

自适应控制课件

第3章 LQG自校正器

主要内容

3.1 线性二次型(LQ)最优控制

 3.1.1 二次型性能指标

 3.1.2 状态调节器

 3.1.3 输出调节器

3.2 状态观测器

3.3 LQG自校正器

 3.3.1 卡尔曼滤波器

 3.3.2 LQG系统的分离特性

 3.3.3 随机系统的最优控制律

 3.3.4 对偶原理

 3.3.5 LQG自校正控制

3.1 线性二次型(LQ)最优控制

3.1.1 二次型性能指标

设线性系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases} \quad (\text{A1})$$

其中， x 、 u 和 y 分别为 n 、 m 和 l 维状态、输入和输出列矢量。在工程实际中，总是希望使得系统的输出 $y(t)$ 接近某一期望输出 $y_r(t)$ 。称

$$e(t) = y_r(t) - y(t) \quad (\text{A2})$$

为误差向量。

要求确定最优控制 $u^*(t)$ ，使得下列二次型性能指标取最小：

$$J = \frac{1}{2} e^T(t_f) Q_0 e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q(t) e(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \quad (\text{A3})$$

其中， Q_0 和 $Q(t)$ 为非负定矩阵， $R(t)$ 为正定矩阵，初始时刻 t_0 和末端时刻 t_f 固定。

通常，权矩阵 Q_0 、 $Q(t)$ 和 $R(t)$ 取对角矩阵。如何根据系统的实际要求选择各加权矩阵是一个复杂的问题，其理论和方法至今未能很好解决。

- 若 $Q_0 = \text{diag}[q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0l}]$ ，则(A3)式右边的第一项为

$$\frac{1}{2} e^T(t_f) Q_0 e(t_f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l q_{0i} e_i^2(t_f)$$

表示末态跟踪误差向量 $e(t_f)$ 各分量的加权平方和。

因此，第一项表示控制结束后对系统末态跟踪误差的要求。

- 若取 $Q(t) = \text{diag}[q_1(t), q_2(t), \dots, q_l(t)] \geq 0$ ，则(A3)式右边第一过程项为

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q(t) e(t)] dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^l q_i(t) e_i^2(t) dt$$

因此，第一过程项表示在系统控制过程中，对动态跟踪误差各分量加权平方和的积分要求，是系统在运动过程中动态跟踪误差的总度量。

- 若取 $R(t) = \text{diag}[r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t)] > 0$, 则(A3)式右边第二项为

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t) R(t) u(t)] dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m r_i(t) u_i^2(t) dt$$

表示在系统控制过程中对系统加权后的控制能量消耗的总度量。

- 二次型性能指标 J 的物理意义：使系统在控制过程中的动态误差与能量消耗、以及控制结束时系统的稳态误差综合最优。因此，权矩阵 Q_0 、 $Q(t)$ 和 $R(t)$ 都必须取为非负，否则具有大误差和控制能量消耗很大的系统，仍然会有一个小的性能指标，从而违背了最优控制的意愿。至于要求 $R(t)$ 正定，是由于最优控制律的需要，以保证最优解的存在性。
- 二次型性能指标的特殊情形
 - 状态调节问题

若 $C(t) = I$ 、 $y_r(t) = 0$, 则 $e(t) = -y(t) = -x(t)$ 。此时，性能指标变为

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_0 x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \quad (\text{A4})$$

线性二次型问题归结为：当系统状态受扰偏离原平衡状态0时，要求系统产生一控制向量使得性能指标(A4)取极小，即使系统状态 $x(t)$ 始终保持在0平衡状态附近。因此，该类二次型最优控制问题称为状态调节问题。

- 输出调节问题

若 $y_r(t) = 0$ ，则 $e(t) = -y(t)$ 。此时，性能指标变为

$$J = \frac{1}{2} y^T(t_f) Q_0 y(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [y^T(t) Q(t) y(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt \quad (\text{A5})$$

线性二次型问题归结为：当系统输出受扰偏离期望输出0时，要求系统产生一控制向量使得性能指标(A5)取极小，即使系统输出 $y(t)$ 始终保持在期望输出0附近。因此，该类二次型最优控制问题称为输出调节问题。

- 跟踪问题

若 $y_r(t) \neq 0$ ，则线性二次型问题归结为：当期望输出 $y_r(t)$ 作用于系统时，要求系统产生一控制向量使得性能指标(A3)取极小，即使系统输出 $y(t)$ 始终跟随 $y_r(t)$ 的变化。因此，该类最优控制问题称为跟踪问题。

3.1.2 状态调节器

考虑如下系统

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k), X(0) = X_0 \quad (3.1)$$

的LQ状态调节问题，即寻求一个线性状态反馈控制律：

$$U(k) = -K(k)X(k) \quad (3.2)$$

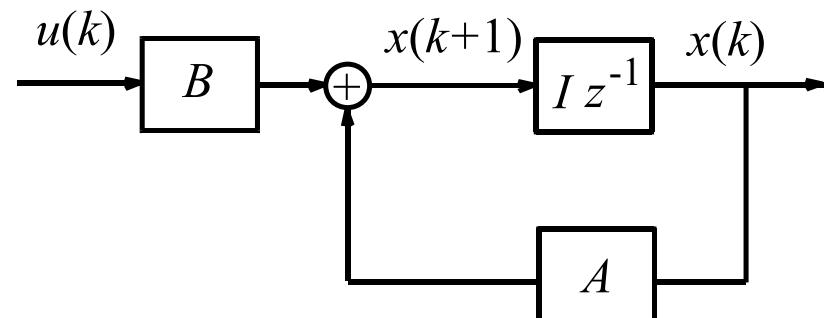
使下列目标函数最小化：

$$J_3 = X^T(N)Q_0X(N) + \sum_{i=0}^{N-1}[X^T(i)QX(i) + U^T(i)RU(i)] \quad (3.3)$$

以便系统能从任意初始态转移到原点(或平衡点)。

注意： N 为任一自然数；加权矩阵 Q_0 和 Q 为半正定矩阵， R 为正定矩阵。

使用拉格朗日(Lagrange)乘子法
求解该LQ最优控制问题。



将(3.1)式变为下列等式约束条件:

$$AX(k) + BU(k) - X(k+1) = 0 \quad (3.4)$$

借助拉格朗日乘子, 构造一个联系目标函数和等式约束条件的拉格朗日函数

$$\begin{aligned} J_l &= X^T(N)Q_0X(N) + \sum_{i=0}^{N-1} [X^T(i)QX(i) + U^T(i)RU(i)] + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^T(i+1)[AX(i) + BU(i) - X(i+1)] \\ &= X^T(N)Q_0X(N) - 2\lambda^T(N)X(N) + \sum_{i=1}^{N-1} [H(i) - 2\lambda^T(i)X(i)] + H(0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

式中哈米尔顿(Hamilton)算子序列为:

$$H(k) = X^T(k)QX(k) + U^T(k)RU(k) + 2\lambda^T(k+1)[AX(k) + BU(k)] \quad (3.6)$$

在等式约束条件(3.4)下使式(3.3)最小的问题, 等价于求(3.5)式的无条件极值问题, 这个问题有解的必要条件为下述两式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_l}{\partial X(k)} = 2QX(k) + 2A^T\lambda(k+1) - 2\lambda(k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N-1) \\ \frac{\partial J_l}{\partial U(k)} = 2RU(k) + 2B^T\lambda(k+1) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \\ \frac{\partial J_l}{\partial \lambda(k+1)} = 2AX(k) + 2BU(k) - 2X(k+1) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \end{array} \right. \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial J_l}{\partial X(N)} = 2Q_0X(N) - 2\lambda(N) = 0 \quad (3.7b)$$

(3.7b)式是对应于状态终值 $X(N)$ 的条件，由(3.7b)可得

$$\lambda(N) = Q_0X(N) \quad (3.8)$$

由(3.7a)可得下列控制律和伴随律：

$$U(k) = -R^{-1}B^T\lambda(k+1) \quad (3.9)$$

$$\lambda(k) = QX(k) + A^T\lambda(k+1) \quad (3.10)$$

将(3.9)式代入(3.1)式可得：

$$X(k+1) = AX(k) - BR^{-1}B^T\lambda(k+1) \quad (3.11)$$

式(3.10)和(3.11)称为欧拉-拉格朗日(Euler-Lagrange)方程，这个方程的状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix} X(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^TA^{-T}Q & -BR^{-1}B^TA^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(k) \\ \lambda(k) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

假定 $\lambda(k)$ 和 $X(k)$ 存在下列变换关系：

$$\lambda(k) = S(k)X(k) \quad (3.13)$$

将(3.13)式代入(3.10)和(3.11)式中，消去 $\lambda(k)$ 得：

$$S(k)X(k) = QX(k) + A^T S(k+1)X(k+1) \quad (3.14)$$

$$X(k+1) = (I + BR^{-1}B^T S(k+1))^{-1} AX(k) \quad (3.15)$$

将(3.15)式代入(3.14)式得：

$$S(k)X(k) = QX(k) + A^T S(k+1)[I + BR^{-1}B^T S(k+1)]^{-1} AX(k)$$

上式对一切 $X(k)$ 均成立，故有：

$$S(k) = Q + A^T S(k+1)[I + BR^{-1}B^T S(k+1)]^{-1} A \quad (3.16)$$

当 $k = N$ 时，由(3.13)式和(3.8)式可得：

$$\begin{aligned} \lambda(N) &= S(N)X(N) = Q_0 X(N) \\ S(N) &= Q_0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

