



Mia V. Ángulo (2181874) Sharon T. Navarro (2180650)

*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander  
Ciudad Universitaria, Cra. 27 #9, Bucaramanga, Santander, Colombia*

Lunes 29 de junio de 2020

**Abstract:** El concepto de oscilación es importante en física ya que a partir de éste es posible estudiar muchos fenómenos físicos, tanto en la física clásica como en la mecánica cuántica. En particular, el comportamiento de los circuitos eléctricos puede ser explicado de acuerdo con la teoría de osciladores, donde aparece un importante concepto: *resonancia*. En el presente informe se estudian las oscilaciones eléctricas de un circuito RLC en donde se estudia el factor de calidad y la frecuencia de resonancia en función de la magnitud de sus elementos. .

”Nada en la vida debe ser temido, solamente  
comprendido. Ahora es el momento de  
comprender más para temer menos ”

*Marie Curie.*

## 1 Marco teórico

A lo largo del estudio de la física, se cursan diversas asignaturas, como óptica, electricidad, mecánica, etc. En estas asignaturas se observan los distintos comportamientos y propiedades de la materia, la energía y las interacciones fundamentales en la naturaleza. A menudo, en la naturaleza se observan algunos movimientos que tienden a repetirse a intervalos iguales, denominados **movimientos periódicos**, tal es el caso de una masa suspendida de un resorte, el movimiento del péndulo de un reloj o las vibraciones sonoras producidas por un instrumento.

Generalmente, el movimiento periódico de un cuerpo se caracteriza por una **posición de equilibrio estable** debido a que el cuerpo regresa regularmente a esta posición después de un intervalo de tiempo fijo. Una clase especial de movimiento periódico se da cuando hay una fuerza actuante  $\mathbf{F}$  en el cuerpo que es *proporcional* a la posición  $\mathbf{x}$  dada del cuerpo con respecto a su posición de equilibrio estable (ecuación 3). A esta clase de movimiento se le llama **movimiento armónico simple** teniendo en cuenta como primera medida que los desplazamientos con respecto al equilibrio son **pequeños** y, la fuerza ejercida se denomina *fuerza de restitución* tal que:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} \quad (1)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{k}{m}\mathbf{x} \quad (2)$$

(3)

Además, la frecuencia  $f$ , el periodo  $T$  y la frecuencia angular  $\omega$  en este movimiento dependen de la constante de fuerza  $k$  y de la masa  $m$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ f &= \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ T &= \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

Entre las características del movimiento armónico simple se encuentra que la velocidad, el desplazamiento y la aceleración son funciones sinusoidales del tiempo, en donde la amplitud  $A$  y el desfase  $\phi$  vienen dados por las posición y velocidad inicial del cuerpo (ver ecuaciones 8). Entonces,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (4)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (5)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (6)$$

Según lo anteriormente mencionado, para considerar la posición y velocidad inicial del cuerpo, se toma (4) y (5) evaluadas en  $t = 0$  de tal manera que se tenga lo siguiente:

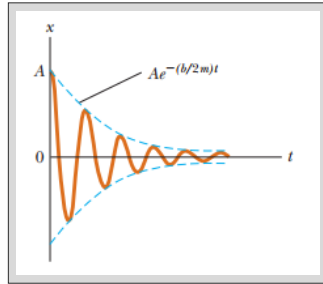
$$x(0) = A \cos(\omega_0 t + \phi) = 0 \quad (7)$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (8)$$

### 1.1 Oscilaciones amortiguadas

Se le llama **oscilación amortiguada** si a un oscilador armónico se le imprime una fuerza adicional la cual es proporcional a la velocidad  $\mathbf{F} = -b$  (siendo  $b$  una constante llamada *coeficiente de amortiguamiento*). En la figura 1 se puede notar la disminución en la amplitud en el tiempo que se da en un oscilador amortiguado.

Figure 1: Posición en función del tiempo para un **oscilador amortiguado**



Fuente:[2]

Tras expresar la ecuación de movimiento con esta fuerza adicional, su solución queda descrita como se muestra en la ecuación (9):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A e^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t + \phi) \quad (9)$$

donde la frecuencia angular de la **oscilación amortiguada** es la raíz de la frecuencia natural  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  al cuadrado menos  $\gamma = b/2m$  al cuadrado. A continuación se muestra la ecuación de la frecuencia amortiguada

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (10)$$

Si  $b < 2\sqrt{km}$  se tiene un **movimiento subamortiguado** ya que el sistema oscila con una amplitud decreciente y una frecuencia amortiguada  $\omega'$  que es más baja que la frecuencia natural  $\omega_0$ .

