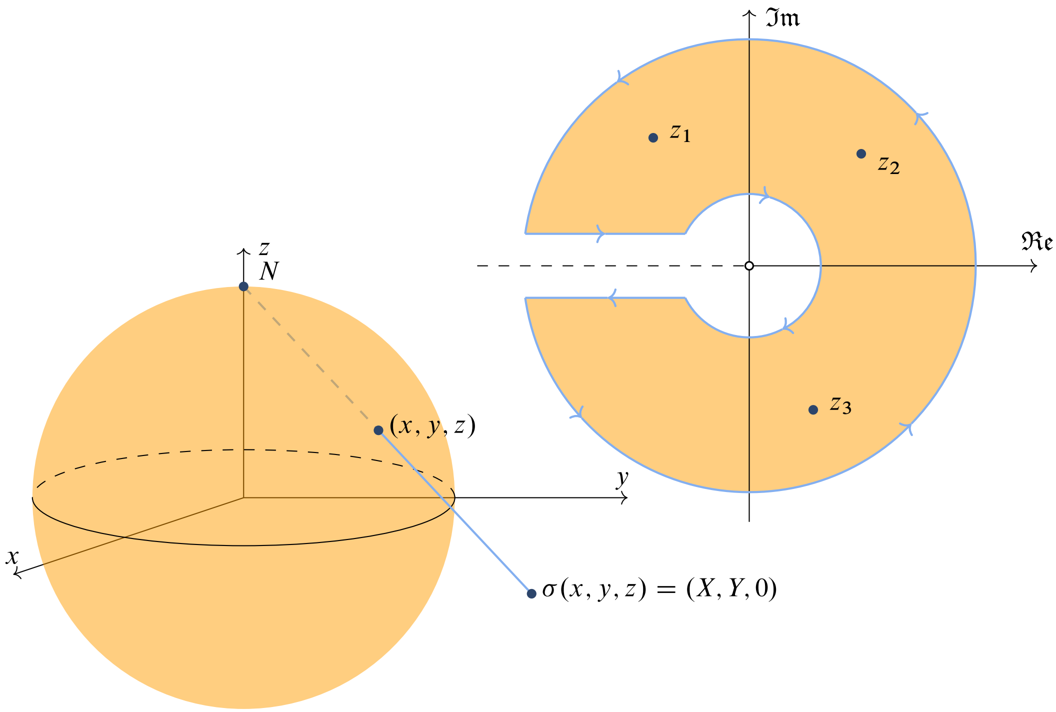
רשימות הרצאה

פונקציות מרוכבות א'

104215



נכתב על ידי : רן קירי

להערות/תיקונים ניתן לפנות במייל

rankiri93@gmail.com

תוכן העניינים

תוכן העניינים

1
המישור המרוכב

1.1 המספרים המרוכבים

הגדרה 1.1.1. מספר מרוכב

מספר מהצורה
$$z = x + iy$$
כאשר $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ ו-$i^2 = -1$ מכונה **מספר מרוכב**. במקרה כזה מגדירים את **החלק הממשי והחלק המרוכב** של המספר על ידי
$$x = \mathfrak{Re}(z), \quad y = \mathfrak{Im}(z).$$
אוסף כל המספרים המרוכבים מסומן ב-$\mathbb{C}$, וניתן להגדיר חיבור וכפל שלהם על ידי הנוסחאות
$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$
$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

הגדרה 1.1.2. הצמוד המרוכב

יהא $z = x + iy \in \mathbb{C}$ מספר מרוכב. **הצמוד המרוכב** של z הוא המספר
$$\bar{z} := x - iy.$$

בעזרת הצמוד המרוכב ניתן לכתוב גם
$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}.$$

טענה 1.1.1. תכונות של הצמדה

הצמדה מרוכבת היא פעולה ליניארית וכפלית, כלומר

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

הוכחה. נסמן $z = x + iy, w = u + iv$ ונקבל מחישוב מפורש כי

$$\overline{(x+iy)+(u+iv)} = \overline{(x+u)+i(y+v)} = (x+u) - i(y+v) = (x-iy) + (u-iv),$$

