自适应控制第五章作业

5.1 根据MIT规则设计的闭环自适应控制系统的数学模型为：

$$\begin{cases} a_3\frac{d^3e}{dt^3}+a_2\frac{d^2e}{dt^2}+a_1\frac{de}{dt}+e=(k-k_ck_v)r & ① \\ a_3\frac{d^3y_m}{dt^3}+a_2\frac{d^2y_m}{dt^2}+a_1\frac{dy_m}{dt}+y_m=kr & ② \\ \frac{dk_c}{dt}=k'\cdot e\cdot y_m & ③ \end{cases}$$

假定在 $t=t_0$ 时，y 和 y_m 均为 0，且 $k_ck_p\neq k_m$。在 t_0 时刻，给系统一个输入幅值为 A 的阶跃信号，即 $r(t)=A$，研究系统稳定性条件：

对节环广义误差方程式①求导： $a_3\ddddot{e}+a_2\dddot{e}+a_1\ddot{e}+\dot{e}=-\dot{k}_ck_vr$

将③代入① 得 $a_3\ddddot{e}+a_2\dddot{e}+a_1\ddot{e}+\dot{e}=-k'k_vey_mr$

假设 $y_m(t)$ 的动态响应比 $e(t)$ 的自适应调整快得多，即在研究 $e(t)$ 的调节过程时，认为 $y_m(t)$ 已达到它的稳态值 k_mA，那么 $e(t)$ 的微分方程可简化为

$$a_3\ddddot{e}+a_2\dddot{e}+a_1\ddot{e}+\dot{e}+k'k_vk_mA^2e=0$$

则有劳斯判据：

S^4	a_3	a_1	$k'k_vk_mA^2e$
S^3	a_2	1	
S^2	b_1	b_2	
S^1	c_1		
S^0	d_1		

$$b_1=\frac{a_1a_2-a_3}{a_2}>0$$

$$b_2=k'k_vk_mA^2e>0$$

$$c_1=\frac{b_1-a_2b_2}{b_1}>0$$

$$d_1=b_2>0$$

解得稳定性条件
$$\begin{cases} a_1a_2-a_3>0 \\ 0<k'k_vk_mA^2e<\frac{a_1a_2-a_3}{a_2^2} \end{cases}$$

5.2 由于状态为二维向量，参考输入为单输入，故取 $P_F^{-1}=P_G^{-1}=1$，取 $P=\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}$

自适应控制律
$$\begin{cases} \dot{F}=-P_FB_p^TPeX_p^T \\ \dot{G}=P_GB_p^TPer^T \end{cases}$$

可得
$$F=-\int_0^t[2,4]\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}eX_p^Tdt+F(0)$$

$$G=\int_0^t[1,2]\begin{bmatrix}3&1\\1&1\end{bmatrix}er^Tdt+G(0).$$

5.3 由结构图可知 $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{s} x_2 \\ x_2 = \frac{1}{s+2} x_3 \\ x_3 = \frac{k}{s+1}(u - x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 - 2x_2 \\ \dot{x}_3 = ku - kx_1 - x_3 \end{cases}$

故状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

构造李雅普诺方程: $V(x) = x^T P x$，则 $\dot{V}(x) = -x^T Q x$ 其中 $Q = -(A^T P + PA)$

若 $\dot{V}(x) = -x^T Q x$ 沿任一轨线不恒等于0，即 $\dot{V} = -x^T Q x \neq 0 \Rightarrow Q \geq 0$，则Q可取半正定阵

若取 $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\dot{V}(x) = -x^T Q x = -[x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -x_3^2$

令 $\dot{V}(x) = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

故 $\dot{V}(x)$ 只在原点处为0（不恒为0），则用半正定矩阵Q简化分析。

$A^T P + PA = -Q$，则

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中P为对称阵. $P_{12} = P_{21}$，$P_{13} = P_{31}$，$P_{23} = P_{32}$.

