ТРЯП. Домашнее задание № 1

Шарапов Денис, Б05-005

Задача 1

1. $(b, 1) \overset{?}{\in} \{1, 2, 3\} \times \{a, b\}$.
2. Пусть A, B — конечные множества. Найти $|A \times B|$.
3. Описать множество $\mathbb{N} \times \varnothing$.

Решение.

1. По определению декартова произведения
$$\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b),\ (3, a),\ (3, b)\}.$$
Поэтому пара $(b, 1)$ не принадлежит указанному множеству:
$$(b, 1) \notin \{1, 2, 3\} \times \{a, b\}.$$
2. По определению декартового произведения
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$
По правилу произведения (комбинаторика) число способов выбрать сперва произвольный элемент из m-элементного множества A, а затем для него выбрать произвольный элемент из n-элементного множества B равно $m \cdot n$. Аналогично получим количество пар:
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$
3. Опишем множество по определению декартового произведения:
$$\mathbb{N} \times \varnothing = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N},\ y \in \varnothing\}.$$
В пустое множество $\varnothing$ не входит ни один элемент, поэтому множество $\mathbb{N} \times \varnothing$ не содержит ни одной пары. Поэтому
$$\mathbb{N} \times \varnothing = \varnothing.$$

Ответ: 1) Нет; 2) $|A| \cdot |B|$; 3) $\varnothing$.

Задача 2

Верно ли, что:

а) $\varepsilon \in \{a, aab, aba\}$, **б)** $\varnothing \in \{a, aab, aba\}$?

Решение.

В обоих случаях утверждение неверно: множество задано явно — перечислением его элементов. Элементы ε и $\varnothing$ не перечислены явно при задании множества $\{a, aab, aba\}$.

Ответ: Нет, неверно в обоих случаях.

Задача 3

Вычислить $\{a, a^3, a^5, \dots\} \cdot \{a, a^3, a^5, \dots\}$.

Решение.

Зададим множество $A = \{a, a^3, a^5, \dots\}$ следующим (эквивалентным) образом:

$$A = \{a^{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Тогда из определения степени A получим следующее множество:

$$A^2 = \{a^{2k+1} \cdot a^{2m+1} \mid k,\ m \in \mathbb{N}_0\} = \{a^{2(k+m+1)} \mid k,\ m \in \mathbb{N}_0\}.$$

Множество A^2 содержит в качестве элементов все чётные степени a (это видно из определения множества A^2, если перебирать всевозможные пары (k, m)). Отсюда получим искомое регулярное выражение:

$$\{a, a^3, a^5, \dots\} \cdot \{a, a^3, a^5, \dots\} = aa(aa)^*.$$

Ответ: $aa(aa)^*$.

Задача 4

Построить регулярное выражение (РВ) для

1. языка, который содержит все слова, в которых есть как буква a, так и буква b;
2. языка из слов, содержащих в качестве подслова ровно одно слово ab;
3. языка, слова которого не содержат подслово ab.

Решение.

1. Пусть L = «язык, который содержит все слова, в которых есть как буква a, так и буква b». Запишем регулярное выражение:

   $$R = (a \mid b)^* \cdot a \cdot (a \mid b)^* \cdot b \cdot (a \mid b)^* \ + \ (a \mid b)^* \cdot b \cdot (a \mid b)^* \cdot a \cdot (a \mid b)^*.$$

   Утверждение. $R \subseteq L$.

   Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $w \in R$. Оно имеет вид

   $$w = x \cdot a \cdot y \cdot b \cdot z \quad \text{или} \quad w = x \cdot b \cdot y \cdot a \cdot z,$$

   где $x, y, z \in \Sigma^*$ — произвольные слова над алфавитом Σ. Слово w содержит как букву a, так и букву b в обоих случаях. Поэтому верно утверждение

   $$\forall w \in R \hookrightarrow w \in L \Rightarrow R \subseteq L.$$

   $\square$

   Утверждение. $L \subseteq R$.

   Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $w \in L$. Оно имеет вид

   $$w = x \cdot a \cdot y \cdot b \cdot z \quad \text{или} \quad w = x \cdot b \cdot y \cdot a \cdot z,$$

где $x, y, z \in \Sigma^*$ — произвольные слова над алфавитом Σ. Докажем утверждение индукцией по количеству букв n в слове $w \in L$. База индукции $n = 2$: слово $w = ab$ или слово $w = ba$ $(x, y, z = \varepsilon)$. Предположение индукции: пусть верно для $n = k$. Переход: рассмотрим слово u длиной $|u| = |w| + 1 = k + 1$. Оно получено из слова w путем приписывания буквы a или b. Но подслово w слова u по предположению индукции уже содержало как букву a, так и букву b, поэтому приписывание новой произвольной буквы не поменяло «содержания» слова. $\square$

2. Пусть $L =$ «язык из слов, содержащих в качестве подслова ровно одно слово ab». Запишем регулярное выражение:

$$R = b^* a^* \cdot ab \cdot b^* a^*.$$

Утверждение. $R \subseteq L$.

Доказательство. Выберем произвольное слово $w \in R$. Рассмотрим его «структуру»:

$$w = b^i a^j \cdot ab \cdot b^k a^l, \quad i, j, k, l \geq 0.$$

Видно, что слово $w \in R$ содержит ровно одно подслово ab. Поэтому верно утверждение

$$\forall w \in R \hookrightarrow w \in L \Rightarrow R \subseteq L.$$

$\square$

Утверждение. $L \subseteq R$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $w \in L$. Разберём его «структуру». Для начала это слово содержит ровно одно подслово ab. После буквы b может идти произвольное число букв b. Определим их количество как $b^k,\ k \geq 0$. За ними может идти произвольное число букв a. Определим их количество как $a^l,\ l \geq 0$. За ними может идти только пустое слово ε, и только оно (букв a произвольное количество, после них остаётся только добавить b или ε). В противном случае придём к противоречию. Перед буквой a (подсловом ab) может идти произвольное число букв a. Определим их количество как $a^j,\ j \geq 0$. Перед ними может идти произвольное число букв b. Определим их количество как $b^i,\ i \geq 0$. Перед произвольным количеством букв b может идти только пустое слово ε (т. к. букв b произвольное количество, можем взять столько, сколько потребуется). В противном случае придём к противоречию.

Возможные противоречия: 1) взять подслово ab, добавить произвольное число букв b после него, добавить произвольное число букв a после него, добавить хотя бы одну букву b в конец. 2) взять подслово ab, добавить произвольное число букв a перед ним, добавить произвольное число букв b перед буквами a, добавить хотя бы одну букву a в начало.

Замечание: под «добавить в начало» подразумевается построение слова как конкатенация необходимого количества букв (начало) с подсловом ab и необходимым количеством букв (конец).

По построению произвольного слова $w \in L$ получим его в виде

$$w = \varepsilon \cdot b^i a^j \cdot ab \cdot b^k a^l \cdot \varepsilon, \quad i, j, k, l \geq 0.$$

Откуда следует утверждение

$$\forall w \in L \hookrightarrow w = b^i a^j \cdot ab \cdot b^k a^l \in b^* a^* \cdot ab \cdot b^* a^* = R \Rightarrow L \subseteq R.$$

$\square$

3. Пусть $L =$ «язык, слова которого не содержат подслово ab». Запишем регулярное выражение:
$$R = b^* a^*.$$

Утверждение. $R \subseteq L$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $w \in R$. Оно имеет вид

$$w = b^i a^j,\ i, j \geq 0.$$

Для любых i, j данное слово не содержит подслово ab. Поэтому верно утверждение:
$$\forall w \in R \hookrightarrow w \in L \Rightarrow R \subseteq L.$$

