

第5章 模型参考自适应 控制系统

主要内容

5.1 基于局部参数最优化的设计方法

5.2 基于Lyapunov稳定性理论的设计方法

5.2.1 稳定性概念

5.2.2 Lyapunov稳定性定理

5.2.3 线性时不变系统的稳定性

5.2.4 基于状态空间方程的设计

5.3 波波夫超稳定性理论方法

5.3.1 正实函数与正实引理

5.3.2 超稳定性理论

5.3.3 对于模型参考自适应控制的应用

- 模型参考自适应控制是比较流行的自适应控制方式之一。模型参考自适应控制系统的设计主要有两大类方法：一种是基于局部参数最优化的设计方法；另一种是基于稳定性理论的设计方法，包括以下两种具体的设计方法：
 - ① 基于Lyapunov稳定性理论的方法；
 - ② 基于Popov超稳定性理论和正实性概念的方法。
- 早期的自适应控制大多采用局部参数最优化的设计方法，其主要缺点是在整个自适应过程中难以保证闭环系统的全局稳定性。而基于稳定性理论的设计方法，则从保证系统稳定性的角度出发来选择自适应规律，因此易于保证系统的稳定性。从现存的文献资料看，这种方法得到了更为广泛的应用。

● 模型参考自适应控制系统的典型结构

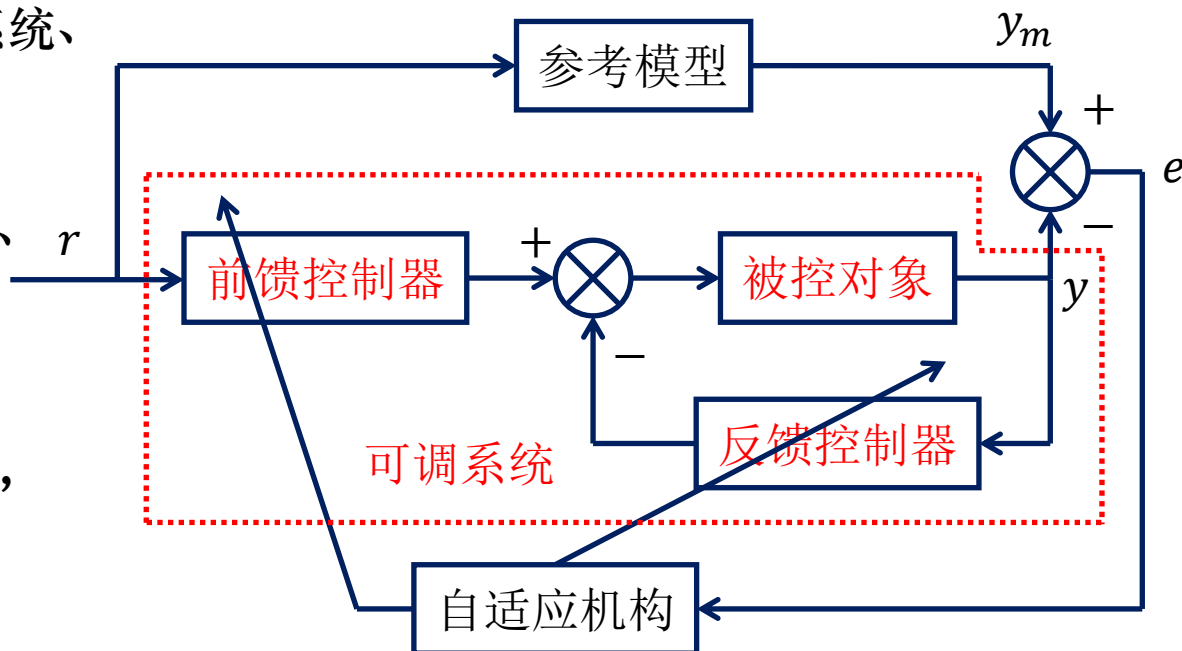
系统由参考模型、可调系统、自适应机构三部分构成。

① 可调系统包括被控对象、前置控制器和反馈控制器。

② 对可调系统的特性要求，如超调量、阻尼性能、过渡时间和通频带等由参考模型规定，

故参考模型实际上是一种理想控制系统，其输出代表了期望的性能。

③ 当参考模型与实际被控对象的输出有差异时，经比较器检测后，通过自适应机构做出决策，改变调节器(包括前置和反馈控制器)参数或生成辅助输入，以消除误差，使过程输出和参考模型输出相一致。



参考模型与可调系统两者性能之间的一致性，由自适应机构保证，所以自适应机构的设计十分关键，性能一致性程度由状态广义误差向量

$$e_x = x_m - x$$

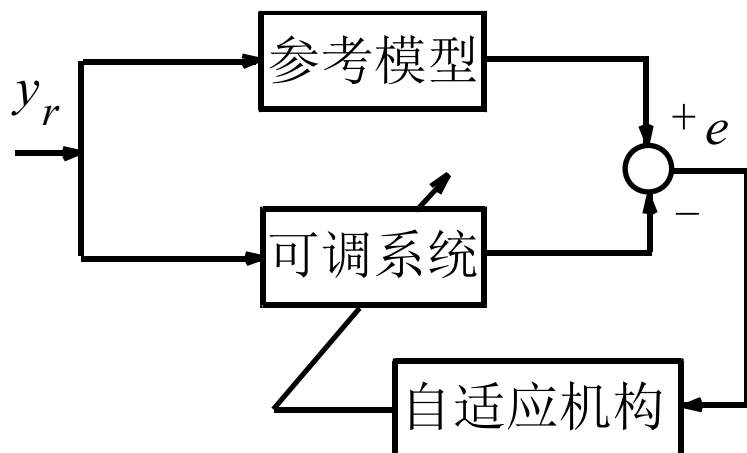
或输出误差向量

$$e_y = y_m - y$$

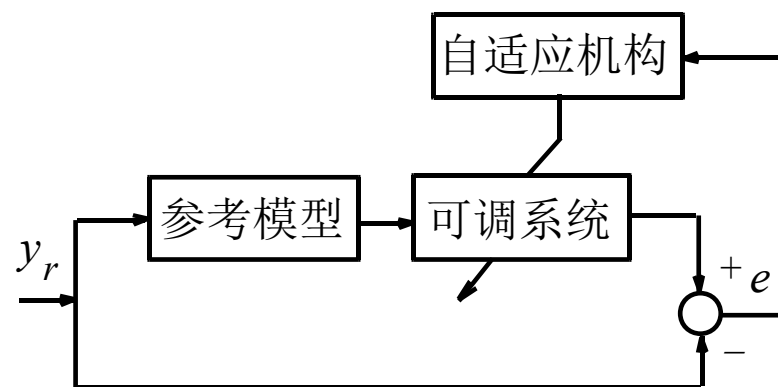
度量，其中 x_m 、 y_m 和 x 、 y 分别为参考模型和可调系统的状态和输出。

只要误差向量不为零，自适应机构就按减少偏差方向修正或更新控制律，以使系统实际性能指标达到或接近希望的性能指标。具体实施时，可更新前置和反馈控制器的参数，也可直接改变加到对象输入端的信号。前者称为参数自适应方案，后者称为信号综合自适应方案。

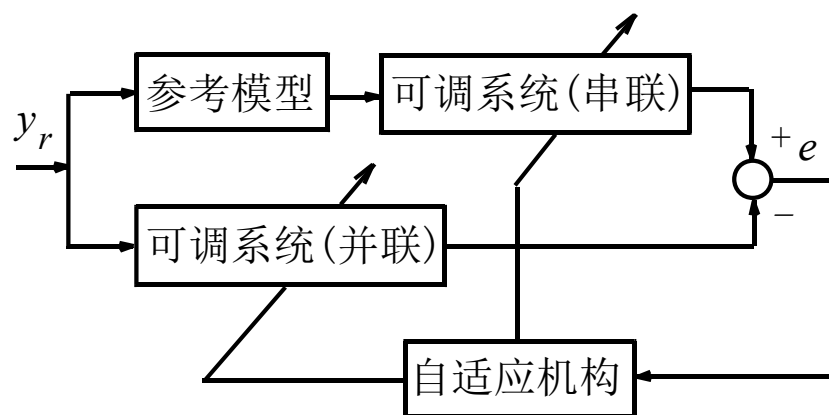
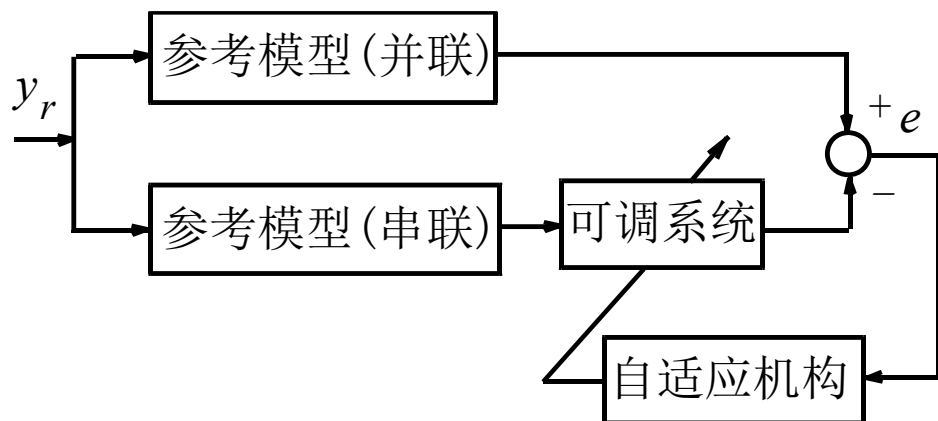
- 模型参考自适应控制系统的结构类型



并联型模型参考自适应系统



串联型模型参考自适应系统



串并联型模型参考自适应系统

注：

在这三种结构中，并联型方案是最普遍的结构。尽管这三种结构的形式不同，但实际上对它们进行分析和综合的方法基本相同，故本章将限于讨论并联型模型参考自适应系统。

- 关于模型参考自适应控制系统的假定

- ① 参考模型是时不变系统；
- ② 参考模型和可调模型是线性的，有时为了分析方便，还假设它们的阶次相同；
- ③ 广义误差可测；
- ④ 在自适应控制过程中，可调参数或辅助信号仅依赖于自适应机构。

