

自适应控制课件

第2章 基于优化策略的自校正器

主要内容

2.1 最小方差控制基础

2.2 最小方差控制（参数已知）

 2.2.1 最小方差预测的出现

 2.2.2 最小方差控制器

2.3 最小方差自校正控制（参数未知）

2.4 广义最小方差自校正控制

 2.4.1 广义最小方差控制

 2.4.2 广义最小方差控制系统的特性分析

 2.4.3 广义最小方差自校正控制

2.1 最小方差控制基础

最小方差控制的概念（Self-tuning Regulators，自校正调节器）最初由Åström等人在1973年提出。目的是在实现控制任务的同时最大限度地减小干扰对系统的影响。

最小方差控制的思想：

通过保证输出的方差取最小来设计当前时刻的控制量 $u(k)$ 。为此，必须使得系统输出中包含当前时刻的控制量。假设被控对象或过程存在 d 步的纯延时，那么当前时刻的控制作用 $u(k)$ 要滞后 d 个采样周期才能在输出中体现出来，这样我们可以选择并通过保证(包含)输出 $y(k + d)$ 的(某一变量的)方差最小来设计当前时刻的控制量。设计过程中，借助输出量的预测信息计算出当前时刻的控制量。当过程参数未知或时变时先用递推最小二乘法估计相应的参数，或直接估计控制器参数，然后算出 $u(k)$ 。这样，通过连续不断地进行预测和控制，就能始终保持输出的某一方差一直取最小。

注：

- ① 由于输出中必须包含当前时刻的控制量 $u(k)$ 才能通过使得输出的方差取最小求得当前时刻的控制量，而系统存在 d 步的纯延时，因此包含当前时刻控制量的最早时刻的系统输出是 $y(k + d)$ 。这意味着，我们可以选择 $y(k + d)$ 、并通过使得(包含) $y(k + d)$ 的(某一随机变量的)方差取最小来计算 $u(k)$ 。
- ② 数学上，用 k 时刻和之前时刻的控制量和输出量将输出 $y(k + d)$ 表示出来的式子称为对 $k + d$ 时刻系统输出 $y(k + d)$ 的预测模型，因此我们也将输出 $y(k + d)$ 称为预测模型的输出。 k 对每个时刻均成立。
- ③ 由于未来时刻的输出 $y(k + d)$ 是未知的，因此我们只能将其看作一个变量。考虑到当前时刻到 $k + d$ 时刻这段时间内，干扰一直影响着系统，我们进一步将实际输出或预测模型的输出 $y(k + d)$ 看作一个**随机变量**是合理的。
- ④ 由于自校正的功能一般都是用小型计算机或微处理器实现，因此受控系统的数学模型都用离散形式。

● 单输入单输出受控系统的模型

可以用受控自回归滑动平均模型 (CARMA) 表示 (线性、定常、离散) :

$$\begin{aligned}
 & y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) \\
 & = b_0 u(k-d) + b_1 u(k-d-1) + \cdots + b_{n_b} u(k-d-n_b) \\
 & + v(k) + c_1 v(k-1) + \cdots + c_{n_c} v(k-n_c)
 \end{aligned} \tag{1}$$

其中, $y(k)$ 为 k 时刻的输出; $u(k)$ 为 k 时刻的控制输入; $\{v(k)\}$ 是零均值白噪声

序列, 即满足 $E\{v(k)\} = 0$ 和 $E\{v(i)v(j)\} = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$; d 为相应滞后步数。

引入单位滞后算子 q^{-1} , 上式可写为

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})q^{-d}u(k) + C(q^{-1})v(k) \tag{2}$$

其中, $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}$,

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b},$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

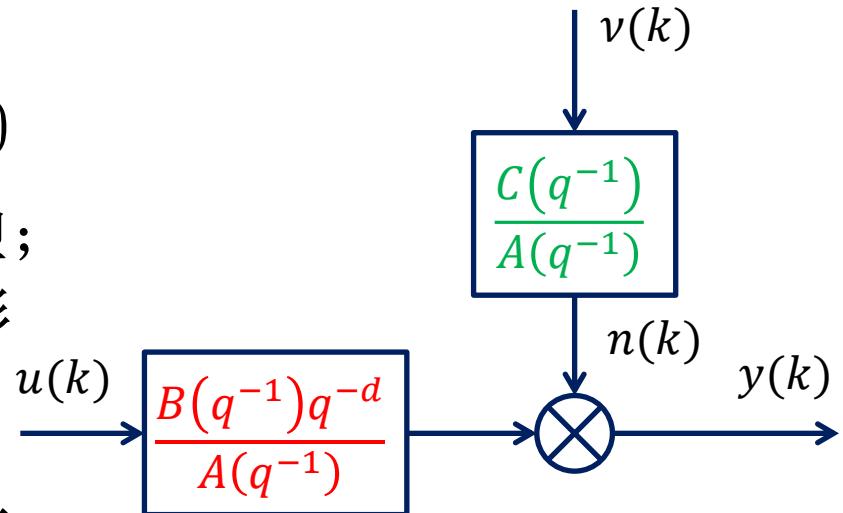
多项式 $A(q^{-1})$ 、 $B(q^{-1})$ 、
 $C(q^{-1})$ 的阶数分别为 $\deg A = n_a$ 、
 $\deg B = n_b$ 、 $\deg C = n_c$

红色部分称为滑动平均项, 绿色部分称为自回归项。 (2) 式也可写为:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})q^{-d}}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v(k) \quad (3)$$

其中，红色部分被称为过程或对象模型；
绿色部分被称为噪声模型，也称为成形滤波器。

$n(k) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v(k)$ 能看作是白噪声经线性环节的输出，一般为有色噪声。



一般地，多项式 $P(z)$ 在 z 平面上的根或零点指满足 $P(z) = 0$ 的 z 的取值。若 $P(z)$ 的根在 z 平面上的单位圆内，即 $|z| < 1$ ，则称 $P(z)$ 为Hurwitz多项式。

定义1 对模型 (2) 或 (3) , 当多项式 A 关于 q^{-1} 的零点位于 q^{-1} 平面的单位圆外 (或关于 q 的零点位于 q 平面的单位圆内) 时, 称 A 为稳定多项式或Hurwitz多项式, 此时的受控系统为开环稳定系统。

定义2 对模型 (2) 或 (3) , 当多项式 A 关于 q^{-1} 的零点位于 q^{-1} 平面的单位圆上或单位圆内 (或关于 q 的零点位于 q 平面的单位圆上或单位圆外) 时, 称 A 为不稳定多项式, 此时的受控系统为开环不稳定系统。