□

Утверждение. $L \subseteq R$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $w \in L$, т. е. w — слово, которое не содержит подслово ab. Докажем утверждение по индукции числа n букв a в слове w. База индукции $n = 0$: слово w принимает вид $w = b^i,\ i \geq 0$. Предположение индукции: пусть верно для $n = k$ букв a (т. е. верно, что слово, в котором встретилось k букв a, содержится в R). Переход индукции: докажем, что верно и для $n = k + 1$. Слово, не содержащее подслова ab имеет вид

$$w = b^i a^k : \quad k \text{ букв } a \ (k\text{-й шаг}).$$

На следующем шаге $(k+1)$ припишем букву a к слову w и получим новое слово u. Это возможно сделать двумя способами:

(a) $u = a \cdot w$ — противоречие по построению слова w при $i \neq 0$.
(b) $u = w \cdot a = b^i a^k \cdot a^k = b^i a^{k+1}$ $(i \geq 0)$.

Осталось воспользоваться предположением индукции при переходе. По предположению верно
$$w = b^i a^k \in R.$$

Теперь припишем букву a одним из двух способов. В пункте (a) получим слово $u_{(a)}$ вида $u_{(a)} = \varepsilon \cdot a^{k+1}$, где $i = 0$. Заметим, что $u_{(a)} \in R$. В пункте (b) получим слово $u_{(b)}$ вида $u_{(b)} = b^i a^{k+1}$, где $i \geq 0$. Заметим, что $u_{(b)} \in R$. Других слов, кроме как построенного w, быть не может, так как приходим к противоречию (к примеру, это описано в пункте (a)). То есть, было доказано, что произвольное слово $w \in L$ также содержится и в R: $w \in R$. Это и доказывает требуемое утверждение. □

Задача 5

Определим язык $L \subseteq \{a, b\}^*$ индуктивными правилами:

1. $\varepsilon, b, bb \in L$;
2. вместе с любым словом $x \in L$ в L также входят слова $ax, bax, bbax$;
3. никаких других слов в L нет.

Язык $T \subseteq \{a, b\}^*$ состоит из всех слов, в которых нет трёх букв b подряд.

1. Докажите или опровергните, что $L = T$.

2. Запишите язык T в виде регулярного выражения.

Решение.

1. **Утверждение.** $L \subseteq T$.

   Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $w \in L$. Докажем утверждение по индукции числа n букв a в слове w. База индукции $n = 0$: $w \in \{\varepsilon, b, bb\}$. Предположение индукции: пусть будет верно для $n = k$. Переход индукции: докажем, что верно для $n = (k + 1)$.

   На k-ом шаге слово w имеет один из трёх видов:

   (a) $w = ax \in T$,
   (b) $w = bax \in T$,
   (c) $w = bbax \in T$,

   где x — подслово, содержащее $n = (k - 1)$ букв a. Заметим, что во всех случаях $x \in T$, т. к. слово w во всех случаях разбивается на подслова, каждое их которых не содержит трёх букв b подряд.

   Теперь выполним переход индукции. По индуктивному правилу №2 построения языка L получим новое слово $u \in L$ для каждого из трёх пунктов (a, b, c):

   $$u = aw \quad \text{или} \quad u = baw, \quad \text{или} \quad u = bbaw.$$

   Во всех трёх случаях по предложению индукции $w \in T$ и полученное на $(k + 1)$ шаге слово u не содержит трёх букв b подряд. Это и доказывает требуемое утверждение. □

   Утверждение. $T \subseteq L$.

   Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $w \in T$. Докажем утверждение по индукции числа n букв a в слове w. База индукции $n = 0$: $w \in \{\varepsilon, b, bb\}$. Предположение индукции: пусть верно для $n = k$. Переход индукции: докажем, что верно для $n = (k + 1)$.