即: $\begin{cases} -2kP_{13} = 0 \\ -kP_{32} + P_{11} - 2P_{12} = 0 \\ -kP_{33} + P_{12} - P_{13} = 0 \\ 2P_{12} - 4P_{22} = 0 \\ P_{13} + P_{22} - 3P_{23} = 0 \\ 2P_{23} - 2P_{33} = -1 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \frac{k^2+12k}{12-2k} & \frac{3k}{6-k} & 0 \\ \frac{3k}{6-k} & \frac{3k}{12-2k} & \frac{k}{12-2k} \\ 0 & \frac{k}{12-2k} & \frac{3}{6-k} \end{bmatrix}$

又P为正定矩阵，则有

$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{k^2+12k}{12-2k} > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{k^2+12k}{12-2k} & \frac{3k}{6-k} \\ \frac{3k}{6-k} & \frac{3k}{12-2k} \end{vmatrix} > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 - 2k > 0 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 6.$

5.4 线性定常离散系统 $x(k+1)=Gx(k)$

离散判定方程 $G^TPG-P=-Q$

设Q为正定矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. P为对称矩阵 $\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{21}&P_{22}&P_{23}\\P_{31}&P_{32}&P_{33}\end{bmatrix}$ $\quad P_{12}=P_{21}$, $P_{13}=P_{31}$, $P_{23}=P_{32}$.

$$G^TPG-P=\begin{bmatrix}-P_{11}&-P_{12}&-P_{13}\\-P_{12}&P_{11}-P_{12}+aP_{13}+(\frac{a}{2})^2P_{33}&P_{12}-(1-\frac{a}{2})P_{23}\\-P_{13}&P_{12}-(1-\frac{a}{2})P_{23}&P_{23}-P_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-Q$$

解得 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{(2+\frac{a}{2})^2}{1-(\frac{a}{2})^2}&0\\0&0&\frac{3}{1-(\frac{a}{2})^2}\end{bmatrix}$ P需满足正定要求 $\begin{cases}\Delta_1>0\\\Delta_2>0\\\Delta_3>0\end{cases}$ 解得 $0<a<2$

6. (1) 令 $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$ 解得系统平衡状态 $x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

构造Lyapunov函数 $V(x)=x_1^2+5x_2^2$，对时间t求导得

$$\dot V(x)=2x_1\dot x_1+10x_2\dot x_2=2x_1[5x_2-3x_1(x_1^2+x_2^2)]+10x_2[-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2)]$$
$$=10x_1x_2-6x_1^2(x_1^2+x_2^2)-10x_1x_2-10x_2^2(x_1^2+x_2^2)$$
$$=-(x_1^2+x_2^2)(6x_1^2+10x_2^2)\le 0$$

当且仅当 $x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 时, $\dot V(x)=0$ 故 $\dot V(x)$ 为负定的 $\|x\|\to\infty$ 时 $V(x)\to\infty$

系统是全局渐进稳定的。

(2) 令 $\dot x_1=\dot x_2=0$ 解得系统平衡状态 $x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

构造Lyapunov函数 $V(x)=nx_1^2+mx_2^2$ 对时间t求导

$$\dot V(x)=2nx_1\dot x_1+2mx_2\dot x_2=2nx_1(-x_1+x_2)+2mx_2[-x_2-x_1(x_1^2+x_2^2)]$$
$$=-2nx_1^2-2mx_2^2-2x_1x_2[m(x_1^2+x_2^2)-n]$$

不能找到合适的m, n. 使 $\dot V(x)<0$ 故 $\dot V(x)$ 不是负定的

系统不稳定.

