

Résolution probabiliste du problème de Dirichlet

COHEN David

DAYAN Sharone

Encadré par Mr Julien Reynnier

Objectifs & Éléments de théorie

• **Problème de Dirichlet** :
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u(x) = -g(x) & x \in D \\ u(x) = f(x) & x \in \partial D \end{cases}$$

• Représentation probabiliste :

Formule d'Itô =>
$$\forall x \in \bar{D}, \quad u(x) = \mathbb{E}[f(X_\tau^x) + \int_{t=0}^{t=\tau} g(X_t^x) dt]$$

où le processus $(X_t^x)_{t \geq 0}$ est un Mouvement Brownien standard issu de x et $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t^x \notin D\}$ (le temps de sortie du domaine D)

• **Méthode de Monte-Carlo** : On approche l'espérance mathématique par la moyenne empirique en simulant N trajectoires indépendantes du MB.

$$u^N(x) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [f(X_{\tau^i}^x) + \int_{t=0}^{t=\tau^i} g(X_t^x) dt]$$

- Convergence presque sûre garantie par la Loi des Grands Nombres
- Vitesse de convergence de l'ordre de \sqrt{N} par le Théorème de la Limite Centrale

• **Discretisation du MB** : On approche le MB par un processus $(\tilde{X}_t^x)_{t \geq 0}$ discontinu - à un pas $h > 0$ fixé - pour pouvoir simuler les trajectoires $(G_i)_i \text{ iid, } \mathbb{E}[G_1] = 0 \text{ et } \text{var}[G_1] = 1$

$$\forall n \geq 0, \quad \forall t \in [nh, (n+1)h[, \quad \tilde{X}_t^x = x + \sqrt{h} \sum_{i=1}^n G_i$$

Intérêts & Perspectives

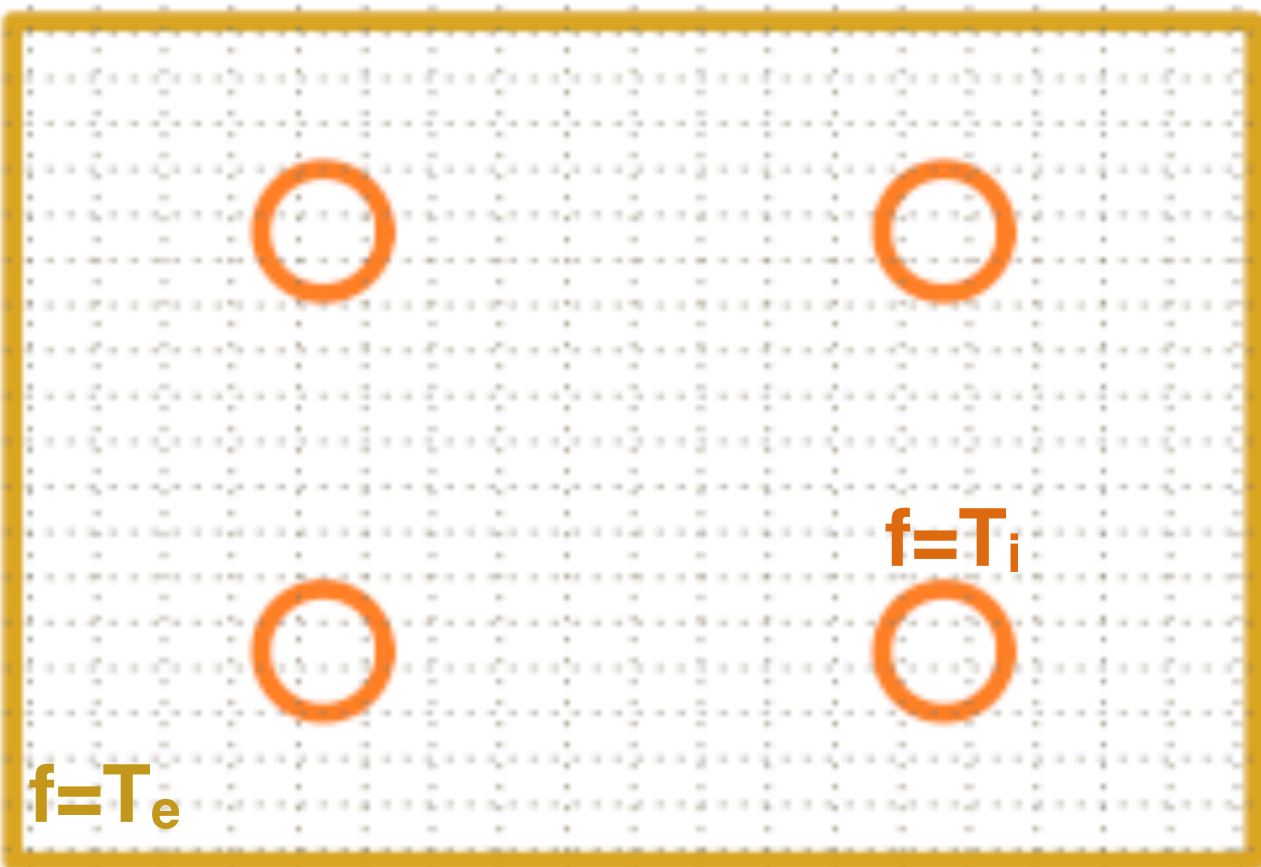
• Vitesse de convergence indépendante de la dimension de X

