السؤال الأول:

لتكن المصفوفات

$$D=\begin{bmatrix}1&5&2\\-1&0&1\\3&2&4\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}1&4&2\\3&1&5\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}4&-1\\0&2\end{bmatrix}\quad,\quad A=\begin{bmatrix}3&0\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

احسب المقادير التالية اذا كان ممكن وفي حال النفي علل اجابتك.

$$a)\ 2A^T+C\quad,\quad b)\ B^T+5C^T\quad,\quad c)\ B-B^T\quad,\quad d)\ A.B\quad,\quad e)\ \mathrm{B.A}\quad,\quad f)\ tr(D^T)$$

الحل:

$$a)\ A^T=\begin{bmatrix}3&-1&1\\0&2&1\end{bmatrix}\ \rightarrow\ 2A^T+C=\begin{bmatrix}7&2&4\\3&5&7\end{bmatrix}$$

$b)\ B^T+5C^T$ لا يمكن الجمع بسبب اختلاف المرتبة

B^T مرتبتها (2×2) و C^T مرتبتها (3×2)

$$c)\ B-B^T=\begin{bmatrix}4&-1\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$d)\ A.B=\begin{bmatrix}12&-3\\-4&5\\4&1\end{bmatrix}$$

$e)\ \mathrm{B.A}$ غير ممكن لأن عدد أعمدة B لا يساوي عدد أسطر A

$$f)\ D^T=\begin{bmatrix}1&-1&3\\5&0&2\\2&1&4\end{bmatrix}\ \rightarrow\ tr(D^T)=1+0+4=5$$

السؤال الثاني:

املأ الفراغات الآتية:

١-لتكن المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ عندئذ فإن المصفوفة المعاكسة لها هي $B^{-1} = \cdots$

٢- ان مركبات المتجه $U = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ بالنسبة للأساس $S = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ هي $[u]_s = \cdots$

وعبارة u هي $u = \cdots v_1 + \cdots v_2$

الحل:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$[u]_s = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \quad u = -2v_1 + 4v_2$$

السؤال الثالث:

هل يمكن كتابة المتجه $u = (-1,0,1)$ كتركيب خطي بمتجهات المجموعة

$$S = \{u_1 = (3,2,-1) \ , \ u_2 = (2,1,-1)\} \subseteq R^3$$

علل اجابتك وفي حال الإيجاب اكتب عبارة u

الحل:

سنبحث عن قيم حقيقية C_1 , C_2 تحقق :

$$u = c_1u_1 + c_2u_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c_1 + 2c_2 \\ 2c_1 + c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{bmatrix}$$

١. $3c_1 + 2c_2 = -1$
٢. $2c_1 + c_2 = 0$
٣. $-c_1 - c_2 = 1$

من 2 ← $c_2 = -2c_1$ نعوض في 3 ينتج لدينا $c_1 = 1$ ← $c_2 = -2$

نتحقق من 1 : $3(1) + 2(-2) = 3 - 4 = -1$ محققة.

وبالتالي الجواب نعم يمكن كتابة u كتركيب خطي بمتجهات المجموعة وعبارة u هي :

$$u = u_1 - 2u_2$$

السؤال الرابع:

لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

اذا علمت أن $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ قيمة ذاتية مضاعفة للمصفوفة A و $\lambda_3 = 1$ قيمة ذاتية بسيطة لها

١- أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A المقابلة للقيم الذاتية λ_i

٢-أوجد قاعدة وبعد الفضاء الذاتي $E(\lambda)$ المقابل لكل قيمة ذاتية λ

٤-هل المصفوفة A قطورة؟ وفي حال الإيجاب أوجد مصفوفة التحويل P التي تحول المصفوفة A للشكل القطري ثم اكتب المصفوفة القطرية D المشابهة لها.

الحل:

$$\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$$

(١) $$\lambda_1 = \lambda_2 = 5 \quad \rightarrow \quad D = 5I - A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$$

$$D \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(D) = 1 < 3$ وبالتالي يوجد عدد لا نهائي من الحلول بمجهولين اختياريين ليكن $x_2 = \alpha$ و $x_3 = \beta$

نكتب جملة المعادلات المكافئة :

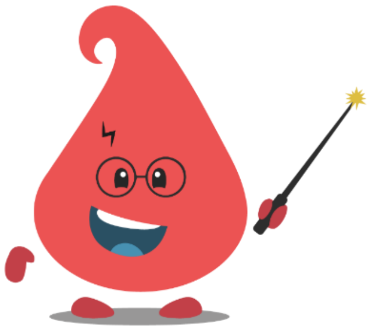
$$2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \leftarrow \quad 2x_1 + 2\alpha = 0 \quad \leftarrow \quad x_1 = -\alpha$$

وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha + 0\beta \\ \alpha + 0\beta \\ 0\alpha + \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أي المتجهات الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda = 5$ هي:

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_3 = 1 \;\rightarrow\; D = I - A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 + R_1$$

$$D \sim \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$D \sim \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(D) = 2 < 3$ وبالتالي يوجد عدد لا نهائي من الحلول بمجهول اختياري واحد وهو $x_2 = t$

نكتب جملة المعادلات المكافئة :

$$-2x_1 + 2x_2 = 0 \;\rightarrow\; -2x_1 = -2x_2 \;\rightarrow\; x_1 = t$$
$$-4x_3 = 0 \;\rightarrow\; x_3 = 0$$

وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ هي:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٢)

$$S_{E(\lambda=5)} = \left\{ P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim(E(\lambda = 5)) = card\,(S) = 2$$

$$S_{E(\lambda=1)} = \left\{ P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim(E(\lambda = 1)) = card\,(S) = 1$$

٤)

$$\dim(E(\lambda = 5)) = order(\lambda = 5) = 2$$

وبالتالي المصفوفة قطورة ومصفوفة التحويل :

$$P = [P_1/P_2/P_3]$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \det(P) = 2$$

$$[P_{ij}]_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$adj(P) = [P_{ij}]_n{}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} adj(P) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة قطرية المدخلات على قطرها الرئيسي هي القيم الذاتيةللمصفوفة A

السؤال الخامس :

لتكن w تمثل مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n القابلة للقلب هل w مغلقة بالنسبة لعملية جمع المصفوفات علل اجابتك.

الحل:

لا ليست مغلقة فليس كل مصفوفتين قابلتين للقلب مجموعهما قابل للقلب

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \det(A) = 1 \quad \text{قابلة للقلب}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \det(B) = 1 \quad \text{قابلة للقلب}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \det(A+B) = 0 \quad \text{غير قابلة للقلب}$$