定义3 对模型 (2) , 当多项式 B 关于 q^{-1} 的零点位于 q^{-1} 平面的单位圆外 (或关于 q 的零点位于 q 平面的单位圆内) 时, 称 B 为稳定多项式或Hurwitz多项式, 此时的受控系统为逆稳定系统。

定义4 对模型 (2) , 当多项式 B 关于 q^{-1} 的零点位于 q^{-1} 平面的单位圆上或单位圆内 (或关于 q 的零点位于 q 平面的单位圆上或单位圆外) 时, 称 B 为不稳定多项式, 此时的受控系统为非逆稳定系统。

例1：若某控制系统的模型为

$$y(k) = 1.5y(k-1) - 0.7y(k-2) + u(k-1) + 0.5u(k-2) + v(k) - 0.5v(k-1)$$

试判断该系统是否为开环稳定的和逆稳定的。

解：

由于 $A(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}$,

故 $A(q^{-1})$ 关于 q^{-1} 的根为 $q^{-1} = 1.07 \pm j0.53$ 。

由于 $|q^{-1}| > 1$, 故 $A(q^{-1})$ 为稳定多项式, 系统为开环稳定系统。

又由于 $B(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$,

故 $B(q^{-1})$ 关于 q^{-1} 的根为 $q^{-1} = -2$ 。

由于 $|q^{-1}| > 1$, 故 $B(q^{-1})$ 为稳定多项式, 系统为逆不稳定系统。

2.2 最小方差控制 (参数已知)

假定系统 (2) 满足以下条件：

- 受控系统的时延 d 及延迟算子多项式 A 、 B 和 C 的阶次及系数都是已知的；
- 多项式 B 和 C 均为Hurwitz多项式。

$y(k + d)$ 是一个未知的随机变量，我们通过保证(包含) $y(k + d)$ 的(某一随机变量的)方差取最小来设计当前时刻的控制量 $u(k)$ 。考虑到只能使用当前时刻和过去时刻的输入和输出值，我们需要将 $y(k + d)$ 表达为当前和过去时刻的输入和输出的表达式，然后设计 $u(k)$ 。

由于系统模型 (2) 中不含实际输出 $y(k + d)$ ，因此需要对模型 (2) 进行变换以得到包含 $y(k + d)$ 的模型，这样即可用于实现包含 $y(k + d)$ 的某一随机变量的方差的最小化。将基于模型 (2) 变换得到的、包含 $y(k + d)$ 的模型称为预测模型。

2.2.1 最小方差预测的出现

- 几个符号的含义

$y(k + d)$: 未来时刻 $k + d$ 的系统输出，或 $k + d$ 时刻预测模型的输出，代表一个随机变量。

$y(k + d/k)$: 基于 k 和以前时刻的输入输出数据 $\{u(i), y(i), i \leq k\}$ ，对未来时刻 $k + d$ 时的系统输出（或预测模型输出 $y(k + d)$ ）的预测估计。也记为 $\hat{y}(k + d/k)$ 。

$\tilde{y}(k + d/k) = y(k + d) - y(k + d/k)$: 预测误差。也记为 $\tilde{y}(k + d)$ 。

● 预测模型

将 (3) 式写为

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v(k+d) \quad (4)$$

Diophantine 方程，引入 q^{-d} 的目的是将(4)式中的 $y(k+d)$ 化成由 $y(k), y(k-1), \dots, u(k), u(k-1), \dots$ 组成的项和由噪声 $v(k+d), v(k+d-1), \dots, v(k+1)$ 构成的另一项之和的形式。这两项不相关，可求出 $y(k+d)$ 的最优预测

将 $\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$ 写为

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + \frac{q^{-d}G(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (5)$$

其中， $F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}$,

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n_g} q^{-n_g}.$$

将 (5) 式代入 (4) 式可得

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + F(q^{-1})v(k+d) + \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} v(k) \quad (6)$$

基于引入 q^{-d} 的目的，由 (6) 式中的红色部分可知， $F(q^{-1})$ 的次数是 $d-1$ ，即 $n_f = d-1$

由 (3) 式可得

$$v(k) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) - \frac{B(q^{-1})q^{-d}}{C(q^{-1})}u(k) \quad (7)$$

将 (7) 式代入 (6) 式可得

$$y(k+d) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) + F(q^{-1})v(k+d) \quad (8)$$

称(8)式为预测模型。

观察 (8) 式，可以推测：红色部分是对输出 $y(k+d)$ 的最优预测值。

注：预测模型的结构与系统本身的模型的结构是不同的。

● 最优预测器

预测的均方误差

$$\begin{aligned}
 J_1 &= E\left\{\tilde{y}^2(k+d)\right\} = E\left\{[y(k+d) - \hat{y}(k+d/k)]^2\right\} \\
 &= E\left\{[F(q^{-1})v(k+d) + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) - \hat{y}(k+d/k)]^2\right\} \\
 &= E\left\{[F(q^{-1})v(k+d)]^2\right\} + E\left\{\left[\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) - \hat{y}(k+d/k)\right]^2\right\} + \\
 &\quad 2E\left\{F(q^{-1})v(k+d)\left[\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) - \hat{y}(k+d/k)\right]\right\}
 \end{aligned}$$

由于 $v(k+d)$ 与 $y(k)$ 、 $u(k)$ 相互独立，因此也与 $\hat{y}(k+d/k)$ 相互独立，故上式右边最后一项为0. 第一项是不可预测的，所以欲使 J_1 最小，只有使上式右边第二项为0，此时有：

$$\hat{y}^*(k + d/k) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k) \quad (9)$$

最小预测方差为：

$$J_{\min} = E \left\{ [F(q^{-1})v(k + d)]^2 \right\} = \left(1 + \sum_{i=1}^{n_f} f_i^2 \right) \sigma^2 \quad (10)$$

以上的预测模型以及最优预测器均要求 $C(q^{-1})$ 是 Hurwitz 多项式，即 $C(q^{-1})$ 关于 q 的根全部落在 q 平面的单位圆内，这就保证了初始条件对最优预测器的作用与影响是以指数型速度衰减的【(9)式右边是输出与输入迭加的形式，由于 $C(q^{-1})$ 是稳定多项式，因此 $\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k)$ 对预测输出 $\hat{y}^*(k + d/k)$ 的贡献随着 k 的增大呈指数衰减状态】。所以， k 足够大时相当于稳态下的预测，也即初始条件的影响就无关紧要了。有时又称为最优稳态预测器。已有人提出当 $C(q^{-1})$ 具有单位圆上零点的次最优预测器。

