第五章 概率与概率分布

5.1 随机事件及其概率

随机事件$A, B, C, \ldots$、必然事件 Ω、不可能事件 Φ 。

基本事件：一个事件不能再分为更多个事件，则称为基本事件。

概率的定义：

- 古典定义：如果某一随机试验结果有限，而且各个结果出现的可能性相等，某一事件 A 发生的概率为该事件包含的基本事件个数 m 与样本空间包含的基本事件个数 n 的比值。
- 统计定义：在相同条件下随机试验 n 次，某事件 A 出现 m 次（$m < n$），则比值 m/n 为事件A 发生的频率。随着 n 增大，该频率围着某一常数 p 上下波动，且波动幅度逐渐减小，则这个频率的稳定值为该事件的概率。

$$P = \frac{m}{n} = p \tag{1}$$

- 主观定义：不重要

5.2 离散型随机变量及其分布

随机变量的定义：在同一组条件下，如果每组试验的结果可以列举出来，即随机事件 X 的所有可能值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 都能列举出来，且分别具有确定的概率 $P(x_i) = P(X = x_i) \forall i = 1, 2, \ldots, n$，则称 X 为 $P(X)$ 的随机变量，$P(X)$ 为随机变量 X 的概率函数。

随机变量可以分为离散型随机变量（可以逐个列举出来）和连续型随机变量（数轴上某一区间的点）。

5.2.1 离散型随机变量的概率分布

概率分布 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, 期望 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$,

方差 $\sigma^2 = D(X) = E[X - E(X)]^2 = E[x_i - E(X)]^2 p_i = E(X^2) - E(X)^2$

离散系数 $V = \frac{\sigma}{E(X)}$

5.2.2 特殊的随机分布

0-1 分布 $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$

二项分布：n 重贝努里试验是 n 个相同的随机试验，该试验只包含两个结果（A 或 B），试验相互独立。

在二项分布中出现x 次正向事件的概率 $P\{X=x\}=C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$，均值$E(X)=np$，方差 $D(X)=np(1-p)$。

$$C_n^x=\frac{n!}{x!(n-x)!} \tag{2}$$

泊松分布 是指在指定时间或面积、体积范围内某一时间出现的次数的分布。 假设在这一时间范围内发生事件的平均数为λ，则 $E(X)=D(X)=\lambda$。

$$P(X)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \tag{3}$$

5.3 连续型随机变量

连续型随机变量的取值是数轴上的任意点，用概率密度表示 $f(x)$，$f(x)\geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1$。变量的概率可以用概率分布函数表示 $F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, -\infty<x<+\infty$。均值和方差为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx=\mu \quad , D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x) dx=\sigma^2 \tag{4}$$

5.3.1 正态分布

概率密度函数关于 $x=\mu$ 对称，σ 越大则图像越平缓。

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2): \ f_N(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} \quad , -\infty<x<+\infty \tag{5}$$

任何正态分布都可以通过线性变换 $Z=(X-\mu)/\sigma$ 得到标准正态分布 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \tag{6}$$

标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 如下

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} \phi(t) dt=\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\} dt \qquad , \Phi(-x)=1-\Phi(x) \tag{7}$$