假定系统模型能写为【因输出相对于输入总存在纯时延，因此输入量的系数多项式总可以写成不含常数项的形式，多项式$A(q^{-1})$、$B(q^{-1})$和$C(q^{-1})$中的系数可以为 0】：

$$(1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+a_3q^{-3}+a_4q^{-4})y(k) = (b_1q^{-1}+b_2q^{-2}+b_3q^{-3}+b_4q^{-4})u(k)+(1+c_1q^{-1}+c_2q^{-2}+c_3q^{-3}+c_4q^{-4})v(k)$$

则

$$\begin{aligned}
y(k) &= (-a_1q^{-1}-a_2q^{-2}-a_3q^{-3}-a_4q^{-4})y(k)\\
&\quad +(b_1q^{-1}+b_2q^{-2}+b_3q^{-3}+b_4q^{-4})u(k)\\
&\quad +(1+c_1q^{-1}+c_2q^{-2}+c_3q^{-3}+c_4q^{-4})v(k)\\
&= [-a_1q^{-1}y(k)+b_1q^{-1}u(k)+c_1q^{-1}v(k)]\\
&\quad +[-a_2q^{-2}y(k)+b_2q^{-2}u(k)+c_2q^{-2}v(k)]\\
&\quad +[-a_3q^{-3}y(k)+b_3q^{-3}u(k)+c_3q^{-3}v(k)]\\
&\quad +[-a_4q^{-4}y(k)+b_4q^{-4}u(k)+c_4q^{-4}v(k)]+v(k)\\
&= v(k)+q^{-1}\{[-a_1y(k)+b_1u(k)+c_1v(k)]\\
&\qquad +q^{-1}\{[-a_2y(k)+b_2u(k)+c_2v(k)]\\
&\qquad\quad +q^{-1}\{[-a_3y(k)+b_3u(k)+c_3v(k)]\\
&\qquad\qquad +q^{-1}[-a_4y(k)+b_4u(k)+c_4v(k)]\}\}\}
\end{aligned}$$

令：

$$\begin{cases}
x_4(k) = q^{-1}[-a_4y(k)+b_4u(k)+c_4v(k)]\\
x_3(k) = q^{-1}\{[-a_3y(k)+b_3u(k)+c_3v(k)]+x_4(k)\}\\
x_2(k) = q^{-1}\{[-a_2y(k)+b_2u(k)+c_2v(k)]+x_3(k)\}\\
x_1(k) = q^{-1}\{[-a_1y(k)+b_1u(k)+c_1v(k)]+x_2(k)\}\\
y(k) = v(k)+x_1(k)
\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}
x_4(k+1) = -a_4y(k)+b_4u(k)+c_4v(k)\\
x_3(k+1) = -a_3y(k)+b_3u(k)+c_3v(k)+x_4(k)\\
x_2(k+1) = -a_2y(k)+b_2u(k)+c_2v(k)+x_3(k)\\
x_1(k+1) = -a_1y(k)+b_1u(k)+c_1v(k)+x_2(k)\\
y(k) = v(k)+x_1(k)
\end{cases}$$

将上式中的最后一个等式代入到前四个等式中，有：

$$\begin{cases}
x_1(k+1) = -a_1v(k)-a_1x_1(k)+b_1u(k)+c_1v(k)+x_2(k)\\
x_2(k+1) = -a_2v(k)-a_2x_1(k)+b_2u(k)+c_2v(k)+x_3(k)\\
x_3(k+1) = -a_3v(k)-a_3x_1(k)+b_3u(k)+c_3v(k)+x_4(k)\\
x_4(k+1) = -a_4v(k)-a_4x_1(k)+b_4u(k)+c_4v(k)\\
y(k) = x_1(k)+v(k)
\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}
x_1(k+1) = -a_1x_1(k)+x_2(k)+b_1u(k)+(c_1-a_1)v(k)\\
x_2(k+1) = -a_2x_1(k)+x_3(k)+b_2u(k)+(c_2-a_2)v(k)\\
x_3(k+1) = -a_3x_1(k)+x_4(k)+b_3u(k)+(c_3-a_3)v(k)\\
x_4(k+1) = -a_4x_1(k)+b_4u(k)+(c_4-a_4)v(k)\\
y(k) = x_1(k)+v(k)
\end{cases}$$

上式等价于

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\x_3(k+1)\\x_4(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1&1&0&0\\-a_2&0&1&0\\-a_3&0&0&1\\-a_4&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\\x_4(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\\c_4-a_4\end{bmatrix}\nu(k)\\ y(k)=[1\ 0\ 0\ 0]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\\x_4(k)\end{bmatrix}+\nu(k)\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}X(k+1)=\begin{bmatrix}-a_1&1&0&0\\-a_2&0&1&0\\-a_3&0&0&1\\-a_4&0&0&0\end{bmatrix}X(k)+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\\c_4-a_4\end{bmatrix}\nu(k)\triangleq A_0X(k)+B_0U(k)+L_0\nu(k)\\ y(k)=[1\ 0\ 0\ 0]\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\x_3(k)\\x_4(k)\end{bmatrix}+\nu(k)\triangleq C_0X(k)+\nu(k)\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}X(k+1)=A_0X(k)+B_0U(k)+L_0\nu(k)\\ y(k)=C_0X(k)+\nu(k)\end{cases}$$

其中，

$$A_0=\begin{bmatrix}-a_1&1&0&0\\-a_2&0&1&0\\-a_3&0&0&1\\-a_4&0&0&0\end{bmatrix},\ B_0=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix},\ L_0=\begin{bmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_3\\c_4-a_4\end{bmatrix},\ C_0=[1\ 0\ 0\ 0].$$