式(3.16)称为黎卡蒂(Riccati)差分方程，由 $k = N$ 后退即可求出黎卡蒂方程中 $S(N)$ 到 $S(0)$ 的每个值。

这样，由(3.9)、(3.10)和(3.13)式可得控制律为：

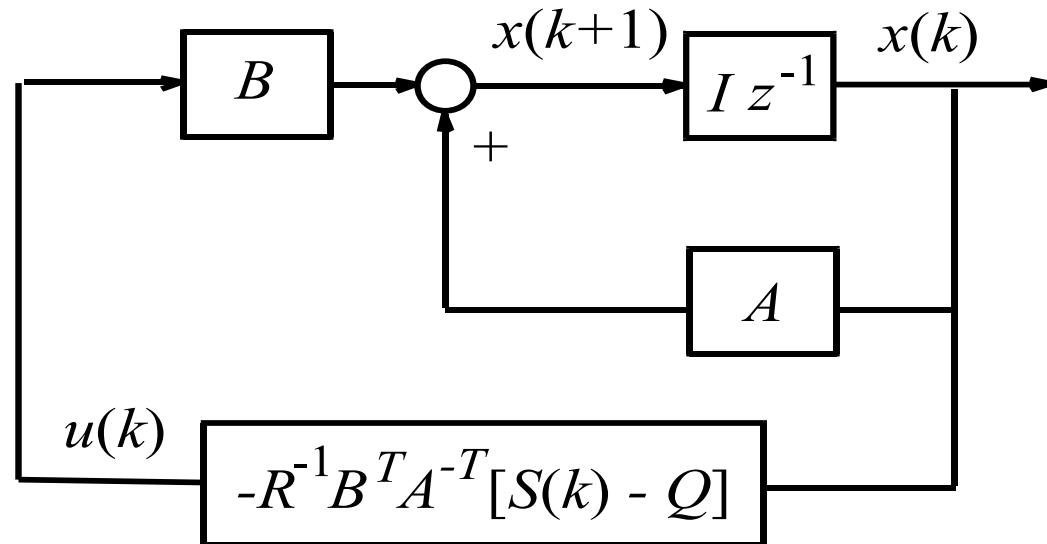
$$U(k) = -R^{-1}B^T A^{-T}[S(k) - Q]X(k) \quad (3.18)$$

这就是所求的LQ状态调节器。

特别地，与(3.2)式相比较可得反馈增益阵为：

$$K(k) = R^{-1}B^T A^{-T}[S(k) - Q] \quad (3.19)$$

由此可得，闭环系统的结构图为：



● LQ状态调节器的设计步骤

- ① 已知 A 、 B ，选定 Q_0 、 R 和 Q 的值；
- ② 根据(3.17)和(3.16)式计算 $S(N) = Q_0$ 和

$$S(k) = Q + A^T S(k+1) [I + BR^{-1}B^T S(k+1)]^{-1} A;$$

- ④ 根据(3.19)式计算 $K(k) = R^{-1}B^T A^{-T}[S(k) - Q]$ ；
- ⑤ 读取状态 $X(k)$ ；
- ⑥ 计算控制律 $U(k) = -K(k)X(k)$ ，并输出 $U(k)$ ；
- ⑦ $k \leftarrow k + 1$ ，转⑤。

● LQ调节器的说明

- ① 本节考虑的LQR调节器是一般的有限时间LQR调节器，而 $N \rightarrow \infty$ 时的结果对应无限时间LQR调节器，相应二次型指标中的前两项合并为 k 从1到 ∞ 的求和情况。
- ② LQ调节器可应用于多变量时变系统，且只要改变加权矩阵的元素值，就能兼顾向平衡态调节的速度和所需控制信号幅值的要求；
- ③ 当系统可观且目标函数中的 Q_0 、 R 和 Q 取对称的正定矩阵时，由LQ调节器构成的闭环系统总是稳定的。

3.1.3 输出调节器

考虑如下系统

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + BU(k) \\ y(k) = CX(k) \end{cases} \quad (3.20)$$

的LQ输出调节问题，即寻求一个线性状态反馈控制律：

$$U(k) = -K(k)X(k)$$

使下列目标函数最小化：

$$J_4 = Y^T(N)Y(N) + \sum_{i=0}^{N-1} [Y^T(i)Y(i) + U^T(i)RU(i)] \quad (3.21)$$

以便系统输出能保持在期望输出0处。

如果在(3.3)式中取 $Q_0 = Q = C^T C$ ，则(3.3)式中的 J_3 就转化为 J_4 。可见，输出调节器问题是状态调节器问题的特殊情况。因此，状态调节器的结论也适用于输出调节器。

3.2 状态观测器

状态反馈需要系统的状态，当状态信息不可直接获取时，可考虑使用状态观测器来重构出系统的状态。

定义过程和观测器之间的输出偏差为： $\tilde{y}(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ ；

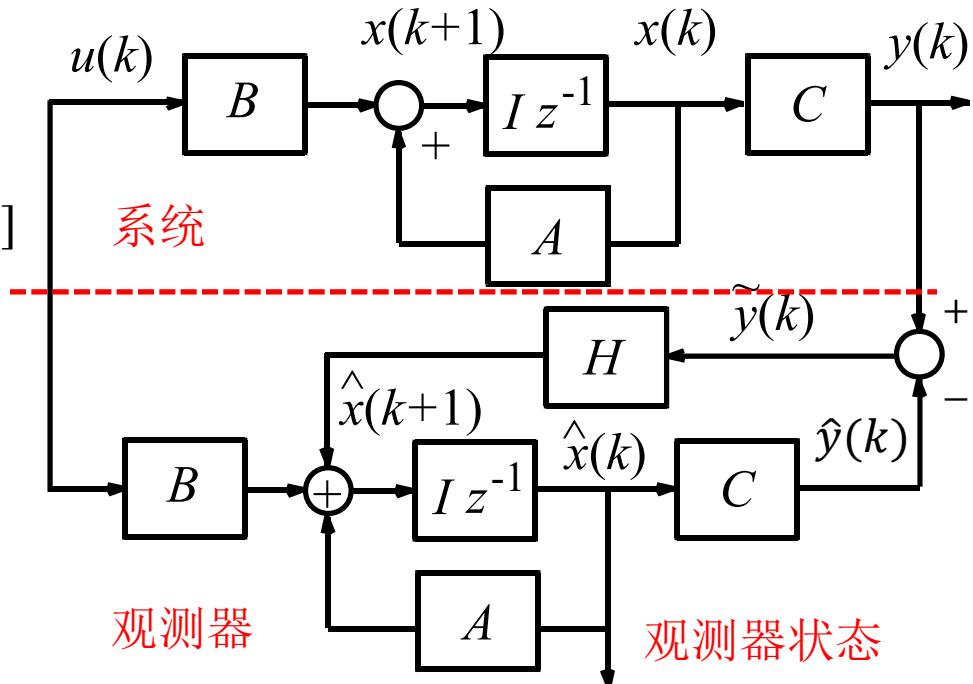
为了消除该偏差，引入图中的正反馈 H （等价为针对 $\hat{y}(k) - y(k)$ 的负反馈）；

这样观测器状态方程为：

$$\begin{aligned}\hat{X}(k+1) &= A\hat{X}(k) + BU(k) + H\tilde{y}(k) \\ &= A\hat{X}(k) + BU(k) + H[y(k) - C\hat{X}(k)] \\ &= (A - HC)\hat{X}(k) + BU(k) + Hy(k)\end{aligned}\quad (3.22)$$

引入状态预测的误差为：

$$\tilde{X}(k+1) = X(k+1) - \hat{X}(k+1) \quad (3.23)$$



结合(3.20)和(3.22)式，可得状态误差的动力学方程为：

$$\tilde{X}(k+1) = (A - HC)\tilde{X}(k) \quad (3.24)$$

(3.24)式是一阶线性齐次差分方程，当选择 H 使 $A - HC$ 稳定时，此方程的解（即状态偏差）以指数衰减方式趋于零。

(3.24)式所表示的动力学方程可以称为误差系统，显然它是不可控的。因此，为了使得 $A - HC$ 是Hurwitz矩阵，只要设计反馈矩阵 H 使得该误差系统的特征方程

$$\det(zI - A + HC) = 0$$

的根落在单位圆内即可。

对于简单的SISO系统，可以首先将系统转化为可观标准型：

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} U(k)$$

$$y(k) = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] X(k)$$

取反馈矩阵 H 为 $H = [h_n, h_{n-1}, \dots, h_1]^T$ ，则 $A - HC$ 变为：

$$A - HC = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n - h_n \\ 1 & \cdots & 0 & -a_{n-1} - h_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 - h_1 \end{bmatrix}$$