注：

由于环境干扰引起的系统参数的变化相对于自适应调节速度要慢得多，故自适应速度快于对象参数的变化速度。假设④意味着自适应速度应大于被控对象参数的变化速度，否则就不可能实现渐近自适应。

5.1 基于局部参数最优化的设计方法(MIT方案)

- 局部参数最优化方法的设计思想：系统包含若干可调参数(如可调增益、反馈回路可调参数等)，当被控对象的特性由于外界环境条件的改变或其他干扰的影响而发生变化时，自适应机构对这些可调参数进行调整，以补偿外界环境或其他干扰对系统性能的影响，从而逐步使得参考模型和被控对象之间的广义误差所构成的性能指标达到或接近最小值，因此它的设计原理就是构造一个由广义误差和可调参数组成的目标函数，并把它视为可调参数空间中的一个超曲面，利用参数最优化方法使这个目标函数逐渐减小，直到目标函数达到最小或位于最小值的某个邻域为止，从而满足可调系统与参考模型之间的一致性要求。

例如，系统参数开始处于正常工作状态，受到小的扰动后偏离正常状态不太远的情况

- 额外两条假设

- ⑤ 可调系统参数已位于参考模型参数的某个邻域内；（对应“局部”）
- ⑥ 相对于系统的内部动力学时间尺度而言，可调参数（即本节中的 K_c ）的调节速度低。（确保稳定性，见例5.2）

考虑具有一个可调增益的模型参考自适应控制系统，假设被控对象的传递函数为：

$$W_p(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot K_p$$

其中， $D(s)$ 和 $N(s)$ 为已知的常系数多项式， $K_p > 0$ 为对象的增益。

问题的背景：

当系统受到干扰时，被控对象的增益 K_p 可能发生变化，使其动态特性与参考模型的动态特性之间发生偏离， K_p 的变化是不可测量的。为了克服由 K_p 的漂移所造成的影响，在控制系统中设置一个可调增益 K_c ，来补偿由 K_p 的变化所造成的影响，期望使得 K_c 与 K_p 的乘积始终与理想的增益 K_m 相一致。那么，如何设计自适应机构来自动地、实时地调整 K_c ，即如何设计 K_c 的自适应调整规律是需要解决的问题。

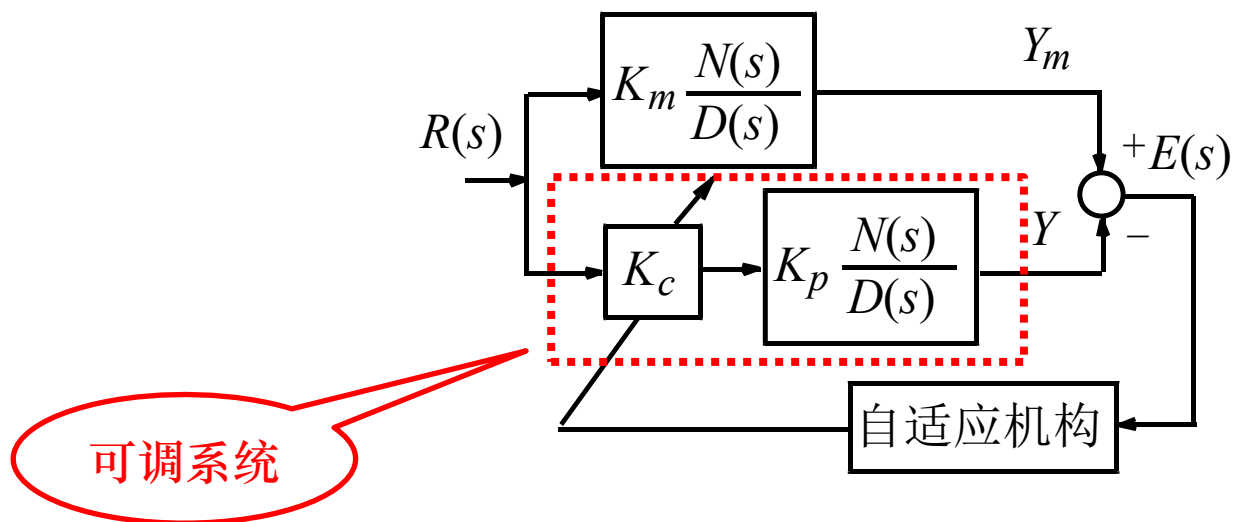
解决方法:

构造理想参考模型的传递函数为:

$$W_m(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot K_m$$

其中, 增益 K_m 是常数, 认为是已知的, 通常由期望的动态响应决定。

控制系统的结构图:



定义广义输出误差 e 为：

$$e = y_m - y$$

其中， y_m 为理想参考模型的输出； y 为被控系统的输出； e 表示输入信号为 $r(t)$ 时，理想系统的响应与实际系统响应之间的偏离。

设计目标：确定可调增益 $K_c(t)$ 的自适应调节律，使得下列性能指标 J 达到最小

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^2(\tau, K_c) d\tau \quad (5.1)$$

采用梯度法来寻求 $K_c(t)$ 的最优调节律。

首先计算 J 对 K_c 的偏导数，有：

$$\frac{\partial J}{\partial K_c} = \int_{t_0}^t e \frac{\partial e}{\partial K_c} d\tau$$

根据梯度下降原理, K_c 的变化量 ΔK_c 应正比于函数 J 的负梯度方向, 即取如下数值:

$$\Delta K_c = -\eta \frac{\partial J}{\partial K_c} = -\eta \int_{t_0}^t e \frac{\partial e}{\partial K_c} d\tau$$

其中, $\eta > 0$, 则调整后的 K_c 为:

$$K_c = \Delta K_c + K_{c0} = -\eta \frac{\partial J}{\partial K_c} + K_{c0} = -\eta \int_{t_0}^t e \frac{\partial e}{\partial K_c} d\tau + K_{c0}$$

其中, K_{c0} 为可调增益的初值, 即 $K_{c0} = K_c(t_0)$ 。

将上式两边分别对时间求导数后, 得到 K_c 的变化率与广义误差 e 的关系为:

$$\dot{K}_c = -\eta e \frac{\partial e}{\partial K_c} \quad (5.2)$$

上式表示了可调增益 $K_c(t)$ 的自适应调整规律, 只要求出 $\frac{\partial e}{\partial K_c}$, 增益调整律就可确定。为此, 需要确定出 e 关于 K_c 的函数关系。

由系统结构图可知，参考输入 $R(s)$ 到输出偏差 $E(s)$ 的传递函数为：

$$W_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = (K_m - K_c K_p) \frac{N(s)}{D(s)}$$

将上述拉普拉斯变换转化为微分方程描述的时域微分算子形式，即令：

$$p = \frac{d}{dt}, p^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \dots, p^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

则可得到 e 所满足的微分方程为：

$$D(p)e(t) = (K_m - K_c K_p)N(p)r(t)$$

上式两端对 K_c 求偏导数有：

$$D(p) \frac{\partial e}{\partial K_c} = -K_p N(p)r(t) \quad (5.3)$$

另一方面，考虑到参考模型的输出与输入之间满足下列关系：

$$D(p)y_m(t) = K_m N(p)r(t) \quad (5.4)$$

令(5.3)式与(5.4)式相除，并经整理得：

$$\frac{\partial e}{\partial K_c} = -\frac{K_p}{K_m} y_m$$

将此式代入(5.2)式有：

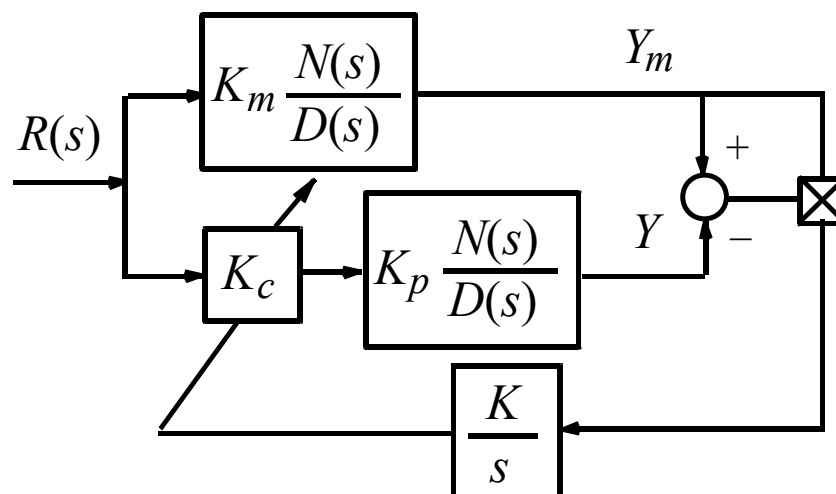
$$\dot{K}_c = \eta e y_m \frac{K_p}{K_m}$$

令 $K = \eta \frac{K_p}{K_m}$ ，则有：

$$\dot{K}_c = K e y_m \quad (5.5)$$

(5.5)式就是所求的可调增益 K_c 的调节律，也就是系统的自适应规律。这种自适应规律最先由麻省理工学院提出，故又称为MIT自适应规律。

由(5.5)式可以看出，为实现这种自适应律，自适应机构由一个乘法器和一个积分器组成，具体实现的结构图如下：



这样综合出来的模型参考闭环自适应系统的数学模型可用下列一组方程来描述：

$$\begin{cases} D(p)e(t) = (K_m - K_c K_p)N(p)r(t) \\ D(p)y_m(t) = K_m N(p)r(t) \\ \dot{K}_c = K e y_m \end{cases}$$