   На k-м шаге индукции слово $w \in T$ имеет один из следующих видов:

   (a) $w = ax$, где x — слово, не содержащее трёх букв b подряд. В этом случае на $(k + 1)$ шаге воспользуемся индуктивным правилом №2 построения языка L и получим новое слово $u \in L$, содержащее в себе $n = (k + 1)$ букв a и не имеющее в себе трёх букв b подряд.
   (b) $w = bax$, где x — слово, не содержащее трёх букв b подряд. В этом случае на $(k+1)$ шаге воспользуемся индуктивным правилом №2 построения языка L и аналогично получим слово $u \in L$, которое содержит в себе $n = (k+1)$ букв a и не имеет в себе трёх букв b подряд.

   □

   Используя доказанные утверждения, получаем, что $L = T$.

   Примечание: на самом деле можно было использовать индукцию по количеству шагов построения языка L, но в данном случае выбранная индукция по числу n букв a в слове эквивалентна числу шагов в построении, т. к. на каждом шаге количество букв a в получившемся слове увеличивается на 1.

2. $R = (a \mid ba \mid bba)^* \cdot (\varepsilon \mid b \mid bb)$.

   Утверждение. $R \subseteq T$.

   Доказательство. Индукцией по числу n букв a и по построению языка R (в том числе по определению оператора *) получаем, что произвольное слово $w \in R$ не содержит трёх букв b подряд. Т. е. $w \in T$. □

   Утверждение. $T \subseteq R$.

   Доказательство. Рассмотрим произвольное слово $w \in T$. Докажем индукцией по числу n букв a в слове w. База индукции $n = 0$: $\varepsilon, b, bb \in R$. Предположение индукции: пусть верно для $n = k$. Переход индукции; докажем, что верно для $n = (k+1)$.

   На $(k+1)$ шаге слово w имеет один из видов:

   (a) $w = ax, x \in T$,

   (b) $w = bax, x \in T$,

   (c) $w = bbax, x \in T$,

   где $x \in R$ по предложению индукции.

   По построению регулярного выражения $x \in (a \mid ba \mid bba)^k$. Умножение на $y \in \{\varepsilon, b, bb\}$ не меняет количество букв a в слове w. Поэтому $x \in (a \mid ba \mid bba)^k \cdot (\varepsilon \mid b \mid bb)$. И, следовательно, $ax \in (a \mid ba \mid bba)^{k+1} \cdot (\varepsilon \mid b \mid bb) \subseteq (a \mid ba \mid bba)^* \cdot (\varepsilon \mid b \mid bb) = R$. □

Задача 6

1. Задать множество $\{a^n \mid n > 0\} \times \{b^n \mid n \geq 0\}$ формулой, которая не использует символ $\times$.

2. Описать язык $\{a^{3n} \mid n > 0\} \cap \{a^{5n+1} \mid n \geq 0\}^*$ регулярным выражением.

Решение.

1. $\{a^n \mid n > 0\} \times \{b^n \mid n \geq 0\} = \{(a^n, b^m) \mid n > 0, m \geq 0\}$.

2. Пусть $A = \{a^{3n} \mid n > 0\}$, $B = \{a^{5n+1} \mid n \geq 0\}^*$.

   Распишем множество B:
   $$B = \{a, a^6, a,^{11}, \ldots\}^*.$$

   Заметим, что $a \in B$, поэтому множество B можно переписать в следующем виде:
   $$B = \{\varepsilon, a^1, a^2, a^3, \ldots\},$$

   т. е. множество B — это множество, содержащее все степени a^i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Поэтому пересечение множеств $A \cap B$ имеет следующий вид:
   $$A \cap B = \{a^{3n} \mid n > 0\} = A.$$

   Теперь запишем регулярное выражение для множества A:
   $$A = (aaa)^+.$$

Ответ: 1) $\{(a^n, b^m) \mid n > 0, m \geq 0\}$; 2) $(aaa)^+$.