En cambio, si  $b = 2\sqrt{km}$  se tiene un **movimiento de amortiguamiento crítico** y, si el medio es muy viscoso tal que  $b > 2\sqrt{km}$  se tiene un **movimiento sobre amortiguado**. Para ambos casos se da que el sistema no oscila sino que sólo regresa a su posición de equilibrio estable.

### 1.2 Oscilaciones forzadas

Ahora, si a un oscilador armónico amortiguado interviene una fuerza impulsora de forma sinusoidal  $F(t) = F_{máx} \cos(\omega_f t)$ , se tiene una **oscilación forzada**. Aquí, la amplitud estará en función de la frecuencia forzada  $\omega_f$ , tal que

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - \omega_f^2)^2 + b^2 \omega_f^2}} \quad (11)$$

$A$  tiene un máximo cerca de  $\omega_f = \sqrt{k/m}$ . Si  $k - m\omega_f^2 = 0$ . Ahora, si  $\omega_f = 0$  entonces  $A = F_{máx}/k$ .

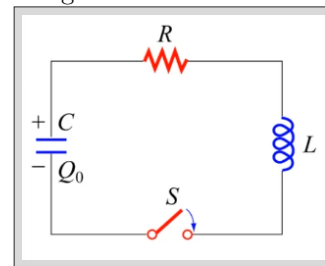
La **resonancia** indica el aumento de la amplitud cuando la frecuencia por parte de una fuerza externa es cercana a la frecuencia natural  $\omega_0$ , tal que  $\omega_{(ext)} \approx \omega_0$ .

Además, el **factor de calidad  $Q$** , viene dado por la siguiente expresión:

$$Q = \frac{\omega}{2\gamma}$$

### 1.3 Oscilador eléctrico

Figure 2: Circuito RLC



Fuente:[3]

En el anterior circuito se tiene una resistencia  $R$ , un capacitor  $C$ , un inductor  $L$  y un interruptor  $S$ . Escribiendo la ecuación matemática de este circuito, se tiene:

$$\frac{q}{C} + IR + L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (12)$$

En donde, si dejamos todo en función de la carga  $q$ , se tiene que la ecuación (1.3) es de la misma

forma que la ecuación (1.1), por lo que se asemeja al oscilador mecánico.

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (13)$$

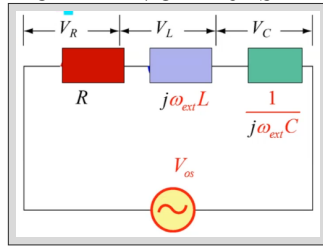
$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (14)$$

$$(15)$$

Teniendo en cuenta que,  $2\gamma = R/L$  y  $\omega_0^2 = 1/LC$ .

Para un sistema forzado en el que  $V_s = V_{(os)} \sin(\omega_{(ext)}t + \phi)$  se tiene que va a oscilar con la frecuencia externa o bien,  $\omega_{(ext)}$ . Resolvemos el circuito dejando todo en términos de impedancias, tal como lo muestra la figura 3 y se muestran la ecuación diferencial del circuito con su respectiva solución.

Figure 3: Circuito en términos de impedancias, RESONANCIA DE VOLTAJES



Fuente:[3]

$$IR + j\omega_{(ext)}LI + \frac{1}{j\omega_{(ext)}C}I = V_{(os)} \quad (16)$$

Entonces, I es:

$$I = \frac{V_{(os)}}{R + j(\omega_{(ext)}L - \frac{1}{\omega_{(ext)}C})} \quad (17)$$

La frecuencia resonante para un oscilador eléctrico es:

$$\omega_{(ext)} \approx \omega_0 = \sqrt{1/LC} \quad (18)$$

El factor de calidad  $Q$  es un indicador de cuanta energía se almacena con respecto a la disipada, en donde está dado por:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{q}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (19)$$

## 2 Objetivos

### 2.1 Objetivo general

Estudiar el fenómeno de las oscilaciones mecánicas y eléctricas.