注：后面将通过分析系统的稳定性说明假定多项式 B 和 C 均为 Hurwitz 多项式的意义。

最优预测器 (9) 中出现了 $F(q^{-1})$ 和 $G(q^{-1})$ ，故使用中必须确定出这两个量。一般地，当多项式 $A(q^{-1})$ 、 $C(q^{-1})$ 和时延步数 d 已知后，这两个量可通过求解Diophantine方程唯一确定。

Diophantine方程有两种解法，一种是长除法，另一种是比较系数法。

例2：设 $A(q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2}$ 、 $C(q^{-1}) = 1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}$ 、 $d = 2$ 。求 $F(q^{-1})$ 和 $G(q^{-1})$ 。

2.2.2 最小方差控制

把期望输出 $y_r(k + d)$ 看做输出 $y(k + d)$ 的期望值

通过使实际输出 $y(k + d)$ 的方差 $J = E[(y(k + d) - y_r(k + d))^2]$ 取最小设计当前时刻的控制律 $u(k)$ 。

将预测模型 (8) 代入性能指标 J , 并考虑最优预测方程 (9) 有:

$$\begin{aligned} J &= E \left\{ \left[F(q^{-1})v(k + d) + y^*(k + d / k) - y_r(k + d) \right]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left[F(q^{-1})v(k + d) \right]^2 \right\} + E \left\{ \left[y^*(k + d / k) - y_r(k + d) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

第一项求期
望后为常数

上式右边第一项为常数, 所以欲使 J 最小, 必须使

$$y^*(k + d / k) = y_r(k + d) \quad (11)$$

将最优预测的具体表达式代入上式, 并经整理可得

$$B(q^{-1})F(q^{-1})u(k) = y_r(k + d) + [C(q^{-1}) - 1]y^*(k + d / k) - G(q^{-1})y(k) \quad (12)$$

或 【 $B(q^{-1})F(q^{-1}) \triangleq F'(q^{-1})$ 】

$$u(k) = \frac{1}{b_0} \left[y_r(k + d) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i y^*(k + d - i / k - i) - \sum_{i=0}^{n_g} g_i y(k - i) - \sum_{i=1}^{n_f + n_b} f_i' u(k - i) \right] \quad (13)$$

从以上推导过程可以看出，最小方差控制律实际上是令 $k + d$ 时刻的最优输出预测值等于期望输出时所得到的控制量。

特别地，对于输出调节问题，有 $y_r(k + d) = 0$ 。此时的最小方差控制律也称为最小方差调节律，可以简化为

$$u(k) = -\frac{G(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1})}y(k) \quad (14)$$

或

$$u(k) = -\frac{1}{b_0} \left[\sum_{i=0}^{n_g} g_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_f+n_b} f'_i u(k-i) \right] \quad (15)$$

其中， $B(q^{-1})F(q^{-1}) \triangleq F'(q^{-1})$ 。

注：

由于(12)-(15)式中的控制律是在(11)式成立的前提下推出的，因此在最小方差控制律(12)-(15)作用下，系统的输出误差（即 $\tilde{y}(k+d) \triangleq y(k+d) - y_r(k+d)$ ）在数值上等于最优预测误差（即 $\tilde{y}(k+d) \triangleq y(k+d) - y^*(k+d/k)$ ）。

各文献资料中，“跟踪”与“调节”的概念不统一。本教材规定，当 $y_r(k+d) \neq 0$ 时的控制问题称为跟踪问题，而当 $y_r(k+d) = 0$ 时的控制问题称为调节问题（这种说法更强调镇定的问题）。

● 最小方差控制设计概括（以调节问题为例）

- 设被控过程的差分方程为 $A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})q^{-d}u(k) + C(q^{-1})v(k)$, 其中, $\{v(k)\}$ 是独立同分布的白噪声序列, 即 $v(k) \sim N(0, \sigma^2)$; B 和 C 均为 Hurwitz 多项式。那么, 最小方差调节律为

$$u(k) = -\frac{G(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1})}y(k)$$

其中, 多项式 $F(q^{-1})$ 和 $G(q^{-1})$ 的阶分别为 $d - 1$ 和 $n_a - 1$; 多项式的系数可通过求解下列 Diophantine 方程来确定:

$$C(q^{-1}) = F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1})$$

- 控制律作用下的输出误差是 $v(k + d)$ 的 $d - 1$ 阶滑动平均:

$$\begin{aligned}\tilde{y}(k + d) &= y(k + d) - y_r(k + d) = y(k + d) - y^*(k + d/k) \\ &= F(q^{-1})v(k + d) = (1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{d-1}q^{-(d-1)})v(k + d)\end{aligned}$$

- 输出误差的最小方差为

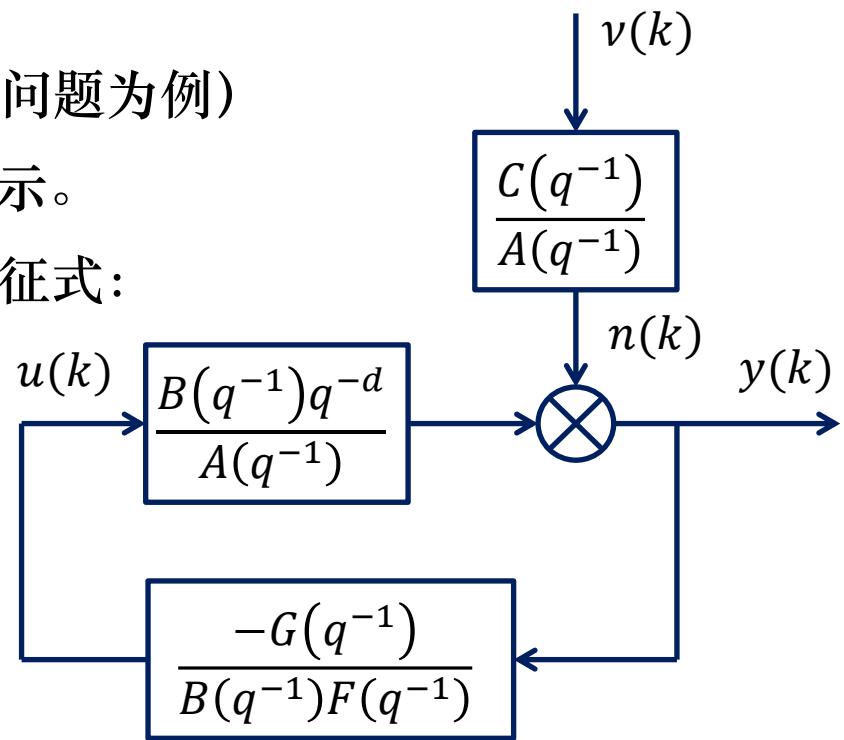
$$E\{[\tilde{y}(k + d)]^2\} = (1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2) \sigma^2$$

