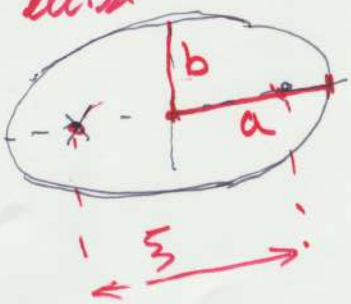
1

LEGGE GRAVITAZIONALE

TYCHO BRAHE

$\pi a b$

ellisse



$e = \frac{\xi}{2a}$

I° ;

II°

Il vettore $\vec{r}$ spazza aree uguali in Tempi uguali

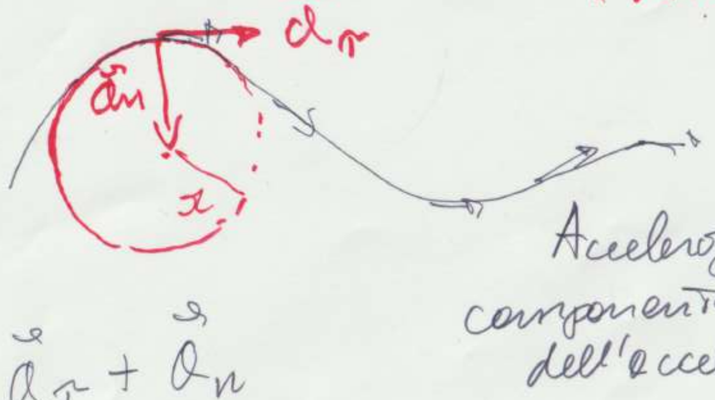
velocità areolare $= \frac{\Delta A}{\Delta t}$

$\xi = 0$

② III°

$$T^2 \propto a^3$$

$$\|\vec{a}_n\| = \frac{v^2}{r}$$



Accelerazione normale = componente centripeta dell'accelerazione

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

3

Moto circolare uniforme

GIRO DELLA MORTE

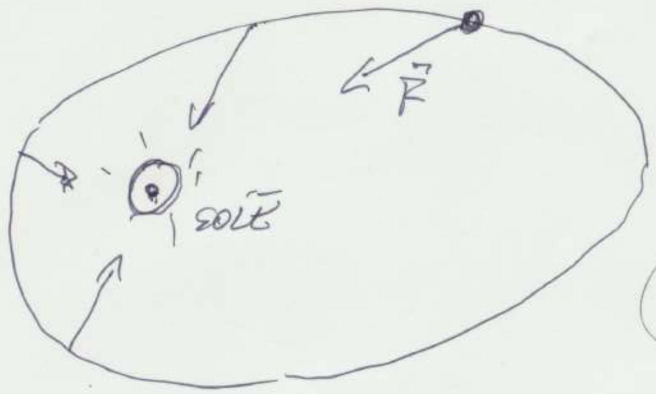
Moto circolare non uniforme

$\vec{a}_R = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

↓ componente centripeta

4

Forze centrali



$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\|\vec{F}\| \propto \frac{1}{r^2}$$

Legge gravitazionale di Newton (legge elementare)