假定系统模型能写为

$$
\begin{aligned}
&(1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+a_3q^{-3}+a_4q^{-4})e(k)\\
=&(b_1q^{-1}+b_2q^{-2}+b_3q^{-3}+b_4q^{-4})u(k)-(1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+a_3q^{-3}+a_4q^{-4})y_r(k)\\
&+(1+c_1q^{-1}+c_2q^{-2}+c_3q^{-3}+c_4q^{-4})v(k)
\end{aligned}
$$

记$z(k)=y_r(k+1)$，则上述系统模型能被进一步写为

$$
\begin{aligned}
&(1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+a_3q^{-3}+a_4q^{-4})e(k)\\
=&(b_1q^{-1}+b_2q^{-2}+b_3q^{-3}+b_4q^{-4})u(k)-(q^{-1}+a_1q^{-2}+a_2q^{-3}+a_3q^{-4}+a_4q^{-5})z(k)\\
&+(1+c_1q^{-1}+c_2q^{-2}+c_3q^{-3}+c_4q^{-4})v(k)
\end{aligned}
$$

故：

$$
\begin{aligned}
e(k)=&(-a_1q^{-1}-a_2q^{-2}-a_3q^{-3}-a_4q^{-4})e(k)\\
&+(b_1q^{-1}+b_2q^{-2}+b_3q^{-3}+b_4q^{-4})u(k)\\
&-(q^{-1}+a_1q^{-2}+a_2q^{-3}+a_3q^{-4}+a_4q^{-5})z(k)\\
&+(1+c_1q^{-1}+c_2q^{-2}+c_3q^{-3}+c_4q^{-4})v(k)\\
=&[-a_1q^{-1}e(k)+b_1q^{-1}u(k)-q^{-1}z(k)+c_1q^{-1}v(k)]\\
&+[-a_2q^{-2}e(k)+b_2q^{-2}u(k)-a_1q^{-2}z(k)+c_2q^{-2}v(k)]\\
&+[-a_3q^{-3}e(k)+b_3q^{-3}u(k)-a_2q^{-3}z(k)+c_3q^{-3}v(k)]\\
&+[-a_4q^{-4}e(k)+b_4q^{-4}u(k)-a_3q^{-4}z(k)+c_4q^{-4}v(k)]-a_4q^{-5}z(k)+v(k)\\
=&v(k)+q^{-1}\{[-a_1e(k)+b_1u(k)-z(k)+c_1v(k)]\\
&+q^{-1}\{[-a_2e(k)+b_2u(k)-a_1z(k)+c_2v(k)]\\
&+q^{-1}\{[-a_3e(k)+b_3u(k)-a_2z(k)+c_3v(k)]\\
&+q^{-1}\{[-a_4e(k)+b_4u(k)-a_3z(k)+c_4v(k)]\\
&+q^{-1}[-a_4z(k)]\}\}\}\}
\end{aligned}
$$

令：

$$
\begin{cases}
x_5(k)=q^{-1}[-a_4z(k)]\\
x_4(k)=q^{-1}[-a_4e(k)+b_4u(k)-a_3z(k)+c_4v(k)+x_5(k)]\\
x_3(k)=q^{-1}\{[-a_3e(k)+b_3u(k)-a_2z(k)+c_3v(k)]+x_4(k)\}\\
x_2(k)=q^{-1}\{[-a_2e(k)+b_2u(k)-a_1z(k)+c_2v(k)]+x_3(k)\}\\
x_1(k)=q^{-1}\{[-a_1e(k)+b_1u(k)-z(k)+c_1v(k)]+x_2(k)\}\\
e(k)=v(k)+x_1(k)
\end{cases}
$$

即：

$$
\begin{cases}
x_5(k+1)=-a_4z(k)\\
x_4(k+1)=-a_4e(k)+b_4u(k)-a_3z(k)+c_4v(k)+x_5(k)\\
x_3(k+1)=-a_3e(k)+b_3u(k)-a_2z(k)+c_3v(k)+x_4(k)\\
x_2(k+1)=-a_2e(k)+b_2u(k)-a_1z(k)+c_2v(k)+x_3(k)\\
x_1(k+1)=-a_1e(k)+b_1u(k)-z(k)+c_1v(k)+x_2(k)\\
e(k)=v(k)+x_1(k)
\end{cases}
$$

将上式中的最后一个等式代入前四个等式有：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -a_1 x_1(k) + x_2(k) + b_1 u(k) + (c_1 - a_1)\nu(k) - z(k) \\ x_2(k+1) = -a_2 x_1(k) + x_3(k) + b_2 u(k) + (c_2 - a_2)\nu(k) - a_1 z(k) \\ x_3(k+1) = -a_3 x_1(k) + x_4(k) + b_3 u(k) + (c_3 - a_3)\nu(k) - a_2 z(k) \\ x_4(k+1) = -a_4 x_1(k) + x_5(k) + b_4 u(k) + (c_4 - a_4)\nu(k) - a_3 z(k) \\ x_5(k+1) = -a_4 z(k) \\ e(k) = \nu(k) + x_1(k) \end{cases}$$

上式等价于

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \\ c_4 - a_4 \\ 0 \end{bmatrix} \nu(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ -a_4 \end{bmatrix} z(k) \\ e(k) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} + \nu(k) \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} X(k+1) = A_0 X(k) + B_0 U(k) + L_0 \nu(k) + D_0 y_r(k+1) \\ e(k) = C_0 X(k) + \nu(k) \end{cases}$$

其中，

$$A_0 = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ 0 \end{bmatrix},\ L_0 = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \\ c_4 - a_4 \\ 0 \end{bmatrix},\ D_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ -a_4 \end{bmatrix},\ C_0 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0].$$