其中， $K > 0$ 。

【注：应用中，由于误差可测，故仅需后两个方程即可得到 K_c 的自适应律】

MIT方案的特点：

- ① 该方案利用的是输出偏差 e ，而不是状态偏差，所以自适应律所需的信号都是容易获得的，这是MIT方案的主要优点。
- ② 这种设计方法在设计过程中并未考虑稳定性问题，不能保证所设计的自适应控制系统总是稳定的，这是它的缺点。因此，在求得自适应规律后，尚需进行稳定性校验，以确保广义误差 e 在闭环回路中能收敛于某一允许的数值。

例5.1 考虑一个一阶系统，其传递函数为 $G(s) = \frac{K_p}{1+Ts}$ 。根据MIT规则设计的闭环自适应控制系统的数学模型应为：

$$\begin{cases} T\dot{e} + e = (K_m - K_c K_p)r \\ T\dot{y}_m + y_m = K_m r \\ \dot{K}_c = K \cdot e \cdot y_m \end{cases}$$

假定在 $t = t_0$ 时， y 和 y_m 均为零，且 $K_c K_p \neq K_m$ 。试考察该自适应控制系统的稳定性。

解：假定在 $t = t_0$ 时给系统输入一个幅度为 R 的阶跃信号，则 t_0 之后参考模型的输出为：

$$y_m = K_m R(1 - e^{-t/T})$$

所以自适应调节律为：

$$\dot{K}_c = K e K_m R(1 - e^{-t/T})$$

对开环广义误差方程求导数得：

$$T\ddot{e} + \dot{e} = -K_p\dot{K}_cR$$

或

$$T\ddot{e} + \dot{e} + K_pKK_mR^2e(1 - e^{-t/T}) = 0$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时，上式右端第三项 e 的系数趋于 $K_pKK_mR^2$ ，即有：

$$T\ddot{e} + \dot{e} + K_pKK_mR^2e = 0$$

此系统方程是渐近稳定的，即： $t \rightarrow \infty$ 时，有 $e \rightarrow 0$ ，即 $K_c \rightarrow \frac{K_m}{K_p}$ 。

结论：

- ① 对于一阶系统，按照MIT规则设计的闭环自适应系统总是稳定的。
- ② 跟踪速度或自适应速度是按指数规律进行的。理论上说，仅当 $t \rightarrow \infty$ 时，误差才趋于零，所以自适应速度是比较慢的。实际应用中，并不要求 e 完全等于0。当 $|e| \leq \delta$ (δ 为一很小的选定值)时，就认为系统已跟上参考模型了。在此意义上，自适应调整时间还是有限的。

例5.2 设一个被控对象的传递函数为 $W_p(s) = \frac{K_p}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$ ，理想参考模型为 $W_m(s) = \frac{K_m}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$ 。根据MIT规则设计的闭环自适应控制系统的数学模型为：

$$\begin{cases} a_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + a_1 \frac{de}{dt} + e = (K_m - K_p K_c) r \\ a_2 \frac{dy_m^2}{dt^2} + a_1 \frac{dy_m}{dt} + y_m = K_m r \\ \frac{dK_c}{dt} = K \cdot e \cdot y_m \end{cases}$$

假定在 $t = 0$ 时给系统输入一个幅度为 A 的阶跃信号，即 $r(t) = A$ 。我们来研究偏差 e 的收敛性(闭环系统的稳定性)。

对上式偏差微分方程的两端求导，并整理得：

$$a_2 \frac{d^3 e}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} = -K_p \frac{dK_c}{dt} A = -K_p K e y_m A$$

假设 $y_m(t)$ 的动态响应比 $e(t)$ 的自适应调整过程快得多。也就是说，在研究 $e(t)$ 的调节过程时，认为 $y_m(t)$ 已达到了它的稳态值 $K_m A$ ，那么 $e(t)$ 的微分方程就可简化为：

$$a_2 \frac{d^3 e}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{de}{dt} + K_m K_p K A^2 e = 0$$

利用劳斯(Routh)稳定性判断，易知当

$$K_m K_p K A^2 \geq \frac{a_1}{a_2} \quad (5.8)$$

时，系统不稳定。也就是说，当 K_p 满足条件式(5.8)时，输出偏差 e 将出现不稳定。【尽管此式不能给出准确的稳定范围，但说明了MIT方案存在稳定性条件这一客观事实；此外，该式也说明： K 越小，稳定性条件 $K_m K_p K A^2 < \frac{a_1}{a_2}$ 越容易满足，即自适应系统越容易趋向于稳定】

例5.2说明，在应用局部参数最优化方法进行设计时，需要对整个系统的稳定性进行分析和检验，然而这一步工作往往是很麻烦的。

5.2 基于Lyapunov稳定性理论的设计方法

5.2.1 稳定性概念

给定一个动态系统的状态方程：

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = x_0$$

其中， $x \in \mathbb{R}^n$ ， $t \geq 0$ 。

若 f 与 t 无关，则上式描述的系统称为**自治的**，或时不变的；反之，被称为非自治的，或时变的。

若状态空间中存在某一状态 x_e ，满足方程

$$f(x_e, t) = 0, (t \geq 0)$$

则称 x_e 为系统的一个**平衡态**。

平衡态的稳定性指，当系统受到扰动后，尽管系统状态在平衡态附近发生微小偏离，但之后的系统状态都处于平衡态附近的小范围内，则认为系统的平衡态是稳定的。

为分析稳定性，Lyapunov引入了一个虚构的Lyapunov能量函数。我们把利用Lyapunov函数分析系统稳定性的方法叫做Lyapunov第二方法。

Lyapunov函数：对于系统状态方程 $\dot{x} = f(x)$ ，定义一个连续可微的标量函数 $V(x)$ ，如果它具有下列性质：

- ① $V(x)$ 是正定的，即： $V(0) = 0$ ，而当 $x \neq 0$ 时 $V(x) > 0$ ；
- ② $\dot{V}(x)$ 是负半定的，即 $\dot{V}(x) \leq 0$ ；

则称 $V(x)$ 为系统 $\dot{x} = f(x)$ 的一个Lyapunov函数。

对于线性系统，寻求Lyapunov函数比较简单，通常选为系统状态变量 x 的二次型函数，即

$$V(x) = x^T P x$$

其中， P 是正定矩阵。

5.2.2 Lyapunov稳定性定理

对于系统方程 $\dot{x} = f(x)$ ，设原点为系统的平衡态，即 $f(0) = 0$ ，则有如下稳定性定理。

定理5.1 对于上式所描述的系统，如果在包含原点的某个域D内，存在Lyapunov函数 $V(x) > 0$ 且 $\dot{V}(x) \leq 0$ ，则系统在原点是稳定的。

定理5.2 对于上式所描述的系统，如果在包含原点的某个域D内，存在Lyapunov函数 $V(x) > 0$ 且 $\dot{V}(x) < 0, (x \neq 0)$ ，则系统在原点0是渐近稳定的。

定理5.3 对于上式所描述的系统，如果在包含原点0的某个域D内，存在Lyapunov函数 $V(x) > 0$ 且 $\dot{V}(x) < 0, (x \neq 0)$ ，又当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时有 $V(x) \rightarrow \infty$ ，则系统在原点是全局渐近稳定的。

5.2.3 线性时不变系统的稳定性

设线性时不变系统的自由运动方程为

$$\dot{x} = Ax$$

其中， A 为 $n \times n$ 状态转移矩阵。

给定以下二次型Lyapunov函数：

$$V(x) = x^T P x$$

其中， P 为正定矩阵。对 $V(x)$ 关于时间求导有：

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x \triangleq -x^T Q x$$

其中，

$$A^T P + P A = -Q \quad (5.9)$$

被称为Lyapunov方程。

该方程可以决定平衡点 $x = 0$ 的稳定性。一般有两种方法：一种是先给定一个正定对称阵 P ，由于矩阵 A 是已知的，可根据方程(5.9)算出 Q ，然后检验 Q 的正定性。另一种方法是先设定正定对称阵 Q ，例如设 Q 为单位阵，代入方程(5.9)中求出矩阵 P ，然后再判断 P 的正定性；如果 $P > 0$ ，则系统是渐近稳定的。

例5.3 判断线性定常系统在原点的稳定性，系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

解：利用 $A^T P + PA = -Q$ 来判断系统的稳定性。设正定对称阵 $Q = I_2$ ，记

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \quad p_{21} = p_{12}$$

则Lyapunov矩阵方程为

$$A^T P + PA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -Q$$

据此可得到三个方程：

$$\begin{cases} -2p_{11} + 2p_{12} = -1 \\ -2p_{11} - 5p_{12} + p_{22} = 0 \\ -4p_{12} - 8p_{22} = -1 \end{cases}$$

解此方程组可得：

$$p_{11} = \frac{23}{60}, \quad p_{12} = p_{21} = -\frac{7}{60}, \quad p_{22} = \frac{11}{60}$$

故

$$P = \begin{bmatrix} \frac{23}{60} & -\frac{7}{60} \\ \frac{7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}$$

我们验证 P 的正定性如下：

$$\Delta_1 = \frac{23}{60} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{23}{60} & -\frac{7}{60} \\ \frac{7}{60} & \frac{11}{60} \end{vmatrix} > 0$$

显然有 $P > 0$ ，故该系统是渐近稳定的。该系统的一个李雅普诺夫函数为：

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{23}{60} & -\frac{7}{60} \\ \frac{7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{60} (23x_1^2 - 14x_1x_2 + 11x_2^2)$$

例5.4 试分析下列非线性系统的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 - 3x_1 + 4x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2 \end{cases}$$

解：

由 $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ 解得系统的唯一平衡点为 $(0, 0)$ 。

构造Lyapunov函数 $V(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$ ，然后对时间 t 求导数得：

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 8x_2\dot{x}_2 = -6x_1^2 \leq 0$$

显然，系统是全局渐近稳定的。

5.2.4 基于状态空间方程的设计

考虑如下多变量线性系统，假定对象的结构已知，其状态方程和观测方程为：

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p(t)x_p(t) + B_p(t)u(t) \\ y_p(t) = C_p(t)x_p(t) \end{cases} \quad (5.10)$$