Forza attrattiva

$$\|\vec{F}\| = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

costante gravitazionale

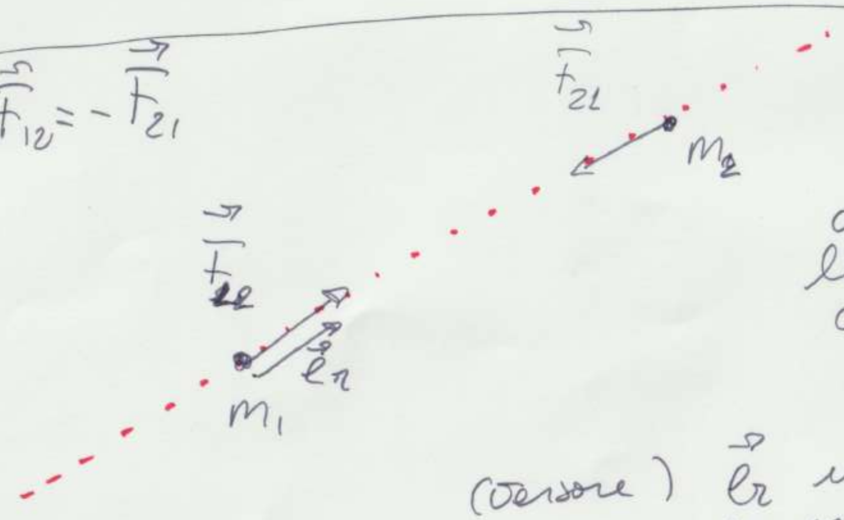
$$G \simeq 6.7 \cdot 10^{-11}\,\frac{N\,m^2}{Kg^2}$$

5

Somiglianza con la legge di Coulomb

$$\|\vec{F}\| = K_c \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$



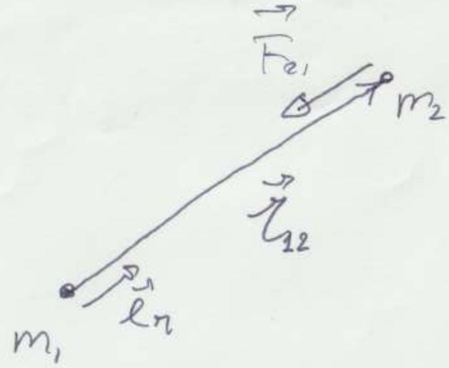
La forza gravitazionale agisce lungo la retta congiungente le due masse

(versore) $\vec{e}_r$ un vettore unitario da m_1 a m_2

$\|\vec{e}_r\| = 1$

Voglio rappresentare formalmente, usando i versori, la forza che agisce sulla massa m_2

(6)



$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}_{12}}{\|\vec{r}_{12}\|}$$

$$\vec{F}_{21} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\vec{e}_r$$

Proiezione radiale

$$\boxed{F_r = \vec{F}_{21}\cdot\vec{e}_r = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r}$$

$$F_r = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \qquad F_r = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

A1

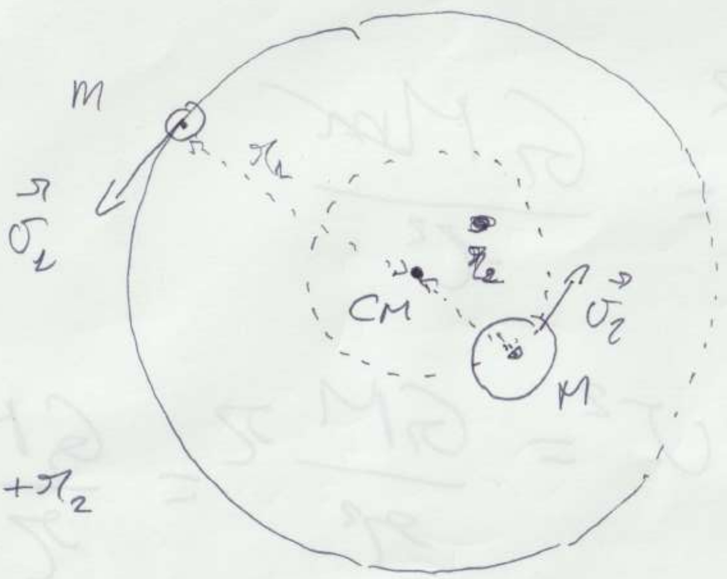
Sono note

m M

d

Dimostrare che

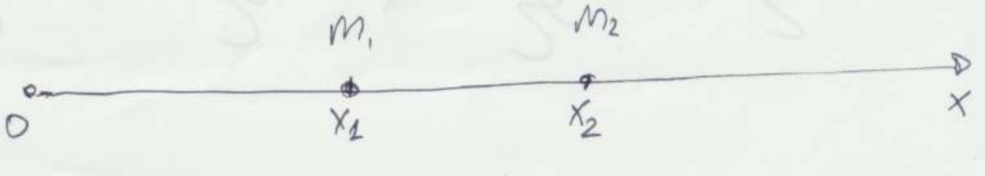
$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M+m)}$$



