第八章 假设检验

- 第八章 假设检验
  - 8.1 假设检验的基本问题
    - 8.1.4 假设检验的流程
  - 8.2 一个总体参数的检验
    - 8.2.1 检验统计量的确定
    - 8.2.2 总体均值的检验
    - 8.2.3 总体比例的检验
    - 8.2.4 总体方差的检验
  - 8.3 两个总体参数的检验
    - 8.3.1 检验统计量的确定
    - 8.3.2 两个总体均值之差的检验
    - 8.3.3 两个总体比例之差
    - 8.3.4 两个总体方差比的检验
    - 8.3.5 检验中的匹配样本
  - 8.4 检验问题的进一步说明

8.1 假设检验的基本问题

H_0 原假设（$=,\leq,\geq$），H_1 备择假设（$\neq,>,<$）互斥。

α **错误：** 原假设为真，但被拒绝了，页脚弃真错误；

β **错误：** 原假设为假，却被接受了，也叫取伪错误。

8.1.4 假设检验的流程

1. 提出原假设和备择假设
2. 计算 z 统计量，将统计量转化为标准得分，
3. 根据显著性水平（α）查表得到临界值，并与 z 进行比较。（单侧检验还是双侧检验）
4. 根据 z 是否在临界值之间决定是否接受原假设。

8.2 一个总体参数的检验

8.2.1 检验统计量的确定

样本量大或者总体正态，用 z 统计量，如果 σ 未知，则用 s 替代。

$$z=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{1}$$

小样本且标准未知，用 t 统计量，自由度为 $n-1$

$$t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \tag{2}$$

8.2.2 总体均值的检验

大样本 z 统计量，小样本 t 统计量。

8.2.3 总体比例的检验

如果总体比例的真实值为π，假设总体比例为 π_0，样本比例为 p，使用 z 统计量进行假设检验

$$z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}} \tag{3}$$

8.2.4 总体方差的检验

如果总体方差的真实值为 σ^2，假设值为 σ_0^2，样本方差为 s^2，使用 χ^2 统计量进行假设检验，

χ^2 检验通常是单侧检验，临界点在 χ^2 分布右侧斜尾方向。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \tag{4}$$

8.3 两个总体参数的检验

8.3.1 检验统计量的确定

小样本，方差未知用 t 统计；方差比检验用F 统计；其余都是 z 统计量。

8.3.2 两个总体均值之差的检验

如果 σ_1^2 和 σ_2^2 已知，

$$z = \frac{(x_1 - x_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \tag{5}$$

如果 σ_1^2 和 σ_2^2 未知，且样本量较小，使用 t 统计，根据方差是否相等选择不同的自由度。

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{\sigma}_{x_1 - x_2}} \tag{6}$$

Case 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，使用自由度为 $n_1 + n_2 - 2$ 的 t 统计量检验，其中

$$\hat{\sigma}_{x_1 - x_2} = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \ s_p = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \tag{7}$$

Case 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，使用自由度为 f 的 t 分布（近似），其中

$$\hat{\sigma}_{x_1 - x_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \tag{8}$$

$$f = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}} \tag{9}$$

8.3.3 两个总体比例之差

1. 两个总体比例相等的假设

在原假设成立的情况下最佳的方差是 $p(1-p)$，其中 $p=(x_1+x_2)/(n_1+n_2)$，在大样本条件下，统计量 z 的表达式为（p_1,p_2 是样本比例）

$$z=\frac{p_1-p_2}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} \tag{10}$$

2. 检验两个总体比例之差不为0的假设

原假设 $H_0:\pi_1-\pi_2=d_0$，$p_1-p_2\sim\mathcal{N}(\pi_1-\pi_2,\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2})$

$$z=\frac{p_1-p_2-d_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \tag{11}$$

8.3.4 两个总体方差比的检验

方差之比服从 F 分布

$$F(n_1-1,n_2-1)=\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \tag{12}$$

原假设 $H_0:\sigma_1^2\le\sigma_2^2$，备择假设 $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$，临界点为 $F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$

双侧检验的两个临界点为$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1),F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)} \tag{13}$$

8.3.5 检验中的匹配样本

如果是匹配样本，如果计算差值

1. 提出原假设，备择假设
2. 分别求出每个对应的差 $x=x_1-x_2$
3. 计算差值样本均值$\overline{x}$ 和标准差 s
4. 得到抽样分布的标准差估计值 $\hat{\sigma}_x=s/\sqrt{n}$
5. 根据样本量大小选择 z 或者 t，
6. 以 t 为例，比较差值的均值和临界值 $d\pm t_\alpha$

8.4 检验问题的进一步说明