

# 第4章 基于常规控制策略 的自校正器

# 主要内容

## 4.1 极点配置自校正调节器

### 4.1.1 被控对象参数已知时的极点配置调节器

### 4.1.2 极点配置自校正调节器算法

## 4.2 极点配置自校正控制器

### 4.2.1 极点配置控制器

### 4.2.2 极点配置自校正控制器设计步骤

## 4.3 自校正PID控制器

### 4.3.1 PID算法

### 4.3.2 自校正PID控制器参数的确定

- 常规的PID控制器，不论是在理论上还是在实践方面都被广泛研究、并应用于了各种控制过程中。随着科技的发展，人们对控制系统的要  
求越来越高，特别是对于那些被控参数是未知或存在参数变化或不  
确定扰动的控制过程，想要取得满意的控制效果，就必须实时地在线调  
整控制器的参数。采用自校正技术，就能自动调整调节器或控制器的  
参数，使系统在较好的性能下运行。
- 常规自动控制根据反馈原理，采用被控量与参考量之间的偏差进行调  
节。但当系统的参数受环境的变化而引起波动，或当有随机扰动对系  
统产生影响时，常规调节器就可能补偿不了这些干扰因素产生的偏差，  
其控制结果无法达到期望的性能指标，甚至可能导致系统的不稳定。

- 人们基于常规控制策略，采用了不同的方案来改善系统的性能：
  - 1) 采用前馈环节来补偿可测扰动；
  - 2) 利用条件反馈来增强系统中的误差调节；
  - 3) 设计一个前置滤波器对变化剧烈的输入信号进行预滤波；
  - 4) 引入非线性控制特性；
  - 5) 通过不断辨识调节系统的参数。
- 本章的重点是采用常规的控制器设计方法，进行参数自适应控制。
- 最小方差(自校正)控制是基于输出方差这一性能指标的最小化来设计控制律的；而基于常规控制策略的自校正器，并不以寻求某一指标函数的最优化为控制目的，但因为其与传统的控制方法密切相关，所以常常具有直观、工程概念明显、鲁棒性强和适用范围广和易实现等优点，而在实际控制工程中得到广泛的应用。

## 4.1 极点配置自校正调节器

- 极点配置的设计思想：对于线性定常系统，不仅系统的稳定性取决于极点的分布，而且系统的控制品质，例如上升时间、超调量、振荡次数等，在很大程度上也与极点的位置密切相关。因此，只要选择某种控制策略，将闭环极点移到相应的期望极点上，即可使系统性能满足预先设定的性能要求。
- 最小方差自校正器不适用非逆稳定系统，对控制无约束易导致控制环节的过饱和现象。对此，Åström等人于20世纪70年代后期提出了极点配置自校正调节器的设计方法，通过对闭环系统的极点按工艺要求重新配置，不仅可以获得所期望的动态特性，而且比较简易直观、鲁棒性好，还适用于非逆稳定系统。

#### 4.1.1 被控对象参数已知时的极点配置调节器

设单输入单输出被控系统参数已知时的模型为：

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})q^{-d}}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v(k) \quad (4.1)$$

其中， $y(k)$ 为 $k$ 时刻的输出； $u(k)$ 为 $k$ 时刻的控制输入； $\{v(k)\}$ 是零均值白噪声序列，即满足 $E\{v(k)\} = 0$ 和 $E\{v(i)v(j)\} = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ ； $d$ 为相应滞后步数； $C(q^{-1})$ 是Hurwitz多项式。

对于调节问题，系统反馈控制律的一般形式为：

$$u(k) = -\frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})} y(k) \quad (4.2)$$

将(4.2)式代入(4.1)式可得闭环系统从扰动输入 $v(k)$ 到系统输出 $y(k)$ 之间的传递函数为：

$$\frac{y(k)}{v(k)} = \frac{FC}{AF + BGq^{-d}} \quad (4.3)$$

设计目的：根据极点配置法来确定多项式F和G的值。

极点配置调节器的设计思想：使闭环系统传递函数的极点等于期望性能所需要的极点，这些极点构成的多项式记为 $A_r(q^{-1})$ 【此多项式是设计者根据希望的闭环系统性能要求事先确定的】。注意：对于闭环系统传递函数的期望零点构成的多项式，记为 $B_r(q^{-1})$ ，没有严格的要求。