$$d = r_1 + r_2$$

$$m r_1 = M r_2$$

PARENTESI



A2

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

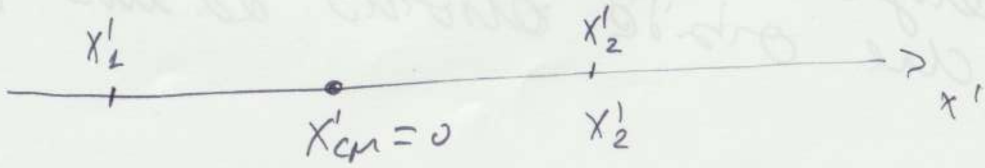
Mettiamo l'origine nel centro di massa e indichiamo le nuove coordinate x'

$$x'_{cm} = 0$$

$$x'_{cm} = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$m_1 x'_1 + m_2 x'_2 = 0$$

$$m_1 x'_1 = - m_2 x'_2 \qquad m_1 |x'_1| = m_2 |x'_2|$$



A3

$m\|\vec{a}_1\| = \|\vec{F}_{12}\|$

$M\|\vec{a}_2\| = \|\vec{F}_{21}\|$ EQUAZIONI DEL MOTO

$\cancel{\|\vec{F}_{12}\| = \|\vec{F}_{21}\| = G}$

$$\|\vec{F}_{12}\| = \|\vec{F}_{21}\| = G\frac{mM}{d^2}$$

$$\|\vec{a}_1\| = \frac{v_1^2}{r_1} \qquad \|\vec{a}_2\| = \frac{v_2^2}{r_2}$$

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$$

A4

$$\|\vec{a}_1\| = \frac{\omega^2 r_1^2}{r_1} = \omega^2 r_1$$

$$d = r_1 + r_2$$

$$\|\vec{a}_2\| = \omega^2 r_2$$

$$\cancel{m}\omega^2 r_1 = \frac{GM\cancel{m}}{d^2} \qquad \omega^2 r_1 = \frac{GM}{d^2}$$

$$+$$

$$\cancel{M}\omega^2 r_2 = G\frac{\cancel{M}m}{d^2} \qquad \omega^2 r_2 = \frac{Gm}{d^2}$$

AS

$$\omega^2(\underbrace{r_2 + r_1}_{d}) = \frac{GM}{d^2} + \frac{Gm}{d^2}$$

$$\omega^2 d = \frac{G}{d^2}(M+m)$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G}{d^3}(M+m)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M+m)}$$

(D1)

$$F_{r_{\text{orbita}}}(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

La forza gravitazionale è conservativa

Ammette una primitiva $\mathcal{P}(r)$

$$U(r) = -\mathcal{P}(r) \qquad \mathcal{P}(r) = \frac{GMm}{r} + c$$

c è una costante additiva arbitraria

D2

$$F_2(r) = \frac{d}{dr} U(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{GMm}{r} + C\right) =$$

$$= \frac{d}{dr}\frac{GMm}{r} = GMm \frac{d}{dr}\frac{1}{r} = GMm \frac{d}{dr} r^{-1} =$$

$$= -GMm \cdot r^{-2} =$$

$$= -\frac{GMm}{r^2}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

$n = -1$

D3

$m_1 \quad m_2$

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} - C \longrightarrow \emptyset$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

Energia meccanica di una massa m che orbita attorno ad una massa M

D4 Nel caso dell'orbita circolare

A1

$$\frac{\cancel{m} v^2}{r} = \frac{G M \cancel{m}}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{r^2} r = \frac{GM}{r}$$