由此可算出偏差系统的特征方程 $\det(zI - A + HC) = 0$ 为：

$$(-a_n - h_n) + (-a_{n-1} - h_{n-1})z + \cdots + (-a_1 - h_1)z^{n-1} + z^n = 0$$

若选择 $h_i = -a_i$ ，则偏差系统的特征方程为 $z^n = 0$ ，满足设计要求。

3.3 LQG自校正器

- LQ最优控制(状态调节器、输出调节器)适用于用状态变量描述的确定性系统，其中最优控制律以基于全部状态变量的反馈形式来实现；当状态变量的信息不完全时，可以先设计一个状态观测器重构出系统的状态，然后再进行控制器的设计。
- 任一实际动态系统通常都具有一定程度的不确定性，最常见的有以下三类：
 - 1) 系统本身受到随机噪声或干扰的作用；
 - 2) 传感器测量噪声的影响；
 - 3) 系统模型参数的不确定性。

对这类系统进行控制，需要采用随机控制的方法。例如，LQG控制就是对具有高斯分布的随机扰动和量测噪声的系统，采用二次性能指标进行最优控制的问题。

● 随机控制系统的概念

- 受到过程扰动以及输出噪声的影响，即使系统的状态可直接测量，但观测到的数据因受到随机扰动及输出测量噪声等因素的影响，因而是不准确的【如，用温度计测量房间的温度时，若温度计有偏差或受到噪声干扰，则测到的温度值与温度的实际值将存在偏差，也即测到的温度值不能准确反映温度的实际值(真实值)】，从而无法被直接利用。
- 为了获得这类系统的状态数据，也需要借助状态重构的方法，以便从被随机扰动和噪声污染的信号或数据中获取真实有用的数据或信号。重构随机系统的状态由滤波器来完成。
- 对随机系统的控制器设计，分两步：
 - ① 采用滤波器将随机扰动和测量噪声消除，进行状态估计；
 - ② 根据所估计的状态进行最优控制器的设计。

3.3.1 卡尔曼滤波器

卡尔曼滤波器主要用来估计含有随机扰动和测量噪声的系统的当前状态。

考虑如下离散时间随机系统：

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + BU(k) + L\nu(k) \\ \quad y(k) = CX(k) + n(k) \end{cases} \quad (3.25)$$

其中， $\nu(k)$ 和 $n(k)$ 分别是服从高斯分布 $\mathcal{N}(0, V)$ 和 $\mathcal{N}(0, N)$ 的 r 维和 l 维零均值白噪声向量序列，即有：

$$E\{\nu(k)\} = 0, E\{n(k)\} = 0;$$

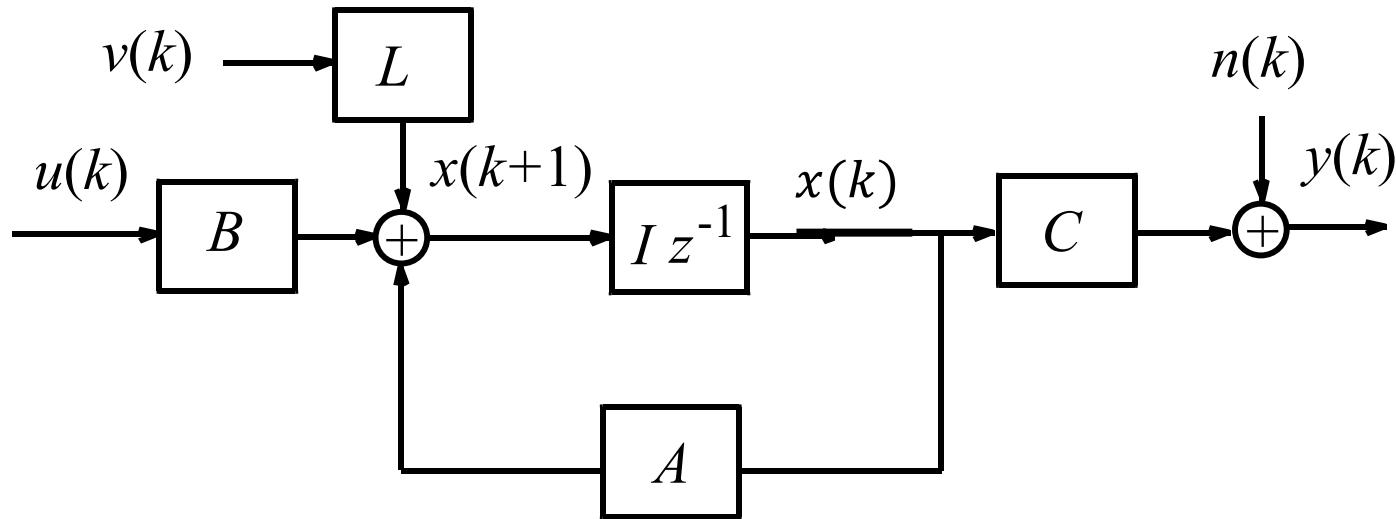
$$E\{\nu(l)\nu^T(k)\} = V\delta_{lk}, E\{n(l)n^T(k)\} = N\delta_{lk}.$$

此外，假定：

- ① $\nu(l)$ 和 $n(k)$ 相互独立，即： $E\{\nu(l)n^T(k)\} = 0$ 。
- ② 初始态 $X(0) \sim \mathcal{N}(\bar{X}_0, R_0)$ ，且与 $\nu(k)$ 和 $n(k)$ 相互独立，即：

$$E\{X(0)\nu^T(k)\} = 0, (k \geq 0); \quad E\{X(0)n^T(k)\} = 0, (k \geq 0).$$

注：由于 $X(0)$ 、 $\nu(k)$ 和 $n(k)$ 都是高斯的，而 $X(k)$ 和 $y(k)$ 都是它们的线性组合，因而也是高斯的。



● 卡尔曼滤波器的思想

以 $k - 1$ 时刻系统状态的最优估计 $\hat{X}(k - 1)$ 为准，(基于系统模型)预测 k 时刻的状态变量值 $X^*(k)$ ，同时又对系统输出进行观测，得到观测变量 $y(k)$ ，再利用观测信息对预测量进行修正，从而得到 k 时刻系统状态 $X(k)$ 的最优估计 $\hat{X}(k)$ 。

● 卡尔曼滤波器的设计

- ① 根据以上原则，写出 k 时刻系统状态的估计式(滤波方程)如下：

$$\hat{X}(k) = X^*(k) + K_f(k)[y(k) - CX^*(k)] \quad (3.29)$$

其中， $X^*(k)$ 为无干扰和噪声情况下根据系统方程对 k 时刻状态变量的预测值； $K_f(k)$ 为由输出测量值所决定的修正作用的校正矩阵，称为滤波器增益矩阵。

- ② 基于前一次估计的状态 $\hat{X}(k-1)$ ，对 k 时刻的系统状态进行最优预测(即确定系统在无干扰和噪声情况下的状态值)得到预测值 $X^*(k)$ ：

$$X^*(k) = A\hat{X}(k-1) + BU(k-1) \quad (3.27)$$

为下文使用，定义预测的均方误差矩阵（或预测误差的协方差矩阵）为：

$$P^*(k) \triangleq E\{\tilde{X}^*(k)\tilde{X}^{*\top}(k)\}$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } \tilde{X}^*(k) &\triangleq X(k) - X^*(k) = AX(k-1) + L\nu(k-1) - A\hat{X}(k-1) \\ &\triangleq A\tilde{X}(k-1) + L\nu(k-1) \end{aligned}$$

③ 滤波增益矩阵 $K_f(k)$ 的计算

通过使滤波(估计)的均方误差 J_{K_f} 为最小来求 $K_f(k)$ 的值。

定义滤波的均方误差矩阵(或滤波误差的协方差矩阵)为

$$\hat{P}(k) \triangleq E \left\{ [X(k) - \hat{X}(k)] [X(k) - \hat{X}(k)]^T \right\} = E \left\{ \hat{X}(k) \hat{X}^T(k) \right\} \quad (3.26)$$

其中， $\hat{X}(k) = X(k) - \hat{X}(k) = X(k) - X^*(k) - K_f(k)[y(k) - CX^*(k)]$

$$= \tilde{X}^*(k) - K_f(k)[C\tilde{X}^*(k) + n(k)]$$

则滤波(估计)的均方误差为

$$\begin{aligned} J_{K_f} &= E \left\{ [X(k) - \hat{X}(k)]^T [X(k) - \hat{X}(k)] \right\} \\ &= \text{tr} \left(E \left\{ [X(k) - \hat{X}(k)] [X(k) - \hat{X}(k)]^T \right\} \right) \\ &= \text{tr} \left(\hat{P}(k) \right) \end{aligned}$$

将(3.26)式代入上式可得滤波的均方误差为(省略了时刻k):

$$\begin{aligned}
 J_{KF} &= \text{tr}(\hat{P}(k)) = \text{tr}\left(E\left\{\left[\tilde{X}^* - K_f(C\tilde{X}^* + n)\right]\left[\tilde{X}^{*T} - (C\tilde{X}^* + n)^T K_f^T\right]\right\}\right) \\
 &= \text{tr}\left(E\left\{\tilde{X}^*\tilde{X}^{*T} - \tilde{X}^*(\tilde{X}^{*T}C^T + n^T)K_f^T - K_f(C\tilde{X}^*\tilde{X}^{*T} + n\tilde{X}^{*T}) + K_f(C\tilde{X}^*\tilde{X}^{*T}C^T + nn^T)K_f^T\right\}\right) \\
 &= \text{tr}\left(P^* - P^*C^T K_f^T - K_f C P^* + K_f(C P^* C^T + N)K_f^T\right)
 \end{aligned}$$