为了使设计简单，可以取期望的闭环零点构成的多项式为 $B_r(q^{-1}) = F(q^{-1})$ 。这样，令闭环系统传递函数(4.3)与期望的闭环传递函数相等有：

$$\frac{FC}{AF + BGq^{-d}} = \frac{F}{A_r}$$

由上式可得：

$$AF + BGq^{-d} = CA_r \quad (4.4)$$

上式也称为Diophantine方程，通过求解该方程来得到多项式F和G。

恒等式(4.4)有解的必要条件是：

$$\begin{cases} n_f \geq n_b + d - 1 \\ n_g \geq n_a - 1 \\ n_{ar} \leq n_a + n_b - n_c + d - 1 \end{cases}$$

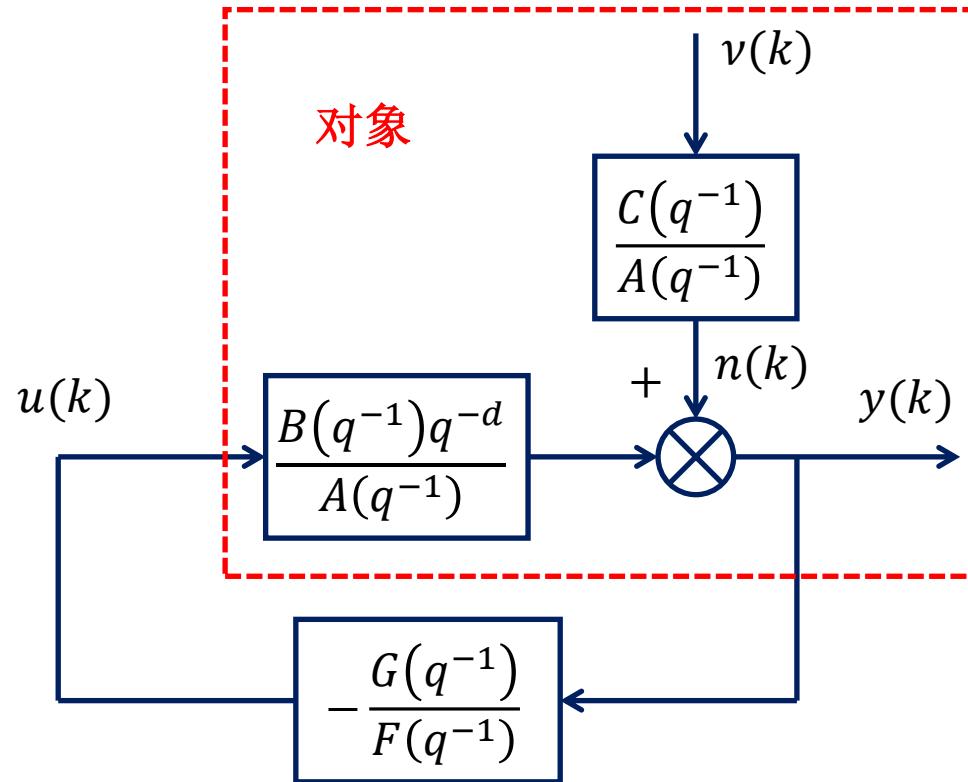
仅考虑前两式，通常取等号以便简化 $F$ 、 $G$ 的设计。这样，只要使(4.4)式两端同幂次项的系数相等，即可得到以 $F$ 、 $G$ 的系数为未知数的一个方程组，求解该方程组便可得到多项式 $F$ 和 $G$ 。

由(4.4)式可得闭环系统的方程为：

$$y(k) = \frac{FC}{AF + BGq^{-d}} v(k) = \frac{F}{A_r} v(k)$$

将上式代入(4.2)式可知，(4.2)式中的控制律也能被写为：

$$u(k) = -\frac{G}{A_r} v(k)$$



由闭环系统特征方程 $AF + BGq^{-d} = CA_r = 0$ 可知，被控过程的多项式 $B$ 不再是闭环系统特征多项式的因子（与最小方差控制的闭环特征方程 $CB=0$ 相比），因此该方法可用于逆不稳定被控过程。这是极点配置法优于最小方差控制的一个地方。

**例4.1：**考虑第2章中的例3（讲义中的例2.1），假定期望极点多项式为  $A_r(q^{-1}) = 1 + \alpha_1 q^{-1}$ ，求  $a_1 = -0.9$ 、 $b_0 = 0.5$ 、 $c_1 = 0.7$ 、 $\alpha_1 = -0.5$  时的控制律  $u(k)$ ，并估算  $k$  充分大时的输出方差  $E\{y^2(k)\}$ 。

