при делении на 3.

**Ответ:** Да, является регулярным.

# Задача 4

Являются ли регулярными следующие языки:

а) $\{xy : |x| > |y|,\ x \text{ содержит букву } a\}$,

б) $\{xy : |x| < |y|,\ x \text{ содержит букву } b\}$?

**Решение.**

а) Пусть

$$L = \{xy : |x| > |y|,\ x \text{ содержит букву } a\}.$$

Выберем два множества: $L_1$ — язык всех слов, содержащих букву $a$, $L_2$ — язык всех слов, не содержащих букву $a$. Проверим, являются ли они классами $L$-эквивалентности.

Если взять два произвольных слова из одного множества $L_1$ или $L_2$, то приписывание произвольного слова $z \in \Sigma^*$ меняет принадлежность к $L$ получившихся слов одновременно (в случае $L_1$ можно взять, например, $y = \varepsilon$).

Пусть теперь $u \in L_1, v \in L_2$ и $z = b$ — разделяющее слово. Видно, что при приписывании справа слова $z$ к словам $u$ и $v$ получаем, что $uz \in L$, а $vz \notin L$.

Заданные множества покрывают $\Sigma^*$.

Таким образом получили два класса $L$-эквивалентности, что по теореме Майхилла-Нероуда равносильно регулярности языка $L$. □

## Задача 5

Левым языком $L_q$ для состояния $q$ автомата назовём множество

$$L_q = \{x : q_0 \xrightarrow{x} q\}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ — полный ДКА, распознающий язык $L$. Доказать, что

а) Каждый левый язык $L_q$ является подмножеством некоторого класса $L$-эквивалентности.

б) Для каждого класса эквивалнтности $[x]$ существует такое подмножество состояний $Q_x \subseteq Q_{\mathcal{A}}$, что

$$[x] = \bigcup_{q \in Q_x} L_q.$$

в) Если $x \in L_q$, то

$$L_p \subseteq [x] \Longleftrightarrow R_q = R_p.$$

**Решение.**

а) Требуется доказать, что слова из $L_q$ лежат в одном классе $L$-эквивалентности. Действительно, рассмотрим два произвольных слова из $L_q$. Автомат $\mathcal{A}$ — полный ДКА, поэтому количество состояний конечно и в нём определены переходы по всем буквам алфавита $\Sigma$. Припишем к двум произвольным словам из $L_q$ произвольное слово $z \in \Sigma^*$. Запустим автомат. Через некоторое время работы автомат придёт в состояние $q$ по определению множества $L_q$ для обоих слов. Далее он будет обрабатывать слово $z$ для двух слов из $L_q$, поэтому он одновременно для них обоих придёт либо в принимающее состояние, либо в непринимающее состояние. Т. е. все слова из $L_q$ принадлежат некоторому классу $L$-эквивалентности. □

б) Рассмотрим все вершины автомата $\mathcal{A}$ (их конечное множество). Для каждой вершины рассмотрим множество $L_q$. Далее будем рассматривать $L$-эквивалентность слов из двух разных $L_q$. Если окажется, что некоторые слова являются эквивалентными, то в дальнейшем будем рассматривать эти два языка вместе (должна выполняться транзитивность). Таким образом получится некоторое разбиение множества всех $L_q$ для каждой вершины автомата на множества $L_{q_i}$ (которые попарно неэквивалентны). Т. е. существует такое подмножество состояний, что каждому классу эквивалентности соответсвует язык $L_q$, который представим в виде объединения $L_{q_i}$ по всем состояниям из рассматриваемого подмножества состояний. □

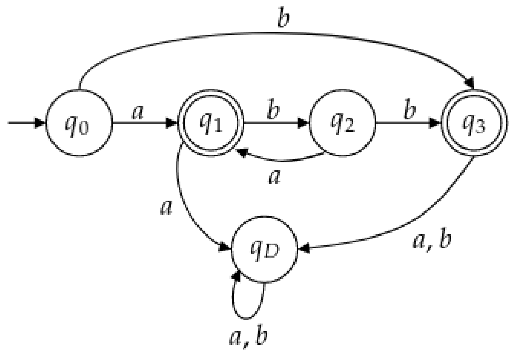
в) Если слова из $L_p$ и $L_q$ лежат в одном классе эквивалентности, то приписывание к ним справа произвольного слова $z \in \Sigma^*$ равносильно тому, что автомат закончит работу в одном и том же состоянии. Если при этом известно, что автомат закончил работу в принимающем состоянии, то это эквивалентно условию $R_q = R_p$ (в противном случае было бы противоречие принадлежности одному классу эквивалентности). □