7. 由结构图可知
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{s+1} x_2 \\ x_2 = \frac{1}{s+k}(u - x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 = u - x_1 - k x_2 \end{cases}$$

故状态方程 $\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

其中 $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

构造李雅普诺方程 $V(x) = x^T P x$ $\dot{V}(x) = -x^T Q x$. $Q = -(A^T P + PA)$

设半正定矩阵 $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 对称矩阵 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ $P_{12} = P_{21}$

$$A^T P + PA = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -Q$$

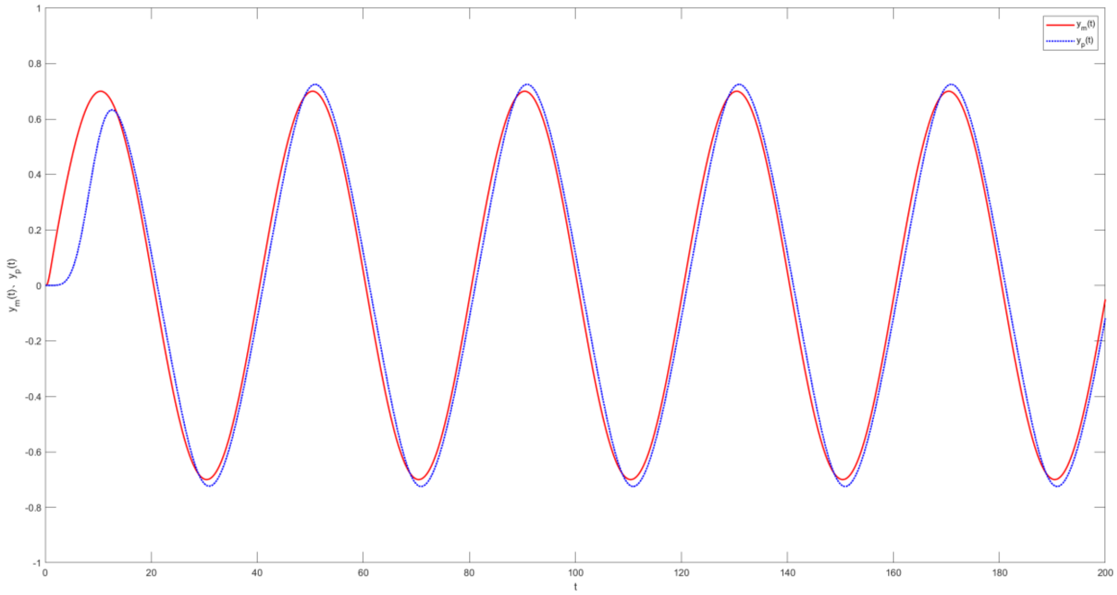
可得:
$$\begin{cases} -2P_{11} - 2P_{12} = 0 \\ P_{11} - P_{22} - (k+1)P_{12} = 0 \\ 2P_{12} - 2kP_{22} = -1 \end{cases}$$