【注意: 等式第二行红色虚线部分的得出使用了过程噪声与量测噪声独立的条件】

令 $\frac{\partial J_{KF}}{\partial K_f} = -2P^*(k)C^T + 2K_f(C P^*(k)C^T + N) = 0$ 可得:

$$K_f(k) = P^*(k)C^T [C P^*(k)C^T + N]^{-1} \quad (3.30)$$

④ 预测的均方误差矩阵 $P^*(k)$ 和滤波的均方误差矩阵 $\hat{P}(k)$ 的计算

由第②步中预测的均方误差矩阵 $P^*(k)$ 的表达式和(3.26)式中滤波的均方误差矩阵 $\hat{P}(k)$ 的表达式，可以计算出：

$$P^*(k) = A\hat{P}(k-1)A^T + LVL^T \quad (3.28)$$

等价地， $P^*(k+1) = A\hat{P}(k)A^T + LVL^T$ 。

由第③步的推导过程可知，在(3.30)式中的 $K_f(k)$ 下，状态滤波的均方误差矩阵为：

$$\hat{P}(k) = E\left\{\hat{\bar{X}}(k)\hat{\bar{X}}^T(k)\right\} = (I - K_f(k)C)P^*(k) \quad (3.31)$$

注：在使用卡尔曼滤波器时，通常假定下面的量是已知的：

- a) 过程系数 A 、 B 和 C ；
- b) 输入随机扰动矩阵 L ，以及噪声互相关矩阵 V 和 N ；
- c) 状态估计的初始值 $\hat{X}(0) = \bar{X}_0 = E\{X(0)\}$ 和滤波误差的初始协方差矩阵 $\hat{P}(0) = var(X(0))$ 。

因此，根据(3.28)式和前一步滤波的均方误差矩阵可以算出本步预测的均方误差矩阵，代入(3.30)式可算出本步的滤波增益矩阵 K_f ，再将 K_f 和预测的均方误差矩阵同时代入(3.31)式即可算出本步滤波的均方误差矩阵，如此循环递推，即可算出每个时刻的滤波增益矩阵 K_f 。进而，由(3.29)式算出每个时刻的状态估计值。

实际中，有时需要考虑卡尔曼滤波器的稳态结果，即迭代算法的最终收敛性。若算法收敛，则 $k \rightarrow \infty$ 时矩阵 $K_f(k)$ 将变为常数矩阵 K_f ：

$$K_f = \bar{P}^* C^T [C \bar{P}^* C^T + N]^{-1} \quad (3.32)$$

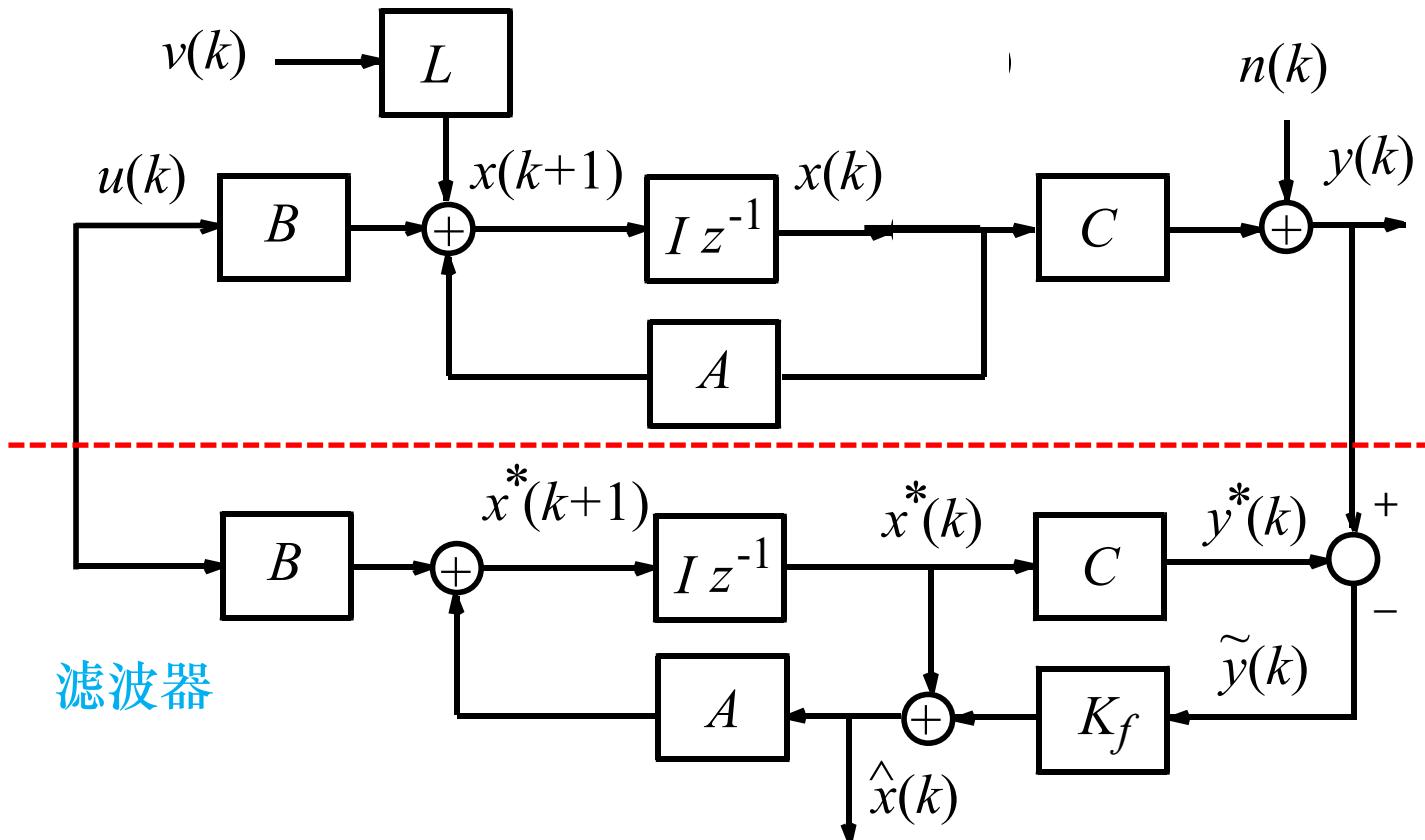
其中，

$$\bar{P}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} P^*(k+1) = L V L^T + A \bar{P}^* [I - C^T (C \bar{P}^* C^T + N)^{-1} C \bar{P}^*] A^T \quad (3.33)$$

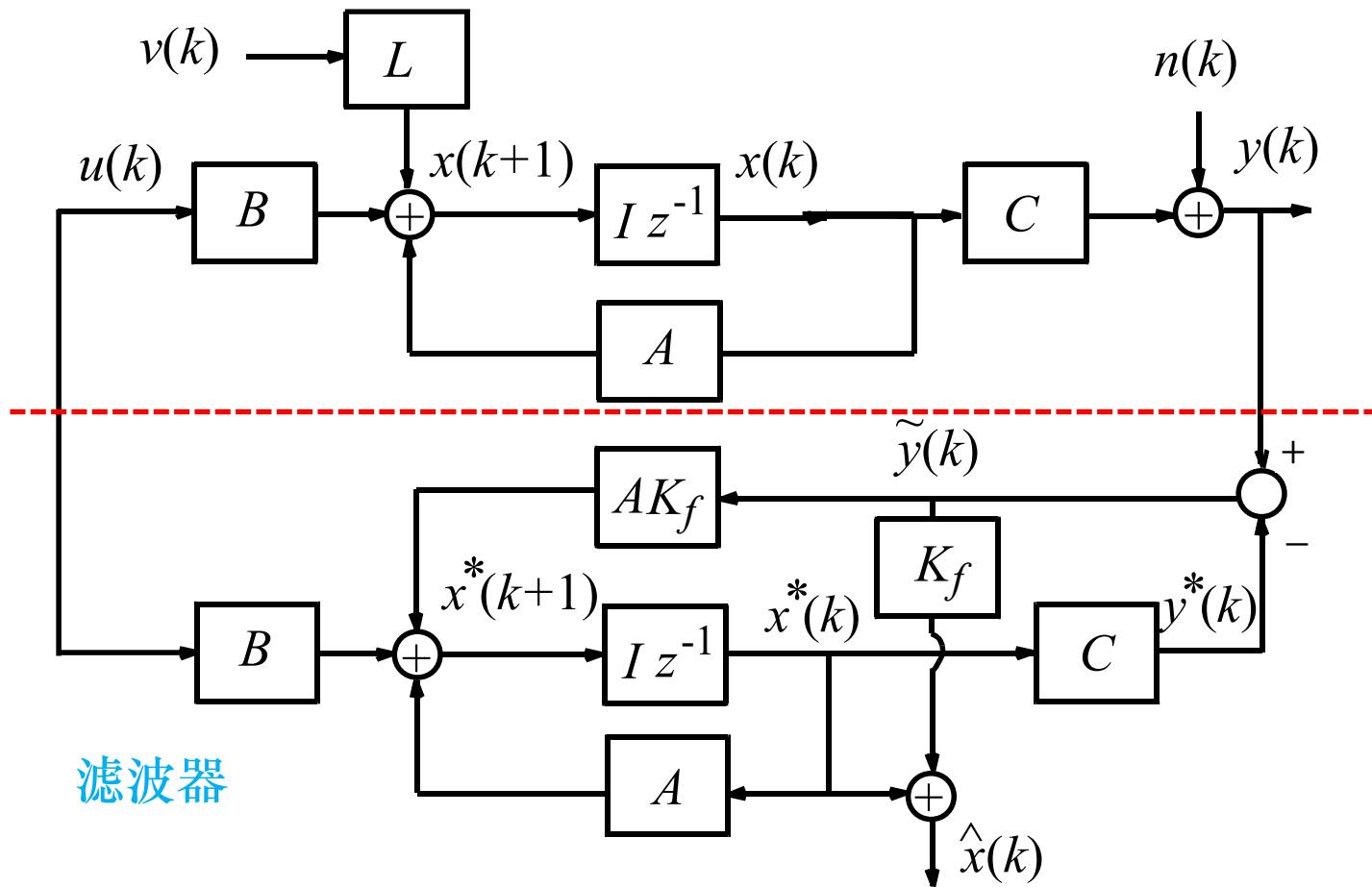
注：稳态值可通过计算机仿真得到后用于实际系统中，或通过求解矩阵代数方程(3.33)式得到。