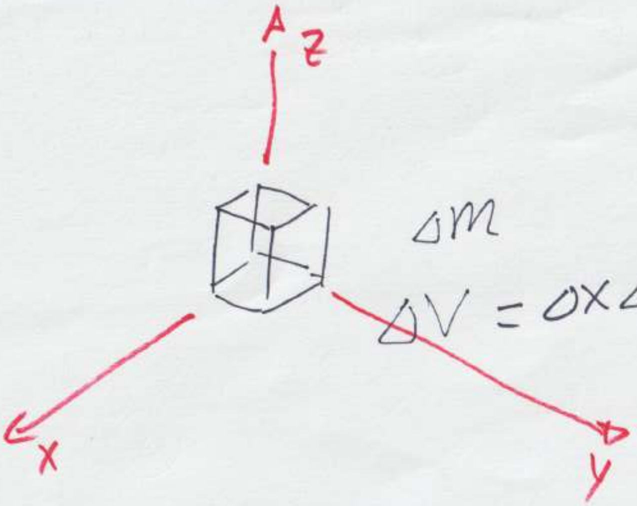
$$E = \frac{1}{2} m \frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{r}$$

D5

Nel caso delle orbite ellittiche

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{a}$$

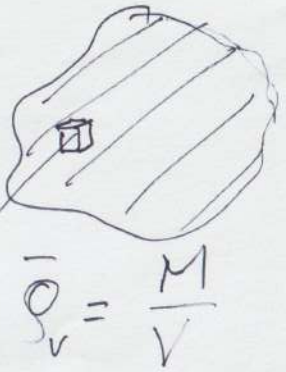
1



ΔM

$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$

M, V



$$\bar{\rho}_{\Delta V} = \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

$$\bar{\rho}_V = \frac{M}{V}$$

ρ

$\bar{\rho}_{\Delta V} \neq \bar{\rho}_V$ massa è distribuita in modo disomogeneo

densità volumica della massa locale / densità di volume o volumica

(2)

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

La massa sia distribuita in modo continuo

ρ = costante in tutti punti del volume occupato dalla massa

distribuzione omogenea

" uniforme

$dm = \rho \, dV$

$$\int_0^M dM = \int_0^V \rho \, dV = \rho \int_0^V dV$$

$M = \rho V$

$\rho = \frac{M}{V}$

(3) Forza Gravitazionali tra sfere

Teorema di Newton

GUSCIO SFERICO

ΔR = SPESSORE

M = massa guscio

$r > R$

$$\|\vec{F}\| = G \frac{Mm}{r^2}$$

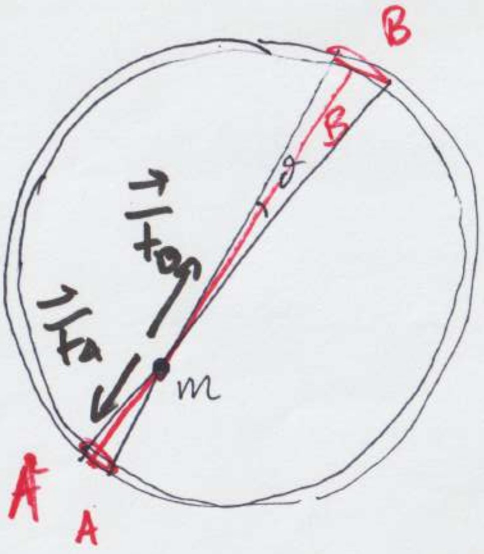
Il guscio sferico agisce su m come se la sua massa M fosse concentrata nel suo centro.

