ТРЯП. Домашнее задание № 10

Шарапов Денис, Б05-005

Задача 1

Теорема. *КС-грамматика* $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ *является* $LL(k)$*-грамматикой тогда и только тогда, когда для двух различных правил* $A \to \beta$ *и* $A \to \gamma$ *из* P *пересечение*

$$FIRST_k(\beta\alpha) \cap \ FIRST_k(\gamma\alpha) \tag{*}$$

пусто при всех таких $\omega A\alpha$*, что* $S \Rightarrow_l^* \omega A\alpha$*.*

а) Не является $LL(k)$-грамматикой при любом $k \in \mathbb{N}$.

1. $S \Rightarrow_l^* Aa^k b \Rightarrow_l a^{k+1}b,\ \ \omega = \varepsilon,\ \ \alpha = a^k b,\ \ \beta = a,$
2. $S \Rightarrow_l^* Aa^k b \Rightarrow_l Aa^{k+1}b,\ \ \omega = \varepsilon,\ \ \alpha = a^k b,\ \ \gamma = Aa.$

При этом пересечение (*) не пусто при любом $k \in \mathbb{N}$.

б) Является $LL(k)$-грамматикой при $k > 1$.

1. $S \Rightarrow_l^* a^k Ab \Rightarrow_l a^k \cdot a \cdot b,\ \ \omega = a^k,\ \ \alpha = b,\ \ \beta = a,$
2. $S \Rightarrow_l^* a^k Ab \Rightarrow_l a^k \cdot aA \cdot b,\ \ \omega = a^k,\ \ \alpha = b,\ \ \gamma = aA.$

При этом пересечение (*) пусто при $k > 1$.

в) Не является $LL(k)$-грамматикой для любого $k \in \mathbb{N}$.

1. $S \Rightarrow_l^* aBBb \Rightarrow_l a \cdot ab \cdot Bb,\ \ \omega = a,\ \ \alpha = Bb,\ \ \beta = ab,$
2. $S \Rightarrow_l^* aBBb \Rightarrow_l a \cdot \varepsilon \cdot Bb,\ \ \omega = a,\ \ \alpha = Bb,\ \ \gamma = \varepsilon.$

По индукции k получаем, что пересечение (*) не пусто (при $k = 1,\ k = 2$ берём $B \to ab$ в обоих случаях; при $k > 2$, берём $B \to \varepsilon$ в первом случае и $B \to ab$ во втором):

$$\mathrm{FIRST}_k(abBb) \cap \mathrm{FIRST}_k(Bb) \neq \varnothing.$$

Поэтому грамматика не является $LL(k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

г) Не является $LL(k)$-грамматикой для любого $k \in \mathbb{N}$.

1. $S \Rightarrow_l^* a \cdot A \cdot aAbb \Rightarrow_l a \cdot AaAb \cdot aAbb,\ \ \omega = a,\ \ \alpha = aAbb,\ \ \beta = AaAb,$
2. $S \Rightarrow_l^* a \cdot A \cdot aAbb \Rightarrow_l a \cdot \varepsilon \cdot aAbb,\ \ \omega = a,\ \ \alpha = aAbb,\ \ \gamma = \varepsilon.$

Заметим, что пересечение (*) содержит слово $w = a^k$. Поэтому грамматика не является $LL(k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

д) $LL(k)$-грамматика для любого $k \in \mathbb{N}$.

1. $S \Rightarrow_l^* aa \cdot B \cdot B \Rightarrow_l aa \cdot aBB \cdot B,\ \ \omega = aa,\ \ \alpha = B,\ \ \beta = aBB,$
2. $S \Rightarrow_l^* aa \cdot B \cdot B \Rightarrow_l aa \cdot b \cdot B,\ \ \omega = aa,\ \ \alpha = B,\ \ \gamma = b.$

Действительно, пересечение (*) пусто (и правило не содержит пустого слова). Поэтому эта грамматика является $LL(k)$-грамматикой.