由此可根据滤波状态将最优预测方程写为：

$$\begin{aligned} X^*(k+1) &= A\hat{X}(k) + BU(k) \\ &= A\{X^*(k) + K_f[y(k) - CX^*(k)]\} + BU(k) \end{aligned}$$



基于第一式的结构图



基于第二式的结构图

- 卡尔曼滤波器具有以下特点
 - ① 滤波器估计状态的算法是以“预测+校正”的方式进行递推的，不要求储存任何观测数据 $y(k)$ ，便于实时计算；
 - ② 滤波增益矩阵 $K_f(k)$ 、均方误差矩阵 $P^*(k)$ 及 $\hat{P}(k)$ ，与观测数据无关，可以事先算好存储起来，从而加速实时处理；
 - ③ 由均方误差矩阵 $P^*(k)$ 及 $\hat{P}(k)$ 可以获知有关滤波的性能；
 - ④ 滤波的均方误差矩阵 $\hat{P}(k)$ 及增益矩阵 $K_f(k)$ 与噪声相关矩阵 V 和 N 紧密相关。
 - ⑤ 卡尔曼滤波算法对非高斯白噪声也适用，且 $\hat{X}(k)$ 仍是 $X(k)$ 的无偏最小方差估计，但不是所有估计中的最优估计，而只是线性类中的最优估计，因最小方差就是针对线性估计而言的。
 - ⑥ 每个时刻的滤波值依赖于初始条件 $\hat{X}(0)$ 和 $\hat{P}(0)$ 。实际中，若初始条件不能精确已知，可根据经验假定，此时的滤波值不再是最优的，即初始条件将对滤波估值的精确性产生影响，具体的影响情况涉及滤波稳定性的问题。
 - ⑦ 对过程噪声与量测噪声相关、有色噪声、非线性滤波等情况，相应的卡尔曼滤波算法均是在以上基本算法的基础上发展的。

结论：当状态估计的初值满足 $\hat{X}(0) = E\{X(0)\}$ 时，对于一切 $k > 0$ ，必有 $E\{\hat{X}(k)\} = E\{X(k)\}$ 成立。

3.3.2 LQG系统的分离特性

LQG最优控制的有效性源于下面的分离定理。

分离定理 对于具有高斯型过程干扰和量测噪声的随机线性系统，其LQG最优控制策略可以分成两步完成：最优估计与最优控制，其中最优估计仅由系统方程和不确定性的相关矩阵 V 、 N 及估计的均方误差阵的初始值 $\hat{P}(0)$ 决定，与控制无关；而最优控制只决定于系统方程和性能指标中的加权矩阵 Q_0 、 Q 和 R ，与系统的过程扰动及量测噪声无关，可以按照确定性系统设计，只是将确定性系统下的系统状态用最优估计状态代替，也即：只要系统方程和矩阵 $\hat{P}(0)$ 、 V 、 N 、 Q_0 、 Q 和 R 给定，状态估计与最优控制可以独立地分别进行设计。LQG系统所具有的这种特性称为分离特性。

利用分离特性可以很容易地求解LQG的控制问题。实际上，分离定理意味着，当利用卡尔曼滤波器估计出系统的状态信息后，整个随机系统就相当于一个状态已知的确定性系统了。此时，可沿用线性确定性系统的LQ最优控制方法进行控制律的设计，也可直接使用确定性系统LQ最优控制的结论。

3.3.3 随机系统的最优控制律

根据分离定理，直接将第3.1节中对于确定性系统最优控制律中的状态用经过卡尔曼滤波器估计的状态代替，即可求得随机线性系统状态调节律 $U(k) = -K_u(k)\hat{X}(k)$ 中的反馈矩阵为：

$$K_u(k) = [R + B^T S(k+1)B]^{-1} B^T S(k+1)A$$

其中，

$$S(k) = Q + A^T S(k+1) \left\{ I - B [R + B^T S(k+1)B]^{-1} B^T S(k+1) \right\} A$$

注：若算法收敛，则当 $k \rightarrow \infty$ 时 $K_u(k)$ 与 $S(k)$ 趋于常值：

$$\bar{K}_u = (R + B^T \bar{S}B)^{-1} B^T \bar{S}A \quad (3.34)$$

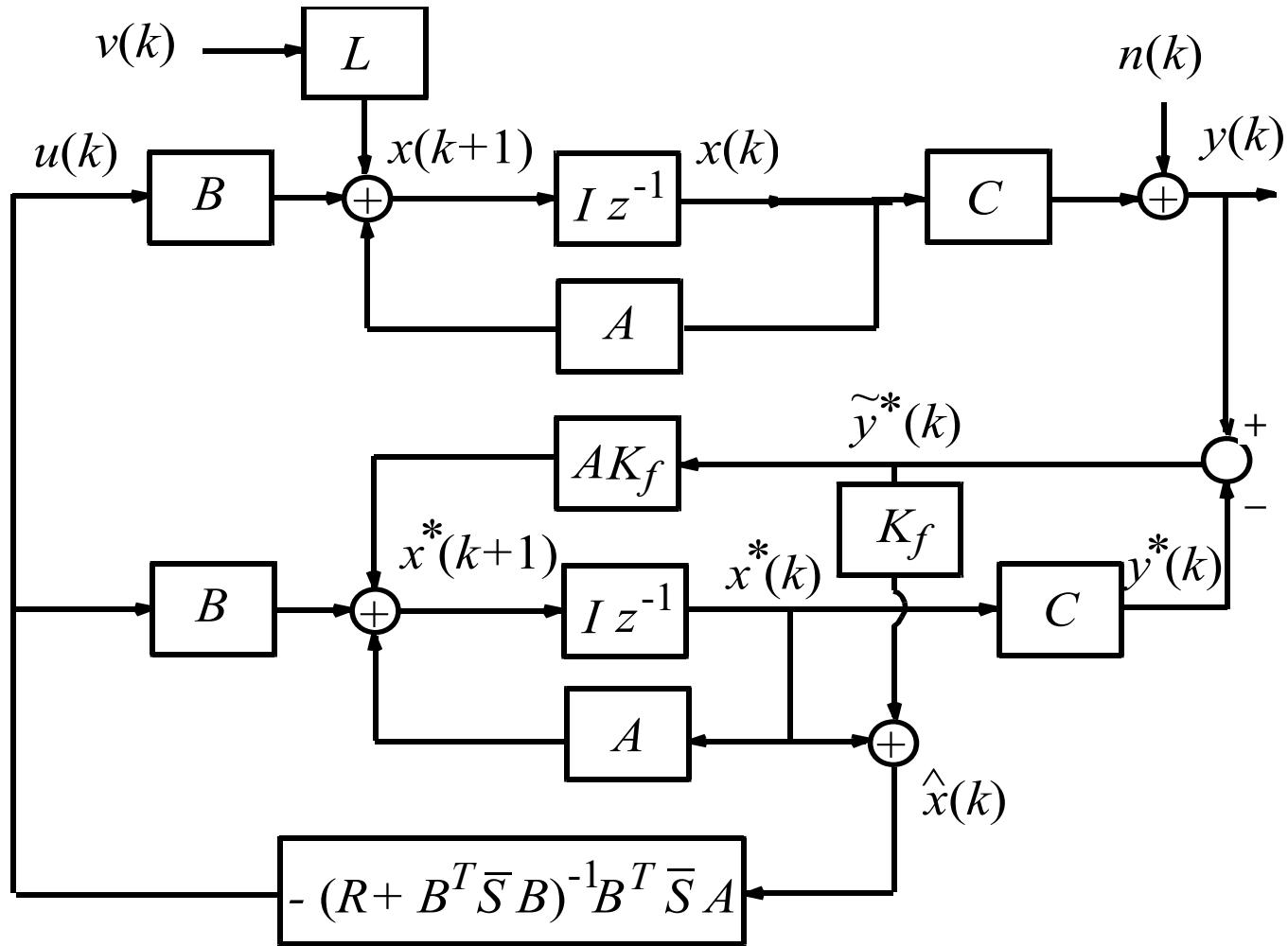
$$\bar{S} = Q + A^T \bar{S} [I - B(R + B^T \bar{S}B)^{-1} B^T \bar{S}] A \quad (3.35)$$