解：根据被控过程的方程

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k-2) + v(k) + c_1 v(k-1)$$

可知

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1}, \quad n_a = 1$$

$$B(q^{-1}) = b_0$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1}$$

$$d = 2$$

由于  $F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$  的阶分别为  $n_b + d - 1$  和  $n_a - 1$ ，有

$$G(q^{-1}) = g_0$$

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1}$$

由(4.4)式得：

$$AF + BGq^{-d} = CA_r$$

即：

$$(1 + a_1 q^{-1})(1 + f_1 q^{-1}) + b_0 g_0 q^{-2} = (1 + c_1 q^{-1})(1 + \alpha_1 q^{-1})$$

$$1 + (f_1 + a_1)q^{-1} + (b_0 g_0 + a_1 f_1)q^{-2} = 1 + (1 + c_1 + \alpha_1)q^{-1} + c_1 \alpha_1 q^{-2}$$

比较等式两边，解之得：

$$f_1 = c_1 - a_1 + \alpha_1, \quad g_0 = \frac{1}{b_0}(c_1 - a_1)(\alpha_1 - a_1)$$

其控制律为：

$$u(k) = -\frac{G}{F}y(k) = -\frac{1}{b_0} \frac{(c_1 - a_1)(\alpha_1 - a_1)}{[1 + (c_1 - a_1 + \alpha_1)q^{-1}]} y(k)$$

系统输出为：

$$y(k) = -\frac{F}{A_r}v(k) = \frac{1 + (c_1 - a_1 + \alpha_1)q^{-1}}{1 + \alpha_1 q^{-1}} v(k)$$

将  $a_1 = -0.9$ 、 $b_0 = 0.5$ 、 $c_1 = 0.7$ 、 $\alpha_1 = -0.5$  代入上式得：

$$u(k) = -\frac{1.28}{1 + 1.1q^{-1}} y(k) \quad y(k) = \frac{1 + 1.1q^{-1}}{1 - 0.5q^{-1}} v(k)$$

或

$$\begin{aligned} u(k) &= -1.28y(k) - 1.1u(k-1) \\ y(k) &= 0.5y(k-1) + v(k) + 1.1v(k-1) \end{aligned}$$

当  $k$  充分大时，其输出方差为：

$$E\{y^2(k)\} \approx 4.413\sigma^2$$

显然，与最小方差控制的输出方差( $3.56\sigma^2$ )相比，极点配置的输出方差有所增大，这说明极点配置不是最优意义下的控制。不过，比较其控制律可以发现，控制动作变缓和了，因为最小方差控制的调节律为：

$$u(k) = -2.88y(k) - 1.6u(k-1)$$

## 4.1.2 极点配置自校正调节器算法

为了便于采用标准参数辨识公式，现将被控系统模型(4.1)式改写为：

$$y(k) = -(a_1 + a_2 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a+1})y(k-1) + (b_0 q^{-d+1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b-d+1})u(k-1) + Cv(k)$$

引入记号：

$$\bar{A}(q^{-1}) = a_1 + a_2 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a+1}$$

$$\bar{B}(q^{-1}) = b_0 q^{-d+1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b-d+1} = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 q^{-1} + \cdots + \bar{b}_{n_{\bar{b}}} q^{-n_{\bar{b}}}$$

被控过程的模型能被写为：

$$y(k) = -\bar{A}y(k-1) + \bar{B}u(k-1) + Cv(k) = \Phi^T(k)\theta + e(k) \quad (4.5)$$

其中，

$$\begin{cases} \Phi^T(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n_a), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_{\bar{b}})] \\ \theta = [a_1, a_2, \dots, a_{n_a}, \bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n_{\bar{b}}}]^T \end{cases}$$

式中 $\theta$ 可利用如递推最小的乘估计公式进行估值，求出 $\theta$ 的估计值 $\hat{\theta}$ 后，即可得 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 的估计值 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ ，然后由Diophantine方程：

$$\left(1 + \hat{A}q^{-1}\right)F + \hat{B}Gq^{-d} = CA_r$$

求出 $F$ 和 $G$ 的估值 $\hat{F}$ 与 $\hat{G}$ ，并由此根据(4.2)式求出 $u(k)$ 的值。

- 对于以随机扰动为主的调节问题，若采用自校正控制，最简单有效的方法是采用第2章中的最小方差控制策略。
- 如果遇到非逆稳定的被控过程，最小方差控制将导致不稳定的情况，此时，极点配置控制虽不能获得最小方差调节，但能获得较佳的动态响应和稳定性，从这个意义上说，极点配置调节器也是一个可考虑的优秀控制策略。

