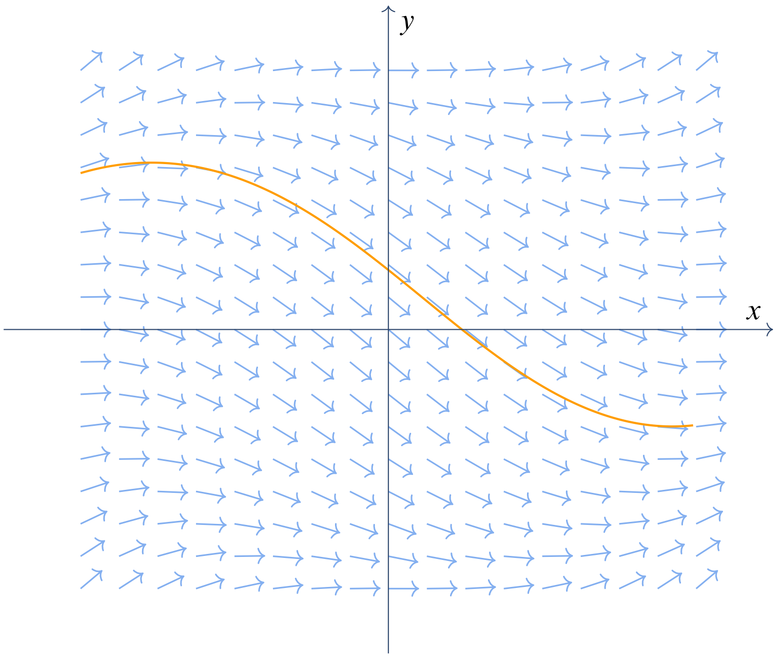
רשימות המרצה

מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות מ'

104136



נכתב על ידי : רן קירי

להערות/תיקונים ניתן לפנות במייל

rankiri@campus.technion.ac.il

תוכן העניינים

1 סדרות וטורים של פונקציות 1
1.1 סדרות של פונקציות 1
1.1.1 התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה 4
1.1.2 טורים של פונקציות 8
1.2 שימושים להתכנסות במידה שווה 15
1.3 טורי חזקות 24
1.3.1 תכונות של טורי חזקות 31
1.3.2 טורי טיילור 33
1.4 נספח - גבולות חלקיים 37
1.5 נספח - חישובי גבולות 39

2 מבוא למד"ר ומשוואות מסדר ראשון 43
2.1 מבוא והגדרות 43
2.2 מוטיבציה מעולם המדע 49
2.3 פתרון משוואות מסדר ראשון 52
2.3.1 משוואות ליניאריות 52
2.3.2 משוואות פרידות 57
2.3.3 מד"ר מטיפוס הומוגני 60
2.3.4 החלפת תפקידי x, y 62
2.3.5 משוואות ברנולי (נלמד רק בתרגילי הבית) 64
2.4 שדה הכיוונים וחקירה איכותית של מד"ר 65
2.5 העמקה במשפט הקיום והיחידות 68
2.5.1 תחומי הגדרה מקסימליים של פתרונות 69
2.5.2 אי קיום תנאי המשפט 73
2.6 יציבות פתרונות 76

3 משוואות דיפרנציאליות מסדר גבוה 81
3.1 מבוא והגדרות 81
3.2 משוואות ליניאריות 86
3.2.1 משוואות ליניאריות והומוגניות מסדר n 86
3.2.2 תלות ליניארית של פתרונות 88
3.2.3 נוסחת אבל 94
3.3 משוואות במקדמים קבועים 99
3.3.1 בניית בסיס הפתרונות למד"ר 100

3.3.2 שורשים בעלי ריבוי 102
3.3.3 שורשים מרוכבים 106
3.4 ניתוח איכותי של פתרונות ויציבות 109
3.5 משוואות אוילר 114
3.6 משוואות ליניאריות אי-הומוגניות 119
3.6.1 וריאציית הפרמטרים 119
3.6.2 שיטת השוואת המקדמים 123

4 מערכת מד"ר 129
4.1 מבוא והגדרות 129
4.2 מערכת משוואות ליניארית 129
4.2.1 מערכות משוואות ליניארית הומוגנית 131
4.3 מערכת מד"ר במקדמים קבועים 136
4.4 מישור הפאזה 150
4.4.1 משוואות אוטונומיות ומישור הפאזה 152
4.4.2 נקודות קריטיות ומשוואות במקדמים קבועים 154
4.4.3 תמונת הפאזה של מערכת במקדמים קבועים 155

5 תורת שטורם ליוביל 163
5.1 מוטיבציה ומבוא 163
5.2 הערכים העצמיים של בעית שטורם ליוביל 165
5.2.1 תנאי שפה מיוחדים 171
5.3 פיתוח לטור בפונקציות עצמיות 174
5.4 פתרון בעיות שפה אי-הומוגניות (לא נלמד הסמסטר) 178

תוכן העניינים

1
סדרות וטורים של פונקציות

בפרק זה טרם נדון במשוואות דיפרנציאליות. מטרת פרק ראשוני זה הינה היכרות עם מספר מושגים וכלים מתמטיים חשובים שישמשו אותנו בהמשך כחלק מהחקירה של משוואות דיפרנציאליות. בחשבון האינפיניטסימלי במשתנה יחיד, דנו בסדרות מהצורה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ובסכומים מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ וניסינו לברר כיצד ניתן לדעת אם הסדרה/הסכום מתכנסים. במידה וכן, ניסינו אף לספק כלים לחישוב גבולות אלו.

החידוש בפרק שלעיל הוא שהסדרות/הסכומים שבהם נעסוק מורכבים יותר. במקום שהאיברים a_n של הסדרה/הסכום יהיו מספרים ממשיים, נחליף אותם בפונקציות $f_n(x)$ המוגדרות בקטע I משותף כלשהו.

אנחנו נראה שמונח ההתכנסות של הסדרה/סכום הופך למורכב יותר, ונפתח מספר כלים חדשים על מנת להתמודד עם מורכבות זו.

1.1 סדרות של פונקציות

הגדרה 1.1.1 סדרת פונקציות

בהנתן קטע/קרן I, **סדרת פונקציות** ב-I היא אוסף $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ של פונקציות $f_n : I \to \mathbb{R}$.

בדומה לסדרות של מספרים, נרצה לדון בגבול/התכנסות של סדרת פונקציות. כדי להמחיש את הקושי שעולה מכך שמדובר בסדרה של פונקציות, נתבונן בשתי הדוגמאות שלעיל.

דוגמה 1.1.1 דוגמאות מייצגות

לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר את הסדרות $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע $[0,1]$ על ידי

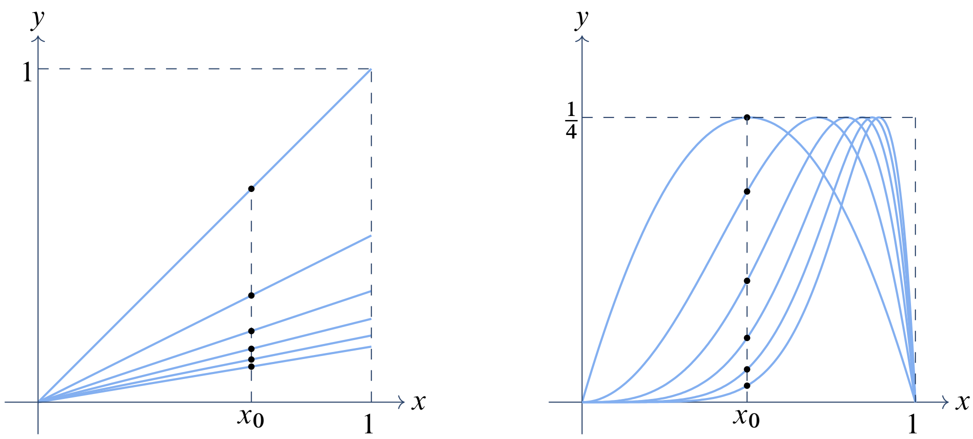
$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad g_n(x) = x^n\left(1 - x^n\right)$$

לכל $n \in \mathbb{N}$. באיור 1.1 ניתן לראות המחשה של חלק מהפונקציות בסדרה.

לכל אחד מהסדרות ננסה להגדיר גבול, וננסה לזהות מה ההבדל בין האופן שבו כל אחד מהסדרות שואפת

לגבול שלה.

דרך נאיבית. הדרך הפשוטה ביותר לחשוב על הגבול של סדרות הפונקציות המופיעות בדוגמה 1.1.1 מודגמת באיור 1.1 שלעיל. כלומר, במקום לשאול מה הגבול של הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ או $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, אפשר לקבע נקודה $x_0 \in [0,1]$, ולהתבונן בערכים של סדרת הפונקציות בנקודה זו. כלומר, נעבור להתבונן בסדרות $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$,$\{g_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$. היות והערך של x_0 קבוע, הסדרות שקיבלנו הן סדרות מספרים רגילות, ואת



איור 1.1: תיאור של $f_1,\ldots,f_6$ משמאל ו-$g_1,\ldots,g_6$ מימין. על כל אחת מהפונקציות, מסומנת הנקודה $f_i(x_0)$ או $g_i(x_0)$ המתאימה.

גבולן אנחנו יודעים לחשב יחסית בקלות. למשל, נזהה כי הסדרה

$$f_n(x_0) = \frac{x_0}{n},$$

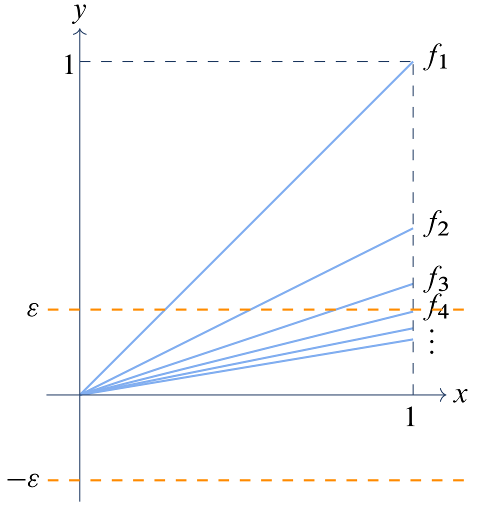
בבירור שואפת לאפס כאשר $n \to \infty$. באופן דומה, $g_n(x_0) = x_0^n\left(1 - x_0^n\right)$ שואפת לאפס, אך כדאי להפריד בה לשני מקרים על מנת להשתכנע בכך.

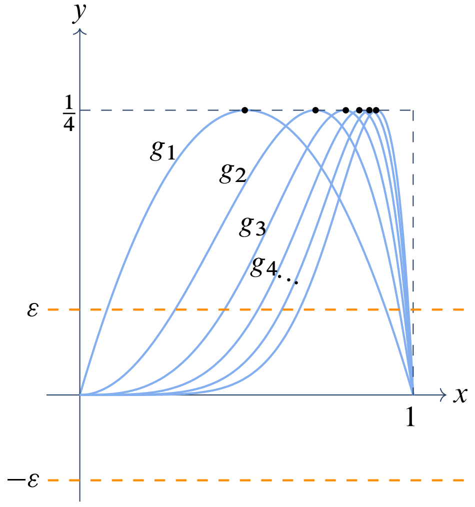
- אם $x_0 = 0$ או $x_0 = 1$, מקבלים כי $f_n(x_0) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. ברור שבמקרה זה הגבול של הסדרה הקבועה הוא הערך 0.
- אם $x_0 \in (0,1)$, הסדרה x_0^n שואפת לאפס, והסדרה $1 - x_0^n$ שואפת ל-1. מאריתמטיקה של גבולות, המכפלה של סדרות אלה תשאף לאפס.

היות והנ"ל נכון לכל נקודה שנבחר בקטע, נוכל לומר שהגבול של הסדרה f_n והגבול של הסדרה g_n הוא פונקציית האפס.

אז היכן נמצאת המורכבות? לכאורה, אין מורכבות. על פי הניסיון הראשון שלנו להגדיר גבול לסדרה של פונקציות, קיבלנו זוג סדרות של פונקציות המתכנסות לאותו הגבול - פונקציית האפס. אבל אם ננסה ונעמיק

בכל זאת, נזהה שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת בצורה "אחידה" לאפס. כלומר, אם נתבונן ב"שרוול" ברוחב $\varepsilon > 0$ מסביב לפונקציית הגבול $f(x) = 0$, ניתן לזהות שעבור n גדול מספיק, הגרף של $f_n(x)$ נמצא **כולו** בתוך ה"שרוול". כלומר, כל הנקודות קרובות בו זמנית לערך הגבולי שלהן. זאת בניגוד לסדרה $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, כמודגם באיור 1.2 שלעיל. שימו לב שעבור $\varepsilon = \frac{1}{8}$ למשל, נוכל לבחור לכל $n \in \mathbb{N}$ את הנקודה $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$





איור 1.2: תיאור של "שרוול" ברוחב $\varepsilon > 0$ מסביב לגבול של שתי הסדרות. הנקודות המסומנות על $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ הן נקודות שנשארות "מחוץ" לשרוול.

(שמסומנות גם הן באיור 1.2), ולקבל שעבורן

$$g_n(x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > \varepsilon.$$

כלומר, הפונקציה g_n לא נמצאת כולה בתוך ה"שרוול" עבור אף ערך של n. מתברר, שהתכנסות "גרועה" כמו של הסדרה $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ מובילה לשלל תוצאות לא רצויות, וכדי להבדיל בין סוגי ההתכנסות שראינו בצורה גיאומטרית, נגדיר אותן בחלק הבא באופן פורמלי יותר.

1.1.1 התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה

נתחיל מלהציג בצורה פורמלית את הגישה ה"נאיבית" להתכנסות.

הגדרה 1.1.2. התכנסות נקודתית

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בקטע I. אומרים כי הסדרה **מתכנסת נקודתית** לפונקציה f בנקודה $x \in I$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ובסימון מקוצר, אם מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע I אם היא מתכנסת נקודתית בכל $x \in I$. לפונקציה $f(x)$ קוראים בשם **הפונקציה הגבולית**.

בדוגמה 1.1.1 ראינו כי שתי הסדרות מתכנסות נקודתית, וכי $f(x) = 0, g(x) = 0$ הן הפונקציות הגבוליות המתאימות. נעבור להגדרה של ההתכנסות ה"אחידה" שמכונה בשם **התכנסות במידה שווה**.

הגדרה 1.1.3. התכנסות במידה שווה

תהיינה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בקטע I. אומרים כי הסדרה **מתכנסת במידה שווה** לפונקציה f אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $x \in I$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

שימו לב כי ההגדרות דומות למדי, אך בהתכנסות במידה שווה, הערך של N תלוי ב-ε בלבד ולא בערך של x. הנ"ל ממחיש את העובדה שההתכנסות מתבצעת "ביחד", במובן שהיא אינה תלויה בערך של x. כדי להמחיש בדרך נוספת את השוני בין ההגדרות, נחזור לדוגמה 1.1.1.

דוגמה 1.1.2. דוגמה לבדיקת התכנסות במידה שווה

הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מדוגמה 1.1.1 מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$, והסדרה $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ מדוגמה 1.1.1 אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

הוכחה. עבור הסדרה הראשונה נשתמש בהגדרה 1.1.3. יהא $\varepsilon > 0$ ונרצה להראות שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $x \in [0,1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{x}{n} < \varepsilon.$$

ואכן, אם נבחר $N > \frac{1}{\varepsilon}$, נקבל כי

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

ומכאן שהסדרה מתכנסת במידה שווה. עבור הסדרה השניה נשתמש בשלילה של הגדרה 1.1.3. נבחר $\varepsilon = \frac{1}{8}$, ונשים לב שלכל $N \in \mathbb{N}$, נבחר $n > N$ כלשהו, ונקבל כי עבור $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, מתקיים

$$|g_n(x) - g(x)| = \left|x^n\left(1 - x^n\right) - 0\right| = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > \varepsilon.$$

מכאן שהסדרה לא מתכנסת במידה שווה בקטע. □

התבוננות קצרה בשני סוגי ההתכנסות, נראה שההתכנסות במידה שווה היא ההתכנסות ה"חזקה יותר". הטענה הבאה ממחישה זאת.

טענה 1.1.1. התכנסות במידה שווה גוררת התכנסות נקודתית

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בקטע I. אם הסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציה גבולית f ב-I, היא מתכנסת נקודתית ל-f ב-I.

הוכחה. נניח כי הסדרה אכן מתכנסת במידה שווה ל-f ב-I. על פי הגדרה 1.1.3, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $x \in I$, מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

מכאן נובע כי $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ לכל $x \in I$ ומאריתמטיקה של גבולות

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \overbrace{f_n(x) - f(x)}^{\to 0} + \overbrace{f(x)}^{\to f(x)} = f(x)$$

ולכן $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל-f ב-I. □

מסקנה. אם סדרת פונקציות מתכנסת נקודתית לפונקציה גבולית f, והיא גם מתכנסת במידה שווה לפונקציה g, בהכרח $f = g$. כלומר, ה"מועמדת" כפונקציית גבול לבדיקת התכנסות במידה שווה היא אותה הפונקציה הגבולית מבדיקת ההתכנסות הנקודתית. בפרט, אם סדרת פונקציות לא מתכנסת נקודתית, היא אינה מתכנסת במידה שווה.

אחת מהבעיות בבדיקת התכנסות במידה שווה היא שההגדרה עלולה להיות קצת "סיזיפית" לבדיקה. מטרת המשפט הבא שנציג תהיה להקל מעט על בדיקה זו, אך כהקדמה למשפט זה נדגיש חישוב מסויים שביצענו בהוכחה בדוגמה 1.1.2 . בשני חלקי ההוכחה, נאלצנו להעריך את הגודל של הביטויים

$$|f_n(x) - f(x)|, \ |g_n(x) - g(x)|,$$

וכדי לעשות זאת, הצבנו את הערכים הכי גדולים שביטויים אלו יכולים לקבל. כלומר - כדי לבדוק האם "כל הנקודות" קרובות לערך הגבולי שלהן, בדקנו את הערך ה"רחוק ביותר". במידה והוא קרוב מספיק לערך

הגבולי, הסקנו שההתכנסות היא במידה שווה.

נעבור עתה למשפט שיהווה הכללה של שיטה זו שתהווה כלי שימושי מאוד לבדיקת התכנסות במידה שווה.

משפט 1.1.1. מבחן הסופרמום להתכנסות במידה שווה

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בקטע I המתכנסת נקודתית לפונקציה גבולית f בקטע. אזי, הסדרה מתכנסת במידה שווה אם ורק אם הסדרה

$$M_n := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

מקיימת $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$.

הוכחה. נניח תחילה כי מתקיים $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ ונראה כי סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה. בהתאם להגדרה 1.1.3, יהא $\varepsilon > 0$. על פי הגדרת הגבול של הסדרה $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $M_n < \varepsilon$. אך מכאן נובע כי לכל $x \in I$ ולכל $n > N$, בוודאי שמתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| \le \overbrace{\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|}^{=M_n} < \varepsilon,$$

ולכן הסדרה מתכנסת במידה שווה. בכיוון ההפוך, נניח שהסדרה מתכנסת במידה שווה. עלינו להראות שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $M_n < \varepsilon$. כדי לעשות זאת נתבונן בהגדרה 1.1.3 של התכנסות במידה שווה עם הערך $\frac{\varepsilon}{2}$. על פי הגדרה זו קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $x \in I$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

כידוע מקורסי החדו"א, אם אי-שוויון מסוים מתקיים לכל ערך בקטע, הוא יתקיים גם עבור הסופרמום באותו הקטע (אך באופן חלש). כלומר

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

אך מכאן שהראינו כי אכן $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$, כדרוש. $\square$

הערה. שימו לב שעל פי כלל הסנדוויץ', מספיק שנראה כי קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $M_n \le a_n$ ו-$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ כדי להוכיח שסדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה. באופן דומה, מספיק להראות שקיימת סדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שעבורה $0 \le b_n \le M_n$ וגם $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, כדי להסיק שסדרת הפונקציות לא מתכנסת במידה שווה.

דוגמה 1.1.3. דוגמאות לשימוש במבחן הסופרמום

עבור כל אחד מסדרות הפונקציות שלעיל, בדקו האם הן מתכנסות במידה שווה בתחום הנתון.

1. $f_n(x) = x^n$ בקטע $I = [0,1]$.
2. $f_n(x) = nxe^{-nx}$ בקטע $I = [\alpha, 1]$ כאשר $0 < \alpha < 1$ נתון.

פתרון. בשני התרגילים שלעיל, נתחיל בלחשב את הפונקציה הגבולית $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, ואז נבדוק התכנסות במידה שווה בעזרת מבחן הסופרמום.

1. כאשר $x = 1$, נציב בסדרת הפונקציות ונקבל $1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 = f_n(1)$. לכן הפונקציה הגבולית מקיימת $f(1) = 1$. עבור יתר הנקודות בקטע, נזהה כי אם $x \in [0,1)$, מתקיים
$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$
ולכן
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}.$$
עתה, נעבור לבדיקת התכנסות במידה שווה על פי משפט 1.1.1, ונחשב את הביטוי
$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \begin{cases} 0, & x = 1 \\ x^n, & x \in [0,1) \end{cases} = 1.$$
ביטוי זה אינו שואף לאפס, ונוכל להסיק כי הסדרה לא מתכנסת במידה שווה.

2. לכל $x \in [\alpha, 1]$, מתקיים כי הסדרה ne^{-nx} שואפת לאפס. היות ו-x קבוע כאשר משאיפים $n \to \infty$, נקבל כי
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx} = 0.$$
וגם כאן, נעבור לבדיקת התכנסות במידה שווה על פי משפט 1.1.1.
$$M_n = \sup_{x\in[\alpha,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[\alpha,1]} nxe^{-nx}.$$
במקרה זה החישוב של הסופרמום עלול להיות מסובך יותר, ואנחנו נשלוף כלים "כבדים יותר" מעולם החדו"א. כידוע, הפונקציה nxe^{-nx} היא פונקציה רציפה וגזירה ברציפות בקטע $[\alpha, 1]$, ולכן חייב להיות לה מקסימום (על פי משפט ויירשטראס). המקסימום, יכול להתקבל בדיוק באחד מהמקרים הבאים:
   - נקודת קצה של הקטע. כלומר $x = \alpha$ או $x = 1$.
   - נקודה פנימית של הקטע, כלומר $x \in (\alpha, 1)$ כלשהי.

במקרה השני, אנחנו מקבלים שמדובר בנקודת קיצון מקומית של הפונקציה, ואפשר לזהות אותה (על פי משפט פרמה) בתור נקודה שהנגזרת בה מתאפסת. כלומר, אם אכן המקסימום מתקבל בנקודה פנימית, היא תקיים

$$\left(nxe^{-nx}\right)' = ne^{-nx} - n^2xe^{-nx} = ne^{-nx}\left(1-nx\right) = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{n}.$$

במילים אחרות, המקסימום **חייב** להתקבל ב-$1, \alpha = x$ או בנקודה $x = \frac{1}{n}$. אך חשוב מאוד לשים לב, שעבור $n > \frac{1}{\alpha}$, הנקודה $x = \frac{1}{n}$ כבר לא נמצאת בקטע! לכן, בחישוב של M_n, החל מ-n גדול מספיק, המקסימום חייב להתקבל בקצוות של הקטע, ולכן

$$M_n = \max\left\{f_n\left(\alpha\right), f_n\left(1\right)\right\} = \max\left\{n\alpha e^{-n\alpha}, ne^{-n}\right\} \leq n\alpha e^{-n\alpha} + ne^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

מכאן נובע שהסדרה אכן מתכנסת במידה שווה, כדרוש.

$\square$

לתרגול נוסף. הראו כי אם מחליפים את הקטע $[\alpha, 1]$ בקטע $[0, 1]$, הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה.

ניתן ללמוד מכך שהתכנסות במידה שווה היא תכונה שתלויה מאוד בתחום. יתרה מכך, היא מראה לנו שגם אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בכל תת-קטע סגור וחסום של I, היא לאו דווקא מתכנסת במידה שווה ב-I.

1.1.2 טורים של פונקציות

חלק זה יעסוק במקרה מיוחד (אם כי מאוד נפוץ) של סדרות של פונקציות. אנחנו נדון בסדרת פונקציות $\left\{S_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ המתקבלת מסדרת פונקציות אחרת $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ על ידי סכימה. כלומר

$$S_1\left(x\right) = f_1(x), \quad S_2\left(x\right) = f_1(x) + f_2(x), \quad \ldots \quad S_n\left(x\right) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$$

בסימון מקוצר ניתן לכתוב $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. כאשר $n \to \infty$, אנחנו מקבלים את הסכום האינסופי $S\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, במידה והוא קיים. כדי להגדיר אותו באופן פורמלי, נחשוב על $\left\{S_n(x)\right\}$ כסדרת פונקציות ועל $S(x)$ בתור הפונקציה הגבולית שלה.

הגדרה 1.1.4. התכנסות נקודתית של טור פונקציות

תהא $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בקטע I ונגדיר את **סדרת הסכומים החלקיים** $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע I על ידי $S_n\left(x\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אומרים כי **טור הפונקציות** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ **מתכנס נקודתית** ב-I אם קיים הגבול $x \in I$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

ואומרים שהטור מתכנס נקודתית בקטע I אם הוא מתכנס בכל נקודה בקטע. במקרה זה מסמנים $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ ומכנים פונקציה זו בשם **סכום הטור**.

שימו לב שלמעשה, סכום הטור הוא בסה"כ הפונקציה הגבולית של הסדרה $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

הגדרה 1.1.5 התכנסות במידה שווה של טור פונקציות

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בקטע I ונגדיר את סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ בקטע I על ידי $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$ לכל $n\in\mathbb{N}$. אומרים כי **טור הפונקציות** $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ **מתכנס במידה שווה** ב-I אם הסדרה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ב-I.

דוגמה 1.1.4 הטור ההנדסי

חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}x^k$ בקטע $I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ וקבעו האם הוא מתכנס במידה שווה.

פתרון. על פי הגדרה 1.1.4, סדרת הסכומים החלקיים היא

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k=x+\cdots+x^n$$

כדי לחשב את סכום סדרה זו נכפול את שני אגפי המשוואה ב-x ונקבל

$$xS_n(x)=x^2+\cdots+x^n+x^{n+1}.$$

על ידי חיסור המשוואה השניה מהראשונה נקבל כי

$$(1-x)S_n(x)=x-x^{n+1}\Longrightarrow S_n(x)=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{x}{1-x}.$$

שימו לב שהשתמשנו בכך שלכל $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ מתקיים $x^n\xrightarrow{n\to\infty}0$. נותר לבדוק התכנסות במידה שווה, ועל פי הגדרה 1.1.5 עלינו לבדוק כי $S_n(x)=\frac{x-x^n}{1-x}$ מתכנסת במידה שווה (כסדרת פונקציות) ל-$S(x)=\frac{x}{1-x}$. כדי לעשות זאת נשתמש במשפט 1.1.1 ונחשב

$$M_n=\sup_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\frac{|x|^{n+1}}{1-x}\leq\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

כלומר, הטור אכן מתכנס במידה שווה. $\square$

דוגמה 1.1.5. טור טלסקופי

חשבו את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}$ בקטע $I = [0,1]$ וקבעו האם הוא מתכנס במידה שווה.

פתרון. על פי הגדרה 1.1.4, סדרת הסכומים החלקיים היא

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{x}{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cdots + \cancel{\frac{x^n}{n}} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$= x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} x.$$

כלומר, הטור אכן מתכנס נקודתית וסכום הטור הינו $S(x) = x$. נבדוק גם כאן התכנסות במידה שווה על פי הגדרה 1.1.5 ועל ידי שימוש במשפט 1.1.1.

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

לכן, הטור מתכנס במידה שווה. □

שימו לב כי אמנם בדוגמה 1.1.4 ובדוגמה 1.1.5 יכלנו לחשב את $S_n(x)$ במפורש כדי לבדוק התכנסות נקודתית/במידה שווה, אך באופן כללי המשימה של חישוב $S_n(x)$ עלולה להיות קשה. למשל, עבור הטורים

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{k^2}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

יהיה בלתי אפשרי למצוא נוסחה "יפה" לסדרת הסכומים החלקיים. במקרה כזה נשאלת השאלה האם יש דרך אחרת לבדוק שהטורים מתכנסים נקודתית/במידה שווה בקטע?

התכנסות נקודתית. נזכיר שכאשר מדובר בהתכנסות נקודתית, אנחנו מציבים ערך קבוע של x ובודקים האם הטור מתכנס. כלומר, כאשר מדובר בטור פונקציות, הדרך לבדוק התכנסות נקודתית היא באמצעות מבחני התכנסות של טורים. דוגמאות למבחנים שכדאי להכיר:

- מבחן ההשוואה/מבחן ההשוואה הגבולי.
- מבחן האינטגרל (יתוזכר בתרגולים).
- מבחן השורש/מבחן המנה.
- התכנסות בהחלט גוררת התכנסות.
- מבחן לייבניץ.

כמובן שהתכנסות במידה שווה היא שאלה יותר מורכבת (היות ואנחנו צריכים לבדוק התכנסות "בו זמנית" של כל הנקודות בקטע הנתון. לשם כך ננסח מספר כלים נוספים ושימושיים.

משפט 1.1.2. תנאי הכרחי להתכנסות במידה שווה

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בקטע I. אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במידה שווה ב-I, סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס.

מסקנה. אם הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ אינו מתכנס במידה שווה.

הוכחה. נניח כי הטור מכתנס במידה שווה. על פי הגדרה, אם נסמן את סדרת הסכומים החלקיים $S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ וב-$S(x)$ את סכום הטור, יתקיים על פי משפט 1.1.1 כי

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| = 0.$$

עתה, נזהה כי ניתן לבטא את סדרת הפונקציות בעזרת הסכומים החלקיים לפי $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$. כלומר

$$\begin{aligned}\sup_{x\in I} |f_n(x) - 0| = \sup_{n\to\infty} |S_n(x) - S_{n-1}(x)| &= \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)| \\ &\le \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| + \sup_{x\in I} |S(x) - S_{n-1}(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

על ידי שימוש במשפט 1.1.1 על סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ והפונקציה הגבולית $f(x) = 0$, נסיק את הדרוש.
□

דוגמה 1.1.6. שימוש לתנאי ההכרחי

הוכיחו כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ לא מתכנס במידה שווה בקטע $I = [0, 1]$.

פתרון. ראינו בדוגמה 1.1.3 כי הסדרה $f_n(x) = x^n$ אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0, 1]$, ובפרט לא מתכנסת במידה שווה לאפס. אי לכך, על פי משפט 1.1.2, נסיק כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ לא מתכנס במידה שווה. למעשה, לא קשה להשתכנע שהטור אף לא מתכנס נקודתית בנקודה $x = 1$ (אך זה לא ינבע מהמשפט הקודם שניסחנו).
□

משפט 1.1.2 מאפשר לנו רק להסיק (במקרים מסויימים) מתי טור אינו מתכנס במידה שווה. שני הכלים הבאים שנציג ונוכיח יעזרו לנו להוכיח שטורים מסויימים כן מתכנסים במידה שווה.

משפט 1.1.3. מבחן M של ויירשטראס

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בקטע I. נניח שקיימת סדרת מספרים $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ שעבורה

- $|f_n(x)| \leq M_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ מתכנס.

אזי, טור הפונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע I.

הערה. שימו לב שטור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x)|$ מתכנס (ובמקרה זה כמובן שגם הטור המקורי מתכנס).

הוכחה. ראשית נוכיח כי הטור מתכנס נקודתית. על פי הנתון, מתקיים $|f_n(x)| \leq M_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$. לכן, כאשר מקבעים את הערך של x, ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי כדי להסיק כי

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k \text{ מתכנס} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \text{ מתכנס}.$$

כלומר, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס. כדי להוכיח התכנסות במידה שווה, נסמן ב- $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ את סדרת הסכומים החלקיים וב-$S(x)$ את סכום הטור (שעתה ידוע שהוא קיים). ננסה להוכיח התכנסות במידה שווה של סדרת הסכומים החלקיים על פי משפט 1.1.1 ונעריך את הביטוי

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|.$$

היות וידוע שהטור מתכנס בהחלט לכל $x \in I$, נשים לב שגם הסכום $\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|$ מתכנס, ועל פי הנתון גם $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$ מתכנס. לכן, על פי אי שוויון המשולש מתקיים

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

עתה נשתמש בהגדרה של טור מתכנס. כלומר, אם $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ מתכנס, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n > N$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} M_k - \sum_{k=1}^{\infty} M_k\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

נשלב את כל מה שקיבלנו עד כה, ונסיק שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$\sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon,$$

כלומר $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| = 0$, מה שמבטיח כי הטור אכן מתכנס במידה שווה, כדרוש. $\square$

דוגמה 1.1.7. שימוש למבחן M של ויירשטראס

הוכיחו כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} 1 - \cos\left(\frac{x}{k}\right)$ מתכנס במידה שווה בקטע $I = [-1, 1]$.

פתרון. ראשית, נשתמש בזהות הטריגונומטרית

$$1 - \cos\left(\frac{x}{k}\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2k}\right),$$

ולאחר מכן נשתמש בכך שלכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sin(t)| \leq |t|$. כלומר:

$$\left|1 - \cos\left(\frac{x}{k}\right)\right| = 2\left|\sin^2\left(\frac{x}{2k}\right)\right| \leq \frac{x^2}{2k^2} \leq \frac{1}{2k^2}.$$

נגדיר את הסדרה $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ על ידי $M_n := \frac{1}{2n^2}$, ונקבל כי עבור סדרה זו, מתקיימים תנאי משפט 1.1.3 (שהרי כידוע, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ הוא טור מתכנס), ולכן טור הפונקציות מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע. $\square$

המבחן הבא מבוסס על טורי לייבניץ, והוא ממחשב מצב שבו התנאי ההכרחי ממשפט 1.1.2 הופך גם לתנאי מספיק.

משפט 1.1.4. מבחן לייבניץ

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ב-I ונניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in I$ מתקיים

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x).$$

אזי, טור הפונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k(x)$ מתכנס במידה שווה ב-I אם ורק אם הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס.

הוכחה. על פי משפט 1.1.2, ברור כי אם הטור מתכנס במידה שווה, סדרת הפונקציות תתכנס במידה שווה לפונקציית האפס. לכן נוכיח רק את הכיוון השני ונניח כי סדרת הפונקציות ממתכנסת במידה שווה לאפס. על פי משפט 1.1.1, מקבלים כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I} |f_n(x) - 0|\right) = 0.$$

כדי להוכיח את ההתכנסות במידה שווה של הטור נוכיח תחילה התכנסות נקודתית. אך ניתן לזהות כי על פי הנתון, לכל ערך קבוע של $x \in I$, טור המספרים שמתקבל הוא טור לייבניץ, ועל המשפט (מקורסי החדו"א) הטור אכן מתכנס. מכאן שמותר לנו להשתמש בסימון $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k(x)$, וננסה להוכיח שהטור מתכנס במידה שווה על פי משפט 1.1.1 ונחשב

$$\sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k(x) \right|$$
$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k f_k(x) \right|$$

עכשיו, נשתמש בתכונה חשובה של טורי לייבניץ. בהנתן סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חיוביות ומונוטונית יורדת לאפס, מתקיים כי לכל $N \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_N.$$

נשתמש באי השוויון עבור הביטוי שקיבלנו ונקבל

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k f_k(x) \right| \leq f_{n+1}(x)$$

אם נסכם את אי השוויונים שקיבלנו עד כמה ונחשב את הסופרמום של שני האגפים, נקבל כי

$$\sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_{n+1}(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

מכאן, שהטור אכן מתכנס במידה שווה. $\square$

הערה. שימו לב שבניגוד למשפט 1.1.3, לא מובטחת לנו התכנסות בהחלט במקרה של טורי לייבניץ.

דוגמה 1.1.8. שימושים למבחן לייבניץ

מצאו את הקטע I שבו הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} e^{k(x^2-3x+2)}$ מתכנס נקודתית והוכיחו כי הוא מתכנס בו במידה שווה.

פתרון. ראשית, נזהה שכאשר $x^2 - 3x + 2$ חיובי, הסדרה בתוך האינטגרל אינה חסומה ולכן הטור שיתקבל לא יכול להתכנס. כאשר $x^2 - 3x + 2$ אי חיובי, הסדרה שמתקבלת היא סדרה מונוטונית יורדת (עד כדי הסימנים מתחלפים) ולכן התכנסות הטור מובטחת על ידי שימוש במבחן לייבניץ (לטורי מספרים). כלומר, הקטע שבו

טור הפונקציות מתכנס נקודתית הוא הקטע שבו

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) \le 0 \Longrightarrow I = [1,2].$$

כדי להוכיח שהטור מתכנס במידה שווה, נזהה שהסדרה שמגדירה את הסכום אכן מונוטונית יורדת ועל פי משפט 1.1.4 מספיק להוכיח שהסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $f_n(x) = \frac{e^{n(x^2-3x+2)}}{n}$ מתכנסת במידה שווה לאפס. נשתמש במשפט 1.1.1 ונחשב

$$\sup_{x\in[1,2]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[1,2]} \frac{e^{n(x^2-3x+2)}}{n} \le \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

מכאן שהטור אכן מתכנס במידה שווה בקטע. חשוב מאוד לזהות שמבחן לייבניץ קריטי עבור טור זה. אם היינו רוצים להפעיל את משפט 1.1.3, היה עלינו להשתמש בחסם

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n},$$

אלא שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ אינו מתכנס. כלומר, מבחן לייבניץ עלול להצליח במקרים שבהם מבחן M של ויירשטראס נכשל. □

1.2 שימושים להתכנסות במידה שווה

נפתח את החלק הזה ב-3 דוגמאות.

דוגמה 1.2.1. התכנסות נקודתית היא התכנסות לא טובה

1. מצאו את גבול הסדרה $f_n(x) = \arctan(x^n)$ בקטע $I = [0,2]$. האם פונקציית הגבול רציפה?
2. מצאו את גבול הסדרה $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in \left[\frac{1}{4n}, \frac{1}{2n}\right] \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$ בקטע $I = [0,1]$. האם מתקיים $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?
3. הראו כי הסדרה $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ מתכנסת במידה שווה בקטע $I = [0,1]$. האם מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$?

פתרון. 1. נפריד למקרה שבו $x \in (1,2]$, $x = 1$, $x \in [0,1)$.

- אם $0 \le x < 1$, מתקיים $x^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. לכן, $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \arctan(0) = 0$.
- אם $x = 1$, מתקיים $x^n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$. לכן, $f_n(1) \xrightarrow{n\to\infty} \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

- אם $1 < x \le 2$, מתקיים $x^n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. לכן, $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2}$.

אי לכך, הסדרה מתכנסת נקודתית לפונקציית הגבול

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & x = 1 \\ \frac{\pi}{2}, & 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

ניתן לזהות שעל אף שכל הפונקציות בסדרה רציפות, פונקציית הגבול אינה רציפה.

2. ראשית, ברור כי $f_n(0) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן מתקיים $f(0) = 0$ עבור הפונקציה הגבולית. לכל $x > 0$, נוכל לזהות שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$, יתקיים $x > \frac{1}{2n}$. אך מכאן נובע כי $f_n(x) = 0$ לכל $n > N$ ולכן גם בגבול. כלומר קיבלנו לסיכום שהסדרה מתכנסת נקודתית לפונקציית האפס בקטע. יחד עם זאת, נשים לב כי

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{4n}}^{\frac{1}{2n}} n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4},$$

בעוד שמתקיים

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

כלומר, הגבול של האינטגרל בקטע אינה שווה לאינטגרל של הפונקציה הגבולית.

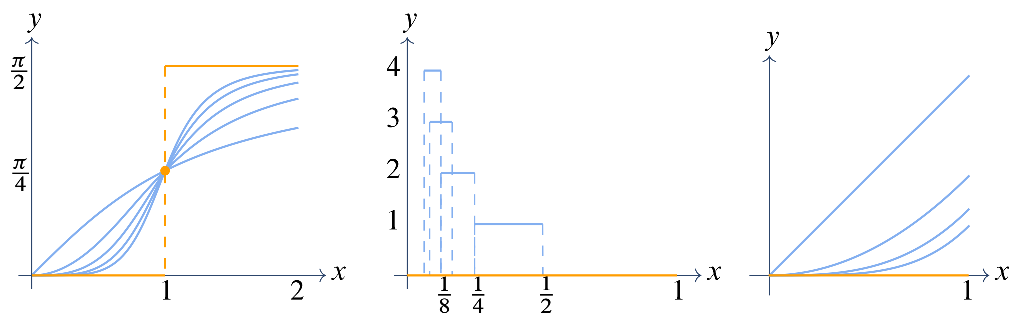
3. על ידי שימוש במשפט 1.1.1 נקבל כי

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

כלומר, סדרת הפונקציות מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס. יחד עם זאת, נזהה כי $f_n'(x) = x^{n-1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ שמתכנסת בנקודה $x = 1$ לערך 1 ולא לערך של $f'(1) = 0$. כלומר, אמנם קיבלנו שהגבול של סדרת הפונקציות הוא פונקציה גזירה, אך הנגזרת של הגבול לא שווה לגבול הנגזרות.

המחשה גרפית. שימו לב לאיברי הסדרה באיור 1.3 (דוגמאות 1,2,3 משמאל לימין בהתאמה). באיור השמאלי ניתן לראות איך הגרפים של $f_n(x)$ "מושכים למעלה" מימין ל-$x = 1$ ו"מושכים למטה" משמאל, והנקודה $x = 1$ "בורחת" מזה (בדיוק כמו שראינו שנקודות "בורחות" משרוול הערך הגבולי כאשר אין התכנסות במידה שווה. גם בדוגמה האמצעית ניתן לראות שעל אף שרוב הנקודות של הפונקציה מקבלות את הערך אפס, תמיד יש נקודות ש"בורחות" ומאפשרות את המצב שבו השטח שנשאר מתחת לגרף של הפונקציה נותר קבוע. לבסוף, הדוגמה הימנית היא הקשה יותר, שכן בה הסדרה דווקא כן מתכנסת במידה שווה. אבל רואים שעל

אף שהגרף כולו "הולך ויורד" לכיוון האפס, השיפוע שלו יכול עדיין "להשתגע". הדיון בהמשך הפרק יראה מתי בעיות כאלה לא יתרחשו. □



איור 1.3: המחשה של חלק מאיברי הסדרות בדוגמה 1.2.1.

הדוגמאות שלעיל מראות שמאוד מאתגר לזהות מה ניתן להסיק על הפונקציה הגבולית בהנתן מידע על הפונקציות בסדרה. הנ"ל נכון כמובן גם לטורי פונקציות שהם מקרה פרטי של סדרות פונקציות. ננסה לערוך סדר בדברים ולהציג את התוצאות שניתן לדעת, בצורה שמנוסחת לסדרות וגם לטורים. את ההוכחה למשפטים/טענות שלעיל נבצע עבור המקרה של סדרות פונקציות - והמקרה של טורי פונקציות מוכח באופן דומה כמקרה פרטי עבור סדרת הסכומים החלקיים.

משפט 1.2.1. רציפות הפונקציה הגבולית (לשון סדרות)

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בקטע I המתכנסות במידה שווה לפונקציה גבולית f. אזי, f רציפה ב-I.

הוכחה. תהא $x_0 \in I$ ונניח בלי הגבלת הכלליות שמדובר בנקודה פנימית של הקטע. עלינו להראות שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x \in I$

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

הכלים שעומדים ברשותינו כדי להוביל לאי השוויון הנ"ל הם הרציפות של הפונקציות בסדרה וההתכנסות שלה במידה שווה. ההתכנסות במידה שווה מטפלת בהפרשים מהצורה $|f_n(t) - f(t)|$ עבור ערכי t שונים בקטע, וכדי לעשות זאת נוסיף ונחסר את $f_n(x), f_n(x_0)$ בתוך הערך המוחלט, ונשתמש באי שוויון המשולש

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

בשלב הזה נוכל לזהות שהיות והסדרה מתכנסת במידה שווה, קיים (ממשפט 1.1.1) $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$

מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)|\,, |f_n(x_0) - f(x_0)| \le \sup_{t\in I} |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

נקבע איזשהו $N < n$ כנ"ל ונקבל כי לכל $x \in I$ (לאו דווקא בסביבת x_0), מתקיים

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3}$$

עתה, נוכל להשתמש בזה ש-n קבוע (בוחרים אותו מראש בהתאם ל-ε אך החל מרגע זה הוא נותר קבוע), ובכך ש-f_n רציפה, כדי להסיק שקיימת $\delta > 0$, עבורה לכל $x \in I$

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

לסיכום, הראינו כי לכל $\varepsilon > 0$ (אפשר לבחור $n \in \mathbb{N}$ שבעזרתו) ניתן לבחור $\delta > 0$ כך שלכל $x \in I$

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ולכן f רציפה, כדרוש. □

עתה נוכל לנסח גם את המקרה הפרטי שמתאים לטורי פונקציות.

משפט 1.2.2 רציפות הפונקציה הגבולית (לשון טורים)

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בקטע I כך שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ מתכנס במידה שווה ב-I. אזי, סכום הטור $S(x)$ רציף ב-I.

מסקנה חשובה. במידה וסדרת פונקציות/טור פונקציות רציפות מתכנסים נקודתית לפונקציה/סכום לא רציפים, ההתכנסות לא יכולה להיות במידה שווה.

משפט 1.2.3 אינטגרציה איבר-איבר (לשון סדרות)

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות בקטע $I = [a,b]$, המתכנסות במידה שווה לפונקציה גבולית f. אזי, f אינטגרבילית ב-I ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

יתרה מכך, סדרת הפונקציות $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ מתכנסת במידה שווה ב-I.

את התוצאה שלעיל מכנים לעתים בשם **הכנסת גבול תחת סימן האינטגרל** או **החלפת הסדר בין הגבול והאינטגרל**.

הוכחה. למעשה עלינו להוכיח שני דברים. הראשון הוא להוכיח שפונקציית הגבול f אכן אינטגרבילית, ולאחר מכן להוכיח את המסקנה על הגבול של האינטגרלים.

- (**את חלק זה לא תדרשו לדעת בקורס**) נוכיח כי f אינטגרבילית. לשם כך נוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P של הקטע $[a, b]$ שעבורה $\lambda(P) < \delta$, מתקיים

$$\mathrm{U}(f, P) - \mathrm{L}(f, P) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) \Delta x_i < \varepsilon$$

נשתמש בכך שההתכנסות היא במידה שווה, ועל פי הגדרה 1.1.3 נסיק שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ ולכל $x \in I$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

נקבע ערך כנ"ל של n, ונשתמש בכך ש-f_n אינטגרבילית כדי להסיק שקיימת $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P של הקטע I עם $\lambda(P) < \delta$, מתקיים

$$\mathrm{U}(f_n, P) - \mathrm{L}(f_n, P) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f_n(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f_n(x) \right) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

נשים לב שלכל i ולכל $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ מתקיים:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + |f_n(x) + f_n(y)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f_n(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \end{aligned}$$

אך מכאן נובע כי לכל חלוקה P עם $\lambda(P) < \delta$, מתקיים

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(f, P) - \mathrm{L}(f, P) &\le \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f_n(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f_n(x) \right) \Delta x_i \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{U}(f_n, P) - \mathrm{L}(f_n, P) < \varepsilon \end{aligned}$$

כלומר, f אינטגרבילית, כדרוש.

- (**את חלק זה תדרשו לדעת בקורס**) עתה, משידוע כי f אינטגרבילית, נוכיח את שאר המשפט. לשם כך נוכיח כי הסדרה $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ מכתנסת במידה שווה ב-I לפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

תחילה, נעריך את הביטוי

$$\begin{aligned}|F_n(x)-F(x)| &= \left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^x f_n(t)-f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_a^x |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_a^x \left(\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

בשלב זה נשתמש בכך שהאינטגרנד אינו פונקציה אלא קבוע, ולכן מתקיים

$$|F_n(x)-F(x)| \le (x-a)\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)| \le (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|$$

כלומר, גם כאשר נחשב את הסופרמום של האגף השמאלי, נקבל כי

$$\sup_{x\in[a,b]}|F_n(x)-F(x)| \le (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)|$$

על פי משפט 1.1.1, האגף הימני שואף לאפס, ולכן גם האגף השמאלי. אי לכך, הסדרה $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ אכן מתכנסת במידה שווה ב-I ל-F.

לבסוף, נשתמש בכך שהתכנסות גוררת התכנסות נקודתית ונציב את ההתכנסות הנקודתית ב-$x=b$. נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}F_n(b) = F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

כפי שרצינו להראות.

□

הערה. שימו לב כי אם היה ידוע כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ רציפות, היינו מקבלים ממשפט 1.2.1 כי f רציפה, ובפרט אינטגרבילית. במקרה זה היינו יכולים לדלג על החלק הראשון של ההוכחה.