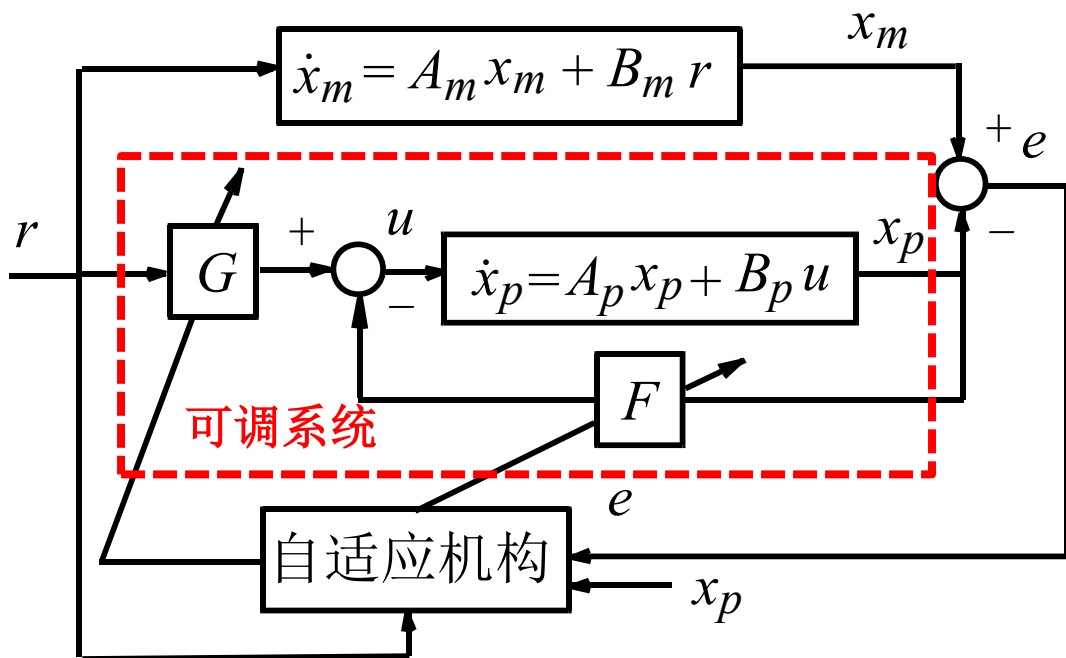
其中， $A_p(t)$ 是 $n \times n$ （未知）参数矩阵； $B_p(t)$ 是 $n \times w$ （未知）参数矩阵； $C_p(t)$ 是 $l \times n$ （未知）参数矩阵； $u(t)$ 是对象的 w 维输入控制作用列向量； $y_p(t)$ 是对象的 l 维输出列向量； $x_p(t)$ 是对象的 n 维状态列向量。

给定参考模型，其输入为系统的参考输入 $r(t)$ 【 w 维列向量】，其输出为控制系统期望的输出响应 $y_m(t)$ 。参考模型的状态方程和观测方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t) \\ y_m(t) = C_m x_m(t) \end{cases} \quad (5.11)$$

其中， A_m 、 B_m 和 C_m 为给定的常数矩阵，其维数分别与 A_p 、 B_p 和 C_p 相同。 A_m 为稳定矩阵； x_m 为参考模型的状态向量。

假定被控对象本身的（未知）参数 A_p 和 B_p 不能被直接调整，则为了使对象状态 x_p 能够与参考模型的状态 x_m 相一致，必须设计参数可调的控制器。控制器与对象一起组成参数可调系统，如下图：



根据自适应控制的假定，误差信号可测才能实现自适应，故该结构图中被控对象的状态值默认为是能够测到的。

其中，可调前馈增益矩阵 G 作为 $w \times w$ 型的前置控制器；可调反馈增益矩阵 F 作为 $w \times n$ 型的反馈控制器。

根据系统结构图可以写出以下关系：

$$u(t) = G(e, t)r(t) - F(e, t)x_p(t) \quad (5.12)$$

将(5.12)式代入(5.10)式得到可调系统的方程为：

$$\dot{x}_p(t) = (A_p - B_p F)x_p(t) + B_p G r(t)$$

这样，广义状态误差的运动方程为

$$\dot{e}(t) \triangleq \dot{x}_m(t) - \dot{x}_p(t)$$

$$= A_m e(t) + (A_m - A_p + B_p F)x_p(t) + (B_m - B_p G) r(t) \quad (5.13)$$

可调系统的状态就是被控对象的状态，由上页图红色虚线框内的部分也可以看出来

设计任务：对任何初始条件 $x_p(0)$ 和分段连续输入 $r(t)$ ，利用Lyapunov稳定性理论寻求可调参数 G 和 F 的自适应律，以实现状态收敛性：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (5.14a)$$

和/或参数收敛性：

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} [A_p(t) - B_p(t)F(e, t)] = A_m \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [B_p(t)G(e, t)] = B_m \end{cases} \quad (5.14b)$$

即使可调系统对参考输入 $r(t)$ 的动态响应与参考模型完全一致。

令

$$\begin{cases} \Phi(t) = A_m - A_p + B_p F \\ \Psi(t) = B_m - B_p G \end{cases} \quad (5.15)$$

则 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 分别表示参考模型与可调系统之间的系统矩阵偏差和输入矩阵偏差。相应地, (5.13)式变为:

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + \Phi(t)x_p(t) + \Psi(t)r(t) \quad (5.16)$$

现在的控制任务等价于设计一个关于 $F(e, t)$ 和 $G(e, t)$ 的自适应调节律, 使得等式(5.15)下的微分方程(5.16)渐近稳定, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e(t)$ 、 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 都趋于零。

构造下列二次函数作为Lyapunov函数:

$$V = e^T P e + \text{tr}(\Phi^T P_F^{-1} \Phi) + \text{tr}(\Psi^T P_G^{-1} \Psi)$$

其中, P 、 P_F^{-1} 和 P_G^{-1} 均为 $n \times n$ 型的正定对称矩阵。

求 V 对时间的导数有：

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \text{tr}(\dot{\Phi}^T P_F^{-1} \Phi + \Phi^T P_F^{-1} \dot{\Phi}) + \text{tr}(\dot{\Psi}^T P_G^{-1} \Psi + \Psi^T P_G^{-1} \dot{\Psi})$$

将(5.16)式代入 \dot{V} 的表达式有：

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e^T (A_m^T P + P A_m) e + x_p^T \Phi^T P e + e^T P \Phi x_p + r^T \Psi^T P e + e^T P \Psi r \\ & + 2\text{tr}(\dot{\Phi}^T P_F^{-1} \Phi) + 2\text{tr}(\dot{\Psi}^T P_G^{-1} \Psi) \end{aligned}$$

令：

$$A_m^T P + P A_m = -Q, \quad Q = Q^T > 0$$

代入 \dot{V} 的表达式有：

$$\dot{V} = -e^T Q e + 2\text{tr}(\dot{\Phi}^T P_F^{-1} \Phi + x_p^T \Phi^T P e) + 2\text{tr}(\dot{\Psi}^T P_G^{-1} \Psi + r^T \Psi^T P e) \quad (5.17)$$

对于 $e \neq 0$ ，式(5.17)右边第一项是负的。为了保证 \dot{V} 的负定，可令(5.17)式右边的后两项分别为零，即取：

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = -P_F P e x_p^T \\ \dot{\Psi} = -P_G P e r^T \end{cases}$$

【例如，对(5.17)式右边第二项，有

$$\text{tr}(\dot{\Phi}^T P_F^{-1} \Phi + x_p^T \Phi^T P e) = \text{tr}(\dot{\Phi}^T P_F^{-1} \Phi + e^T P \Phi x_p) = \text{tr}(\dot{\Phi}^T P_F^{-1} \Phi + x_p e^T P \Phi)$$

为了使上式为0，我们取 $\dot{\Phi}^T P_F^{-1} + x_p e^T P = 0$ ，即 $\dot{\Phi}^T P_F^{-1} = -x_p e^T P$ ，对该式右乘 P_F 有 $\dot{\Phi}^T = -x_p e^T P P_F$ ，两边取转置并考虑到 P_F 是对称矩阵有 $\dot{\Phi} = -P_F P e x_p^T$ 。】

由(5.15)式可得 F 和 G 的自适应控制律满足：

$$\begin{cases} B_p \dot{F} = -P_F P e x_p^T \\ B_p \dot{G} = P_G P e r^T \end{cases} \quad (5.18)$$

设计思路二（红色虚线框内部分）

设 $F = F_0$ 、 $G = G_0$ 时，参考模型和可调系统达到完全匹配，即

$$\begin{cases} A_p - B_p F_0 = A_m \\ B_p G_0 = B_m \end{cases} \quad (5.15^*)$$

根据上式可知 $B_p = B_m G_0^{-1}$ 和 $A_p = A_m + B_p F_0 = A_m + B_m G_0^{-1} F_0$ ，代入广义误差的运动方程(5.13)式有：

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) - B_m G_0^{-1} \tilde{F} x_p(t) + B_m G_0^{-1} \tilde{G} r(t) \quad (5.16^*)$$

其中， $\tilde{F} \triangleq F_0 - F$ 和 $\tilde{G} \triangleq G_0 - G$ 称为可调参数误差。

构造下列二次函数作为Lyapunov函数：

$$V = e^T P e + \text{tr}(\tilde{F}^T P_F^{-1} \tilde{F}) + \text{tr}(\tilde{G}^T P_G^{-1} \tilde{G})$$

注：此处仅希望 F 和 G 分别收敛至其理想值，不同于思路一中可调系统对参考模型的参数收敛性

注意，此处的 P 为 $n \times n$ 型正定矩阵，而 P_F^{-1} 和 P_G^{-1} 均为 $w \times w$ 型正定矩阵。不同于前一种方法Lyapunov函数中相应正定矩阵的维数。

求 V 对时间的导数有:

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \text{tr} \left(\dot{\tilde{F}}^T P_F^{-1} \tilde{F} + \tilde{F}^T P_F^{-1} \dot{\tilde{F}} \right) + \text{tr} \left(\dot{\tilde{G}}^T P_G^{-1} \tilde{G} + \tilde{G}^T P_G^{-1} \dot{\tilde{G}} \right)$$