此时，有

$$U(k) = -\bar{K}_u \hat{X}(k) \quad (3.36)$$

即常用的时不变线性控制器(使用时可通过计算机仿真得到这些常值，也可通过求解矩阵代数方程(3.35)式得到)。

带有卡尔曼滤波器的最优控制系统结构图：



3.3.4 对偶原理

在线性系统理论中已经给出了系统与对偶系统的概念，并讨论了线性系统可控性与可观性的对偶关系。与之类似，最优控制与最优滤波也存在对偶关系，即一个线性系统的最优控制问题等价于对偶系统的最优滤波问题，反之亦然。

根据前面几节的内容，对于线性随机系统，其状态估计和最优控制的主要公式在形式上是相同的，只是变量和参数不同。只要把变量和参数稍加变换，最优控制和状态估计就可相互转换，最优控制可等价于状态估计，状态估计也可等价于最优控制。这种在状态估计和最优控制之间存在的性质称为对偶性。

对偶性的意义：

- ① 理论意义：状态估计可用最优控制来表示，状态估计问题可通过研究最优控制来解决；
- ② 实际意义：可仅编制一套程序，通过改变某些变量和参数，实现最优控制或状态估计的同时计算。

3.3.5 LQG自校正控制（之一：调节器）

- 对输入输出描述下的SISO系统，考虑LQG自校正控制。
- LQG自校正调节器以间接法较多，即对系统参数的自校正过程分两步：首先是参数辨识，然后再利用滤波状态进行最优控制。因参数辨识采用的是输入输出特性方程，而LQG调节器是在状态空间里进行的，所以需首先理清两种表达方式之间的对应关系。
- 系统状态方程与输入输出特性之间的关系

对于系统过程的输入输出表达式：

$$A'(q^{-1})y(k) = B'(q^{-1})q^{-d}u(k) + C'(q^{-1})v(k) \quad (\#)$$

可将它转化为状态空间方程描述下的可观标准型：

$$\begin{cases} X(k+1) = A_0X(k) + B_0U(k) + L_0v(k) \\ y(k) = C_0X(k) + v(k) \end{cases} \quad (3.37)$$

其中，系数矩阵的一般形式按如下方式获取。

输入输出描述下SISO系统状态空间可观规范型的一般形式

考虑如下受控自回归滑动平均(CARMA)模型(线性、定常、离散):

$$A'(q^{-1})y(k) = B'(q^{-1})q^{-d}u(k) + C'(q^{-1})v(k) \quad (*1)$$

其中, $A'(q^{-1}) = 1 + a'_1 q^{-1} + \cdots + a'_{n_a'} q^{-n_{a'}}$,

$$B'(q^{-1}) = b'_0 + b'_1 q^{-1} + \cdots + b'_{n_b'} q^{-n_{b'}}$$

$$C'(q^{-1}) = 1 + c'_1 q^{-1} + \cdots + c'_{n_c'} q^{-n_{c'}}$$

令 $n = \max(\deg A', \deg B' + d, \deg C')$, 则 (*1) 式可写为:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})v(k) \quad (*2)$$

其中, $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n}$,

$$B(q^{-1}) \triangleq B'(q^{-1})q^{-d} = b_1 q^{-1} + \cdots + b_n q^{-n}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_n q^{-n}$$

本质上, A, B, C 的
次数分别等同于
 $A', B'q^{-d}, C'$ 的次数

(*2) 式的状态空间规范型为:

$$\begin{cases} X(k+1) = A_0 X(k) + B_0 U(k) + L_0 \nu(k) \\ \quad y(k) = C_0 X(k) + \nu(k) \end{cases} \quad (*3)$$

其中，

$$\dim(X) = n, \quad n = \max(\deg A', \deg B' + d, \deg C') = \max(\deg A, \deg B, \deg C);$$

$$B_0 = [b_1, \dots, b_n]^T;$$

$$C_0 = [1, 0, \dots, 0];$$

$$L_0 = [c_1 - a_1, c_2 - a_2, \dots, c_n - a_n]^T;$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -a_1 & & & \\ -a_2 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ -a_{n-1} & & & \\ -a_n & & 0 & \end{bmatrix}.$$

将(#)式中的系数多项式写为次数均为 n 的形式，则(3.37)式中的系数矩阵具有如下形式：【其中， $n = \max(\deg A', \deg B' + d, \deg C')$ 】

$$B_0 = [b_1, \dots, b_n]^T; \quad C_0 = [1, 0, \dots, 0];$$

$$L_0 = [c_1 - a_1, c_2 - a_2, \dots, c_n - a_n]^T;$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -a_1 & & \\ -a_2 & & \\ \vdots & & I_{n-1} \\ -a_{n-1} & & \\ -a_n & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

根据卡尔曼滤波器的设计思想，由(3.37)式可得系统的预测方程为：

$$\begin{cases} X^*(k+1) = A_0 \hat{X}(k) + B_0 U(k) \\ y^*(k) = C_0 X^*(k) \end{cases} \quad (3.39)$$

预测误差：

$$\begin{aligned}\tilde{X}^*(k+1) &= X(k+1) - X^*(k+1) \\&= A_0 X(k) + B_0 U(k) + L_0 \nu(k) - A_0 [X^*(k) + K_f C_0 X(k) + K_f \nu(k) \\&\quad - K_f C_0 X^*(k)] - B_0 U(k) \\&= (A_0 - A_0 K_f C_0) \tilde{X}^*(k) + (L_0 - A_0 K_f) \nu(k)\end{aligned}\tag{3.40}$$