משפט 1.2.4. אינטגרציה איבר-איבר (לשון טורים)

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות בקטע $I=[a,b]$, כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב-I. אזי, סכום הטור $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ הוא פונקציה אינטגרבילית בקטע ומתקיים

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

לבסוף, נעבור למשפט על גזירות של סדרות/טורי פונקציות. מתברר שבניגוד לרציפות ואינטגרציה, הגזירות לאו דווקא מורשת באופן מידי גם אם ידוע שהסדרה מתכנסת במידה שווה בקטע. מתברר שהתוצאה המוצלחת ביותר שנוכל להשיג היא המקרה שבו ידוע שסדרת הנגזרות היא זו שמתכנסת במידה שווה, וההוכחה תתבצע על ידי שימוש במשפט 1.2.3 על אינטגרציה (בחזרה לסדרה המקורית).

משפט 1.2.5. נגזרת איבר-איבר (לשון סדרות)

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות בקטע $I=[a,b]$ בעלות נגזרות רציפות בקטע. נניח כי

- קיימת $x_0\in I$ שבה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית.
- $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ב-I לפונקציה g.

אזי, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה בקטע לפונקציה f בעלת נגזרת רציפה ו-$f'=g$, כלומר

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x)=f'(x)\,,\qquad \forall x\in[a,b]\,.$$

הוכחה. על פי המשפט היסודי של החדו"א, לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים

$$f_n(x)=\int\limits_{x_0}^{x} f'_n(t)\,\mathrm{d}t+f_n(x_0)$$

על פי הנתון, הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ב-x_0 ולכן

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=f(x_0)\,.$$

כמו כן, היות ונתון כי $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה g ומדובר בפונקציות רציפות, נוכל להשתמש במשפט 1.2.3 ובמשפט 1.2.1 כדי להסיק שהסדרה $\int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,\mathrm{d}t$ מתכנסת במידה שווה ל-$\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$. אם נשלב את שתי ההתכנסויות, נקבל כי הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה בקטע לפונקציה f שמקיימת

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\int\limits_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t+f(x_0)\,.$$

היות ו-g פונקציה רציפה, נובע מהמשפט היסודי של החדו"א כי f גזירה, וכי מתקיים $f'(x)=g(x)$, כדרוש.
□

משפט 1.2.6. גזירה איבר-איבר (לשון טורים)

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות ב-I בעלות נגזרות רציפות בקטע. נניח כי

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ מתכנס עבור $x_0 \in I$ כלשהו.
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ מתכנס במידה שווה ב-I.

אזי, הטור המקורי מתכנס במידה שווה ב-I, סכום הטור $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ הוא פונקציה בעלת נגזרת רציפה, ומתקיים

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\,.$$

את התוצאה שלעיל מכנים גם כן בשם **החלפת סדר בין סכום לנגזרת** או **גזירה תחת סימן הסכום**.

הערה. שימו לב שהמשפטים שהוכחנו בקורס מספקים תנאי מספיק אך לא הכרחי. כלומר, ייתכן שסדרה לא מתכנסת במידה שווה אך מסקנות המשפטים יתקיימו.

דוגמה 1.2.2. התכנסות לפונקציה לא רציפה

תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת הפונקציות המוגדרת על ידי $f_n(x) = \frac{x^{1+\frac{1}{n}}}{|x|}$ לכל $x \in [-1,1]$ ו-$x \neq 0$ ו-$f_n(0) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. מצאו את הפונקציה הגבולית של סדרה זו ובדקו האם היא מתכנסת במידה שווה.

פתרון. ראשית, ברור כי בנקודה $x = 0$, הפונקציה הגבולית מקבלת את הערך 0. עבור יתר הנקודות

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{1+\frac{1}{n}}}{|x|} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

כדי להשתכנע שההתכנסות אינה במידה שווה, שימו לב כי הפונקציות $f_n(x)$ כולן רציפות, בעוד $f(x)$ אינה רציפה בראשית. על פי משפט 1.2.1, לא יתכן שההתכנסות היא במידה שווה. □

דוגמה 1.2.3. אינטגרציה איבר-איבר

חשבו את האינטגרל

$$\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}\right) \mathrm{d}x\,.$$

פתרון. את טור הפונקציות שנמצא בתוך האינטגרל ניתן לחשב במפורש, אך אולי לא בשלב הזה של הקורס.

עד שנלמד לעשות זאת, ננסה להחליף את הסדר בין הסכום והאינטגרל, ולשם כך נשתמש במשפט 1.2.4. התנאי לשימוש במשפט הוא שמדובר בטור של פונקציות אינטגרביליות (מה שברור, כי הן רציפות) וכי הטור מתכנס במידה שווה. כדי להוכיח שהוא מתכנס במידה שווה נשתמש במבחן M של ויירשטראס (משפט 1.1.3) ונזהה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [1,2]$, מתקיים

$$|ne^{-nx}| \leq ne^{-n}.$$

על ידי שימוש במבחן השורש/המנה, ברור כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ כאשר $M_n := ne^{-n}$ הוא טור מתכנס. אי לכך, הטור אכן מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע וניתן לכתוב

$$\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^2 ne^{-nx} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} - e^{-2n}.$$

את הטורים שקיבלנו לעיל ניתן לחשב כי מדובר בסכום של טורים הנדסיים, אם נכתוב אותם בצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} - e^{-2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-1}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-2}\right)^n = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} - \frac{e^{-2}}{1-e^{-2}}.$$

□

דוגמה 1.2.4 משוואות דיפרנציאליות

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

הוכיחו כי הפונקציה גזירה ברציפות 3 פעמים לפחות, וכי היא מקיימת $f(x) = f^{(3)}(x)$ לכל $x \in [-1,1]$.

פתרון. כדי לבדוק שהפונקציה גזירה ברציפות 3 פעמים, נוכיח על פי משפט 1.2.6 שהיא גזירה ברציפות ונחזור על שיטת ההוכחה פעמיים נוספות. על מנת להשתמש במשפט עלינו להוכיח כי

- $f(x)$ מתכנס נקודתית בנקודה כלשהי בקטע $[-1,1]$, וזה אכן קורה כאשר $x = 0$ (ששם הטור טריוויאלי).
- טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$ מתכנס במידה שווה בקטע. שימו לב שטור הנגזרות מתחיל מ-$n = 1$ כי הנגזרת של האיבר שהתקבל עבור $n = 0$ היא אפס. הטור אכן מתכנס בהחלט ובמידה שווה לפי מבחן M של ויירשטראס כי לכל $x \in [-1,1], n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left| \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \right| \leq \frac{1}{(3n-1)!},$$

והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)!}$ מתכנס (על ידי שימוש במבחן המנה, למשל).

מכאן שהפונקציה $f(x)$ אכן גזירה ברציפות וניתן לגזור אותה איבר-איבר. כלומר

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}.$$

עתה, ברור שניתן לחזור על התהליך שביצענו שוב עם חישוב כמעט זהה ולקבל שהיא למעשה גזירה מכל סדר. לאחר גזירה נוספת נקבל

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$$

ואז

$$f^{(3)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=f(x),$$

וזאת בדיוק הזהות שנתבקשנו להוכיח. $\square$

1.3 טורי חזקות

בפרק זה נעבור לדון במקרה פרטי של טורי פונקציות.

הגדרה 1.3.1. טור חזקות סביב x_0

טור פונקציות מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

מכונה בשם **טור חזקות סביב x_0**, והסדרה $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ מכונה בשם **מקדמי הטור**.

הערה/מוסכמה. למעשה, טור חזקות צריך להכתב בצורה

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

היות ו-$(x-x_0)^0$ לא מוגדר כאשר $x=x_0$. יחד עם זאת, כתיבה כזאת של טורים מגושמת מאוד ולרוב נשתמש במוסכמה ש-$(x-x_0)^0=1$ גם כאשר $x=x_0$.

הערה נוספת. בקורס שלנו, נשתמש לרוב בטורים סביב $x_0=0$, כלומר טורי חזקות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$. לא קשה לזהות כי טורי חזקות הם מקרה פרטי של טורי פונקציות, שבהם הפונקציות שנסכמות בטור הן חזקות של $x-x_0$. הסיבה שטורים אלו מקבלים מקום מיוחד משלהם הוא הפשטות שלהם, והעובדה שמתברר

שלטורים אלו יש תכונות מיוחדות שהופכות את העבודה איתם לנוחה מאוד. דוגמה לכך היא המשפט החשוב הבא

משפט 1.3.1. משפט אבל/קיום רדיוס התכנסות

יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות המתכנס נקודתית בנקודה $x_0 \neq 0$ כלשהי. אזי, לכל $0 < r < |x_0|$, הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע $[-r, r]$.

הוכחה. את ההתכנסות בהחלט ובמידה שווה נוכיח בעזרת משפט 1.1.3, ולשם כך ננסה להעריך את הביטוי

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le |a_n x_0^n| \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n .$$

לפני שנסמן את סדרת החסמים שלנו, נשתמש בעובדה כי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ טור מספרים מתכנס, ועל פי התנאי ההכרחי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0,$$

ובפרט, הסדרה $\{a_n x_0^n\}_{n=0}^{\infty}$ היא סדרה חסומה ולכן

$$|a_n x^n| \le K \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n ,$$

ואת הביטוי באגף הימני נסמן בתור סדרת החסמים $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$. נשים לב שבבירור $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ הוא טור מספרים מתכנס היות ומדובר בטור הנדסי עם מנה קטנה ממש מ-1.

לסיכום, מתקיימים תנאי המשפט והטור המקורי אכן מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע. □

הערה. כאשר $x_0 \neq 0$, מקבלים כי אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ מתכנס בנקודה $x_1 \neq x_0$, אזי לכל $0 < r < |x_1 - x_0|$, הטור יתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע $[x_0 - r, x_0 + r]$.

המשפט מלמד אותנו פרט חשוב, והוא שאם ידוע כי טור חזקות מתכנס בנקודה כלשהי, הוא יתכנס אוטומטית בכל נקודה שקרובה יותר ל"מרכז" הטור, הנקודה x_0. מכאן אפשר להסיק שהדרך למצוא את התחום המלא שבו טור מתכנס, הוא לחפש את הנקודה ה"רחוקה" ביותר שבה הטור מתכנס, ובכך יעסוק בדיוק המשפט הבא.

משפט 1.3.2. קיום רדיוס התכנסות

יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות. אזי, קיים מספר $R \in [0, \infty]$ שעבורו

- אם $R = 0$, הטור מתכנס ב-$x = 0$ ומתבדר ב-$x \neq 0$.
- אם $R = \infty$, הטור מתכנס בכל $\mathbb{R}$.
- אם $R \in (0, \infty)$, הטור מתכנס בהחלט ב-$|x| < R$ ומתבדר ב-$|x| > R$.

הערות.

- המספר R מכונה בשם **רדיוס ההתכנסות** של הטור.
- אם $R \in (0, \infty)$, המשפט לא אומר דבר על המקרה שבו $|x| = R$! שם יכולה להיות התכנסות או התבדרות וצריך לבדוק כל מקרה בנפרד.
- כאשר $0 \neq x_0$, מסקנת המשפט היא שהטור מתבדר כאשר $|x - x_0| < R$ ומתבדר כאשר $|x - x_0| > R$.

הוכחה. נוכיח כי הנוסחה

$$R := \sup\left\{r \geq 0 \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ מתכנס בקטע } [-r, r]\right\}$$

מקיימת את הדרוש מרדיוס ההתכנסות (נעשה זאת למקרה הסופי ושונה מאפס). אכן, אם $|x| < R$, ניתן למצוא $0 < |x| < r < R$ שעבורו הטור מתכנס (בהחלט!) בקטע $[-r, r]$ ובפרט בנקודה x. מצד שני אם $R < |x|$ ונניח שהטור מתכנס בנקודה זו, נקבל כי לכל $|x| > r > R$ הטור מתכנס בקטע $[-r, r]$ על פי משפט 1.3.1 בסתירה להגדרה של R. □

מומלץ. לוודא את נכונות הנוסחה לרדיוס כאשר $R = \infty, 0$.

מתברר שקיימת נוסחה מפורשת לרדיוס ההתכנסות שאפשר לחשב בעזרת סדרת המקדמים של הטור.

משפט 1.3.3 מבחן קושי-הדמרד

יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות. אזי, רדיוס ההתכנסות מקיים את הנוסחה

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

הוכחה. לשם הפשטות נניח כי הגבול במכנה הוא גבול רגיל (ולא גבול במובן של גבול חלקי עליון) וכי הוא סופי ושונה מאפס.

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

כדי להוכיח שהטור החזקות מתכנס ב-x, נשתמש במבחן השורש ונקבל כי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| < 1,$$

כלומר, הטור $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס ב-x. באופן דומה, אם

$$|x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

נקבל כי הגבול שחישבנו בעזרת מבחן השורש יהיה גדול מ-1, והטור יתבדר. אך מכאן נובע שהביטוי באגף הימני של המשפט אכן מקיים את כל התנאים של רדיוס התכנסות, ובכך נקבל את הדרוש. □

הערה. המקרה שבו הגבול הוא אפס או אינסוף מוכח באופן דומה ומושאר כתרגיל. כמו כן, אין חשיבות לכך שעבדנו דווקא עם המקרה שבו הגבול קיים (במקום במקרה שמדובר בגבול חלקי עליון). עשינו זאת בעיקר על מנת לפשט את ההוכחה, ומומלץ לנסות לוודא את נכונותה במקרה שמדובר בגבול חלקי עליון.

המשפט הבא מספר דרך נוספת לחישוב רדיוס התכנסות, שלא תמיד עובדת (אך לעתים היא עובדת ונוחה יותר מהמשפט שזה עתה הוכחנו).

משפט 1.3.4. מבחן ד'אלמברט

יהא $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ טור חזקות. אזי

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

במידה והגבול קיים (במובן הרחב).

הוכחה. ידוע כי אם $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ קיים במובן הרחב, הוא שווה לגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. לכן, ההוכחה נובעת ממשפט 1.3.3. □

הערה. נדגיש בשנית כי באופן כללי לא מובטח שהגבול במשפט 1.3.4 קיים, בעוד שהגבול במשפט 1.3.3 תמיד קיים (כי גבול חלקי תמיד קיים במובן הרחב מעצם הגדרתו).

דוגמה 1.3.1. חישוב תחומי התכנסות

חשבו את תחומי ההתכנסות של הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^5+n^4+3}}{n^3+4}x^n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}x^n$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n$.

פתרון. ראשית, נשים לב כי המשותף לכל הסעיפים הוא שבתחילתם נחשב את רדיוס ההתכנסות, ולאחריו נציב את נקודות הקצה של הקטע $[-R,R]$ ונבדוק פרטנית מה קורה בכל אחד מהם.

1. על פי משפט 1.3.3

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt[5]{n^5+n^4+3}}{n^3+4}}.$$

כדי לטפל בביטוי נוציא מהמונה והמכנה את החזקות הדומיננטיות ונכתוב

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt[5]{n^5+n^4+3}}{n^3+4}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^5}}}{n^3\left(1+\frac{4}{n^3}\right)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\sqrt[n]{\frac{\sqrt[5]{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^5}}}{1+\frac{4}{n^3}}}=1.$$

שימו לב שהגבול נובע מכך שכל אחד מהשורשים שקיבלנו שואפים לאחד על פי התוצאות בנספח לפרק זה (שמומלץ מאוד לקרוא כדי להתרענן בכלים לחישובי גבולות מהסוג הזה). כלומר $R=1$ ולכן לכל $|x|<1$ הטור מתכנס ולכל $|x|>1$ הטור מתבדר. נותר לבדוק מה קורה כאשר $x=\pm 1$, שם מקבלים את טורי המספרים

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{n^5+n^4+3}}{n^3+4},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ \sqrt[5]{n^5+n^4+3}}{n^3+4}.$$

נשים לב שהטור השמאלי מתכנס, למשל על ידי שימוש במבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{n^2}$ (וודאו זאת!), והטור הימני מתכנס כי הוא מתכנס בהחלט (שהרי לאחר השמת ערך מוחלט על הטור הימני, מתקבל הטור השמאלי שכבר הוכחנו כי הוא מתכנס). לכן, נקבל כי טור החזקות מתכנס לכל $x\in[-1,1]$.

2. על פי משפט 1.3.3

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{100}}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{100}}=\frac{1}{2}.$$

כלומר $R=2$ ומכאן שנותר לבדוק התכנסות/התבדרות בקצוות $x=\pm 2$. בקצוות אלה מתקבלים הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{100},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,n^{100}.$$

שני הטורים מתבדרים היות והאיבר הכללי של טורים אלו אינו שואף לאפס (התנאי ההכרחי). לכן, טור החזקות מתכנס לכל $x \in (-1,1)$. שימו לב שכפי שציינו לאחר משפט 1.3.2 בקצוות של תחום ההתכנסות ייתכן כי הטור יתכנס ויתכן כי הטור יתבדר. עלינו לבדוק כל מקרה לגופו.

3. על פי משפט 1.3.4

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty.$$

כלומר, הטור מתכנס בכל $\mathbb{R}$.

4. על פי משפט 1.3.3 מקבלים $R=1$. בקצוות הקטע $x=\pm 1$ מתקבלים הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

כאשר $x=1$ מתקבל טור לייבניץ מתכנס וכאשר $x=-1$ מתקבל הטור ההרמוני המתבדר. לכן, תחום ההתכנסות של הטור הוא $(-1,1]$.

5. נשים לב שלו ננסה לחשב את הרדיוס על פי משפט 1.3.3 נקבל כי

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}} = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, & n \text{ זוגי} \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, & n \text{ אי-זוגי} \end{cases},$$

ולסדרה זו אין גבול. יחד עם זאת, הגבול של תת-הסדרה של האיברים במיקום הזוגי הוא e והגבול של תת-הסדרה של האיברים במיקום האי זוגי הוא $\frac{1}{e}$. על פי טענה 1.4.1, מקבלים כי

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{e, \frac{1}{e}\right\} = e,$$

ולכן $R=\frac{1}{e}$. בקצוות הקטע מקבלים את הטורים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}}{e^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}}{e^n}.$$

(**בדיקת ההתכנסות בקצוות היא תרגיל קשה שלא הועבר בהרצאה. הוא בהחלט מומלץ כתרגול נוסף במבחני התכנסות לטורים, אך לא מחייב.**) לא כל כך פשוט לראות את זה, אך למעשה האיבר הכללי של הטור לא שואף לאפס. כדי להראות זאת נתבונן רק באיברים במיקום הזוגי, כלומר באיברים

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{(2n)^2}}{e^{2n}},$$

ונשכתב את המונה על פי הקשר $x = e^{\ln(x)}$, כלומר

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{(2n)^2}}{e^{2n}} = \frac{e^{(2n)^2\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}}{e^{2n}}.$$

בשלב הזה נשתמש בקירוב טיילור של $\ln(1+x)$ על מנת להעריך את הביטוי במונה. נשים לב כי

$$(2n)^2\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \approx (2n)^2\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(2n)^2}\right) = 2n-\frac{1}{2}.$$

כלומר

$$\frac{e^{(2n)^2\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}}{e^{2n}} = e^{(2n)^2\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-2n} \approx e^{-\frac{1}{2}}.$$

בצורה קצת יותר פורמלית, ניתן להוכיח (על ידי שימוש בכלל לופיטל או במשפט טיילור), כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{(2n)^2}}{e^{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{(2n)^2\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-2n} = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0.$$

אי לכך, הטור לא מתכנס, ונסיק כי תחום ההתכנסות של טור החזקות הוא הקטע הפתוח $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

$\square$

1.3.1 תכונות של טורי חזקות

לאחר שלמדנו על המבנה הכללי של טורי חזקות ועל המבנה במיוחד של תחומי ההתכנסות שלהם, נוכל לעבור ולדון בתכונות נוספות שטורים אלו מקיימים.

משפט 1.3.5. התכנסות במידה שווה של טורי חזקות

יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R \neq 0$. אזי

1. טור החזקות מתכנס בהחלט ובמידה שווה בכל קטע $[a, b] \subset (-R, R)$.
2. טור החזקות מתכנס במידה שווה בקטע $[0, R]$ אם ורק אם הוא מתכנס בנקודה $x = R$.
3. טור החזקות מתכנס במידה שווה בקטע $[-R, 0]$ אם ורק אם הוא מתכנס בנקודה $x = -R$.

הערה. שימו לב שהסעיף הראשון של המשפט למעשה דומה מאוד למשפט 1.3.1. ההבדל העיקרי הוא שאת הנקודה $x = R$ או $x = -R$ לא בהכרח ניתן להציב בטור על מנת להשתמש במשפט הקודם, ועדיין מקבלים התכנסות במידה שווה בכל תת קטע סגור וחסום של $(-R, R)$.

הוכחה. נוכיח רק את הסעיף הראשון, היות ושני הסעיפים האחרים דורשים שימוש בקריטריון קושי להתכנסות טורים שחורג מחומר הקורס. יהא $[a, b] \subset (-R, R)$ קטע סגור וחסום נתון. נסמן $0 < r < R$ שעבורו $[a, b] \subset [-r, r]$. היות וטור החזקות מתכנס בנקודה $x = \frac{r+R}{2}$, נשתמש במשפט 1.3.1 כדי להסיק את הדרוש. $\square$

המשפט הבא הוא המשפט המסכם של חלק זה, שמציג את החוקים המרכזיים לגבי מה מותר ומה אסור לבצע בטורי חזקות.

משפט 1.3.6. תוצאות מסכמות, טורי חזקות

יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R \neq 0$. אזי

1. הפונקציה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ רציפה בתחום ההתכנסות של הטור.
2. הפונקציה $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ בעלת רדיוס התכנסות R, ולכל $x \in (-R, R)$, מתקיים $g(x) = f'(x)$. כמו כן, אם הטור המקורי מתבדר בקצוות, גם טור הנגזרות יתבדר בקצוות.
3. הפונקציה $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ בעלת רדיוס התכנסות זהה לשל f ולכל $x \in (-R, R)$ מתקיים $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. אם הטור המקורי מתכנס בקצוות, גם טור האינטגרלים יתכנס בקצוות.

מסקנה חשובה. מתוך המסקנה נובע כי טורי חזקות גזירים אינסוף פעמים, שכן את פעולת הגזירה איבר-איבר ניתן לבצע שוב ושוב עקב כך שרדיוס ההתכנסות של הנגזרות נשאר זהה.

הוכחה. 1. לכל x בתחום ההתכנסות של הטור (גם בקצוות) ניתן למצוא קטע $[a,b]$ חלקי לתחום ההתכנסות שבו, על פי משפט 1.3.5, הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה. היות והטור מורכב מפונקציות רציפות נוכל להשתמש גם במשפט 1.2.2 כדי להסיק שפונקציית הגבול/סכום הטור אכן פונקציה רציפה בקטע זה.

2. על פי משפט 1.3.3, רדיוס ההתכנסות של $g(x)$ מקיים

$$\tilde{R} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{n\left|a_n\right|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{n}\,\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}} = R.$$

כלומר, רדיוס ההתכנסות של הטור זהה. עתה, נשים לב כי לכל $x \in (-R,R)$ נוכל לבחור קטע $[-r,r] \subset (-R,R)$ שמכיל את x. על פי משפט 1.3.5, הטור $g(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע, והטור $f(x)$ מתכנס נקודתית ב-x. על פי משפט 1.2.6, f פונקציה גזירה ונגזרתה היא הפונקציה g, כפי שרצינו להראות.

3. על פי משפט 1.3.3, רדיוס ההתכנסות של $F(x)$ מקיים

$$\tilde{R} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{\left|a_n\right|}{n+1}}} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\,\sqrt[n]{\left|a_n\right|}} = R.$$

כלומר, רדיוס ההתכנסות של הטור זהה. עתה, נשים לב כי לכל $x \in (-R,R)$ נוכל לבחור קטע $[-r,r] \subset (-R,R)$ שמכיל את x. על פי משפט 1.3.5, הטור $f(x)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע. על פי משפט 1.2.4, ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר ולקבל כי

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = F(x)$$

כדרוש.

□

דוגמה 1.3.2. חישובים לדוגמה עם טורי חזקות

היעזרו בטור החזקות $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ על מנת למצוא טורי חזקות המתכנסות לפונקציות הבאות סביב הראשית.

1. $f(x) = \ln(1-x)$.
2. $f(x) = \arctan(x)$.

פתרון. 1. על פי משפט 1.3.6, ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר לטור החזקות ההנדסי לכל $|x| < 1$,

כלומר

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

כאשר מצד שני, ידוע לנו כי

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

מהשוואה בין הביטויים נקבל כי לכל $|x| < 1$ מתקיים

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

שימו לב כי הטור המקורי מתכנס לכל $|x| < 1$ ואילו הטור החדש מתכנס (וודאו זאת!) בקטע $[-1,1)$.
על פי משפט 1.3.6, הטור רציף גם בנקודה $x=-1$ ולכן נסיק כי בנקודה זו

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(1-(-1)) = \ln(2).$$

2. נשים לב כי אם לכל $|t| < 1$ מתקיים $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, אזי לכל $|x| < 1$, אם נסמן $t = -x^2$, נקבל כי ערך זה עדיין נמצא בתחום ההתכנסות של הטור ההנדסי, כלומר

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

על פי החישוב שעשינו זה עתה ברור כי הטור מתכנס לכל $|x| < 1$ אך גם בדיקה של רדיוס ההתכנסות על פי הנוסחה ממשפט 1.3.3 תראה כי הרדיוס 1. ועתה, נשתמש שוב באינטגרציה על פי משפט 1.3.6 ונקבל כי

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

□

1.3.2 טורי טיילור

נניח כי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות $R \neq 0$. ניתן לזהות כי

$$f(0) = a_0.$$

על פי משפט 1.3.6, ניתן לגזור את הטור ולקבל כי

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

ובפרט

$$f'(0)=a_1.$$

נמשיך בדרך זו ונקבל כי

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k)\,a_n x^{n-k}.$$

$$f^{(k)}(0)=k!a_k \Longrightarrow a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

כלומר, אם f נתונה כטור חזקות סביב $x=0$, היא גזירה אינסוף פעמים ומתקיים

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

הגדרה 1.3.2 פולינום וטור טיילור

תהא f פונקציה גזירה n פעמים ברציפות בנקודה x_0. אזי **פולינום טיילור מסדר n** של f סביב x_0 הוא הפולינום

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\ .$$

אם f גזירה מכל סדר בסביבה x_0 ואם הסדרה $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-f בסביבה זו כאשר $n\to\infty$, מקבלים כי

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

לכל x בסביבה, והביטוי הנ"ל מכונה בשם **טור הטיילור** של f סביב x_0. אומרים שפונקציה f היא **אנליטית** ב-x_0 אם היא ניתנת לפיתוח לטור טיילור סביב x_0 עם רדיוס התכנסות חיובי.

הערה. כפי שראינו, כל טור חזקות מתכנס ברדיוס חיובי מגדיר פונקציה אנליטית בנקודת המרכז של הטור.

דוגמה 1.3.3. פונקציה חלקה ולא אנליטית

הפונקציה $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ עם $f(0) = 0$ היא פונקציה גזירה מכל סדר בכל $\mathbb{R}$, ומקיימת $f^{(n)}(0) = 0$. כלומר, אם היינו מניחים ש-f אנליטית בראשית, היה מתקיים

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0,$$

וזאת כמובן תוצאה שגויה. אי לכך, נסיק כי ל-f לא קיים פיתוח לטור טיילור סביב הראשית על אף שהפונקציה גזירה שם מכל סדר.

היות ולא כל פונקציה גזירה מכל סדר ניתנת לפיתוח לטור חזקות, נרצה מבחן שיאפשר לנו לבדוק האם לפונקציה קיים פיתוח לטור חזקות.

משפט 1.3.7. תנאי מספיק לאנליטיות

תהא f גזירה מכל סדר בסביבת נקודה x_0, ונניח שקיים $K > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל x בסביבה זו

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq K^n.$$

אזי, f ניתנת לפיתוח לטור טיילור סביב x_0 ברדיוס חיובי כלשהו.

הערה. למעשה, המשפט נכון בשני הכיוונים, וכל פונקציה אנליטית מקיימת שהנגזרות שלה חסומות בסביבת מרכז הטור. יחד עם זאת, אין לנו את הכלים להוכיח את החלק הזה של המשפט, ואת החלק הראשון לא נוכיח היות וראינו אותו בקורסים קודמים.

לסיום פרק זה נציג דוגמאות לטורי טיילור מפורסמים וחשובים.

דוגמה 1.3.4 טורי טיילור מפורסמים

1. הפונקציה $f(x)=\frac{1}{1-x}$ אנליטית ב-$x=0$ ומקיימת

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n},\qquad\forall\,|x|<1.$$

בהמשך הקורס נציג ללא הוכחה, שכל פונקציה רציונלית (מנה של פולינומים) אנליטית בכל נקודה בתחום הגדרתה.

2. הפונקציה $f(x)=e^{x}$ אנליטית ב-$x=0$ ומקיימת

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!},\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$

למעשה, ניתן לפתח די בקלות את הפונקציה סביב כל נקודה שאינה $x=0$ על פי הקשר

$$e^{x}=e^{x-x_0+x_0}=e^{x_0}e^{x-x_0}=e^{x_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^{n}}{n!}.$$

כאשר התייחסנו ל-$x-x_0$ כאל מספר קרוב לראשית. כלומר, e^{x} אנליטית בכל $\mathbb{R}$.

3. הפונקציות $f(x)=\sin(x),g(x)=\cos(x)$ אנליטיות בכל $\mathbb{R}$. סביב $x=0$, הן מבוטאות על ידי טור הטיילור הידוע

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{(2n)!},\qquad\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

כאשר רדיוס ההתכנסות הוא כל $\mathbb{R}$.

הערה. שימו לב שקיימים טורי טיילור/טורי חזקות רבים בעלי רדיוס התכנסות $\mathbb{R}$. יש להזהר לגבי שאלת ההתכנסות במידה שווה, שכן אמנם הטורים מתכנסים בהחלט ובמידה שווה בכל קטע סגור וחסום, אך הם לא מתכנסים במידה שווה בכל $\mathbb{R}$ (מדובר בתוצאה כללית יותר שלא נוכיח בקורס).

1.4 נספח - גבולות חלקיים

נספח מקוצר זה נועד לעזור בחישוב של רדיוסי התכנסות של טורי חזקות, על ידי תזכורת זריזה של גבולות חלקיים והגבול החלקי העליון.

הגדרה 1.4.1 גבול חלקי

תהא $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים. אומרים ש-$L \in \mathbb{R}$ הוא **גבול חלקי** של הסדרה אם קיימת תת-סדרה $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול L.

הערה. ברור שאם $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, כל תת-סדרה שלה תתכנס גם היא לגבול L, ולכן זהו הגבול החלקי היחיד שלה. אך כמובן שקיימות סדרות שיש להן הרבה גבולות חלקיים.

הטענה הבאה עוזרת לנו להבין מהם הגבולות החלקיים של סדרה נתונה.

טענה 1.4.1 איחוד של סדרות מתכנסות

תהא $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים. נניח כי נתונות N תתי-סדרות

$$\left\{b_{n_k^1}\right\}_{k=1}^{\infty}, \dots, \left\{b_{n_k^N}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

כך שכל איבר בסדרה המקורית נמצא באחת מתתי-הסדרות וכי

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k^i} = L_i$$

עבור $L_i \in \mathbb{R}$ (כלומר, כל תתי-הסדרות מתכנסות). אזי, $\{L_1, \dots, L_N\}$ הם כל הגבולות החלקיים של $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

הוכחה. ראשית, ברור כי $L_1, \dots, L_N$ הם גבולות חלקיים על פי הגדרה 1.4.1. נניח כי K גבול חלקי נוסף ששונה מ-L_i לכל $i = 1, \dots, N$. על פי הגדרה, קיימת תת סדרה $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול K. עתה, נזכיר כי כל איבר בסדרה המקורית (ולכן גם בתת-הסדרה זו) שייך לאחת מתתי הסדרות הנתונות. בפרט, באחת מתתי-הסדרות לפחות, אפשר למצוא אינסוף איברים מתת-הסדרה $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. נסמן את האיברים הללו ב-$\left\{b_{n_{k_\ell}}\right\}_{\ell=1}^{\infty}$. עתה, נשים לב שתת סדרה זו מתכנסת מצד אחד ל-K ומצד שני ל-L_i עבור i כלשהו, ולכן $K = L_i$. כלומר - אין גבולות חלקיים אחרים. $\square$

הגדרה 1.4.2 גבול חלקי עליון

תהא $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ונסמן ב-$\mathcal{L}$ את קבוצת כל הגבולות החלקיים של הסדרה. ה**גבול החלקי**

העליון של הסדרה מוגדר להיות

$$\overline{\lim}\, b_n = \sup \mathcal{L}.$$

כלומר, $\overline{\lim}\, b_n$ הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

כלומר, דרך טובה לחשב את הגבולות החלקי העליון של סדרה יהיה להשתמש בטענה 1.4.1 כדי לחשב את הגבולות החלקיים השונים, ועל פי הגדרה, הגבול החלקי העליון יהיה המקסימום.

דוגמה 1.4.1 חישוב גבול חלקי עליון

חשבו את $\overline{\lim}\, b_n$ כאשר $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא הסדרה

$$b_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & n \text{ זוגי} \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, & n \text{ אי זוגי} \end{cases}.$$

פתרון. נשים לב ששתי תתי-הסדרות $\{b_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{b_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ מכסות את כל איברי הסדרה ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} = e,$$

ולכן על פי טענה 1.4.1, נקבל כי הגבולות החלקיים של הסדרה הם בדיוק $e, 1$ ועל פי הגדרה 1.4.2

$$\overline{\lim}\, b_n = \max\{1, e\} = e.$$

□

לסיכום נספח זה, נציין שהגבול החלקי העליון הוא תמיד גבול חלקי של הסדרה.

טענה 1.4.2 גבול חלקי עליון הוא גבול חלקי

תהא $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים. אזי, קיימת תת-סדרה $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שעבורה

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \overline{\lim}\, b_n.$$

הוכחה. ראשית, נשים לב כי אם L הוא גבול חלקי של $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, קיימת תת-סדרה המתכנסת לגבול חלקי זה, ולכן לכל $\varepsilon > 0$, הקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ מכיל אינסוף מאיברי הסדרה.

יהא $\varepsilon_1 = 1$, ונשתמש בהגדרה של הגבול החלקי העליון כדי להסיק שקיים גבול חלקי L_1 שעבורו

$$\overline{\lim}\, b_n - \frac{1}{2} < L_1 \le \overline{\lim}\, b_n .$$

היות ו-L_1 גבול חלקי של הסדרה, יש אינסוף מאיברי הסדרה בקטע $\left(L_1 - \frac{1}{2}, L_1 + \frac{1}{2}\right)$, ובגלל שהמרחק של L_1 מ-$\overline{\lim}\, b_n$ הוא לכל היותר $\frac{1}{2}$, נסיק שיש איבר בסדרה שנסמן ב-b_{n_1} שעבורו

$$\left| b_{n_1} - \overline{\lim}\, b_n \right| < 1.$$

בצורה דומה נמשיך ונגדיר $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ ונסיק שקיים גבול חלקי L_k שעבורו

$$\overline{\lim}\, b_n - \frac{1}{2k} < L_k \le \overline{\lim}\, b_n ,$$

ומפני שיש אינסוף מאיברי הסדרה בקטע $\left(L_k - \frac{1}{2k}, L_k + \frac{1}{2k}\right)$, נסיק שקיים איבר b_{n_k} שמופיע בסדרה המקורית אחרי $b_{n_{k-1}}$, שמקיים

$$\left| b_{n_k} - \overline{\lim}\, b_n \right| < \frac{1}{k}.$$

תת הסדרה $\left\{b_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ שבנינו בצורה זו בבירור מתכנסת ל-$\overline{\lim}\, b_n$, כדרוש. □

1.5 נספח - חישובי גבולות

בחלק זה נציג בקצרה מספר דרכים לחישוב גבולות נפוצים בהקשר של טורי חזקות ורדיוסי התכנסות.

טענה 1.5.1

יהא $C > 0$ נתון. אזי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{C} = 1.$$

הוכחה. נניח תחילה כי $C > 1$. נגדיר את הסדרה

$$a_n = \sqrt[n]{C} - 1,$$

ונוכיח שהיא מתכנסת לאפס בכך שנזהה כי

$$C = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \ge \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{2} a_n^2$$

אך מכאן נובע כי

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2C}{n(n-1)}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ומכאן נסיק את הדרוש. כאשר $C < 1$ נגדיר באופן דומה את $a_n = 1 - \sqrt[n]{C}$ וההוכחה תראה זהה לחלוטין. אם $C = 1$ כמובן שאין מה להוכיח. □

טענה 1.5.2

יהא $k \in \mathbb{R}$ נתון. אזי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1.$$

הוכחה. נוכיח תחילה עבור $k = 1$. נעבוד בצורה דומה לטענה הקודמת ונכתוב

$$a_n := \sqrt[n]{n} - 1,$$

כלומר $n = (1 + a_n)^n$. על ידי מניפולציה דומה והערכה דומה לטענה הקודמת נקבל כי

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Longrightarrow 0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ובכך נסיק את הדרוש. עתה, עבור $k \in \mathbb{N}$ כלשהו, נזהה כי

$$\sqrt[n]{n^k} = \sqrt[n]{n} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

על פי אריתמטיקה של גבולות. בשלב הבא נניח כי $k > 0$ (לאו דווקא שלם). במקרה כזה נוכל למצוא $k < m \in \mathbb{N}$ ולכן

$$1 \leq \sqrt[n]{n^k} \leq \sqrt[n]{n^m} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

ונקבל את התוצאה מכלל הסנדוויץ'. לבסוף, נזהה כי אם $k < 0$, אזי

$$\sqrt[n]{n^k} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{k}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

ובכך נסיק את הדרוש. המקרה $k = 0$ טריוויאלי. □

לבסוף, נוכיח גם את הטענה השימושית הבאה

טענה 1.5.3

תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים, כך שקיימים $c, C > 0$ שעבורם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים

$$c \leq a_n < C$$

לכל $n > N$. אזי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

בפרט, הטענה נכונה אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0$.

הוכחה. על פי הנתון, ניתן לכתוב

$$\sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{C}$$

ועל פי טענה 1.5.1 וכלל הסדנוויץ', נקבל את הדרוש. ☐

2

מבוא למד"ר ומשוואות מסדר ראשון

2.1 מבוא והגדרות

הגדרה 2.1.1. משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה מהצורה

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}, \dots\right) = 0$$

כאשר $x \in I \subset \mathbb{R}$ מכונה בשם **משוואה דיפרנציאלית רגילה**. כלומר, זוהי משוואה המקשרת את ערכי הפונקציה ונגזרות שלה בקטע נתון. הסדר הגבוה ביותר של נגזרת שמופיע במשוואה מכונה **סדר המשוואה**.

הגדרה 2.1.2. מד"ר מפורשת מסדר n

משוואה מהצורה

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

כאשר $x \in I \subset \mathbb{R}$ מכונה בשם **מד"ר מפורשת מסדר n**.

הגדרה 2.1.3. פתרון למד"ר

פונקציה $y : I \to \mathbb{R}$ מכונה **פתרון למד"ר** מהצורה שמופיע בהגדרה 2.1.1 או 2.1.2 אם היא גזירה ברציפות n פעמים, ומקיימת את המשוואה לכל $x \in I$.

בכל זה של הקורס נעסוק בעיקר במד"ר מסדר ראשון (מפורשות ולא מפורשות).

הגדרה 2.1.4. מד"ר מסדר ראשון

משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה $y' = f(x, y)$ או $F(x, y, y') = 0$
בקטע I פתרון למשוואה זו הוא פונקציה $y : I \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות המקיימת את משוואה זו לכל
$x \in I$.

דוגמה 2.1.1. דוגמאות שאינן דוגמאות

1. בהנתן קטע $I = [a, b]$, ידוע לנו כי אם $y : I \to \mathbb{R}$ פתרון של המשוואה $y(x)' = 0$, אזי y היא פונקציה קבועה. למעשה, y הוא פתרון של המד"ר אם ורק אם $y(x) = C$ עבור $C \in \mathbb{R}$ כלשהו.

2. נחפש פתרונות למד"ר $y'(x) = \sin(x)$ בקטע $I = [a, b]$ כלשהו. כידוע מתורת האינטגרציה, לכל $x_0 \in [a, b]$, הפונקציה

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \cos(x_0) - \cos(x)$$

היא פתרון של המשוואה (על פי המשפט היסודי). מצד שני, ברור כי כל פונקציה מהצורה $y(x) = -\cos(x) + C$ כאשר $C \in \mathbb{R}$ קבוע היא פתרון של המשוואה, ולכן אלו כל הפתרונות האפשריים.

דוגמה 2.1.2. דוגמה בסיסית חשובה

ננסה למצוא את כל פתרונות המשוואה $y' = y$. כדי לעשות זאת, נעביר אגפים ונכפול את שני האגפים ב-e^{-x}. היות והגורם הכפלי שונה מאפס, לא איבדנו פתרונות. כלומר

$$y' = y \iff e^{-x} y' - e^{-x} y = 0.$$

בשלב הזה, ניתן לזהות כי באגף השמאלי מופיעה נגזרת של מכפלה, כלומר

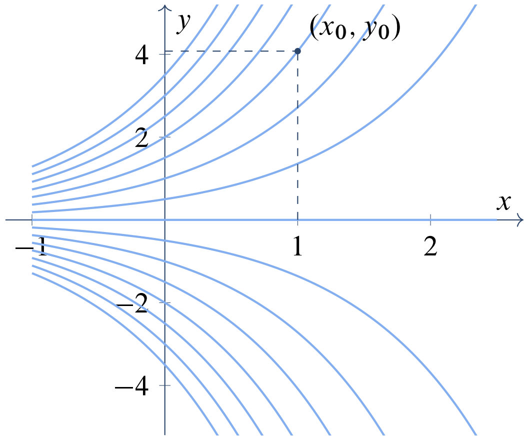
$$\left(e^{-x} y\right)' = 0,$$

אך על פי דוגמה 2.1.1, הפתרונות של משוואה זו הם בדיוק הפונקציות הקבועות. כלומר

$$e^{-x} y = C \implies y = Ce^{x}$$

כאשר $C \in \mathbb{R}$. מצד שני, ברור כי כל פונקציה מהצורה הנ"ל היא פתרון למשוואה ומכאן שאלו הם כל הפתרונות.

תובנה גיאומטרית. אוסף כל הפתרונות של המשוואה מיוצג על ידי משפחה של עקומים זרים שמכסים את כל המרחב. כדי לראות שהעקומים השונים אינם נחתכים, ניתן לזהות כי אם $C_1 \neq C_2$, מתקיים $C_1 e^x \neq C_2 e^x$ לכל $x \in \mathbb{R}$. כדי להשתכנע שהעקומים מכסים את כל המרחב, נשים לב שלכל נקודה (x_0, y_0), העקום $y = y_0 e^{-x_0} e^x$ הוא פתרון של המשוואה שעובר בנקודה זו. ניתן לראות המחשה של חלק מהפתרונות באיור 2.1 שלעיל.



איור 2.1: המחשה של אוסף הפתרונות למשוואה $y' = y$, והדגמה של נקודה ופתרון שעובר דרכה.

הגדרה 2.1.5. תנאי התחלה ובעיית התחלה

עבור מד"ר מהצורה שמופיעה בהגדרה 2.1.4, הדרישה כי פתרון למד"ר יקיים $y(x_0) = x_0$ (כך ש-$x_0 \in I$) מכונה **תנאי התחלה**. משוואה עם תנאי התחלה מכונה בשם **בעיית התחלה**.

קיימות מספר שאלות טבעיות שניתן לשאול עבור משוואות מסדר ראשון (ולאחר מכן, גם עבור משוואות כלליות יותר).

- איך יודעים האם לבעיית התחלה נתונה קיים פתרון?
- אם לבעיית התחלה קיים פתרון, האם הוא יחיד?
- **יציבות.** האם עבור תנאי התחלה קרובים הפתרונות שמתקבלים יהיו גם הם קרובים?

ניתן לספק תשובה חלקית לשתי השאלות הראשונות במשפט המרכזי הבא שנציג. אך רגע לפני כן, תזכורת קלה לגבי נגזרות חלקיות של פונקציות במספר משתנים.

הנגזרת החלקית. נניח כי $f(x,y)$ פונקציה בשתי משתנים. על פי הגדרה, הנגזרות החלקיות לפי x או לפי y בנקודה (x_0,y_0) נתונות על פי הגבולות

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

במידה וגבולות אלה קיימים. יחד עם זאת, קיימת דרך שימושית לחישוב נגזרות חלקיות אלו, והיא להתייחס למשתנה השני בתור פרמטר קבוע. כך למשל, עבור הפונקציה

$$f(x,y)=xe^{y^2}$$

נקבל כי

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\left(2ye^{y^2}\right).$$

המשפט שנציג לעיל יעסוק במד"ר מפורשת מהצורה $y'=f(x,y)$. במשוואה זו y (שנמצא כארגומנט של f) הוא פונקציה של x. לכן נדגיש, שכאשר נדון בנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial y}$, הכוונה היא לגזירה לפי המשתנה השני **כאשר מתעלמים מהעובדה שהוא פונקציה**. כך למשל, אם $y(x)=x^2$ אזי עבור

$$f(x,y)=x^2=y(x),$$

יתקיים $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1$, היות ואם מתעלמים מהעובדה שמדובר בפונקציה, מתקיים $f(x,y)=y$ וברור שנגזרתה החלקית לפי y היא 1.

משפט 2.1.1. משפט הקיום והיחידות (פיקארד-לינדלוף)

יהא $D\subset\mathbb{R}^2$ תחום דו-ממדי ותהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך ש-$\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימת ורציפה ב-D. אם (x_0,y_0) נקודה פנימית ב-D, קיים קטע מהצורה $[x_0-h,x_0+h]$ כך שלבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

קיים פתרון יחיד בקטע זה.

הערות חשובות לגבי המשפט.

1. הקבוע h שמגדיר את רוחב הקטע מקבע מתכונות של $f(x,y)$ בסביבת (x_0,y_0).
2. המשפט מבטיח קיום ויחידות בקטע $[x_0-h,x_0+h]$ **כלשהו**. בפועל, ייתכן ומסקנות המשפט יהיו

נכונות לקטע גדול יותר (אך את זה נצטרך לבדוק בעצמנו).

דוגמה 2.1.3. דוגמה לניחוש פתרון

נחפש את הפתרונות לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \sin(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

על פניו, מציאת כל הפתרונות (למשל על ידי טריקים כפי שעשינו בדוגמה **??**) יכולה להיות משימה קשה (אם כי בהמשך, אפשרית). אך במקרה שלנו, התבוננות מהירה תראה כי הפונקציה הקבועה

$$y(x) = 0,$$

היא פונקציה שמקיימת את תנאי ההתחלה וגם את המד"ר כי

$$y'(x) = 0 = \sin(0) = \sin(y(x)).$$

היות ובעיית ההתחלה מקיימת את תנאי משפט 2.1.1, נסיק כי אין אף פתרון אחר שמוגדר בסביבת הראשית.

אמנם לא נוכיח בקורס את המשפט, אך נוכל להוכיח מסקנה חשובה מאוד שלו.

משפט 2.1.2. עקרון אי-החיתוך

נניח כי y_1, y_2 שתי פונקציות גזירות ברציפות המהוות פתרון למד"ר $y' = f(x, y)$, כך ש-f מקיימת את תנאי משפט 2.1.1 בתחום שבו הפתרונות מוגדרים. אזי, y_1, y_2 לא נחתכים באף נקודה.

הוכחה. נניח כי y_1, y_2 מוגדרות בקטע $I = (a, b)$ כלשהו (ההוכחה למקרה שבו תחום ההגדרה לא חסום, או קטע פתוח - דומה ומושארת כתרגיל). נניח בשלילה כי קיימת נקודה $x_0 \in I$ שבה $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$. על פי משפט 2.1.1 (שתנאיו מתקיימים על פני הנתון), קיימת קטע מהצורה $[x_0 - h, x_0 + h]$ שבו לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד בקטע. אך בקטע זה גם y_1 וגם y_2 מהווים פתרון, ולכן $y_1(x) = y_2(x)$ בכל נקודה בקטע זה. הבעיה בשלב הזה, היא שהוכחנו שהפונקציות מזדהות רק ליד הנקודה x_0, ולאו דווקא בכל התחום. (**חלק זה בהוכחה אינו נדרש בקורס**) כדי להרחיב את השוויון לכל תחום ההגדרה, נשים לב שבנקודה $x_0 + h$, עדיין מתקיימים תנאי המשפט וגם $y_1(x_0 + h) = y_2(x_0 + h)$, ולכן קיים קטע גדול יותר, מהצורה $[x_0 - h, x_0 + k]$ (כאשר $k > h$) שבו $y_1(x) = y_2(x)$.