• Méthode préférable à la méthode des éléments finis pour des grandes dimensions (>3)

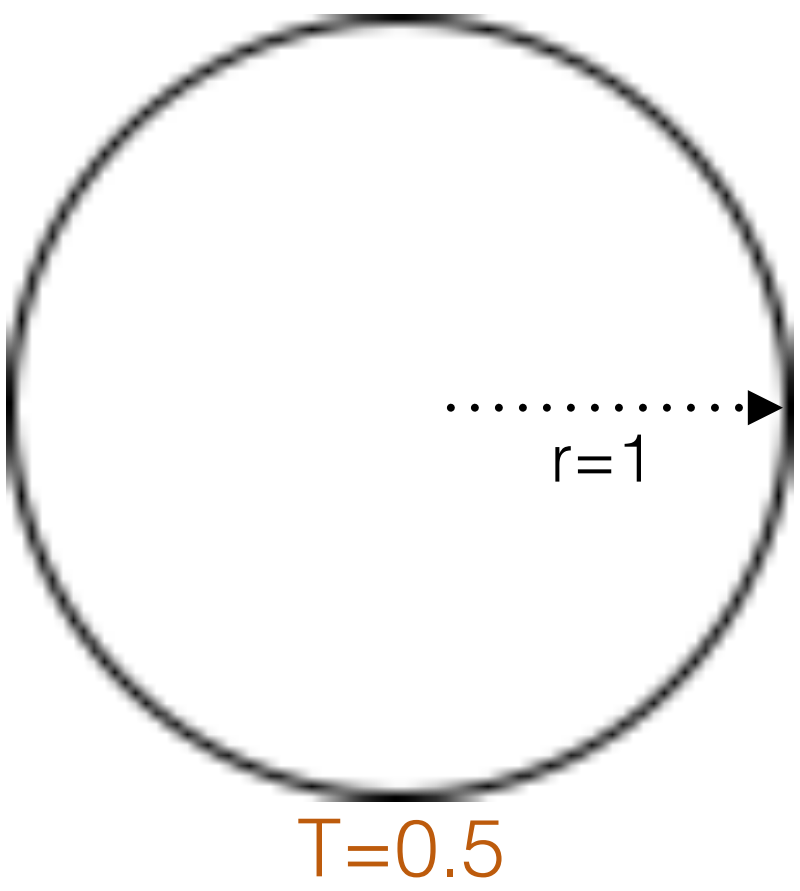
• Contrôle de l'erreur effectué avec des intervalles de confiance fournis par le TCL

• Deux exemples d'application :