- 最小方差控制系统的稳定性（以调节问题为例）

最小方差控制系统的结构图如右图所示。

将(14)式代入(2)式可得闭环系统的特征式：

$$\begin{aligned} & A(q^{-1}) + \frac{G(q^{-1})B(q^{-1})q^{-d}}{B(q^{-1})F(q^{-1})} \\ &= \frac{B(q^{-1})[A(q^{-1})F(q^{-1})+G(q^{-1})q^{-d}]}{B(q^{-1})F(q^{-1})} \\ &= \frac{B(q^{-1})C(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1})} \end{aligned}$$



因此，闭环系统的极点为 $C(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 的根。这说明，只有当 $C(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 均为Hurwitz多项式时，闭环系统才是稳定的。

闭环系统稳定时，扰动 $v(k)$ 对输出 $y(k)$ 的闭环系统方程为：

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})C(q^{-1})F(q^{-1})}{B(q^{-1})C(q^{-1})} v(k) = F(q^{-1})v(k)$$

【注：因 $C(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 均为稳定多项式，故消掉后对稳定性分析无影响。】

例3：求解以下被控过程的预测模型和最优预测，并计算其最小预测方差，以及当期望输出为 $y_r(k+d) = 0$ 时的最小方差调节律。

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k-2) + v(k) + c_1 v(k-1)$$

解：根据题意可知

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1}, \quad n_a = 1$$

$$B(q^{-1}) = b_0$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1}$$

$$d = 2$$

由于 $F(q^{-1})$ 和 $G(q^{-1})$ 的阶分别为 $d - 1$ 和 $n_a - 1$ ，我们有

$$G(q^{-1}) = g_0$$

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1}$$

由Diophantine方程可得：

$$\begin{aligned} 1 + c_1 q^{-1} &= (1 + a_1 q^{-1})(1 + f_1 q^{-1}) + g_0 q^{-2} \\ &= 1 + (f_1 + a_1)q^{-1} + (g_0 + a_1 f_1)q^{-2} \end{aligned}$$

令上式两边 q^{-1} 的同幂次项系数相等，得下列代数方程组：

$$\begin{cases} f_1 + a_1 = c \\ g_0 + a_1 f_1 = 0 \end{cases}$$

解之得： $f_1 = c_1 - a_1$, $g_0 = a_1(a_1 - c_1)$

由此可求出预测模型、最优预测、最优预测方差、以及当期望输出 $y_r(k+d) = 0$ 时的最小方差控制律分别为：

$$y(k+2) = \frac{g_0 y(k) + b_0(1 + f_1 q^{-1}) u(k)}{1 + c_1 q^{-1}} + (1 + f_1 q^{-1}) v(k+2)$$

$$y^*(k+2/k) = \frac{g_0 y(k) + b_0(1 + f_1 q^{-1}) u(k)}{1 + c_1 q^{-1}}$$

$$E\{\tilde{y}^2(k+2)\} = (1 + f_1^2) \sigma^2$$

$$u(k) = -\frac{G}{FB} y(k) = -\frac{1}{b_0} \left[\frac{a_1(a_1 - c_1)}{1 + (c_1 - a_1)q^{-1}} \right] y(k)$$

若给定 $a_1 = -0.9$ 、 $b_0 = 0.5$ 、 $c_1 = 0.7$ ，则有 $g_0 = 1.44$ 、 $f_1 = 1.6$ ，以及

$$y(k+2) = \frac{1.44y(k) + 0.5u(k) + 0.8u(k-1)}{1 + 0.7q^{-1}} + v(k+2) + 1.6v(k+1)$$

$$y^*(k+2/k) = \frac{1.44y(k) + 0.5u(k) + 0.8u(k-1)}{1 + 0.7q^{-1}}$$

$$E\left\{\tilde{y}^2(k+2)\right\} = (1 + 1.6^2)\sigma^2 = 3.56\sigma^2$$

$$u(k) = -\frac{1.44}{0.5 + 0.8q^{-1}} y(k)$$

或

$$u(k) = -2.88y(k) - 1.6u(k-1)$$

结论：

- 若 $d = 1$, 则一步预测误差的方差为 σ^2 , 这说明预测误差随着预测长度 d 的增加而恶化, 预测精度随之降低。
- 由最小方差控制律的表达式可知: 若 $|b_0|$ 过小, 控制量就可能过大, 从而使得执行机构或数模转换装置处于饱和状态而影响控制品质, 同时也有可能加速执行机构的磨损, 这是最小方差调节器的一个基本缺点。
- 最小方差控制只能适用于 $B(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 均为 Hurwitz 多项式的系统, 这是最小方差调节器的另一个基本缺点。

- 最小方差控制的特性

① 输出的方差随系统延迟 d 的增加而增加，即特性变坏。

例4：设受控系统为 $A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})q^{-d}u(k) + C(q^{-1})v(k)$ ，其中
 $A(q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2}$ 、 $B(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$ 、
 $C(q^{-1}) = 1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}$ ， $\{v(k)\}$ 是独立同分布的白噪声序列，满足
 $v(k) \sim N(0,1)$ 。

对于 $d = 1$ ：

$F(q^{-1})$ 的阶次为0，即 $F(q^{-1}) = 1$.

由Diophantine方程 $C(q^{-1}) = F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1})$ 可得

$$1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2} = (1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2}) + q^{-1}(g_0 + g_1q^{-1})$$

令上式两边的各次幂系数相等，可得方程组

$$\begin{cases} -1.7 + g_0 = 1.5 \\ 0.7 + g_1 = 0.9 \end{cases}$$

解得: $g_0 = 3.2$ 、 $g_1 = 0.2$ 。

最小方差调节律为:

$$u(k) = -\frac{G(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1})} y(k) = -\frac{3.2 + 0.2q^{-1}}{1 + 0.5q^{-1}} y(k)$$

输出的最小方差为: $E\{[\tilde{y}(k+d)]^2\} = \sigma^2 = 1$.