将(5.16*)式代入 \dot{V} 的表达式有:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e^T (A_m^T P + P A_m) e - x_p^T \tilde{F}^T G_0^{-T} B_m^T P e - e^T P B_m G_0^{-1} \tilde{F} x_p \\ & + r^T \tilde{G}^T G_0^{-T} B_m^T P e + e^T P B_m G_0^{-1} \tilde{G} r \\ & + 2\text{tr} \left(\dot{\tilde{F}}^T P_F^{-1} \tilde{F} \right) + 2\text{tr} \left(\dot{\tilde{G}}^T P_G^{-1} \tilde{G} \right) \end{aligned}$$

令:

$$A_m^T P + P A_m = -Q, \quad Q = Q^T > 0$$

代入 \dot{V} 的表达式有:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -e^T Q e + 2\text{tr} \left(\dot{\tilde{F}}^T P_F^{-1} \tilde{F} - x_p e^T P B_m G_0^{-1} \tilde{F} \right) \\ & + 2\text{tr} \left(\dot{\tilde{G}}^T P_G^{-1} \tilde{G} + r e^T P B_m G_0^{-1} \tilde{G} \right) \end{aligned} \quad (5.17^*)$$

对于 $e \neq 0$ ，式(5.17*)右边第一项是负的。为了保证 \dot{V} 的负定，可令(5.17*)式右边的后两项分别为零，即取：

$$\begin{cases} \dot{\tilde{F}} = P_F G_0^{-T} B_m^T P e x_p^T \\ \dot{\tilde{G}} = -P_G G_0^{-T} B_m^T P e r^T \end{cases}$$

当 A_p 和 B_p 为常值或缓慢变化时，可以假定

$$\dot{F}_0 \approx 0, \dot{G}_0 \approx 0$$

根据P30的结构图，此式中的 e 和 x_p 均可测到，否则自适应机构无法实现自适应。

进一步，由 \tilde{F} 和 \tilde{G} 的定义可知： F 和 G 的自适应控制律为

$$\begin{cases} \dot{F} = -P_F G_0^{-T} B_m^T P e x_p^T = -P_F B_p^T P e x_p^T \\ \dot{G} = P_G G_0^{-T} B_m^T P e r^T = P_G B_p^T P e r^T \end{cases} \quad (5.18^*)$$

当 B_p 为常值时， F 和 G 的自适应律可直接由上式的最后一个等号确定；当 B_p 缓慢变化时， G_0 和 G_0^{-T} 也将缓慢变化，此时它们的值可通过试验确定，进而由上式的第一个等号确定 F 和 G 的自适应律。

注意： G 的自适应律依赖于参考输入 r ，故实际中为了实现 G 的自适应，对参考输入有一定的要求。

自适应控制律(5.18*)显然可保证闭环系统的全局渐近稳定性，即满足状态收敛性条件(5.14a)。此时，由广义状态误差方程(5.13)可知：

$$(A_m - A_p + B_p F)x_p(t) + (B_m - B_p G)r(t) = 0 \quad (5.19^*)$$

已有文献证明：当参考输入 r “足够丰富”时，(5.19*)式中的 x_p 和 r 不恒等于0、且线性独立，此时参数收敛性条件(5.14b)自动成立。

注：

- ① r “足够丰富”指， r 为具有一定频率的方波信号或为 q 个不同频率的正弦信号组成的分段连续信号，其中 $q > \frac{n}{2}$ 或 $q > \frac{n-1}{2}$ （ n 为偶数取前者，为奇数取后者。参见《自适应控制理论及应用》，李言俊、张科，西北工业大学出版社，2005）。事实上，任一信号的傅里叶级数展开式中只要包含多个不同的频率成分即可，所以这样的参考输入信号范围是相当宽泛的。
- ② 类似于前一种方法，此处的全局渐近稳定性保证了Lyapunov函数中的三个误差趋于0，但 \tilde{F} 和 \tilde{G} 趋于0并不能说明可调系统的系数矩阵趋于参考模型的系数矩阵，因此本页讨论了这一问题。

例5.6 试利用Lyapunov稳定性理论对例5.1中传递函数为 $G_p(s) = \frac{K_p}{1+Ts}$ 的一阶系统进行模型参考自适应控制律设计。

解：由对象和参考模型的传递函数可得系统的输入输出方程分别为：

$$G_p(s) = \frac{K_p}{1 + Ts} \Rightarrow T\dot{y} + y = K_p u$$

$$G_m(s) = \frac{K_m}{1 + Ts} \Rightarrow T\dot{y}_m + y_m = K_m r$$

分别取

$$x = y$$

$$x_m = y_m$$

可得系统和参考模型的状态方程分别为：

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{K_p}{T}u$$

$$\dot{x}_m = -\frac{1}{T}x_m + \frac{K_m}{T}r$$

令 $\begin{cases} \tilde{K}(e, t) = K_m - K_c(e, t)K_p \\ e(t) = x_m(t) - x(t) \end{cases}$, 则有:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = -\frac{1}{T}e + \frac{1}{T}\tilde{K}r \\ \dot{\tilde{K}} = -K_p\dot{K}_c \end{cases}$$

构造Lyapunov函数为: $V = e^2 + K_1\tilde{K}^2$, ($K_1 > 0$), 则有:

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + 2K_1\tilde{K}\dot{\tilde{K}} = -\frac{2}{T}e^2 + \frac{2}{T}\tilde{K}re + 2K_1\tilde{K}\dot{\tilde{K}}$$

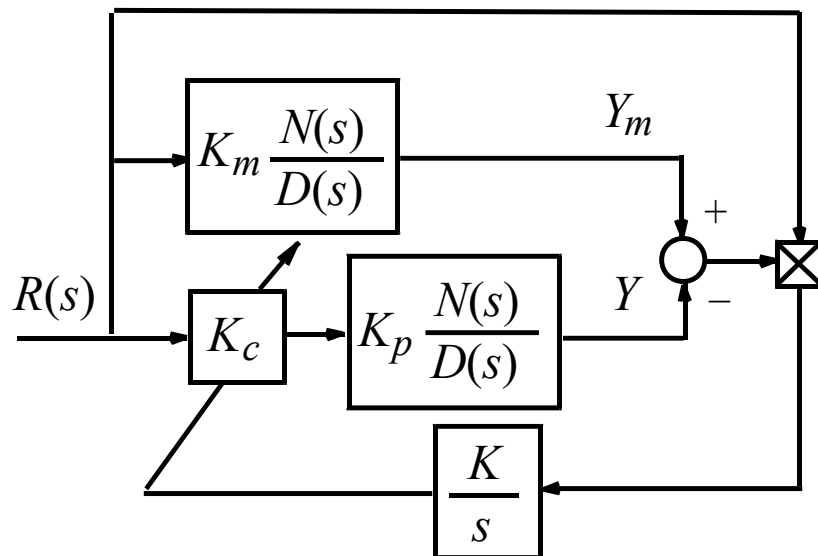
为了保证 $\dot{V} < 0$, 令上式右边最后两项之和为0, 有:

$$\dot{\tilde{K}} = -\frac{1}{K_1T}re$$

将此式代入关系式 $\dot{\tilde{K}} = -K_p\dot{K}_c$ 可得下面的自适应控制律:

$$\dot{K}_c = Kre$$

其中, $K = \frac{1}{K_1K_pT}$ 。【实际中, 可取 $K_1 = \frac{K_2}{K_p}$ ($K_2 > 0$)以便上式不依赖于未知的 K_p 】



注：

- ① 因Lyapunov方法设计的自适应控制律自然保证了系统的稳定性，所以不必对其稳定性进行额外检验。
- ② 与MIT设计方法相比较，其区别仅表现在自适应控制律的结构上，若将MIT设计方案中乘法器输入端的信号 y_m 改为参考输入信号 r ，便可实现用Lyapunov稳定性理论设计的自适应控制律。

例5.7 试利用Lyapunov稳定性理论对例5.2中被控对象传递函数为 $W_p(s) = \frac{K_p}{a_2s^2+a_1s+1}$ 的二阶系统进行模型参考自适应控制设计，其中理想参考模型为 $W_m(s) = \frac{K_m}{a_2s^2+a_1s+1}$ 。

解：首先求出被控系统以及参考模型的状态方程。

由被控对象的传递函数 $W_p(s) = \frac{K_p}{a_2s^2+a_1s+1}$ 可得被控对象的微分方程为

$$a_2\ddot{y}_p + a_1\dot{y}_p + y_p = K_p u = K_p K_c r$$

$$\text{令} \begin{cases} x_{p1} = y_p \\ x_{p2} = \dot{x}_{p1} = \dot{y}_p \end{cases}, \text{ 则有 } \dot{x}_{p2} = \ddot{x}_{p1} = \ddot{y}_p = -\frac{1}{a_2}x_{p1} - \frac{a_1}{a_2}x_{p2} + \frac{1}{a_2}K_p K_c r。$$

这样，**可调系统**的状态空间描述为：

$$\begin{cases} \dot{x}_p = Ax_p + BK_p K_c r \\ y_p = x_{p1} \end{cases}$$

$$\text{其中, } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix}。$$

同理，可得参考模型的状态空间描述为：

$$\begin{cases} \dot{x}_m = Ax_m + BK_m r \\ y_m = x_{m1} \end{cases}$$

令 $\begin{cases} \tilde{K} = K_m - K_c K_p \\ e = x_m - x_p \end{cases}$ ，则偏差的运动方程可被计算为(以备后续之用)：

$$\dot{e} = Ae + B\tilde{K}r$$

为了得到 K_c 的比例积分型调节规律，选择Lyapunov函数为：

$$V = e^T P e + \lambda (\tilde{K} + \gamma_e K_p M)^2$$

其中， $M = K e^T P B r$, ($K = \eta \frac{K_p}{K_m}$)、 $\lambda > 0$ 、 $\gamma_e > 0$ 。

