

# 自适应控制 第三章作业

1. 联系：LQ和LQG都基于最优控制理论，以二次性能指标最小化为基础，使系统在任意初始条件下的状态转移到原点，两者都适用于线性系统，LQ是LQG最优控制的基础。

区别：LQ控制适用于状态变量已知的系统，或可以精确的获得系统模型估计和状态估计的系统。

LQG控制适用于随机控制系统，系统受到过程扰动及输出噪声的干扰，可观测的数据会因干扰和噪声的影响而不准确，所以这类系统需重构状态。

2.  $X(k+1) = AX(k) + BU(k) \quad X(0) = X_0$

① 借助拉格朗日乘子入，构造一个联系目标函数和等式约束条件的拉格朗日函数

$$J_1 = X^T(N) Q_0 X(N) + \sum_{i=0}^{N-1} [X^T(i) Q X(i) + U^T(i) R U(i)] + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^T(i+1) [AX(i) + BU(i) - X(i+1)] \\ = X^T(N) Q_0 X(N) - 2 \lambda^T(N) X(N) + \sum_{i=1}^{N-1} [\lambda^T(i) - 2 \lambda^T(i+1)] X(i) + H(0)$$

式中  $H(k) = X^T Q X + U^T R U + 2 \lambda^T(k+1) [AX + BU]$

求上式的极值  $\frac{\partial J_1}{\partial X(k)} = 2QX(k) + 2A^T \lambda(k+1) - 2\lambda(k) = 0$

$$\frac{\partial J_1}{\partial U(k)} = 2RU(k) + 2B^T \lambda(k+1) = 0$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \lambda(k+1)} = 2AX(k) + 2BU(k) - 2X(k+1) = 0$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial X(N)} = 2Q_0 X(N) - 2\lambda(N) = 0$$

选定  $Q_0$ ,  $R$  和  $Q$  值。

② 计算  $S(N)$  和  $S(k)$ :  $S(N) = Q_0$

$$S(k) = Q + A^T S(k+1) [I + BR^{-1} B^T S(k+1)]^{-1} A$$

③ 计算  $k(k)$ :  $k(k) = R^{-1} B^T A^{-1} [S(k) - Q]$

④ 读取状态  $X(k)$

⑤ 计算控制律  $U(k)$ :  $U(k) = -k(k) X(k) = -R^{-1} B^T A^{-1} [S(k) - Q] X(k)$

⑥  $k \leftarrow k+1$  转④

$$3. \text{ 系统: } \begin{cases} X(k+1) = AX(k) + BU(k) \\ y(k) = CX(k) \end{cases} \quad ①$$

$$\begin{aligned} \text{观测器状态方程: } \hat{X}(k+1) &= A\hat{X}(k) + BU(k) + H\hat{y}(k) \\ &= A\hat{X}(k) + BU(k) + H[y(k) - \hat{y}(k)] \\ &= (A - HC)\hat{X}(k) + BU(k) + Hy(k) \quad ② \end{aligned}$$

$$\text{状态预测估计误差: } \tilde{X}(k+1) = X(k+1) - \hat{X}(k+1) \quad ③$$

$$\begin{aligned} \text{结合 } ①② \text{ 可得状态误差: } \tilde{X}(k+1) &= AX(k) + BU(k) - [(A - HC)\hat{X}(k) + BU(k) + Hy(k)] \\ &= AX(k) - (A - HC)\hat{X}(k) - HCX(k) \\ &= (A - HC)X(k) - (A - HC)\hat{X}(k) \\ &= (A - HC)\tilde{X}(k) \end{aligned}$$

求观测器的特征方程, 使其根落在单位圆内。

$$\det[zI - A + HC] = 0.$$

4. 线性二次型高斯控制问题, 需设计 LQG 控制器, 设计任务分为两步:

- ① 通过采用滤波器将随机扰动和测量噪声消除, 进行状态预测和估计
- ② 根据所估计的状态进行最优控制器的设计

理论依据: 分离定理: 对于具有干扰和噪声的系统的控制策略可分两步完成: 最优估计与最优控制。最优估计只决定于系统方程和不确定性  $V, N$  及  $P(0)$ , 与控制无关; 而最优控制只决定于系统方程和性能指标中的加权矩阵  $Q_0, Q$  和  $R$ , 与系统的扰动及噪声无关。因此, 只要系统方程和矩阵  $P(0), V, N, Q_0, Q$  和  $R$  给定, 估计和控制可以独立地分别进行设计, LQG 系统具有这种分离特性。

$$5. u) \begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + 1.9q^{-1} + 0.9q^{-2} \\ B(q^{-1}) = 1 + 2.5q^{-1} \\ C(q^{-1}) = 1 - 0.5q^{-1} \end{cases} \quad d=1$$