### 2.2 Objetivos específicos

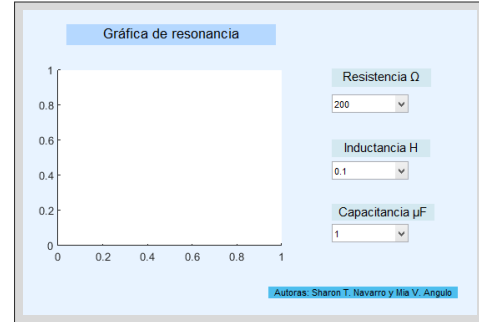
- Comprender el fenómeno de resonancia a partir de un circuito eléctrico RLC.
- Visualizar el comportamiento de este circuito a partir de la variación en la magnitud de los elementos que lo componen.
- Entender el sentido físico del *factor de calidad* en una oscilación forzada.

## 3 Metodología

El procedimiento para realizar la práctica virtual 5 del laboratorio de ondas (oscilaciones) se dividió en 3 etapas que se explican a continuación:

1. En primera instancia, se estudian los osciladores eléctricos y mecánicos y el fenómeno de resonancia.
2. En segundo lugar, se realizó el esquema de la simulación con el comando *guide* en MATLAB; se insertaron 3 *popupmenu* con el objetivo de variar los valores de resistencia, inductancia y capacitancia y visualizar estos cambios en la gráfica de la derecha (ver figura 4), y así observar el comportamiento de un circuito RLC (ver figura x)

Figure 4: Simulación



Fuente:

3. Por último se analizaron las gráficas arrojadas por la simulación, teniendo en cuenta la variación de las magnitudes de los elementos del circuito, el fenómeno de la resonancia y factor de calidad.

## 4 Tratamiento de datos

En esta sección se muestran las gráficas obtenidas mediante la simulación, también se observan las tablas con los valores de resistencia, inductancia, capacitancia, factor de calidad y el valor de  $\omega$  para el cual la corriente se hace máxima. El voltaje  $V_{os}$  en esta ocasión se le dio el valor de 1 [V].

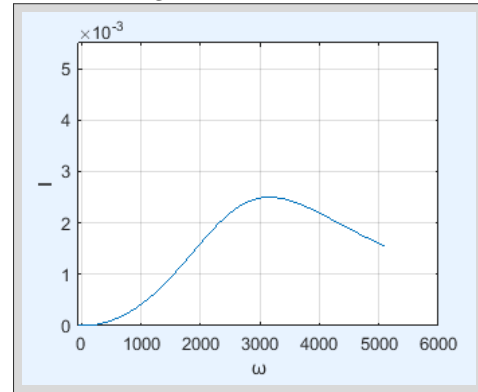
La primera tabla muestra los valores de inductancia  $L$  en  $H$  y capacitancia  $C$  en  $\mu F$  constantes y se cambia el valor de resistencia en unidades de  $\Omega$ . En las gráficas se puede visualizar la *curva de resonancia* (corriente en función de la

frecuencia externa) a partir de los cambios que se generan al variar en magnitud a  $R$ .

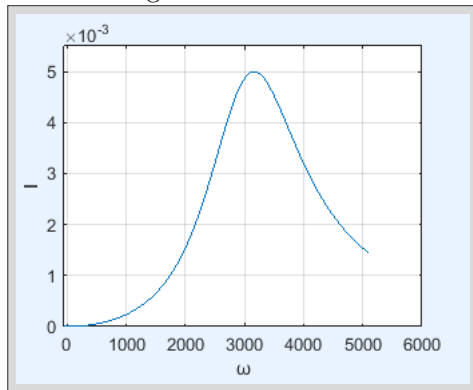
Table 1: Resistencia variable

R	L	C	Factor de calidad	$\omega$
200	0.1	1	1.5811	3165
300			1.0541	3165
400			0.7906	3165
500			0.6325	3165