(4) $r' < R$ dentro la cavità

$$\|\vec{F}\| = 0$$

$$\Delta R \ll R$$

$$M = \rho\, 4\pi R^2 \cdot \Delta R$$



A = distanza m dal tappo A

B = distanza ~~dato~~ m dal tappo B

$$m_A = S_A \Delta r \cdot \rho$$

$$m_B = S_B \Delta r \cdot \rho$$

rapporto aree $\frac{\text{tappo A}}{\text{tappo B}} = \frac{S_A}{S_B} = \frac{A^2}{B^2}$

5

RELATIVAMENTE AI DUE TAPPI

$$\vec{F}_R = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

il Teorema di Newto

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$$

Dimostriamo

$$\|\vec{F}_A\| = \|\vec{F}_B\|$$

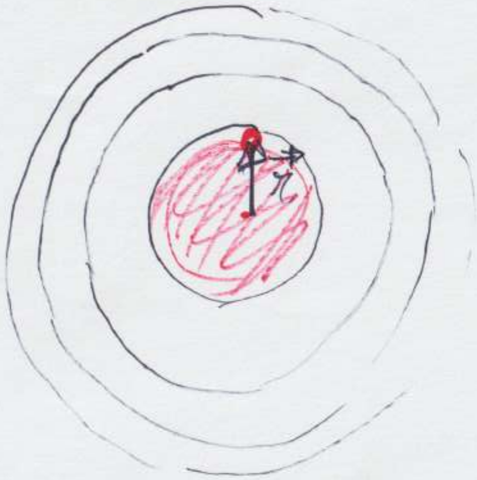
$$\frac{\|\vec{F}_A\|}{\|\vec{F}_B\|} = 1$$

$$\|\vec{F}_B\| = \frac{G m_B m}{B^2}$$

$$\|\vec{F}_A\| = G\frac{m_A m}{A^2}$$

$$\frac{\|\vec{F}_A\|}{\|\vec{F}_B\|} = \frac{m_A/A^2}{\frac{m_B}{B^2}} = \frac{m_A}{m_B}\frac{B^2}{A^2} = \frac{S_A \cancel{\Delta r \rho}}{S_B \cancel{\Delta r \rho}} \cdot \frac{B^2}{A^2} = \frac{A^2}{B^2}\frac{B^2}{A^2} = 1$$

(6)



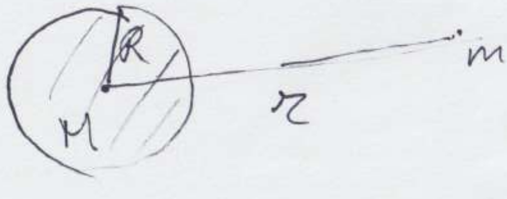
$$\boxed{\vec{F}_{(r)} = -\alpha \vec{r}}$$

All'interno di una sfera piena con massa distribuita uniformemente

---

Corollario del teorema di Newton

$$\|\vec{F}\| = \frac{Mm}{r^2}$$



(7)

Calcolare la velocità di fuga.

La velocità di fuga ~~è quella~~ è la velocità minima che deve avere una massa m lanciato dalla superficie del corpo celeste affinchè possa raggiungere un punto all'infinito.

$$K_i + U_i = \underbrace{K_\infty}_{=0} + \underbrace{U_\infty}_{=0} = 0$$

$g = \frac{GM}{R^2}$ → raggio Terra

∞

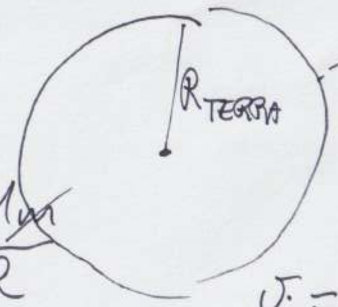
$$v_i = \sqrt{2gR}$$

$\uparrow$

$U_\infty = 0$

$K_\infty = 0$

$K_i = -U_i$



$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_i^2 = G\frac{M\cancel{m}}{R}$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$U_i = -\frac{GMm}{R}$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$$