- **Modèle de tubes dans un conducteur carré**



- **Conducteur cylindrique**



Applications

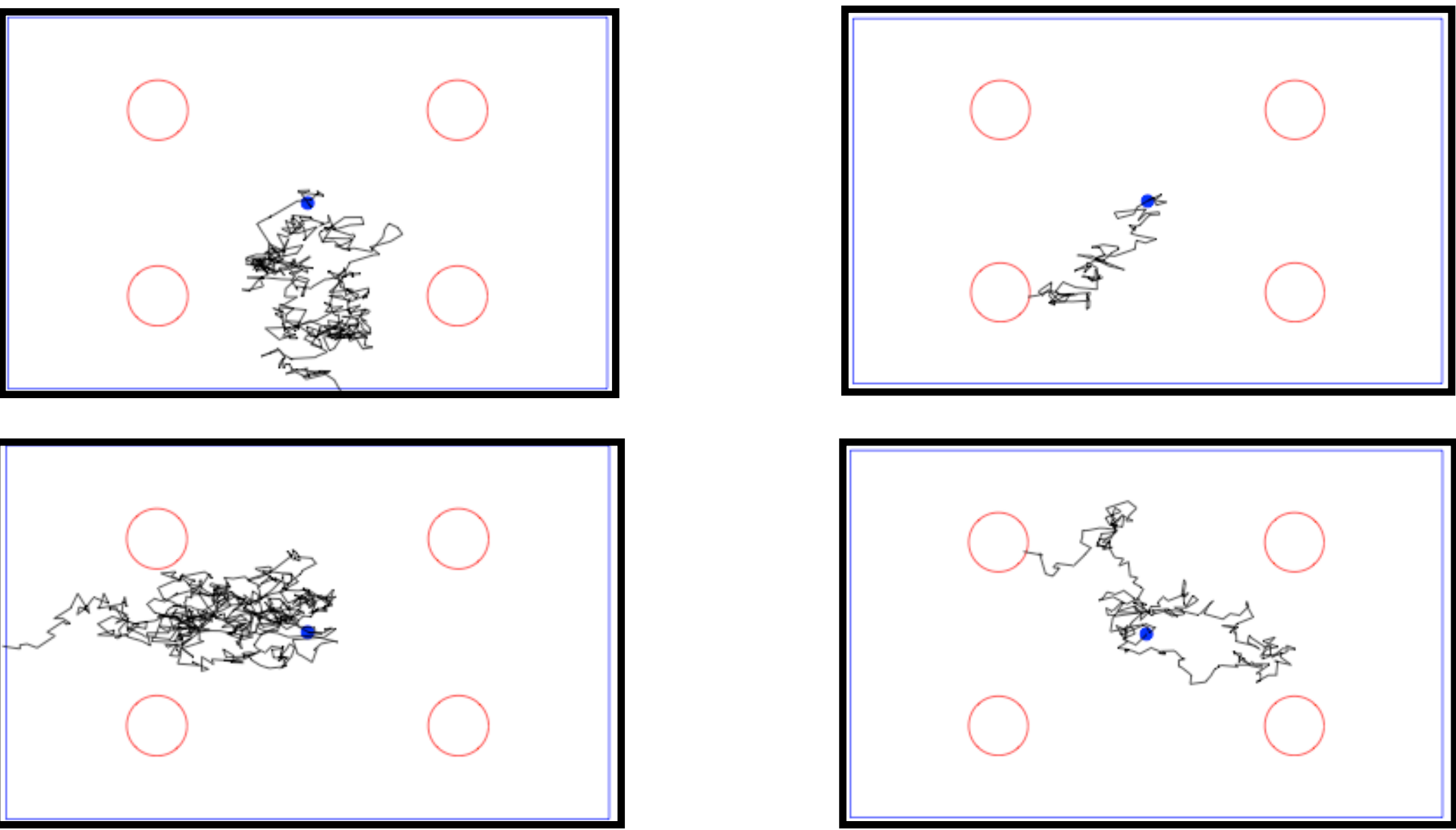
Modèle de tubes dans un conducteur carré

• On considère une dalle de béton, de section carrée, plongée dans un milieu extérieur à la température T_e , qui contient 4 canaux à l'intérieur desquels circule un fluide à la température T_i .

• Le but est de calculer la température $u(x)$ en tout point de la dalle

=> Problème de Dirichlet avec $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \setminus (\Gamma_e \cup \Gamma_i)$, $\Gamma_e = \partial([-1, 1] \times [-1, 1])$
 $\Gamma_i = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$
$$g(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = T_i \quad \text{sur } \Gamma_i$$
$$f(x) = T_e \quad \text{sur } \Gamma_e$$