היות וניתן להמשיך להגדיל את הקטע כל עוד נקודת הקצה היא בתחום ההגדרה (והתחום שבו מתקיימים תנאי משפט 2.1.1), נסמן

$$\tilde{b} = \sup\left\{x_0 < \beta < b | x \in [x_0, \beta] \text{ לכל } y_1(x) = y_2(x)\right\}.$$

אם נוכיח כי $b = \tilde{b}$, נקבל כי לכל $x \in [x_0, b)$, מתקיים $y_1(x) = y_2(x)$ ונסיים את ההוכחה לחלק הימני של תחום ההגדרה. באופן דומה מגדירים

$$\tilde{a} = \inf\left\{a < \alpha < x_0 | x \in [\alpha, x_0] \text{ לכל } y_1(x) = y_2(x)\right\},$$

ועלינו להוכיח כי $a = \tilde{a}$. היות וההוכחה זהה לחלוטין להוכחה עבור הקצה הימני, נציג רק את אותה, ונשאיר את הפרטים הנוספים כתרגיל.

נניח כי $b < \tilde{b}$, ונשים לב כי על פי ההגדרה של $\tilde{b}$, לכל $x \in \left[x_0, \tilde{b}\right)$, מתקיים $y_1(x) = y_2(x)$. היות ושתי הפונקציות מוגדרות (ורציפות) ב-$\tilde{b}$, מתקיים

$$y_1\left(\tilde{b}\right) = \lim_{x \to \tilde{b}^-} y_1(x) = \lim_{x \to \tilde{b}^+} y_2(x) = y_2\left(\tilde{b}\right),$$

ולכן ניתן להרחיב את התחום שבו הפונקציות מזדהות מימין ל-$\tilde{b}$, בסתירה להגדרה. כלומר, בהכרח $\tilde{b} = b$ כדרוש, ולאחר הוכחה זהה לקצה השמאלי נקבל כי $y_1(x) = y_2(x)$ בכל תחום הגדרתן. □

דוגמה 2.1.4. דוגמה לשימוש בעקרון אי-החיתוך

הוכיחו כי אם $y_0 \in (1, 2)$, הפתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = (y-1)(y-2) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

מונוטוני יורד וחסום בכל תחום הגדרתו.

פתרון. ראשית, ברור שהפונקציה $f(x, y) = (y-1)(y-2)$ מקיימת את כל תנאי משפט 2.1 ולכן גם את תנאי עקרון אי החיתוך (משפט 2.1.2). כדי לפתור את הבעיה, נשתמש בשיטת ה"ניחוש" (בהמשך היא תתבהר כשיטה מוגדרת היטב) כדי לזהות כי $y = 1, y = 2$ מהווים זוג פתרונות של המד"ר (לא עם אותם תנאי התחלה כמו הפתרון שלנו!).

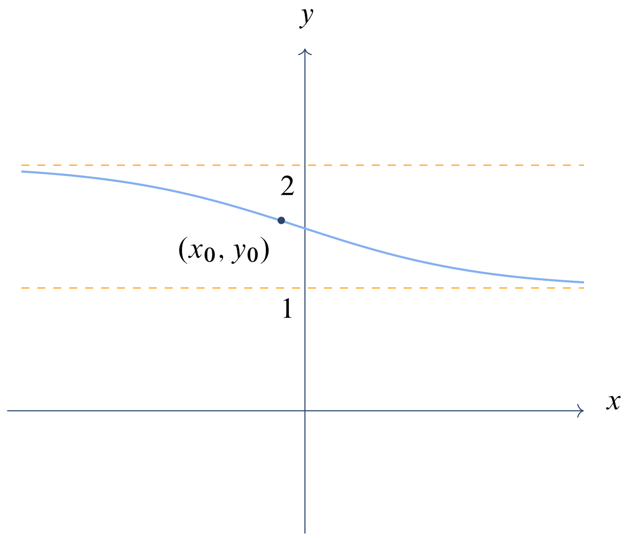
היות והפתרון שלנו נמצא בתנאי ההתחלה שלו בין 1 ל-2, הוא לא יכול לחתוך את הפתרונות, באף נקודה אחרת על פי משפט 2.1.2, ולכן יקיים

$$1 < y(x) < 2$$

בכל תחום הגדרתו. יתרה מכך, העובדה שהערכים של הפתרון חסומים בין 1 ל-2 מראים כי

$$y' = (y-1)(y-2) < 0$$

ולכן הפתרון מונוטוני יורד בתחום הגדרתו. ניתן לראות המחשה של הפתרון והישרים החוסמים אותו באיור 2.2 שלעיל. □



איור 2.2: שרטוט של פתרון לדוגמה עם $y(x_0) = x_0$ (בכתום), והישרים $y = 1, y = 2$ (בקווים קטועים). החיצים הכחולים הבהירים הם תיאור של המד"ר כשדה כיוונים, מונח שנפגוש בקרוב.

כאשר אין קיום ויחידות. ישנן משוואות דיפרנציאליות שבהן אחד או יותר מתנאי משפט 2.1.1 לא מתקיימים. במקרה זה ייתכן ולא יהיה לבעיית ההתחלה פתרון כלל, ויתכן גם מצב שבו יהיו פתרונות רבים לאותה הבעיה (נחזור לסוגיה זו בהמשך).

2.2 מוטיבציה מעולם המדע

משוואות דיפרנציאליות רגילות צצו באופן טבעי לחלוטין בניסיון להציג מודלים ותחזיות לתהליכים בטבע. בחלק זה נציג מספר דוגמאות מפורסמות לכך.

דוגמה 2.2.1. המשוואה הלוגיסטית

בניסיון לנתח גדילה וצמצום של אוכלוסיה מזן מסויים, מסמנים ב-$N(t)$ את הפונקציה שמתארת את גודל האוכלוסיה בזמן נתון t. אמנם האוכלוסיה מתוארת על ידי מספרים שלמים, אך ניתן לנסות לקרב

אותה על ידי פונקציה רציפה (ואפילו גזירה) כאשר מבינים את הערך שלה בתור ערך מקורב בלבד.

1. במודל הפשוט, **האקספוננציאלי**, מתארים את קצב גידול האוכלוסיה כנמצא ביחס ישר לגודל האוכלוסיה באותו הזמן (מה שהגיוני במבט ראשון, היות וככל שהאוכלוסיה גדולה יותר, היא תתרבה מהר יותר). כלומר במודל זה מתקיים

$$N'(t) = \kappa N(t),$$

כאשר κ הוא ערך שניתן לבדוק במעבדה, אם מתברר שהמודל שמתקבל בצורה זו תואם את המדידות. למודל זה יש חסרונות רבים, כאשר החסרון המשמעותי שלו היא חוסר יכולתו לשקלל את כמות המשאבים המוגבלת שיש לאוכלוסיה נתונה. כלומר, על פי המודל שלעיל, כל אוכלוסיה תגדל ללא הפסקה גם אם נגמר לה המזון, שהרי הפתרון למשוואה זו הוא תמיד מהצורה $N(t) = N_0 e^{\kappa t}$.

2. מודל "משופר" (ועדיין לא מדויק) לתיאור גידול אוכלוסין הוא **המודל הלוגיסטי**. במקרה זה אנחנו עדיין משערים כי קצב הגידול תלוי במידת מה בגודל האוכלוסיה. השינוי הוא בכך שאנחנו מניחים שיש גודל אוכלוסיה "אופטימלי" מסויים, כך שאם אוכלוסיה נמצאת מעל הגודל הנ"ל, כמות המשאבים החסרה מחייבת אותה להצטמצם, ואם אוכלוסיה נמצאת מתחת לגודל הנ"ל, היא נמצאת בשפע של משאבים ויכולה להמשיך להתרבות. רעיון זה מגדיר את המשוואה הלוגיסטית

$$N'(t) = \kappa N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

כאשר $K > 0$ נתון. ניתן לראות שאם $N(t) > K$, השיפוע של גודל האוכלוסיה שלילי, ואם $N(t) < K$ השיפוע חיובי. כדי להשתכנע ב"התנהגות" האיכותית של הפתרונות למשוואה, ניתן לזהות את הדמיון בין דוגמה זו לדוגמה 2.1.4. כלומר, ניכר כי כאשר $N(t) = 0, K$, גודל האוכלוסיה נשאר קבוע ולא משתנה, בעוד שאם $0 < N(t) < K$, גודל האוכלוסיה יגדל ויהיה חסום על ידי K. לבסוף, אם $N(t) > K$ גודל האוכלוסיה יקטן אך יהיה חסום מלמטה על ידי K.

הערה על מודלים מתמטיים במדע. לא טריוויאלי להבין במבט ראשוני מדוע "מותר" לנו לקבל משוואות בצורה שקיבלנו אותן בדוגמה 2.2.1. הרי, לו היינו רוצים לדבר על קצב שינוי האוכלוסיה "באמת", הכלי שעומד לרשותנו הוא $N(t)$ שמתארת (בעזרת מספרים שלמים) את גודל האוכלוסיה, וזמנים t דיסקרטיים שאנחנו יכולים למדוד. במקרה זה קצב שינוי האוכלוסיה בין זמן $t, t+\Delta t$ היא המנה

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}.$$

את ערך זה אפשר להשוות ל-$N(t)$, וככל ש-Δt יהיה קטן יחסית ניתן לקבל תוצאה שמזכירה מאוד את הקצב ה"רגעי". יחד עם זאת, ברור שעבור Δt קטן מספיק, האוכלוסיה לא תשתנה (כי לא נולד מישהו חדש בכל רגע נתון), ולכן הערך ה"גבולי" של השיפוע יהיה תמיד אפס.

אבל מודלים מתמטיים במדע לאו דווקא מתיימרים לתאר את הערך האמיתי של גודל מסוים. אם אנחנו יכולים למצוא מודל מתמטי (שאומר שאנחנו מוסיפים הנחות למערכת שלנו) שמתאר מערכת נתונה בקירוב מאוד מאוד טוב תחת מגבלות מסויימות (למשל, בזמנים קצר, ואם גודל האוכלוסיה גדול יחסית), ואם ידוע בנוסף שהמודל קל מאוד לחישוב - אנחנו נתייחס אליו כאל מודל טוב שאפשר להסתמך עליו כדי לחזות את ההתנהגות העתידית של אותה מערכת.

כלומר, יש לנו את ה"חופש" להוסיף הנחות למודלים שלנו כרצוננו, והדרך היחיד להסיק אם המודל שלנו טוב או לא - היא לבדוק אותו מול התוצאות במעבדה/במציאות. המודל האקספוננציאלי, למשל, הוא מודל ממש טוב לזמנים מאוד קצרים אם האוכלוסיה שמתארים מספיק גדולה, והמודל הלוגיסטי לא רע בכלל גם בזמנים פחות קצרים, אך גם הוא מוגבל בזמנים ארוכים ובמקרים של התנגשות בין אוכלוסיות שונות.

בקורס שלנו נשקיע זמן קצר יחסית בבניה של מודל מתמטי לבעיה מעולם המדע, אך נעסוק בעיקר בחקירה מתמטית של מודלים אלה בעזרת התיאוריה של משוואות דיפרנציאליות.

דוגמה 2.2.2. משוואת הרקטה

במכניקה הקלאסית, החוק השני של ניוטון גורס כי

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = F_{\text{ext}},$$

כאשר P הוא התנע הכולל של מערכת נתונה ו-F_{ext} הוא סך הכוחות החיצוניים שפועלים על אותה מערכת. משוואת הרקטה היא מודל שמתאר רקטה בעלת מסה $M(t)$ שכוללת את הרקטה והדלק שהיא מכילה, וחיכוך שפועל עליה והוא פרופורציונלי למהירות שלה שנסמן ב-$v(t)$. הדרך שבה הרקע פועלת היא פליטה של הדלק אחורה במהירות u יחסית אליה. כלומר, קצב השינוי בתנע של החללית הוא

$$P'(t) = M(t)\,v'(t) + uM'(t),$$

היות והשינוי בתנע מורכב מהחלק של החללית שלא נפלט שצבר מהירות, והחלק של החללית שנפלט אחורה במהירות u. אם השינוי בתנע צריך להיות שווה לכח החיכוך (שהוא הכח החיצוני היחיד), נקבל את המשוואה

$$M(t)\,v'(t) + uM'(t) = -\gamma v(t)$$

דוגמה פשוטה למשוואת הרקטה. נניח שבזמן $t = 0$ המסה של הרקטה והדלק ביחד היא M_0, והרקטה פולטת דלק בקצב של α ק"ג לשניה. כלומר $M(t) = M_0 - \alpha t$, ומשוואת הרקטה המתאימה היא

$$(M_0 - \alpha t)\,v' + \gamma v = \alpha u.$$

כבר בפרק הבא של הקורס, נראה כי זו משוואה שאנחנו יודעים לפתור די בקלות, ועקב כך לדעת בקירוב לא רע בכלל איך רקטה נעה בחלל.

2.3 פתרון משוואות מסדר ראשון

בחלק זה נציג חלק מהפרקטיקה של פתרון משוואות רבות מסדר ראשון (הן במובן זה שיטות לפתרון, והן מבחינת ניתוח איכותי של הפתרונות שלהן).

2.3.1 משוואות ליניאריות

הגדרה 2.3.1. משוואה ליניארית מסדר ראשון

משוואה מהצורה

$$y' + p(x)\, y = g(x)$$

מכונה **משוואה ליניארית מסדר ראשון**. אם $g = 0$ המשוואה מכונה **הומוגנית**, ואחרת **אי-הומוגנית**.

תכונות של משוואה ליניארית מסדר ראשון. על ידי העברת אגפים במשוואה מקבלים כי

$$y' = g(x) - p(x)\, y,$$

ולכן אם נסמן $f(x,y) := g(x) - p(x)\, y$ נקבל כי

1. אם p, g פונקציות רציפות, מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות לכל ערך.
2. במשוואה הומוגנית שבה $g(x) = 0$, פונקציית האפס היא פתרון של המשוואה. לכן, במשוואה כזו כל פתרון הוא או פתרון האפס, או פתרון שאינו מתאפס באף נקודה (על פי עקרון אי החיתוך).

פתרון משוואה ליניארית הומוגנית. עבור המשוואה

$$y' = -p(x)\, y,$$

נזכיר כי $y = 0$ הוא אחד מפתרונות המשוואה, וכל פתרון אחר לא יתאפס באף נקודה. לכן, עבור פתרונות שאינם אפס, נוכל לחלק ולכתוב

$$\frac{y'}{y} = -p(x),$$

כלומר

$$\ln|y(x)| = \int \frac{y'(x)}{y(x)}\, \mathrm{d}x = -\int p(x)\, \mathrm{d}x + \tilde{C}$$

כאשר $\tilde{C}$ קבוע כלשהו. נפעיל אקספוננט על שני אגפי המשוואה ונקבל כי

$$|y(x)| = e^{\tilde{C}} e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = \tilde{\tilde{C}} e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

כאשר $\tilde{\tilde{C}}$ קבוע חיובי כלשהו (היות ואקספוננט תמיד חיובי). היות והערך של $y(x)$ תמיד קבוע, נפריד למקרים.

- אם $y(x) > 0$ נקבל כי $y(x) = \tilde{\tilde{C}} e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.
- אם $y(x) < 0$ נקבל כי $y(x) = -\tilde{\tilde{C}} e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.

נוכל להחליף אם כן את המקדם של הפתרון בקבוע $C \in \mathbb{R}$ (יכול להיות חיובי, שלילי, או אפס, וכך "לתפור" את כל המקרים האפשריים). נסכם זאת בטענה הבאה

טענה 2.3.1 פתרון למשוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון

בהנתן משוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון כפי שנתון בהגדרה 2.3.1, אם $p(x)$ רציפה, הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

דוגמה 2.3.1 הדגמת פתרון משוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון

מצאו את כל פתרונות המשוואה

$$y' - 2xy = 0.$$

פתרון. ראשית, ניתן לזהות כי $p(x) = -2x$ היא פונקציה רציפה ולכן למשוואה יש קיום ויחידות. היות ו-$y = 0$ הוא פתרון של המשוואה, נסיק כי כל פתרון שאינו פתרון האפס לא מתאפס באף נקודה, ונוכל לכתוב

$$\frac{y'}{y} = 2x,$$

כלומר

$$\ln|y(x)| = \int \frac{y'(x)}{y(x)}\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + \tilde{C}.$$

נפעיל אקספוננט על שני אגפי המשוואה ונקבל כי

$$|y(x)| = e^{\tilde{C}} e^{x^2} = \tilde{\tilde{C}} e^{x^2}.$$

מכאן שהפתרון הוא $y(x) = \pm\tilde{\tilde{C}} e^{x^2}$, כתלות בסימן הפתרון y (שלא משתנה, כי הוא לא מתאפס). נסכם כי פתרונות המשוואה הם כל הפונקציות מהצורה

$$y(x) = Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

כדי לעבור מפתרון המשוואה ההומוגנית למשוואה אי-הומוגנית, נצטרך מושג חדש.

הגדרה 2.3.2. גורם אינטגרציה למד"ר ליניארית מסדר ראשון

עבור משוואה ליניארית מסדר ראשון כמופיע בהגדרה 2.3.1, אם $p(x)$ רציפה בקטע I, אומרים כי פונקציה $\mu(x)$ היא גורם אינטגרציה למשוואה אם לאחר הכפלה בגורם זה

$$\mu(x)\,y' + \mu(x)\,p(x)y = \mu(x)\,g(x)$$

האגף השמאלי הוא הנגזרת $(\mu(x)y)'$.

במילים אחרות, גורם אינטגרציה הוא גורם שאם נכפיל בו את המשוואה, נקבל באגף השמאלי ביטוי שאפשר לחשב את האינטגרל שלו בקלות.

טענה 2.3.2. נוסחה לגורם אינטגרציה למד"ר ליניארית מסדר ראשון

הפונקציה

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

היא גורם אינטגרציה למשוואה שמקיימת את תנאי הגדרה 2.3.2.

הערה. שימו לב שיש הרבה גורמי אינטגרציה, היות והכפלה בקבוע של גורם אינטגרציה גם היא תהיה גורם אינטגרציה. אך לצורך פתרון משוואות ליניאריות מספיק לנו גורם אחד בלבד (בחרו את האחד שנוח יותר לעבוד איתו).

הוכחה. נדרוש שיתקיים

$$\mu(x)\,y' + \mu(x)\,p(x)\,y = (\mu(x)y)' = \mu(x)\,y' + \mu'(x)\,y,$$

ולכן, לאחר העברת אגפים, נקבל כי

$$\mu(x)\,p(x)\,y = \mu'(x)\,y.$$

מכאן מקבלים שגורם אינטגרציה אפשרי הוא הפונקציה שתקיים

$$\mu'(x) - \mu(x)\,p(x) = 0.$$

היות וניתן להניח שגורם האינטגרציה אינו פונקציית האפס, נסיק שהוא לא מתאפס באף נקודה (זוהי משוואה

ליניארית הומוגנית מסדר ראשון עם קיום ויחידות!). נוכל לקבל על פי טענה 2.3.1 כי

$$\mu(x) = Ce^{-\int(-p(x))\mathrm{d}x} = Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

היות ומספיק לנו גורם אינטגרציה כלשהו, הבחירה $C = 1$ תספיק. □

נשתמש בגורם האינטגרציה כדי למצוא פתרון כללי למשוואה 2.3.1. לאחר הכפלה בגורם האינטגרציה שמצאנו המשוואה הופכת למשוואה

$$\left(e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y\right)' = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}g(x).$$

נפעיל אינטגרל על שני אגפי המשוואה ונקבל

$$e^{\int p(x)\mathrm{d}x}y = \int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}g(x)\,\mathrm{d}x + C, C \in \mathbb{R}.$$

מכאן נותר להעביר אגפים ולקבל את הטענה הבאה

טענה 2.3.3. פתרון כללי למשוואה ליניארית מסדר ראשון

אם $p(x), g(x)$ רציפות במשוואה 2.3.1, הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x} + \int e^{\int p(x)\mathrm{d}x}g(x)\,\mathrm{d}x, \quad C \in \mathbb{R},$$

דוגמה 2.3.2. הדגמת פתרון משוואה ליניארית מסדר ראשון

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה

$$y' + \cot(x)y = |\sin(x)|.$$

פתרון. נתחיל בלחפש את גורם האינטגרציה למשוואה. על פי טענה 2.3.2

$$\mu(x) = e^{\int \cot(x)\mathrm{d}x} = e^{\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x} = e^{\ln|\sin(x)|} = |\sin(x)|.$$

כלומר, לאחר הכפלה של המשוואה האי-הומוגנית בגורם האינטגרציה, נקבל

$$(|\sin(x)|\,y)' = \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

נוכל לחשב אינטגרל לשני אגפי המשוואה ולקבל

$$|\sin(x)|\, y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$

ומכאן שהפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$y(x) = \frac{x}{2|\sin(x)|} - \frac{\sin(2x)}{4|\sin(x)|} + \frac{C}{|\sin(x)|}.$$

כאשר $\sin(x) = 0$, הפתרון לא מוגדר. יחד עם זאת ניתן לזהות שגם במשוואה הדיפרנציאלית הביטוי לא מוגדר בנקודות אלה. אי לכך, הפתרון שלנו תקף בכל קטע שבו יש קיום ויחידות למשוואה. □

דוגמה 2.3.3. פתרון משוואת הרקטה עם חיכוך

נזכיר כי משוואת הרקטה תעופה של רקטה המתקבלת משיגור הדלק שנמצא עליה אחורה, ובכך דוחפת את עצמה קדימה. כאשר $M(t)$ היא מסת הרקטה, $v(t)$ היא מהירותה (כולל הדלק שנמצא עליה) ו-u היא המהירות שבה הדלק משוגר אחורה ביחס למהירות החללית, מתקבלת המשוואה

$$M(t)\, v'(t) + uM'(t) = -\gamma v(t)$$

ו-$0 < \gamma$ הוא קבוע נתון המתאר את עצמת החיכוך שהחללית מרגישה. במקרה הקלאסי החללית בעלת מסה תחילית M_0 ומסת דלק M_f, והיא משגרת את הדלק אחורה בקצב α ק"ג לשניה. מצאו נוסחה למהירות החללית לאחר שיגור כל הדלק שלה, אם נתון שהחללית התחילה לנוע ממנוחה.

פתרון. למעשה, הנתונים שנוספו לנו בדוגמה הם

$$v(0) = 0, \quad M(t) = M_0 + M_f - \alpha t,$$

כלומר, קיבלנו את המשוואה

$$(M_0 + M_f - \alpha t)\, v'(t) - \alpha u = -\gamma v(t),$$

ולאחר סידור והעברת אגפים מקבלים כי

$$v'(t) + \frac{\gamma}{M_0 + M_f - \alpha t} v(t) = \frac{\alpha}{M_0 + M_f - \alpha t} u$$

זוהי משוואה ליניארית אי הומוגנית מסדר ראשון, וניתן לפתור אותה על ידי הכפלה בגורם האינטגרציה

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\gamma}{M_0 + M_f - \alpha t} dt} = e^{-\frac{\gamma}{\alpha}\ln(M_0 + M_f - \alpha t)} = (M_0 + M_f - \alpha t)^{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

שמובילה למשוואה

$$\left((M_0+M_f-\alpha t)^{-\frac{\gamma}{\alpha}}v(t)\right)'=\alpha(M_0+M_f-\alpha t)^{-\frac{\gamma}{\alpha}-1}u.$$

נבצע אינטגרציה לשני האגפים ונקבל

$$(M_0+M_f-\alpha t)^{-\frac{\gamma}{\alpha}}v(t)=\frac{u}{-\frac{\gamma}{\alpha}(M_0+M_f-\alpha t)^{\frac{\gamma}{\alpha}}}+C$$

כלומר

$$v(t)=-\frac{\alpha u}{\gamma}+C(M_0+M_f-\alpha t)^{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

כדי לפתור את הבעיה שלנו נציב גם את תנאי ההתחלה $v(0)=0$ ונקבל כי

$$C(M_0+M_f)^{\frac{\gamma}{\alpha}}=\frac{\alpha u}{\gamma}\Longrightarrow C=\frac{\alpha u}{\gamma}(M_0+M_f)^{-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

לסיכום, נקבל כי מהירות החללית בזמן $t>0$ (כל עוד לא נגמר לה הדלק), נתונה על ידי

$$v(t)=\frac{\alpha u}{\gamma}\left(-1+\left(\frac{M_0+M_f-\alpha t}{M_0+M_f}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)$$

ומהירותה הסופית, כאשר $t=\frac{M_f}{\alpha}$, נתונה על ידי

$$v_f=\frac{\alpha u}{\gamma}\left(-1+\left(\frac{M_0}{M_0+M_f}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}}\right).$$

□

2.3.2 משוואות פרידות

הגדרה 2.3.3. משוואה פרידה

משוואה מהצורה

$$y'=f(x)g(y)$$

מכונה **מד"ר פרידה/משוואה פרידה**.

תכונות של משוואות פרידות.

1. על ידי סימון $F(x,y)=f(x)g(y)$, מקבלים שכאשר f,g רציפות, גם F רציפה. אם בנוסף לכך

מתקיים כי g גזירה ברציפות, אזי

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=f(x)\,g'(y)$$

היא פונקציה רציפה. לכן, אם f,g,g' רציפות, המשוואה מקיימת את תנאי משפט 2.1.1.

2. נניח שקיים ערך y_0 שעבורו $g(y_0)=0$. אזי, הפונקציה הקבועה $y(x)=y_0$ היא פתרון למד"ר.

פתרון משוואה פרידה. על פי התכונה השניה שציינו, לכל ערך y_0 שעבורו $g(y_0)=0$ מקבלים כי הפונקציה הקבועה $y(x)=y_0$ היא פתרון, ועל פי עקרון אי-החיתוך (משפט 2.1.2) נסיק כי כל פתרון אחר לא חוצה את הפתרונות הללו, ובפרט כל פתרון אחר מקיים $g(y)\neq 0$ בכל תחום הגדרתו. לכן, עבור פתרונות אלה נוכל לחלק ולכתוב

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))}=f(x)\,.$$

נשתמש בסימון $H(y)=\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ עבור פונקציה קדומה כלשהי של $\frac{1}{g(y)}$ ונקבל כי

$$(H(y(x)))'=H'(y(x))\,y'(x)=\frac{y'(x)}{g(y(x))},$$

ולכן, אם נבצע אינטגרציה לשני האגפים של המשוואה (לאחר שהחילקנו ב-$g(y)$), נקבל כי

$$H(y(x))=\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

בצורה כזאת מסיקים כי הפתרון שלנו הוא למעשה פתרון המשוואה $H(y)=F(x)+C$ כאשר $F(x)$ היא פונקציה קדומה של f, וכדי למצוא פתרון מפורש עלינו לחלץ את y. לכך כמובן כבר אין נוסחה, שהרי החילוץ יהיה תלוי בפונקציה g, ובמידה ואנחנו לא מצליחים/לא יכולים לחלץ במפורש את y מהמשוואה נכנה את הפתרון בשם **פתרון סתום**.

טענה 2.3.4. הפתרון למשוואה פרידה

עבור f,g,g' רציפות בקטע I, הפתרון למשוואה 2.3.3 הוא אחד מהבאים:

- $y(x)=y_0$ כאשר y_0 ערך שמקיים $g(y_0)=0$.
- $H(y)=F(x)+C$ כאשר $H(x)=\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ ו-$F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x$. פתרון זה מקיים $g(y)\neq 0$ בכל תחום הגדרתו.

לפי שנציג דוגמאות, כדאי להכיר את המוסכמה הבאה לפתרונות "חריגים" של משוואה.

הגדרה 2.3.4. פתרון סינגולרי

בהנתן נוסחה כללית לייצור כל הפתרונות של מד"ר למעט קבוצה סופית של פתרונות, הפתרונות הנוספים יכונו בשם **פתרונות סינגולריים**.

הערה סמנטית חשובה. אם נתבונן במשוואה $y' = y$, נוכל לפתור אותה כמשוואה ליניארית עם גורם אינטגרציה אך גם כמשוואה פרידה. במקרה הראשון פתרון האפס אינו פתרון סינגולרי על פי ההגדרה ובמקרה השני כן. כלומר, ייתכן והמינוח סינגולרי יתאים לפתרון בהתאם לאופן שבו פתרנו את המד"ר. הרעיון הוא בסה"כ להזהיר אותנו שלעתים, קיימים פתרונות נוספים למד"ר שאינם מתקבלים בשיטת הפתרון הרגילה, ועלינו לקחת אותם בחשבון.

דוגמה 2.3.4. פתרון משוואה פרידה

מצאו את כל פתרונות המשוואה

$$y' = \sin(y).$$

פתרון. לא קשה להשתכנע כי מדובר במשוואה פרידה שמקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות. אי לכך, הסוג הראשון של פתרונות למשוואה הוא הפונקציות הקבועות שמקיימות

$$\sin(y) = 0 \Longrightarrow y(x) = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

בכל מקרה אחר, נוכל להסיק כי $\sin(y)$ לא מתאפס, ולכן ניתן לחלק בו ולכתוב

$$\frac{y'}{\sin(y)} = 1,$$

עתה, נוכל לבצע אינטגרציה לשני האגפים, ותוך שימוש בעובדה שמתקיים

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sin(y)} = \ln\left|\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right|,$$

נקבל

$$\ln\left|\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right| = x + C \Longrightarrow \left|\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right| = \tilde{C}e^{x}.$$

שימו לב כי $\tan\left(\frac{y}{2}\right) = 0$ כאשר y הוא כפולה של 2π (מה שלא ייתכן לפי ההנחה שלנו), ולכן הסימן של

הפונקציה קבוע בתחום ההגדרה שלה. כלומר

$$\tan\left(\frac{y}{2}\right)=\pm\tilde{C}e^{x}$$
$$\implies y\left(x\right)=2\arctan\left(\tilde{C}e^{x}\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

מומלץ להשתכנע שאכן, כל פתרון כנ"ל של המד"ר כלוא בין שתי כפולות שלמות ועוקבות של π. ניתן לקבל את הפתרונות הסינגולריים כאשר $\tilde{C}=0$. □

2.3.3 מד"ר מטיפוס הומוגני

הגדרה 2.3.5. פונקציה מטיפוס הומוגני

פונקציה $f\left(x,y\right)$ מכונה פונקציה **מטיפוס הומוגנית** אם לכל $\left(x,y\right)$ ולכל $t\neq 0$, מתקיים

$$f\left(tx,ty\right)=f\left(x,y\right).$$

הגדרה 2.3.6. מד"ר מטיפוס הומוגני

משוואה מהצורה

$$y'=f\left(x,y\right)$$

מכונה **מד"ר מטיפוס הומוגני** אם $f\left(x,y\right)$ פונקציה מטיפוס הומוגני.

פתרון משוואה מטיפוס הומוגני. נניח תחילה כי $x\neq 0$ ונגדיר פונקציה חדשה על ידי

$$F\left(t\right):=f\left(1,t\right).$$

במקרה זה, לכל $x\neq 0$, אם $y\left(x\right)$ פתרון של המד"ר, אזי

$$y'\left(x\right)=f\left(x,y\right)=f\left(x\cdot 1,x\cdot\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

כאשר המעבר השלישי נובע מכך ש-f היא פונקציה מטיפוס הומוגני. לאחר מכן, נגדיר פונקציה חדשה נוספת על ידי

$$z\left(x\right)=\frac{y\left(x\right)}{x}\implies xz\left(x\right)=y\left(x\right).$$

היות ו-y גזירה ברציפות גם z גזירה ברציפות, ומקיימת

$$\left(xz\left(x\right)\right)'=xz'\left(x\right)+z\left(x\right)=y'\left(x\right)=F\left(z\left(x\right)\right).$$

לאחר העברת אגפים נקבל את המשוואה

$$z'(x) = \frac{1}{x}(F(z) - z)$$

שהיא משוואה פרידה, ואם $F(z)$ גזירה ברציפות, היא מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות. מכאן ניתן לפתור אותה כמשוואה פרידה ולבסוף, להציב בחזרה את y.

טענה 2.3.5. פתרונות משוואה מטיפוס הומוגני

אם $f(1,t)$ רציפה ובעלת נגזרת רציפה, אזי לכל $x \neq 0$ הפתרון למשוואה 2.3.6 הוא אחד מהבאים:

- $y(x) = \alpha x$ כאשר $f(1,\alpha) - \alpha = 0$.
- $y(x) = xz(x)$ כאשר $z(x)$ היא הפתרון של המשוואה

$$\left.\int \frac{\mathrm{d}z}{F(z) - z}\right|_{z=z(x)} = \ln|x| + C.$$

דוגמה 2.3.5. פתרון משוואה מטיפוס הומוגני

מצאו את פתרונות המשוואה

$$y' = \frac{y^2 + xy + x^2}{x^2}.$$

פתרון. הפונקציה באגף הימני מטיפוס הומוגני, ומפני שהמד"ר אינה מוגדרת ממילא כאשר $x = 0$, נוכל להשתמש בשיטת הפתרון שהצענו. כלומר, נציב

$$z(x) = \frac{y(x)}{x},$$

ונקבל כי

$$xz'(x) + z(x) = y'(x) = \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 + \frac{y(x)}{x} + 1 = z(x)^2 + z(x) + 1.$$

לאחר העברת אגפים נקבל את המד"ר

$$\begin{aligned} \frac{z'}{z^2+1} &= \frac{1}{x} \\ &\Longrightarrow \arctan(z) = \ln|x| + C \\ &\Longrightarrow z = \tan(\ln|x| + C). \end{aligned}$$

כדי לקבל את הפתרון בשפה של $y(x)$ נציב ונקבל

$$y(x) = x\tan(\ln|x| + C).$$

$\square$

2.3.4 החלפת תפקידי x, y

נניח כי $f : I \to J$ פונקציה גזירה והפיכה, כך שההופכית שלה $f^{-1} : J \to I$ גם היא גזירה. במקרה זה נוכל לכתוב לכל $x \in I$

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

ועל ידי שימוש בכלל השרשרת, לקבל את הנוסחה

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(f(x))\, f'(x) &= 1 \\ \Longrightarrow (f^{-1})'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)}.\end{aligned}$$

כלומר, הנגזרת של הפונקציה ההופכית היא ההופכית של הנגזרת של הפונקציה. בפרט, לא יתכן במקרה זה כי $f'(x) = 0$. בניסוח מעט שונה, אם $y(x)$ פונקציה גזירה והפיכה עם הופכית גזירה, ואם נסמן את $x(y)$ בתור הפונקציה ההופכית שלה, נקבל כי

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

נשתמש בקשר זה בטענה שלעיל.

טענה 2.3.6. היפוך תפקידי x, y במד"ר

נניח כי $y(x)$ פתרון למד"ר $y' = f(x,y)$ ונניח כי $f(x,y) \neq 0$ בתחום הפתרון. אזי, קיימת לה הופכית $x(y)$ המקיימת את המד"ר

$$x'(y) = \frac{1}{f(x,y)}.$$

במילים אחרות, ניתן להשתמש בשיטה זו על מנת לחפש את הפונקציה ההופכית של פתרון למד"ר על ידי פתרון מד"ר אחרת - שבתקווה תהיה פשוטה יותר.

דוגמה 2.3.6. היפוך תפקידים במד"ר

מצאו את הפתרונות למד"ר

$$y' = \frac{y}{x + y^2}.$$

לאחר מכן, מצאו פתרון למד"ר המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 1$.

פתרון. ראשית, נזהה שהיפוך התפקידים חשוב כאן היות והמד"ר אינה מאף צורה שפגשנו עד כה. כדי לפתור אותה נזהה תחילה כי בכל תחום ההגדרה של $f(x, y) = \frac{y}{x+y^2}$ מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות, וגם הפונקציה $y = 0$ היא פתרון של המד"ר.

מכאן נובע כי כל פתרון אחר של המד"ר לא יכול להתאפס, ובפרט $y' \neq 0$ לכל אורך הפתרון. על פי טענה 2.3.6, לפתרון זה של המד"ר קיימת פונקציה הופכית המקיימת

$$x'(y) = \frac{1}{f(x, y)} = \frac{x + y^2}{y} = \frac{x}{y} + y.$$

חקירה קצרה מראה שמדובר במשוואה ליניארית אי הומוגנית מסדר ראשון. גורם האינטגרציה שלה הוא $\frac{1}{|y|}$ ולכן

$$\begin{aligned} x' - \frac{1}{y}x &= y \\ \Longrightarrow \left(\frac{1}{|y|}x\right)' &= \begin{cases} 1, & y > 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases} \\ \Longrightarrow \frac{1}{|y|}x &= |y| + C \\ \Longrightarrow x(y) &= y^2 + C|y|. \end{aligned}$$

כדי למצוא את הפתרון המתאים לתנאי ההתחלה נשים לב כי אם $y(0) = 1$, מתקיים $x(1) = 0$, כלומר

$$0 = 1 + C \Longrightarrow C = -1,$$

כלומר $x(y) = y^2 - |y|$. היות והפתרון שלנו לא יכול להתאפס, נוכל להסיק כי הוא בהכרח חיובי ולכן

$$y^2 - y - x = 0 \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4x}.$$

□

2.3.5 משוואות ברנולי (נלמד רק בתרגילי הבית)

הגדרה 2.3.7. משוואת ברנולי

משוואה מהצורה
$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$
מכונה **משוואת ברנולי**.

כאשר $n = 0$ המשוואה היא למעשה משוואה ליניארית אי הומוגנית, וכאשר $n = 1$, ניתן להעביר אגפים ולקבל משוואה פרידה. במקרים אחרים, קיימת הצבה ייחודית שממירה את המשוואה לצורה נוחה יותר לעבודה. נסמן
$$u(x) = y^{1-n}(x),$$
כאשר אנחנו מתחשבים גם בתחום שבו הצבה זו מוגדרת (לרוב, המשוואה מוגדרת ויש בה קיום ויחידות כאשר $y > 0$ וכאשר p, q פונקציות רציפות). לאחר גזירה נקבל
$$u' = (1-n)\, y^{-n} y' = (1-n)\, y^{-n} \left(-p(x)y - q(x)y^n\right)$$
כלומר
$$u' - (n-1)\, p(x)u = -(n-1)q(x).$$
זוהי משוואה ליניארית אי-הומוגנית שלמדנו כבר לפתור בקלות. לאחר שמוצאים את u ניתן למצוא את y.

דוגמה 2.3.7. דוגמה למשוואת ברנולי

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה
$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2$$
בתחום $x > 0$.

פתרון. כאשר, ניתן לזהות שכאשר $x > 0$ למשוואה יש קיום ויחידות בכל מקום, ומכאן שאם נזהה כי $y = 0$ הוא פתרון למשוואה, כל פתרון אחר של המשוואה לא מתאפס אף פעם. במקרה כזה נוכל לסמן בהתאם לשיטה
$$u = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y},$$
ולאחר הצבה למד"ר, נקבל את המשוואה
$$u' - \frac{1}{x}u = -x.$$

את משוואה זו ניתן לפתור על ידי הכפלה בגורם האינטגרציה $\frac{1}{x}$, כך שנקבל

$$\left(\frac{1}{x}u\right)' = -1 \Longrightarrow u = -x^2 + Cx = \frac{1}{y},$$

ולכן

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + Cx}$$

הוא הפתרון הכללי של המשוואה (ו-$y = 0$ הוא פתרון סינגולרי). □

2.4 שדה הכיוונים וחקירה איכותית של מד"ר

יהא $y(x)$ גרף של פונקציה גזירה בקטע כלשהו I. בהנתן נקודה $x \in I$ והפרש Δx, הוקטור

$$(x + \Delta x, y(x + \Delta x)) - (x, y(x)) = (\Delta x, y(x + \Delta x) - y(x))$$

הוא וקטור היוצא מהנקודה $(x, y(x))$ אל הנקודה $(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$. במקרה זה המשמעות של הוקטור

$$\frac{(x + \Delta x, y(x + \Delta x)) - (x, y(x))}{\Delta x} = \left(1, \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}\right)$$

היא המהירות (גודל וכיוון) של "חלקיק" הנע בקו ישר מנקודת ההתחלה לסיום (כלומר, ניתן להבין את החלוקה ב-Δx בתור ה"זמן" שעבר. אי לכך, בגבול שבו $\Delta x \to 0$ מקבלים

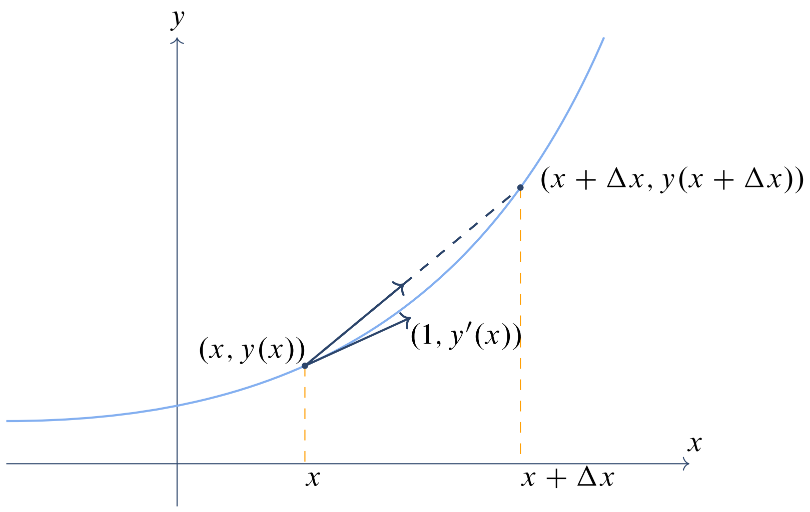
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x, y(x + \Delta x)) - (x, y(x))}{\Delta x} = \left(1, y'(x)\right)$$

שהוא וקטור שמייצג את המהירות הרגעית על הגרף בנקודה $(x, y(x))$ (מעין "הכללה" של מושג השיפוע שכולל כיוון תנועה במישור). יתרה מכך, הוקטור שמתקבל בצורה זו הוא וקטור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו כמודגם באיור 2.3.

תיאור בעיה. קיימות משוואות רבות (גם מסדר ראשון) שאת הפתרונות שלהן קשה מאוד למצוא במפורש. לעתים, גם כאשר אנחנו יודעים למצוא בצורה מפורשת את הפתרון של מד"ר כלשהי, הפתרון מבוטא כפונקציה מסובכת שקשה להבין. בפרק זה נכיר שיטה חשובה מאוד לניתוח פתרונות של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון ברמה האיכותית, גם אם לא בצורה מדויקת מאוד.

הגדרה 2.4.1. שדה הכיוונים של מד"ר מסדר ראשון

בהנתן מד"ר $y' = f(x, y)$, **שדה הכיוונים** של המד"ר כולל את מישור xy עם השדה הוקטורי ש"משייך" את הוקטור $(1, f(x, y))$ בכל נקודה במישור.



איור 2.3: המחשת הוקטור המשיק לגרף של פונקציה גזירה $y(x)$.

באופן אינטואיטיבי, אם נתחיל מנקודה כלשהי במישור, ובכל צעד קדימה נתקדם בכיוון הוקטורים $(1, f(x,y))$, נקבל צורה של גרף של פונקציה $(x, y(x))$ שהוקטור המשיק לו בכל נקודה הוא מצד אחד $(1, y'(x))$ (על פי ההסבר הקודם), ומצד שני הוקטור המשיק הוא $(1, f(x,y))$. כלומר, מתקיים $y' = f(x,y)$ בכל נקודה על גרף הפונקציה שקיבלנו, ומכאן שמדובר בפתרון של המד"ר.

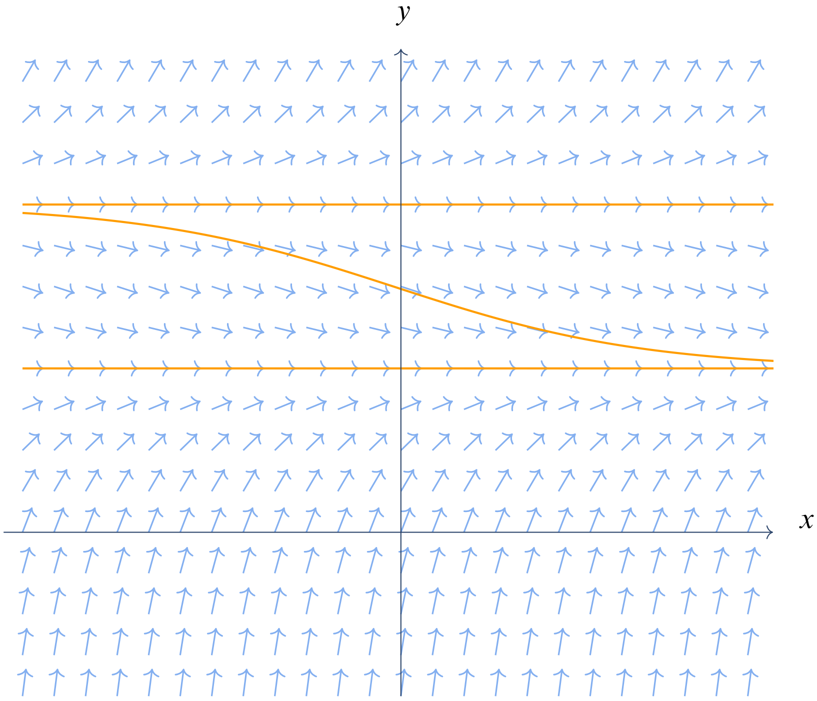
על אף שהנ"ל מהווה מתכון למציאת פתרונות של המד"ר ("ללכת עם החיצים"), שיטה זו כמובן לא אפשרית למימוש בצורה מדוייקת, היות והוקטור המשיק מתקבל מ"גבול" של צעדים הולכים וקטנים. מה שאנחנו עושים בפועל הוא לבצע צעדים קטנים עד כמה שאפשר כאשר בכל צעד כיוון הצעד הבא הוא על פי החץ, ובכך מקבלים גרף של פונקציה שמהווה קירוב לא רע של הפתרון האמיתי של המד"ר. ככל שהצעדים יהיו קטנים יותר, רמת הקרבה שלנו לפתרון האמיתי תהיה גבוהה יותר.

לכן, כאשר אנחנו מציירים שדה כיוונים של משוואה דיפרנציאלית, אנחנו נצייר "קירוב" של שדה הכיוונים על ידי ציור של חלק מהחיצים בצפיפויות גבוהה כרצוננו. באיור 2.4 שלעיל ניתן לראות המחשה של שדה הכיוונים עבור המשוואה $y' = (y-1)(y-2)$ ביחד עם מספר פתרונות.

הגדרה 2.4.2. איזוקלינה ונולקלינה

תהא $y' = f(x,y)$ מד"ר מסדר ראשון ויהא $C \in \mathbb{R}$ כלשהו. אוסף כל הנקודות $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ שעבורן $f(x,y) = C$ מכונה בשם **איזוקלינה** של הערך C ("איזו"=שווה, "קלינה"=שיפוע). כאשר $C = 0$, אוסף הנקודות מכונה בשם **נולקלינה**.

שימוש באיזוקלינות לציור שדה כיוונים. בהנתן מד"ר $y' = f(x,y)$, דרך מאוד נוחה לקבל סקיצה של שדה הכיוונים היא בחירה של מספר ערכים של C וציור של האיזוקלינות המתאימות ביחד עם החיצים לאורך האיזוקלינות. מומלץ כמובן לבחור שיפועים חיוביים, שליליים, ואת הנולקלינה בשיפוע אפס על מנת לקבל



איור 2.4: המחשת שדה הכיוונים של המד"ר $y' = (y-1)(y-2)$ ביחד עם פתרונות סינגולריים ופתרון אחד לא טריוויאלי. השווה את צורת הפתרונות עם החיצים של שדה הכיוונים.

תמונה יחסית נאמנה של תחומי העליה והירידה של הפתרונות.

דוגמה 2.4.1. ציור שדה כיוונים בעזרת איזוקלינות ונולקלינות

ציירו סקיצה של שדה הכיוונים עבור המד"ר

$$y' = x^2 + y^2 - 1$$

וציירו בעזרתה סקיצה של הפתרון לבעיית ההתחלה עם התנאי $y(0) = 0$.