## 4.2 极点配置自校正控制器

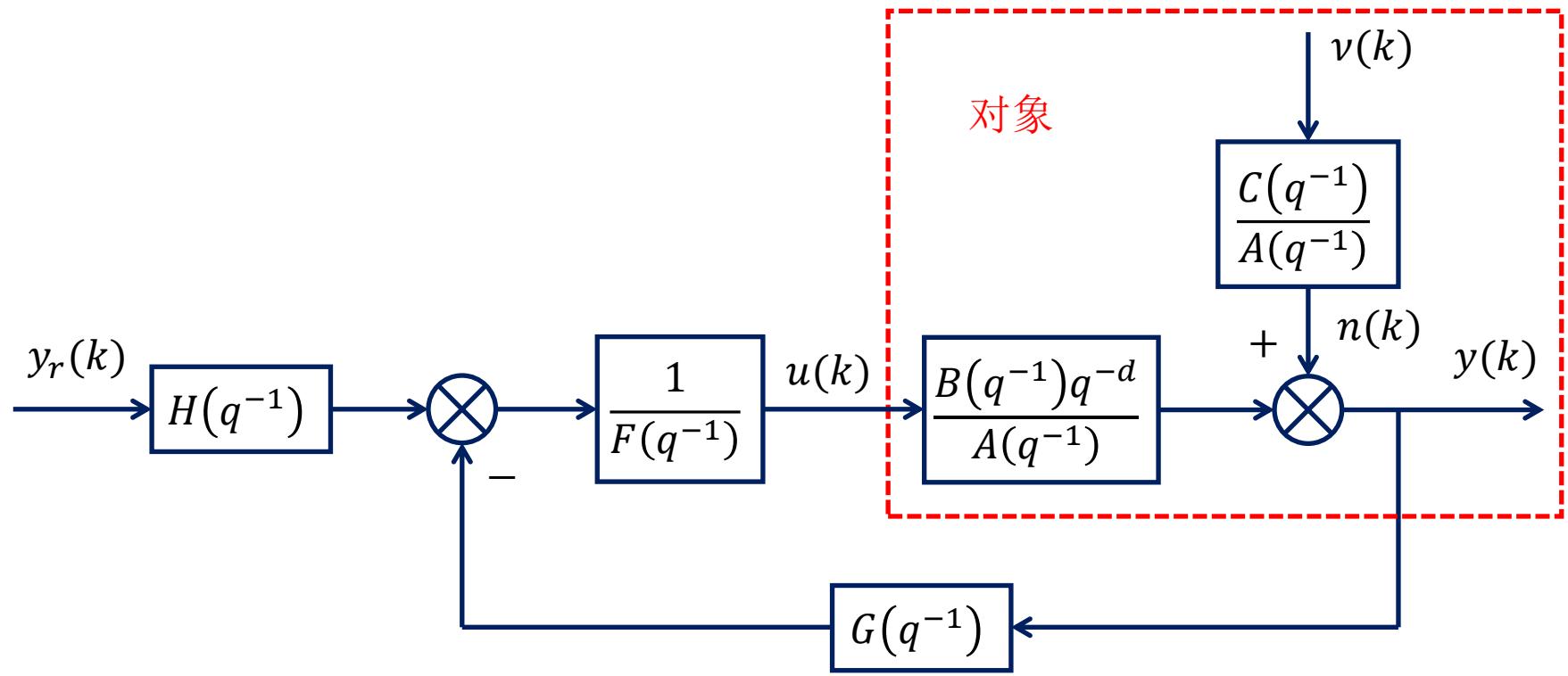
### 4.2.1 极点配置控制器

为了跟踪一个一般的期望输出信号 $y_r(k)$ (也称为参考输入信号)，我们设系统的反馈控制律为如下一般形式：

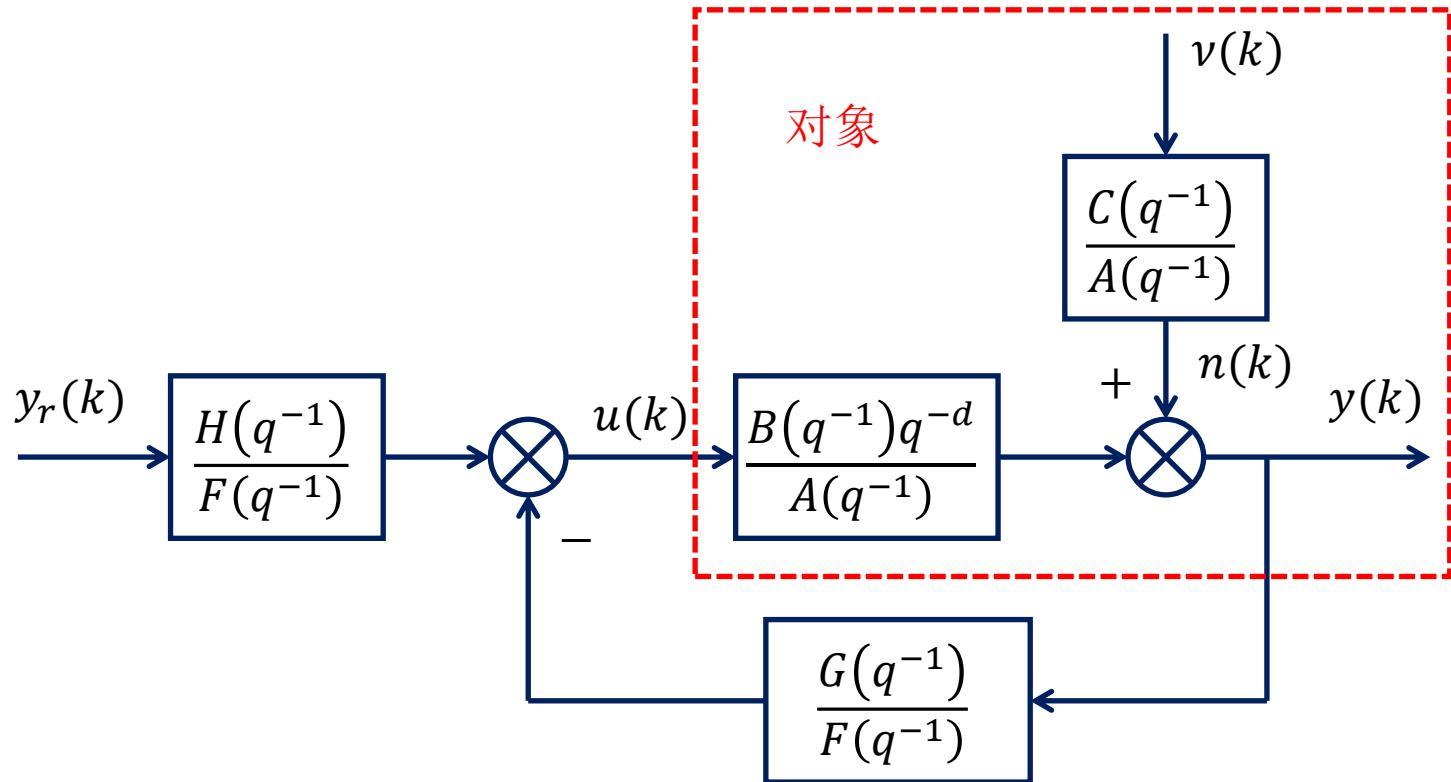
$$u(k) = \frac{H(q^{-1})}{F(q^{-1})} y_r(k) - \frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})} y(k) \quad (4.6)$$

其中， $F(q^{-1})$ 、 $G(q^{-1})$ 和 $H(q^{-1})$ 为待求的多项式； $\frac{H(q^{-1})}{F(q^{-1})}$ 也称为前置补偿器，而 $\frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})}$ 也称为反馈补偿器。

在控制律(4.6)的作用下，闭环系统的结构图如下：



闭环系统结构图画法之一



闭环系统结构图画法之二

相应地，闭环系统方程为：

$$y(k) = \frac{HBq^{-d}}{AF+BGq^{-d}} y_r(k) + \frac{CF}{AF+BGq^{-d}} v(k) \quad (4.7)$$

**控制器的设计思路：**通过令参考输入到输出间的闭环传递函数等于参考输入到输出间的期望传递函数，来确定多项式 $F$ 、 $G$ 和 $H$ 的值，即

$$\frac{HBq^{-d}}{AF+BGq^{-d}} = \frac{B_r}{A_r} \quad (4.8)$$

上式说明，极点配置控制器的设计问题本质上是找出能使(4.8)式成立的多项式 $F$ 、 $G$ 和 $H$ 的代数问题。【通常，只给出期望极点，而期望零点构成的多项式 $B_r$ 未知，因此无法通过(4.8)式直接计算多项式 $F$ 、 $G$ 和 $H$ 】

工程上，(4.8)式左边分子分母的阶次高于右边期望传递函数分子分母的阶次，此时为了使等号成立，我们可以考虑使左边闭环系统传递函数的分子分母进行零极点对消，使对消后的分子分母自动约简成右边传递函数的分子分母，由此计算多项式 $F$ 、 $G$ 和 $H$ 。