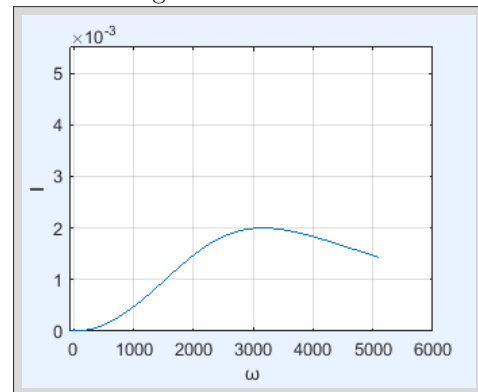
Fuente:Autoras

Figure 7:  $R = 400 \Omega$ 

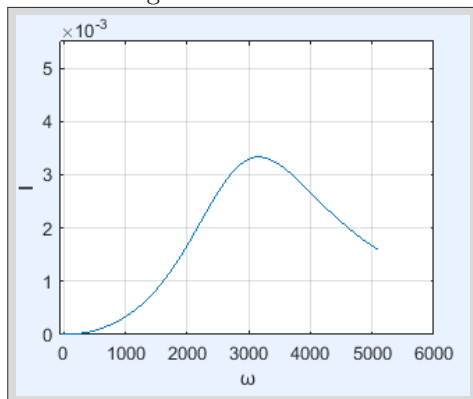
Fuente:Autoras

Figure 5:  $R = 200 \Omega$ 

Fuente:Autoras

Figure 8:  $R = 500 \Omega$ 

Fuente:Autoras

Figure 6:  $R = 300 \Omega$ 

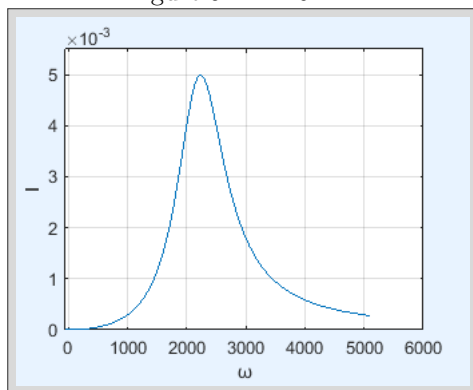
Fuente:Autoras

En la segunda tabla se muestran los valores de resistencia  $\mu F$  y capacitancia  $C$  en  $\mu F$  constantes y se cambia el valor de la inductancia  $L$  en unidades de  $H$ . En las gráficas se pueden visualizar los cambios en la curva que se generan al variar en magnitud a  $L$ .

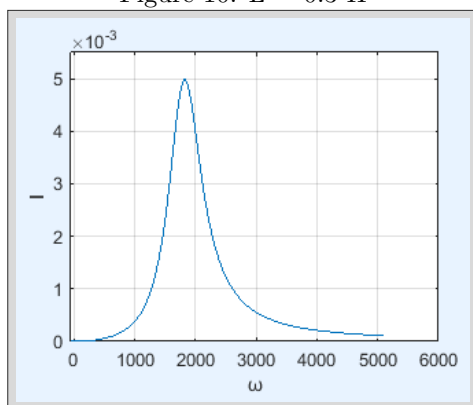
Table 2: Inductancia variable

R	L	C	Factor de calidad	$\omega$
200	0.1	1	1.5811	3165
	0.2		2.2361	2243
	0.3		2.7386	1821
	0.4		3.1623	1591

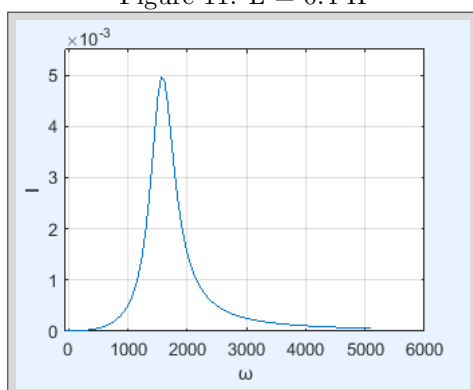
Fuente:Autoras

Figure 9:  $L = 0.2 \text{ H}$ 

Fuente:Autoras

Figure 10:  $L = 0.3 \text{ H}$ 

Fuente:Autoras

Figure 11:  $L = 0.4 \text{ H}$ 

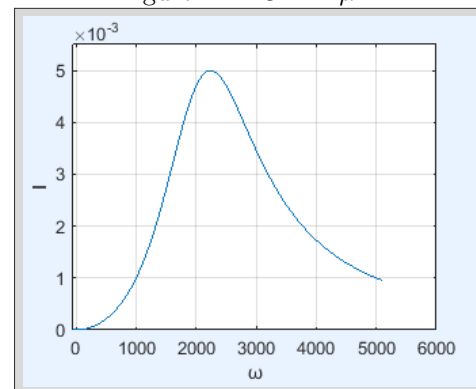
Fuente:Autoras

En la tercera tabla se muestran los valores de resistencia  $\mu F$  e inductancia  $L$  en unidades de  $H$  constantes y se cambia el valor de la capacitancia  $C$  en  $\mu F$ . En las gráficas se pueden visualizar los cambios en la curva que se generan al variar en magnitud a  $C$ .