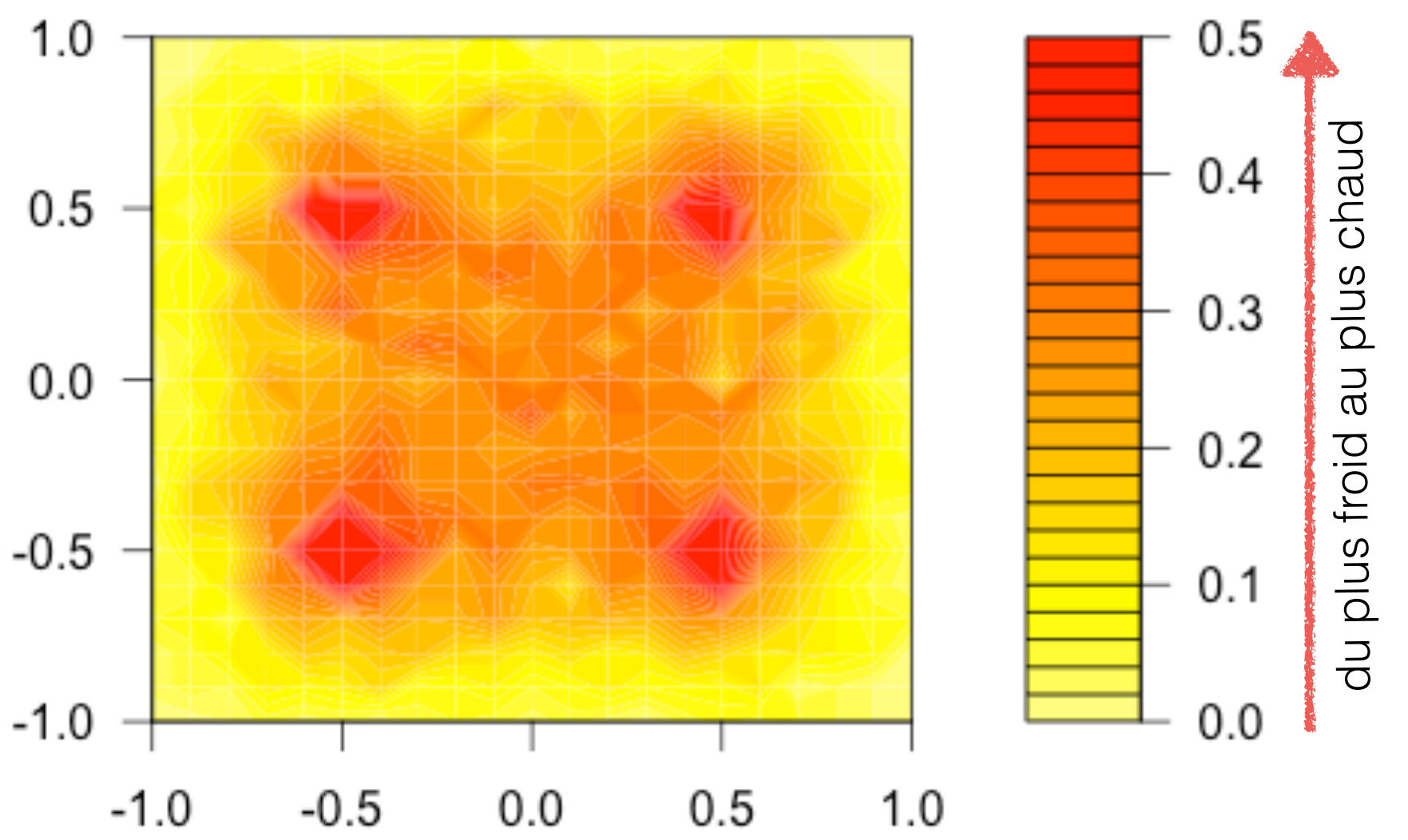
• On applique la méthode de Monte-Carlo au MB discrétisé :