注：零极点对消只能消掉稳定因子，不能消掉不稳定因子。

## 关于零极点对消的讨论 (由此设计多项式F、G和H) :

- ① 对于多项式 $B$ , 如果 $B$ 的某个因子不是 $B_r$ 的一个因子, 那么它必定是闭环特征多项式的一个因子, 否则分子不可能约简为 $B_r$ ; 由于闭环系统必须是稳定的, 因此仅允许 $B$ 的稳定零点被对消。这样, 对于多项式 $B$ , 有如下结论: 非 $B_r$ 零点的、 $B$ 的零点必须被对消, 且该零点必须是稳定零点。为方便起见, 将 $B$ 分解成为

$$B = B^+ B^- \quad (4.9a)$$

其中,  $B^+$ 表示非 $B_r$ 零点的、 $B$ 的稳定零点构成的多项式, 必须与闭环极点相对消; 而 $B^-$ 表示 $B^+$ 的余因子。为了保证因式分解的唯一性, 把 $B^+$ 中最高次幂的系数固定为1, 即 $B^+$ 为首一多项式。

注:  $B^+ = 1$  表示 $B$ 中没有零点被对消;  $B^- = 1$  表示 $B$ 中的所有零点都将被对消。

- ② 对于非逆稳定系统,  $B$ 中一定含不稳定因子, 而不稳定因子不能被消掉, 因此必须包含在 $B^-$ 中, 即 $B^-$ 是不稳定多项式, 由于其不能成为闭环特征多项式的一个因子, 因此它必须保留在 $B_r$ 中, 即有:

$$B_r = B^- B'_r \quad (4.9b)$$

③ 因 $B^+$ 是闭环特征多项式的一个因子，所以 $B^+$ 应为 $F$ 的一个因子，故有：

$$F = B^+ F' \quad (4.9c)$$

利用(4.9a)-(4.9c)式，可把(4.8)式写为：

$$\frac{HB^+B^-q^{-d}}{B^+(AF' + B^-Gq^{-d})} = \frac{B^-B'_r}{A_r} \Leftrightarrow \frac{HB^-q^{-d}}{AF' + B^-Gq^{-d}} = \frac{B^-B'_r}{A_r}$$

令

$$\begin{cases} H = q^d B'_r \\ AF' + B^-Gq^{-d} = A_r \end{cases} \quad (4.10)$$

则通过求解(4.10)式的第二式可得到 $F'$ 和 $G$ 的值，进而由(4.9c)得到 $F$ 的值。此时，闭环系统方程(4.7)变为：

$$y(k) = \frac{HB^-q^{-d}}{A_r} y_r(k) + \frac{CF'}{A_r} v(k)$$

注：因 $B_r$ 未知，故不能通过(4.10)式的第一式计算 $H$ 。

## **H、F'和G的具体确定方法:**

- **H的确定方法**

为了保证系统的实际输出在稳态时能够跟踪上期望输出，常取 $H(q^{-1})$ 为一简单的常数。由上页红色部分的闭环系统方程可知，为使 $y(k)$ 和 $y_r(k)$ 之间的传递函数稳态(对应于z变换下的 $z = 1$ ，即 $q = 1$ )时为1， $H(q^{-1})$ 必须满足 $\frac{H(1)B^-(1)}{A_r(1)} = 1$ ，即取

$$H(q^{-1}) = H(1) = \frac{A_r(1)}{B^-(1)}$$

- **F'和G的确定方法**

(4.10)式的第二式关于 $F'$ 和 $G$ 有解的必要条件是

$$\begin{cases} n_{f'} = (n_{b^-}) + d - 1 \\ n_g = n_a - 1 \\ n_{ar} \leq n_a + (n_{b^-}) + d - 1 \end{cases}$$

在此条件下，通过使等式两端同幂次项的系数相等，即可得到以 $F'$ 和 $G$ 的系数为未知数的一个方程组，求解该方程组便可得到多项式 $F'$ 和 $G$ 。

## 求解 $F$ 、 $G$ 和 $H$ 的步骤：

- ① 按(4.9a)式，分解出 $B^+$ 和 $B^-$ ；
- ② 根据要求确定 $A_r$ ；
- ③ 由(4.10)式解出 $F'$ 和 $G$ ；
- ④ 由(4.9c)式算出 $F = B^+F'$ ；
- ⑤  $H(q^{-1}) = H(1) = \frac{A_r(1)}{B^-(1)}$ 。