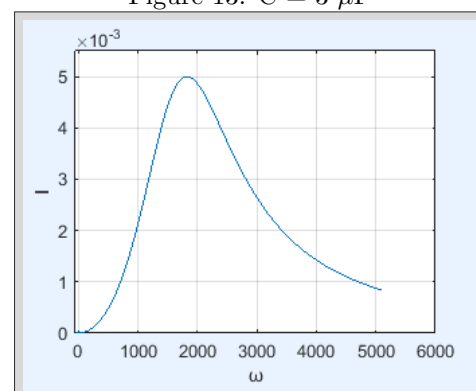
Table 3: Capacitancia variable

R	L	C	Factor de calidad	$\omega$
200	0.1	1	1.5811	3165
		2	1.1180	2243
		3	0.9129	1821
		4	0.7906	1591

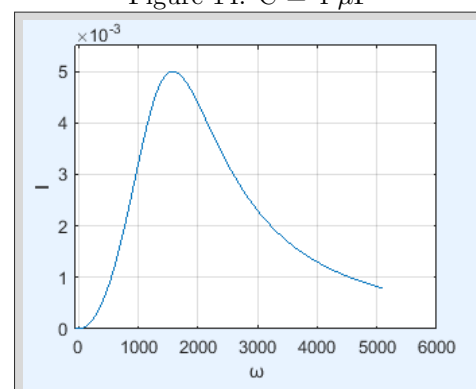
Fuente:Autoras

Figure 12:  $C = 2 \mu F$ 

Fuente:Autoras

Figure 13:  $C = 3 \mu F$ 

Fuente:Autoras

Figure 14:  $C = 4 \mu F$ 

Fuente:Autoras

En factor de calidad para los tres casos anteriores fueron hallados a partir de la ecuación 19.

Teóricamente, el valor máximo de la corriente se da cuando  $\omega = \omega_o$ , comparando los valores arrojados por la simulación y calculando el valor teórico tenemos las siguientes tablas:

Table 4: Primer caso

$\omega$	$\omega_o$	%error
3165	3162.3	0.0854
3165	3162.3	0.0854
3165	3162.3	0.0854
3165	3162.3	0.0854

Table 5: Segundo caso

$\omega$	$\omega_o$	%error
3165	3162.300	0.0854
2243	2236.070	0.310
1821	1825.742	0.260
1591	1581.140	0.624

Table 6: Tercer caso

$\omega$	$\omega_o$	%error
3165	3162.300	0.0854
2243	2236.070	0.310
1821	1825.742	0.260
1591	1581.140	0.624

## 5 Análisis de datos

A partir de los datos tabulados y los gráficos en la sección *tratamiento de datos* se proceden a analizar los datos.

**Primer caso:** En primera instancia, se dejó constante  $L$  y  $C$ , y se fueron cambiando las magnitudes de la resistencia. De la tabla 1 podemos observar, que a medida que se aumenta  $R$  el factor de calidad disminuye, es decir, se disipa más potencia en el sistema y por lo cual no se aprovecha de manera eficiente la energía entregada al circuito cuando se aumenta el factor  $R$ .

De la gráfica, se puede inferir que el máximo local de la curva va disminuyendo su valor, es decir, la corriente máxima  $I$  del circuito disminuye (esta es del orden de  $e-3$ ). Este valor máximo corresponde a un  $\omega = 3165$  para todos los  $R$  dados, y no varía ya que la frecuencia de resonancia NO depende de la resistencia, sino de la inductancia y la capacitancia (ver ecuación 18).

Es importante aclarar, que el factor de calidad está relacionado con el ancho de banda de la gráfica, sin embargo, no se logra ver claramente en este caso si esta se hace más estrecha o lo contrario.

**Segundo caso:** En segundo lugar, cuando se aumentan los valores de la inductancia  $L$  también hay un aumento del factor de calidad y se puede ver en el ancho de banda de cada gráfica, esta se vuelve cada vez más estrecha; sin embargo, el valor de la corriente se mantiene en el mismo valor así se incrementen estos valores y esto se puede observar en la gráfica.

El aumento del factor de calidad (para este caso) se le atribuye a que al aumentar la inductancia, el inductor puede soportar un mayor cambio en el voltaje sin disipar la energía que se entrega. Otra observación que vale la pena aclarar, es que el máximo se desplaza hacia la izquierda cada que  $L$  varía de forma creciente, es decir, la frecuencia de resonancia disminuye.