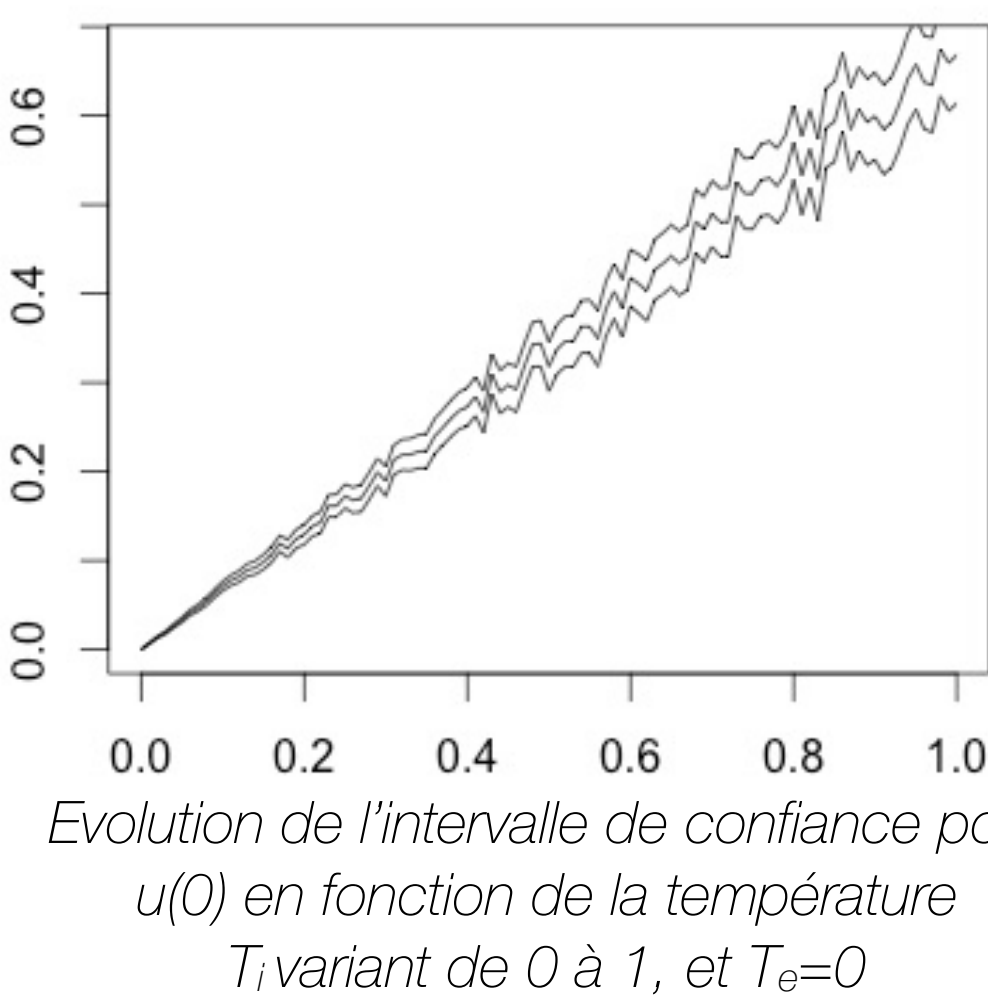
Simulation de plusieurs trajectoires du MB avec $T_e=0$ et $T_i=0.5$