可观标准型为  $\begin{cases} x(k+1) = A_0 x(k) + B_0 u(k) + L_0 v(k) + D_0 y_r(k+1) \\ e(k) = C_0 x(k) + v(k) \end{cases}$

其中  $n = \max(\deg A, \deg B+d, \deg C) = 2$   $\dim(x) = n+d=3$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1.9 & 1 & 0 \\ -0.9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_0 = [1, 0, 0] \quad D_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.9 \\ -0.9 \end{bmatrix} \quad L_0 = \begin{bmatrix} -2.4 \\ -0.9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 反馈控制律:  $u(k) = -k_u(k) \hat{x}(k)$

其中:  $k_u(k) = [R + B_0^T S(k+1) B_0]^{-1} B_0^T S(k+1) A_0$

$$S(k) = Q + A_0^T S(k+1) \{I - B_0[R + B_0^T S(k+1) B_0]^{-1} B_0^T S(k+1)\} A_0$$

$$S(N) = Q_0 = C_0^T C_0 = Q$$

状态的最优预测方程:  $\hat{x}^*(k+1) = A_0 \hat{x}(k) + B_0 u(k) + D_0 y_r(k+1)$

相应的估计状态:  $\hat{x}(k) = \hat{x}^*(k) + k_f [e(k) - C_0 \hat{x}^*(k)]$

$$6. u) \begin{cases} A(q^{-1}) = 1 - 2.8q^{-1} + 1.2q^{-2} \\ B(q^{-1}) = 1 + 1.5q^{-1} \\ C(q^{-1}) = 1 - 0.6q^{-1} \end{cases} \quad d=1$$

可观标准型为  $\begin{cases} x(k+1) = A_0 x(k) + B_0 u(k) + L_0 v(k) + D_0 y_r(k+1) \\ e(k) = C_0 x(k) + v(k) \end{cases}$

其中  $n = \max(\deg A, \deg B+d, \deg C) = 2$   $\dim(x) = n+d=3$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2.8 & 1 & 0 \\ -1.2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_0 = [1, 0, 0] \quad D_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2.8 \\ -1.2 \end{bmatrix} \quad L_0 = \begin{bmatrix} 2.2 \\ -1.2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) 反馈控制律:  $u(k) = -k_u(k) \hat{x}(k)$

其中  $k_u(k)$  和  $\hat{x}(k)$  的求解同上。

```



---


clear;
format long;

% 定义常量和矩阵
a1=-0.3874; a2=0.2491 ; a3=0.0336;
b1=1.9356 ; b2=-0.5524; b3=0.2929;
c1=0.0987 ; c2=0.0409 ; c3=0.0793;
a=[a1,a2,a3]';
c=[c1,c2,c3]';

% 定义系统矩阵 A0、B0、C0、D0 和观测增益 L0
A0=[ -a1,1,0,0;
      -a2,0,1,0;
      -a3,0,0,1;
      0,0,0,0];
B0=[b1,b2,b3,0]';
C0=[1,0,0,0];
D0=[-1;-a];
L0=[c-a;0];

% 定义 LQR 权重矩阵和计算反馈增益 Ku:
Q=C0'*C0;
R=1;
Kf=[1;c];
[Ku,S,Eu]=dlqr(A0,B0,Q,R);

% 初始化变量
N=5000; % 仿真步数
y=zeros(N,1); % 输出信号
u=zeros(N,1); % 控制输入
v=0.05*randn(N,1); % 噪声
xBar=0.1*randn(4,1); % 初始状态估计
ABar=A0-L0*C0; % 修正后的系统矩阵
e=zeros(N,1); % 误差

for k=4:N
    yr(k)=sin(0.0005*pi*k); % 目标信号
    yyr=sin(0.0005*pi*(k+1)); % 下一步的目标信号
    xHat=xBar+Kf*(e(k)-C0*xBar); % 状态估计
    u(k)=-Ku*xHat; % 计算控制输入
    xBar=ABar+B0*u(k)+D0*yyr; % 系统状态更新
    e(k)=C0*xHat+v(k); % 估计误差
    y(k)=yr(k)+e(k); % 输出信号
end

plot(y,'r'); % 红色显示输出信号
hold on
plot(yr,'b','LineWidth', 2); % 蓝色显示目标信号
plot(e,'g'); % 绿色显示误差
% 添加图例和标题
legend('输出信号 (y)', '目标信号 (yr)', '误差 (e)');
title('输出信号、目标信号和误差随时间的变化');
xlabel('时间步长');
ylabel('信号值');

```