对于 $d = 2$:

$F(q^{-1})$ 的阶次为 1, 即 $F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1}$. 而 $G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1}$ 。
用长除法确定 $F(q^{-1})$ 和 $G(q^{-1})$ 的具体表达式。根据 Diophantine 方程

$$\frac{c(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + \frac{q^{-d}G(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$

用长除法计算 $\frac{c(q^{-1})}{A(q^{-1})}$ 有:

$$\begin{array}{r}
1 + 3.2q^{-1} = F(q^{-1}) \\
\hline
1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2} \overline{1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}} \\
1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2} \\
\hline
3.2q^{-1} + 0.2q^{-2} \\
3.2q^{-1} - 5.44q^{-2} + 2.24q^{-3} \\
\hline
5.64q^{-2} - 2.24q^{-3} \\
= q^{-2}(5.64 - 2.24q^{-1}) = q^{-d}G(q^{-1})
\end{array}$$

这样，有 $F(q^{-1}) = 1 + 3.2q^{-1}$ 和 $G(q^{-1}) = 5.64 - 2.24q^{-1}$ 。

从而得到最小方差控制律和输出的最小方差分别为：

$$\begin{aligned}
u(k) &= -\frac{5.64 - 2.24q^{-1}}{1 + 1.7q^{-1} + 1.6q^{-2}} y(k) \\
E\{y^2(k+d)\} &= (1 + f_1^2)\sigma^2 = (1 + 3.2)^2 \sigma^2 = 11.24
\end{aligned}$$

由此可见，当 $d = 2$ 时，输出的最小方差达 11.24，其特性变坏。

- ② 当增益 b_0 的绝对值很小时，调节器的增益很大，将导致过大的控制信号 $u(k)$ ，这会加速调节器执行机构的磨损和损坏。这是因为

$$u(k) = -\frac{G(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1})}y(k) = -\frac{1}{b_0} \left[\frac{G(q^{-1})y(k)}{F(q^{-1})} + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) \right]$$

- ③ 当受控对象非逆稳定时，最小方差自校正调节系统是不稳定的。由最小方差控制系统的结构图可得其闭环特征方程为

$$A(q^{-1}) + \frac{G(q^{-1})B(q^{-1})q^{-d}}{B(q^{-1})F(q^{-1})} = 0$$

即：

$$A(q^{-1})B(q^{-1})F(q^{-1}) + G(q^{-1})B(q^{-1})q^{-d} = 0$$

把Diophantine方程代入上式，可得最小方差控制系统特征方程为：

$$C(q^{-1})B(q^{-1}) = 0 \quad (16)$$

尽管 $C(q^{-1})$ 为稳定多项式，但当受控系统非逆稳定(有的文献也称此时的系统为非最小相位系统)时，由于 $B(q^{-1})$ 为非稳定多项式，因此(16)式中的闭环特征多项式为非稳定多项式，即此时的最小方差控制系统是不稳定的。

④ 最小方差自校正调节器具有自校正特性。

若被控对象的实际参数和模型由差分方程

$$y(k) - 0.9y(k-1) = u(k-2) + v(k) - 0.7v(k-1) \quad (17)$$

表示，则经过计算可得最小方差控制律为

$$u(k) = -\frac{0.18}{1+0.2q^{-1}} y(k) \quad (18)$$

一般而言，参数辨识方程不一定与系统模型完全一致

若对象的参数在估计前是未知的，且对象可用一个估计模型近似，例如可用

$$y(k) = \alpha_1 y(k-2) + u(k-2) + \beta_1 u(k-3) + v(k) \quad (19)$$

代表被控对象方程，因而估计模型结构和实际对象方程(17)相差甚远，但其最小方差控制律结构和式(18)相似。进一步假定被控对象的参数估计收敛，那么基于估计模型得到的控制参数会收敛到式(18)所表示的控制参数值。具体地说，如果由估计模型计算得到的最小方差控制律为

$$u(k) = -\frac{\alpha_1}{1+\beta_1 q^{-1}} y(k)$$

则因上式的结构与式(18)相同，故参数估计收敛意味着，上式中的参数 α_1 和 β_1 将分别收敛到式(18)中的0.18和0.2，这个特性即属于自校正特性。

2.3 最小方差自校正控制 (参数未知)

最小方差控制适用于对象参数已知和恒定的场合。当对象受内外干扰的影响以致于其模型不能再有效描述该对象时，就需要对过程模型进行修改，以适应环境条件的变化。修改模型时，可以利用输入输出数据重新辨识模型的结构和参数，也可以只辨识模型的参数而认为结构不变。这就是说，当对象参数变化时，能随着参数的变化在线估计出系统模型，并基于此模型设计出来的、使得期望性能指标达到最优（如输出的方差最小）的控制器称为自校正控制器。

当被控对象的参数未知或变化时将递推最小二乘参数估计与最小方差控制结合起来，就形成了最小方差自校正器。

自校正控制的两种形式：间接自校正控制和直接自校正控制。

● 间接最小方差自校正控制

对一个具体的被控对象，知道其结构后，用递推算法估计对象参数，然后通过Diophantine方程解出 $F(q^{-1})$ 和 $G(q^{-1})$ ，再根据最小方差控制规律确定控制量，最后执行。其算法步骤为：

- ① 读取新的输出值 $y(k)$ ，并收集从前的输出/输入信息，构成最小二乘法需要的观测向量；
- ② 用递推最小二乘法估计被控对象的参数，即多项式 $A(q^{-1})$ 、 $B(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 的系数；
- ③ 由Diophantine方程解出 $F(q^{-1})$ 和 $G(q^{-1})$ ；
- ④ 对跟踪问题，由式(12)或(13)确定最优控制规律；对调节问题，由式(14)或(15)确定最优调节规律；
- ⑤ 进行下一采样周期， $k \rightarrow k + 1$ ，返回步骤①。

注：间接最小方差自校正控制的主要工作是解代数方程，计算量大，当对象阶数较高时，计算所需的时间较多。

- 直接最小方差自校正控制

- (1) 最小方差自校正调节器

此时，有 $y_r(k + d) = 0$ 。参照最小方差调节器(15)的形式，我们只需要估计出 $G(q^{-1})$ 中包含的 n_a 个参数和 $B(q^{-1})F(q^{-1})$ 中包含的 $n_b + d$ 个参数即可用于调节器的设计。将预测模型(8)重写如下：

$$y(k + d) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) + F(q^{-1})v(k + d)$$