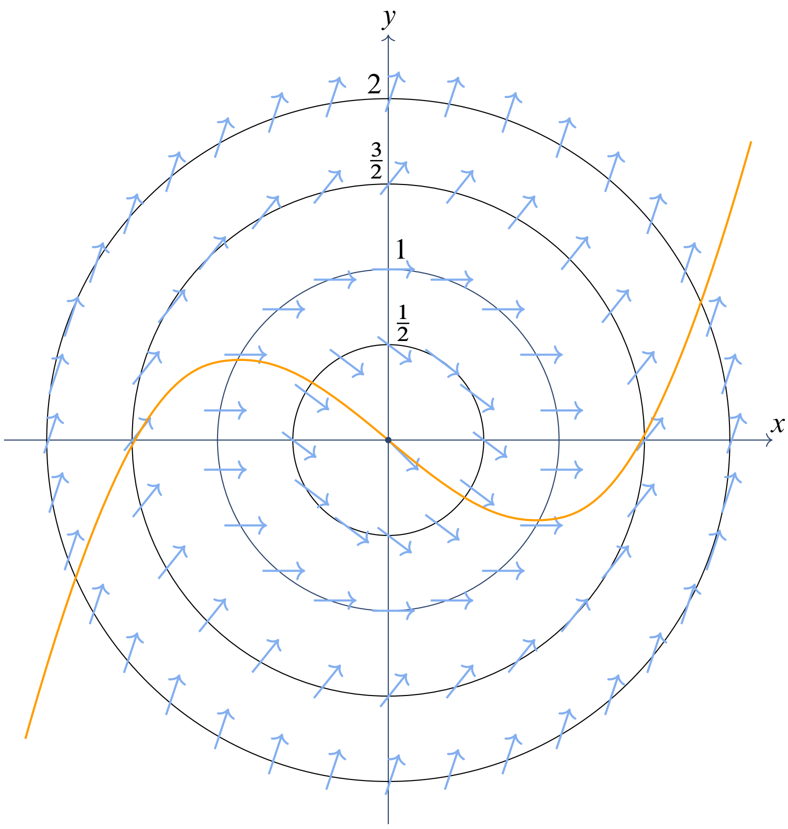
פתרון. נתחיל מזיהוי הנולקלינה, שמתקבלת כאשר $y' = 0$, כלומר בנקודות שבהן

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

נקודות אלה מתארות את מעגל היחידה, ובאופן יותר כללי, אם $C \geq -1$, מקבלים כי

$$\begin{aligned} y' &= C \\ &\iff x^2 + y^2 = 1 + C, \end{aligned}$$

כלומר, במעגל ברדיוס $\sqrt{1+C}$ (או רק בראשית, אם $C = -1$). כלומר האיזוקלינות הן כולן מעגלים, וכל האיזוקלינות שבהן המעגלים ברדיוס קטן מ-1 יהיו בעלות שיפוע שלילי, וכל האיזוקלינות שבהן המעגלים ברדיוס גדול מ-1 יהיו בעלות שיפוע חיובי. באיור 2.5 שלעיל ניתן לראות המחשה של חלק מהאיזוקלינות (והנולקלינה) וגם תיאור סכמטי ולא מדויק של הפתרון שעובר בראשית. □



איור 2.5: שדה הכיוונים של השדה $y' = x^2 + y^2 - 1$, איזוקלינות ונולקלינות שנבחרו בצורה מדגמית וקירוב של הפתרון שעובר בראשית הצירים.

הערה לגבי חקירת פתרונות. אמנם, ברור כי ציור סקיצה של פתרון על ידי שימוש בסקיצה של שדה הכיוונים היא דרך לא מדויקת לחקור משוואה ופתרון שלה. יחד עם זאת, שימו לב שדי פשוט לזהות ולשער שלפתרון שלנו (זה שעובר בראשית) קיימות בדיוק זוג נקודות קיצון, אחת מקסימלית ואחת מינימלית. אפשר אפילו לזהות שהפתרון שלנו (כנראה) אי זוגי. זאת על אף שאנחנו לא יודעים לכתוב במפורש פתרון למשוואה.

2.5 העמקה במשפט הקיום והיחידות

נזכיר תחילה את משפט הקיום והיחידות שוב.

משפט 2.5.1. משפט הקיום והיחידות (פיקארד-לינדלוף)

יהא $D\subset\mathbb{R}^2$ תחום דו-ממדי ותהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך ש-$\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימת ורציפה ב-D. אם (x_0,y_0) נקודה פנימית ב-D, קיים קטע מהצורה $[x_0-h,x_0+h]$ כך שלבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד בקטע זה.

בחלק זה של הפרק נדון בהרחבות/הקלות אפשריות למשפט, וגם במגבלות שלו. המקרה הראשון הוא הקלה מסויימת בתנאים.

משפט 2.5.2. משפט הקיום (פיאנו)

יהא $D\subset\mathbb{R}^2$ תחום דו-ממדי ותהא $f:D\to\mathbb{R}$ רציפה. אם (x_0,y_0) נקודה פנימית ב-D, קיים קטע מהצורה $[x_0-h,x_0+h]$ כך שלבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

קיים פתרון בקטע זה. הפתרון לא חייב להיות יחיד.

כלומר, מרגע שמוסיפים את התנאי על הנגזרת החלקית של f, עדיין מובטח לנו קיום של פתרון, אך פתרון זה לא חייב להיות יחיד. בהמשך נציג דוגמה מפורשת לתופעה זו.

2.5.1 תחומי הגדרה מקסימליים של פתרונות

משפט הקיום והיחידות (וגם משפט הקיום של פיאנו) מראים שלכל תנאי התחלה שבו מתקיימים תנאי המשפט, יש קטע מהצורה $[x_0-h,x_0+h]$ שבו קיים פתרון לבעיית ההתחלה. אם $y(x)$ הוא הפתרון של הבעיה בקטע זה, נסמן $\tilde{y}_0=y(x_0+h)$, ונניח שבנקודה $(x_0+h,\tilde{y}_0)$ מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות (או משפט הקיום). אזי, קיים קטע מהצורה

$$[x_0+h-k,x_0+h+k]$$

שבו קיימת פונקציה $z(x)$ שמהווה פתרון לבעיית ההתחלה. כלומר, היא מקיימת את המד"ר וגם מקיימת $z(x_0+h)=\tilde{y}_0$. נגדיר פונקציה חדשה על ידי

$$\tilde{y}(x)=\begin{cases} y(x), & x\in[x_0-h,x_0+h] \\ z(x), & x\in(x_0+h,x_0+h+k] \end{cases}.$$

ניתן לזהות בבירור כי $\tilde{y}(x)$ פונקציה גזירה ברציפות, שמקיימת את המד"ר ואת תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$, אך היא פונקציה שמוגדרת על קטע גדול יותר מהקטע שהובטח על ידי המשפט.

מסקנה. ניתן להרחיב את תחום ההגדרה של הפתרון למד"ר בתנאי שבנקודות הקצה מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות.

הגדרה 2.5.1 תחום הגדרה מקסימלי של פתרון

אומרים כי קטע $I \subset \mathbb{R}$ הוא **תחום הגדרה מקסימלי** לפתרון של המד"ר

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אם מתקיימים התנאים הבאים.

- $x_0 \in I$.
- קיימת פתרון $y : I \to \mathbb{R}$ לבעיית ההתחלה.
- הקטע I אינו מוכל באף קטע אחר המקיים את שני התנאים הקודמים.

דוגמה 2.5.1 דוגמה למציאת תחום הגדרה מקסימלי

מצאו את תחום ההגדרה המקסימלי לפתרון של המד"ר

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 2. \end{cases}.$$

פתרון. תחילה, נזהה שבסביבת תנאי ההתחלה אכן מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות, ובפרט, שהפתרון שלנו לא מתאפס בסביבת הנקודה. אי לכך, אפשר לחלק ולכתוב את המשוואה כמשוואה פרידה

$$\frac{y'}{y^2} = 1.$$

לאחר ביצוע אינטגרציה מקבלים

$$-\frac{1}{y} = x + C,$$

ואם נציב את תנאי ההתחלה $y(0) = 2$ נקבל $C = -\frac{1}{2}$. כלומר, הפתרון (לפחות בסביבת תנאי ההתחלה), הוא

$$y = -\frac{1}{x - \frac{1}{2}}.$$

עתה, נשים לב שאת הפתרון הנ"ל ניתן להרחיב לכל הקטע $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, ובקרן זו הפתרון יחיד על פי עקרון אי החיתוך. כלומר, ברור שליד תנאי ההתחלה הפתרון הוא יחיד, אך עקרון אי החיתוך מבטיח שגם בקטע רחב יותר, לא יתכן פתרון אחר ש"ישתלב" עם הפתרון שלנו באף נקודה בתחום.

עתה, נשים לב שלא ניתן להרחיב את הפתרון, היות ומתקיים $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} y(x) = \infty$, ומכאן שזה אכן תחום ההגדרה המקסימלי לפתרון. $\square$

דוגמה 2.5.1 הייתה דוגמה חישובית אך היא מחביאה בתוכה תופעה מפתיעה. עבור המד"ר $y' = y$, מצאנו בעבר כי כל הפתרונות ניתנים להרחיב לכל $\mathbb{R}$. לעומת זאת, את הפתרון של $y' = y^2$ לא ניתן להרחיב לכל $\mathbb{R}$, על אף ששתי המשוואות נראות דומות ושתיהן מוגדרת על ידי פונקציות "פשוטות". כלומר, המענה לשאלה "עד כמה אפשר להרחיב תחום הגדרה של פתרון למד"ר?" היא לאו דווקא שאלה שקל לענות עליה מהתבוננות במד"ר לבדה. יחד עם זאת, כן ראינו כי **כל פתרון** ש"מסתיים" בנקודה שבה מתקיימים תנאי משפט הקיום/יחידות, ניתן להרחבה לקטע גדול יותר.

טענה 2.5.1. תחומי הגדרה מקסימליים

יהא $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום דו-ממדי ותהא $f : D \to \mathbb{R}$ רציפה כך ש-$\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימת ורציפה. נניח כי $y : I \to \mathbb{R}$ פתרון למד"ר המוגדר בתחום המקסימלי לפתרון זה. אזי מתקיים אחד מהבאים:

- $I = \mathbb{R}$.
- $I \neq \mathbb{R}$, ובמקרה זה
  - אחד או יותר מקצות הקטע בעל אסימפטוטה אנכית.
  - אחד או יותר מקצות הקטע נמצא על השפה של D.

הוכחה. (**הוכחה זו אינה נדרשת בקורס**) נסמן ב-I את התחום המקסימלי שבו מוגדר הפתרון, ונניח בשלילה כי הגרף של $y(x)$ מוכל בקבוצה סגורה וחסומה K שמוכלת בפנים של D. אנחנו יודעים ש-I חייב להיות קטע פתוח, אחרת הקצה השמאלי (או הימני) שלו היו מקיימים את התנאים להרחבה נוספת של הקטע I לקטע רחב יותר שבו מוגדר הפתרון (כי כל הנקודות של הגרף הן נקודות פנימיות). לכן נניח כי $I = (a, b)$ עבור $-\infty < a < b < \infty$.

על פי הנתון, $\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימת ורציפה ב-D ובפרט בקבוצה K. משום שהיא סגורה וחסומה, נסיק שהיא מקבלת מקסימום ומינימום, ולכל $x_1, x_2 \in I$ נוכל להשתמש במשפט לגראנז' ולהסיק כי

$$y(x_1) - y(x_2) = y'(c)(x_1 - x_2) = f(c, y(c))(x_1 - x_2)$$

היות והפונקציה שלנו היא פתרון של המד"ר. נסמן ב-M חסם של הנגזרת ונקבל כי

$$|y(x_1) - y(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

ומכאן שהפונקציה רציפה במידה שווה בקטע (a,b). כידוע מקורסי החדו"א, אם פונקציה רציפה במידה שווה בקטע הפתוח, קיימים לה הגבולות בקצוות של הקטע, וניתן להרחיב את y לקטע $[a,b]$ כך שהיא תהיה רציפה בקטע זה. בנוסף, היות ומתקיים

$$\lim_{x\to b^-} y'(x) = \lim_{x\to b^-} f(x, y(x)) = f(b, y(b))$$

נסיק שגם הנגזרת רציפה בקצוות של הקטע והפונקציה מקיימת את המד"ר בקטע $[a,b]$. זאת בסתירה לכך שהנחנו ש-I הוא הקטע המקסימלי שבו מתקבל פתרון.

כלומר, קיבלנו שהתחום המקסימלי של הפתרון לא יכול להסתיים בפנים של D לעולם. מכאן שבהכרח

- $a=-\infty, b=\infty$, כך שהקצוות לא נמצאים בתוך D.
- לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית, כך שגרף הפונקציה "בורח" מ-D לאינסוף (כלפי מעלה).
- הפתרון מסתיים בשפה של D.

וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח. $\square$

שימו לב שבדוגמה 2.5.1 גילינו כי לפתרון יש אסימפטוטה אנכית. היות והמד"ר $y'=y^2$ מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בכל נקודה, נסיק כי כל פתרון שלא מוגדר בכל $\mathbb{R}$ חייב לקבל אסימפטוטה אנכית.

דוגמה 2.5.2. פתרון שמסתיים בשפה

מצאו את תחום ההגדרה המקסימלי לפתרון של הבעיה

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(0)=4 \end{cases}.$$

פתרון. בסביבת הנקודה $(0,4)$ מתקיימים תנאי משפט 2.5.1. כדי למצוא את הפתרון נעביר אגפים ונכתוב את המשוואה בצורה

$$y'y=-x$$

כאשר באגף השמאלי ניתן לזהות נגזרת של $\frac{1}{2}y^2$ על פי כלל השרשרת. לכן

$$\frac{1}{2}y^2(x)=\frac{1}{2}x^2+C,$$

ועל ידי הצבת תנאי ההתחלה מקבלים כי $C=8$. כלומר, הפתרון שלנו נמצא על המעגל

$$x^2+y^2=16,$$

ומפני שידוע לנו כי $y>0$ בסביבת הפתרון שלנו, נקבל כי

$$y(x)=\sqrt{16-x^2}$$

הוא הפתרון היחיד של המשוואה בסביבת הנקודה. שימו לב שהפתרון שלנו גזיר ברציפות לכל $x\in(-4,4)$, כלומר הוא מסתיים בנקודות $(\pm 4,0)$, שזה לא מפתיע, כי התחום D שבו מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות הוא התחום שבו $y\neq 0$, כך שהפתרון הסתיים בדיוק בשפה של פתרון זה. □

דוגמה 2.5.3. פתרונות שמוגדרים בכל $\mathbb{R}$

הוכיחו כי כל פתרון למשוואה $y'=(y-1)(y-2)$ המקיים תנאי התחלה מהצורה

$$y(x_0)=y_0,\qquad y_0\in(1,2)$$

מוגדר בכל $\mathbb{R}$ ומקיים $\lim_{x\to\infty}y(x)=1$ וכן $\lim_{x\to-\infty}y(x)=2$.

פתרון. תחילה, הראינו כבר בעזרת עקרון החיתוך כי בתחום ההגדרה של פתרונות אלו מתקיים

$$1<y(x)<2.$$

אי לכך, לפתרונות הנתונים לא קיימות אסימפטוטות אנכיות. היות ותנאי משפט 2.5.1 מתקיימים בכל מקום, נסיק מטענה 2.5.1 כי הפתרונות יהיו מוגדרים בכל $\mathbb{R}$.
באשר לחלק השני, נשתמש בכך שהפתרונות מונוטוניים יורדים בכל תחום הגדרתם כך שהגבולות ב-$\pm\infty$ בהכרח קיימים במובן הרחב, ומכך שהפתרונות חסומים, הם קיימים. נסמן

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=L$$

כאשר $1\leq L<2$ בהכרח מהנתונים שיש לנו עד כה. אם נניח בשלילה כי $L\neq 1$, נקבל כי

$$\lim_{x\to\infty}y'(x)=\lim_{x\to\infty}(y(x)-1)(y(x)-2)=(L-1)(L-2)<0.$$

מכאן מקבלים סתירה, כי השיפוע של פונקציה בעלת גבול באינסוף לא יכול להיות שונה מאפס (ודאו זאת, זה תרגיל בחדו"א). כלומר, בהכרח מתקיים $L=1$ כדרוש. שיקול זהה מראה שהגבול ב-$-\infty$ חייב להיות 2, כדרוש. □

2.5.2 אי קיום תנאי המשפט

כאשר תנאי משפט הקיום והיחידות אינם מתקיימים, יתכנו תופעות רבות ומוזרות. לשם כך נציג מספר דוגמאות שמייצגות נאמנה את התופעות האפשריות השונות.

דוגמה 2.5.4. אי-קיום פתרונות

הראו כי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} xy' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

לא קיים פתרון.

פתרון. על ידי התבוננות במד"ר, ניתן לזהות שכאשר $x = 0$ מתקבלת המשוואה $y = 0$. כלומר, כל פתרון של המד"ר שמוגדר ב-$x = 0$ חייב לעבור בראשית. אי לכך, לא יתכן פתרון לבעיית ההתחלה שהצגנו. זה כמובן לא מפתיע, שהרי אם נציג את המד"ר בצורה

$$y' = f(x, y) = \frac{y}{x}$$

נקבל שכאשר $x = 0$ תנאי המשפט לא מתקיימים. □

דוגמה 2.5.5. קיום כמות סופית של פתרונות

מצאו את כל הפתרונות האפשריים לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \sqrt{2|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

פתרון. ראשית, נוכל לזהות כי $y = 0$ הוא פתרון שמוגדר בכל $\mathbb{R}$ (ובפרט מהווה פתרון לבעיית ההתחלה). יחד עם זאת, נוכל להראות שקיימים פתרונות נוספים לבעיה. נניח כי $y \neq 0$ ונפריד לשני מקרים:

- אם $y > 0$, נוכל לחלק ולכתוב

$$\frac{y'}{\sqrt{2y}} = 1$$
$$\implies \sqrt{2y(x)} = x + C.$$

שימו לב שהיות והאגף השמאלי מכיל שורש, בהכרח מתקיים $x > -C$ ובמקרה זה הפתרון הוא

$$y(x) = \frac{(x + C)^2}{2}, \quad x > -C.$$

- אם $y < 0$, נוכל לחלק ולכתוב

$$\frac{y'}{\sqrt{-2y}} = 1$$
$$\implies -\sqrt{-2y} = x + D,$$

והפעם, משום שהאגף השמאלי שלילי, תחום ההגדרה של הפתרון הוא $x < -D$. כלומר

$$y(x) = -\frac{(x+D)^2}{2}, \quad x < -D.$$

שימו לב שניתן לזהות כאן תופעה מאוד מעניינת. כאשר $y = 0$, למשוואה שלנו אין קיום ויחידות, ולמעשה, ניתן לזהות שגם הפתרונות הלא טריוויאלים שלנו מסתיימים בנקודות שבהן הערך של הפונקציה מתאפס. במובן מסויים, מדובר במערכת שבה מרגע שהגענו לאפס, אנחנו לא יכולים לדעת מה היה שהוביל אותנו לאפס. למשל, אם נתבונן בפונקציה

$$y(x) = \frac{(x-1)^2}{2},$$

היא פונקציה שמהווה פתרון למד"ר לכל $x > 1$, וכאשר $x = 1$ היא מגיע לערך אפס. שם, אם נחבר אותה לפונקציה $y = 0$ בקרן $(-\infty, 1)$, נקבל המשך גזיר של הפונקציה שלנו שמהווה פתרון של המד"ר שמוגדר בכל $\mathbb{R}$! למעשה, כל פונקציה מהצורה

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_+)^2}{2}, & x > x_+ \\ 0, & x_- \le x \le x_+ \\ -\frac{(x-x_-)^2}{2}, & x < x_- \end{cases}$$

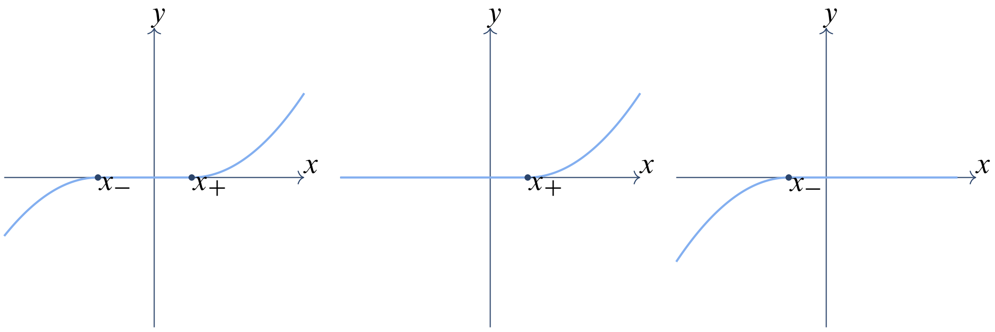
יהיה פתרון למד"ר (גם כאשר $x_+ = \infty$ או $x_- = -\infty$, כמודגם באיור 2.6). שימו לב שלמעשה התנאי היחיד שעלינו לבדוק הוא רציפות של הפונקציה בנקודות ההשקה בין הפתרונות השונים. הרי, אם $y(x)$ רציפה, אפשר להשלים אותה לפונקציה גזירה ברציפות בנקודות ההשקה על ידי שימוש בכך שמתקיים

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

והאגף הימני רציף ב-x על פי הנחה. כלומר, קיבלנו אינסוף פתרונות שונים לאותה בעיית התחלה. לשיטה זו, שבה "מדביקים" פתרונות שונים למד"ר בנקודות שבהן אין יחידות לפתרון, קוראים בשם **תפירת פתרונות**.

□

בטבע. קיימות מערכות רבות בטבע שבהן העובדה שפתרון למד"ר אינו יחיד היא טבעית. כך למשל, אם נסמן ב-$h(t)$ את הגובה של המים בדלי מים שמתרוקן בקצב שמכתיב כח המשיכה, ברור לנו שכאשר הדלי מרוקן, אין לנו אפשרות לדעת מה קרה לפני שהדלי התרוקן. ייתכן והוא היה ריק כל הזמן, ויתכן והוא ריק כי היו בו מים שהתרוקנו. חשוב לדעת להתמודד גם עם משוואות כאלו, על אף שלרוב נעסוק במקרים שבהם יש קיום ויחידות לבעיית ההתחלה.



איור 2.6: צורת הפתרונות השונים לבעיית ההתחלה.

2.6 יציבות פתרונות

בתחילת הפרק דנו במספר שאלות טבעיות שעולות בהקשר של פתרון משוואות דיפרנציאליות. שתי השאלות הראשונות עסקו בקיום וביחידות, וסיפקנו להן מענה לא רע בעזרת משפט 2.5.1. בשאלה האחרונה טרם הספקנו לדון, והיא השאלה שעוסקת ביציבות.

הגדרה 2.6.1 פתרון יציב/יציב אסימפטוטית למד"ר מסדר ראשון

יהא $y_0(x)$ פתרון למד"ר $y' = f(x, y)$. אומרים כי y_0 **יציב** כאשר $x > x_0$, אם

- הפתרון מוגדר לכל $x \geq x_0$.
- לכל $\varepsilon > 0$, קיימת $\delta > 0$ כך שלכל פתרון $y_1(x)$ של המד"ר, אם $|y_1(x_0) - y_0(x_0)| < \delta$, אזי

$$|y_1(x) - y_0(x)| < \varepsilon, \quad \forall x > x_0.$$

אם לכל פתרון $y_1(x)$ כנ"ל מתקיים בנוסף $\lim_{x\to\infty} |y_1(x) - y_0(x)| = 0$, אומרים שהפתרון **יציב אסימפטוטית**.

הערה. באופן אנלוגי לחלוטין מגדירים גם פתרונות יציבים/יציבים אסימפטוטית ב-$x < x_0$.
בצורה פשוטה, פתרון יציב אם פתרונות שקרובים אליו בתנאי ההתחלה ישארו קרובים אליו בתנאי ההתחלה.
פתרון יציב אסימפטוטית מקיים שפתרונות שקרובים אליו בתנאי ההתחלה יתקרבו אליו כרצוננו.

דוגמה 2.6.1 יציבות ויציבות אסימפטוטית במשוואה הלוגיסטית

עבור המד"ר $y' = (y-1)(y-2)$ ועבור $x_0 \in \mathbb{R}$, הוכיחו כי הפתרון $y = 2$ לא יציב כאשר $x > x_0$ ויציב אסימפטוטית כאשר $x < x_0$.

פתרון. נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ותהא $\delta > 0$ כלשהי. נניח לשם נוחות כי $\delta < 1$ ונניח כי $\tilde{y}(x)$ פתרון למד"ר המקיים

$$|\tilde{y}(x) - 2| < \delta.$$

אם הפתרון אינו הפתרון הקבוע 2, נפריד לשני מקרים אפשריים:

- אם $\tilde{y}(x_0) < 2$ הוא יקיים
$$1 < \tilde{y}(x) < 2 \; \forall x > x_0$$
וגם $\lim_{x\to\infty} \tilde{y}(x) = 1$, על פי דוגמה 2.5.3, ולכן קיים $x > x_0$ שעבורו
$$|\tilde{y}(x) - 2| \geq \frac{1}{2}.$$

- אם $\tilde{y}(x_0) > 2$, נסיק מהנוסחה $y' = (y-1)(y-2)$ שהפתרון עולה עם שיפוע גדול/שווה ל-$y'(x_0)$. אחרת, היינו מסיקים שקיימת נקודה שבה מתרחש מעבר מעלייה לירידה ובה $y' = 0$ מה שלא יתכן במקרה של הפתרון שלנו. אך מכאן נובע שהפתרון לא חסום, ובפרט ניתן יהיה למצוא נקודה $x > x_0$ שבה
$$|\tilde{y}(x) - 2| \geq \frac{1}{2}.$$

סה"כ נסיק כי הפתרון אינו יציב כאשר $x > x_0$. לעומת זאת, כאשר $x < x_0$ נשתמש בכך שלכל פתרון בין 1 ל-2 ולכל פתרון שנמצא מעל 2, מתקיים

$$\lim_{x\to-\infty} \tilde{y}(x) = 2,$$

ובפרט $\lim_{x\to-\infty} |\tilde{y}(x_0) - 2| = 0$. כלומר, הפתרון יציב אסימפטוטית כאשר $x \to -\infty$. המחשה של רעיון זה מופיעה באיור 2.7. □

דוגמה 2.6.2. יציבות שאינה אסימפטוטית

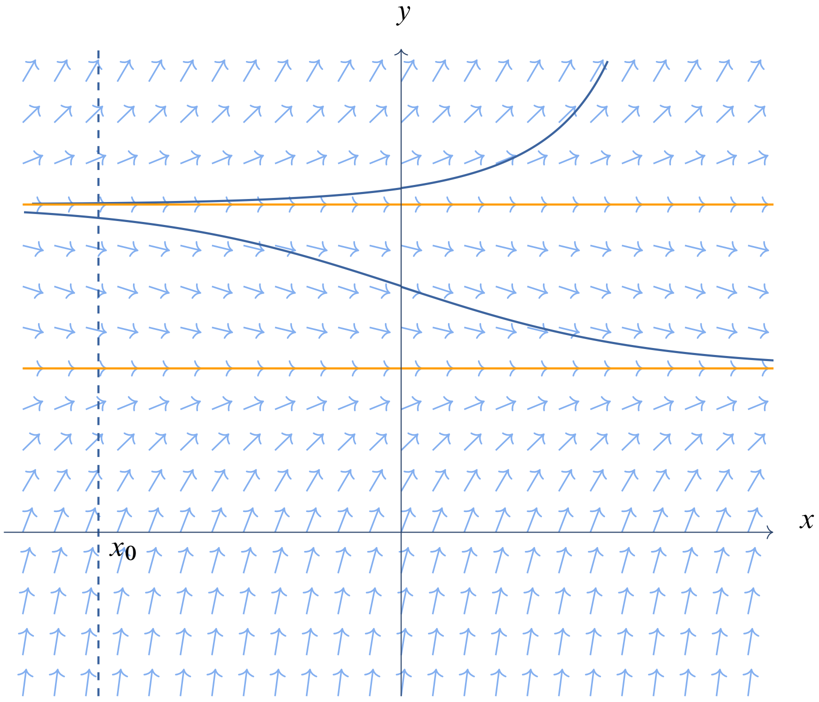
הוכיחו כי הפתרון $y = x$ של המד"ר

$$\left(1+x^2\right)\arctan(x) y' - y = \left(1+x^2\right)\arctan(x) - x$$

יציב כאשר $x > 1$ הוא אינו יציב אסימפטוטית.

פתרון. ראשית, הצבה פשוטה מראה שאכן מדובר בפתרון המוגדר לכל $x > 1$. כדי למצוא פתרונות אחרים ולדון ביציבות של פתרון זה, נשים לב שמדובר במשוואה ליניארית אי הומוגנית מסדר ראשית ונחלק אותה כדי לכתוב

$$y' - \frac{1}{\left(1+x^2\right)\arctan(x)} y = 1 - \frac{x}{\left(1+x^2\right)\arctan(x)}.$$



איור 2.7: המחשה של אי היציבות של הפתרון $y = 2$ ב-$x > x_0$ למד"ר $y' = (y-1)(y-2)$. ניתן לזהות בכחול זוג פתרונות שבנקודה x_0 קרובים מאוד לפתרון $y = 2$, אך ככל ש-x גדל, הפתרונות מתרחקים. לעומת זאת, ניתן לזהות את היציבות ב-$x < x_0$ היות והפתרונות מתקרבים ל-$y = 2$.

גורם האינטגרציה המתאים הוא

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}\mathrm{d}x} = e^{-\ln(\arctan(x))} = \frac{1}{\arctan(x)}$$

כלומר, ניתן לכתוב

$$\left(\frac{1}{\arctan(x)}y\right)' = \frac{1}{\arctan(x)} - \frac{x}{(1+x^2)\arctan^2(x)}.$$

ולכן

$$\frac{1}{\arctan(x)}y = \int \frac{1}{\arctan(x)}\mathrm{d}x - \int \frac{x}{(1+x^2)\arctan^2(x)}\mathrm{d}x \overset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=} \frac{x}{\arctan(x)} + \int \frac{x}{(1+x^2)\arctan^2(x)}\mathrm{d}x - \int \frac{x}{(1+x^2)\arctan^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{x}{\arctan(x)} + C.$$

קיבלנו כי הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$y\left(x\right)=x+C\arctan\left(x\right).$$

כדי לבחון יציבות, נשים לב שלכל פתרון אחר של המשוואה, מתקיים בתנאי ההתחלה

$$\left|y\left(1\right)-1\right|=\left|C\arctan\left(1\right)\right|=\frac{\pi}{4}\left|C\right|,$$

ולכל $x>1$ ניתן להעריך ולחסום

$$\left|y\left(x\right)-x\right|=\left|C\arctan\left(x\right)\right|\leq\frac{\pi}{2}\left|C\right|,$$

ולכן, בהנתן $\varepsilon>0$, אם נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ נקבל כי אם

$$\left|y\left(1\right)-1\right|=\frac{\pi}{4}\left|C\right|<\delta,$$

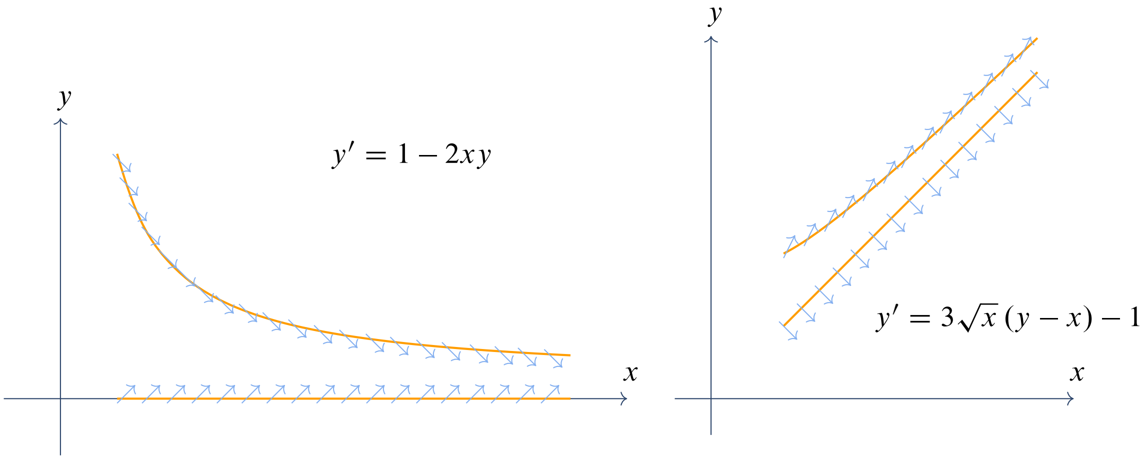
אזי

$$\left|y\left(x\right)-x\right|\leq\frac{\pi}{2}\left|C\right|<2\delta=\varepsilon.$$

כלומר, הפתרון אכן יציב לכל $x>1$. יחד עם זאת, ברור שהפתרון לא יציב אסימפטוטית היות ולכל $C\neq0$

$$\lim_{x\to\infty}\left|y\left(x\right)-x\right|=\frac{\pi}{2}\left|C\right|\neq0.$$

$\square$



איור 2.8: האיזוקלינות והחצים הרלוונטיים של המשוואות מדוגמה 2.6.3.

דוגמה 2.6.3. יציבות בעזרת שדה כיוונים

1. חקרו את היציבות של פתרונות של המשוואה $y' = 1 - 2xy$ הכלואים בין האיזוקלינות של הערכים ± 1 כאשר $x > 1$.
2. חקרו את היציבות של פתרונות של המשוואה $y' = 3\sqrt{x}\,(y - x) - 1$ הכלואים בין האיזוקלינות של הערכים $2, -1$ כאשר $x > 1$.

פתרון.

1. האיזוקלינה של הערך 1 מתקבלת כאשר

$$y' = 1 = 1 - 2xy$$
$$\Longrightarrow y = 0,$$

והאיזוקלינה של הערך -1 מתקבלת כאשר

$$y' = -1 = 1 - 2xy$$
$$\Longrightarrow y = \frac{1}{x}$$

כמודגם באיור, פתרונות בתחום $x > 1$ הכלואים בין שתי הנולקלינות לא יכולים לצאת מהן היות והחיצים שעל $y = \frac{1}{x}$ כולם פונים כלפי מטה והחיצים שעל $y = 0$ פונים כלפי מעלה. לכן, כל הפתרונות ישארו חסומים בין שני העקומים, והיות והמרחק ביניהם שואף לאפס, כל הפתרונות יהיו יציבים אסימפטוטית.

2. האיזוקלינה של הערך 2 מתקבלת כאשר

$$y' = 2 = 3\sqrt{x}\,(y - x) - 1$$
$$\Longrightarrow y = x + \frac{1}{\sqrt{x}},$$

והאיזוקלינה של הערך -1 מתקבלת כאשר

$$y' = -1 = 3\sqrt{x}\,(y - x) - 1$$
$$\Longrightarrow y = x.$$

היות והאיזוקלינות מתקרבות אחת לשניה כרצוננו, ניתן להוכיח שאם קיים פתרון שכלוא בין האיזוקלינות, הוא יחיד. לפחות מבחינה אינטואיטיבית, כל פתרון שנמצא ליד הפתרון שלנו מכוון לצאת החוצה מה"משפך" (ניתן לראות זאת עם כיווני החיצים) ולכן פתרון כזה בהכרח יהיה לא יציב כאשר $x > 1$.

□

3

משוואות דיפרנציאליות מסדר גבוה

3.1 מבוא והגדרות

נזכיר כי משוואה דיפרנציאלית מפורשת מסדר n היא משוואה מהצורה

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

ואומרים כי פונקציה $y : I \to \mathbb{R}$ היא פתרון למשוואה אם y בעלת n נגזרות רציפות ב-I, ולכל $x \in I$ מקיימת את המשוואה.

דוגמה 3.1.1. הדגמת תנאי התחלה

הפתרון של המד"ר $y'' = 0$ הוא בהכרח פונקציה מהצורה

$$y(x) = ax + b$$

ובאופן כללי הפתרון של המד"ר $y^{(n)} = 0$ הוא בהכרח פונקציה מהצורה

$$y(x) = a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

שימו לב שבדוגמה 3.1.1, ניתן לראות כי הפתרון של מד"ר נקבע עד כדי n פרמטריים חופשיים. כלומר, עלינו להוסיף n תנאי התחלה על מנת לקבע את הפתרון ביחידות. הראה שהנ"ל יקרה בכל מד"ר מסדר גבוה.

הגדרה 3.1.1. מערכת מד"ר n ממדית

משוואה מהצורה

$$\vec{X}'(t)=\begin{pmatrix}x_1'(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(t,x_1,\ldots,x_n)\\ \vdots\\ f_n(t,x_1,\ldots,x_n)\end{pmatrix}=\vec{F}(t,x_1,\ldots,x_n)$$

מכונה **מערכת מד"ר ממימד n**. וקטור של n פונקציות $\vec{X}(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ המוגדר בקטע I מכונה **פתרון** של המערכת אם $x_i(t)$ גזירה ברציפות ב-I לכל i, והוקטור $\vec{X}(t)$ מקיים את המערכת לכל t.

מתברר שלמערכות מד"ר ממימד n קיים משפט קיום ויחידות דומה מאוד (ולמעשה מהווה הכללה) למשפט 2.5.1.

משפט 3.1.1. משפט הקיום והיחידות למערכות מד"ר (פיקארד-לינדלוף)

יהא $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$ תחום $n+1$ ממדי ותהיינה $f_i(t,x_1,\ldots,x_n):D\to\mathbb{R},\ i=1,\ldots,n$ פונקציות המקיימות

- f_i רציפה לכל $i=1,\ldots,n$.
- $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ רציפה לכל $i,j=1,\ldots,n$.

אזי, לכל נקודה פנימית $(t_0,c_1,\ldots,c_n)\in D$, קיים קטע $[t_0-h,t_0+h]$ שבו לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases}\vec{X}'(t)=\vec{F}\left(t,\vec{X}\right)\\ x_i(t_0)=c_i,\quad\forall i=1,\ldots,n\end{cases}$$

קיים פתרון יחיד.

אנחנו לא נוכיח את המשפט, אך נציין כי הוכחתו דומה מאוד להוכחת משפט 2.5.1.

דוגמה 3.1.2. בדיקת תנאי המשפט

הראו כי לבעיה

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}tx^2(t)+y^2(t)\\ e^{x(t)}y(t)\end{pmatrix}\\ x(0)=0,\ y(0)=0\end{cases}$$

קיים פתרון יחיד בסביבת $t=0$.

פתרון. נסמן

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t,x,y) = \begin{pmatrix} tx^2 + y^2 \\ ye^x \end{pmatrix}.$$

ניתן לזהות בקלות שבסביבת הנקודה $(t_0, c_1, c_2) = (0,0,0)$ הפונקציות f_1, f_2 רציפות ומתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 2xt & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= ye^x & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= e^x. \end{aligned}$$

כלומר כל הנגזרות החלקיות של f_i לפי המשתנים **שאינם** t הן פונקציות רציפות. על פי משפט 3.1.1, קיים פתרון יחיד לבעיה בסביבת $t = 0$. □

דוגמה 3.1.3. הקשר בין משוואה מסדר n למערכת משוואות

הראו כי פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -p(t)x_2 - q(t)x_1 + g(t) \end{pmatrix}$$

עם תנאי התחלה $x_1(t_0) = c_1, x_2(t_0) = c_2$ שקול לפתרון של המד"ר

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t),$$

עם תנאי ההתחלה $y(t) = c_1, y'(t) = c_2$.

פתרון. נניח כי (x_1, x_2) וקטור פתרונות למערכת שמקיים את תנאי ההתחלה הנתון. אם נסמן $y(t) := x_1(t)$, נקבל מתוך המערכת כי

$$y'(t) = x_1'(t) = x_2(t),$$

ולכן $x_2'(t) = y''(t)$. אך מצד שני, על פי המשוואה השניה במערכת

$$x_2'(t) = -p(t)x_2(t) - q(t)x_1(t) + g(t) = -p(t)y'(t) - q(t)y(t) + g(t),$$

ועל ידי העברת אגפים נקבל כי $y(t)$ אכן מהווה פתרון למד"ר. כמו כן, השוויון שקיבלנו מראה כי גם תנאי ההתחלה מתקיים, וההוכחה של הכיוון ההפוך באופן דומה על פי אותו הסימון. □

דוגמה 3.1.3 מראה אפשרות לעבור "כרצוננו" בין מערכת משוואות מסדר n לבין מד"ר יחידה מסדר n. מתברר שניתן לעשות את זה לכל מד"ר מפורשת, ולקבל משפט קיום ויחידות למשוואות מסדר n.

משפט 3.1.2. משפט הקיום והיחידות למשוואות מסדר n

יהא $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ תחום $n = 1$ ממדי ותהא $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) : D \to \mathbb{R}$ רציפה כך שגם הפונקציות

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

רציפות. אזי, לכל נקודה פנימית $(x_0, c_1, \dots, c_n) \in D$, קיים קטע $[x_0 - h, x_0 + h]$ שבו לבעיה:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = c_1,\ y'(x_0) = c_2,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = c_n \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד.

הוכחה. אנחנו נוכיח את המשפט בהנחה שמשפט 3.1.1 נכון. נשתמש בסימון העזר

$$u_1(x) := y(x),\ u_2(x) := y'(x),\ \dots,\ u_n(x) := y^{(n-1)}(x).$$

נשים לב שעל פי ההגדרה שלנו, ניתן לגזור את כל הפונקציות שהגדרנו ולקבל כי

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= y'(x) = u_2(x) \\ u_2'(x) &= y''(x) = u_3(x) \\ &\vdots \\ u_{n-1}'(x) &= y^{(n-1)}(x) = u_n(x) \end{aligned},$$

ולבסוף

$$u_n'(x) = y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = (x, u_1, \dots, u_n).$$

כלומר, y הוא פתרון של המד"ר אם ורק אם מתקיים

$$\vec{U}' = \begin{pmatrix} u_1' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ f(x, u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix}$$

בנוסף, ברור מהנוסחה כי $u_i(x_0) = c_i$ לכל $i = 1, \dots, n$, כך שבעיית ההתחלה הנ"ל שקולה לפתרון של המד"ר המקורית עם תנאי ההתחלה שלה. על פי משפט 3.1.1, התנאים הדרושים הם שהפונקציות

$$f_1(x, u_1, \dots, u_n) = u_2,\ f_2(x, u_1, \dots, u_n) = u_3, \dots, f_n(x, u_1, \dots, u_n) = f(x, u_1, \dots, u_n)$$

תהיינה רציפות והנגזרות שלהן לפי $u_1, \dots, u_n$ תהיה רציפות. עבור $f_1, \dots, f_{n-1}$ הנ"ל מתקיים באופן מידי

(שהרי מדובר בפונקציות אלמנטריות), ועבור הפונקציה האחרונה נזהה כי

$$\frac{\partial f_n}{\partial u_1} = \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f_n}{\partial u_2} = \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial u_n} = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}},$$

ואלו רציפות על פי הנתון. כלומר, לבעיה אכן קיים פתרון יחיד בקטע $[x_0 - h, x_0 + h]$ ולכן גם למד"ר המקורית קיים פתרון יחיד בקטע זה. □

דוגמה 3.1.4. בדיקת תנאי קיום ויחידות למד"ר מסדר n

הראו כי לבעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y^{(3)} = y'' \sin\left(y^2\right) + xy' \\ y\left(0\right) = y'\left(0\right) = y''\left(0\right) = 1, \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד בסביבה $x = 0$.

פתרון. במקרה שלנו מתקיים

$$f\left(x, y, y', y''\right) = y'' \sin\left(y^2\right) + xy'.$$

ברור כי f היא פונקציה רציפה, ונותר לבדוק את הנגזרות החלקיות שלה לפי y, y', y''. אכן

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yy'' \cos\left(y^2\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y''} = \sin\left(y^2\right),$$

והפונקציות הללו כולן רציפות בכל $\mathbb{R}^3$. אי לכך, משפט 3.1.2 מבטיח שאכן קיימת סביבה של $x = 0$ שבה יש למשוואה פתרון יחיד. □

הערה. בדומה למשוואות מסדר ראשון, גם למשוואות מסדר n ניתן לנסח עקרונות של אי-חיתוך ועקרונות המשכה של פתרונות.

1. אם שני פתרונות $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ למד"ר מסדר n מקיימים

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \; y_1'(x_0) = y_2'(x_0), \; \ldots, \; y_1^{(n-1)}(x_0) = y_2^{(n-1)}(x_0)$$

בנקודה $I \ni x_0$, אזי $y_1 = y_2$ בכל הקטע I.

2. אם $y : I \to \mathbb{R}$ פתרון של מד"ר מסדר n ו-I הוא תחום ההגדרה המקסימלי של הפתרון, אזי מתקיימים אחד (או שילוב) של המקרים הבאים:
   - $I = \mathbb{R}$.
   - ל-I אסימפטוטה אנכית באחד מקצותיו.

- אחד מקצות הפתרון הוא נקודת שפה של התחום שבו מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות.

שימו לב שההבדל העיקרי בין הגרסאות של המשפטים הוא העובדה שהפעם עקרון אי החיתוך דורש "חיתוך" של הגרפים וגם של הנגזרות שלהם.

3.2 משוואות ליניאריות

הגדרה 3.2.1. משוואה ליניארית מסדר n

משוואה מהצורה
$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = g(x)$$
מכונה **משוואה ליניארית מסדר n**. במידה ו-$g(x) = 0$ המשוואה **הומוגנית** ואחרת, **אי-הומוגנית**.

טענה 3.2.1. קיום ויחידות למד"ר ליניארית

עבור משוואה ליניארית מסדר n, אם $a_1(x), \ldots, a_n(x), g(x)$ רציפות בקטע I, אזי לכל $x_0 \in I$, ולכל תנאי התחלה
$$(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n,$$
למשוואה יש פתרון יחיד עבור תנאי ההתחלה, ופתרון זה מוגדר בכל I.

הוכחה. ראשית, נשים לב שכל מד"ר ליניארית ניתן לכתוב בצורה
$$y^{(n)} = g(x) - a_1(x) y^{(n-1)} - \cdots - a_n(x) y = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$
במקרה זה מתקיים
$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_n(x), \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = a_1(x),$$
ולכן אם $a_1, \ldots, a_n$ רציפות בקטע, מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות. ההוכחה שניתן להרחיב את הפתרון בהכרח לכל I נובעת מההוכחה של משפט 3.1.1, ונובעת מהאופן שבו נקבע הקטע $[x_0 - h, x_0 + h]$. היות ולא הצגנו את ההוכחה, לא נוכל להציג את האופן שבו הנ"ל נובע ממנה. □

3.2.1 משוואות ליניאריות והומוגניות מסדר n

נתחיל את החלק שלעיל בתזכורת שעבור משוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון, קרי
$$y' + p(x) y = 0,$$

ראינו שהפתרון הכללי של המשוואה (כל עוד p רציפה) הוא

$$y\left(x\right)=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

בזכות נוסחה זו, אנחנו יכולים לזהות כי לכל זוג פתרונות

$$y_1(x)=C_1e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},\quad y_2(x)=C_2e^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$, מתקיים כי הפונקציה

$$y(x)=\alpha y_1(x)+y_2(x)=\left(\alpha C_1+C_2\right)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

היא גם פתרון של המד"ר. במילים אחרות, אוסף כל הפתרונות של המשוואה הוא **מרחב וקטורי חד-ממדי**. מתברר, שגם במשוואות ליניארית מסדר גבוה מתקיימת תכונה דומה.

הגדרה 3.2.2. אופרטור דיפרנציאלי ליניארי

נסמן ב-$C^n\left(I\right)$ את אוסף כל הפונקציות $y:I\to\mathbb{R}$ שיש להן n נגזרות רציפות בקטע I. אופרטור מהצורה $L:C^n\left(I\right)\to C^0\left(I\right)$

$$L\left[y\right]=a_0\left(x\right)y^{(n)}+a_1\left(x\right)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y$$

כאשר $a_0,a_1,\ldots,a_n$ פונקציות רציפות ב-I, מכונה בשם **אופרטור דיפרנציאלי ליניארי מסדר n**. לעתים משתמשים גם בסימון

$$L=a_0\left(x\right)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+a_n(x).$$

טענה 3.2.2. מרחב הפתרונות למד"ר ליניארית הומוגנית

מרחב הפתרונות של מד"ר ליניארית הומוגנית מסדר n הוא מרחב וקטורי.

הוכחה. נשים לב כי אם y גזירה ברציפות n פעמים, היא מהווה פתרון למד"ר ההומוגנית אם ורק אם $L\left[y\right]=0$. ברור כי פונקציית האפס נמצאת במרחב כי היא פתרון, וכי לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ ושני פתרונות y_1,y_2 למד"ר, מתקיים

$$L\left[\alpha y_1+y_2\right]=\alpha L\left[y_1\right]+L\left[y_2\right]=0,$$

ולכן גם αy_1+y_2 הוא פתרון. היות והמרחב שלנו מכיל את וקטור האפס וסגור לחיבור וכפל בסקלר, נסיק כי הוא אכן מרחב וקטורי. □

הבעיה הגדולה. העובדה שמרחב הפתרונות למשוואה ההומוגנית הוא מרחב וקטורי היא עובדה שימושית מאוד ומלמדת המון על המבנה של פתרון למד"ר. הבעיה היא שאנחנו לא יודעים עדיין מהו הממד של המרחב, ובזה נטפל בחלק הבא.

3.2.2 תלות ליניארית של פתרונות

כידוע מקורסי האלגברה הליניארית, מרחב וקטורי הוא n ממדי אם יש לו קבוצה פורשת ובלתי תלויה ליניארית של וקטורים. לכן, כל דיון על בסיס/מימד למרחב הפתרונות שלנו ידרוש הגדרה מסודרת של תלות ליניארית של פתרונות.

הגדרה 3.2.3. תלות ליניארית

יהיו $y_1, \ldots, y_m$ פונקציות המוגדרות בקטע I. אומרים כי הפונקציות **תלויות ליניארית** ב-I אם קיימים קבועים $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ (לא כולם אפס) שעבורם

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_m y_m(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

במידה ולא קיימים קבועים כנ"ל, אומרים כי הפונקציות **בלתי תלויות ליניארית**.