求 V 对时间的导数，整理后得：

$$\dot{V} = e^T (A^T P + P A) e + 2e^T P B \tilde{K} r + 2\lambda (\tilde{K} + \gamma_e K_p M) (\dot{\tilde{K}} + \gamma_e K_p \dot{M})$$

选择 K_c 的自适应律满足

$$\dot{\tilde{K}} + \gamma_e K_p \dot{M} = -K_p M$$

同时取

$$\lambda K K_p = \lambda \frac{\eta K_p^2}{K_m} = 1$$

则有:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -e^T Q e + 2e^T P B \tilde{K} r - 2\lambda \tilde{K} K_p M - 2\lambda K_p^2 \gamma_e M^2 \\ &= -e^T Q e + 2e^T P B \tilde{K} r - 2\lambda \tilde{K} K_p K e^T P B r - 2\lambda K_p^2 \gamma_e M^2 \\ &= -e^T Q e + 2e^T P B \tilde{K} r - 2\tilde{K} e^T P B r - 2\lambda K_p^2 \gamma_e M^2 \\ &= -e^T Q e - 2\lambda K_p^2 \gamma_e M^2 \\ &< 0\end{aligned}$$

因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e(t) \rightarrow 0$ 。

前一页中 K_c 的自适应律能被计算为

$$\dot{K}_c = \gamma_e \dot{M} + M$$

对上式两边积分可知, K_c 的自适应律具有比例-积分的形式, 即比MIT方案增加了比例项, 所以自适应速率提高了, 自适应调整的整个过程的品质也能获得改善。

对于本例，也可基于输入输出传递函数，并利用输出广义误差进行Lyapunov自适应律设计。

取广义输出误差为

$$e = e_y = y_m - y_p$$

选择Lyapunov函数为：

$$V = \frac{a_1}{a_2^2} e^2 + \frac{a_1}{a_2} \dot{e}^2 + \lambda \tilde{K}^2$$

理论上， V 中也可不包含第二项，因 V 下降到0时 \dot{V} 的负定性保证了 V 不会再次增加。但不包含第二项时难以得出确保负定性的 \dot{V} 的表达式。这也暗示了状态空间方程框架下的处理方法具有更大的灵活性。

这样，有：

$$\dot{V} = 2 \frac{a_1}{a_2^2} e \dot{e} + 2 \frac{a_1}{a_2} \dot{e} \ddot{e} + 2 \lambda \tilde{K} \dot{\tilde{K}}$$

由 $a_2 \ddot{e} + a_1 \dot{e} + e = \tilde{K} r$ 可得： $\ddot{e} = -\frac{a_1}{a_2} \dot{e} - \frac{1}{a_2} e + \frac{\tilde{K}}{a_2} r$ 。代入 \dot{V} 有：

$$\dot{V} = -2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 \dot{e}^2 + 2 \frac{a_1}{a_2^2} \dot{e} \tilde{K} r + 2 \lambda \tilde{K} \dot{\tilde{K}}$$

上式中右边第一项为负，为了使 \dot{V} 负定，通过使后两项之和为零得：

$$\dot{\hat{K}} = -\frac{a_1}{\lambda a_2^2} \dot{e}r$$

再考虑 $\dot{\hat{K}} = -K_p \dot{K}_c$ 可得：

$$\dot{K}_c = \frac{a_1}{\lambda K_p a_2^2} \dot{e}r = K \dot{e}r$$

注：

这个自适应律方案中出现了误差的微分信号，实际应用中可直接利用输出的速度信号进行比较，即 $\dot{e} = \dot{y}_m - \dot{y}_p$ ，从而避开使用微分环节；也可直接积分后得到关于误差的比例型调节形式的自适应律。

例5.8 已知被控对象的状态方程为

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

选参考模型的状态方程为

$$\dot{x}_m = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x_m + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} r$$

其中， r 为单输入，试确定可调参数 $F(t)$ 和 $G(t)$ 的自适应调整规律。

解：采用第二种方法进行自适应律的设计。

由于状态为二维矢量、参考输入为单输入，故可选择Lyapunov函数中的三个正定矩阵依次为

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_F^{-1} = P_G^{-1} = 1$$

这样，代入(5.18*)式中即可直接写出相应的自适应律。

5.3 波波夫超稳定性理论方法

Lyapunov稳定性理论用于设计模型参考自适应控制系统时，需要选择一个适当的Lyapunov函数，如果没有一定的理论知识和实践经验，就很难针对具体系统选出满意的Lyapunov函数，这是Lyapunov方法的一个主要缺点。

用超稳定性理论设计模型参考自适应系统，不仅不需要选择Lyapunov函数，而且能给出一族自适应律。结合实际系统，可以方便地选择自己所需的自适应律。

超稳定性理论是处理一类非线性反馈系统的稳定性理论，由罗马尼亚学者V. M. Popov于1964年提出，并由法国学者I. D. Landau于1969年用来设计模型参考自适应控制系统。

目前，基于超稳定性理论的设计方法和基于Lyapunov稳定性理论的设计方法同时构成了自适应系统设计的基本方法。

5.3.1 正实函数与正实引理

● 正实函数

对于复变量 $s (= \sigma + j\omega)$ 的函数 $f(s)$ ，当 s 为实数时函数 $f(s)$ 也是实数，那么就称函数 $f(s)$ 为实函数。如，连续时间系统的传递函数和离散时间系统的脉冲传递函数都是实函数。

如果对于满足 $\operatorname{Re} s \geq 0$ 的所有 s 都有 $\operatorname{Re} f(s) \geq 0$ ，那么称实函数 $f(s)$ 为正实函数。如果存在 $\lambda > 0$ ，使得 $f(s - \lambda)$ 是正实的，那么称 $f(s)$ 为严格正实的。

【注：正实函数 $f(s)$ 实际上是将 s 的右半平面映射到 f 的右半平面的函数。】

定理5.4 实函数 $f(s)$ 是正实函数的充要条件是：

- ① $f(s)$ 在 s 的右半开平面($\operatorname{Re} s > 0$)无极点；
- ② 虚轴上的极点是单重的，且其留数为正；
- ③ 除虚轴上的极点外，对 $s = j\omega$ 的所有 ω 都有 $\operatorname{Re} f(i\omega) \geq 0$ 。

定理5.5 实函数 $f(s)$ 是严格正实函数的充要条件是：

- ① $f(s)$ 在 s 的右半闭平面($\operatorname{Re} s \geq 0$)无极点；
- ② 对 $s = j\omega$ 的所有 ω 都有 $\operatorname{Re} f(i\omega) > 0$ 。

定理5.6 若实函数 $f(s)$ 是正实的，则 $f(s)$ 在 s 的右半开平面($\operatorname{Re} s > 0$)无零点；而若是严格正实的，则虚轴上也无零点。【注：该定理意味着严格正实函数的所有零极点都在 s 平面的左半开平面。】

当 $f(s)$ 是用下式表示的 s 的实有理函数时

$$f(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (*1)$$

其中， a_i, b_i 是实数，进一步有如下性质：

定理5.7 若(*1)式表示的实有理函数 $f(s)$ 是正实的，那么分子、分母多项式 $B(s)$ 、 $A(s)$ 的阶数差 $|m - n|$ 不超过1。

【注： $G(j\omega)$ 为 $G(s)$ 的频率特性，因为正实传递函数的频率特性的实部 $\operatorname{Re} [G(j\omega)] \geq 0$ ，所以在 s 平面上，当 ω 在 $(-\infty, +\infty)$ 范围内变化时， $G(j\omega)$ 只能在第一、四象限内变化，也就是正实函数 $G(j\omega)$ 的相角在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 范围内变化，因此 $B(s)$ 、 $A(s)$ 的阶数差不超过1】

定理5.8 若(*1)式表示的实有理函数 $f(s)$ 是严格正实的，那么分子、分母多项式 $B(s)$ 、 $A(s)$ 都是Hurwitz多项式。

● 正实函数矩阵

下面讨论以实函数为元素的矩阵 $F(s)$ 的正实性。

如果对于满足 $\operatorname{Re} s \geq 0$ 的所有 s 都有 $F(s) + F^H(s) \geq 0$ ，那么称以复变量 s 的实函数为元素的矩阵 $F(s)$ 为正实函数矩阵。如果存在 $\lambda > 0$ ，使得 $F(s - \lambda)$ 是正实的，那么称 $F(s)$ 为严格正实的。

定理5.9 实函数矩阵 $F(s)$ 是正实函数矩阵的充要条件是：

- ① $F(s)$ 的各元素在 s 的右半开平面($\operatorname{Re} s > 0$)是解析的，即无极点；
- ② $F(s)$ 的各元素在虚轴上的极点都是单重的，且其留数矩阵为半正定厄米矩阵；【注：若 $F(s)$ 的一个极点为 p_i ，则称 $\lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)F(s) = F_i$ 为 $F(s)$ 在 p_i 上的留数矩阵】
- ③ 除 $F(s)$ 的各元素在虚轴上的极点外，对 $s = j\omega$ 的所有 ω 都有 $F(j\omega) + F^H(j\omega) \geq 0$ 。

定理5.10 实函数矩阵 $F(s)$ 是严格正实函数矩阵的充要条件是：

- ① $F(s)$ 的各元素在 s 的右半闭平面($\operatorname{Re} s \geq 0$)都是解析的，即无极点；
- ② 对 $s = j\omega$ 的所有 ω 都有 $F(j\omega) + F^H(j\omega) > 0$ 。

● 正实引理

如果一个线性定常系统由下式描述：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (*2)$$

其中， x 为 n 维状态向量， u 和 y 为 m 维输入和输出向量， A 、 B 、 C 、 D 为具有相应维数的矩阵，系统的传递函数矩阵为 $G(s)$ ，若存在一组 A 、 B 、 C 、 D 使得

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (*3)$$

则称 (A, B, C, D) 为 $G(s)$ 的一个实现。若还有 (A, B) 完全能控、且 (C, A) 完全能观，则称 (A, B, C, D) 为 $G(s)$ 的一个最小实现。