注意：

- a. 由上述控制器的设计过程可知，即使对于极点配置控制器，也不需要使用期望零点 $B_r(q^{-1})$ 的信息，即与调节器一样，只需 $A_r(q^{-1})$ 即可。
- b. 极点配置也适用于过程零点全部消去和没有一个被消去的情况。在过程零点全部消去的情况下，有 $B^- = 1$ ，即 $B$ 的零点全部稳定，受控对象为逆稳定系统；在过程零点没有一个被消去的情况下，有 $B^+ = 1$ ，即 $B$ 的零点全不稳定，受控对象为逆不稳定系统。
- c. 极点配置法的优点：既适用于对象稳定的系统，也适用于对象不稳定和逆不稳定的系统。缺点：计算相对复杂。

## 4.2.2 极点配置自校正控制器设计步骤

先估计出模型中的所有未知参数，再按前一小节内容计算 $F$ 、 $G$ 和 $H$ 。

已知： $y_r(k)$ 和 $n_a$ 、 $n_b$ 、 $d$ 、 $A_r(q^{-1})$

- ① 设置初值 $\hat{\theta}(0)$ ，输入初始数据；
- ② 读取 $y(k)$ ；
- ③ 采用递推最小二乘估计方法按(4.5)式的估计模型求估计值 $\hat{\theta}$ ，进而获得 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 的估计值 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ ；
- ④ 按前一页“求解 $F$ 、 $G$ 和 $H$ 的步骤”求出 $F$ 、 $G$ 和 $H$ ；
- ⑤ 按(4.6)式求出 $u(k)$ ；
- ⑥ 输出 $u(k)$ ，转向②。

# 4.3 自校正PID控制器

## 4.3.1 PID算法

连续型PID控制的表达式：

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de}{dt} \right]$$

其中，

$e(t)$ 为参考输入和实际输出的偏差，即控制器的输入；

$u(t)$ 为控制器的输出；

$K_p$ 为比例系数或称比例增益；

$T_i$ 为积分时间常数；

$T_d$ 为微分时间常数。

离散化后得到：

$$u(k) = K_p \left[ e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=1}^k e(j) + \frac{T_d}{T} (e(k) - e(k-1)) \right]$$

$$u(k-1) = K_p \left[ e(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=1}^{k-1} e(j) + \frac{T_d}{T} (e(k-1) - e(k-2)) \right]$$

两式相减有：

$$\begin{aligned} u(k) - u(k-1) &= K_p \left[ (e(k) - e(k-1)) + \frac{T}{T_i} e(k) \right. \\ &\quad \left. + \frac{T_d}{T} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \right] \\ &= \left[ K_p + \frac{K_p T}{T_i} + \frac{K_p T_d}{T} \right] e(k) + \left[ -K_p - \frac{2K_p T_d}{T} \right] e(k-1) + \frac{K_p T_d}{T} e(k-2) \\ &\triangleq p_0 e(k) + p_1 e(k-1) + p_2 e(k-2) \end{aligned}$$

借助移位算子，可以得到离散时间PID控制器的脉冲传递算子为：

$$G_c(q^{-1}) = \frac{u(k)}{e(k)} = \frac{p_0 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}}{1 - q^{-1}} \quad (4.12)$$

【注：小写的变量代表移位算子下的时域值，而大写的变量对应z变换下的频域值】

由上式所表达的控制器可以写成下列形式：

$$F(q^{-1})u(k) = G(q^{-1})y_r(k) - G(q^{-1})y(k) \quad (4.13a)$$

其中， $F(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ ， $G(q^{-1}) = p_0 + p_1 q^{-1} + p_2 q^{-2}$ 。

(4.13a)式也可以写成如下更一般的形式：

$$F(q^{-1})u(k) = H(q^{-1})y_r(k) - G(q^{-1})y(k) \quad (4.13b)$$

其中，多项式 $H(q^{-1})$ 可根据需要进行选用。(4.13a)式代表PID控制器；而(4.13b)式则可看做一大类广义PID控制器。

### 4.3.2 自校正PID控制器参数的确定

以一个2阶被控对象的跟踪控制为例，说明自校正PID控制器的设计方法。设被控系统方程为：

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-1}B(q^{-1})u(k) + y_d$$

其中， $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}$ ； $B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1}$ ； $y_d$ 为系统的常值扰动，会引起相应的稳态误差。

当采用PID控制器时，总是希望能够消除常值扰动的影响，这可以通过极点配置法来解决，相应的PID控制器可表示为：

$$u(k) = \frac{H(q^{-1})}{F(q^{-1})}y_r(k) - \frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})}y(k) \quad (*1)$$