דוגמה 3.2.1. בדיקת תלות ליניארית של פתרונות

עבור הפונקציות הנתונות בקטע הנתון, קבעו האם הן תלויות או בלתי תלויות ליניארית.

1. הפונקציות $\{1, \sin(x), \cos(x)\}$ בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. הפונקציות $1, \cos(2x), \sin^2(x)$ בקטע $[0, 1]$.

פתרון. 1. נניח שאכן קיימים קבועים $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$c_1 + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x) = 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

אזי, השוויון יתקיים בפרט עבור הנקודות $x = 0, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$. לאחר הצבה, נקבל את השוויונים

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} c_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}.$$

מכאן ניתן לפתור בקלות את המשוואה ולקבל שבהכרח $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, ומכאן שהפונקציות בלתי תלויות ליניארית.

2. ניתן להשתמש בזהות הטריגונומטרית

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x),$$

ולהסיק כי הפונקציות תלויות ליניארית בקטע (ולמעשה, בכל קטע).

$\square$

בדיקת תלות ליניארית של פונקציות יכולה להראות כמו משימה קשה. לכאורה, יהיה עלינו לנחש מספיק ערכים של x על מנת למצוא קבועים מתאימים להגדרה או על מנת להוכיח שאין כאלה. יחד עם זאת, שילוב של אנליזה במשוואה (קרי, שימוש בנגזרות) יוביל אותנו לכלי פשוט בהרבה לבדיקת תלות.

התנאי ההכרחי. נניח שהפונקציות $y_1, \ldots, y_m$ תלויים ליניארית בקטע I. כלומר, קיימים קבועים $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, לא כולם אפס, שעבורם

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_m y_m(x) = 0.$$

נניח עתה תנאי נוסף, והוא שהפונקציות שלנו גזירות $m-1$ פעמים בקטע. אזי מתקיים (על ידי גזירה של המשוואה)

$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + \cdots + c_m y_m(x) = 0 \\ c_1 y_1'(x) + \cdots + c_m y_m'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(m-1)}(x) + \cdots + c_m y_m^{(m-1)}(x) = 0 \end{cases},$$

וזאת לכל $x \in I$. המעבר הבא מתבקש - מדובר במערכת משוואות ליניארית שניתן לכתוב גם בעזרת מטריצות. כלומר, המערכת הנ"ל שקולה לכך שמתקיים

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_m(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & \ldots & y_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

בשלב הזה, נזכיר עובדה חשובה מאלגברה ליניארית. עבור משוואה מהצורה $A\vec{v} = 0$ כאשר $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, קיים פתרון שאינו וקטור האפס אם ורק אם $\det(A) = 0$. נגדיר את המטריצה המיוחדת שקיבלנו וננסח את התוצאה שקיבלנו כטענה.

הגדרה 3.2.4 וורונסקיאן

תהיינה $y_1,\dots,y_m$ פונקציות גזירות ברציפות m פעמים בקטע I. ה**וורונסקיאן** של הפונקציות בקטע מוגדר להיות

$$W\left[y_1,\dots,y_m\right](x)=\det\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x)\end{pmatrix}.$$

טענה 3.2.3 תנאי הכרחי לתלות ליניארית

תהיינה $y_1,\dots,y_m$ פונקציות גזירות ברציפות m פעמים בקטע I. אזי, אם הפונקציות תלויות ליניארית בקטע, מתקיים

$$W\left[y_1,\dots,y_m\right](x)=0,\qquad \forall x\in I.$$

מסקנה. אם $W\left[y_1,\dots,y_m\right](x)\neq 0$ בנקודה אחת בקטע, הפונקציות בהכרח בלתי תלויות ליניארית.

ההגדרות והטענות שהוצגו עד כה עוסקות בתלות/אי-תלות ליניארית של פונקציות כלליות לחלוטין, ועדיין לא הצגנו את הקשר למד"ר ליניארית מסדר n. מסתבר ששם ניתן לנסח תוצאות משמעותיות בהרבה.

טענה 3.2.4 תלות ליניארית עם קיום ויחידות

יהיו $y_1,\dots,y_n$ פתרונות בקטע I של המד"ר הליניארית ההומוגנית מסדר n

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=0,$$

ונניח כי $a_1,\dots,a_n$ רציפות בקטע I. אם $W\left[y_1,\dots,y_n\right](x_0)=0$ בנקודה $x_0\in I$, אזי $W\left[y_1,\dots,y_n\right](x)=0$ בכל I.

הוכחה. נניח כי

$$W\left[y_1,\dots,y_n\right](x_0)=\det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0)\end{pmatrix}=0.$$

על פי הדיון שקיימנו קודם לכן, קיימים קבועים (לא כולם אפס) שעבורם

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}.$$

אי לכך, אם נגדיר את הפונקציה

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

נקבל פתרון של המד"ר (שהרי, מדובר בקומבינציה ליניארית של פתרונות) המקיים

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

עתה, נשתמש בכך שעל פי הנתון, מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית מסדר n, ולכן נסיק כי y הוא בהכרח פתרון האפס, אך מכאן שמערכת המשוואות

$$\begin{cases} c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}.$$

מתקיימת לכל $x \in I$, ומכאן שמתקיים $W[y_1, \ldots, y_n](x) = 0$ בכל הקטע. □

המסקנה מהטענה היא שכאשר מדובר בפונקציות שהקשר ביניהן הוא היותן פתרונות למד"ר ליניארית שמקיימת את משפט הקיום והיחידות, ניתן להמיר תוצאה מקומית (כמו ערך הוורונסקיאן בנקודה) לתוצאה גלובלית (ערך הוורונסקיאן בקטע).

משפט 3.2.1. בסיס למד"ר ליניארית הומוגנית מסדר n

אם $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ רציפות בקטע I, ניתן למצוא קבוצת פתרונות $y_1, \ldots, y_n$ למד"ר

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = 0$$

שמהווה קבוצה בלתי תלויה ליניארית ופורשת למרחב הפתרונות של המד"ר. כלומר, מרחב הפתרונות למד"ר הוא ממד n.

הוכחה. נבחר נקודה $x_0 \in I$, ונשתמש בכך שעל פי טענה 3.2.1 לכל תנאי התחלה

$$y(x_0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = c_n$$

קיים פתרון יחיד ב-I.

- נבחר את y_1 להיות הפתרון שמקיים את תנאי ההתחלה

$$y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

- נבחר את y_2 להיות הפתרון שמקיים את תנאי ההתחלה

$$y_1(x_0)=0,\ y_1'(x_0)=1,\ y''(x_0)=0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=0$$

- באופן כללי, נגדיר את y_k להיות הפתרון שעבורו $y^{(k-1)}(x_0)=1$ ו-$y^{(j)}=0$ לכל $j\neq k-1$.

נשים לב שבנקודה x_0, הפתרונות שקיבלנו מותירים וורנסקיאן מאוד נוח לחישוב

$$W\left[y_1,\dots,y_n\right](x_0)=\det\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0&1\end{pmatrix}=1.$$

מכאן נובע שהפתרונות בלתי תלויים ליניארית (ועל פי טענה 3.2.4, ידוע שהוורונסקיאן יהיה שונה מאפס בכל נקודה בקטע). כדי להוכיח שאכן מדובר בקבוצה פורשת, נניח שנתון פתרון y אחר של המד"ר. בנקודה x_0, פתרון זה מקיים

$$y(x_0)=c_1,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=c_n$$

עבור קבועים $c_1,\dots,c_n$ כלשהם. מצד שני, גם הפונקציה

$$c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$$

היא פתרון למד"ר שמקיים בדיוק את אותם תנאי התחלה (בגלל הדרך המיוחדת שבה הגדרנו את בסיס הפתרונות שלנו). מכאן נובע (קיום ויחידות) שבהכרח

$$y(x)=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$$

לכל x בקטע, כך שהקבוצה שלנו היא גם קבוצה פורשת ומהווה בסיס למרחב הפתרונות. היות והבסיס כולל n פונקציות בלתי תלויות ליניארית, נסיק שממד מרחב הפתרונות הוא n. $\square$

דוגמה 3.2.2 אוסילטור הרמוני

מצאו את כל הפתרונות של המד"ר

$$y''=-y.$$

פתרון. זוהי משוואה מוכרת שהפונקציות $\sin(x), \cos(x)$ מהוות פתרון שלה. היות ומדובר במד"ר ליניארית הומוגנית מסדר 2, אנחנו יודעים שמרחב הפתרונות שלה הוא מרחב וקטורי דו-ממדי. היות ושתי הפונקציות שמצאנו הן פונקציות בלתי תלויות ליניארית, נסיק כי הן מהוות בסיס למרחב הפתרונות. כלומר, כל פתרון הוא מהצורה

$$y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x).$$

□

הערה. שימו לב שלא תמיד קל לדעת מהו בסיס הפתרונות, אך אנחנו יודעים שהוא קיים. בהמשך נפגוש משוואות מסוימות שנדע למצוא להן בסיס (ולכן את מרחב הפתרונות כולו).

דוגמה 3.2.3. מציאת מד"ר עם בסיס פתרונות נתון

מצאו משוואה ליניארית הומוגנית ומנורמלת מסדר 2 כך שהפונקציות

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2$$

הן פתרונות שלה בקטע $[1, 2]$. האם התשובה תשתנה אם נחליף את הקטע ב-$[0, 1]$?

פתרון. תחילה, נניח כי הפונקציות אכן מהוות פתרון למד"ר ליניארית הומוגנית מסדר 2. ניתן לזהות כי

$$W\left[x, x^2\right](x) = \det\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} = x^2$$

השונה מאפס בקטע, ומכאן שהפתרונות יהיו בלתי תלויים ליניארית. על פי משפט 3.2.1, מדובר בבסיס למרחב הפתרונות, כך שלכל פתרון אחר של המד"ר מתקיים

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

עבור $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. במילים אחרות, לכל פתרון אחר, מתקיים שהקבוצה $\{y, y_1, y_2\}$ היא קבוצה **תלויה ליניארית**. על פי טענה 3.2.3, מתקיים

$$W[y, y_1, y_2](x) = \det\begin{pmatrix} y & x & x^2 \\ y' & 1 & 2x \\ y'' & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

לכל $x \in [1,2]$. נחשב את הדטרמיננטה בצורה מפורשת ונקבל

$$\begin{aligned} W[y,y_1,y_2](x) &= \det\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} y'' - \det\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y' + \det\begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y \\ &= x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \end{aligned}$$

כלומר

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x}y = 0.$$

שימו לב שלמעשה קיבלנו מד"ר ליניארית הומוגנית ומנורמלת מסדר 2 שכל פתרון שלה הוא מהצורה $y = c_1y_1 + c_2y_2$, וזו בדיוק המשוואה המבוקשת. כאשר מחליפים את הקטע בקטע $[0,1]$ ניתן לקבל משוואה מתאימה, אך לא נוכל לנרמל אותה ולכן במקרה זה נסיק שהתשובה היא שלא קיימת מד"ר כנ"ל. $\square$

3.2.3 נוסחת אבל

נניח כי y_1, y_2 הם פתרונות ב-I של המשוואה

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

כאשר a_1, a_2 פונקציות רציפות בקטע I (כלומר, מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות). במקרה הפשוט הנ"ל הוורונסקיאן של הפתרונות (בין אם הם מהווים בסיס או לא) יהיה

$$W[y_1,y_2](x) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'.$$

היות וכל הפונקציות גזירות פעמיים ברציפות נוכל לגזור את הוורונסקיאן ולקבל כי

$$W[y_1,y_2]'(x) = \cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - \cancel{y_2'y_1'} - y_2y_1''$$

עתה, נוכל להציב את השוויון

$$y_1'' = -a_1(x)y_1' - a_2(x)y_1, \quad y_2'' = -a_1(x)y_2' - a_2(x)y_2,$$

ולקבל

$$\begin{aligned} W[y_1,y_2]'(x) &= y_1\left(-a_1(x)y_2' - a_2(x)y_2\right) - y_2(-a_1(x)y_1' - a_2(x)y_1) \\ &= -a_1(x)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) \\ &= -a_1(x)W[y_1,y_2](x). \end{aligned}$$

באופן מאוד מפתיע, קיבלנו שהוורונסקיאן של זוג הפתרונות מקיים משוואה דיפרנציאלית שפתרונה מאוד פשוט

$$W\left[y_1, y_2\right](x) = Ce^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x},$$

ואם נתון לנו הערך של הוורנסקיאן בנקודה x_0, אפשר אפילו לכתוב

$$W\left[y_1, y_2\right](x) = W\left[y_1, y_2\right](x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)\mathrm{d}t}.$$

החלק המעניין בנוסחה הוא העובדה שהוא לא תלוי כלל בפונקציה $a_2(x)$, אלא רק במקדם $a_1(x)$. שימו לב שהנוסחה שלעיל מראה לנו הוכחה נוספת לכך שאם הוורנסקיאן מתאפס בנקודה אחת, הוא יתאפס בכל הנקודות בקטע. מתברר שהנוסחה נכונה גם למשוואות מסדר גבוה יותר.

משפט 3.2.2. נוסחת אבל

נניח כי $y_1, \ldots, y_n$ פתרונות בקטע I של המד"ר

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$$

כאשר $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ רציפות ב-I. אזי לכל $x_0 \in I$ מתקיים

$$W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x) = W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)\mathrm{d}t}.$$

בגרסה כללית יותר ניתן לומר כי קיים קבוע $C \in \mathbb{R}$ שעבורו

$$W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x) = Ce^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x}.$$

את ההוכחה המלא של המשפט נוסיף בסוף הפרק כהעשרה בלבד (היא לא מסובכת אך דורשת לא מעט כלים מהאלגברה הליניארית).

הורדת סדר למד"ר. נניח כי מצאנו פתרון $v(x)$ למשוואה

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

אם נסמן ב-$y(x)$ פתרון אחר כלשהו של המשוואה.

$$W[v, y](x) = v(x)y'(x) - v'(x)y(x) = Ce^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x},$$

ולאחר סידור המשוואה נקבל את המד"ר

$$y' - \frac{v'(x)}{v(x)}y = C\frac{e^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x}}{v(x)}.$$

שימו לב שבנקודות שבהן $v(x)$ מתאפס ידוע בהכרח כי $v'(x)$ אינו מתאפס, ונקבל כי

$$y(x) = -\frac{Ce^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x}}{v'(x)}$$

בנקודות אלה. אחרת, נוכל לפתור עבור y מתוך המד"ר שקיבלנו, שהיא מד"ר ליניארית מסדר ראשון, שאת פתרונה אנחנו יודעים למצוא בקלות על ידי הכפלה בגורם האינטגרציה

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{v'(x)}{v(x)}\mathrm{d}x} = \frac{1}{v(x)},$$

כלומר

$$\left(\frac{1}{v(x)}y\right)' = \frac{Ce^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x}}{v^2(x)}.$$

מכאן נקבל

$$y = Dv(x) + Cv(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x}}{v^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

שימו לב שהפתרון הכללי הוא אכן קומבינציה ליניארית של הפתרון $v(x)$ עם פתרון אחר. ניתן אף להראות שהגבול בנקודות שבהן $v(x)$ שואף לאפס קיים ושווה לביטוי שמצאנו קודם (ולמעשה אפשר לוודא שהפתרון יהיה גזיר ברציפות). לשיטה זו שבה משתמשים בפתרון נתון של מד"ר כדי לקבל מד"ר פשוטה יותר מסדר נמוך קוראים בשם **הורדת סדר למד"ר**.

דוגמה 3.2.4 הורדת סדר מד"ר עם נוסחת אבל

ודאו כי הפונקציה $v(x) = x$ היא פתרון של המד"ר

$$y'' + \frac{x\sin(x)}{x\cos(x) - \sin(x)}y' - \frac{\sin(x)}{x\cos(x) - \sin(x)}y = 0$$

והיעזרו בעובדה זו כדי למצוא את הפתרון הכללי של המד"ר בקטע $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. אין צורך לוודא שבקטע זה מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות.

פתרון. על פי השיטה להורדת סדר, ידוע כי פתרון נוסף $y(x)$ למשוואה יקיים

$$W[x, y(x)] = \det\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{pmatrix} = xy' - y = Ce^{-\int \frac{x\sin(x)}{x\cos(x)-\sin(x)}\mathrm{d}x}.$$

ניתן לזהות שמתקיים

$$(x\cos(x)-\sin(x))'=-x\sin(x)+\cos(x)-\cos(x)=-x\sin(x),$$

ולכן

$$e^{\int\frac{-x\sin(x)}{x\cos(x)-\sin(x)}\mathrm{d}x}=e^{\ln|x\cos(x)-\sin(x)|}=|x\cos(x)-\sin(x)|\,.$$

נשים לב שהיות והקבוע C שרירותי, אפשר להוריד את הערך המוחלט (הוא "ייבלע" לתוך הקבוע C ממילא) ולקבל את המשוואה

$$xy'-y=x\cos(x)-\sin(x),$$

לאחר נרמול והכפלה בגורם האינטגרציה מקבלים את המשוואה

$$\left(\frac{1}{x}y\right)'=\frac{\cos(x)}{x}-\frac{\sin(x)}{x^2}=\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)',$$

ולכן

$$y=Cx+D\sin(x),$$

וזה הפתרון הכללי של המשוואה. □

הורדת סדר על ידי וריאציית פרמטר. שיטת הורדת הסדר למשוואה שמבוססת על שימוש בנוסחת אבל מאפשר לנו להיעזר ב-$n-1$ פתרונות $y_1,\dots,y_{n-1}$ למד"ר ליניארית הומוגנית מסדר n, כדי להוריד את סדר המד"ר למד"ר מסדר ראשון על פי הנוסחה

$$W[y_1,\dots,y_{n-1},y](x)=Ce^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x}.$$

כלומר, הבעיה בשיטה זו היא שהיא דורשת מאיתנו למצוא קבוצה של $n-1$ פתרונות למד"ר לפני שנוכל להפעיל אותה. השיטה הבאה היא שיטה אחרת שמאפשרת להשתמש בפתרון אחד ידוע כדי להוריד את סדר המד"ר במעלה אחת.

נניח כי $v(x)$ פתרון למד"ר

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0,$$

ונניח שניתן לכתוב פתרון נוסף של המד"ר בצורה

$$y(x)=v(x)u(x).$$

כלומר

$$y'(x)=v'(x)u(x)+u'(x)v(x),$$

$$y''(x)=v''(x)u(x)+2v'(x)u'(x)+u''(x)v(x).$$

לאחר הצבה במד"ר נקבל

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = u\,(x)\left(v''(x)+a_1(x)v'(x)+a_2(x)v(x)\right)+v(x)u''(x)+(2v'(x)+v(x))u'(x)$$
$$v(x)u''(x)+\left(2v'(x)+v(x)\right)u'(x)=0.$$

נשים לב שבמקרה זה אפשר לחשוב על המד"ר כמשוואה מסדר ראשון עבור הפונקציה u' ולכן אם נפתור עבורה נוכל לבצע אינטגרציה ולמצוא את u ומכאן שניתן גם למצוא את $y(x)$ ולקבל את הפתרון הכללי למשוואה. היתרון הוא שהשיטה הזו עובדת בכל סדר של מד"ר ודורשת רק פתרון אחד ידוע.

כלומר, בשיטה הכללית, אם ידוע פתרון $v(x)$ למד"ר

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0$$

נשתמש בהצבה $y(x)=v(x)u(x)$ ונקבל מד"ר מסדר $n-1$ עבור $u'(x)$.

דוגמה 3.2.5. הורדת סדר למד"ר

מצאו את כל הפתרונות למד"ר

$$y^{(3)}-\frac{5x+6}{x+1}y''+\frac{8x+11}{x+1}y'-\frac{4x+6}{x+1}y=0$$

בקטע $[0,1]$.

פתרון. על מנת להיעזר בשיטת הורדת הסדר עלינו לנחש פתרון למשוואה. כאן נכיר שיטה שימושית מאוד לניחוש פתרון והיא מסתמכת על הזיהוי כי סכום מקדמי המד"ר מתאפס. כלומר

$$1-\frac{5x+6}{x+1}+\frac{8x+11}{x+1}-\frac{4x+6}{x+1}=0.$$

במקרה כזה מובטח כי e^x יהיה פתרון של המד"ר, ונוכל להשתמש בוריאציית הפרמטרים כדי להגדיר

$$\begin{aligned}y&=e^x u,\\ y'&=e^x\left(u'+u\right),\\ y''&=e^x\left(u''+2u'+u\right),\\ y^{(3)}&=e^x\left(u^{(3)}+3u''+3u'+u\right).\end{aligned}$$

לאחר הצבה של הביטוי במד"ר וחלוקה ב-e^x (גורם משותף), נוותר עם המד"ר

$$u^{(3)}-\frac{2x+3}{x+1}u''+\frac{x+2}{x+1}u'=0.$$

גם במקרה הנ"ל ניתן לזהות כי e^x פתרון (על פי שיטת סכימת המקדמים של המד"ר) ולכן נוכל להשתמש **שוב** בוריאציית הפרמטרים כדי להגדיר

$$\begin{aligned}
u' &= e^x w, \\
u'' &= e^x \left(w' + w\right), \\
u^{(3)} &= e^x \left(w'' + 2w' + w\right).
\end{aligned}$$

לאחר הצבה במד"ר נקבל

$$w'' - \frac{1}{x+1} w' = 0,$$

שהיא משוואה פרידה שפתרונה הוא

$$w' = C\left(x+1\right).$$

מכאן כל שנותר הוא לחזור אחורה בשלבים בזהירות ולחשב

$$w\left(x\right) = C \int x + 1 \, \mathrm{d}x = C\left(x+1\right)^2 + D,$$

ואת הנ"ל להציב לערך של u' שחיפשנו. כלומר

$$u'(x) = e^x w(x) = Ce^x \left(x+1\right)^2 + De^x,$$

ולאחר אינטגרציה, נקבל

$$u(x) = Ce^x \left(x^2 + 1\right) + De^x + E$$

לבסוף, נקבל כי

$$y\left(x\right) = e^x u(x) = Ce^{2x}\left(x^2+1\right) + De^{2x} + Ee^x,$$

וזה הפתרון הכללי של המד"ר. □

3.3 משוואות במקדמים קבועים

כפי שראינו בחלק הקודם, מד"ר ליניארית והומוגנית מסדר n היא מד"ר "טובה". מרחב הפתרונות הוא תמיד מרחב וקטורי, המימד שלו הוא תמיד n, ויש לנו קריטריון פשוט יחסית לבדיקת תלות/אי-תלות ליניארית של פתרונות על מנת למצוא בסיס למרחב זה.

אחת מהבעיות שנותרו לנו היא סוגיית מציאת הפתרונות, וכדי לעשות זאת נדון במקרה פרטי של משוואות מהסוג הזה.

הגדרה 3.3.1 משוואה במקדמים קבועים

משוואה מהצורה

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

כאשר $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ מכונה **מד"ר ליניארית הומוגנית מסדר n במקדמים קבועים**.

הערה. ניתן להוכיח כי המשוואה מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בכל מקום, והפתרונות יהיו מוגדרים תמיד בכל $\mathbb{R}$.

מתברר שלמשוואות מסוג זה קיימת דרך שיטתית וברורה למציאת בסיס הפתרונות, ונתחיל משלב "ניחוש" שממנו נשאב מוטיביציה.

נניח כי הפונקציה $y(x) = e^{rx}$ היא פתרון של המד"ר כאשר $r \in \mathbb{R}$ קבוע כלשהו. כדי לבדוק שאכן מדובר בפתרון נצב במד"ר ונקבל כי

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = e^{rx}\left(r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n\right) = 0.$$

הגדרה 3.3.2 פולינום אופייני

עבור מד"ר מהצורה 3.3.1, הפולינום

$$p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n$$

מכונה **הפולינום האופייני** של המד"ר.

החישוב הקודם למעשה מהווה הוכחה לטענה הבאה

טענה 3.3.1 ניחוש פתרון

הפונקציה $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$ היא פתרון למד"ר 3.3.1 אם ורק אם $p(r) = 0$, כאשר p הוא הפולינום האופייני של המד"ר.

3.3.1 בניית בסיס הפתרונות למד"ר

משפט 3.3.1 n שורשים שונים לפ"א

נניח כי $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ שורשים שונים לפולינום האופייני p של המד"ר 3.3.1. אזי, הפונקציות

$$y_i(x) = e^{r_i x}, \quad i = 1, \ldots, n$$

הן בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר.

הוכחה. ראשית, ברור כי כל אחת מהפונקציות $y_i(x)$ היא פתרון של המד"ר על פי טענה 3.3.1. היות ומדובר במד"ר ליניארית והומוגנית מסדר n, משפט 3.2.1 מבטיח כי אם נוכיח שהפונקציות הללו בלתי תלויות ליניארית, נקבל בסיס למרחב הפתרונות. נוכיח כי הוורונסקיאן של הפתרונות שונה מאפס:

$$\begin{aligned} W[y_1,\dots,y_n](x) &= \det\begin{pmatrix} e^{r_1x} & \dots & e^{r_nx} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1}e^{r_1x} & \dots & r_n^{n-1}e^{r_nx} \end{pmatrix} \\ &= e^{r_1x}\dots e^{r_nx}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

היות וכל אחד מהאקספוננטים בביטוי שונים מאפס, מספיק שנוכיח שהדטרמיננטה שונה מאפס. מתברר שהדטרמיננטה לעיל היא של מטריצה מיוחדת המכונה בשם **מטריצת ונדרמונדה**, ויש לדטרמיננטה שלה נוסחה סגורה שניתן להוכיח באינדוקציה.

$$W[y_1,\dots,y_n](x) = e^{(r_1+\dots+r_n)x}\prod_{1\le i<j\le n}(r_i-r_j).$$

היות וכל השורשים (על פי הנתון) שונים זה מזה, נסיק שהוורונסקיאן שונה מאפס בכל מקום, ואכן מתקבל בסיס למרחב הפתרונות. מכאן נוכל גם להסיק כי הפתרון הכללי של המד"ר נתון על ידי

$$y(x) = c_1e^{r_1x}+\dots+c_ne^{r_nx}.$$

□

דוגמה 3.3.1. שורשים שונים לפ"א

מצאו את הפתרון הכללי למשוואה

$$y^{(3)}+2y''-5y'-6=0.$$

פתרון. הפולינום האופייני של המד"ר הוא

$$p(r) = r^3+2r^2-5r-6=0.$$

ניתן לזהות כי הסכום המתחלף של המקדמים מתאפס, כלומר

$$1-2+(-5)-(-6)=0.$$

מכאן נובע כי $r=-1$ הוא שורש של הפולינום, וכדי למצוא את יתר הפתרונות נשתמש בחלוקת פולינומים.

$$\frac{r^3+2r^2-5r-6}{r+1}=r^2+r-6=(r+3)(r-2).$$

מכאן שגם $r=-3, r=2$ הם שורשים של הפולינום. היות וכל השורשים שונים, נשתמש במשפט 3.3.1 ונסיק כי הפתרון הכללי של המד"ר הוא

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3e^{-3x}.$$

□

בשני החלקים הבאים של פרק זה נדון בשני המקרים שטרם טיפלנו בהם - שורשים בעלי ריבוי ושורשים מרוכבים.

3.3.2 שורשים בעלי ריבוי

כדי להבין איך לטפל בשורשים מריבוי גדול מ-1 לפולינום האופייני, נזכיר תכונה חשובה של פולינומים. נניח כי $r_0\in\mathbb{R}$ הוא שורש מריבוי k של הפולינום

$$p(r)=r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$

אזי, ניתן לכתוב את הפולינום גם בצורה

$$p(r)=(r-r_0)^k\,q(r),$$

כאשר $q(r)$ הוא פולינום ממעלה $n-k$ שלא מתאפס בנקודה r_0. עוד נזכיר שקיימת נוסחה (שמוכיחים בקלות באינדוקציה) לנגזרת מסדר גבוה של מכפלה:

$$(f(x)g(x))^{(m)}=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}f^{(j)}(x)g^{(m-j)}(x).$$

במקרה שלנו, לכל $k<m$, מתקיים

$$\begin{aligned}p^{(m)}(r)&=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left((r-r_0)^k\right)^{(j)}q^{(m-j)}(r)\\&=\sum_{j-=0}^{m}\binom{m}{j}k(k-1)\ldots(k-j+1)(r-r_0)^{k-j}q^{(m-j)}(r).\end{aligned}$$

ולכן $p^{(m)}(r_0)=0$ לכל $m<k$.

משפט 3.3.2. פתרונות לשורש מריבוי k

יהא $r_0 \in \mathbb{R}$ שורש מריבוי k של הפולינום האופייני מהגדרה 3.3.2 של המד"ר מהגדרה 3.3.1. אזי, הפונקציות

$$e^{r_0 x}, xe^{r_0 x}, \ldots, x^{k-1} e^{r_0 x}$$

הם פתרונות בלתי תלויים של המד"ר.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $f(r,x) = e^{rx}$, ונתבונן בביטוי

$$L\left[e^{rx}\right] = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{rx}\right) + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(e^{rx}\right) + \cdots + a_n\left(e^{rx}\right).$$

אמנם השתמשנו בסימון של הנגזרת החלקית, אך היא למעשה מסמלת בדיוק את הנגזרת ה"רגילה" לפי x של הפונקציה $f(r,x)$. היות ולפונקציה יש נגזרות חלקיות רציפות מכל סדר, אין חשיבות לסדר הגזירה, ולכן אם נגזור את כל הביטוי שלעיל לפי r, נקבל כי

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} L\left[e^{rx}\right] = \frac{\partial^m}{\partial L^m}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(e^{rx}\right) + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(e^{rx}\right) + \cdots + a_n\left(e^{rx}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial^m}{\partial r^m}\left(e^{rx}\right)\right) + a_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{\partial^m}{\partial r^m}\left(e^{rx}\right)\right) + \cdots + a_n \frac{\partial^m}{\partial r^m}\left(e^{rx}\right)$$
$$= L\left[\frac{\partial^m}{\partial r^m}\left(e^{rx}\right)\right] = L\left[x^m e^{rx}\right].$$

מצד שני, ידוע לנו כי

$$L\left[e^{rx}\right] = e^{rx} p(r)$$

ולכן לכל $m < k$ מתקיים

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} L\left[e^{rx}\right] = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^j}{\partial r^j}\left(e^{rx}\right) \frac{\partial^{m-j}}{\partial r^{m-j}} p(r).$$

עתה, נתון לנו כי $r_0 \in \mathbb{R}$ הוא שורש מריבוי k של הפולינום האופייני ולכן

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} L\left[e^{r_0 x}\right] = 0 = L\left[x^m e^{r_0 x}\right],$$

מה שאומר כי $x^m e^{r_0 x}$ פתרון לכל $m < k$ כפי שרצינו להראות. על מנת להראות שהפתרונות בלתי תלויים

ליניארית, נשים לב כי אם קיימים קבועים שעבורם מתקיים

$$c_1e^{r_0x}+\cdots+c_kx^{k-1}e^{r_0x}=0\Longrightarrow c_1+c_2x+\cdots+c_kx^{k-1}=0,$$

אז מכך שהקבוצה $\left\{1,x,\dots,x^{k-1}\right\}$ בלתי תלויה, נסיק כי כל הקבועים חייבים להתאפס. □

בטרם נקבל את המשפט המסכם של המקרה הממשי, ננסח טענת עזר כללית שתעזור להוכיח אי-תלות ליניארית.

טענה 3.3.2. אי-תלות למעריכים שונים

יהיו $r_1,\dots,r_k\in\mathbb{R}$ מספרים שונים ויהא I קטע כלשהו. אם קיימים פולינומים $p_1,\dots,p_k$ שעבורם

$$p_1(x)e^{r_1x}+\cdots+p_k(x)e^{r_kx}=0$$

לכל $x\in I$, אזי p_i הוא פולינום האפס לכל i.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה על k. במקרה שבו $k=1$ נקבל כי

$$p(x)e^{rx}=0$$

לכל $x\in I$, ולכן $p(x)=0$ לכל x, ובפרט כל מקדמי הפולינום מתאפסים. עתה נניח שהוכחנו את הטענה עבור $k-1$ ונניח שנתונים פולינומים עבורם

$$p_1(x)e^{r_1x}+\cdots+p_k(x)e^{r_kx}=0$$

לכל $x\in I$. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-e^{-r_1x} ונקבל את המשוואה

$$p_1(x)+p_2(x)e^{(r_2-r_1)x}+\cdots+p_k(x)e^{(r_k-r_1)x}=0.$$

נרצה לגזור את המשוואה m_1 פעמים, שהרי אז הפולינום השמאלי ביותר יתאפס. לשם כך ניעזר בעובדה נוספת לפיה לכל פולינום q ולכל $r\neq$, מקבלים

$$(q(x)e^{rx})'=(rq(x)+q'(x))e^{rx}$$

כך שהפולינום בסוגריים הוא פולינום מאותה המעלה כמו הפולינום המקורי כך שהמקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא אותו המקדם מוכפל ב-r. כלומר, לאחר גזירה m_1 פעמים מקבלים משוואה מהצורה

$$\tilde{p}_2(x)e^{(r_2-r_1)x}+\cdots+\tilde{p}_k(x)e^{(r_k-r_1)x}=0.$$

שהיא למעשה הנחת האינדוקציה עבור $k-1$ מעריכים שונים, ולכן $\tilde{p}_i$ הוא פולינום האפס לכל i. בפרט, המקדם של החזקה המוביל של p_i יתאפס, אך ניתן להמשיך בתהליך שוב ושוב ולהסיק כי $p_i = 0$ לכל i. לסיכום, קיבלנו כי כל הפולינומים מתאפסים למעט p_1, אך עתה המשוואה המקורית מקבלת את הצורה

$$p_1(x)e^{r_1x} = 0$$

שממנה נסיק כי $p_1(x) = 0$ מהמקרה $k = 1$. □

משפט 3.3.3 בסיס לפתרונות, המקרה הממשי המלא

נניח כי $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ הם כל השורשים של הפולינום האופייני מהגדרה 3.3.2 של המד"ר מהגדרה 3.3.1. נניח כי r_i הוא שורש מריבוי m_i (כך ש-n = $m_1 + \cdots + m_k$). אזי הקבוצה

$$\left\{e^{r_1x}, xe^{r_1x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{r_1x}, \ldots, e^{r_kx}, xe^{r_kx}, \ldots, x^{m_k-1}e^{r_kx}\right\}$$

הוא בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר.

פתרון. על פי טענה 3.3.2, הקבוצה אכן מהווה אוסף של n פתרונות למד"ר, ולפי טענה 3.3.2 הקבוצה בלתי תלויה ליניארית, ולכן מהווה בסיס. □

דוגמה 3.3.2 דוגמה לשורשים עם ריבוי

מצאו את כל הפתרונות של המד"ר

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = 0.$$

פתרון. הפולינום האופייני של המד"ר יהיה

$$p(r) = r^3 + r^2 - r - 1 = 0.$$

היות וסכום מקדמי הפולינום מתאפס, נסיק כי 1 הוא שורש של הפולינום, ועל ידי שימוש בחלוקת פולינומים נקבל כי

$$\frac{p(r)}{r-1} = (r+1)^2,$$

כך שגם -1 הוא שורש של הפולינום אך מריבוי 2. על פי משפט **??** נקבל כי הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x}.$$

□

3.3.3 שורשים מרוכבים

מתברר שכדי לדון במקרה של שורשים מרוכבים, יהיה עלינו להכיר בקצרה פונקציות מרוכבות. בהנתן קטע $I \subset \mathbb{R}$, כל פונקציה $f : I \to \mathbb{C}$ אפשר לכתוב בצורה

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

כאשר $u, v : I \to \mathbb{R}$ הן פונקציות ממשיות.

הגדרה 3.3.3. נגזרת של פונקציה אל המרוכבים

אומרים כי פונקציה $f : I \to \mathbb{C}$ מהצורה $f(x) = u(x) + iv(x)$ גזירה בנקודה $x \in I$ אם u, v גזירות בה ומתקיים

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

דוגמה 3.3.3. האקספוננט המרוכב

לכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר את הפונקציה

$$e^{ix} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}.$$

כדי להבהיר למה הכוונה בהגדרה של הפונקציה בצורה זו, נגדיר שהכוונה היא לסכום של החלק ממשי של הטור והחלק המדומה של הטור בנפרד. נחשב את שני החלקים של הטור בכך שנזהה כי $(ix)^n = i^n x^n$. כלומר, האיבר בסכום יהיה ממשי כאשר n זוגי ומדומה כאשר n אי זוגי. יתרה מכך, נשים לב שבחזקות הזוגיות מתקיים

$$i^0 = 1,\ i^2 = -1,\ i^4 = 1,\ i^6 = -1, \ldots$$

ואילו בחזקות האי-זוגיות מתקיים

$$i^1 = i,\ i^3 = -i,\ i^5 = i,\ i^7 = -i, \ldots$$

כלומר, הסימנים בכל אחד מהחלקים של הטור מתחלפים, כלומר

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

אך שני אלה טורי חזקות מוכרים, מה שמוביל אותנו ל**זהות אוילר** הידועה

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

באופן דומה, אם $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ הוא מספר מרוכב כללי, מגדירים

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right).$$

תוצאה מאוד נוחה שניתן לבדוק בעזרת נוסחה זו, היא שמתקיים

$$\left(e^{(\alpha+i\beta)x}\right)' = (\alpha + i\beta)\, e^{(\alpha+i\beta)x},$$

בדומה לאקספוננט הממשי הרגיל.

על מנת לטפל במקרה של שורשים מרוכבים בפולינום האופייני, אנחנו נרשה לעת עתה לפתור משוואות דיפרנציאליות בעזרת פונקציות מרוכבות. מכאן נקבל באופן מידי את הטענה הבאה.

משפט 3.3.4. שורש מרוכב מריבוי k

נניח כי $r = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ הוא שורש מרוכב שאינו ממשי טהור לפולינום האופייני מהגדרה 3.3.2 של המד"ר מהגדרה 3.3.1. אזי גם $\bar{r} = \alpha - i\beta$ הוא שורש של הפולינום האופייני, והפונקציות

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

מהוות פתרון למד"ר. יתרה מכך, אם r הוא שורש מריבוי k, גם $\bar{r}$ הוא שורש מריבוי k, ונקבל כי הקבוצה

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

הינה קבוצה בלתי תלויה של פתרונות למד"ר.

הוכחה. ראשית, נדון בסוגיות השורש הצמוד וריבוי השורשים. נשים לב כי אם r הוא שורש של הפולינום האופייני, מתקיים

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

מכאן שמתקיים גם

$$\overline{r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n} = \bar{r}^n + a_1 \bar{r}^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

כלומר, $\bar{r}$ הוא שורש של הפולינום האופייני. אותו דבר עובד לשורשים עם ריבוי ונשאיר את הוידוא כתרגיל לבדיקה. על פי הנוסחה מדוגמה 3.3.3, ברור כי אם $r, \bar{r}$ הם שורשים מריבוי k של הפולינום, אזי לכל $m = 0, \ldots, k-1$, הפונקציות

$$x^m e^{rx} = x^m e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right), \quad x^m e^{\bar{r}x} = x^m e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)$$

הן פתרונות של המד"ר והאוסף (לכל הערכים החוקיים של m) מהווה קבוצה בלתי תלויה ליניארית של פתרונות. כדי לקבל את הגרסה הסופית של הפונקציות שלנו, נזכור תוצאה מאלגברה ליניארית לפיה אם

$$\{v_1, \ldots, v_n\}$$

הוא בסיס למרחב שלנו, אזי אם נבחר זוג אינדקסים i, j ונגדיר

$$\left\{v_1, \ldots, v_{i-1}, \frac{v_i + v_j}{2}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, \frac{v_i - v_j}{2i}, v_{j+1}, \ldots, v_n\right\}$$

הקבוצה שתתקבל תהיה גם היא בסיס. לכן, לכל m נחליף את הפונקציות שקיבלנו כפתרון בפונקציות

$$\frac{x^m e^{rx} + x^m e^{\bar{r}x}}{2} = x^m e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad \frac{x^m e^{rx} - x^m e^{\bar{r}x}}{2i} = x^m e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

כפי שרצינו להראות. □

לאחר שטיפלנו בכל אלה, נוכל לנסח משפט מסכם לבסיס הפתרונות של משוואה ליניארית הומוגנית מסדר n במקדמים קבועים.

משפט 3.3.5 בסיס הפתרונות למשוואה ליניארית הומוגנית מסדר n במקדמים קבועים

עבור המשוואה

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

עם הפולינום האופייני $p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n$, נסמן ב-$\mathcal{B}$ את הפונקציות שמתקבלות באופן הבא:

- לכל שורש ממשי r של הפולינום האופייני מריבוי m, נוסיף לבסיס את הפונקציות

$$e^{rx}, \ldots, x^{m-1}e^{rx}.$$

- לכל שורש מרוכב (שאינו ממשי) $r = \alpha + i\beta$ מריבוי m, נוסיף לבסיס את הפונקציות

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

אזי, הקבוצה $\mathcal{B}$ שמתקבלת בצורה כזו היא בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה.

דוגמה 3.3.4. שימושים למשפט המסכם

מצאו את הפתרונות הכלליים של המשוואות הבאות.

1. $y'' + 2\xi\omega_0 y' + \omega_0^2 y = 0$ כאשר $\omega > 0, \xi \in (0,1)$. משוואה זו מייצגת מתנד הרמוני עם כח מרסן.
2. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.

פתרון. 1. הפולינום האופייני של המשוואה הוא

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0,$$

ששורשיו הם

$$r = \frac{-2\xi\omega_0 \pm \sqrt{4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0 = -\xi\omega_0 \pm i\sqrt{1-\xi^2}\omega_0.$$

לכן, הפתרון הכללי של המד"ר יהיה

$$y(x) = c_1 e^{-\xi\omega_0 x}\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 x\right) + c_2 e^{-\xi\omega_0 x}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 x\right)$$

מומלץ לנסות להבין את הפתרון ברמה הפיזיקלית ולתהות לגבי התנהגות הפתרונות כאשר החיכוך גדול ($\xi > 1$) וכאשר החיכוך הוא בדיוק $\xi = 1$.

2. הפולינום האופייני של המשוואה הוא

$$p(r) = r^4 - 2r + 1 = \left(r^2 - 1\right)^2,$$

כלומר, $r = \pm i$ הם שורשי הפולינום מריבוי 2 כל אחד. לכן, הפתרון הכללי יהיה

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2 x\cos(x) + c_3\sin(x) + c_4 x\sin(x).$$

□

3.4 ניתוח איכותי של פתרונות ויציבות

כפי שראינו בפרק הקודם, כאשר מדובר במשוואה ליניארית הומוגנית במקדמים קבועים, ניתן ללמוד המון על הפתרונות על פי ניתוח שורשי הפולינום האופייני. כך למשל, אפשר לחקור

- חסימות.

- התנהגות באינסוף ובמינוס אינסוף.
- מחזוריות.

כל אחת מהתכונות הללו קשורה באופן אדוק לשאלת היציבות (למשל, פתרונות מחזוריים ישארו קרובים אחד לשני בזכות המחזוריות, מה שמעיד על יציבות). אנחנו נתחיל בניסוח של הגדרה ליציבות במשוואות מסדר גבוה ולאחר מכן נראה שבמשוואות ליניארית שאלת היציבות היא שאלה שיחסית פשוט לענות עליה.

הגדרה 3.4.1 יציבות, משוואה מסדר n

יהא y_0 פתרון של המד"ר

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

בקרן מהצורה $[x_0, \infty)$. אומרים כי y_0 יציב כאשר $x > x_0$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל פתרון אחר y_1 של המד"ר, אם

$$|y_0(x_0) - y_1(x_0)| < \delta,\ |y_0'(x_0) - y_1'(x_0)| < \delta,\ \dots\ \left|y_0^{(n-1)}(x_0) - y_1^{(n-1)}(x_0)\right| < \delta,$$

אזי

$$|y_0(x) - y_1(x)| < \varepsilon,\ |y_0'(x) - y_1'(x)| < \varepsilon,\ \dots\ \left|y_0^{(n-1)}(x) - y_1^{(n-1)}(x)\right| < \varepsilon$$

לכל $x > x_0$. אם בנוסף לכך מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} \left|y_0^{(i)}(x) - y_1^{(i)}(x)\right| = 0$$

לכל $i = 0, \dots, n-1$, אומרים שהפתרון יציב אסימפטוטית.

שימו לב שבבירור מדובר בהכללה טבעית לחלוטין של יציבות למד"ר מסדר ראשון, כמופיע בהגדרה 2.6.1. בניגוד למשוואה דיפרנציאלית כללית, במשוואות ליניאריות הומוגניות (לאו דווקא במקדמים קבועים) הבדיקה של היציבות היא יחסית פשוטה.

טענה 3.4.1 יציבות פתרון האפס

עבור מד"ר

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

הפתרון $y = 0$ הוא יציב/יציב אסימפטוטית אם ורק אם כל הפתרונות של המד"ר יציבים/יציבים אסימפטוטית.

הוכחה. ראשית, ברור כי יש להוכיח את אחד מהכיוונים של הפתרונות, היות ואם נתון כי כל הפתרונות של המד"ר יציבים/יציבים אסימפטוטית, כך גם פתרון האפס. לכן, נניח כי הפתרון $y = 0$ יציב כאשר $x > x_0$,

ויהא y_1 פתרון אחר של המד"ר המוגדר בקרן מהצורה $[x_0,\infty)$.
על פי הנתון (ועל פי הגדרה 3.4.1), בהנתן $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $\tilde{y}$ פתרון של המד"ר המוגדר בקרן $[x_0,\infty)$, אם

$$\left|\tilde{y}^{(i)}(x_0)-0\right|<\delta,\quad \forall i=0,\dots,n-1 \tag{3.1}$$

אזי

$$\left|\tilde{y}^{(i)}(x)-0\right|<\varepsilon,\quad \forall i=0,\dots,n-1.$$

עתה, נניח כי y_2 פתרון המוגדר ב-$[x_0,\infty)$ ומקיים

$$\left|y_2^{(i)}(x_0)-y_1^{(i)}(x_0)\right|<\delta,\quad \forall i=0,\dots,n-1.$$

אזי, הפונקציה $\tilde{y}:y_2-y_1$ היא פתרון של המשוואה בקרן $[x_0,\infty)$ המקיימת את (3.1). ולכן

$$\left|\tilde{y}^{(i)}(x)-0\right|=\left|y_2^{(i)}(x)-y_1^{(i)}(x)\right|<\varepsilon,\quad \forall i=0,\dots,n-1,$$

ומכאן שהפתרון y_1 גם הוא יציב על פי הגדרה 3.4.1. בנוסף, אם נתון כי פתרון האפס יציב אסימפטוטית, ניתן להמשיך באותה צורת הוכחה ולקבל כי גם y_1 יציב אסימפטוטית, כדרוש. □

כמובן שההוכחה תקפה גם ליציבות/יציבות אסימפטוטית בקרן השלילית. בהנתן וקיים לנו בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר, הבדיקה פשוטה אפילו יותר.

משפט 3.4.1. יציבות לפי בסיס פתרונות

יהא $\{y_1,\dots,y_n\}$ בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=0$$

כך שלכל i, y_i מוגדר בקרן מהצורה $[x_0,\infty)$. אזי

1. הפתרונות של המד"ר יציבים כאשר $x>x_0$ אם ורק אם y_i ונגזרותיה חסומות ב-$[x_0,\infty)$ לכל i.
2. הפתרונות של המד"ר יציבים אסימפטוטית כאשר $x>x_0$ אם ורק אם $\lim_{x\to\infty}y_i^{(j)}(x)=0$ לכל i ולכל $j=0,\dots,n-1$.

הוכחה. נניח תחילה כי לכל i מתקיים

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,\dots,y^{(i-1)}(x_0)=1,\ \dots,y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

כלומר, y_i הוא בסיס הפתרונות מהוכחת המשפט על קיום בסיס למרחב הפתרונות, ונניח כי לכל i הפתרון ונגזרותיו חסומים ב-$[x_0, \infty)$.

$$M = \sup_{\substack{[x_0,\infty) \\ i=1,\dots,n \\ j=0,\dots,n-1}} \left| y_i^{(j)}(x) \right|.$$

בהנתן $\varepsilon > 0$ נסמן $\delta = \frac{\varepsilon}{nM} > 0$ ונזהה כי אם

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

הוא פתרון המקיים $\left| y^{(i-1)}(x_0) - 0 \right| < \delta$ לכל $i = 1, \dots, n$, אזי

$$\left| y^{(i-1)}(x_0) \right| = |c_i| < \delta = \frac{\varepsilon}{nM}$$

ובמקרה זה לכל $x > x_0$ מתקיים

$$\left| y^{(i-1)}(x) - 0 \right| \le |c_1| \left| y_1^{(i-1)}(x) \right| + \cdots + |c_n| \left| y_n^{(i-1)}(x) \right| < n \left(\frac{\varepsilon}{nM} M \right) = \varepsilon.$$

כלומר, פתרון האפס יציב ולכן כל פתרונות המד"ר יציבים. בכיוון ההפוך, נניח כי קיים פתרון (בה"כ, y_1) שאינו חסום ב-$[x_0, \infty)$. במקרה זה, לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $\delta > 0$ נוכל לבחור c_1 קטן מספיק שעבורו

$$|c_1 y_1(x_0) - 0| < \delta,$$

אך היות ו-y_1 אינו חסום, מובטח שקיים $x > x_0$ שעבורו

$$|c_1 y_1(x) - 0| \ge \varepsilon.$$

כלומר, פתרון האפס אינו יציב ולכן גם הפתרונות האחרים של המד"ר.