又P需为正定矩阵

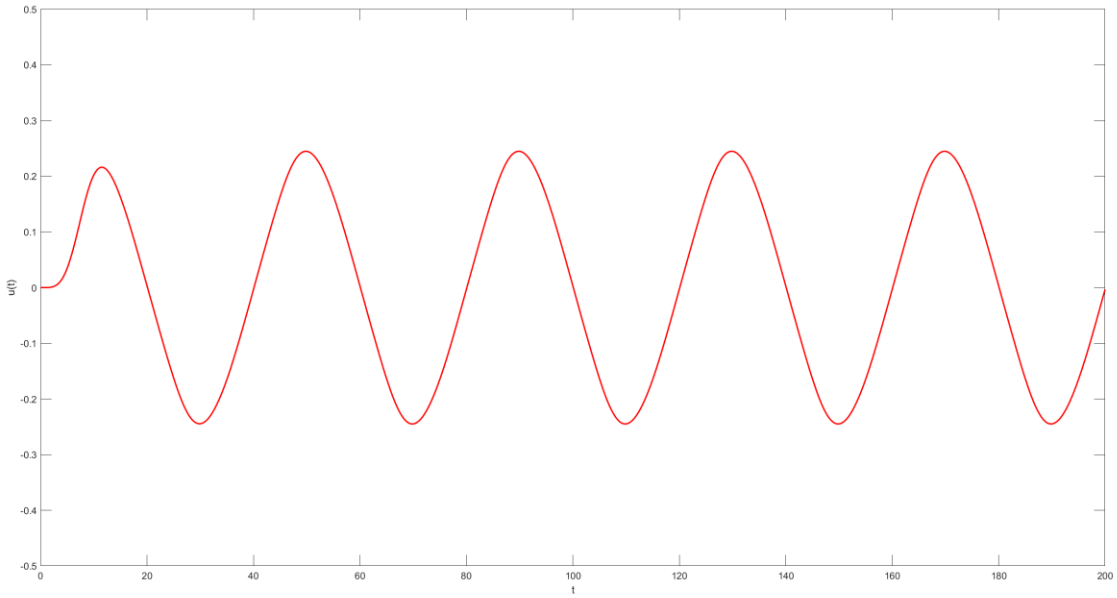
$k \in [6 - 2\sqrt{6}, 6 + 2\sqrt{6}]$

当输入为正弦波时：

控制对象输出曲线($y_p(t)$)与参考模型输出曲线($y_m(t)$)：

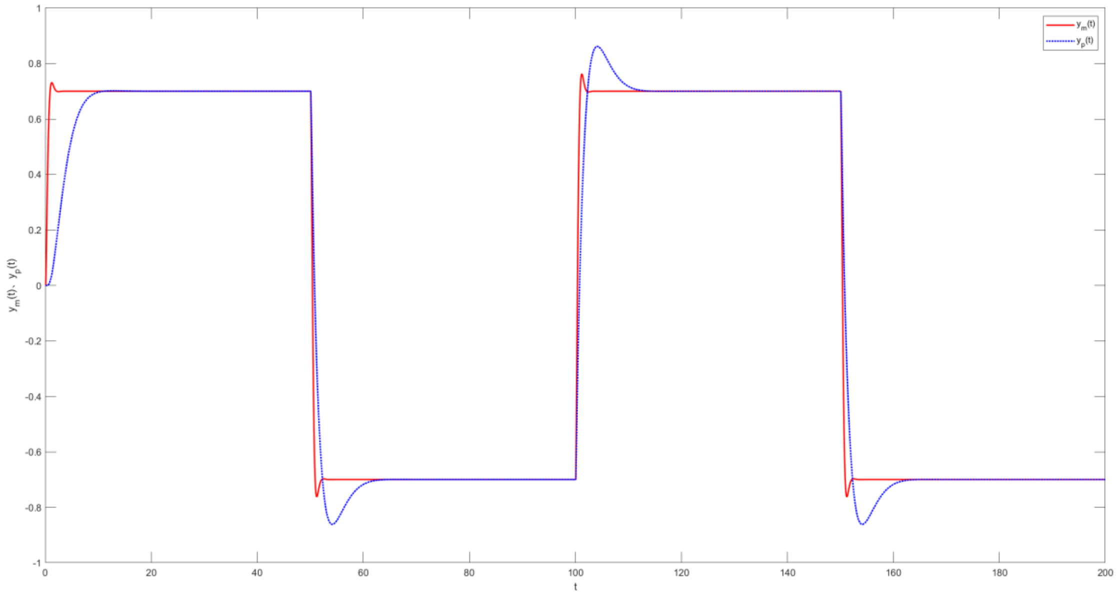


控制器输出曲线：

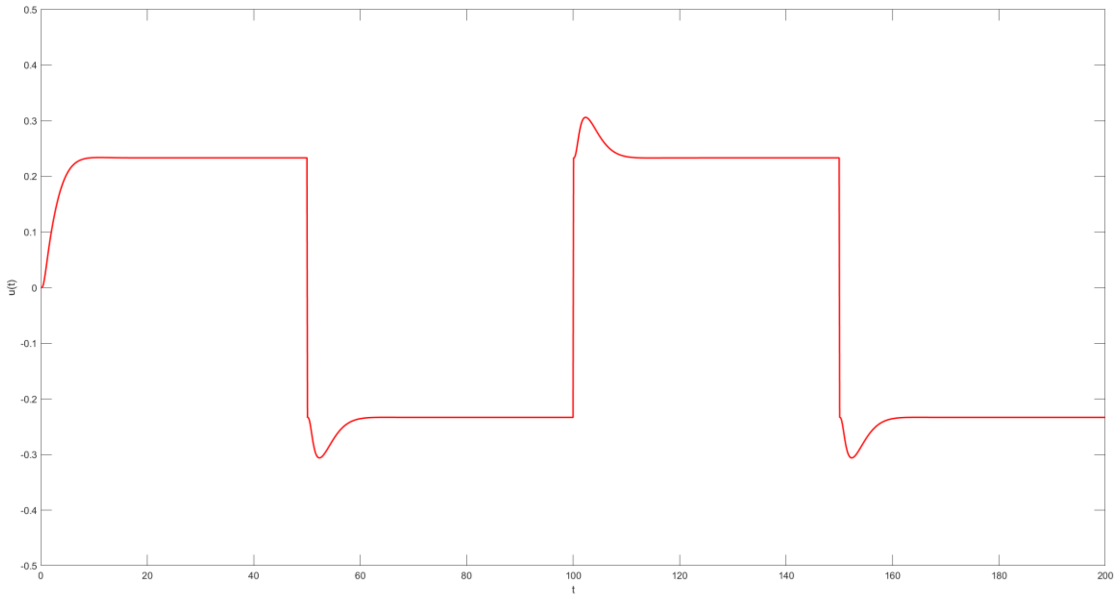


当输入为方波时：

控制对象输出曲线($y_p(t)$)与参考模型输出曲线($y_m(t)$)：



控制器输出曲线：



代码：

```matlab
% 可调增益Lyapunov-MRAC
clc
clear all;
close all;

h = 0.1;   % 数值积分步长
L = 200/h; % 仿真步数（减小h，可以提高积分精度）
% 对象参数（严格正实）

% 定义对象的状态空间模型参数
Ap = [0 1; -6 -7];
Bp = [2; 4];
Cp = [1 0]; % 假设输出是第一个状态变量
Dp = 0;     % 假设没有直通路径

% 定义参考模型的状态空间模型参数
Am = [0 1; -10 -5];
Bm = [1; 2];
Cm = [1 0]; % 假设输出是第一个状态变量
Dm = 0;     % 假设没有直通路径

gamma = 0.1; % 自适应增益