为了减少噪声对状态预测的影响，令 $L_0 - A_0 K_f = 0$ ，即可得到线性方程组 $L_0 = A_0 K_f$ 关于列矢量 K_f 的解。

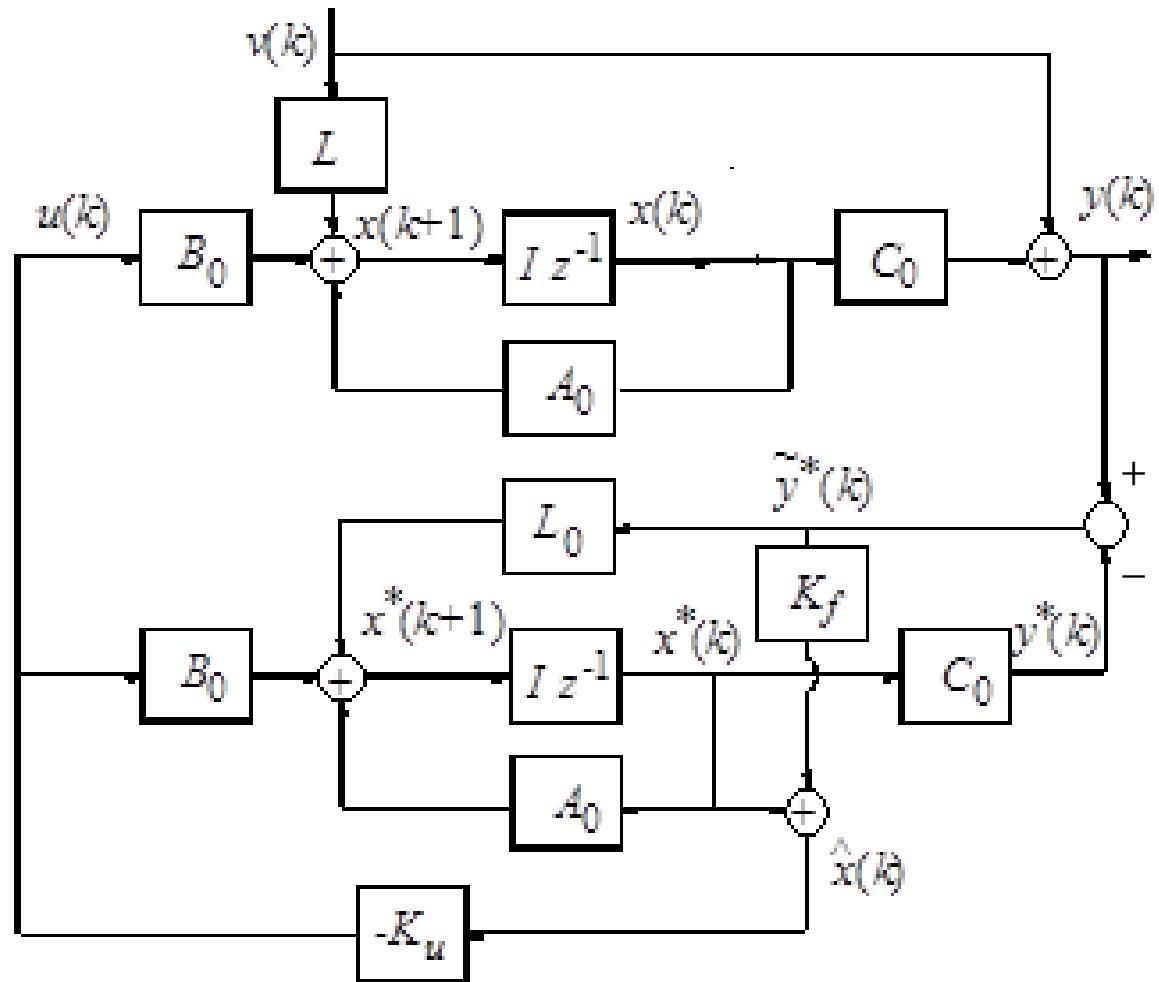
进一步，基于(3.39)式和 K_f 的值，可直接写出估计状态为

$$\hat{X}(k) = X^*(k) + K_f (y(k) - CX^*(k))$$

【注：若 $A_0 - A_0 K_f C_0$ 是稳定的，则 K_f 的值可保证预测状态最终将收敛到真实状态，但收敛过程中的状态仍需用上式进行较优的线性估计。】

根据分离原理，系统的最优控制律为：

$$u(k) = -K_u(k) \hat{X}(k)$$



- LQG自校正调节器的设计步骤

- ① 已知 n_a 、 n_b 、 n_c 、 d 、 Q_0 、 Q 和 R ；
- ② 设置参数估计的初值 $\hat{\theta}(0)$ ，输入初始数据；
- ③ 读取 $y(k)$ ；
- ④ 用参数辨识法求得估计 $\hat{\theta}$ ，即输入输出描述中多项式 A 、 B 和 C 的估计 \hat{A} 、 \hat{B} 和 \hat{C} ，进而由(3.38)式求得 \hat{A}_0 、 \hat{B}_0 和 \hat{L}_0 ；
- ⑤ 由 $L_0 = A_0 K_f$ 求出 K_f ，并计算 $\hat{X}(k) = X^*(k) + K_f \tilde{y}^*(k)$ ；
- ⑥ 由(3.34)式的上面两式求出 K_u ；
- ⑦ 由 $U(k) = -K_u(k) \hat{X}(k)$ 求出控制律 $U(k)$ ；
- ⑧ $k \leftarrow k + 1$ ，返回③。

3.3.5 LQG自校正控制（之二：控制器）

考虑单输入单输出系统的输入输出表达式：

$$A'(q^{-1})y(k) = B'(q^{-1})q^{-d}u(k) + C'(q^{-1})v(k)$$

跟踪控制的目标函数给定为：

$$J_6 = E \left\{ [y(N) - y_r(N)]^2 + \sum_{i=1}^{N-1} [y(i) - y_r(i)]^2 + ru^2(i) \right\}$$

将参考信号 $y_r(k)$ 引入系统模型中，得到下列差分方程：

$$A'(q^{-1})(y(k) - y_r(k)) = B'(q^{-1})u(k-d) - A'(q^{-1})y_r(k) + C'(q^{-1})v(k)$$

令： $e(k) = y(k) - y_r(k)$ ，则有系统的误差方程：

$$A'(q^{-1})e(k) = B'(q^{-1})u(k-d) - A'(q^{-1})y_r(k) + C'(q^{-1})v(k) \quad (3.43)$$

相应地，目标函数能被写为：

$$J_7 = E \left\{ e^2(N) + \sum_{i=1}^{N-1} [e^2(i) + ru^2(i)] \right\}$$

$A'(q^{-1})q^{-1}y_r(k+1)$

将误差系统(3.43)转化为能观标准型：

$$\begin{cases} X(k+1) = A_0 X(k) + B_0 u(k) + L_0 v(k) + D_0 y_r(k+1) \\ e(k) = C_0 X(k) + v(k) \end{cases} \quad (3.44)$$

其中， $\dim(X) = \max(\deg A' + 1, \deg B' + d, \deg C') = m$ 。各系数矩阵的一般形式仍按P34-35页的方法写出并获取，即将(3.43)式中的系数多项式均写为次数为 m 的形式，再借助嵌套法写出各系数矩阵。

一种常见情况： $\deg A'$ 大于等于 $\deg B' + d$ 和 $\deg C'$ 、且为 n ，此时(3.44)式中的系数矩阵具有如下形式：

$$B_0 = [b_1, \dots, b_n, 0]^T; \quad C_0 = [1, 0, \dots, 0];$$

$$D_0 = [-1, -a_1, -a_2, \dots, -a_n]^T;$$

$$L_0 = [c_1 - a_1, c_2 - a_2, \dots, c_n - a_n, 0]^T; \quad A_0 = \begin{bmatrix} -a_1 & & & \\ -a_2 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ -a_n & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}.$$

注意：(3.44)式中的期望输出是 $k+1$ 时刻的值，相当于系数多项式乘了因子 q^{-1} ，此时的维数由(3.43)式右边的最高次数决定。根据嵌套法的推导过程，该做法的效果体现在了系数矩阵 D_0 中。

由此，可基于最优反馈矩阵 K_u 的设计方法，写出反馈控制律为：

$$u(k) = -K_u(k)\hat{X}(k)$$

其中， $K_u(k)$ 由(3.34)式前面的两式求出， $S(N) = Q_0 = C_0^T C_0 = Q$ 。

$\hat{X}(k)$ 可仿照卡尔曼滤波器的设计思想，按如下方式获取。

根据 (3.44)式写出状态的最优预测方程为：

$$X^*(k+1) = A_0\hat{X}(k) + B_0U(k) + D_0y_r(k+1)$$

则相应的估计状态可写为：

$$\hat{X}(k) = X^*(k) + K_f[e(k) - C_0X^*(k)]$$

类似于(3.40)式的计算，可得出状态预测的误差为：

$$\tilde{X}^*(k+1) = X(k+1) - X^*(k+1) = (A_0 - A_0K_fC_0)\tilde{X}^* + (L_0 - A_0K_f)v(k)$$

令 $L_0 - A_0K_f = 0$ ，可得到线性方程组 $L_0 = A_0K_f$ 关于列矢量 K_f 的一个解为

$$K_f = [1, c_1, c_2, \dots, c_n]^T$$

例：根据参数辨识所得被控系统多项式 A 、 B 和 C ，求系统跟踪给定参考输入时的输出响应 $y(k)$ 及响应误差 $e(k)$ 。系统各参数如下：

$$y_r(t) = \sin 0.1\pi t, T_0 = 0.005\text{s}, t = kT_0, Q_0 = Q = C_0^T C_0,$$

$$R = I, v(k) = 0.05 * \text{randn}$$

解：

系统模型为

$$A'(q^{-1})y(k) = B'(q^{-1})q^{-d}u(k) + C'(q^{-1})v(k)$$

$$\text{其中, } A'(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_mq^{-m},$$

$$B'(q^{-1})q^{-d} = b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m},$$

$$C'(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_mq^{-m}$$

目标函数定义为：

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} [[y(i) - y_r(i)]^2 + ru^2(i)]$$

将参考信号 $y_r(k)$ 引入到系统模型中，得到下列差分方程：

$$A'(q^{-1})(y(k) - y_r(k)) = B'(q^{-1})u(k-d) - A'(q^{-1})y_r(k) + C'(q^{-1})v(k)$$

令：

$$e(k) = y(k) - y_r(k)$$

则有系统的误差方程：

$$A'(q^{-1})e(k) = B'(q^{-1})u(k-d) - A'(q^{-1})y_r(k) + C'(q^{-1})v(k)$$

相应地，目标函数能被写为：

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} [e^2(i) + ru^2(i)]$$

将误差方程转化为状态空间表示下的能观标准型：

$$\begin{cases} x(k+1) = A_0x(k) + b_0u(k) + d_0y_r(k+1) + L_0v(k) \\ e(k) = c_0x(k) + v(k) \end{cases}$$

其中，

$$\dim(X) = \max(\deg A' + 1, \deg B' + d, \deg C') = m;$$

对常见情况 “ $\deg A'$ 在 $\{\deg A', \deg B' + d, \deg C'\}$ 中最大且为 n ” , 有

$$A_0 = \begin{bmatrix} -a_1 & & \\ -a_2 & I_n & \\ \vdots & & \\ -a_n & & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}, \quad L_0 = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ c_n - a_n \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$c_0 = [1, 0, \dots, 0].$$