ההוכחה ליציבות אסימפטוטית זהה לחלוטין ונשאיר את פרטיה כתרגול נוסף. נותר רק לטפל במקרה שבה הבסיס שלנו איננו הבסיס המסויים שאיתו פתחנו את ההוכחה. אם נסמן את הבסיס ע"י $\{z_1, \dots, z_n\}$, נקבל כי ניתן לכתוב כל פונקציה בבסיס המיוחד כקומבינציה ליניארית של איברים מבסיס זה ולהיפך.

כלומר, הבסיס המיוחד מורכב מפונקציות חסומות אם ורק אם הבסיס הנ"ל מורכב מפונקציות חסומות (וכנ"ל לגבי פונקציות ששואפות לאפס). מכאן שהפתרון יציב אם ורק אם הבסיס המיוחד מורכב מפונקציות חסומות וזאת אם ורק אם הבסיס הנתון מורכב מפונקציות חסומות (ובאופן דומה, לגבי יציבות אסימפטוטית).

□

המקרה של משוואות ליניארית במקדמים קבועים. לאור החקירה שלנו של משוואות ליניאריות במקדמים קבועים, אנחנו יודעים שניתן לאפיין את בסיס הפתרונות הנוח למשוואה על ידי חקירת השורשים של הפולינום האופייני שלה. על פי שורשים אלה אנחנו יודעים כיצד נראים הפתרונות בבסיס וניתן להסיק לגבי חסימות/דעיכה

שלהם לאפס, ומכך להסיק גם לגבי יציבות הפתרונות.

1. אם $r \in \mathbb{C}$ שורש מריבוי 2 לפחות, ידוע לנו כי בבסיס הפתרונות תופיע פונקציה מהצורה e^{rx} וגם פונקציה מהצורה xe^{rx}. כלומר, בסיס הפתרונות שלנו לא יהיה חסום והפתרון לא יהיה יציב.
2. אם $r = \alpha + i\beta$ כאשר $\alpha > 0$, מקבלים פתרון שאינו חסום כאשר $x > 0$, ומכאן שפתרונות המד"ר לא יהיו יציבים.

מכאן מקבלים כי הפתרונות של מד"ר יציבים כאשר $x > x_0$ אם ורק אם שורשי הפולינום האופייני כולם מריבוי 1, ולכל השורשים מתקיים $\mathfrak{Re}(\alpha) \leq 0$. הפתרונות יהיו יציבים אסימפטוטית אם ורק אם השורשים מריבוי 1 ומתקיים $\mathfrak{Re}(\alpha) < 0$.

דוגמה 3.4.1. מציאת המד"ר וחקירת יציבות

נניח כי $1, \sin(x)$ הם פתרונות של המד"ר

$$y^{(4)} + a_1 y^{(3)} + a_2 y'' + a_3 y' + a_4 y = 0.$$

מצאו תנאי מספיק והכרחי למקדמי המשוואה המבטיח כי פתרונות המד"ר יהיו יציבים כאשר $x > 0$.

פתרון. ראשית, היות ו-$\sin(x)$ הוא פתרון של המד"ר, אנחנו יודעים לפי משפט 3.3.5 כי i הוא שורש של המד"ר ולכן גם $\cos(x)$ הוא פתרון של המד"ר, השקול לכך ש-$\pm i$ הם שורשים של הפולינום האופייני. בנוסף, $1 = e^{0x}$ הוא פתרון של המד"ר מה שמעיד על כך ש-$r = 0$ הוא שורש של הפולינום האופייני ולכן הפולינום האופייני חייב להיות מהצורה

$$x\left(x^2+1\right)(x-r) = \left(x^3+x\right)(x-r) = x^4 - rx^3 + x^2 - rx = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4.$$

כאשר $r \in \mathbb{R}$ (שהרי אם $r \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, גם $\bar{r}$ היה שורש, מה שלא אפשרי בגלל סדר המשוואה). מהשוואה בין המקדמים נקבל כי

$$a_1 = -r,\ a_2 = 1,\ a_3 = -r,\ a_4 = 0.$$

ברור לנו כי פתרונות המד"ר יהיו יציבים אם ורק אם הפונקציות בבסיס הפתרונות שמתקבל ממשפט 3.3.5 יהיו חסומות, וזה יתכן אם ורק אם $r < 0$, מה ששקול לכך שמתקיים

$$a_1 > 0,\ a_2 = 1,\ a_3 > 0,\ a_4 = 0.$$

$\square$

3.5 משוואות אוילר

הגדרה 3.5.1. משוואת אוילר

משוואה מהצורה

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

כאשר $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ מכונה בשם **משוואת אוילר**.

משוואת אוילר היא משוואה ליניארית מסדר n, אך בגרסתה המנורמלת המקדמים שלה רציפים כאשר $x \neq 0$. לכן - פתרונות המשוואה יהיו מוגדרים רק כאשר $x > 0$ או $x < 0$. היתרון במשוואות אוילר הוא שגם אותן אנחנו יודעים לפתור בצורה שיטתית בדומה למשוואות במקדמים קבועים.
אנחנו נראה שבסיס הפתרונות שמתקבל למקרה $x > 0$ מתאים למעשה (עד כדי הצבה פשוטה) גם למקרה $x < 0$ ולכן ננסח את הפתרונות שנמצא למקרה $x > 0$ בלבד.

דוגמה 3.5.1. הצבת הקסם

מצאו בסיס לפתרונות המשוואה

$$x^2 y'' + xy - y = 0, x > 0$$

בשתי דרכים שונות.

1. על ידי הצבת $y = x^r$ עבור $r \in \mathbb{R}$.
2. על ידי הגדרת פונקציה חדשה $u(t) = y\left(e^t\right)$.

פתרון. נזכיר שכל שעלינו לעשות הוא למצוא זוג פתרונות בלתי תלויים למשוואה.

1. ננסה לבדוק מתי הפונקציה $y(x) = x^r$ היא פתרון. על ידי הצבה במשוואה נקבל

$$x^2\left(r(r-1)x^{r-2}\right) + x\left(rx^{r-1}\right) - x^r = x^r\left(r^2-1\right) = 0.$$

היות ו-$x = 0$ מקבלים כי $r = \pm 1$ הם מספרים שעבורם $y(x) = x^r$ הם פתרונות. היות והפונקציות $y(x) = x, \frac{1}{x}$ בלתי תלויים כאשר $x > 0$, נקבל כי

$$y(x) = cx + \frac{d}{x}$$

הוא הפתרון הכללי של המשוואה.

2. נסמן $x(t)=e^t$ ונגדיר בהתאם להדרכה $u(t)=y(x(t))$ במקרה זה נקבל

$$u'(t)=y'(x(t))x'(t)=y'(x(t))e^t=y'(x(t))x(t).$$

נגזור שוב ונקבל

$$u''(t)=y''(x(t))x'(t)x(t)+y'(x(t))x'(t)=(x(t))^2y''(x(t))+x(t)y'(x(t))$$

נציב זאת במד"ר ונקבל

$$x^2y''(x)+xy'(x)-y(x)=u''(t)-u(t)=0.$$

זו משוואה ליניארית במקדמים קבועים שהפולינום האופייני שלה הוא $p(r)=r^2-1$, עם שורשים $r=\pm1$. לכן פתרונה הוא

$$u(t)=ce^t+de^{-t}$$

כי לחזור לפתרון המקורי שלנו נשים לב כי אם $x(t)=e^t$ אזי $t(x)=\ln(x)$ ולכן

$$y(x)=u(\ln(x))=cx+\frac{d}{x}$$

בדומה לפתרון שקיבלנו קודם.

□

מתברר ששתי השיטות הללו לפתרון משוואות אוילר עובדות בצורה כללית ביותר.

משפט 3.5.1. המרת משוואת אוילר במשוואה במקדמים קבועים

תהא משוואת אוילר מהצורה שמופיע בהגדרה 3.5.1. אזי הפונקציה $u(t)=y(e^t)$ היא פתרון של משוואה במקדמים קבועים שהפולינום האופייני שלה הוא

$$p(r)=r(r-1)\dots(r-n+1)+a_1r(r-1)\dots(r-n)+\dots+ra_{n-1}+a_n=0.$$

בנוסף, ניתן לקבל את הפולינום האופייני על ידי הצבת $y(x)=x^r$ במשוואה המקורית וחלוקה ב-x^r.

הוכחה. נסמן $u(t)=y(e^t)$ לכל $t\in\mathbb{R}$, ששקול לכך ש-$y(x)=u(\ln(x))$ לכל $x>0$. נוכיח באינדוקציה שמתקיים

$$x^ky^{(k)}(x)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(k-1)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\bigg|_{t=\ln(x)}.$$

ראשית, עבור מקרה הבסיס שבו $k = 1$ נקבל כי

$$y'(x) = \frac{u'(\ln(x))}{x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\bigg|_{t=\ln(x)}.$$

נניח כי אכן מתקיים

$$x^{k-1}y^{(k-1)}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(k-2)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\bigg|_{t=\ln(x)},$$

כלומר

$$y^{(k-1)}(x) = \frac{1}{x^{k-1}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(k-2)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\bigg|_{t=\ln(x)}.$$

נגזור את שני האגפים לפי x כאשר באגף הימני נשתמש בכלל המכפלה וגם בכלל השרשרת, כדי לקבל

$$\begin{aligned}
y^{(k)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(k-2)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\bigg|_{t=\ln(x)} \\
&\quad+\frac{1}{x^{k-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(k-2)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\bigg|_{t=\ln(x)}\right) \\
&= -\frac{k-1}{x^k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(k-2)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\bigg|_{t=\ln(x)} \\
&\quad+\frac{1}{x^{k-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(k-2)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\bigg|_{t=\ln(x)}\right)\frac{\mathrm{d}t(x)}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{1}{x^k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(k-1)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\bigg|_{t=\ln(x)},
\end{aligned}$$

ולאחר העברת אגפים נסיק את הדרוש. מכאן נובע כי לאחר שימוש בהצבה $y(x) = u(t)$ כאשר $t = \ln(x)$, מקבלים

$$\begin{aligned}
x^{(n)}y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_ny &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(n-1)\right)\dots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) \\
&\quad+a_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(n-2)\right)\dots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)+\dots+a_nu(t) = 0.
\end{aligned}$$

לאחר הפעלת הגזירות אחת אחרי השניה רואים שאין ביטוי שתלוי ב-t במפורש כך שהמד"ר שמתקבלת היא אכן מד"ר במקדמים קבועים. נותר לנו רק להוכיח שפולינום האופייני של המד"ר הוא אכן הפולינום במשפט.

לשם כך נציב את הפונקציה $u(t)=e^{rt}$, ונקבל כי לכל n

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(n-1)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{rt}=r\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(n-1)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-1\right)e^{rt}$$
$$=r(r-1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(n-1)\right)\dots\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(n-2)\right)e^{rt}=\dots=r\,(r-1)\dots(r-(n-1))\,e^{rt},$$

ולכן, לאחר שנבצע זאת לכל אחת מהנגזרות במשוואה, נקבל את הפולינום במשפט כפי שרצינו. $\square$

היות ומשוואת אוילר שקולה למשוואה במקדמים קבועים, ניתן להסיק באופן מידי מהו הבסיס למרחב הפתרונות של משוואה זו.

משפט 3.5.2. בסיס הפתרונות למשוואת אוילר הומוגנית מסדר n

עבור המשוואה

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_ny=0$$

עם הפולינום האופייני המופיע במשפט 3.5.1, נסמן ב-$\mathcal{B}$ את הפונקציות שמתקבלות באופן הבא:

- לכל שורש ממשי r של הפולינום האופייני מריבוי m, נוסיף לבסיס את הפונקציות

$$x^r,\ \ln(x)x^r,\ \dots,\ \ln^{m-1}(x)x^r.$$

- לכל שורש מרוכב (שאינו ממשי) $r=\alpha+i\beta$ מריבוי m, נוסיף לבסיס את הפונקציות

$$x^\alpha\cos(\beta\ln(x)),\dots,\ln^{m-1}x^\alpha\cos(\beta\ln(x)),x^\alpha\sin(\beta\ln(x)),$$
$$\dots,\ln^{m-1}x^\alpha\sin(\beta\ln(x)).$$

אזי, הקבוצה $\mathcal{B}$ שמתקבלת בצורה כזו היא בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה בתחום $x>0$. בתחום $x<0$, מתקבל אותו בסיס פתרונות אלא שבמקום x מציבים $-x$ בכל אחת מהפונקציות.

כמו כן השיקולים ליציבות/יציבות אסימפטוטית זהים לחלוטין לאלו של משוואות במקדמים קבועים (אלא שהפעם בודקים את השורשים של הפולינום האופייני המיוחד של משוואת אוילר המתאימה).

דוגמה 3.5.2. פתרון משוואת אוילר

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות בתחום $x=0$.

1. $x^3y^{(3)}+3x^2y''-xy'-4y=0$.
2. $x^4y^{(4)}+4x^3y^{(3)}+2x^2y''=0$.

פתרון. 1. הפולינום האופייני המתקבל על פי משפט 3.5.1 הוא

$$p(r) = r(r-1)(r-2) + 3r(r-1) - r - 4 = r^3 - 2r - 4.$$

היות וידוע שקיים לפולינום שורש ממשי, ננסה לחפש אותו על פי שיטת הניחוש הרציונלית. על פי שיטה זו, אם קיים לפולינום שורש רציונלי מהצורה $r = \frac{p}{q}$ (בצורה מצומצמת), אזי p מחלק את המקדם החופשי ו-q מחלק את המקדם המוביל. לכן $q = \pm 1$ וכן

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4.$$

מהצבה ניתן לזהות כי $r = 2$ אכן שורש של המשוואה ולאחר חלוקת פולינומים

$$\frac{p(r)}{r-2} = r^2 + 2r + 2,$$

ולכן יתר השורשים של הפולינום הם

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i.$$

על פי משפט 3.5.2, הפונקציות $\frac{\sin(x)}{x}, \frac{\cos(x)}{x}, x^2$ הן בסיס למרחב הפתרונות ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 \frac{\cos(\ln(x))}{x} + c_3 \frac{\sin(\ln(x))}{x}.$$

2. נחשב שוב את הפולינום האופייני על פי משפט 3.5.1

$$\begin{aligned} p(r) &= r(r-1)(r-2)(r-3) + 4r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) \\ &= r(r-1)\left(r^2 - 5r + 6 + 4r - 8 + 2\right) \\ &= r(r-1)\left(r^2 - r\right) \\ &= r^2 (r-1)^2. \end{aligned}$$

כלומר, $r = 1, 0$ הם שורשים מריבוי 2, ועל פי משפט 3.5.2, הפונקציות $1, \ln(x), x, x\ln(x)$ הם בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה ולכן הפתרון הכללי יהיה מהצורה

$$y(x) = c_1 + c_2 \ln(x) + c_3 x + c_4 x \ln(x).$$

□

3.6 משוואות ליניאריות אי-הומוגניות

הפעם נטפל במשוואות מהצורה שמופיעה בהגדרה 3.2.1 כאשר $0 \neq g(x)$. נתחילה, נזהה תכונה נוספת שמשותפת למערכת משוואות ליניארית וגם למד"ר ליניארית.

טענה 3.6.1. צורת פתרון כללי למשוואה אי הומוגנית

יהא $y_p(x)$ פתרון כלשהו של המשוואה מהגדרה 3.2.1. אזי, כל פתרונות המשוואה הם מהצורה

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

כאשר y_H הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית.

הוכחה. נסמן ב-L את האופרטור הדיפרנציאלי שמתאר את המשוואה, כלומר

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y.$$

על פי הנתון, מתקיים $L[y] = L[y_p] = g(x)$. מכך שהאופרטור ליניארי, מתקיים

$$L[y - y_p] = 0,$$

ולכן $y - y_p$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית, וניתן לכתוב $y - y_p = y_H$ כפי שרצינו להראות. □

הערה. שימו לב שמרחב הפתרונות למשוואה האי הומוגנית אינו מרחב וקטורי. כך למשל, פונקציית האפס אינה פתרון, וסכום של פתרונות למשוואה האי-הומוגנית אינו פתרון.

המסקנה מהטענה האחרונה היא שברגע שמצאנו פתרון פרטי **כלשהו** למשוואה האי-הומוגנית, נוכל למצוא את הפתרון הכללי למשוואה על ידי התבוננות במשוואה ההומוגנית ופתרונה על פי השיטות מהחלק הקודם. לכן, סוף הפרק הזה במשוואות מסדר n יעסוק בשתי שיטות למציאת פתרון פרטי למשוואה ליניארית אי-הומוגנית. אחת מהשיטות מתאימה לכל משוואה ליניארית והשיטה השנייה מתאימה רק למד"ר במקדמים קבועים/משוואת אוילר.

3.6.1 וריאציית הפרמטרים

דוגמה 3.6.1. הדגמת השיטה עבור $n = 2$

נניח כי y_1, y_2 הם בסיס לפתרונות למשוואה

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

מצאו פונקציות $c_1(x), c_2(x)$ שעבורן הפונקציה

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

היא פתרון למשוואה

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x)$$

עבור g רציפה כלשהי.

פתרון. נניח תחילה כי $y(x)$ אכן פתרון. נשים לב שעל מנת למצוא תנאי על הפונקציות c_1, c_2 עלינו לקבל זוג משוואות ולא משוואה אחת יחידה, כך שהצבה במד"ר לבדה לא תספיק. כדי לפתור את הבעיה הזאת ננסה להציג משוואה נוספת על ידי גזירה של הפונקציה

$$y'(x) = c_1y_1' + c_2y_2' + c_1'y_1 + c_2'y_2,$$

ודרישה שמתקיים

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = f(x)$$

עבור $f(x)$ כלשהי שנקבע בהמשך. בצורה כזאת נכתוב

$$y'(x) = c_1y_1' + c_2y_2' + f(x),$$

ולכן

$$y''(x) = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2'' + f'(x).$$

לאחר הצבה של כל אלו בתוך המד"ר, נקבל כי

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = c_1'y_1' + c_2'y_2' + f(x) = g(x),$$

כלומר, נקבל את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = f(x) \\ c_1'y_1' + c_2y_2' = g(x) - f(x). \end{cases}$$

בצורה מטריצית, ניתן לכתוב את המשוואה בצורה

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) - f(x) \end{pmatrix}$$

היות והוורונסקיאן שונה מאפס (שהרי מדובר בבסיס למרחב הפתרונות של המשוואה ההומוגנית), נסיק שלמשוואה

קיים פתרון יחיד לכל $f(x), g(x)$ ממנו נוכל לחלץ את c_1', c_2' ולקבל פתרון למשוואה האי-הומוגנית כדרוש. יתרה מכך, אמנם $g(x)$ נקבעה מראש בשאלה, אך $f(x)$ יכולה להיות כל פונקציה רציפה שנרצה, ולכן נוכל לבחור את פונקציית האפס כדי לפשט את הבעיה. $\square$

משפט 3.6.1. שיטת וריאציית הפרמטרים

יהא $\{y_1, \ldots, y_n\}$ בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0,$$

ותהא $g(x)$ רציפה בתחום. אזי, קיים פתרון למערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix},$$

ועבור הפונקציה $y(x) = c_1(x)y_1 + \cdots + c_n(x)y_n$ היא פתרון של המשוואה

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x).$$

הוכחה. ראשית, נשים לב שהמטריצה שמופיעה במערכת המשוואות היא מטריצה הפיכה ולכן למערכת המשוואות קיים פתרון יחיד לכל x. למעשה, על פי כלל קרמר (מקורסי האלגברה הליניארית), מתקיים

$$c_i'(x) = \frac{\det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & g(x) & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}, \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

מה שמראה כי הפתרון רציף ביחס ל-x, כך שאכן ניתן לבצע אינטגרציה ולמצוא את c_i לכל i. עתה, אם $y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$, מתקיים

$$y' = \overbrace{c_1'y_1 + \cdots + c_n'y_n}^{=0} + c_1y_1' + \cdots + c_ny_n'$$

$$y'' = \overbrace{c_1'y_1' + \cdots + c_n'y_n'}^{=0} + c_1y_1'' + \cdots + c_ny_n''$$

וממשיכים באופן דומה עד אשר מקבלים

$$y^{(n)} = \overbrace{c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)}}^{=g(x)} + c_1 y_1^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)}.$$

על ידי הצבה במשוואה האי-הומוגנית, מקבלים בקלות כי y אכן פתרון למשוואה האי-הומוגנית, כדרוש. $\square$

דוגמה 3.6.2. דוגמה לשימוש בוריאציית פרמטרים

מצאו את הפתרון הכללי למשוואה

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}$$

בתחום שבו $x > 0$.

פתרון. ראשית, נזהה כי המשוואה ההומוגנית היא משוואת אוילר, שהפולינום האופייני שלה הוא

$$p(r) = r(r-1) - 4r + 6 = r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2),$$

ולכן x^2, x^3 הוא בסיס למרחב הפתרונות בתחום. נשתמש בוריאציית פרמטרים עבור המשוואה המנורמלת

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = \frac{1}{x^3}$$

על מנת למצוא פתרון פרטי למשוואה האי-הומוגנית. על פי משפט 3.6.1, עלינו לחשב

$$c_1'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & x^3 \\ \frac{1}{x^3} & 3x^2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{x^4} \Longrightarrow c_1(x) = \frac{1}{3x^3} + c_1$$

$$c_2'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \frac{1}{x^3} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{x^5} \Longrightarrow c_2(x) = -\frac{1}{4x^4} + c_2.$$

כלומר הפונקציה

$$y(x) = \left(\frac{1}{3x^3} + c_1\right)x^2 + \left(-\frac{1}{4x^4} + c_2\right)x^3 = \frac{1}{12x} + c_1x^2 + c_2x^3$$

היא פתרון למשוואה האי-הומוגנית. למעשה, ניתן לזהות שהיא מייצגת כבר את הפתרון הכללי, היות והיא מייצגת פתרון כלשהי למשוואה האי-הומוגנית, ועוד קומבינציה כללית של בסיס הפתרונות למשוואה ההומוגנית.
$\square$

3.6.2 שיטת השוואת המקדמים

נניח כי נתונה המשוואה במקדמים קבועים

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = g(x)$$

כאשר $g(x) = k(x)e^{rx}$, $k(x)$ פולינום ממעלה m ו-$r \in \mathbb{C}$. נניח גם כי r **אינו** שורש של הפולינום האופייני של המד"ר. במקרה כזה נקבל כי אם $q(x)$ הוא פולינום ממעלה m, אזי

$$L\left[q(x)e^{rx}\right] = \tilde{q}\,(x)\,e^{rx},$$

כאשר $\tilde{q}$ הוא הפולינום שמתקבל לאחר סידור האיברים והוצאת e^{rx} כגורם משותף. היות ו-$\tilde{q}\,(x)$ הוא פולינום ממעלה m, אם נשווה בין המקדמים של $\tilde{q}$ למקדמים של k, נקבל פתרון למקדמים של q שעבורם

$$L\left[q(x)e^{rx}\right] = k\,(x)\,e^{rx},$$

מה שמספר לנו פתרון פרטי של המשוואה האי הומוגנית. לא נוכיח את המשפט הבא במלואו, אבל שיטה דומה מספקת לנו פתרון פרטי למשפחה גדולה של פונקציות באגף הימני של המשוואה.

משפט 3.6.2. שיטת השוואת המקדמים

בהנתן המשוואה

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = g(x),$$

ניתן למצוא פתרון פרטי על ידי השוואת מקדמים במקרים הבאים:

1. אם $r \in \mathbb{R}$, $g(x) = p(x)e^{rx}$ ו-r אינו שורש של הפולינום האופייני מריבוי m, נציע פתרון מהצורה
$$y_p\,(x) = x^m q\,(x)\,e^{rx},\ \deg\,(p) = \deg\,(q)$$

2. אם $g(x) = p(x)e^{\alpha x}\cos\,(\beta x)$ או $g(x) = p(x)e^{\alpha x}\sin\,(\beta x)$ כאשר $r = \alpha + i\beta$ הוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי m, נציע פתרון מהצורה
$$y_p\,(x) = x^m\left(q_1(x)e^{\alpha x}\cos\,(\beta x) + q_2(x)e^{\alpha x}\sin\,(\beta x)\right)$$
כאשר גם כאן $\deg\,(q_1) = \deg\,(q_2) = \deg\,(p)$.

הוכחה. (**הוכחה זו אינה נדרשת בקורס**) נפרק את ההוכחה למספר חלקים.

- **שלב ראשון, $\mathbf{r=0}$ עם ריבוי $\mathbf{m=0}$.** נוכיח כי עבור המשוואה

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=p(x)$$

כאשר $p(x)=p_s+p_{s-1}x+\cdots+p_0x^s$ הוא פולינום ממעלה s קיים פתרון פולינומי שגם הוא ממעלה s. העובדה כי $r=0$ אינו שורש של הפולינום האופייני מעידה על כך שמתקיים $a_n\neq 0$. נותר לנו להוכיח שקיים פתרון למשוואה מהצורה

$$q(x)=c_s+c_{s-1}x+\cdots+c_0x^s.$$

נציב את הפולינום במד"ר ונקבל כי

$$\begin{aligned}
q^{(n)}(x)+\cdots+a_nq(x) &= a_n\left(c_0x^s+\cdots+c_m\right)\\
&\quad+a_{n-1}\left(sc_0x^{s-1}+(s-1)\,c_1x^{s-2}+\cdots+c_{m-1}\right)\\
&\quad+a_{n-2}\left(s\,(s-1)\,c_0x^{s-2}+\cdots+c_{s-2}\right)\\
&\quad\vdots\\
&\quad+a_{n-k}\left(s\,(s-1)\ldots(s-k+1)\,c_0x^{s-k}+\cdots+c_{s-k}\right)\\
&\quad\vdots\\
&= p_s+p_{s-1}x+\cdots+p_0x^s.
\end{aligned}$$

כל שנותר לנו הוא להשוות בין המקדמים של הביטוי שמופיע לאחר סימן השוויון הראשון והביטוי באגף הימני האחרון, ולקבל כי

$$\begin{cases}
a_nc_0 &= p_0\\
a_nc_1+sa_{n-1}c_0 &= p_1\\
 &\vdots\\
a_nc_k+(s-k+1)a_{n-1}c_{k-1}+\cdots+s(s-1)\ldots(s-k+1)a_{n-k}c_0 &= p_k\\
 &\vdots
\end{cases}$$

מערכת המשוואות הזו היא מערכת של $m+1$ משוואות ב-$m+1$ הנעלמים $c_0,\ldots,c_m$. המטריצה המייצגת שלה היא מטריצה משולשת עליונה שאיברי האלכסון שלה הם כולם a_n (ששונים מאפס, כי הנחנו ש-0 אינו שורש של הפולינום האופייני). מכאן, נובע שקיים פתרון למערכת והוא יחיד.

- **שלב שני, $\mathbf{r=0}$ עם ריבוי $\mathbf{m>0}$.** אם $r=0$ הוא שורש מריבוי m של הפולינום האופייני, מקבלים כי

הפולינום האופייני של המשוואה הוא מהצורה

$$p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-m} r^m,$$

ולכן המשוואה היא מהצורה

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-m} y^{(m)} = p(x).$$

אם נציב $u = y^{(m)}$, נקבל את המשוואה

$$u^{(n-m)} + \cdots + a_{n-m} u = p(x),$$

כך ש-$r = 0$ אינו שורש של הפולינום האופייני של המד"ר ב-u. אי לכך, אם p פולינום ממעלה s, קיים פתרון יחיד מהצורה

$$u(x) = c_s + \cdots + c_0 x^s$$

למשוואה ב-u. על ידי אינטגרציה m פעמים, נקבל כי

$$y(x) = d_1 + \cdots + d_m x^{m-1} + \tilde{c}_s x^m + \cdots + \tilde{c}_0 x^{m+s}$$

הוא פתרון פרטי למשוואה המקורית. יחד עם זאת, נשים לב שהחלק $d_1 + \cdots + d_m x^{m-1}$ הוא למעשה פתרון של המשוואה ההומוגנית, ולכן ניתן להחסיר אותו מ-y ולקבל שקיים פתרון יחיד מהצורה

$$q(x) = x^m \left(\tilde{c}_s + \cdots + \tilde{c}_0 x^s\right),$$

שזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

- **שלב אחרון, המקרה הכללי.** נניח כי $r \in \mathbb{C}$ שורש של הפולינום האופייני מריבוי $m \geq 0$. כדי למצוא פתרון למשוואה

$$y^{(n)} + \cdots + a_n y = p(x) e^{rx}$$

נחפש פתרון מהצורה $y(x) = e^{rx} v(x)$ ונציב אותו למשוואה. נסמן $a_0 = 1$ לשם נוחות, ונוכל לכתוב

$$\begin{aligned}
a_0 y^{(n)} + \cdots + a_n y &= \sum_{i=k}^{n} a_{n-k} \left(e^{rx} v(x)\right)^{(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} r^{k-j} e^{rx} v^{(j)}(x) \\
&= e^{rx} \sum_{j=0}^{n} v^{(j)}(x) \sum_{k=j}^{n} \frac{k!}{j!(k-j)!} a_{n-k} r^{k-j}.
\end{aligned}$$

בשלב הבא, נזהה כי הפולינום האופייני של המד"ר הוא

$$P(r) = r^n + \cdots + a_n = 0,$$

ולכן הנגזרת ה-j של הפולינום האופייני היא

$$P^{(j)}(r) = n(n-1)\ldots(n-j+1)r^{n-j} + \cdots + a_{n-j} = \sum_{k=j}^{n} \frac{k!}{(k-j)!} a_{n-k} r^{k-j},$$

כלומר

$$a_0 y^{(n)} + \cdots + a_n y = e^{rx} \sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}(r)}{j!} v^{(j)}(x) = p(x) e^{rx}.$$

על ידי חלוקה ב-e^{rx} נקבל כי v הוא פתרון של המשוואה

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{P^{(j)}(r)}{j!} v^{(j)}(x) = p(x),$$

ועבור המשוואה הזו, שהיא משוואה במקדמים קבועים, 0 הוא שורש של הפולינום האופייני החדש מריבוי זהה ל-m, היות וראינו כי אם r שורש של הפולינום האופייני המקורי מריבוי m, אזי $P^{(j)}(r) = 0$ לכל $j = 0, \ldots, m-1$. כלומר, על פי המקרים הקודמים, קיים ל-v פתרון יחיד מהצורה

$$v(x) = x^m q(x),$$

כאשר q פולינום ממעלה זהה ל-p ו-m הריבוי של r בפולינום האופייני.

שימו לב שגם במקרה המרוכב, מקבלים את תוצאת המשפט, על ידי שימוש בכך ש-$e^{(\alpha+\beta i)x}$ שמוכפל בפולינום ממעלה s מוביל על ידי שימוש בזהות אוילר לביטוי מהצורה שמופיעה במשפט. □

בנוסף, ניתן להיעזר בטענה הבאה על מנת לפרק בעיה מסובכת יותר לבעיה פשוטה יותר.

טענה 3.6.2 עקרון הסופרפוזיציה

עבור אופרטור דיפרנציאלי ליניארי L, אם מתקיים

$$L[y_1] = g_1, \quad L[y_2] = g_2$$

אזי $L[y_1 + y_2] = g_1 + g_2$.

ההוכחה של הטענה מידית מכך שהאופרטור ליניארי.

דוגמה 3.6.3. דוגמה להשוואת מקדמים

מצאו את הפתרון הכללי למשוואות הבאות:

1. $y'' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega_0 x)$.
2. $y^{(4)} - 2y'' + y = xe^x$.

פתרון. 1. השורשים של הפולינום האופייני הם $r = \pm\omega_0 i$, כך שבמקרה שלנו הפונקציה $g(x) = \cos(\omega_0 x)$ היא מהצורה $p(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ כאשר $p(x) = F_0, \alpha = 0, \beta = \omega_0$ ו-$\omega_0 i$ הוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי 1. לכן, על פי משפט 3.6.2 נציע פתרון פרטי מהצורה

$$y_p(x) = x\left(c_1 \cos(\omega_0 x) + c_2 \sin(\omega_0 x)\right).$$

על ידי גזירה נקבל

$$y_p'(x) = c_1 \cos(\omega_0 x) + c_2 \sin(\omega_0 x) + x\omega_0\left(c_2 \cos(\omega_0 x) - c_1 \sin(\omega_0 x)\right).$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) = (c_1 + \omega_0 c_2)\cos(\omega_0 x) + (c_2 - \omega_0 c_1)\sin(\omega_0 x) - x\omega_0^2 (c_1 \cos(\omega_0 x) \\ + c_2 \sin(\omega_0 x)). \end{aligned}$$

לאחר הצבה במד"ר מקבלים כי

$$y_p''(x) + \omega_0^2 y_p(x) = (c_1 + \omega_0 c_2)\cos(\omega_0 x) + (c_2 - \omega_0 c_1)\sin(\omega_0 x) = F_0 \cos(\omega_0 x)$$

על ידי השוואת מקדמים נקבל כי המקדם של הסינוס חייב להתאפס. כלומר $c_2 = \omega_0 c_1$. על ידי הצבה במשוואה למקדם של הקוסינוס נקבל

$$F_0 = c_1 + \omega_0 c_2 = \left(1 + \omega_0^2\right) c_1 \Longrightarrow c_1 = \frac{F_0}{1 + \omega_0^2} \Longrightarrow c_2 = \frac{\omega_0 F_0}{1 + \omega_0^2}.$$

ולסיכום נקבל כי הפתרון הכללי למד"ר הוא

$$y(x) = \frac{F_0 x \cos(\omega_0 x)}{1 + \omega_0^2} + \frac{F_0 \omega_0 x \sin(\omega_0 x)}{1 + \omega_0^2} + c_1 \cos(\omega_0 x) + c_2 \sin(\omega_0 x).$$

2. הפולינום האופייני של המשוואה הוא $p(r) = r^4 - 2r^2 + 1 = (r-1)^2 (r+1)^2$. היות ו-$g(x) =$

כאשר $p(x)e^{rx}$ כאשר $p(x)=x$,$r=1$ ו-1 הוא שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2, נציע פתרון מהצורה

$$y_p(x)=x^2\,(ax+b)\,e^x=(ax^3+bx^2)e^x.$$

על ידי גזירה נקבל

$$y_p'(x)=\left(ax^3+(3a+b)x^2+2bx\right)e^x$$
$$y_p''(x)=\left(ax^3+(6a+b)x^2+(6a+4b)x+2b\right)e^x$$
$$y_p^{(3)}(x)=\left(ax^3+(9a+b)x^2+(18a+6b)x+(6a+6b)\right)e^x$$
$$y_p^{(4)}(x)=\left(ax^3+(12a+b)x^2+(36a+8b)x+(24a+12b)\right)e^x.$$

ולכן לאחר הצבה במד"ר נקבל כי

$$y_p^{(4)}-2y_p''+y_p=(24ax+(24a+8b))\,e^x=xe^x.$$

מכאן נקבל כי $a=\frac{1}{24}$ ו-$b=-\frac{1}{8}$ ולכן הפתרון הכללי של המד"ר יהיה

$$y(x)=\left(\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{8}\right)e^x+c_1e^x+c_2xe^x+c_3e^{-x}+c_4xe^{-x}.$$

□

בתור התוצאה האחרונה בפרק, נדון ביציבות של פתרונות המשוואה האי-הומוגנית. ההוכחה זהה למקרה ההומוגני ולכן נשאיר אותה כתרגיל.

משפט 3.6.3 יציבות/יציבות אסימפטוטית למשוואה ליניארית אי-הומוגנית מסדר n

הפתרונות של המשוואה האי-הומוגנית

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=g(x)$$

יציבים/יציבים אסימפטוטית כאשר $x>x_0$ אם ורק אם הפתרונות של המשוואה ההומוגנית יציבים/יציבים אסימפטוטית ב-$x>x_0$.

4
מערכת מד"ר

4.1 מבוא והגדרות

בפרק הקודם דנו במשוואות דיפרנציאליות "יחידות" מסדר n, והדרך להגיע אליהן היה דרך מערכת משוואות מהצורה

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

עוד ראינו שכאשר $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, f_i$ רציפות לכל i, j, מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות ולכל תנאי התחלה מהצורה

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

קיים קטע $[t_0 - h, t_0 + h]$ שבו קיים פתרון יחיד למערכת המשוואות. בפרק זה נרחיב מעט על משוואות אלו וננסה ללמוד כיצד לפתור אותן/לנתח באופן איכותי את הפתרונות של משוואות אלה.

4.2 מערכת משוואות ליניארית

הגדרה 4.2.1 מערכת מד"ר ליניארית

מערכת משוואות דיפרנצאיליות מהצורה

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

כאשר $a_{ij}(t), g_i(t)$ פונקציות שתלויות רק ב-t. אם $g_i = 0$ לכל i, המשוואה מכונה **הומוגנית** ואחרת **אי-הומוגנית**.

כאשר $a_{ij}(t)$ רציפות בקטע I, מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות לכל תנאי התחלה, ומובטח שהפתרון מוגדר תמיד בכל הקטע I. אם נסמן

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

נקבל כי משוואה ליניארית היא משוואה מהצורה $X'(t) = A(t)X(t) + G(t)$. נאמר כי $A(t)$ רציפה אם כל אחת מהפונקציות שמרכיבות אותה רציפה.

דוגמה 4.2.1 דוגמה למערכת מד"ר ליניארית

מצאו פתרון כללי למערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

בתחום $t > 0$.

פתרון. כדי לפתור את המשוואות נשים לב שהמשוואה הראשונה במערכת היא

$$x_1'(t) = x_2(t),$$

ולכן

$$x_1''(t) = x_2'(t).$$

עתה, על פי המשוואה השניה נקבל

$$x_2'(t) = \frac{1}{t^2}x_1(t) - \frac{1}{t}x_2(t) + t,$$

ולכן

$$x_1''(t) = \frac{1}{t^2}x_1(t) - \frac{1}{t}x_1'(t) + t.$$

אם נעביר את המשוואה אגפים נקבל את המד"ר

$$t^2x_1'' + tx_1' - x_1 = t^3,$$

שהיא משוואת אוילר שאנחנו יודעים לפתור. הפתרון הכללי שלה הוא

$$x_1(t) = \frac{1}{8}t^3 + c_1t + \frac{c_2}{t},$$

ומכך שמתקיים $x_2(t) = x_1'(t)$ נקבל כי

$$x_2(t) = \frac{3}{8}t^2 + c_1 - \frac{c_2}{t^2}.$$

לסיכום

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}t^3 \\ \frac{3}{8}t^2 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$$

הוא הפתרון הכללי של המד"ר. על אף שלא הוכחנו זאת, ניתן לזהות שהפתרון של המד"ר הליניארית האי-הומוגנית מורכב מקומבינציה של שני פתרונות ועוד פתרון פרטי של המשוואה. □

4.2.1 מערכת משוואות ליניארית הומוגנית

הדוגמה האחרונה מראה שיתכן ומערכות משוואות ליניאריות "מתנהגות" כמו משוואות מסדר גבוה.

טענה 4.2.1. מרחב הפתרונות למערכת משוואות ליניארית הומוגנית

תהא $A(t)$ מטריצה של פונקציות רציפות. אזי, אוסף הפתרונות למשוואה

$$X'(t) = A(t)\,X(t)$$

הוא מרחב וקטורי.

פתרון. ראשית, נזהה כי הפונקציה $X(t) = 0$ היא פתרון למשוואה. אם X_1, X_2 פתרונות ו-$\alpha \in \mathbb{R}$, אזי

$$(\alpha X_1 + X_2)'(t) = \alpha X_1'(t) + X_2'(t) = \alpha A(t)X_1(t) + AX_2(t) = A(\alpha X_1 + X_2)(t).$$

כלומר, אוסף הפתרונות סגור לחיבור וכפל בסקלר. מכאן שהוא אכן מהווה מרחב וקטורי. □

אם מרחב הפתרונות אכן מהווה מרחב וקטורי, ייתכן וניתן למצוא בסיס למרחב הפתרונות, ולשם כך נגדיר

גם במקרה הזה תלות ליניארית וכלים הנגזרות מהגדרה זו.

הגדרה 4.2.2. תלות ליניארית, פונקציות וקטוריות

יהיו $X_1, \ldots, X_m$ פונקציות וקטוריות (באותו מימד) בקטע I. אומרים שהפונקציות **תלויות ליניארית** בקטע אם קיימים קבועים $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, לא כולם אפס, כך שלכל $t \in I$

$$c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t) = 0.$$

במידה ולא קיימים קבועים כנ"ל, אומרים שהפונקציות **בלתי תלויות ליניארית** בקטע.

נניח שנתונות n פונקציות וקטוריות $X_1, \ldots, X_n$ ממימד n. אם הפונקציות תלויות ליניארית בקטע, קיימים קבועים $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ לא כולם אפס, כך שמתקיים

$$c_1 \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

בצורה מטריצית, עלינו למצוא פתרון לא טריוויאלי למשוואה

$$\begin{pmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

שימו לב שהמטריצה היא בדיוק המטריצה שעמודותיה הן הפונקציות הוקטוריות $X_1(t), \ldots, X_n(t)$. לכן, אם אכן קיים פתרון טריוויאלי לכל t, נסיק כי

$$\det \begin{pmatrix} | & \ldots & | \\ X_1(t) & \ldots & X_n(t) \\ | & \ldots & | \end{pmatrix} = 0, \quad \forall t \in I.$$

העובדה כי ביטוי זה מזכיר את הוורנסקיאן מהפרק הקודם, דורשת הגדרה גם למקרה שלנו.

הגדרה 4.2.3. וורנסקיאן של פונקציות וקטוריות

תהיינה $X_1, \ldots, X_n$ פונקציות וקטוריות ממדיות n בקטע I. ה**וורנסקיאן** של הפונקציות בקטע

מוגדר להיות

$$W\left[X_1,\ldots,X_n\right](t)=\det\begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ X_1(t) & \cdots & X_n(t) \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}.$$

מתוך הפסקה הקודמת נוכל להסיק מידית את הטענה הבאה

טענה 4.2.2. תנאי הכרחי לתלות ליניארית

תהיינה $X_1,\ldots,X_n$ פונקציות וקטוריות n ממדיות בקטע I. אם הפונקציות תלויות ליניארית ב-I, אזי

$$W\left[X_1,\ldots,X_n\right](t)=0,\quad \forall t\in I.$$

בנוסח שקול, אם קיימת נקודה שבה $W\left[X_1,\ldots,X_n\right](t)\neq 0$, הפונקציות בלתי תלויות ליניארית בקטע.

השלב הבא יהיה לדון בתלות ליניארית של פונקציות שמהוות פתרון למד"ר ליניארית הומוגנית שמקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות.

משפט 4.2.1. תלות ליניארית של פתרונות למד"ר

יהיו $X_1,\ldots,X_n$ פתרונות בקטע I למערכת המשוואות $X'(t)=A(t)X(t)$ כאשר $A(t)$ מטריצה של פונקציות רציפות ב-I. אזי קיימת נקודה שבה $W\left[X_1,\ldots,X_n\right](t)=0$ אם ורק אם $W\left[X_1,\ldots,X_n\right](t)=0$ בכל הקטע. בפרט, מקבלים כי הפתרונות תלויים ליניארית בקטע אם ורק אם קיימת נקודה שבה הוורנסקיאן מתאפס.

פתרון. נניח כי הוורנסקיאן של הפתרונות מתאפס בנקודה t_0 כלשהי. כפי שציינו קודם, נובע מכך שקיימים קבועים $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$, לא כולם אפס, שעבורם

$$c_1X_1(t_0)+\cdots+c_nX_n(t_0)=0.$$

מצד שני, הפונקציה $c_1X_1+\cdots+c_nX_n$ היא פתרון של המד"ר שמקיים את תנאי ההתחלה של התאפסות בנקודה t_0. היות ולבעיה יש קיום ויחידות ופונקציית האפס היא פתרון, נסיק שלכל $t\in I$

$$c_1X_1(t)+\cdots+c_nX_n(t)=0.$$

אך מכאן נובע כי הפתרונות תלויים ליניארית בקטע ובפרט הוורנסקיאן שלהם מתאפס זהותית בקטע. □

השלב התיאורטי האחרון הוא המשפט על קיום בסיס למרחב הפתרונות.

משפט 4.2.2. בסיס למרחב הפתרונות של מערכת מד"ר ליניארית הומוגנית

תהא $X'(t) = A(t)X(t)$ מערכת מד"ר ב-I עם מטריצה $A(t)$ רציפה בקטע. אזי, קיים בסיס של n פונקציות וקטוריות $\{X_1, \ldots, X_n\}$ למרחב הפתרונות. בפרט, מרחב הפתרונות הוא מרחב וקטורי n ממדי.

הוכחה. נבחר $t_0 \in I$ ונגדיר משפחה של פתרונות (שקיימים, בזכות משפט הקיום והיחידות) שמקיימים את תנאי ההתחלה

$$X_i\left(t_0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

כאשר ה-1 נמצא במקום ה-i. במקרה זה נקבל כי $\{X_1, \ldots, X_n\}$ הוא אוסף של פתרונות למד"ר עבורן

$$W\left[X_1, \ldots, X_n\right]\left(t_0\right) = \det\left(I\right) = 1 \neq 0.$$

על פי משפט 4.2.1, הפתרונות בלתי תלויים בקטע והוורנסקיאן שלהם יהיה שונה מאפס בכל הנקודות של הקטע. נוכיח כי מדובר גם בקבוצה פורשת, ונניח כי $X(t)$ פתרון אחר למד"ר שעבורו מתקיים תנאי ההתחלה

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

על פי ההגדרה של אוסף הפתרונות המיוחד שלנו, הפונקציה $c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n(t)$ מקיימת בדיוק את תנאי ההתחלה הזה. בזכות משפט הקיום והיחידות, נסיק כי

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t), \quad \forall t \in I.$$

מכאן שהקבוצה שלנו בלתי תלויה ופורשת את מרחב הפתרונות, כפי שרצינו להוכיח. $\square$

גם למערכת מד"ר קיימת גרסה של נוסחת אבל.

משפט 4.2.3. נוסחת אבל למערכות מד"ר

יהיו $X_1, \dots, X_n$ פתרונות בקטע I של המד"ר $X'(t) = A(t)X(t)$ כאשר $A(t)$ מטריצה במקדמים רציפים ב-I. אזי

$$W\left[X_1, \dots, X_n\right](t) = Ce^{\int \mathrm{Tr}(A(t))\mathrm{d}t},$$

ואם בוחרים $t_0 \in I$ ניתן גם לכתוב

$$W\left[X_1, \dots, X_n\right](t) = W\left[X_1, \dots, X_n\right](t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(\tau))\mathrm{d}\tau}.$$

פתרון. נשתמש בנוסחה הבאה לנגזרת של הוורנסקיאן

$$W\left[X_1, \dots, X_n\right]'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_{i1}(t) & \dots & x'_{in}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

נתבונן בכל ערך של i בנפרד, ונשים לב שהיות ומתקיים

$$x'_{ij}(t) = \left(A(t)X_j(t)\right)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_{kj}$$

כלומר:

$$\det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_{i1}(t) & \dots & x'_{in}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_{k1}(t) & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_{kn}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

היות ודטרמיננטה ליניארית ביחס לשורות שלה, נוכל לכתוב

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{k1}(t) & \dots & x_{kn}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

לכל $k \neq i$, אנחנו מקבלים שהשורה ה-i זהה לשורה ה-k ולכן הדטרמיננטה תתאפס, ומכאן שהאיבר היחיד שלא מתאפס הוא המקרה שבו $k = i$ ואז מקבלים בחזרה את הוורנסקיאן המקורי. כלומר

$$W\left[X_1, \dots, X_n\right]'(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) W\left[X_1, \dots, X_n\right](t) = \operatorname{Tr}\left(A(t)\right) W\left[X_1, \dots, X_n\right](t).$$

לכן, מקבלים כי

$$W\left[X_1, \dots, X_n\right](t) = Ce^{-\int \operatorname{Tr}(A(t))\mathrm{d}t}$$

או שאם אנחנו בוחרים נקודה $t_0 \in I$, אפשר לכתוב גם

$$W\left[X_1, \dots, X_n\right](t) = W\left[X_1, \dots, X_n\right](t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{Tr}(A(\tau))\mathrm{d}\tau}.$$

□

החלק הבא בפרק יעסוק במציאת בסיס לפתרונות, למשפחה גדולה של משוואות שאותן אנחנו יודעים לפתור.