% 初值
yr0 = 0;
u0 = 0;
e0 = 0;
% 假设系统矩阵 A 是 n x n
n = size(Ap, 1); % 获取 A 矩阵的行数，即系统的阶数
% 初始化状态向量为零向量
xp0 = zeros(n, 1); % 对象的初始状态
xm0 = zeros(n, 1); % 参考模型的初始状态
kc0 = 0; % 可调增益初值
r = 1;   % 参考输入方波信号，幅值取2
yr = r*[ones(1,L/4) -ones(1,L/4) ones(1,L/4) -ones(1,L/4)]; % 输入信号


for k = 1:L
    time(k) = k*h;
    xp(:,k) = xp0+h*(Ap*xp0+Bp*u0);
    yp(k) = Cp*xp(:,k); % 计算yp

    xm(:,k) = xm0+h*(Am*xm0+Bm*yr0);
    ym(k) = Cm*xm(:,k); % 计算ym

    e(k) = ym(k)-yp(k); % e=ym-yp
    kc = kc0+h*gamma*e0*yr0; % Lyapunov-MRAC自适应律
    u(k) = kc*yr(k); % 控制量

    % 更新数据
    yr0 = yr(k); u0 = u(k); e0 = e(k);
    xp0 = xp(:,k); xm0 = xm(:,k);
    kc0 = kc;
end
```