由此, 可按卡尔曼滤波增益 K_f 的设计方法以及最优反馈矩阵 K_u 的设计方法, 得控制律为:

$$u(k) = -K_u(k)\hat{x}(k)$$

其中, $K_u(k)$ 由(3.34) 式的前两式求出, $\hat{x}(k)$ 可由卡尔曼滤波器给出。

$\hat{x}(k)$ 也可以按照如下方式获取。

根据(3.44)式写出状态的最优预测方程为：

$$x^*(k+1) = A_0 \hat{x}(k) + b_0 u(k) + d_0 y_r(k+1)$$

则相应的估计状态可写为：

$$\hat{x}(k) = x^*(k) + K_f [e(k) - c_0 x^*(k)]$$

类似于(3.40)式，写出状态预测的误差为：

$$\tilde{x}^*(k+1) = x(k+1) - x^*(k+1) = (A_0 - A_0 K_f c_0) \tilde{x}^* + (L_0 - A_0 K_f) v(k)$$

令 $L_0 - A_0 K_f = 0$ 可得到线性方程组 $L_0 = A_0 K_f$ 关于列矢量 K_f 的一个解为

$$K_f = [1, c_1, c_2, \dots, c_n]^T$$

仿真实验：

- ① 根据系统参数辨识中所做实验的实验结果，对200组输入输出数据采用渐消记忆增广最小二乘法进行递推辨识，最终得到系统的输入输出描述为：

$$\begin{aligned}y(k) - 0.3874y(k-1) + 0.2491y(k-2) + 0.0336y(k-3) \\= 1.9356u(k-1) - 0.5524u(k-2) + 0.2929u(k-3) \\+ \nu(k) + 0.0987\nu(k-1) + 0.0409\nu(k-2) + 0.0793\nu(k-3)\end{aligned}$$

这是一个3阶系统， $d = 1$ ，且

$$A(q^{-1}) = 1 - 0.3874q^{-1} + 0.2491q^{-2} + 0.0336q^{-3}$$

$$B(q^{-1}) = 1.9356q^{-1} - 0.5524q^{-2} + 0.2929q^{-3}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + 0.0987q^{-1} + 0.0409q^{-2} + 0.0793q^{-3}$$

- ② 按前述方法将此输入输出模型转化为状态空间描述下的能观标准型：

$$\begin{cases}x(k+1) = A_0x(k) + b_0u(k) + L_0\nu(k) + d_0y_r(k+1) \\ e(k) = c_0x(k) + \nu(k)\end{cases}$$

其中，

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.3874 & 1 & 0 & 0 \\ -0.2491 & 0 & 1 & 0 \\ -0.0336 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 1.9356 \\ -0.5524 \\ 0.2929 \\ 0 \end{bmatrix}, L_0 = \begin{bmatrix} 0.4861 \\ -0.2082 \\ 0.0457 \\ 0 \end{bmatrix}, D_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.3874 \\ -0.2491 \\ -0.0336 \end{bmatrix},$$
$$C_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

- ③ 设计滤波器增益矩阵 K_f 和状态反馈增益矩阵 K_u ：

$$K_f = [1, c_1, c_2, c_3]^T = [1, 0.0987, 0.0409, 0.0793]^T$$

K_u 可用Matlab软件中的dlqr函数返回结果。

- ④ 根据状态的预测值和估计值之间的递推式，以及参考输入 y_r 的值，依次求得各时刻的状态估计值 $\hat{x}(k)$ ，并对误差 $e(k)$ 进行LQG控制，即可得到所要求的效果。这样，根据设计的 K_f 、 K_u 及 $\hat{x}(k)$ 的递推式可编程对系统进行控制。

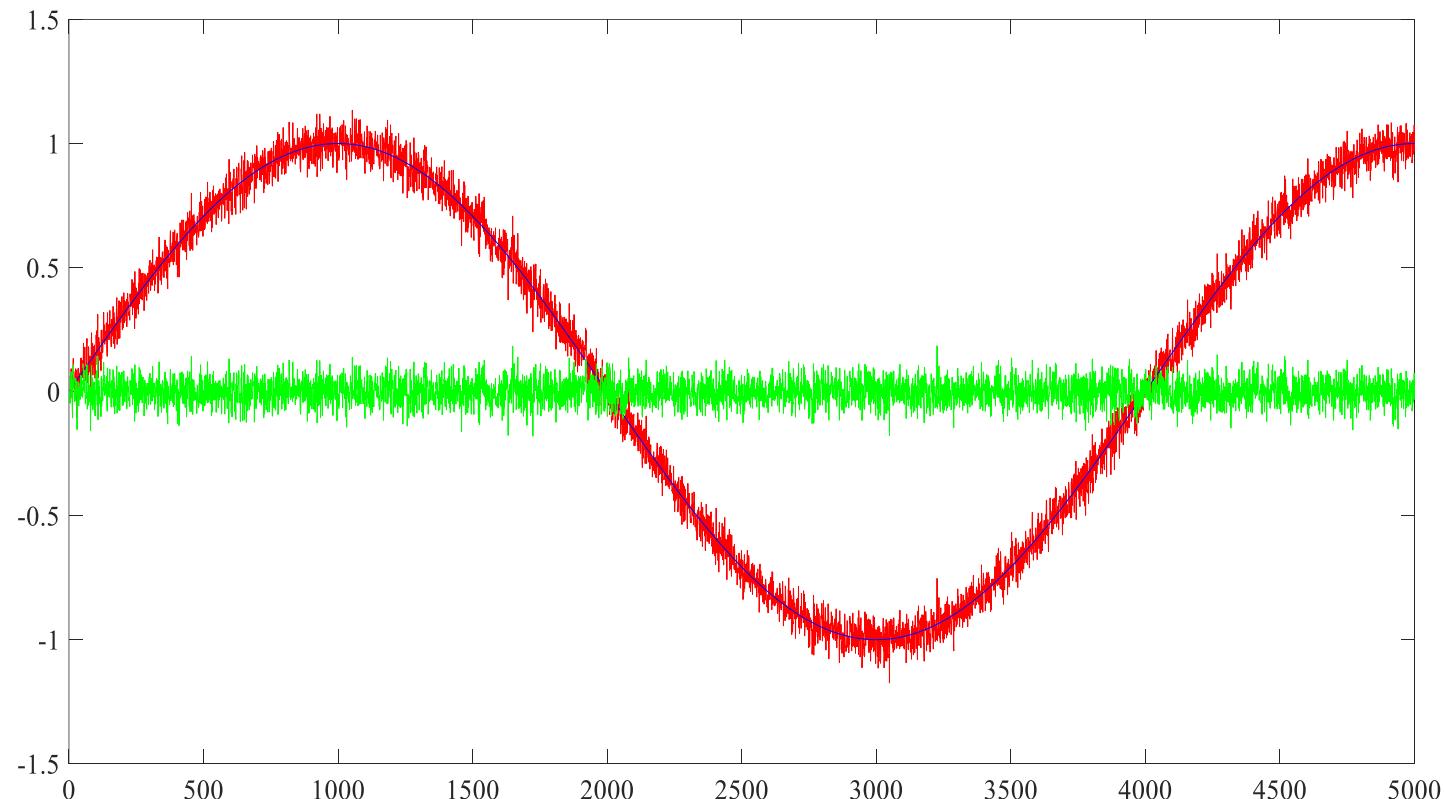
⑤ 用Matlab软件编写的源程序为：

```
clear
format long
a1=-0.3874; a2=0.2491 ; a3=0.0336 ;
b1=1.9356; b2=-0.5524; b3= 0.2929;
c1=0.0987; c2= 0.0409; c3= 0.0793;
A0=[-a1,1,0,0;-a2,0,1,0;-a3,0,0,1;0,0,0,0];
a=[a1,a2,a3]';
c=[c1 c2 c3]';
B0=[b1 b2 b3 0]';
C0=[1 0 0 0];
L0=[c-a; 0];
D0=[-1;-a];
Kf=[1;c];
Q=C0'*C0;
R=1;
[Ku,S,Eu]=dlqr(A0,B0,Q,R)
N=5000;
y=zeros(N,1);
u=zeros(N,1);
v=0.05*randn(N,1);
```

```
xBar=0.1*randn(4,1);
ABar=A0-L0*C0;
e=zeros(N,1);
for k=4:N
    yr(k)=sin(0.0005*pi*k);
    yyr=sin(0.0005*pi*(k+1));
    xHat=xBar+Kf*(e(k)-C0*xBar);
    u(k)=-Ku*xHat;
    xBar=A0*xHat+B0*u(k)+D0*yyr;
    e(k)=C0*xHat+v(k);
    y(k)=yr(k)+e(k);
end
plot(y,'r'),
hold on
plot(yr,'b')
plot(e,'g')
```

注意：应用中， $e(k)$ 应为真实的测量误差值，仿真中用粉红色的式子计算出来的值充其量仅为真实值的近似值。

- ⑥ 实验结果：运行程序后，得到的响应曲线 $y(k)$ 、参考输入 $y_r(k)$ 和误差曲线 $e(k)$ 如下图所示：



可以看到，输出 $y(k)$ 很好地跟踪了参考输入 $y_r(k)$ 。

实验：

针对本章例题中的单输入单输出模型，完成以下问题：

- ① 利用嵌套法推导系统的状态空间可观标准型；
- ② 将每个时刻的随机噪声改用均值为0、标准差为0.1的高斯白噪声，编程绘制系统输出对于参考输入的跟踪结果；
- ③ 比较系统在有无控制作用以及在任一其他控制输入下系统的输出曲线，体会分离原理的含义。