□

Задача 2

Воспользуемся алгоритмом удаления правого ветвления и получим грамматику

$$S \to Ab, \quad A \to aA', \quad A' \to a \mid \varepsilon.$$

Построим таблицы FIRST и FOLLOW:

	FIRST(X)			FOLLOW(X)		
X	S	A	A'	S	A	A'
F_0	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\$$	$\varnothing$	$\varnothing$
F_1	a	a	a, ε	$\$$	b	$\varnothing$
F_2	a	a	a, ε	$\$$	b	b

Теперь воспользуемся алгоритмом построение анализатора:

	a	b	$\$$
S	$S \to Ab$	error	error
A	$A \to aA'$	error	error
A'	$A' \to a$	$A' \to \varepsilon$	error

Получившаяся грамматика является $LL(1)$-грамматикой, т. к. в каждой ячейке записано не более одного правила. □

Задача 3

Для начала воспользуемся алгоритмом удаления левой рекурсии:

$S \to baaA \mid babA,$

$A \to aA \mid bA \mid a \mid b.$

Теперь удалим правое ветвление:

$S \to baS',$

$S' \to aA \mid bA,$

$A \to aA \mid bA \mid \varepsilon.$

Построим таблицу FIRST и FOLLOW:

	FIRST(X)			FOLLOW(X)		
	S	S'	A	S	S'	A
F_0	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\$$	$\varnothing$	$\varnothing$
F_1	b	a, b	a, b, ε	$\$$	$\$$	$\varnothing$
F_2	b	a, b	a, b, ε	$\$$	$\$$	$\$$

Построим анализатор:

	a	b	$\$$
S	error	$S \to baS'$	error
S'	$S' \to aA$	$S' \to bA$	error
A	$A \to aA$	$A \to bA$	$A \to \varepsilon$

Работа анализатора на слове $baab$:

$$S \Rightarrow baS' \Rightarrow ba \cdot aA \Rightarrow baab.$$

□

Задача 5

Заметим, что данная грамматика задаёт язык Дика, который задаётся правилами

$$S \to (S)S \mid \varepsilon.$$

Привести исходную грамматику к такому виду можно с помощью алгоритмов удаления левой рекурсии и правого ветвления.

Докажем, что данная граматика является $LL(1)$-грамматикой.

1. $S \Rightarrow_l^* (S)S \Rightarrow_l (\ (S)S\ )S \ \ \omega = (,\ \ \alpha =)S,\ \ \beta = (S)S,$
2. $S \Rightarrow_l^* (S)S \Rightarrow_l (\ \varepsilon\ )S,\ \ \omega = (,\ \ \alpha =)S,\ \ \gamma = \varepsilon.$

При этом

$$\mathrm{FIRST}_1\,[\ (S)S)S\ ] \cap \mathrm{FIRST}_1\,[\ )S\ ] = \varnothing, \tag{1}$$

$$\mathrm{FIRST}_1\,[S] \cap \mathrm{FOLLOW}_1\,[S] = \varnothing. \tag{2}$$

Заметим, что непосредственно после S в выводах грамматики может стоять только символ «)». Поэтому верно утверждение (2). □

Задача 6

Определение. Если каждое правило грамматики имеет вид либо $A \to xB$, либо $A \to x$, где $A, B \in N$, $x \in T^*$, то её называют *праволинейной.*

Приведём пример праволинейной грамматики, которая не является $LL(1)$-грамматикой. Пусть $G = \langle \{S, A\},\ \{a, b\},\ P,\ S\rangle$, где P определяется как

$$S \to A, \quad A \to ab \mid a.$$

Она не является $LL(1)$-грамматикой по критерию (нет правила с ε):

$$\mathrm{FIRST}_1(ab) \cap \mathrm{FIRST}_1(a) = \{a\} \neq \varnothing.$$

□

Задача 7

Да, верно. Рассмотрим грамматику $G = \langle \{S, A, B\},\ \{a, b, \$\},\ P,\ S\rangle$, где P определяется как

$$S \to AB, \quad A \to \varepsilon, \quad B \to \varepsilon.$$

Построим анализатор (таблицы FIRST и FOLLOW содержат только ε и «\$» соответственно):

	a	b	\$
S	error	error	$S \to AB$
A	error	error	$A \to \varepsilon$
B	error	error	$B \to \varepsilon$

Каждой ячейке анализатора соответствует не более одного правила, следовательно, эта граматика является $LL(1)$-грамматикой. □

Задача 8

Нет, неверно. Рассмотрим грамматику $G = \langle \{S, A, B\},\ \{a, b, \$\},\ P,\ S\rangle$, где P определяется как

$$S \to AB, \quad A \to \varepsilon, \quad B \to \varepsilon.$$

Заметим, что $\mathrm{FOLLOW}(A) \cap \mathrm{FOLLOW}(B) = \{\$\}$. При этом грамматика G является $LL(1)$-грамматикой (задача 7). □