定理5.11 $G(s)$ 为正实函数矩阵的充要条件是存在一个正定矩阵 P 和一个半正定矩阵 Q 以及矩阵 S 、 R 满足：

$$\begin{cases} PA + A^T P = -Q \\ B^T P + S^T = C \\ D + D^T = R \\ \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

定理5.12 $G(s)$ 为严格正实函数矩阵的充要条件是存在两个正定矩阵 P 和 Q 以及矩阵 S 、 R 满足：

$$\begin{cases} PA + A^T P = -Q \\ B^T P + S^T = C \\ D + D^T = R \\ \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \end{cases}$$

上述定理就是著名的Kalman-Yckubovich引理。正实引理可概括如下：

定理5.13 已知有理分式矩阵 $G(s)$ 在 $\text{Re } s > 0$ 上解析，且在 $\text{Re } s = 0$ 上仅由单重极点，若 (A, B, C, D) 是其最小实现，则 $G(s)$ 为正实函数矩阵的充要条件是存在正定矩阵 P 和实矩阵 K 、 L 满足：

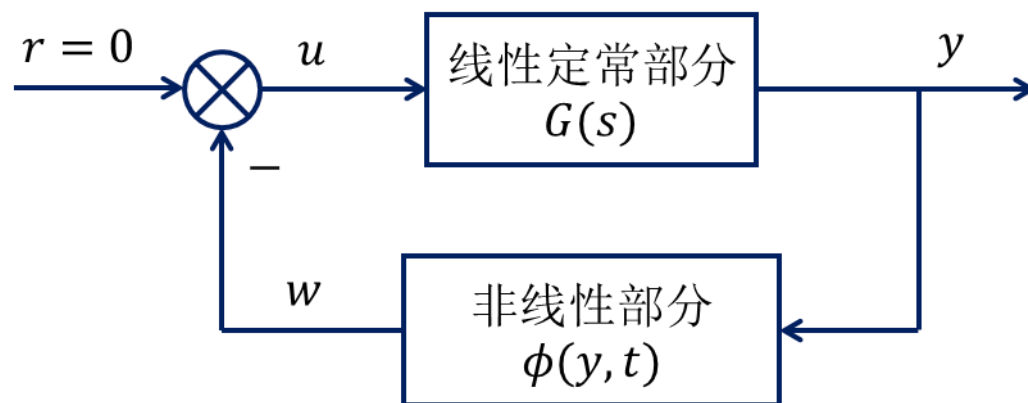
$$\begin{cases} PA + A^T P = -LL^T \\ B^T P + K^T L^T = C \\ K^T K = D + D^T \end{cases}$$

注：若将第一个式子替换为 $PA + A^T P = -LL^T = -Q$ ，其中 Q 为正定矩阵，则定理13就变为关于严格正实函数矩阵的充要条件。

5.3.2 超稳定性理论

● 超稳定性问题的背景

在许多实际的闭环控制问题中，采用非线性孤立的思想，常可将它们规范化为右图中的闭环系统。其中，前向通路中的部分是系统的线性部分，一般是定常的；反馈通路中的部分是非线性部分，可以是定常的或时变的，人们对其了解甚微。



在考察图中所示系统的全局稳定性时，通常假定外部输入 $r = 0$ ，这样有 $u = -w$ 。

绝对稳定性研究的问题是，对于满足不等式条件 $y_i(t)w_i(t) \geq 0, \forall i$ 的任何非线性反馈环节，应如何选择线性部分才能保证整个闭环系统的全局稳定性。其中， y_i 、 w_i 分别为非线性环节的输入向量和输出向量的第 i 个分量。

绝对稳定性问题要求非线性反馈方框每一瞬间每一对输入输出分量的乘积大于等于0，即 $y_i(t)w_i(t) \geq 0$ 。为把非线性特性的条件放宽，放宽到并非每一瞬间都满足 $y_i(t)w_i(t) \geq 0$ ，而是在一段时间段内的平均值满足，也就是可以在充分小的时间段内不满足，而大部分时间段内满足，即：

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} w^T(\tau)y(\tau)d\tau \geq 0, \quad t_1 \geq t_0 \quad (*4)$$

或进一步放宽写成

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} w^T(\tau)y(\tau)d\tau \geq -r_0^2, \quad t_1 \geq t_0 \quad (*5)$$

其中， $r_0^2 \geq 0$ 是与线性方框传递函数初始条件有关的常数。(*5)式称为Popov积分不等式。

对于满足Popov积分不等式的非线性反馈环节，其线性部分满足什么条件时整个闭环系统才是全局(渐近)稳定的，这就是超稳定性问题。

【注：绝对稳定性可视为超稳定性的一种特殊情况】

● 超稳定性的基本概念

对于“超稳定性问题的背景”中的闭环系统框图，假定系统的数学模型(即正向线性定常环节和非线性环节)如下。

线性环节：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = Ax - Bw \\ y = Cx + Du = Cx - Dw \end{cases} \quad (*6)$$

非线性环节：

$$w = \phi(y, t, \tau), \quad t \geq \tau \quad (*7)$$

其中， x 为 n 维状态向量， $u(= -w)$ 和 y 为 m 维输入和输出矢量， (A, B) 完全能控， (C, A) 完全能观。

此外，假定非线性环节满足Popov积分不等式(*5)或

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u^T(\tau)y(\tau)d\tau \leq r_0^2, \quad t_1 \geq t_0 \quad (*8)$$

定义 考虑由式(*6)和(*7)组成的闭环系统，如果对所有满足Popov积分不等式(*5)或(*8)的非线性反馈环节(*7)，存在常数 $\delta > 0$ 和 $r_0 > 0$ ，使得前向方块(*6)的解满足不等式

$$\|x(t)\| < \delta(\|x(t_0)\| + r_0), \quad \forall t \geq t_0 \quad (*9)$$

那么就称此闭环系统为超稳定系统。

定义 假定式(*6)和(*7)组成的闭环系统是超稳定系统，且对所有满足Popov积分不等式(*5)或(*8)的非线性反馈环节(*7)，系统(*6)的解都满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (*10)$$

那么就称此闭环系统为渐近超稳定系统。

● 超稳定性定理

定理5.14 由式(*6)、式(*7)和式(*5)或(*8)组成的闭环系统是超稳定系统的充要条件是线性方块的传递函数矩阵

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (*11)$$

为正实函数矩阵。

定理5.15 由式(*6)、式(*7)和式(*5)或(*8)组成的闭环系统是渐近超稳定系统的充要条件是线性方块的传递函数矩阵

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (*12)$$

为严格正实函数矩阵。

5.3.3 对于模型参考自适应控制的应用

利用超稳定性理论设计的指导思想在于如何使误差模型成为渐近超稳定的，这样不论误差的初始值如何变化，整个模型参考自适应系统都是全局渐近稳定的。具体设计步骤如下：

- ① 采用非线性孤立法，将模型参考自适应系统变换为由两个环节组成的标准误差反馈系统，其中线性环节位于前向通道，非线性环节位于反馈通道。
- ② 使等价反馈系统的非线性反馈环节满足Popov积分不等式，并由此确定反馈通道自适应律的部分解。
- ③ 使等价反馈系统线性环节的传递函数是严格正实的，由此确定正向通路自适应律的部分解。
- ④ 将等价系统返回至原始系统，从而完成整改自适应系统的工作原理图。

下面，将按照上述步骤给出模型参考自适应控制系统的设计结果。

设参考模型的状态方程为

$$\dot{x}_m = A_m x_m(t) + B_m r(t), \quad x_m(0) = x_{m0} \quad (\#1)$$

其中, $x_m(t)$ 为 n 维状态向量, $r(t)$ 为 m 维分段连续输入矢量, A_m 为 $n \times n$ 稳定矩阵, B_m 为 $n \times m$ 矩阵。

可调系统为

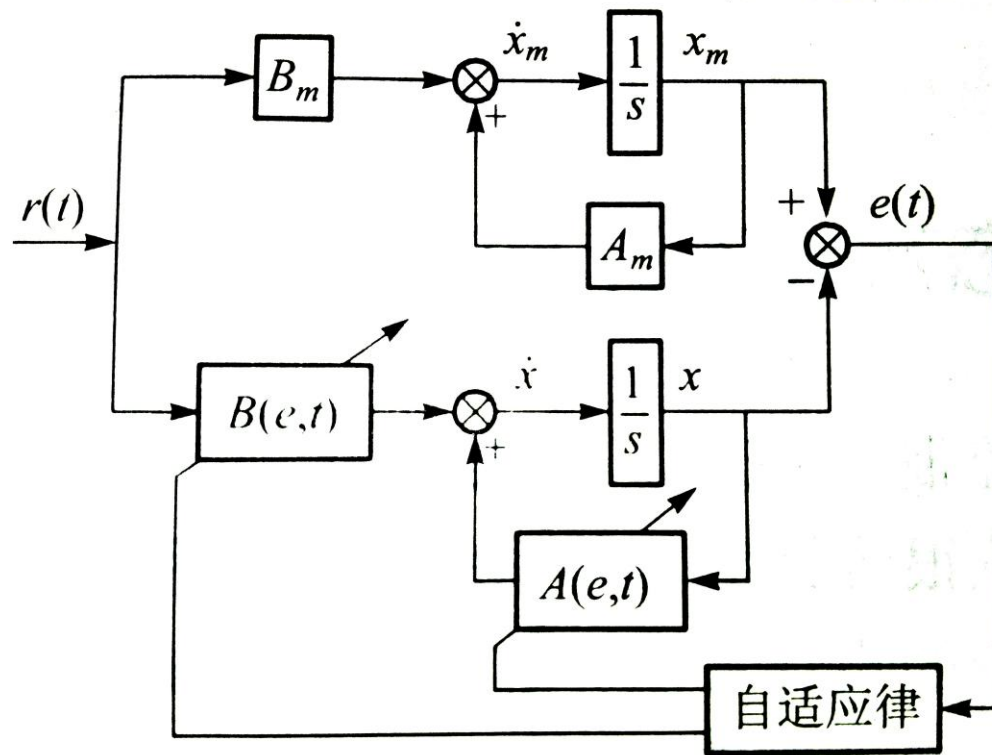
$$\dot{x} = A(e, t)x(t) + B(e, t)r(t), \quad x(0) = x_0, A(e, 0) = A_0, B(e, 0) = B_0 \quad (\#2)$$