我们首先考虑 $C(q^{-1}) = 1$ 的情况。记： $\varepsilon(k + d) = F(q^{-1})v(k + d)$ 、

$$F'(q^{-1}) = B(q^{-1})F(q^{-1}) = f'_0 + f'_1 q^{-1} + \cdots + f'_{n_f}, (n_f = n_b + d - 1)$$

则有

$$y(k + d) = G(q^{-1})y(k) + F'(q^{-1})u(k) + \varepsilon(k + d) \quad (20)$$

注意到 $B(q^{-1})$ 和 $F(q^{-1})$ 的形式，可知 $f'_0 = b_0$ 。进一步，注意到设计当前时刻的控制量 $u(k)$ 时对应于 $u(k)$ 的系数 b_0 决定了控制量的大小，而当所有的参数都参加辨识时，可能会在辨识的过程中出现 b_0 的估计值过小从而使得 $u(k)$ 过大的情况。为此，可以采用固定 b_0 不参与辨识的自校正方案。（ b_0 可以采用先验知识或离线辨识的方法得到）

将(20)式写为如下辨识方程式:

$$y(k+d) - b_0 u(k) = \varphi^T(k)\theta + \varepsilon(k+d) \quad (21)$$

其中, $\varphi^T(k) = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_g), u(k-1), \dots, u(k-n_{f'})]$ 、

$$\theta = [g_0, g_1, \dots, g_{n_g}, f'_1, f'_2, \dots, f'_{n_{f'}}]^T.$$

(21)式能被等价写为

$$y(k) - b_0 u(k-d) = \varphi^T(k-d)\theta + \varepsilon(k) \quad (22)$$

对辨识方程(22)式, 可使用各类最小二乘法估计参数 θ 。例如, 带有遗忘因子的递推最小二乘参数估计公式为:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)[y(k) - b_0 u(k-d) - \varphi^T(k-d)\hat{\theta}(k-1)]$$

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k-d)}{\rho + \varphi^T(k-d)P(k-1)\varphi(k-d)}$$

$$P(k) = \frac{1}{\rho} [I - K(k)\varphi^T(k-d)]P(k-1)$$

其中, ρ 称为遗忘因子, 当 $\rho = 1$ 时退化为基本的递推最小二乘公式; ρ 通常选择为 $0.95 \leq \rho \leq 0.99$, 越小老数据遗忘越快。

最小方差控制由(15)式确定，即：

$$u(k) = -\frac{1}{b_0} \varphi^T(k) \hat{\theta}(k) \quad (23)$$

接着，我们考虑 $C(q^{-1}) \neq 1$ 的情况。

利用最优预报(9)，可以将预测模型(8)写为如下形式：

$$\begin{aligned} y(k+d) = & G(q^{-1})y(k) + B(q^{-1})F(q^{-1})u(k) + [1 - C(q^{-1})]y^*(k+d/k) \\ & + F(q^{-1})v(k+d) \end{aligned} \quad (24)$$

【注：上式中的绿色部分使用了最优预测(9)的表达式。】

由前述分析可知，求自校正调节律可通过使得 $y^*(k+d/k) = 0$ 得到，即上式右端第三项为0。这样，该情况与 $C(q^{-1}) = 1$ 时的情况相同，即可用(20)式作为参数辨识方程。余下的处理同 $C(q^{-1}) = 1$ 的情况。

(2) 最小方差自校正控制器

此时，有 $y_r(k + d) \neq 0$ 。对预测模型(8)进行变形可以得到

$$\begin{aligned} y(k + d) = & G(q^{-1})y(k) + B(q^{-1})F(q^{-1})u(k) - [C(q^{-1}) - 1]y(k + d) \\ & + C(q^{-1})F(q^{-1})v(k + d) \end{aligned} \quad (25)$$

令 $\varepsilon_c(k + d) = C(q^{-1})F(q^{-1})v(k + d)$ 。考虑到 $[C(q^{-1}) - 1]y(k + d)$ 中包含未来时刻的输出，我们用最优预测来代替，即用 $y^*(k - i + d|k - i)$ 代替 $y(k - i + d)$, ($i = 1, 2, \dots, n_c$)。这样，有

主要用于计算 k 时刻的控制律，见下页(27)式

$$y(k + d) = \varphi^T(k)\theta + \varepsilon_c(k + d) \quad (26)$$

其中， $\varphi^T(k) = [y(k), \dots, y(k - n_g), u(k), \dots, u(k - n_{f'}), -y^*(k - 1 + d|k - 1),$

$$\dots, -y^*(k - n_c + d|k - n_c)]$$
、 $\theta = [g_0, g_1, \dots, g_{n_g}, f'_1, f'_2, \dots, f'_{n_{f'}}, c_1, \dots, c_{n_c}]^T$.

当对象的参数 $G(q^{-1})$ 、 $F'(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 未知时，数据向量 $\varphi^T(k)$ 中的最优预报也未知，因此需要用相应的估计来代替，即

$$\hat{\varphi}^T(k) = [y(k), \dots, y(k - n_g), \color{red}{u(k)}, \dots, u(k - n_{f'}), -\hat{y}(k - 1 + d), \dots, -\hat{y}(k - n_c + d)]$$

其中， $\hat{y}(k - i + d) = \hat{\varphi}^T(k - i)\hat{\theta}(k - i)$ 。

将(26)式中的 k 用 $k - d$ 代替，并利用增广最小二乘法可写出参数递推估计公式为：

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k - 1) + K(k)[y(k) - \hat{\varphi}^T(k - d)\hat{\theta}(k - 1)]$$

$$K(k) = \frac{P(k-1)\hat{\varphi}(k-d)}{1 + \hat{\varphi}^T(k-d)P(k-1)\hat{\varphi}(k-d)}$$

$$P(k) = [I - K(k)\hat{\varphi}^T(k - d)]P(k - 1)$$

类似于(12)式的计算， k 时刻的最小方差自校正控制律为满足下式的控制律：

$$\hat{y}(k + d) = \hat{\varphi}^T(k)\hat{\theta}(k) = y_r(k + d) \quad (27)$$

即：

$$\color{red}{u(k)} = \frac{1}{\hat{b}_0} \left[y_r(k + d) + \sum_{i=1}^{n_c} \hat{c}_i \hat{y}(k - i + d) - \sum_{i=0}^{n_g} \hat{g}_i y(k - i) - \sum_{i=1}^{n_{f'}} \hat{f}'_i u(k - i) \right] \quad (28)$$

