相关白噪声的情况

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Lv(k) \tag{1}$$

$$y(k) = Cx(k) + n(k) \tag{2}$$

$$\hat{x}(k) = x^*(k) + K(k)[y(k) - Cx^*(k)] \tag{3}$$

$$x^*(k) = A\hat{x}(k-1) + Bu(k-1) \tag{4}$$

$$E\left(v(k)n^T(j)\right) = M\delta_{kj} \tag{5}$$

为了使用标准卡尔曼滤波的结果，我们需要对（1）和（2）式描述的系统变换为过程噪声和量测噪声不相关的系统。将（1）和（2）式合并写为：

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Lv(k) + J(k)[y(k) - Cx(k) - n(k)] \\ &= [A - J(k)C]x(k) + Bu(k) + J(k)y(k) + [Lv(k) - J(k)n(k)] \\ &\triangleq A^{\#}x(k) + Bu(k) + J(k)y(k) + v^{\#}(k) \end{aligned} \tag{6}$$

其中，$J(k)$为待定的$n \times l$矩阵，

$$A^{\#} = A - J(k)C \tag{7}$$

$$v^{\#}(k) = Lv(k) - J(k)n(k) \tag{8}$$

令

$$Bu(k) + J(k)y(k) \triangleq B^{\#}u^{\#}(k) \tag{9}$$

则式(6)变为：

$$x(k+1) = A^{\#}x(k) + B^{\#}u^{\#}(k) + v^{\#}(k) \tag{10}$$

现在，确定$J(k)$使式(10)的过程噪声$v^{\#}(k)$满足：

$$E[v^{\#}(k)] = 0, \qquad E\left[x(0){v^{\#}}^{\mathrm{T}}(k)\right] = 0, \qquad E[v^{\#}(k)n^{\mathrm{T}}(j)] = 0$$

事实上，由假设$E[v(k)] = 0, E[n(k)] = 0, E[x(0)v^{\mathrm{T}}(k)] = 0, E[x(0)n^{\mathrm{T}}(k)] = 0$可得到前两个结果。对第三个结果，有：

$$\begin{aligned} E[v^{\#}(k)n^{\mathrm{T}}(j)] &= E\{[Lv(k) - J(k)n(k)]n^{\mathrm{T}}(j)\} \\ &= [LM - J(k)N]\delta_{jk} \end{aligned}$$

要使上式为 0，$J(k)$应为：

$$J(k) = LMN^{-1} \tag{11}$$

这样，对比(3)和(4)式，可得(10)和(2)式构成的系统的滤波方程和预测方程为：

$$\hat{x}(k) = x^*(k) + K(k)[y(k) - Cx^*(k)] \tag{12}$$

$$x^*(k) = A^{\#}\hat{x}(k-1) + B^{\#}u^{\#}(k-1) \tag{13}$$

其它公式为：

$$P^*(k)=A^\#\hat{P}(k)A^{\#^{\mathrm{T}}}+L^\#V^\#L^{\#^{\mathrm{T}}} \tag{14}$$

$$\hat{P}(k)=[I-K(k)C]P^*(k) \tag{15}$$

$$K(k)=P^*(k)C^{\mathrm{T}}[CP^*(k)C^{\mathrm{T}}+N]^{-1} \tag{16}$$

其中，$L^\#=I,V^\#=E\left[v^\#(k)v^{\#^{\mathrm{T}}}(k)\right]$

初始条件为：$\hat{x}(0)=E[x(0)],\hat{P}(0)=Var[x(0)]$

为了使用系统自身的量，需要进一步去掉(13)和(14)中的#号，由式(8)得：

$$\begin{aligned}V^\#=E\left[v^\#(k)v^{\#^{\mathrm{T}}}(k)\right]&=LVL^T-J(k)M^TL^T-LMJ^T(k)+J(k)NJ^T(k)\\&=LVL^T-J(k)NJ^T(k)\end{aligned} \tag{17}$$

第三个等式成立是因为：$N^T=N$，$J(k)N=LM$。

于是，式(13)和(14)变为

$$\begin{aligned}x^*(k)&=[A-J(k-1)C]\hat{x}(k)+Bu(k-1)+J(k-1)y(k-1)\\&=\mathrm{A}\hat{x}(k-1)+Bu(k-1)+J(k-1)[y(k-1)-C\hat{x}(k-1)]\end{aligned} \tag{18}$$

$$P^*(k)=[A-J(k-1)C]\hat{P}(k-1)[A-J(k-1)C]^T+LVL^T-J(k-1)NJ^T(k-1) \tag{19}$$

这样，相关噪声序列下的离散时间系统的卡尔曼滤波公式为：

状态方程：$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+Lv(k)$

观测方程：$y(k)=Cx(k)+n(k)$

滤波方程：$\hat{x}(k)=x^*(k)+K(k)[y(k)-Cx^*(k)]$ ，$k\geq 1$

预测方程：$x^*(k)=A\hat{x}(k-1)+Bu(k-1)+J(k-1)[y(k-1)-C\hat{x}(k-1)]$ ，$k\geq 1$

滤波增益矩阵方程：$K(k)=P^*(k)C^{\mathrm{T}}[CP^*(k)C^{\mathrm{T}}+N]^{-1}$，$k\geq 1$

滤波误差协方差阵方程：$\hat{P}(k)=[I-K(k)C]P^*(k)$，$k\geq 1$

预测误差协方差阵方程：

$P^*(k)=[A-J(k-1)C]\hat{P}(k-1)[A-J(k-1)C]^T+LVL^T-J(k-1)NJ^T(k-1)$，$k\geq 1$

初始条件：$\hat{x}(0)=E[x(0)],\hat{P}(0)=Var[x(0)]$

其中，$J(k)=LMN^{-1}$