**Tercer caso:** Por último, al variar los valores de capacitancia de forma creciente, se disminuye el factor de calidad y el máximo de corriente se desplaza hacia la izquierda sin cambiar su valor en ningún caso. Se necesita una menor relación de ciclos por segundo para que el circuito entre en resonancia y se aproveche la mayor cantidad de energía para su funcionamiento.

En términos generales, los porcentajes de error

## 6 Conclusiones

En el primer caso, se logró observar en la tabla (1) que a medida que aumentamos los valores de resistencia y dejamos constantes  $L$  y  $C$ , el factor de calidad disminuye indicando que los niveles de energía disipada aumentan en comparación de la almacenada. Entonces, si se visualizan las figuras (5) y (7) para  $R = 200\Omega$  y  $R = 400\Omega$  respectivamente, los valores de corriente disminuyeron lustrando que efectivamente según la ecuación 17 depende de  $R$ , donde si  $R$  aumenta, el denominador será más grande por lo que la corriente disminuye. Además, estos valores de corriente disminuyeron para los **mismos valores de frecuencia**, entonces podemos comprobar también que concuerda con la ecuación 18 para la cual la frecuencia de resonancia solo depende de  $L$  y  $C$  los cuales permanecieron constantes dando como resultado que las frecuencias no cambiaron.

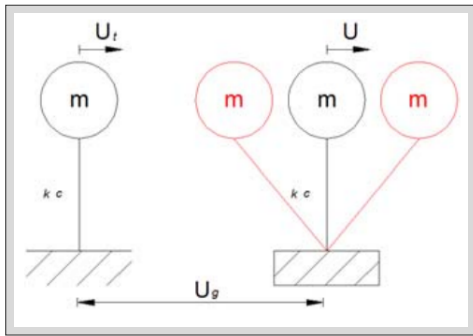
Para el segundo caso se comprobó que al aumentar los valores de inductancia, los valores de factor de calidad  $Q$  aumentaban mostrando que  $Q$  tiene una relación directamente proporcional con  $L$ , esta información nos dice que como se aumenta  $L$  el inductor proporciona menor energía disipada al soportar diferencias de voltajes. Si se ven las gráficas 9, 10 y 11, se ve que los máximos de corriente se desplazan hacia la izquierda indicando que como se variaron los valores de inductancia  $L$ , las frecuencias disminuyen. Entonces, se comprueba que la frecuencia tiene una relación inversamente proporcional con respecto a la

inductancia tal como lo muestra la ecuación 18.

En el tercer caso, se pudo concluir que al aumentar los valores la capacitancia  $C$ , los datos de  $Q$  disminuyeron, por lo que mantienen una relación inversa entonces se pudo probar la relación mostrada en la ecuación 19.

## 7 Aplicaciones

En la ingeniería estructural se consideran las ondas sísmicas en las estructuras con la finalidad de evaluar su comportamiento durante los eventos sísmicos. En los sismos, las ondas actúan como una fuerza oscilatoria externa ocasionando que la estructura se comporte como un péndulo invertido ( ver figura 7).



Fuente:[4]

Lo anterior hace que se produzcan tres fuerzas actuantes propias de la estructura, denominadas; fuerza de rigidez  $F_k$ , fuerza inercial  $F_i$  y la fuerza de amortiguamiento  $F_a$  mostradas en la ecuación 21. En la realidad, se tiene que las fuerzas de mayor magnitud corresponden a las fuerzas de rigidez dadas en respuesta al sismo.

$$F_{ext} = F_i + F_a + F_k \quad (20)$$

Entonces, la ecuación de movimiento se expresa como:

$$m\ddot{U} + c\dot{U} + kU = -m\ddot{U}_g \quad (21)$$

Finalmente, a la hora de diseñar la estructura es de vital importancia identificar la fuerza crítica y para esto tienen en cuenta la fuerza de rigidez ya que es esta la que tiene mayor magnitud entre todas.

## References

- [1] FREEDMAN, R. A., SEARS, F. W., YOUNG, H. D., ZEMANSKY, M. W. (2009). *Sears Zemansky Física universitaria Vol.2: Física universitaria* (No. 53). Addison-Wesley;.
- [2] RAYMOND. JEWETT, JOHN. (2008). *Física para Ciencias E Ingeniería: Volumen 1*, USA, Cengage Learning.
- [3] Diapositivas suministradas en clase. *Oscilaciones libres y forzadas*.
- [4] Análisis dinámico de estructuras *Diapositivas suministradas por:* Docente Maritzabel Molina Herrera, Bogotá, Universidad Nacional de Colombia (2020).