注：为避免辨识的过程中出现 b_0 的估计值过小从而使得 $u(k)$ 过大的情况，可参照最小方差自校正调节器中固定 b_0 的方法实现最小方差自校正控制。此外，上述的增广最小二乘参数递推估计法也可像最小方差自校正调节器中那样引入遗忘因子。

(3) 最小方差自校正控制算法的收敛性

对于最小方差自校正调节算法的收敛性，Åström等人于1973年给出过结论：

设被控对象的参数辨识方程如(21)式所示，闭环系统的调节律如(23)式所示，若 $k \rightarrow \infty$ 时，参数估计收敛到真值，即 $\hat{\theta} \rightarrow \theta$ ，并且 $G(q^{-1})$ 和 $F'(q^{-1})$ 无公因子，则调节器(23)最终收敛到系统参数已知时的最小方差调节律。

对于最小方差自校正控制器算法也有类似的结论，这时控制器(28)收敛到参数已知时的最小方差控制规律。

总之，被估计的参数收敛到真值，是调节或控制规律收敛到最小方差规律的前提。

2.4 广义最小方差自校正控制

最小方差控制没有考虑对控制项的约束，因此所设计出的控制作用有可能超出允许的上限，以这种指标函数设计的控制器或自校正控制器要求系统的多项式 $B(q^{-1})$ 和 $C(q^{-1})$ 都是Hurwitz多项式，这意味着最小方差控制不适用于非逆稳定的系统。

为了克服这些缺点，D. W. Clarker等人于1975年提出了一种新的最小方差控制和最小方差自校正控制算法，这种算法仍采用二次型性能指标，但在指标函数中引入了控制作用的加权项，因此它能限制控制作用不适当增加的情况，同时通过适当选择控制权因子的大小，可以使其适用于非逆稳定的被控系统。

2.4.1 广义最小方差控制

考虑右图中更为一般的被控系统，
其中，被控过程由下式描述：

$$y_u(k) = \frac{B(q^{-1})q^{-d}}{A(q^{-1})} u(k) \quad (29)$$

噪声干扰 $n(k)$ ：

$$n(k) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} v(k) \quad (30)$$

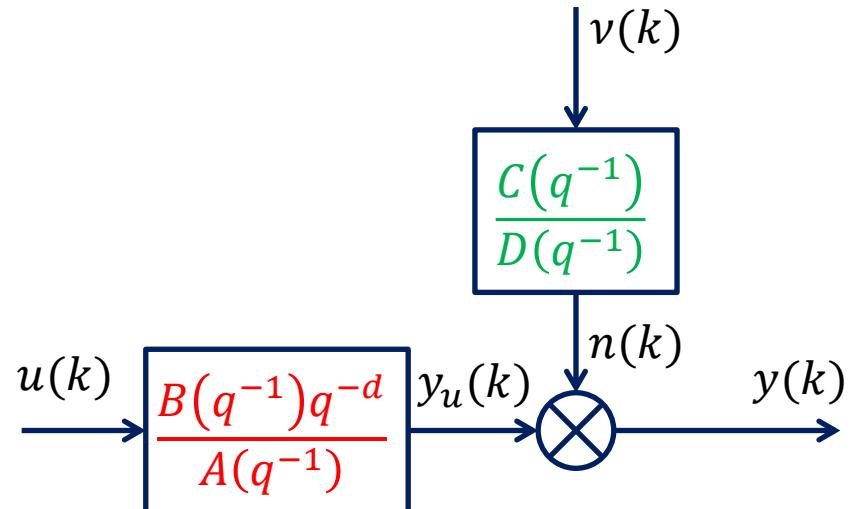
系统模型为：

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})q^{-d}}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} v(k) \quad (31)$$

广义方差性能指标：

$$J_2 = E\{[y(k+d) - y_r(k+d)]^2 + ru^2(k)\} \quad (32)$$

控制任务：求使得性能指标 J_2 最小化的控制量 $u(k)$ 。



类似于最小方差控制的情况，我们先确定系统输出的预测模型，然后求广义最小方差控制律。

由(31)式可得 $y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}\nu(k+d)$ ，将 $\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}$ 分解成

$$\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} = F(q^{-1}) + \frac{q^{-d}G(q^{-1})}{D(q^{-1})} \quad (33)$$

其中， $F(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-(d-1)}$ ， $G(q^{-1}) = g_0 + g_1q^{-1} + \dots + g_{n_g}q^{-(n_d-1)}$ 。

将(33)式写为

$$C(q^{-1}) = F(q^{-1})D(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) \quad (34)$$

这样，即可将噪声 $\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}\nu(k+d)$ 写为未来时刻和过去/现在时刻的噪声之和：

$$\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}\nu(k+d) = F(q^{-1})\nu(k+d) + \frac{G(q^{-1})}{D(q^{-1})}\nu(k) \quad (35)$$

根据(31)式， $\nu(k)$ 能被写为

$$\nu(k) = \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[y(k) - \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) \right] \quad (36)$$

将(36)式代入(35)式得：

$$\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}v(k+d) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[y(k) - \frac{B(q^{-1})q^{-d}}{A(q^{-1})} u(k) \right] + F(q^{-1})v(k+d) \quad (37)$$

将(37)式代入 $y(k+d)$ 的表达式中，可得系统预测输出的表达式为：

$$\begin{aligned} y(k+d) &= \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left[y(k) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d} u(k) \right] + F(q^{-1})v(k+d) \\ &= \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} [C(q^{-1}) - G(q^{-1})q^{-d}]u(k) + F(q^{-1})v(k+d) \end{aligned}$$

考虑(34)式，上式可简化为：

$$y(k+d) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})D(q^{-1})F(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} u(k) + F(q^{-1})v(k+d) \quad (38)$$

对(38)式求解最小方差意义下的最优输出预测 $y^*(k+d/k)$ 为：

$$y^*(k+d/k) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})D(q^{-1})F(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} u(k) \quad (39)$$

此时系统的实际输出为：

$$y(k+d) = y^*(k+d/k) + F(q^{-1})v(k+d) \quad (40)$$

将(40)式代入性能指标 J_2 中可得：

$$\begin{aligned} J_2 &= E\left\{[y(k+d) - y_r(k+d)]^2 + ru^2(k)\right\} \\ &= E\left\{[y^*(k+d/k) - y_r(k+d)]^2 + ru^2(k)\right\} + E\left\{[F(q^{-1})v(k+d)]^2\right\} \end{aligned} \quad (41)$$