其中， $F(q^{-1}) = (1 - q^{-1})(1 + f_1q^{-1})$ , ( $-1 < f_1 < 0$ )； $G(q^{-1}) = g_0 + g_1q^{-1} + g_2q^{-2}$ ； $H(q^{-1})$ 的选定，通过使闭环系统稳定(即 $q = 1$ )时有 $Y(1) = Y_r(1)$ 来获得，将 $u(k)$ 的表达式带入到控制对象的方程式中，即可得到闭环系统的方程如下：

$$y(k) = \frac{H(q^{-1})q^{-1}B(q^{-1})y_r(k) + F(q^{-1})y_d}{A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-1}B(q^{-1})G(q^{-1})} \quad (*2)$$

上式与频域下的脉冲传递函数形式一致，考虑到稳态时  $F(1) = 0$ ，为使  $Y(1) = Y_r(1)$ ，可设计  $H(q^{-1}) = H(1) = G(1) = g_0 + g_1 + g_2$ 。

通过令闭环特征多项式等于期望的多项式  $A_r(q^{-1})$ ，即：

$$AF + q^{-1}BG = A_r \quad (4.14)$$

可进一步求解出多项式  $F$  和  $G$  的系数。

应用中，通常取  $A_r$  为二阶多项式，即  $A_r(q^{-1}) = 1 + a_{r1}q^{-1} + a_{r2}q^{-2}$ 。这样就可根据连续时间系统特征多项式  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$  中的参数  $\xi$  和  $\omega_n^2$  直接决定  $A_r$  的系数：

$$\begin{cases} a_{r1} = -2e^{-\xi\omega_n T} \cos(\omega_n T \sqrt{1 - \xi^2}) \\ a_{r2} = e^{-2\xi\omega_n T} \end{cases} \quad (*3)$$

进一步，将  $A, B, F, G$  和  $A_r$  的表达式都代入 (4.14) 式即可解得  $F, G$  的值，并最终得到控制律 (\*1) 的表达式。

## PID自校正控制算法：

当参数 $A$ 和 $B$ 未知时，应采用以下自校正算法。

已知 $n_a$ 、 $n_b$ 和 $A_r(q^{-1})$ ，每个采样周期重复以下三步：

- ① 利用递推估计算法，求得对象的参数估计 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ ；
- ② 用 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 代替(4.14)式中的 $A$ 和 $B$ ，求解 $F$ 和 $G$ ；
- ③ 按控制律 $F(q^{-1})u(k) = G(1)y_r(k) - G(q^{-1})y(k)$ 写出 $u(k)$ 的表达式。

这种简单的PID自校正算法实际上是极点配置算法的一个特例，可以看做对一般的极点配置算法取PID控制器的形式。

**例4.2** 已知被控过程的脉冲传递算子模型为：

$$G_P(q^{-1}) = \frac{y(k)}{u(k)} = \frac{bq^{-1}}{1 + aq^{-1}}$$

试采用极点配置法设计PID型控制器，使得闭环系统的极点为 $1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} = 0$ 的根、系统对于常数干扰的稳态响应误差为0。

解：因为要求系统对常数干扰的稳态响应为0，所以控制器中必须含有积分环节。根据题意，可以设计成PI型控制器，其脉冲传递算子的形式为：

$$G_c(q^{-1}) = \frac{p_0 + p_1 q^{-1}}{1 - q^{-1}}$$

由过程模型 $G_P(q^{-1})$ 和控制器模型 $G_c(q^{-1})$ 可得闭环系统的特征方程为：

$$1 + G_P(q^{-1})G_c(q^{-1}) = 0$$

即：

$$1 + \frac{b(p_0 + p_1 q^{-1})q^{-1}}{(1 + aq^{-1})(1 - q^{-1})} = 0 \Leftrightarrow 1 + (a + bp_0 - 1)q^{-1} + (bp_1 - a)q^{-2} = 0$$

令期望极点构成的多项式 $1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}$ 与系统特征多项式相等可求得控制器的参数为：

$$\begin{cases} p_0 = \frac{1 + a_1 - a}{b} \\ p_1 = \frac{a + a_2}{b} \end{cases}$$

故所求得的PID控制器为：

$$G_c(q^{-1}) = \frac{u(k)}{e(k)} = \frac{(1 + a_1 - a) + (a + a_2)q^{-1}}{b(1 - q^{-1})}$$

或

$$u(k) = \frac{1}{b} [(1 + a_1 - a)e(k) + (a + a_2)e(k - 1)] + u(k - 1)$$