• On effectue un maillage et on calcule la température en tout point

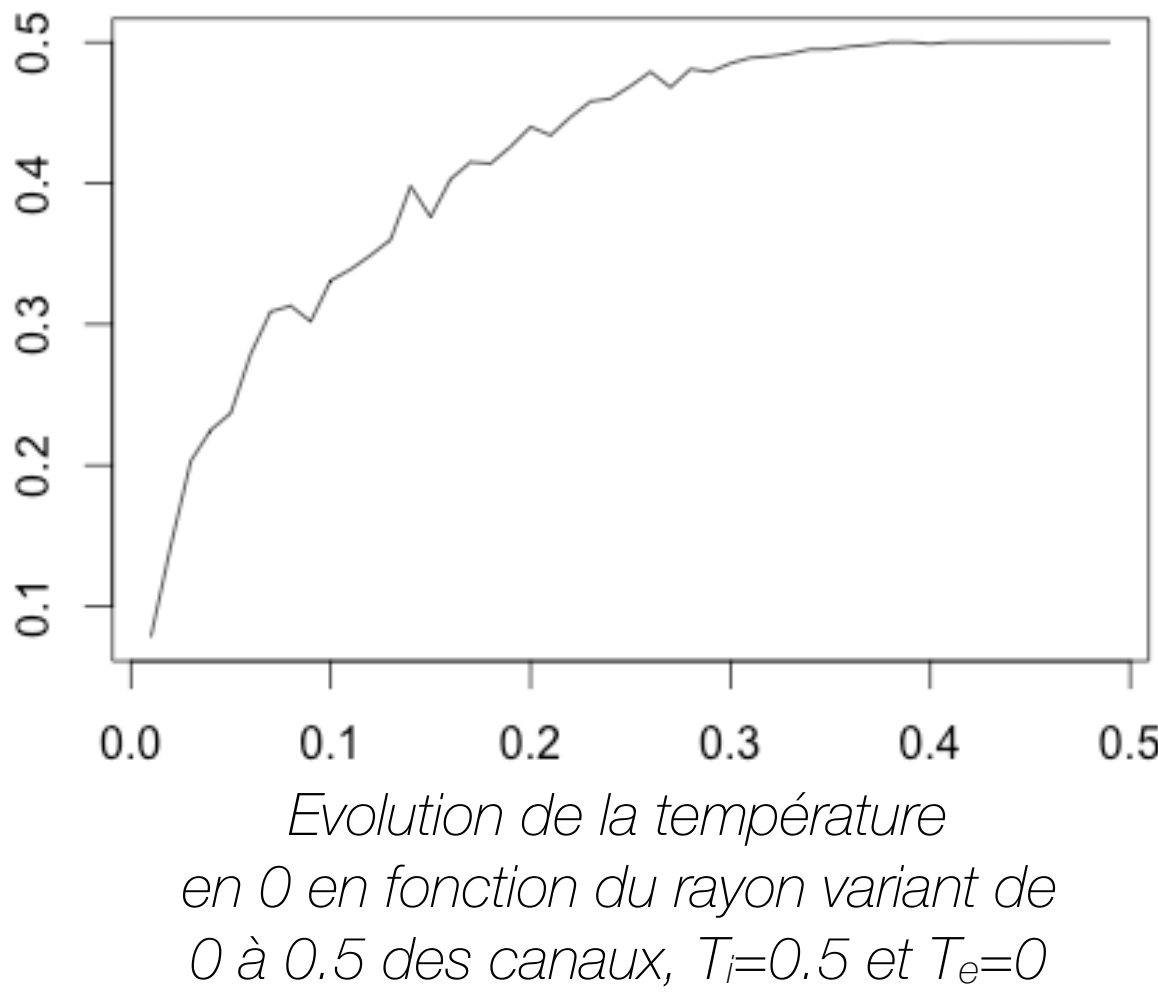
=> **Profil de températures:**



• Cette approche, via le TCL, nous permet d'obtenir des intervalles de confiance pour $u(x)$: $u(x) \in [u^N(x) \pm \frac{\sigma^N}{\sqrt{N}} \times q_{1-\frac{\alpha}{2}}]$
Pour $u(0)$, on obtient approximativement : [0.32, 0.37]



Evolution de l'intervalle de confiance pour $u(0)$ en fonction de la température T_i variant de 0 à 1, et $T_e=0$



Evolution de la température en 0 en fonction du rayon variant de 0 à 0.5 des canaux, $T_i=0.5$ et $T_e=0$