4.3 מערכת מד"ר במקדמים קבועים

הגדרה 4.3.1. מערכת מד"ר הומוגנית במקדמים קבועים

מערכת מד"ר מהצורה

$$X'(t) = AX(t)$$

כאשר $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ממשית וקבועה, מכונה מערכת מד"ר הומוגנית במקדמים קבועים.

דוגמה 4.3.1. משוואה פשוטה לדוגמה

מצאו את הפתרון הכללי למערכת

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

כאשר $a > 0$ נתון.

פתרון. נשים לב שמתוך המשוואה הראשונה, מתקיים $x'(t) = ay(t)$ ועל ידי גזירה נוספת של המשוואה, נקבל $x''(t) = ay'(t)$. עתה, נציב את המשוואה השניה $y'(t) = ax(t)$ ונקבל כי

$$x''(t) = a^2 x(t).$$

זוהי מד"ר פשוטה במקדמים קבועים שפתרונה הכללי הוא

$$x(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}.$$

$$y(t) = \frac{1}{a} x'(t) = c_1 e^{at} - c_2 e^{-at}.$$

כלומר, הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-at}$$

קל מאוד לוודא כי שני הפתרונות שקיבלנו (האחד שכופל את c_1 והאחד שכופל את c_2) הם אכן פתרונות בלתי תלויים ומהווים בסיס. יחד עם זאת, ניתן לזהות (עם קצת מאמץ) תופעה מעניינת יותר, והיא התבוננות בוקטורים

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

שכופלים את האקספוננטים. על ידי הכפלה במטריצה, מקבלים כי

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

כלומר, שני הוקטורים שקיבלנו הם למעשה וקטורים עצמיים של המטריצה A. □

התוצאה האחרונה מראה לנו נוסחה מבטיחה לפתרונות אפשריים למערכת מד"ר ליניארית הומוגנית במקדמים קבועים.

טענה 4.3.1 פתרון מותאם לוקטור עצמי ממשי

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ממשית קבועה ונניח כי $\lambda \in \mathbb{R}$ ערך עצמי עם וקטור עצמי V של המטריצה A. אזי, הפונקציה

$$X(t) = Ve^{\lambda t} = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

היא פתרון למערכת המד"ר $X'(t) = AX(t)$.

פתרון. על ידי בדיקה מפורשת, נזהה כי

$$\left(Ve^{\lambda t}\right)' = \begin{pmatrix} \lambda v_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \lambda v_n e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \lambda V e^{\lambda t}.$$

מצד שני

$$A\left(Ve^{\lambda t}\right) = (AV)\, e^{\lambda t} = \lambda V e^{\lambda t}$$

היות ומתקיים השוויון, נסיק שאכן מדובר בפתרון של המד"ר. $\square$

טענה זו מאפשרת לנו למצוא בסיס לפתרונות במקרה הבא.

משפט 4.3.1 מטריצה לכסינה עם ערכים ממשיים

תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ממשית קבועה ונניח כי $\{V_1, \ldots, V_n\}$ בסיס של וקטורים עצמיים של A עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (ייתכן ריבוי). אזי, הפונקציות

$$\left\{V_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, V_n e^{\lambda_n t}\right\}$$

הן בסיס למרחב הפתרונות של המערכת $X'(t) = AX(t)$.

הוכחה. על פי הנתון, הפונקציות אכן מהוות פתרונות למשוואה, ולכן נותר להוכיח כי הן בלתי תלויות ליניארית.

אכן, מחישוב מפורש מקבלים

$$\begin{aligned} W\left[V_1e^{\lambda_1 t},\ldots,V_ne^{\lambda_n t}\right](t) &= \det\begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ V_1e^{\lambda_1 t} & \cdots & V_ne^{\lambda_n t} \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} \\ &= e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t}\det\begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ V_1 & \cdots & V_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

היות והאקספוננט לא מתאפס והמטריצה מורכבת מעמודות בלתי תלויות ליניארית (נתון). מכאן שאכן מדובר בבסיס, כדרוש. □

תזכורות/הבהרות מאלגברה ליניארית. למטריצות הבאות, משפט 4.3.1 מתקיים אוטומטית.

- **מטריצות סימטריות.** מוכיחים בקורסי האלגברה הליניארית כי כל מטריצה סימטרית וממשית היא לכסינה והערכים העצמיים שלה תמיד ממשיים.
- **מטריצות עם ע"ע שונים.** אם למטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ יש n ערכים עצמיים ממשיים שונים, היא לכסינה.

דוגמה 4.3.2. דוגמה למטריצה לכסינה

מצאו את הפתרון הכללי למערכת

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} X(t).$$

פתרון. נתחיל במציאת הערכים העצמיים של המשוואה. אלו הם הערכים שמאפסים את הפולינום האופייני

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A-\lambda I) \\ &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2-1\right) - (2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2-2\right). \end{aligned}$$

מכאן ש-$\lambda = 2$ הוא ערך עצמי, וכן הערכים

$$(\lambda-2)^2 = 2 \Longrightarrow \lambda - 2 = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{2}.$$

נחפש וקטורים עצמיים לערכים אלו.

- עבור $\lambda = 2$ נפתור את המשוואה

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

מכאן נקבל כי $y = 0, x = -z$. כלומר, נקבל את הוקטור

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- עבור $\lambda = 2 + \sqrt{2}$ נפתור את המשוואה

$$\left(A-(2+\sqrt{2})I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

מכאן נקבל כי $y = -\sqrt{2}x$ ו-$y = -\sqrt{2}z$, ולכן $x = z$. מכאן נקבל את הוקטור

$$V_{2+\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- עבור $\lambda = 2 - \sqrt{2}$ נפתור את המשוואה

$$\left(A-(2-\sqrt{2})I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

מכאן נקבל כי $y=\sqrt{2}x=\sqrt{2}z$ ולכן $x=z$, ונקבל את הוקטור

$$V_{2-\sqrt{2}}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

קיבלנו שלוש וקטורים עצמיים בלתי תלויים ולכן

$$\begin{aligned}X(t)&=c_1V_2e^{2t}+c_2V_{2+\sqrt{2}}e^{(2+\sqrt{2})t}+c_3V_{2-\sqrt{2}}e^{(2-\sqrt{2})t}\\&=\begin{pmatrix}c_1e^{2t}+c_2e^{(2+\sqrt{2})t}+c_3e^{(2-\sqrt{2})t}\\ -\sqrt{2}c_2e^{(2+\sqrt{2})t}+\sqrt{2}c_3e^{(2-\sqrt{2})t}\\ -c_1e^{2t}+c_2e^{(2+\sqrt{2})t}+c_3e^{(2-\sqrt{2})t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

הוא הפתרון הכללי של המשוואה. $\square$

כמובן שבדומה למקרה הקודם, גם כאן עלינו לטפל במקרים שאינם עומדים בתנאי המשפט "הפשוט" למקרה הלכסין הממשי.

- ערכים עצמיים מרוכבים.
- מטריצה שאינה לכסינה.

טענה 4.3.2. פתרון המתאים לע"ע מרוכב

תהא A מטריצה ממשית וקבועה ונניח כי $\lambda=\alpha+\beta i$ ערך עצמי מרוכב עם $\beta\neq 0$, ו-V וקטור עצמי מתאים לו. אזי, $\bar{\lambda}=\alpha-\beta i$ ערך עצמי עם וקטור עצמי $\bar{V}$, והפונקציות

$$\mathfrak{Re}\left(Ve^{\lambda t}\right),\quad \mathfrak{Im}\left(Ve^{\lambda t}\right)$$

הם פתרונות למערכת $X'(t)=AX(t)$.

הוכחה. נוכיח תחילה כי אם λ ע"ע עם וקטור עצמי V, אזי $\bar{V}$ וקטור עצמי של ערך עצמי $\bar{\lambda}$. אכן, אם

$$AV=\lambda V,$$

נקבל שהיות והמטריצה ממשית, מתקיים

$$\overline{AV}=\bar{A}\bar{V}=A\bar{V},\quad \overline{AV}=\overline{\lambda V}=\bar{\lambda}\bar{V}.$$

מהשוואה בין הביטויים נקבל את הדרוש. עתה, משיקול דומה למקרה הממשי, נקבל כי הפונקציות

$$Ve^{\lambda t}, \quad \bar{V}e^{\bar{\lambda}t}$$

הם פתרונות. היות וקומבינציה ליניארית של פתרונות גם היא פתרון, נקבל כי

$$\mathfrak{Re}\left(Ve^{\lambda t}\right) = \frac{Ve^{\lambda t} + \bar{V}e^{\bar{\lambda}t}}{2}, \quad \mathfrak{Im}\left(Ve^{\lambda t}\right) = \frac{Ve^{\lambda t} - \bar{V}e^{\bar{\lambda}t}}{2i}$$

הם פתרונות למד"ר כדרוש. □

מכאן נוכל לנסח את המשפט לטיפול במקרה הלכסין הכללי.

משפט 4.3.2. מערכת מד"ר עם מטריצה לכסינה

תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ממשית וקבועה. נניח כי $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ערכים עצמיים ממשיים עם וקטורים עצמיים $V_1, \ldots, V_k \in \mathbb{R}^n$, ונניח כי $\mu_1, \bar{\mu}_1, \ldots, \mu_m, \bar{\mu}_m \in \mathbb{C}$ ערכים עצמיים שאינם ממשיים, עם וקטורים עצמיים $U_1, \bar{U}_1, \ldots, U_m, \bar{U}_m$. נניח גם כי $n = 2m + k$, כלומר אוסף הוקטורים הוא בסיס של המרחב. אזי, הקבוצה

$$\left\{V_1e^{\lambda_1 t}, \ldots, V_ke^{\lambda_k t}, \mathfrak{Re}\left(U_1e^{\mu_1 t}\right), \mathfrak{Im}\left(U_1e^{\mu_1 t}\right), \ldots \mathfrak{Re}\left(U_me^{\mu_m t}\right), \mathfrak{Im}\left(U_me^{\mu_m t}\right)\right\}$$

היא בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר $X'(t) = AX(t)$.

שימו לב שבאופן שבו ניסחנו את הבעיה, "אין צורך" להתייחס במיוחד לצמוד של הערך העצמי, הוא "נבלע" באופן אוטומטי בתוך הצורה הממשית של הפתרונות שהוספנו לבסיס.

הוכחה. העובדה שמדובר בפתרונות נובעת מהתרגיל הקודם. כדי להסיק שהם בלתי תלויים ליניארית נניח בשלילה שקיימים קבועים $c_1, \ldots, c_k, d_{1,1}, d_{1,2}, \ldots, d_{m,1}, d_{m,2}$ לא כולם אפס שעבורם

$$\sum_{i=1}^{k} c_iV_ie^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^{m} d_{j,1}\mathfrak{Re}\left(U_je^{\mu_j t}\right) + d_{j,2}\mathfrak{Im}\left(U_je^{\mu_j t}\right) = 0.$$

על ידי כתיבה של הסכום השני בעזרת פונקציות מרוכבות נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{k} c_iV_ie^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^{m} \frac{d_{j,1} + id_{j,2}}{2}U_je^{\mu_j t} + \frac{d_{j,1} - id_{j,2}}{2i}\bar{U}_je^{\bar{\mu}_j t} = 0.$$

ידוע לנו כבר כי אם $\{V_i, U_j, \bar{U}_j\}$ בסיס למרחב, הפונקציות שמופיעות בקומבינציה לעיל תלויות ליניארית (ההוכחה זהה למקרה הממשי, ונעזרת בוורונסקיאן). לכן, כל המקדמים בקומבינציה הליניארית מתאפסים

ובפרט, גם מקדמי הקומבינציה הליניארית המקורית. ☐

דוגמה 4.3.3. מערכות משוואות לכסינה, כולל ע"ע מרוכבים

מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה

$$X'(t)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&2&1\end{pmatrix}X(t).$$

פתרון. ראשית, ניתן לזהות כי סכום השורות של המטריצה זהה וערכו 2, ומכאן ש-$\lambda=2$ הוא ערך עצמי עם וקטור עצמי

$$V_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

כדי למצוא את הערכים העצמיים האחרים נשתמש בנוסחאות וייטה, כלומר

$$2+\lambda_1+\lambda_2=\mathrm{Tr}\left(A\right)=4\Longrightarrow\lambda_1+\lambda_2=2,$$

$$2\lambda_1\lambda_2=\det\left(A\right)=4\Longrightarrow\lambda_1\lambda_2=2.$$

למשוואה זו זוג פתרונות $\lambda_{1,2}=1\pm i$, שהם ערכים עצמיים מרוכבים וצמודים. על פי משפט 4.3.2, עלינו לחפש וקטור עצמי לאחד מהערכים הללו. לשם כך נפתור את המשוואה

$$(A-(1+i)I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i&0&1\\0&1-i&0\\-1&2&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

מכאן נקבל כי $y=0$ וכי $z=ix$, כלומר, נקבל את הוקטור

$$U_{1+i}=\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}.$$

מכאן מקבלים את הפתרון

$$U_{1+i}e^{t}\left(\cos\left(t\right)+i\sin\left(t\right)\right)=\begin{pmatrix}e^{t}\cos\left(t\right)\\0\\-e^{t}\sin\left(t\right)\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}e^{t}\sin\left(t\right)\\0\\e^{t}\cos\left(t\right)\end{pmatrix}.$$

מתוך פתרון זה, נסיק כי החלק הממשי והחלק המדומה גם הם פתרונות שנוכל לבחור כחלק מהבסיס שלנו.
לכן, הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ 0 \\ -e^t \sin(t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^t \sin(t) \\ 0 \\ e^t \cos(t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^t \cos(t) + c_3 e^t \sin(t) \\ c_1 e^{2t} \\ c_1 e^{2t} - c_2 e^t \sin(t) + c_3 e^t \cos(t) \end{pmatrix}.$$

□

בשלב האחרון, נטפל במקרה הלא לכסין, ולשם כך נפתח בדוגמה.

דוגמה 4.3.4. בלוק ז'ורדן

מצאו את הפתרון הכללי למשוואה

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} X(t).$$

פתרון. שימו לב שהמטריצה שלנו היא למעשה מטריצה "כמעט" אלכסונית, עם ערכים עצמיים λ (היות והיא משולשת עליונה) ו-1 מעל האלכסון. הבעיה היא שלמרות שאנחנו יודעים בקלות כי λ הוא ערך עצמי מריבוי n, חיפוש אחרי וקטורים עצמיים מותיר את המטריצה

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שהיא מטריצה מדרגה $n-1$, כך שקיים רק וקטור עצמי אחד עד כדי ריבוי. כלומר, לא ניתן להשתמש במשפט

4.3.2 על מנת לפתור את המד"ר. ננסה לפתור אותה "ידנית", בכך שנכתוב

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1(t) + x_2(t) \\ \lambda x_2(t) + x_3(t) \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1}(t) + x_n(t) \\ \lambda x_n(t) \end{pmatrix}.$$

עבור כל המשוואות למעט המשוואה האחרונה, נוכל לכפול ב-$e^{-\lambda t}$, להעביר אגפים ולקבל את המשוואה

$$e^{-\lambda t} x_i'(t) - \lambda e^{-\lambda t} x_i(t) = e^{-\lambda t} x_{i+1}(t),$$

$$\left(e^{-\lambda t} x_i(t)\right)' = e^{-\lambda t} x_{i+1}(t).$$

המשוואה האחרונה פשוטה בהרבה, ופתרונה הוא $x_n(t) = c_1 e^{\lambda t}$. אך מכאן נוכל להציב ולמצוא גם את כל הפונקציות האחרות. כך למשל

$$\left(e^{-\lambda t} x_{n-1}(t)\right)' = c_n \Longrightarrow x_{n-1}(t) = c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t},$$

$$\left(e^{-\lambda t} x_{n-2}(t)\right)' = c_1 t + c_2 \Longrightarrow x_{n-2}(t) = c_1 \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_3 e^{\lambda t}.$$

נמשיך בצורה זו עד שנקבל

$$x_1(t) = c_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda t} + \cdots + c_n e^{\lambda t},$$

ולכן נוכל לכתוב את הפתרון הכללי גם בצורה

$$X(t) = c_1 \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e_1 + \cdots + e_n\right) e^{\lambda t} + c_2 \left(\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e_2 + \cdots + e_n\right) e^{\lambda t} + \cdots + c_n e_1 e^{\lambda t}.$$

כאשר $\{e_i\}_{i=1}^n$ הם וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$. $\square$

מתברר שכל מטריצה דומה (עד כדי דמיון) למטריצה אלכסונית בלוקים כך שכל בלוק נראה כמו המטריצה שטיפלנו בה בשאלה. מכאן המוטיבציה לטענה הבאה.

טענה 4.3.3. פתרון לא לכסין

נניח כי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של A, ונניח כי $V_1, \dots, V_k$ וקטורים שונים מאפס המקיימים את המשוואות

$$(A - \lambda I)\, V_k = V_{k-1},\ (A - \lambda I)\, V_{k-1} = V_{k-2},\ \dots\ (A - \lambda I)\, V_1 = 0.$$

אזי, הפונקציות

$$X_1(t) = V_1 e^{\lambda t},\ X_2(t) = (t V_1 + V_2)\, e^{\lambda t},\ \dots\ X_k(t) = \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} V_1 + \cdots + V_k\right) e^{\lambda t}$$

הן פתרונות בלתי תלויים של המשוואה.

פתרון. נוכיח שאכן מדובר בפתרונות על פי הגדרה. תחילה, ברור כי X_1 הוא פתרון היות ו-V_1 הוא וקטור עצמי של המשוואה. עבור יתר הפתרונות, נזהה כי לכל $m > 1$ מתקיים

$$X_m'(t) = \left(\frac{t^{m-2}}{(m-2)!} V_1 + \cdots + V_{m-1}\right) e^{\lambda t} + \lambda \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} V_1 + \cdots + V_m\right) e^{\lambda t}.$$

כלומר, קיבלנו כי

$$X_m'(t) = X_{m-1}(t) + \lambda X_m(t),$$

מצד שני

$$\begin{aligned} A X_m(t) &= \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} A V_1 + \cdots + A V_m\right) e^{\lambda t} \\ &= \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \lambda V_1 + \cdots + (\lambda V_m + V_{m-1})\right) e^{\lambda t} \\ &= \lambda X_m(t) + X_{m-1}(t)\,. \end{aligned}$$

מכאן שאכן מדובר בפתרונות למשוואה. כדי להוכיח אי תלות, נניח כי

$$c_1 X_1(t) + \cdots + c_k X_k(t) = 0$$

לכל t. מכאן, שגם לאחר הכפלה משמאל במטריצה $A - \lambda I$, נקבל עדיין אפס. אך על פי הנתון, אם נעשה זאת $k-1$ פעמים, נקבל כי

$$c_k V_1 e^{\lambda t} = 0,$$

ומכאן ש-$c_k = 0$. על ידי חזרה על התהליך, נוכל לוודא כי יתר המקדמים מתאפסים גם הם, כדרוש. □

דוגמה 4.3.5. מציאת צורת ז'ורדן, המקרה הקשה

מצאו את הפתרון הכללי למשוואה

$$X'(t)=\begin{pmatrix}-3 & 3 & 0\\ -2 & -1 & 1\\ 4 & 2 & -5\end{pmatrix}X(t).$$

פתרון. נתחיל בלחפש את הערכים העצמיים של המשוואה

$$\begin{aligned}p(\lambda)&=\det\left(A-\lambda I\right)\\&=\det\begin{pmatrix}-3-\lambda & 3 & 0\\ -2 & -1-\lambda & 1\\ 4 & 2 & -5-\lambda\end{pmatrix}\\&=(-3-\lambda)\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & 1\\ 2 & -5-\lambda\end{pmatrix}-3\det\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & -5-\lambda\end{pmatrix}\\&=(-3-\lambda)\left((-1-\lambda)(-5-\lambda)-2\right)-3\left(10+2\lambda-4\right)\\&=(-3-\lambda)\left(3+6\lambda+\lambda^2\right)-6\left(\lambda+3\right)\\&=(-3-\lambda)\left(3+6\lambda+\lambda^2+6\right)\\&=-\left(3+\lambda\right)^3.\end{aligned}$$

כלומר $3=\lambda$ הוא הערך העצמי היחיד. אם נבדוק כמה וקטורים עצמיים יש למטריצה, נקבל

$$A+3I=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

כאשר ניתן לזהות כי זוג השורות התחתונות הן כפולה אחת של השניה, אך סה"כ דרגת המטריצה היא 2, וקיים וקטור עצמי יחיד. כלומר - ניתן יהיה למצוא "שרשרת" של וקטורים כנתון בטענה 4.3.3 והשרשרת תהיה מאורך 3. כדי למצוא את השרשרת, נניח שמצאנו וקטור שעבורו $(A+3I)^2V\neq 0$. שהרי, ידוע לנו שמתקיים $(A+3I)^3=0$, ולכן אם נמצא V כנ"ל ונסמן

$$U:=(A+3I)V\neq 0,\quad W:=(A+3I)^2V=(A+3I)U\neq 0,$$

נקבל כי $(A+3I)W=0$ וזוהי בדיוק השרשרת הדרושה. היות וחישבנו כבר את $A+3I$, נותר להעלות

אותה בריבוע.

$$(A+3I)^2=\begin{pmatrix}-6&6&3\\0&0&0\\-12&12&6\end{pmatrix}.$$

וקטור שלא מתאפס לאחר הפעלת המטריצה הנ"ל הוא הוקטור

$$V=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

עתה נסמן

$$U:=(A+3I)V=\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix},\quad W:=(A+3I)^2V=\begin{pmatrix}-6\\0\\-12\end{pmatrix}.$$

לכן הפתרון הכללי שלנו יהיה

$$\begin{aligned}X(t)&=c_1We^{-3t}+c_2(tW+U)e^{-3t}+c_3\left(\frac{t^2}{2}W+tU+V\right)e^{-3t}\\&=\begin{pmatrix}-6c_1e^{-3t}-6c_2te^{-3t}+c_3\left(-3t^2+1\right)e^{-3t}\\-2c_2e^{-3t}-2c_3te^{-3t}\\-12c_1e^{-3t}+c_2(-12t+4)e^{-3t}+c_3\left(-6t^2+4t\right)e^{-3t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

המתכון למקרה הלא לכסין. נפריד למקרה של מטריצות 2×2 ו-3×3.

- נניח כי $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה לא לכסינה. במקרה זה, בהכרח קיים לה ערך עצמי אחד ויחיד מריבוי אלגברי 2 וריבוי גיאומטרי 1. נסמנו ב-λ_0. היות $p(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^2$, מתקיים כי $(A-\lambda_0 I)^2=0$. עבור מטריצה כנ"ל נבחר וקטור $V\in\mathbb{R}^2$ שעבורו $(A-\lambda_0 I)V\neq 0$ (כלומר, וקטור כלשהו שאינו וקטור עצמי). לאחר מכן נגדיר $U:=(A-\lambda_0 I)V$, ונזהה כי

$$\begin{cases}(A-\lambda_0 I)V=U\\(A-\lambda_0 I)U=(A-\lambda_0 I)^2V=0.\end{cases}$$

אי לכך, על פי משפט 4.3.3, הפתרון הכללי של המד"ר יהיה

$$X(t)=c_1Ue^{\lambda_0 t}+c_2(tU+V)e^{\lambda_0 t}.$$

- נניח כי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה לא לכסינה. במקרה זה, הערכים העצמיים שלה בהכרח ממשיים, ועלינו

להפריד לשלוש מקרים אפשריים.

- נניח כי הפולינום האופייני של A מהצורה $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^3$ וגם $(A - \lambda_0 I)^2 \neq 0$. במקרה זה נבחר וקטור V שעבורו $(A - \lambda_0 I)^2 V \neq 0$. לאחר מכן, נגדיר $U := (A - \lambda_0 I) V$ וכן $W := (A - \lambda_0 I) U$, ונזהה כי

$$\begin{cases} (A - \lambda_0 I) V = U \\ (A - \lambda_0 I) U = W \\ (A - \lambda_0 I) W = (A - \lambda_0 I)^3 V = 0. \end{cases}$$

אי לכך, על פי משפט 4.3.3, הפתרון הכללי של המד"ר יהיה

$$X(t) = c_1 W e^{\lambda_0 t} + c_2 (tW + U) e^{\lambda_0 t} + c_3 \left(\frac{t^2}{2} W + tU + V\right) e^{\lambda_0 t}.$$

- נניח כי הפולינום האופייני של A מהצורה $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^3$ וגם $(A - \lambda_0 I)^2 = 0$. במקרה זה, נבחר וקטור V שעבורו $(A - \lambda_0 I) V \neq 0$ (שימו לב שהפעם אנחנו מתחילים מחזקה נמוכה יותר), ונסמן $U := (A - \lambda_0 I) V$. לאחר מכן, נמצא וקטור W שעבורו $(A - \lambda_0 I) W = 0$ שאינו תלוי בשני הוקטורים שכבר הגדרנו (מובטח לנו בזכות תוצאות מהאלגברה הליניארית שהנ"ל אפשרי), ואז הפתרון הכללי של המד"ר יהיה

$$X(t) = c_1 U e^{\lambda_0 t} + c_2 (tU + V) e^{\lambda_0 t} + c_3 W e^{\lambda_0 t}.$$

- נניח כי הפולינום האופייני של A מהצורה $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2 (\lambda - \lambda_1)$. במקרה זה נחפש וקטור V שעבורו

$$(A - \lambda_0 I)^2 V = 0, \quad (A - \lambda_0 I) V \neq 0.$$

בעזרתו נגדיר $U := (A - \lambda_0 I) V$, ואז נחפש וקטור נוסף שעבורו $(A - \lambda_1 I) W = 0$. במקרה זה הפתרון הכללי יהיה

$$X(t) = c_1 U e^{\lambda_0 t} + c_2 (tU + V) e^{\lambda_0 t} + c_3 W e^{\lambda_1 t}.$$

4.4 מישור הפאזה

הגדרה 4.4.1. עקומים במרחב ובמישור

עקום ב-$\mathbb{R}^n$ הוא פונקציה מהצורה

$$X : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

אומרים שעקום הוא **רציף/גזיר** אם x_i רציפה/גזירה לכל $i = 1,\ldots,n$. עקום מכונה **סגור** אם $X(a) = X(b)$ ו**פשוט** אם הוא חד-חד ערכי ב-(a,b).

בקורס שלנו נעבור עם המקרה הדו/תלת-ממדי בכלל. כלומר, עם עקומים מהצורה

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

דרך טובה להבין עקומים במישור/במרחב היא הסתכלות בתמונה שלהן. למשל, אם נצייר את כל הנקודות על העקום

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

נקבל את מעגל היחידה. כלומר, אם נתון חלקיק ש-$X(t)$ מתארת את מיקומו בכל רגע, הדוגמה שלעיל מתארת חלקיק שנע במעגל ברדיוס 1 סביב הראשית. בנוסף, שימו לב שניתן לדון במקרה זה גם על כיוון ההתקדמות של החלקיק (כאן, נגד כיוון השעון).

על אף שמדובר בדרך לא רעה בכלל להבין עקומים, היא לא מאוד מדויקת. הרי, גם העקום

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$$

מתאר את מעגל היחידה בתנועה נגד כיוון השעון, אך במקרה זה, לחלקיק שלנו לוקח "מחצית" מהזמן לסיים את מסלולו, כלומר מהירות תנועתו כפולה. דוגמה נוספת היא העקום

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3\pi]$$

שמתארת תנועה על מעגל היחידה נגד כיוון השעון, במהירות זהה למהירות העקום הראשון. אך הפעם, התנועה ממשיכה יותר מסיבוב אחד ומסתיימת לאחר מחצית סיבוב נוסף בנקודה אחרת מהעקום המקורי.

דוגמה 4.4.1 עקומים חשובים וידועים

להלן מספר דוגמאות חשובות וידועות לעקומים במישור.

1. **מעגלים.** העקום

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_0+R\cos(t)\\ y_0+R\sin(t)\end{pmatrix},\quad t\in[0,2\pi]$$

מתאר מעגל ברדיוס R שמרכזו (x_0,y_0) ומגמתו נגד כיוון השעון.

2. **אליפסה.** העקום

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_0+a\cos(t)\\ y_0+b\sin(t)\end{pmatrix},\quad t\in[0,2\pi]$$

הוא האליפסה בעלת צירים באורך a,b שמרכזה (x_0,y_0). כלומר, מתארת את פתרונות המשוואה

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

מגמת העקום היא נגד כיוון השעון.

3. **ישר.** הישר שעובר בנקודה (x_0,y_0) וכיוונו הוא הוקטור (a,b) הוא העקום

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_0+at\\ y_0+bt\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

בנוסף, קיימת דרך נוספת לתאר רק את החלק של הישר שיוצא מהנקודה בכיוון (a,b) (כלומר, "קדימה" מהנקודה) על ידי

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_0+ae^t\\ y_0+be^t\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

שימו לב שהנקודה (x_0,y_0) לא מתקבלת בעקום זה, אך מתקבלות כל הנקודות שיוצאות ממנה.

4.4.1 משוואות אוטונומיות ומישור הפאזה

כפי שניתן להסיק מהחלק הקודם, כל פתרון של מערכת מהצורה

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

הוא למעשה עקום גזיר ברציפות. במקרה הדו-ממדי מקבלים את המערכת

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t, x, y) \\ g(t, x, y) \end{pmatrix}.$$

במקרה כזה, לכל t_0, x_0, y_0 שבסביבתם f, g ונגזרותיהן החלקיות (לפי x, y) רציפות, מקבלים עקום יחיד שעובר בזמן t_0 בנקודה (x_0, y_0). יחד עם זאת, שימוש במישור כדי לצייר את עקומי הפתרונות יכול להיות בעייתי.

דוגמה 4.4.2 עקומים נחתכים

מצאו את הפתרונות של המערכת

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix},$$

עם תנאי ההתחלה

1. $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.
2. $(x(1), y(1)) = (0, 0)$.

פתרון. על ידי אינטגרציה למשוואה הראשונה נקבל

$$x'(t) = t \Longrightarrow x(t) = \frac{t^2}{2} + C.$$

לאחר מכן נציב במשוואה השניה ונקבל

$$y'(t) = x(t) = \frac{t^2}{2} + C \longrightarrow y(t) = \frac{t^3}{6} + Ct + D.$$

1. עבור תנאי ההתחלה הראשונה נקבל $C = D = 0$ ואת הפתרון

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^3}{6} \end{pmatrix}.$$

2. עבור תנאי ההתחלה השני נקבל $C=-\frac{1}{2}, D=\frac{1}{3}$ ואת הפתרון

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{t^3}{6}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

□

בדוגמה האחרונה רואים שיתכנו שני עקומים שונים לגמרי שעוברים באותה נקודה (רק בזמנים שונים). היות והציור של פתרונות אלה במישור כולל רק את צירי x, y, אי אפשר להבין שמדובר בשני פתרונות שונים לחלוטין. יחד עם זאת, בהמשך הפרק נטפל במשוואות מיוחדות שבהן תופעה כזאת לא תקרה. אנחנו ננסח את כל הבעיות שלעיל למקרה של $n=2$, אך את הרבה מהתוצאות ניתן להכליל יחסית בקלות גם לממדים גבוהים יותר.

הגדרה 4.4.2. משוואות אוטונומיות

מערכות משוואות מהצורה

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

מכונה **משוואה אוטונומית**.

הייחוד של משוואות אוטונומיות הוא שכל הפתרונות שנראים "אותו דבר" במישור xy, חייבים להיות אותו הפתרון עד כדי הזזה בזמן.

טענה 4.4.1. פתרונות מוזזים בזמן

נניח כי $f(x,y), g(x,y)$ פונקציות רציפות כך שנגזרותיהן החלקיות רציפות, ויהא $(x(t), y(t))$ פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

אזי

- לכל $t_0 \in \mathbb{R}$, גם הפונקציה $(x_2(t), y_2(t)) := (x(t-t_0), y(t-t_0))$ פתרון של המערכת.
- אם $(x_2(t), y_2(t))$ פתרון של המערכת כך שמתקיים $(x_2(t_2), y_2(t_2)) = (x(t_1), y(t_1))$, אזי
$$(x_2(t), y_2(t)) = (x(t-(t_2-t_1)), y(t-(t_2-t_1))).$$
כלומר, לשני העקומים יש בדיוק את אותה התמונה.

הוכחה. נוכיח את שני החלקים של הטענה לפי הסדר.

- אם $t_0 \in \mathbb{R}$ נתון, אזי

$$\begin{pmatrix} x_2'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x(t-t_0))' \\ (y(t-t_0))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t-t_0) \\ y'(t-t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x(t-t_0), y(t-t_0)) \\ g(x(t-t_0), y(t-t_0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_2, y_2) \\ g(x_2, y_2) \end{pmatrix}.$$

במילים אחרות, (x_2, y_2) אכן פתרון של המערכת.

- נשים לב שעל פי הסעיף הקודם, הפונקציה

$$(x(t-(t_2-t_1)), y(t-(t_2-t_1)))$$

היא פתרון נוסף של המד"ר, המקיים את אותו תנאי ההתחלה כמו (x_2, y_2) בזמן t_2. על פי הנתון, מתקיימים כל תנאי המשפט לקיום ויחידות של פתרון למערכת, ומכאן שמתקיים שוויון בין שתי הפונקציות, כדרוש.

□

כלומר, כאשר דנים במשוואות אוטונומיות, ניתן לומר שבכל נקודה (x_0, y_0) במישור עובר בדיוק פתרון אחד של המערכת, עד כדי הזזה שלו בזמן. במילים אחרות, כל שני פתרונות של המד"ר שאינם הזזה בזמן אחד של השני יצרו תמונות זרות במישור.

הגדרה 4.4.3. מישור הפאזה, תמונת הפאזה

עבור מערכת משוואות אוטונומית כפי שנתון בהגדרה 4.4.2, אוסף כל התמונות של עקומי הפתרונות מכונה בשם **תמונת הפאזה** של המערכת. המישור שבו מציירים את תמונת הפאזה מכונה **מישור הפאזה**.

4.4.2 נקודות קריטיות ומשוואות במקדמים קבועים

הגדרה 4.4.4. נקודה קריטית למערכת אוטונומית

תהא מערכת משוואות אוטונומית עם קיום ויחידות כנתון בהגדרה 4.4.2. נקודה (x_0, y_0) שעבורה

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$$

מכונה **נקודה קריטית של המערכת**.

טענה 4.4.2. פתרונות בנקודה קריטית

תהא (x_0, y_0) נקודה קריטית של מערכת משוואות אוטונומית עם קיום ויחידות כנתון בהגדרה 4.4.2. אזי, הפונקציה

$$(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$$

היא פתרון של המערכת שמתאר נקודה קבועה במישור.

הוכחת הטענה מידית מהצבה במערכת המד"ר.

קירוב ההתנהגות בנקודה קריטית. נניח כי (x_0, y_0) נקודה קריטית של מערכת מד"ר אוטונומית עם קיום ויחידות. היות ו-f, g בהכרח גזירות בנקודה (x_0, y_0), ניתן לכתוב בסביבת הנקודה

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$g(x, y) \approx g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

היות והערכים של הפונקציה בנקודה מתאפסים, נקבל כי ניתן לקרב את המד"ר בסביבת הנקודה הקריטית על ידי

$$\begin{pmatrix} (x - x_0)'(t) \\ (y - y_0)'(t) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

ובמילים אחרות, מערכת אוטונומית מתנהגת ליד כל נקודה קריטית כמו מערכת מד"ר במקדמים קבועים. היות ואנחנו יודעים לפתור מערכות כנ"ל, אנחנו יודעים גם לתאר את תמונת הפאזה שלהן, ומכאן שגם לקרב את תמונת הפאזה של כל מערכת אוטונומית בסביבת נקודה קריטית.

4.4.3 תמונת הפאזה של מערכת במקדמים קבועים

בפרק זה נדון בתמונת הפאזה של מערכת מד"ר במקדמים קבועים מממד 2 בלבד. הסיבה העיקרית היא שתמונת הפאזה של מערכת כזו מובנת לנו היטב וניתן לחקור אותה ואת היציבות של הפתרונות שלה בצורה מאוד יעילה. מתברר שעבור המערכת

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

ניתוח תמונת הפאזה יתחלק לשלושה מקרים.

1. המקרה שבו המטריצה לכסינה ובעלת ערכים עצמיים ממשיים.
2. המקרה שבו המטריצה לכסינה ובעלת ערכים עצמיים מרוכבים.
3. המקרה שבו המטריצה לא לכסינה (ואז הערכים העצמיים שלה בהכרח ממשיים).

נצייר תמונת הפאזה בכל אחד מהמקרים הבאים.

1. **מטריצה לכסינה ובעלת ערכים עצמיים ממשיים.** נניח כי $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ הם הערכים העצמיים של המטריצה ו-V_1, V_2 הם הוקטורים העצמיים המתאימים להם. במקרה זה הפתרון הכללי של המערכת יראה כך

$$X(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}.$$

(א) **תמונת פאזה מסוג אוכף.** נניח כי $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. במקרה זה ניתן לזהות את 4 הפתרונות

$$X^1_{\pm}(t) = \pm V_1 e^{\lambda_1 t}, \quad X^2_{\pm}(t) = \pm V_2 e^{\lambda_2 t}.$$

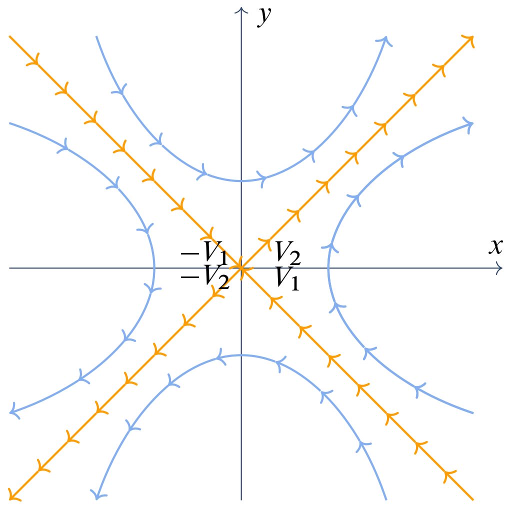
במקרה הראשון מקבלים קווים ישרים שכיוונם $\pm V_1$, ומגמת התנועה שלהם היא לתוך הראשית. זאת משום שכאשר $t \to \infty$ שני הפתרונות שואפים לראשית וכאשר $t \to -\infty$ הפתרונות מתרחקים מהראשית. באופן דומה, המקרה השני הוא שני קווים ישרים שכיוונם $\pm V_2$ אך מגמת ההתקדמות שלהם היא החוצה מהראשית, כמודגם באיור 4.1 שלעיל. עבור פתרונות כללים אחרים נזהה שכאשר t גדול מאוד, הביטוי

$$c_1 V_1 e^{\lambda_1 t}$$

הופך לקטן מאוד, ולכן הפתרון שלנו יהיה קרוב יותר ויותר לישר $c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}$. כאשר t הולך וקטן, הביטוי $c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}$ הופך לקטן מאוד ולכן פהתרון שלנו יהיה קרוב יותר ויותר לישר $c_1 V_1 e^{\lambda_1 t}$. המחשה של פתרונות לדוגמה שאינם ישרים מופיעה גם כן באיור 4.1 שלעיל. מתמונה זו ניתן ללמוד שהפתרונות של מערכת עם תמונת אוכף אינם יציבים.

(ב) **תמונת פאזה מסוג צומת** נניח כי $0 > \lambda_2 > \lambda_1$. במקרה זה נוכל לזהות עדיין את הקווים הישרים בכיווני $\pm V_1, \pm V_2$ כפתרונות של המד"ר. הפעם, בניגוד לתמונת האוכף - שני הישרים פונים החוצה מהראשית. עבור פתרון כללי אחר, נפריד לשני תחומים

- כאשר $t \to \infty$ כל פתרונות המד"ר פונים הרחק מהראשית. יחד עם זאת, האיבר $e^{\lambda_1 t}$ גדול בהרבה מהאיבר $e^{\lambda_2 t}$. לכן, הפתרונות יתרחקו מהראשית תוך כדי שהכיוון שלהם הופך דומה יותר ויותר לישר $c_1 V_1 e^{\lambda_1 t}$.
- כאשר $t \to -\infty$ כל פתרונות המד"ר שואפים לראשית. יחד עם זאת, האיבר $e^{\lambda_2 t}$ גדול בהרבה מהאיבר $e^{\lambda_1 t}$ ולכן הפתרונות ישאפו לראשית תוך כדי שהכיוון שלהם יהיה דומה יותר ויותר לישר $c_2 V_2 e^{\lambda_2 t}$.



איור 4.1: המחשה לתמונת פאזה מסוג אוכף.

שימו לב שגם כאשר $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ מתקבלת תמונת צומת, אלא שכיווני החיצים הם בדיוק הפוכים ביחס לכיוונם במקרה החיובי (כמומחש באיור 4.2). במקרה החיובי נקרא לצומת **לא יציבה** כי כל הפתרונות שלה לא יציבים ב-$t \to \infty$, ובמקרה השלילי נקרא לצומת **יציבה** כי כל הפתרונות שלה יציבים אסימפטוטית כאשר $t \to \infty$.

(ג) **תמונת פאזה מסוג כוכב.** אם נניח כי $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$, נקבל כי הפתרון הכללי הוא מהצורה

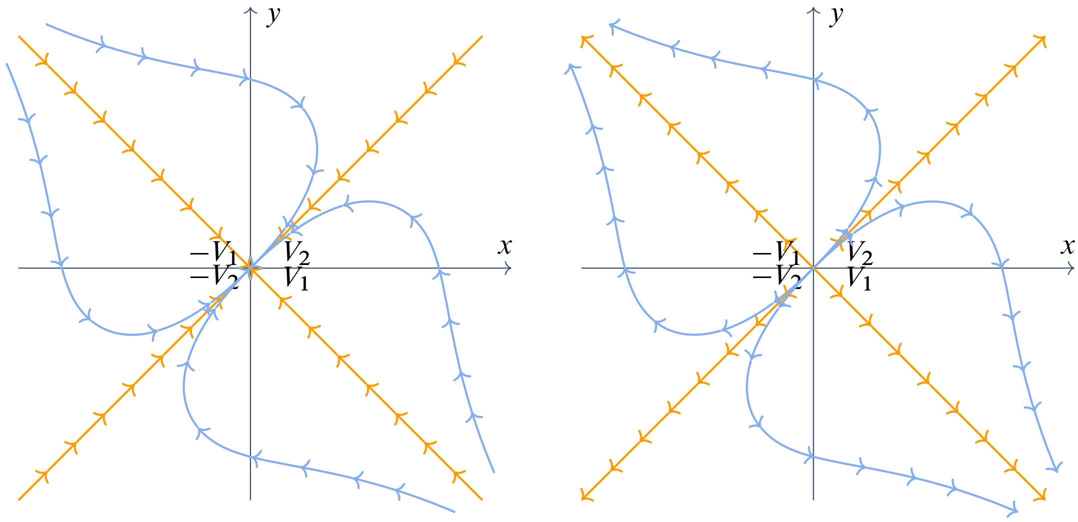
$$X(t) = e^{\lambda t}\left(c_1 V_1 + c_2 V_2\right).$$

היות ו-V_1, V_2 קבוצה בת"ל ב-$\mathbb{R}^2$, נסיק כי $c_1 V_1 + c_2 V_2$ יכול להיות כל וקטור שנרצה ב-$\mathbb{R}^2$, ולכל בחירה של וקטור כנ"ל, העקום שמתקבל הוא קו ישר. כלומר, בתמונת כוכב כל הפתרונות הם קווים ישרים שיוצאים מהראשית, ואם $\lambda < 0$, הקווים שואפים לראשית. במקרה הראשון כל הפתרונות לא יציבים (ב-$t \to \infty$) ובמקרה השני כל הפתרונות יציבים אסימפטוטית (ב-$t \to \infty$). המחשה לתמונת הפאזה באיור 4.3 שלעיל.

2. **מטריצה לכסינה ובעלת ערכים עצמיים מרוכבים.** נניח כי $\lambda = \alpha \pm \beta i$ הם ערכים עצמיים מרוכבים של המטריצה ו-V הוא וקטור עצמי של הערך העצמי $\alpha + \beta i$. אזי, הווקטור $\bar{V}$ הוא וקטור עצמי של הערך העצמי $\alpha - \beta i$ והפתרון הכללי יהיה מהצורה

$$X(t) = c_1 \mathfrak{Re}\left(V e^{\alpha t} e^{\beta i t}\right) + c_2 \mathfrak{Im}\left(V e^{\alpha t} e^{\beta i t}\right).$$

בשלב הבא נפריד לשני מקרים.



איור 4.2: המחשה לתמונת פאזה מסוג צומת לא יציבה (מימין) וצומת יציבה (משמאל).

(א) **תמונת פאזה מסוג מרכז.** אם $\alpha = 0, \beta \neq 0$, כל פתרונות המשוואה הם מהצורה

$$X(t) = V\cos(\beta t) + U\sin(\beta t),$$

כאשר V, U משקללים בתוכם כבר את הקבועים c_1, c_2. כדי להבין כיצד מתנהג הפתרון נשים לב שמדובר בפתרון מחזורי ובפרט חסום. יתרה מכך, אם V, U לא שניהם אפס, הפתרון לא עובר אף פעם בראשית וגם לא מתקרב לראשית. כאשר $t = 0, \pi$ הפתרון שלנו עובר בנקודות V ו-$-V$, וכאשר $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ הפתרון שלנו עובר ב-U ו-$-U$. ניתן להוכיח (ולא נעשה זאת במפורש כאן), שמדובר באליפסה שמרכזה ראשית הצירים והצירים הראשיים שלה הם הוקטורים V, U.
כדי לקבוע את כיוון ההתקדמות על האליפסה נציב ערך כלשהו של t במד"ר ונקבל כי הערך

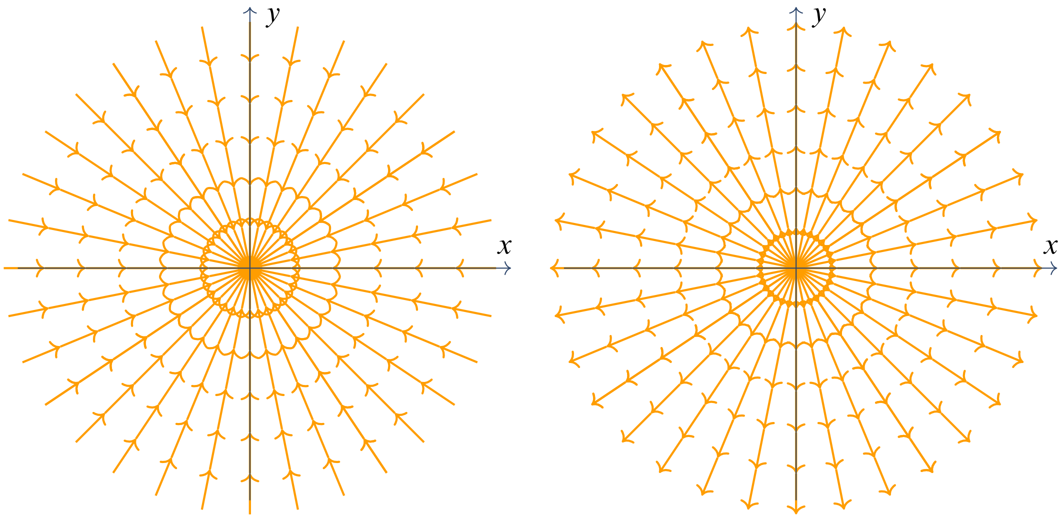
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

קובע את כיוון ההתקדמות בנקודה $(x(t), y(t))$. על ידי שימוש בנקודה זו נוכל לזהות את מגמת ההתקדמות של האליפסה. הפתרונות של תמונת הפאזה מסוג מרכז כולם יציבים אך לא יציבים אסימפטוטית כאשר $t \to \pm\infty$, והם מומחשים באיור 4.4 שלעיל.

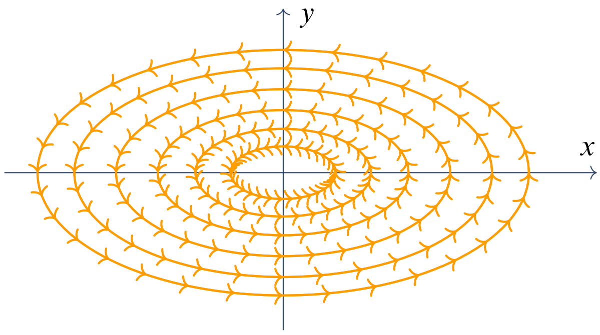
(ב) **תמונת פאזה מסוג ספירלה.** אם $\alpha > 0, \beta \neq 0$, כל פתרונות המשוואה הם מהצורה

$$X(t) = e^{\alpha t}\left(V\cos(\beta t) + U\sin(\beta t)\right).$$

כלומר, מתקבל פתרון שמתנהג כמו אליפסה (בגלל החלק שבתוך הסוגריים), אך הגורם $e^{\alpha t}$



איור 4.3: המחשה לתמונת פאזה מסוג כוכב יציב (משמאל) וכוכב לא יציב (מימין).