# Задача 6

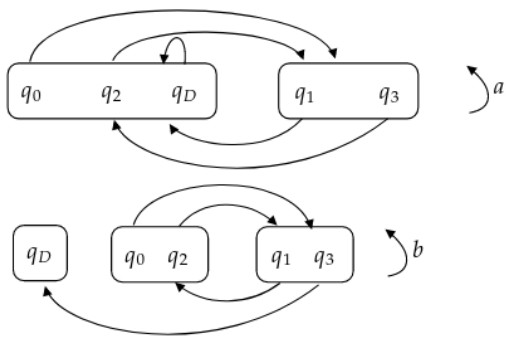
Построить минимальный ДКА по диаграмме.

**Решение.**

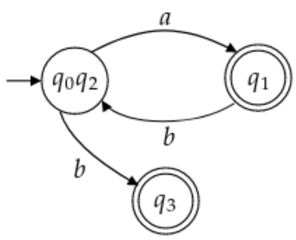
Воспользуемся алгоритмом минимазации ДКА. С помощью вершины $D$ дополним ДКА, заданный диаграммой:




Далее воспользуемся алгоритмом:




Откуда построим минимальный ДКА:




$\square$

# Задача 7

Показать, что следующий язык удовлетворяет лемме о разрастании для регулярных языков, но сам регулярным не является:

$$L = \{ab^{2^i} : i \geq 0\} \cup \{b^j : j \geq 0\ \} \cup \{a^m b^n : m > 1, n \geq 0\}.$$

**Решение.**

Пусть

$$L_1 = \{ab^{2^i} : i \geq 0\},$$

$$L_2 = \{b^j : j \geq 0\ \},$$

$$L_3 = \{a^m b^n : m > 1, n \geq 0\}.$$

Покажем, что выполняется лемма о накачке для языка $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$. Пусть $p = 1, x = \varepsilon$, $y = a, z = b^{2i}$ для $i \geq 0$. Тогда:

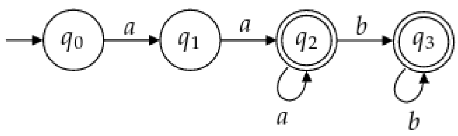
$$\text{при } k = 0 \text{ выполнено } w = b^{2^i} \in L_2 \subseteq L,$$

$$\text{при } k = 1 \text{ выполнено } w = ab^{2^i} \in L_1 \subseteq L,$$

$$\text{при } k > 0 \text{ выполнено } w = a^k b^{2^i} \in L_3 \subseteq L.$$

Аналогично даказываем выполнимость леммы о накачке для слов, взятых из $L_2$ ($p = 1$, $x = \varepsilon$, $y = b$).

Для языка $L_3$ построим автомат ДКА, распознающий его (корректность доказывается по индукции числа букв $a$ и $b$ в слове):




Теперь покажем, что $L$ не является регулярным. От противного. Предположим, что язык $L$ является регулярным: $L \in \mathrm{REG}$. Регулярные языки замкнуты относительно разности (дополнения) и объединения. Тогда верно следующее:

$$L_1 \cap L_2 = \varnothing,\ L_2 \cap L_3 = \varnothing\ L_1 \cap L_3 = \varnothing \Longrightarrow L_1 = L \setminus (L_2 \cup L_3).$$

Докажем, что $L_1 \notin \mathrm{REG}$.

Рассмотрим слово $w = ab^{2^p}$, где $p$ — константа леммы. Тогда для него существует разбиение (при котором выполняются условия леммы) такое, что

$$x = a,\ y = b^{k-1},\ z = b^{k+1},\ k = 2^p.$$

Если $L_1$ был бы регулярным, то условие $xy^iz \in L_1$ выполнялось для любого $i$. Но в данном случае условие выполняется в зависимости от чётности $i$ (для любого $p \geq 1$ сможем подобрать такое $i$, что принадлежность не выполняется). Т. е. выполняется отрицание леммы о накачке.

Таким образом показали, что для языка $L$ выполняется лемма о накачке, но он не является регулярным в силу нерегулярности $L_1$ и регулярности $L_2$ и $L_3$. $\square$