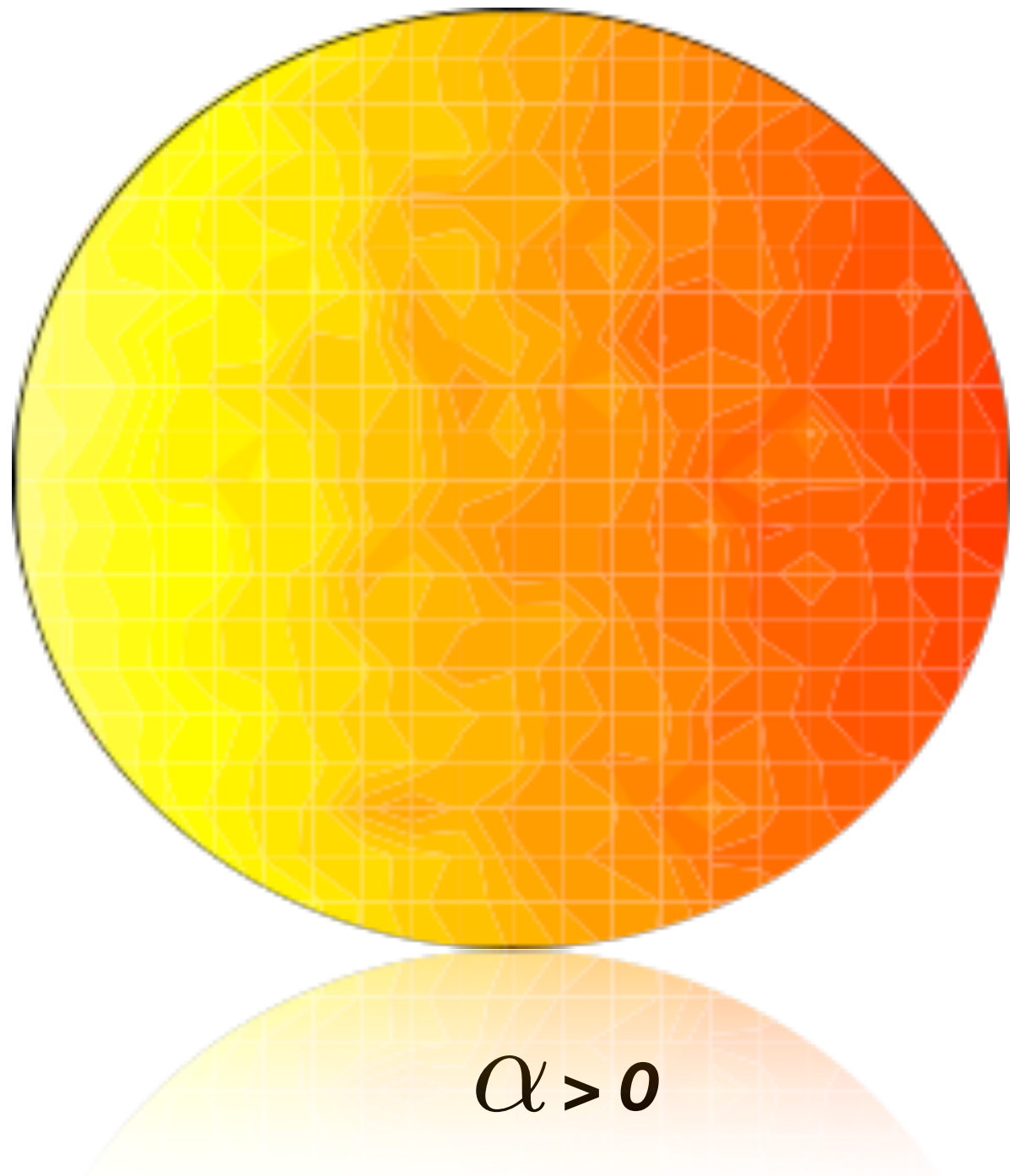
Conducteur cylindrique

• On considère un conducteur cylindrique, plongé dans un champ de température non homogène, et qui contient des sources de chaleur interne.

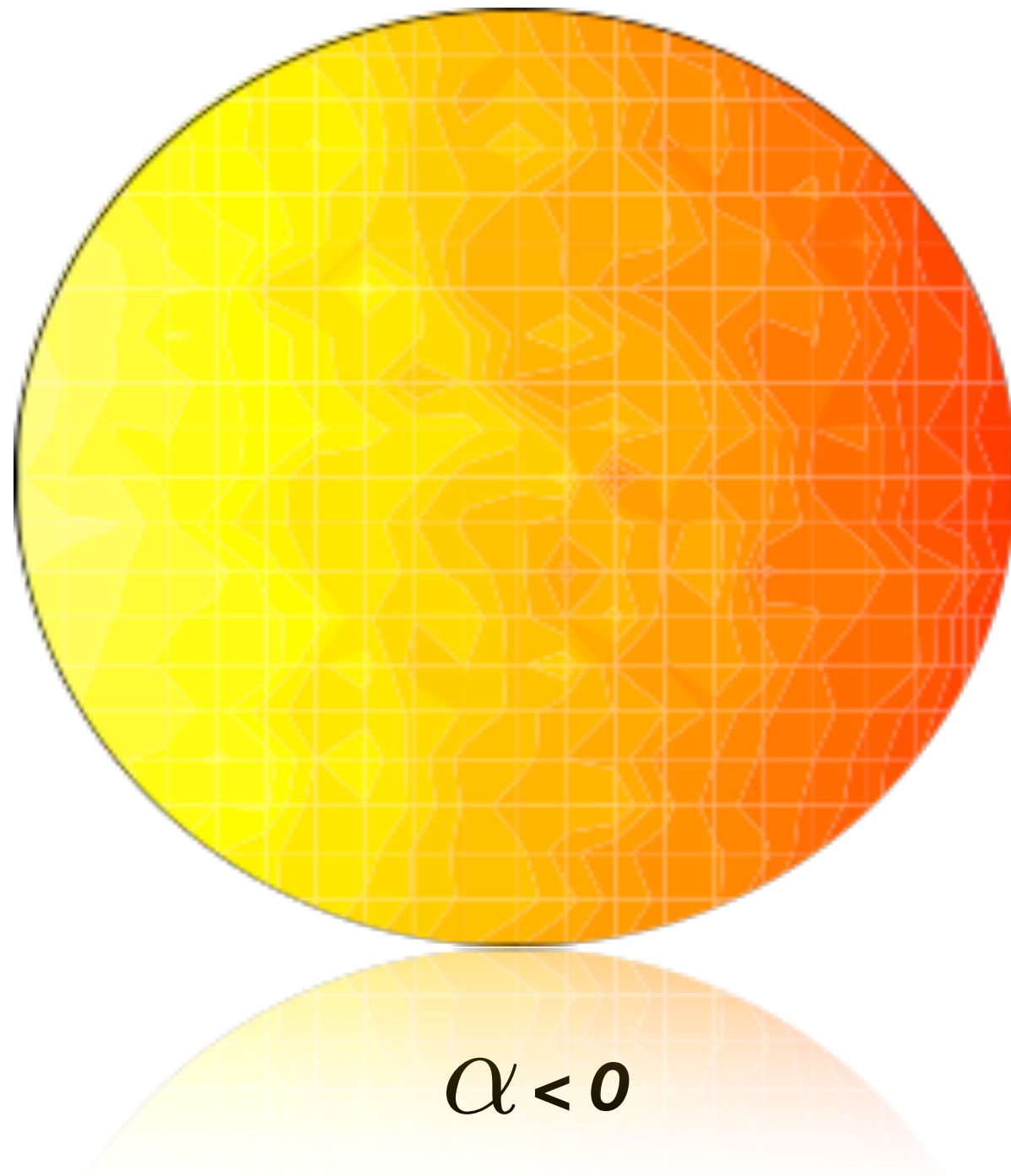
• On procède de la même manière:

=> Problème de Dirichlet avec comme domaine, le disque de centre 0 et de rayon 1,
$$f(x_1, x_2) = x_1 \quad \text{sur } \partial D$$
$$g(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{sur } D$$

• **Profil de températures:** avec $T=0.5$



$\alpha > 0$



$\alpha < 0$

• On souhaite réduire la variance pour une meilleure estimation

=> **Méthode de la variable de contrôle** : on introduit une statistique $\hat{v}(x)$ dont on connaît l'espérance $v(x)$

On cherche donc $\hat{w}(x)$ qui est aussi un estimateur de $u(x)$ mais de variance plus petite que $\hat{u}(x)$

$$\hat{w}(x) = \hat{u}(x) + \lambda(\hat{v}(x) - v(x))$$

- $v(x)$ est solution radiale du problème de Dirichlet avec $f(x_1, x_2) = T \quad \text{sur } \partial D$
 $g(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{sur } D$

$$v(x) = -\alpha(x_1^2 + x_2^2)/8 + \alpha/8 + T$$

• On développe la variance : $\text{var}(\hat{w}(x)) = \text{var}(\hat{u}(x)) + \lambda^2 \text{var}(\hat{v}(x)) + 2\lambda \text{cov}(\hat{u}(x), \hat{v}(x))$

→
$$\lambda_{opt} = \frac{\text{cov}(\hat{u}(x), \hat{v}(x))}{\text{var}(\hat{v}(x))}$$

• On utilise une approche de type Monte Carlo pour approximer numériquement la valeur de λ_{opt} et on observe numériquement la réduction de variance

| $\hat{w}(x)$ | $\hat{u}(x)$ | $\text{var}(\hat{w}(x))$ | $\text{var}(\hat{u}(x))$ | (x_1, x_2) | α_g |
|--------------|--------------|--------------------------|--------------------------|--------------|------------|
| 0,6071414 | 0,6066459 | 0,3875493 | 0,3882902 | (0,5;0) | -1 |
| 0,6371733 | 0,6370668 | 0,3659968 | 0,3663428 | (0;0) | -1 |
| 0,6536492 | 0,6533603 | 0,3288763 | 0,3295418 | (0;0) | 2 |
| 0,6243716 | 0,6239533 | 0,3608627 | 0,3614945 | (0;0) | 0 |
| 0,3503067 | 0,3503122 | 0,4549188 | 0,4548091 | (0,3;0,2) | 0,6 |