其中, x 为 n 维状态向量, A 为 $n \times n$ 含有可调参数的时变矩阵, B 为 $n \times m$ 含有可调参数的时变矩阵。

系统广义状态误差为

$$e(t) = x_m(t) - x(t) \quad (\#3)$$

系统结构如图所示:



设计任务：确定一个自适应律，以实现状态收敛性

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (\#4)$$

和参数收敛性

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = A_m \\ \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = B_m \end{cases} \quad (\#5)$$

① 求等价非线性反馈系统

由(#1)和(#2)式可得:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}_m(t) - \dot{x}(t) \\ &= A_m e(t) - (A(e, t) - A_m)x(t) - (B(e, t) - B_m)r(t)\end{aligned}\quad (\#6)$$

将上式写为

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + I w_1(t) \quad (\#7)$$

其中,

$$w(t) = -w_1(t) = (A(e, t) - A_m)x(t) + (B(e, t) - B_m)r(t) \quad (\#8)$$

考虑到(#7)式中的线性环节仅依赖于预先给定的矩阵 A_m , 大多数情况下其传递函数矩阵都很难满足超稳定性理论要求的严格正实性, 因此在线性环节的前向通路中设置一个线性补偿器 D , 即有

$$v(t) = D e(t) \quad (\#9)$$

引入补偿器 D 后, 自适应调节参数矩阵 $A(e, t)$ 和 $B(e, t)$ 相应换为 $A(v, t)$ 和 $B(v, t)$ 。这样, $A(v, t)$ 和 $B(v, t)$ 是受环境影响而变化的参数, 同时它们

又由自适应律来调整，使其各自维持在接近 A_m 和 B_m 的数值。

考虑到系统收敛后 e 将为0，为了使条件(#5)也能得到满足，自适应律中应包含具有记忆功能的积分作用，即可调参数矩阵不仅依赖于当前时刻的 $v(t)$ 值，也与它的过去值 $\{v(\tau), 0 \leq \tau < t\}$ 有关。因此，可设

$$\begin{cases} A(v, t) = \int_0^t \Phi_1(v, t, \tau) d\tau + \Phi_2(v, t) + A_0 \\ B(v, t) = \int_0^t \Psi_1(v, t, \tau) d\tau + \Psi_2(v, t) + B_0 \end{cases} \quad (\#10)$$

其中， Φ_1 、 Φ_2 和 Ψ_1 、 Ψ_2 分别是 $n \times n$ 和 $m \times m$ 矩阵。

把(#10)式代入误差方程(#6)得：

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) - (A(v, t) - A_m)x(t) - (B(v, t) - B_m)r(t) \quad (\#11)$$

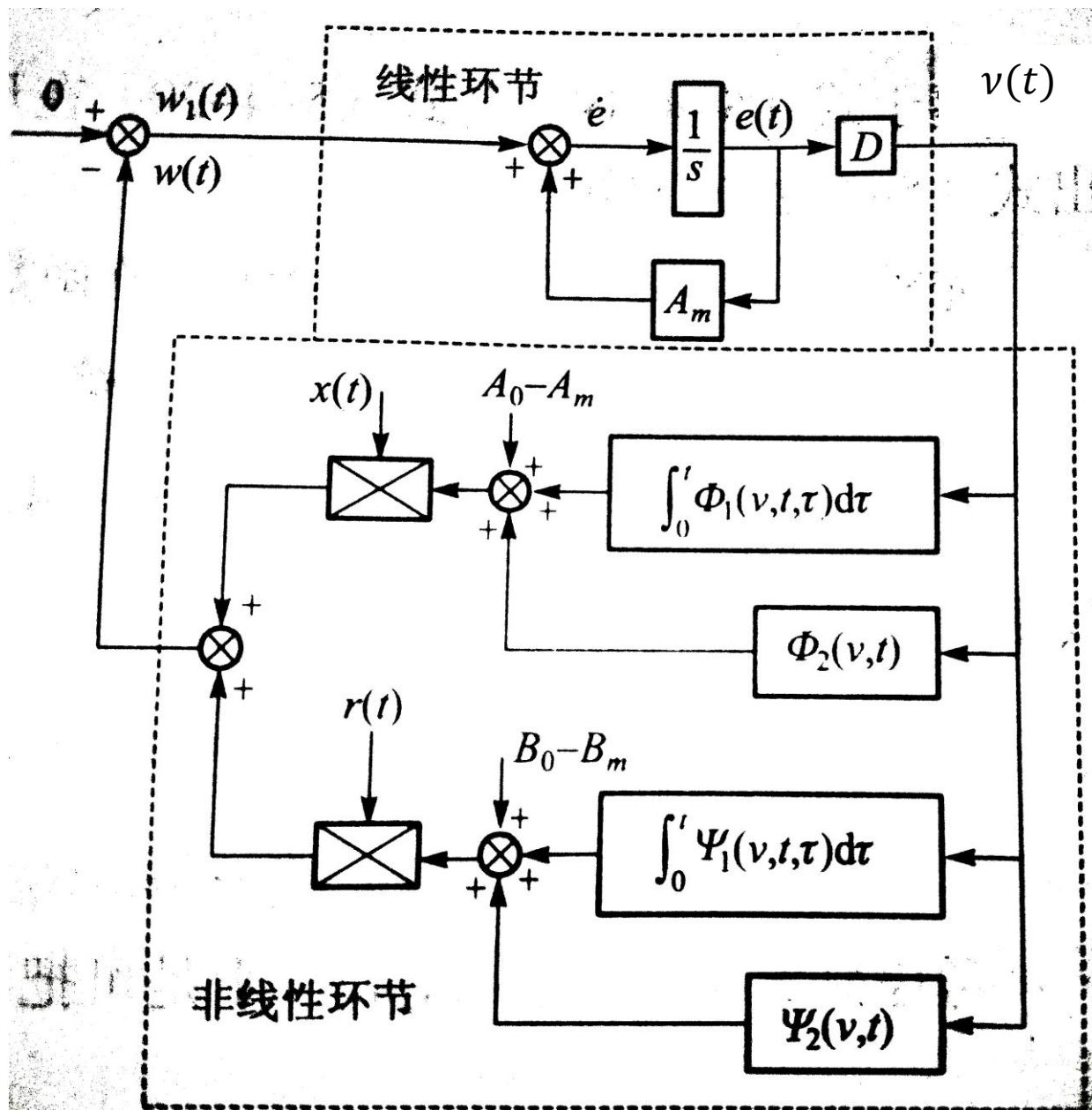
进一步表示为线性环节

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = A_m e(t) + I w_1(t) \\ v(t) = D e(t) \end{cases} \quad (\#12a)$$

和非线性环节

$$\begin{aligned} w(t) = -w_1(t) = & \left(\int_0^t \Phi_1(v, t, \tau) d\tau + \Phi_2(v, t) + A_0 - A_m \right) x(t) \\ & + \left(\int_0^t \Psi_1(v, t, \tau) d\tau + \Psi_2(v, t) + B_0 - B_m \right) r(t) \end{aligned} \quad (\#12b)$$

这就是等价非线性
反馈系统的前向环
节和反馈环节。



② 使等价非线性反馈环节满足Popov积分不等式

本步的设计任务是确定 Φ_1 、 Φ_2 和 Ψ_1 、 Ψ_2 的值，使得非线性反馈环节满足Popov积分不等式

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} v^T(t)w(t)dt \geq -r_0^2, \quad t_1 \geq 0 \quad (\#13)$$

将反馈环节表达式(#12)代入上式，并借助正定积分核的相关结论可以知道，当 Φ_1 、 Φ_2 和 Ψ_1 、 Ψ_2 取如下值时Popov积分不等式成立：

$$\begin{cases} \Phi_1(v, t, \tau) = K_\Phi(t - \tau)v(\tau)x^T(\tau), & 0 \leq \tau \leq t \\ \Phi_2(v, t) = K_1(t)v(t)[K_2(t)x(t)]^T, & K_1(t), K_2(t) \geq 0 \\ \Psi_1(v, t, \tau) = K_\Psi(t - \tau)v(\tau)r^T(\tau), & 0 \leq \tau \leq t \\ \Psi_2(v, t) = K_3(t)v(t)[K_4(t)r(t)]^T, & K_3(t), K_4(t) \geq 0 \end{cases} \quad (\#14)$$

其中， K_Φ 和 K_Ψ 为正定积分核。

选择不同的 $K_\Phi(t - \tau)$ 、 $K_\Psi(t - \tau)$ 、 $K_1(t) \sim K_4(t)$ 可以得到不同形式的自适应律。例如，取 $K_\Phi(t - \tau) = K_\Phi > 0$ 、 $K_\Psi(t - \tau) = K_\Psi > 0$ 、 $K_i(t) = K_i, (i = 1, \dots, 4)$ ，则得到比例-积分自适应律。

③ 根据前向环节正实性要求，确定线性补偿器 D

根据第①步得到的结构图，等价反馈系统正向环节的传递函数矩阵为

$$G_v(s) = D(sI - A_m)^{-1}I \quad (\#15)$$

根据K-Y引理，为了使得 $G_v(s)$ 为严格正实的，下式必须成立：

$$\begin{cases} PA_m + A_m^T P = -Q, & P = P^T > 0, Q = Q^T > 0 \\ IP = D \end{cases} \quad (\#16)$$

解得

$$D = P \quad (\#17)$$

即线性补偿器为

$$v(t) = Pe(t) \quad (\#18)$$

至此，状态模型参考自适应系统为全局渐近超稳定的，其状态误差为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_m(t) - x(t)) = 0$$

④ 返回并得到原始系统的模型
参考自适应控制结构图