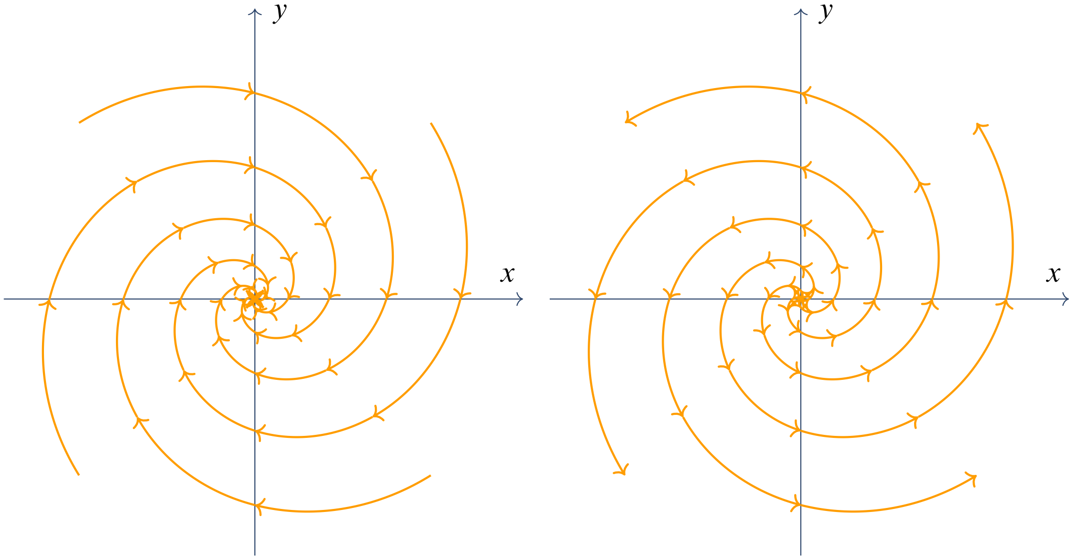


איור 4.4: המחשה לתמונת פאזה מסוג מרכז.

מבחוץ גורם לפתרון להתרחק מהראשית תוך כדי סיבוב ללא הגבלה ככל ש-t גדל. אותו גורם מוביל להתקרבות של הפתרון לראשית כאשר t הולך וקטן. מגמת הסיבוב גם היא נקבעת בדומה לאליפסה, על סמך נקודה בודדת. שימו לב שכאשר $\alpha < 0$ מקבלים תמונה דומה שמגמת ההתקדמות שלה היא אל הראשית. במקרה הראשון מקבלים פתרונות לא יציבים, ובמקרה השני מקבלים פתרון יציבים, כמומחש באיור 4.5.

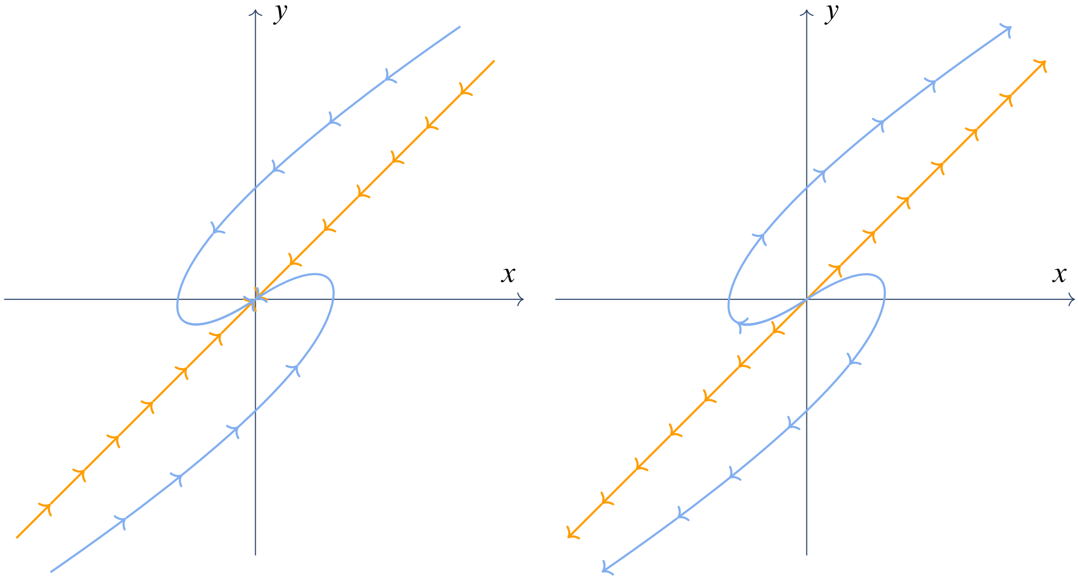
3. **מטריצה שאינה לכסינה.** ראינו בחלק הקודם כי אם מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ אינה לכסינה, יש לה בהכרח ערך עצמי יחיד וממשי λ. אנחנו נדון במקרה שבו הע"ע שונה מאפס ונשאיר כנקודה למחשבה את המקרה המנוון שבו $\lambda = 0$. במקרה שלעיל הפתרון הכללי הוא מהצורה

$$X(t) = c_1 V_1 e^{\lambda t} + c_2 \left(t V_1 + V_2\right) e^{\lambda t}.$$



איור 4.5: המחשה לתמונת פאזה מסוג ספירלה לא יציבה (מימין) וספירלה יציבה (משמאל).

במקרה שלעיל ניתן לזהות עדיין פתרונות בצורת שני הקווים הישרים $\pm V_1$, אך הפעם הפתרון הנוסף לא מותיר לנו קו ישר אלא צורה מעט שונה. לכן, מעבר לקו הישר היחיד שמצאנו, נדון ישירות בפתרון הכללי של המשוואה. אם $\lambda > 0$ ו-t גדל מאוד, אנחנו מקבלים כי האיבר הדומיננטי ביותר בפתרון הוא $c_2 t V_1 e^{\lambda t}$, ולכן הפתרון יראה בערך כמו הקו הישר הנ"ל. כאשר t הולך וקטן, המעריך של שני החלקים של הפתרון שואף לאפס, אך עדיין, החלק הגדול יותר באופן יחסי הוא עדיין $-c_2 t V_1 e^{\lambda t}$ (אותו ישר רק בכיוון ההפוך). כאשר $t = 0$ אנחנו מקבלים את הנקודה $c_1 V_1 + c_2 V_2$ שהיא יכולה להיות כל נקודה שהיא ב-$\mathbb{R}^2$ בהתאם לבחירת הערכים של c_1, c_2. לכן, ניתן לומר שכל הפתרונות של המשוואה מתחיל מכיוון $\pm V_1 e^{\lambda t}$ כאשר $t \to -\infty$ ובורחים מהראשית תוך "סיבוב" לישר $\mp V_1 e^{\lambda t}$, כמודגם באיור שלעיל. שימו לב שבמידה וקיים קושי בזיהוי כיוון הסיבוב, ניתן להשתמש שוב בשיטה של האליפסה כדי לזהות את כיוון ההתקדמות בנקודת התחלה כלשהי. כמובן שכאשר $\lambda < 0$ מקבלים את אותה התמונה בהיפוך כיווני החיצים (ובמקרה זה התמונה תהיה יציבה, כאשר במקרה החיובי התמונה לא יציבה). הנ"ל מודגם כמובן באיור 4.6 שלעיל.



איור 4.6: המחשה לתמונת פאזה מסוג צומת מנוונת.

5
תורת שטורם ליוביל

5.1 מוטיבציה ומבוא

משוואת לפלס היא משוואה שמתארת את הפוטנציאל החשמלי במרחב בהנתן שאין בו מטענים. המשוואה, בקואורדינטות פולריות, מקבלת את הצורה

$$\Delta\varphi\left(r,\theta\right)=\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}\varphi}{\partial\theta^{2}}=0.$$

לפתור את המשוואה הזאת יכולה להיות משימה מאוד קשה. דרך טובה היא לחפש פתרונות מצורה נוחה יותר, למשל מהצורה

$$\varphi\left(r,\theta\right)=R(r)\Theta(\theta).$$

אם נניח שפונקציה כזאת באמת פותרת את המשוואה, נוכל להציב אותה למשוואה ולקבל כי

$$\Delta\varphi\left(r,\theta\right)=R''\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)+\frac{1}{r}R'\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)+\frac{1}{r^{2}}\Theta''(\theta)=0.$$

על ידי סידור מחדש של המשוואה, נוכל לכתוב

$$\frac{r^{2}R''(r)+rR'(r)}{R\left(r\right)}=\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

קיבלנו תוצאה מאוד מוזרה. הרי, האגף הימני הוא פונקציה שתלויה ב-θ בלבד והאגף השמאלי הוא פונקציה שתלויה ב-r בלבד. הדרך היחידה שבה שוויון כזה אפשרי - היא אם שני האגפים הם פונקציות קבועות. כלומר, קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ שעבורו

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta\left(\theta\right)}=\lambda\Longrightarrow\Theta''(\theta)-\lambda\Theta\left(\theta\right)=0.$$

המשוואה שקיבלנו היא משוואה יחסית פשוטה עבור הפונקציה הזוויתית, אך היות והיא פונקציה של הזווית, ההגיון הפיזיקלי הוא שהיא תהיה מחזורית ב-2π, כלומר

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}.$$

כלומר, הצורך הפיזיקלי הוביל אותנו לתנאי נלווה למשוואה שהוא לא בדיוק תנאי התחלה, כי הוא לא מחושב באותה הנקודה, אלא מקשר את שתי נקודות הקצה של הפונקציה. יתרה מכך, לא ברור כלל מהו הערך ה"קבוע" של λ. בפרק זה נעסוק בהכללה בבעיות מהסוג האחרון שקיבלנו.

הגדרה 5.1.1 אופרטור שטורם-ליוביל

אופרטור דיפרנציאלי מהצורה

$$L[y] = -\left(p(x)y'\right)' - q(x)y$$

כאשר $p(x)$ גזירה ברציפות וחיובית ממש ו-$q(x)$ רציפה, מכונה **אופרטור שטורם ליוביל**.

בעזרת אופרטור שטורם-ליוביל, נציג זוג בעיות שנעסוק בהן בפרק זה.

הגדרה 5.1.2 בעיית שטורם-ליוביל רגולרית

יהא $L[y]$ אופרטור שטורם-ליוביל. **בעיית שטורם-ליוביל רגולרית** היא בעיה מהצורה

$$\begin{cases} L[y] = -(p(x)y')' - q(x)y = \lambda r(x)y \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \end{cases},$$

כאשר $r(x)$ פונקציה רציפה וחיובית בקטע $[a,b]$, λ פרמטר לא ידוע וכן

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \quad \gamma^2 + \delta^2 = 0.$$

פתרון של הבעיה הוא ערך λ שעבורו לבעיה קיים פתרון y **שאינו פונקציית האפס**. במקרה כזה אומרים ש-λ הוא **ערך עצמי** של הבעיה ופתרון y כנ"ל מכונה **פונקציה עצמית** של ערך זה.

לפונקציה $r(x)$ בבעיה קוראים גם בשם **פונקציית משקל**.

הגדרה 5.1.3. בעיית שטורם-ליוביל מחזורית

יהא $L[y]$ אופרטור שטורם-ליוביל. **בעיית שטורם-ליוביל מחזורית** היא בעיה מהצורה

$$\begin{cases} L[y] = -(p(x)y')' - q(x)y = \lambda r(x)y \\ y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases},$$

כאשר $r(x)$ פונקציה רציפה וחיובית בקטע $[a,b]$, λ פרמטר לא ידוע. גם כאן, **פתרון** הוא ערך λ שעבורו קיים פתרון לא טריוויאלי למשוואות, ואמרים כי ערך זה הוא ערך עצמי של הבעיה עם פונקציה עצמית מתאימה y.

5.2 הערכים העצמיים של בעית שטורם ליוביל

בסוף חלק זה נציין ללא הוכחה זוג משפטים חשובים המספקים מידע שימושי ופשוט אודות בעיית שטורם ליוביל הרגולרית והמחזורית. תחילה, נראה כי ניתן להמיר כל משוואה ליניארית מסדר 2 למשוואה בצורת שטורם ליוביל.

טענה 5.2.1. מעבר לאופרטור שטורם-ליוביל

קיימת פונקציה חיובית הממירה את בעיית הערכים העצמיים

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = -\lambda y$$

לבעיית שטורם-ליוביל.

הוכחה. האיבר שמאפיין את בעיית שטורם-ליוביל הוא האיבר $(p(x)y')'$, ולכן נחפש פונקציה $\mu(x)$ שעבורה

$$\mu(x)y'' + \mu(x)a_1(x)y' = \left(\mu(x)y'\right)' = \mu(x)y'' + \mu'(x)y'$$

אך זוהי בדיוק הפונקציה $\mu(x) = e^{\int a_1(x)\mathrm{d}x}$ (שהיא אכן פונקציה חיובית). כלומר, המשוואה שקולה למשוואה

$$-\left(e^{\int a_1(x)\mathrm{d}x}y'\right)' - a_2(x)e^{\int a_1(x)\mathrm{d}x}y = \lambda e^{\int a_1(x)\mathrm{d}x}y,$$

ובמקרה זה פונקציית המשקל המתאימה היא $r(x) = e^{\int a_1(x)\mathrm{d}x}$. ☐

בשלב הזה שבו הבנו שכל בעיית ערכים עצמיים מסדר 2 היא למעשה בעיית שטורם-ליוביל, נעבור לדון בערכים העצמיים של אופרטור זה, ולשם כך נתחיל בזהות הבאה.

טענה 5.2.2. זהות לגראנז'

תהיינה u, v פונקציות גזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a, b]$ ויהיו L אופרטור שטורם-ליוביל. אזי

$$uL[v] - vL[u] = \left(p(u'v - uv')\right)'.$$

הוכחה. נבצע חישוב מפורש

$$\begin{aligned} uL[v] - vL[u] &= u\left(-(pv')' - qv\right) - v(-(pu')' - qu) \\ &= u\left(-pv'' - p'v' - qv\right) - v\left(-pu'' - p'u' - qu\right) \\ &= -puv'' - p'uv' - quv + pvu'' + p'vu' + qvu \\ &= pvu'' + pv'u' - puv'' - pu'v' + p'\left(u'v - v'u\right) \\ &= p\left(u'v - vu'\right)' + p'\left(u'v - v'u\right) \\ &= \left(p\left(u'v - v'u\right)\right)' \end{aligned}$$

כפי שרצינו להראות. $\square$

בעזרת זהות זו ניתן להתחיל להתקדם בחקירת בעיית שטורם-ליוביל הרגולרית.

טענה 5.2.3. זהות גרין לבעיה רגולרית

יהיו u, v פונקציות גזירות ברציפות פעמיים המקיימות את תנאי השפה של בעיית שטורם-ליוביל הרגולרית מהגדרה 5.1.2. אזי

$$\int_a^b u(x)L[v](x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b v(x)L[u](x)\,\mathrm{d}x.$$

הוכחה. על פי זהות לגראנז' (טענה 5.2.2), מתקיים

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)L[v](x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b v(x)L[u](x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b u(x)L[v](x) - v(x)L[u](x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(p(x)\left(u'(x)v(x) - v'(x)u(x)\right)\right)'\mathrm{d}x \\ &= p(b)\left(u'(b)v(b) - v'(b)u(b)\right) \\ &\quad - p(a)\left(u'(a)v(a) - v'(a)u(a)\right). \end{aligned}$$

אם נצליח להוכיח שהביטוי האחרון מתאפס, נקבל את הדרוש. לשם כך, נשים לב כי

$$u'(b)v(b)-v'(b)u(b)=-\det\begin{pmatrix}u(b) & u'(b)\\ v(b) & v'(b)\end{pmatrix},$$
$$u'(a)v(a)-v'(a)u(a)=-\det\begin{pmatrix}u(a) & u'(a)\\ v(a) & v'(a)\end{pmatrix}.$$

כדי להוכיח שהדטרמיננטה מתאפסת, מספיק שנראה שיש וקטור שונה מאפס שנמצא בגרעין שלה. ואכן, עבור תנאי השפה, מתקיים

$$\begin{pmatrix}u(b) & u'(b)\\ v(b) & v'(b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}u(a) & u'(a)\\ v(a) & v'(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

ומכאן שהדטרמיננטה מתאפסת, כדרוש. □

הגדרה 5.2.1. מרחב המועמדות לפתרון

תהא $r:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחיובית. לכל זוג פונקציות רציפות $u,v:[a,b]\to\mathbb{C}$ (לאו דווקא ממשיות) בקטע $[a,b]$, הפונקציה

$$\langle u,v\rangle_r:=\int_a^b u(x)\bar{v}(x)r(x)\,\mathrm{d}x$$

מכונה **המכפלה הפנימית הסטנדרטית עם משקל r**. זוהי מכפלה פנימית מעל מרחב הפונקציות הרציפות.

המשמעות של מכפלה פנימית (כתזכורת מהקורס באלגברה ליניארית) היא מעין הכללה למכפלה הסקלרית בין וקטורים. היא מקיימת את התכונות הבאות:

- $\langle u,u\rangle_r\geq 0$ לכל u רציפה ושוויון מתקיים אם ורק אם $u=0$.
- $\langle u,v\rangle_r=\overline{\langle v,u\rangle_r}$ לכל u,v רציפות.
- $\langle\lambda u_1+u_2,v\rangle=\lambda\langle u_1,v\rangle+\langle u_2,v\rangle$ לכל u_1,u_2,v רציפות ו-$\alpha\in\mathbb{C}$.
- $|\langle u,v\rangle_r\langle|\leq\sqrt{\langle u,u\rangle_r}\sqrt{\langle v,v\rangle_r}$ לכל u,v רציפות.

הביטוי $\sqrt{\langle u,u\rangle_r}$ מוגדר להיות הגודל של הוקטור u ביחס למכפלה פנימית זו (ולפונקציה קוראים בשם **נורמה**), אך כל התכונות הללו מאפשרות להגדיר (מעבר לאורך של וקטורים) זווית בין וקטורים. כלומר, בהנתן u,v

רציפות, נגדיר

$$\angle(u,v)=\arccos\left(\left|\frac{\langle u,v\rangle_r}{\sqrt{\langle u,u\rangle_r}\sqrt{\langle v,v\rangle_r}}\right|\right).$$

ובפרט, מקבלים כי אם $\langle u,v\rangle_r=0$, הזווית היא $\frac{\pi}{2}$, ונאמר כי הפונקציות **אורתוגונליות** ביחס למכפלה הפנימית הנתונה.

טענה 5.2.4. ערכים עצמיים ממשיים

נניח כי u פונקציה עצמית של ערך עצמי λ לבעיה 5.1.2. אזי $\lambda\in\mathbb{R}$.

הוכחה. נניח כי $L[u]=\lambda r(x)u$ ו-u מקיימת את תנאי השפה. אזי

$$L[\bar{u}]=\overline{L[u]}=\overline{\lambda r(x)u}=\bar{\lambda}r(x)\bar{u}.$$

כלומר, $\bar{u}$ פונקציה עצמית של הערך העצמי $\bar{\lambda}$. עתה

$$\lambda\langle u,u\rangle_r=\int_a^b(\lambda r(x)u(x))\,\bar{u}(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b L[u](x)\,\bar{u}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

עתה, נשתמש בזהות גרין מטענה 5.2.3 כדי לכתוב

$$=\int_a^b u(x)\,L[\bar{u}](x)\,\mathrm{d}x=\bar{\lambda}\langle u,u\rangle_r.$$

היות ו-$\langle u,u\rangle_r$ חיובית, נסיק כי בהכרח $\lambda=\bar{\lambda}$, והערך העצמי אכן ממשי. □

שימו לב שניתן תמיד להניח שיש גם פונקציה עצמית ממשית. הרי, אם u פונקציה עצמית של הערך העצמי $\lambda\in\mathbb{R}$, גם $\bar{u}$ פונקציה עצמית של אותו הערך, ומכאן שגם $\frac{u-\bar{u}}{2i}$, $\frac{u+\bar{u}}{2}$, שהן פונקציות ממשיות (ולפחות אחת מהן לא אפס).

משפט 5.2.1. אורתוגונליות פתרונות לע"ע שונים

תהיינה u,v פונקציות עצמיות של ערכים עצמיים $\mu\neq\lambda$ לבעיה 5.1.2. אזי, u,v מאונכות ביחס למכפלה הפנימית 5.2.1.

הוכחה. על פי הנתון, מתקיים $L[u]=\lambda ru$ ו-$L[v]=\mu rv$. אפשר להניח גם שמדובר בפונקציות ממשיות

על פי ההערכה בסוף הטענה הקודמת. אי לכך, על ידי שימוש בזהות גרין מטענה 5.2.3 כדי לכתוב

$$\mu\langle u, v\rangle_r = \int_a^b u(x)\,(\mu v(x))\, r(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x) L\,[v]\,(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b L\,[u]\,(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\langle u, v\rangle_r .$$

היות והערכים העצמיים שונים, מצב כזה יתכן אם ורק אם $\langle u, v\rangle_r = 0$, כלומר הפונקציות אכן מאונכות כדרוש. □

את החלק האחרון נציג ללא הוכחה (שכן היא הוכחה ארוכה שהכלים שלה חורגים למדי מהצרכים של הקורס), אך הוא המשפט המסכם של פרק זה.

משפט 5.2.2. הערכים העצמיים של בעיית שטורם-ליוביל הרגולרית

עבור הבעיה 5.1.2, הערכים העצמיים הם סדרה $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ עבורה

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

כמו כן, כל הערכים העצמיים פשוטים (כלומר, קיימת פונקציה עצמית אחת עד כדי הכפלה בקבוע) ולכל $n = 0, 1, 2, \ldots$, הפונקציה העצמית y_n של הערך העצמי λ_n מתאפסת בקטע (a, b) **בדיוק** n פעמים.

הערות.

- בעזרת הוכחות דומות, ניתן להוכיח שגם לבעיה 5.1.3 קיימת סדרת ערכים עצמיים $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית עולה ממש לאינסוף. ההבדל בין הבעיות הוא שבבעיה המחזורית, הערך העצמי λ_0 מריבוי 1, בעוד יתר הערכים העצמיים מריבוי 2. בנוסף, הפונקציות y_n, z_n של הערך העצמי $\lambda_n,\ n > 0$ מתאפסות בדיוק פעם אחת בקטע (a, b).

- לבעיה הרגולרית 5.1.2 כל הערכים העצמיים חיוביים למעט כמות סופית של ערכים עצמיים. אי לכך, נהוג להתחיל בלחפש ערכים עצמיים חיוביים (או גדולים מערך מסויים). על מנת להבין האם חסרות פונקציות עצמיות/ערכים עצמיים, בודקים את הפונקציה עם הערך העצמי הקטן ביותר שמצאנו עד כה, וסופרים את כמות האפסים שלה בקטע הפתוח. על פי משפט 5.2.2, אם הפונקציה שבדקנו מתאימה לערך העצמי הראשון, היא לא תתאפס בקטע הפתוח. אם היא מתאפסת, נסיק שפספסנו בהכרך ערכים עצמיים אחרים, ונחפש אותם במפורש.

דוגמה 5.2.1 דוגמה למציאת ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות

תבו את הבעיה הרגולרית

$$\begin{cases} -y'' + 2y' = \lambda y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

בצורה של אופרטור שטורם ליוביל, ומצאו את הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות שלה. ודאו כי הפונקציות העצמיות אכן מאונכות זו לזו.

פתרון. תחילה נכתוב

$$y'' - 2y' = -\lambda y$$

ועל ידי הכפלה ב-$\mu(x) = e^{\int -2\mathrm{d}x} = e^{-2x}$ מקבלים את המשוואה

$$\left(e^{-2x}y'\right)' = -\lambda e^{-2x}y.$$

כלומר, פונקציית המשקל המתאימה לבעיה זו היא $r(x) = e^{-2x}$ שהיא כן פונקציה חיובית בקטע. עתה, כדי למצוא ערכים עצמיים נשים לב שלכל $\lambda \in \mathbb{R}$, מקבלים מד"ר ליניארית במקדמים קבועים

$$y'' - 2y' + \lambda y = 0$$

שהפולינום האופייני שלה הוא $p(r) = r^2 - 2r + \lambda$. שורשי הפולינום הם

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\lambda}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda}.$$

בבירור ישנה הפרדה למקרים על פי הסימן של $1 - \lambda$. היות ורוב הערכים העצמיים חיוביים, נתחיל מהמקרה שבו $\lambda > 1$. במקרה זה מקבלים כי $1 - \lambda < 0$ ולכן אם נסמן $\mu = |1 - \lambda|$, נוכל לכתוב

$$1 - \lambda = -\mu^2.$$

כלומר, שורשי הפולינום האופייני במקרה זה יהיו $r = 1 \pm mui$, ולכן הפתרון הכללי של משוואה זו הוא

$$y(x) = Ae^x \cos(\mu x) + Be^x \sin(\mu x).$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל כי אם $y(0) = 0$, אזי בהכרח $A = 0$, ואם $y(1) = 0$ נקבל

$$Be \sin(\mu) = 0.$$

זה אפשרי כמובן אם ורק אם $\mu = \pi n$ עבור $n = 1, 2, \ldots$. אי לכך הערכים העצמיים הגדולים מ-1 הם כולם

מהצורה

$$1-\lambda_n=-\mu_n^2=-(\pi n)^2 \Longrightarrow \lambda_n=1+\pi^2 n^2,$$

והפונקציה העצמית המתאימה תתקבל על ידי בחירה של $B=1$, כלומר

$$y_n(x)=e^x\sin(n\pi x).$$

שימו לב שהפונקציה הראשונה, $y_1(x)=e^x\sin(\pi x)$, לא מתאפסת כלל בקטע $(0,1)$, ועל פי משפט 5.2.2, היא הפונקציה העצמית הראשונה, ונסיק שלא פספסנו אף ערך עצמי. עתה, ברור כי אם $m\neq n$, אזי

$$\langle y_n,y_m\rangle_r=\int_0^1\left(e^x\sin(n\pi x)\right)\left(e^x\sin(m\pi x)\right)e^{-2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\,\mathrm{d}x=0.$$

כלומר, הפונקציות העצמיות אכן מאונכות ביחס למכפלה הפנימית הנתונה. □

5.2.1 תנאי שפה מיוחדים

כפי שראינו, חיפוש הערכים העצמיים של בעיית שטורם-ליוביל יכולה להיות משימה חישובית מאתגרת. יחד עם זאת, ראינו שלעתים נוח לחפש תחילה ערכים עצמיים חיוביים (או לכל הפחות, ערכים הגדולים מערך כלשהו) ולאחר מכן לבדוק האם פספסנו ערכים עצמיים לפי הפונקציה העצמית המתאימה לערך העצמי הקטן ביותר.

לעתים, כאשר תנאי השפה מרמזים על כך, ניתן לדעת מראש האם "יתפספסו" ערכים עצמיים אי-חיוביים או לא.

טענה 5.2.5. תנאי שפה מיוחדים

נניח כי לבעיה 5.1.2 מתקיים $q(x)\le 0$ וגם תנאי השפה הוא אחד מהבאים:

$$\begin{cases}y(a)=0\\y(b)=0\end{cases},\quad\begin{cases}y(a)=0\\y'(b)=0\end{cases},\quad\begin{cases}y'(a)=0\\y(b)=0\end{cases}.$$

אזי, לבעיה יש ערכים עצמיים חיוביים ממש. אם $q(x)$ לא זהותית אפס, אזי גם עבור תנאי השפה

$$\begin{cases}y'(a)=0\\y'(b)=0\end{cases}$$

מקבלים ערכים עצמיים חיוביים בלבד.

הוכחה. נניח כי $y(x)$ פונקציה עצמית של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{R}$. אזי

$$\lambda\langle y, y\rangle_r = \int_a^b \lambda y^2(x) r(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \left((p(x)y'(x))' - q(x)y(x)\right) y(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_a^b (p(x)y'(x))' y(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b q(x)y^2(x)\,\mathrm{d}x$$

עתה, נשתמש באינטגרציה בחלקים עבור האיבר השמאלי ביותר

$$= \overbrace{-\left(p(x)y'(x)\right) y(x)\big|_a^b}^{=0} + \int_a^b p(x)\left(y'(x)\right)^2 \mathrm{d}x - \int_a^b q(x)y^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

עתה נזכיר כי $p(x) > 0$ ו-$q(x) \leq 0$. לכן, האינטגרלים באגף הימני של הבעיה אי-שליליים ולכן $\lambda \geq 0$. אם נניח בשלילה כי $\lambda = 0$, נקבל כי שני האינטגרלים חייבים להתאפס, ומכך ש-$p(x)$ חיובית ממש, נסיק בפרט כי $y'(x) = 0$ בכל הקטע.

על פי כל אחד משלושת תנאי השפה הראשונים, מקבלים שאם $y(x)$ פונקציה קבועה, היא צריכה להתאפס זהותית ולכן לא תהיה פונקציה עצמית (מה שמוביל לסתירה). עבור תנאי השפה האחרון, המסקנה כי $y(x)$ פונקציה קבועה עדיין נכונה, אבל הפעם עלינו להשתמש בכך שאם $q(x)$ לא מתאפסת זהותית, קיים תת קטע $[c, d] \subset [a, b]$ שבו $q(x)$ שלילית ממש, ולכן בקטע זה האינטגרל מתאפס אם ורק אם $y(x) = 0$. אך היות והיא קבועה, נסיק שהיא מתאפסת בכל $[a, b]$, מה שמוביל שוב לסתירה. □

דוגמה 5.2.2 ערכים עצמיים חיוביים בלבד

הוכיחו כי הערכים העצמיים של הבעיה

$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' - 2y = -\lambda y \\ y'(1) = y(e) = 0 \end{cases}.$$

חיוביים ממש.

פתרון. ראשית, נכתוב את המשוואה כבעיית שטורם-ליוביל רגולרית. כדי לעשות זאת ננרמל את המשוואה

$$y'' - \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = -\frac{\lambda}{x^2}y$$

ונכפול את המשוואה ב-$\frac{1}{x^2} = e^{\int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x}$. במקרה זה נקבל

$$-\left(\frac{1}{x^2}y'\right)' + \frac{2}{x^4}y = \frac{\lambda}{x^4}y.$$

בצורה זו ניתן לזהות כי $q(x) = -\frac{2}{x^4}$ היא פונקציה שלילית ממש, בעוד תנאי ההתחלה מתאים לטענה 5.2.5. אי לכך, מובטח שכל הערכים העצמיים של הבעיה יהיו חיוביים. □

דוגמה 5.2.3. חסם לערכים העצמיים

מצאו חסם תחתון לערכים העצמיים של הבעיה

$$\begin{cases} -(p(x)y')' - q(x)y = \lambda r(x)y \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

התלוי בערכי $q(x), r(x)$ בקטע בלבד.

פתרון. נוסיף $mr(x)y$ לשני אגפי המשוואה ונקבל

$$-\left(p(x)y'\right)' - (q(x) - mr(x))\, y = (\lambda + m)\, r(x)y$$

על פי טענה 5.2.5, אם

$$q(x) - mr(x) \leq 0,$$

הערכים העצמיים של הבעיה יהיו חיוביים ממש. הנ"ל יתקיים אם

$$m \geq \frac{q(x)}{r(x)},$$

ולכן אם נבחר $m = \frac{\max_{x\in[a,b]} q(x)}{\min_{x\in[a,b]} r(x)}$ נקבל את הדרוש. אך מכאן נובע כי

$$\lambda + \frac{\max_{x\in[a,b]} q(x)}{\min_{x\in[a,b]} r(x)} > 0$$

או

$$\lambda > -\frac{\max_{x\in[a,b]} q(x)}{\min_{x\in[a,b]} r(x)}.$$

בבעיות פיזיקליות רבות, הערכים העצמיים של הבעיה מסמלים תדירויות/אנרגיות של מערכות. כאשר קשה מאוד לפתור את הבעיות הללו, יש עדיין ערך רב למציאת חסמים על האנרגיות/תדירויות אפשריות של המערכת, וכאן הדגמנו דרך אחת לעשות כן. □

5.3 פיתוח לטור בפונקציות עצמיות

נניח כי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ממשית סימטרית. אזי, לכל זוג וקטורים V, U מתקיים

$$\langle AV, U\rangle = \langle V, AU\rangle.$$

כמו כן, A מטריצה לכסינה ולכן אפשר למצוא בסיס אורתונורמלי $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ שעבורו $Ae_i = \lambda_i e_i$ כאשר λ_i ערך עצמי של המטריצה A.

פיתוח בוקטורים עצמיים. בחלק זה נניח כי A מטריצה הפיכה (כך שהערכים העצמיים כולם שונים מאפס) וננסה למצוא את הפתרון למשוואה

$$AV = U.$$

נתחיל בכך ששתמש בתכונה חשוב של בסיסים אורתונורמליים, ונכתוב

$$V = v_1e_1 + \cdots + v_ne_n, \quad v_i = \langle V, e_i\rangle,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

$$U = u_1e_1 + \cdots + u_ne_n, \quad u_i = \langle U, e_i\rangle,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

עתה, נשתמש בכך שלכל $i = 1, \ldots, n$, מתקיים

$$u_i = \langle U, e_i\rangle = \langle AV, e_i\rangle = \langle V, Ae_i\rangle = \lambda_i\langle V, e_i\rangle = \lambda_i v_i.$$

כלומר, אם נגדיר $v_i = \frac{u_i}{\lambda_i}$ לכל i, נקבל פתרון למערכת. במילים אחרות, קל מאוד למצוא פתרון לכל משוואה אי הומוגנית שמתוארת על ידי מטריצה ממשית וסימטרית.

הקשר לבעיות שטורם-ליוביל. על ידי שימוש בזהות גרין 5.2.3, מקבלים $\langle L[u], v\rangle_r = \langle u, L[v]\rangle_r$ עם $r(x) = 1$. כלומר, במובן מסויים מדובר באופרטור ליניארי ממשי וסימטרי. היינו רוצים להשתמש בטכניקה דומה על מנת למצוא פתרון למשוואה מהצורה $L[u] = f$ כאשר f פונקציה נתונה.

הגדרה 5.3.1. פונקציה רציפה/גזירה ברציפות למקוטעין

פונקציה $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ מכונה **רציפה למקוטעין** אם קיימת חלוקה

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

כך ש-f רציפה בקטעים (a_{i-1}, a_i) ובעלת גבולות חד-צדדיים בקצוות לכל $i = 1, \ldots, n$. אומרים כי f **גזירה ברציפות למקוטעין** אם קיימת פונקציה g רציפה למקוטעין כך שמתקיים $f'(x) = g(x)$ בכל קטע (a_{i-1}, a_i). במקרה זה נסמן $g = f'$.

דוגמה 5.3.1. דוגמה לפונקציה גזירה ברציפות למקוטעין

נראה כי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ הנתונה על ידי $f(x)=[x]$ גזירה ברציפות למקוטעין. אכן, הפונקציה רציפה בקטעים $(0,1)$, $(-1,0)$, והגבולות החד-צדדיים קיימים. בנוסף הפונקציה $g(x)=0$ היא פונקציה רציפה למקוטעין ומקיימת $f'(x)=g(x)$ בכל אחד מהקטעים בחלוקה. לכן הפונקציה גזירה ברציפות למקוטעין ומתקיים $f'(x)=0$.

הגדרה 5.3.2. קבוע נרמול/פונקציה עצמית מנורמלת

יהיו $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ פונקציות עצמיות של בעיה 5.1.2 עם פונקציית משקל $r(x)$ בקטע $[a,b]$. לכל n, הקבוע

$$c_n := \sqrt{\langle y_n, y_n\rangle} = \sqrt{\int_a^b y_n^2(x)r(x)\,\mathrm{d}x}$$

מכונה **קבוע הנרמול** של הפונקציה y_n. הפונקציה

$$\phi_n(x) := \frac{y_n(x)}{c_n}$$

מכונה **הפונקציה העצמית המנורמלת**.

משפט 5.3.1. פיתוח לטור בפונקציות עצמיות

נניח כי $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הפונקציות העצמיות של הבעיה 5.1.2 כמובטח ממשפט 5.2.2. נסמן ב- $\{\phi_n(x), c_n\}_{n=0}^{\infty}$ את הפונקציות העצמיות המנורמלות ואת קבועי הנרמול המתאימים.

1. אם f גזירה ברציפות למקוטעין בקטע $[a,b]$, אזי לכל $x\in(a,b)$ מתקיים

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle_r\phi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f,y_n\rangle_r}{c_n^2}y_n(x) = \frac{f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)}{2},$$

כאשר $f\left(x^{\pm}\right)$ הם הגבולות החד-צדדיים של f בנקודה x. בפרט, אם f רציפה, הטור מתכנס ל-$f(x)$. במקרה זה משתמשים בסימון

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle_r\phi_n(x)\sim f(x)$$

היות וההתכנסות היא התכנסות במובן "חלש" יותר מהמובן הנקודתי הרגיל.

2. אם f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה ברציפות למקוטעין, ואם היא מקיימת את תנאי השפה של הבעיה 5.1.2, אזי הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle_r\phi_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f,y_n\rangle_r}{c_n^2}y_n(x)$$

מתכנס **במידה שווה** ל-$f(x)$ בקטע.

למקדמים $\langle f,\phi_n\rangle_r$ קוראים בשם **מקדמי פוריה מוכללים** והטור מכונה **טור פוריה מוכלל**.

קיים משפט דומה גם לבעיות שטורם-ליוביל מחזוריות, ובמקרה זה המקדמים מכונים בשם **מקדמי פוריה** והטור בפונקציות העצמיות ייקרא בשם **טור פוריה**.

דוגמה 5.3.2 פיתוח בפונקציות עצמיות

היעזרו בהצבה $y(x)=\frac{u(x^2)}{x}$ על מנת למצוא את הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה

$$\begin{cases}-(xy')'+\frac{1}{x}y=\lambda x^3y\\ y(1)=y(\sqrt{2})=0.\end{cases}$$

לאחר מכן, מצאו פיתוח בפונקציות עצמיות לפונקציה $f(x)=x$. האם הפיתוח מתכנס במידה שווה?

פתרון. ראשית, ברור שמדובר בבעיית שטורם-ליוביל רגולרית, ולמעשה מדובר בבעיה עם תנאי שפה דיריכלה. נשתמש בהצבה ונקבל

$$y'(x)=2u'\left(x^2\right)-\frac{u\left(x^2\right)}{x^2},$$

ולכן

$$\begin{aligned}(xy')'=\left(2xu'(x^2)-\frac{u\left(x^2\right)}{x}\right)'&=4x^2u''\left(x\right)+2u'\left(x^2\right)-2u'\left(x^2\right)+\frac{u\left(x^2\right)}{x^2}\\&=4x^2u''\left(x^2\right)+\frac{u\left(x^2\right)}{x^2}.\end{aligned}$$

אי לכך, לאחר שנסמן $t=x^2$ ונציב את הביטוי למשוואה נקבל

$$-4tu''(t)=\lambda tu(t)\Longrightarrow -u''(t)=\frac{\lambda}{4}u(t).$$

כדי למצוא את תנאי השפה החדש נשתמש בכך שמתקיים

$$y\left(1\right)=\frac{u\left(1\right)}{1}=0,\quad y\left(\sqrt{2}\right)=\frac{u\left(2\right)}{\sqrt{2}}=0.$$

כלומר, הבעיה המקורית שקולה לבעיה

$$\begin{cases}-u''=\frac{\lambda}{4}u\\ u(1)=u(2)=0.\end{cases}$$

עתה, היות ובעיה זו בעלת תנאי שפה דיריכלה, ובבעיה זו $q(x)=0$, נוכל להסיק שהערכים העצמיים של הבעיה חיוביים בלבד. נסמן לשם נוחות $\lambda=4\mu^2$, ונקבל שהפתרון הכללי של המד"ר הוא

$$u(t)=A\cos\left(\mu t\right)+B\sin\left(\mu t\right).$$

על ידי הצבה בתנאי השפה נקבל

$$\begin{cases}A\cos\left(\mu\right)+B\sin\left(\mu\right)=0\\ A\cos\left(2\mu\right)+B\sin\left(2\mu\right)=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{pmatrix}\cos\left(\mu\right) & \sin\left(\mu\right)\\ \cos\left(2\mu\right) & \sin\left(2\mu\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

על מנת שיהיה פתרון לא טריוויאלי לבעיה (תנאי לכך שמדובר בערך עצמי), נדרוש שהדטרמיננטה של המטריצה מתאפסת. כלומר

$$\det\begin{pmatrix}\cos\left(\mu\right) & \sin\left(\mu\right)\\ \cos\left(2\mu\right) & \sin\left(2\mu\right)\end{pmatrix}=\cos\left(\mu\right)\sin\left(2\mu\right)-\sin\left(\mu\right)\cos\left(2\mu\right)=\sin\left(\mu\right)=0.$$

מכאן שבהכרח $\mu=\pi n,\ n=1,2,\ldots$. לאחר הצבת ערך עצמי זה מקבלים כי $A=0$ ולכן הערכים העצמיים הם

$$\lambda_n=4\mu_n^2=4\pi^2n^2$$

והפונקציות העצמיות המתאימות הן

$$u_n(t)=\sin\left(\pi nt\right)\Longrightarrow y_n(x)=\frac{\sin\left(\pi nx^2\right)}{x}.$$

בטרם נפתח את הפונקציה הנתונה לטור בפונקציות העצמיות שמצאנו, נמצא את קבועי הנרמול. יש לזכור כי פונקציית המשקל בבעיה זו היא $r(x)=x^3$. לכן

$$c_n=\sqrt{\langle y_n,y_n\rangle_r}=\sqrt{\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\sin^2\left(\pi nx^2\right)}{x^2}x^3\,\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{1}{2}\int_1^2\sin^2\left(\pi nt\right)\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}.$$

כלומר, נוכל להשתמש במשפט 5.3.1 כדי לכתוב

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle f,y_n\rangle_r}{c_n^2}y_n(x).$$

כל שנותר לחשב הוא

$$\langle f,y_n\rangle_r=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\sin\left(\pi nx^2\right)}{x}x\cdot x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 t\sin\left(\pi nt\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2\pi n}t\cos\left(\pi nt\right)\Big|_1^2$$
$$+\frac{1}{2\pi n}\int_1^2\cos\left(\pi nt\right)\mathrm{d}t=-\frac{3}{2\pi n}.$$

לסיכום נקבל כי

$$x\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\sin\left(\pi nx^2\right)}{\pi nx}$$

נותר לבדוק התכנסות במידה שווה של הטור בקטע. ראשית, נזהה כי היות ו-x רציפה וגם גזירה ברציפות למקוטעין, ברור שהטור מתכנס **נקודתית** בקטע $\left(1,\sqrt{2}\right)$ לערך x. אם הטור היה מתכנס במידה שווה, הוא היה רציף (שהרי הוא מורכב כולו מפונקציות רציפות) ולכן היה מקבל את הערך 1 בנקודה $x=1$ (על פי האגף השמאלי). יחד עם זאת, הצבה של $x=1$ מאפסת לחלוטין את האגף הימני, ולכן נסיק שלא תתכן התכנסות במידה שווה. □

5.4 פתרון בעיות שפה אי-הומוגניות (לא נלמד הסמסטר)

תהיינה $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ הפונקציות העצמיות המנורמלות של הבעיה 5.1.2. נניח כי g פונקציה רציפה וגזירה ברציפות למקוטעין המקיימת את תנאי השפה. נחפש פתרון לבעיה

$$L[y]=-\left(p(x)y'\right)'-q(x)\,y=g(x)\,,$$

בכפוף לאותם תנאי שפה של הבעיה. על פי הנתון, ידוע לנו שניתן לכתוב

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n(x)$$

כאשר הנוסחה למקדמים נתונה על ידי הקשר הבא (שבו נשתמש גם בזהות גרין מטענה 5.2.3)

$$a_n = \langle y, \phi_n \rangle_r = \int_a^b y(x)\, \phi_n(x)\, r(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b y(x)\, L[\phi_n](x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b L[y]\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b g(x)\, \phi_n(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_n} \left\langle \frac{g}{r}, \phi_n \right\rangle_r$$

ובצורה כזאת קיבלנו (לכאורה) את הפתרון

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\langle \frac{g}{r}, \phi_n \right\rangle_r}{\lambda_n} \phi_n(x)$$

שמקיים $L[y] = g$. שימו לב שהיות ו-$r > 0$ החלוקה ב-r תקינה, אך הבעיה היא ש-λ_n עלול להיות אפס. בנוסף, לא ברור מדוע הטור שהגדרנו מתכנס ולא ברור שגם במידה והוא מתכנס, ניתן לגזור אותו פעמיים איבר-איבר. המשפט הבא (שיוצג ללא הוכחה) מראה תחת אילו תנאים הפיתוח שהצגנו נכון.

משפט 5.4.1. קיום ויחידות לבעיות שפה רגולריות אי-הומוגניות

נניח כי לבעיה הרגולרית 5.1.2 אין ערך עצמי 0. אזי, לכל פונקציה g רציפה וגזירה ברציפות למקוטעין המקיימת את תנאי השפה, קיים פתרון יחיד לבעיה

$$\begin{cases} L[y] = g(x), \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \end{cases}$$

והוא נתון על ידי הטור המתכנס בהחלט

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\langle \frac{g}{r}, \phi_n \right\rangle_r}{\lambda_n} \phi_n(x).$$

דוגמה 5.4.1. פתרון בעית שפה רגולרית אי הומוגנית

מצא את הפתרון לבעיית השפה

$$\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' = \frac{\ln^3(x) - \ln^2(x)}{\sqrt{x}} \\ y(1) + 2y'(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases} .$$

פתרון. ראשית, נמצא את הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה. נזהה שמדובר במשוואת אוילר עם פולינום אופייני

$$p(r) = r(r-1) + 2r + \lambda = r^2 + r + \lambda.$$

שורשי הפולינום האופייני הם

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}.$$

נתחיל בלטפל במקרה שבו $\frac{1}{4} < \lambda$, היות ושם נמצאים רוב הערכים העצמיים. נסמן $\frac{1}{4} - \lambda = -\mu^2$ ונקבל שהפתרון הכללי הוא מהצורה

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{x}} \cos(\mu \ln(x)) + \frac{B}{\sqrt{x}} \sin(\mu \ln(x)).$$

נחשב את הנגזרת כדי להציב את תנאי השפה

$$\begin{aligned} y'(x) = &-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \left(A \cos(\mu \ln(x)) + B \sin(\mu \ln(x))\right) \\ &- \frac{\mu}{x\sqrt{x}} \left(A \sin(\mu \ln(x)) - B \cos(\mu \ln(x))\right). \end{aligned}$$

אי לכך

$$y(1) + 2y'(1) = A + 2\left(-\frac{A}{2} + \mu B\right) = 2\mu B = 0.$$

היות ו-$\mu > 0$ לפי הנחה, נסיק כי $B = 0$ ועבור תנאי השפה השניה נקבל

$$y(e) = \frac{A}{\sqrt{e}} \cos(\mu) = 0.$$

כלומר $\mu_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ כאשר $n = 0, 1, 2, \ldots$. לכן הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות הם

$$\lambda_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2, \quad y_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi \ln(x)\right)}{\sqrt{x}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

לא קיימות פונקציות עצמיות נוספות היות ו-y_0 לא מתאפסת כלל בקטע $(1, e)$. נמצא את הפונקציות העצמיות

המנורמלות (שימו לב שפונקציית המשקל כאן היא $r(x) = 1$)

$$c_n^2 = \langle y_n, y_n \rangle = \int_1^e \frac{\cos^2\left(\frac{2n+1}{2}\pi \ln(x)\right)}{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \cos^2\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left((2n+1)\pi t\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

ולכן

$$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi \ln(x)\right)}{\sqrt{x}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

הן הפונקציות העצמיות המנורמלות. עבור האיבר האי-הומוגני, ניתן לוודא שמדובר בפונקציה גזירה ברציפות שמקיימת את תנאי השפה, ולכן קיים פתרון לבעיה על פי המשפט. לפי הנוסחה ממשפט 5.4.1, עלינו לחשב

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\langle \frac{\ln^3(x) - \ln^2(x)}{\sqrt{x}}, \phi_n \right\rangle = \int_1^e \frac{\ln^3(x) - \ln^2(x)}{x} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi \ln(x)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(t^3 - t^2\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{t^3 - t^2}{\frac{2n+1}{2}\pi} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{3t^2 - 2t}{\frac{2n+1}{2}\pi} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{3t^2 - 2t}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{6t - 2}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{(6t - 2)}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right)^3} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi t\right)}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^3} \mathrm{d}t$$

$$= (-1)^n \frac{4}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^3}$$

ולכן הפתרון לבעייתה השפה הוא

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{8}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^3 \sqrt{x}} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi \ln(x)\right).$$

מאוד קל לוודא שהטור מתכנס בהחלט, במידה שווה, וניתן אף לגזור אותו איבר-איבר פעמיים (את הוידאו של

ההתכנסות בהחלט ובמידה שווה נעשה בעזרת מבחן M של ויירשטראס). $\square$