最后一项求期望后为常数

为了求得最小方差意义下的最优控制量，将 J_2 对 $u(k)$ 求导数有

$$\frac{\partial J_2}{\partial u(k)} = 2E\left\{[y^*(k+d/k) - y_r(k+d)] \frac{\partial y^*(k+d/k)}{\partial u(k)} + ru(k)\right\} \quad (42)$$

考虑(39)式，可知(42)式中 $\frac{\partial y^*(k+d/k)}{\partial u(k)}$ 的值为 b_0 。令(42)式右边{}中的部分为0可以得到 $u(k)$ 为（即使得 J_2 达到最小时的广义最小方差控制律）：

$$u(k) = \frac{A(q^{-1})C(q^{-1})y_r(k+d) - G(q^{-1})A(q^{-1})y(k)}{D(q^{-1})F(q^{-1})B(q^{-1}) + \frac{r}{b_0} C(q^{-1})A(q^{-1})} \quad (43)$$

由(43)式可以导出不同类型的最小方差控制器：

- ① 当 $y_r = 0$ 时，(43)式变成带有控制限制的调节器，其调节律 u_1 可简化为

$$u_1(k) = -\frac{G(q^{-1})A(q^{-1})}{D(q^{-1})F(q^{-1})B(q^{-1}) + \frac{r}{b_0}C(q^{-1})A(q^{-1})}y(k) \quad (44)$$

- ② 当 $y_r = 0$ 、且噪声滤波器的分母 $D(q^{-1})$ 与过程分母 $A(q^{-1})$ 相等时，其调节律 u_2 可简化(设计)为

$$u_2(k) = -\frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})B(q^{-1}) + \frac{r}{b_0}C(q^{-1})}y(k) \quad (45)$$

- ③ 当对上两种情况采用 J_1 (即取 J_2 中的 r 为0)为性能指标时，其调节律可分别简化为 u_3 和 u_4 ：

$$u_3(k) = -\frac{G(q^{-1})A(q^{-1})}{D(q^{-1})F(q^{-1})B(q^{-1})}y(k) \quad (46)$$

还原为之前的最
小方差调节器

$$u_4(k) = -\frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})B(q^{-1})}y(k) \quad (47)$$

- ④ 对(43)式，采用 J_1 (即取 J_2 中的 r 为0)，并令 $D(q^{-1}) = A(q^{-1})$ ，则当 $y_r \neq 0$ 时的最小方差控制器 u_5 可简化为

$$u_5(k) = \frac{C(q^{-1})y_r(k+d) - G(q^{-1})y(k)}{F(q^{-1})B(q^{-1})} \quad (48)$$

等价为之前的
(12)式

2.4.2 广义最小方差控制系统的特性分析

(1) 对于 u_4 、 u_5 作用下的闭环系统，其共同的特征方程为

$$1 + \frac{G(q^{-1})B(q^{-1})q^{-d}}{A(q^{-1})B(q^{-1})F(q^{-1})} = 0$$

该闭环特征方程等价为

$$B(q^{-1})C(q^{-1}) = 0$$

由此可知，只有当被控系统的 $B(q^{-1})$ 及 $C(q^{-1})$ 均是稳定的，所设计出的闭环系统才是稳定的，即控制律 u_4 、 u_5 只能用于逆稳定系统，这与前节所得结论相同。

(2) 对于 u_3 作用下的闭环调节系统，其特征方程为

$$1 + \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d} \frac{G(q^{-1})A(q^{-1})}{D(q^{-1})B(q^{-1})F(q^{-1})} = 0$$

该闭环特征方程等价为

$$A(q^{-1})B(q^{-1})C(q^{-1}) = 0$$

上式说明，当噪声滤波器中的极点满足 $D(q^{-1}) \neq A(q^{-1})$ 时，不但要求 $B(q^{-1})$ 及 $C(q^{-1})$ 是稳定的，而且要求被控过程本身也是稳定的（即被控过程本身是开环稳定的），这样整个闭环系统才是稳定的。

(3) u_2 是最常用的广义最小方差调节器，其中 $D(q^{-1}) = A(q^{-1})$ 。其闭环特征方程为 $1 + \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d} \frac{G(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1}) + \frac{r}{b_0}C(q^{-1})} = 0$ 。该闭环特征方程可等价为 $C(q^{-1}) \left(B(q^{-1}) + \frac{r}{b_0} A(q^{-1}) \right) = 0$ 。

比较 u_2 和 u_4 下的闭环特征方程可知：

当 $B(q^{-1})$ 中含有不稳定的零点时，采用最小方差控制，闭环系统不稳定。但当改用广义最小方差控制时，从其闭环特征方程中可以看出：当 $r \rightarrow 0$ 时， $B(q^{-1}) + \frac{r}{b_0} A(q^{-1}) = 0$ 的根将趋于 $B(q^{-1}) = 0$ 的根；而当 $r \rightarrow \infty$ 时， $B(q^{-1}) + \frac{r}{b_0} A(q^{-1}) = 0$ 的根将趋于 $A(q^{-1}) = 0$ 的根，即趋于被控过程的极点。若被控过程是开环稳定的，即 $A(q^{-1}) = 0$ 的根都在单位圆内，此时我们适当地选择系数 r 值，即使 $B(q^{-1}) = 0$ 中有些根在单位圆外，其闭环控制系统仍然可以是稳定的。所以，采用广义最小方差控制（调节）律，对非逆稳定系统也可能实现稳定的控制。

(4) 广义最小方差控制律(43)与广义最小方差调节律 u_1 作用下闭环系统的共同特征方程为

$$1 + \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-d} \frac{G(q^{-1})A(q^{-1})}{D(q^{-1})B(q^{-1})F(q^{-1}) + \frac{r}{b_0} C(q^{-1})A(q^{-1})} = 0$$

该闭环特征方程等价为

$$A(q^{-1})C(q^{-1}) \left(B(q^{-1}) + \frac{r}{b_0} A(q^{-1}) \right) = 0$$

上式说明，只要被控对象是开环稳定的，广义最小方差控制律和广义最小方差调节律均可能用于非逆稳定系统的控制。

2.4.3 广义最小方差自校正控制

采用与最小方差自校正控制相似的方式，将(38)式改写成(21)式或(26)式的形式，可以完全沿用最小方差自校正调节器和最小方差自校正控制器的方法设计广义最小方差自校正调节器和广义最小方差自校正控制器。