וכן

$$\overline{(x+iy)\cdot(u+iv)} = \overline{(xu-yv)+i(xv+yu)} = (xu-yv) - i(xv+yu) = (x-iy)\cdot(u-iv).$$

□

הגדרה 1.1.3. גודל/מודול של מספר מרוכב

יהא $z = x + iy \in \mathbb{C}$ מספר מרוכב. **הגודל/מודול** של z מוגדר להיות

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

טענה 1.1.2. אי-שוויון המשולש

לכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$|z+w| \le |z| + |w|,$$

ובגרסה נוספת

$$|z+w| \ge ||z| - |w||$$

הוכחה. נזהה כי

$$\begin{aligned} |z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} &= z\bar{z} + w\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} = |z|^2 + |w|^2 + w\bar{z} + \overline{w\bar{z}} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathfrak{Re}(z\bar{w}) \le |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z|+|w|)^2, \end{aligned}$$

לאחר הוצאת שורש על שני האגפים, נקבל את הדרוש. □

התכונה הבאה נובעת מהעובדה ש-$\langle z, w\rangle = \bar{w}z$ היא מכפלה פנימית.

טענה 1.1.3. שוויון המקבילית

לכל $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

הוכחה. מחישוב מפורש מקבלים כי

$$|z+w|^2+|z-w|^2=(z+w)\overline{(z+w)}+(z-w)\overline{(z-w)}=z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+w\bar{z}$$
$$+z\bar{z}+w\bar{w}-z\bar{w}-w\bar{z}=2|z|^2+2|w|^2.$$

□

טענה 1.1.4 הצגה פולרית של מספר מרוכב

לכל $z\in\mathbb{C}$ קיים מספר אי שלילי $r\geq 0$ וזווית $\theta\in\mathbb{R}$ שעבורם

$$z=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right),$$

ונשתמש גם בסימון $z=re^{i\theta}$.

הערה. בשלב זה של הקורס הביטוי $e^{i\theta}:=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ הינו סימון עזר בלבד. בהמשך הקורס נגלה שאכן מדובר בפונקציה מוגדרת היטב שמקיימת את כל חוקי החזקות המוכרים לנו מהאקספוננט הממשי.

הוכחה. ראשית, אם $z=0$, ברור כי ניתן לבחור $r=0$ וערך כלשהו $\theta\in\mathbb{R}$. אחרת, נוכל לכתוב

$$z=x+iy=\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

שימו לב שהנקודה $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ נמצאת על מעגל היחידה ב-$\mathbb{R}^2$ לכל $(x,y)\neq(0,0)$. לכן, אפשר למצוא זווית $\theta\in\mathbb{R}$ שעבורה

$$\cos(\theta)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin(\theta)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

אם נסמן $r:=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, נקבל לסיכום כי $z=re^{i\theta}$ כפי שרצינו להראות. □

באופן כללי, נשים לב כי אם $\theta\in\mathbb{R}$ זווית המתאימה למספר מרוכב $z\neq 0$, הזווית $\theta+2\pi k$ תתאים לכל $k\in\mathbb{Z}$. כלומר, באופן כללי, יש אינסוף זוויות שמתאימות להצגה הפולרית של מספר מרוכב, והבחירה אינה חד-ערכית.

הגדרה 1.1.4 פונקציית הארגומנט

לכל $z\neq 0$, הפונקציה

$$\mathrm{A}(z):=\begin{cases}\arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x>0\\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi, & x<0, y>0\\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\pi, & x<0, y\leq 0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0, y>0\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0, y<0\end{cases}$$

מקיימת $z = |z|\, e^{i\,\mathrm{A}(z)}$. בעזרתה מגדירים את **הארגומנט** של z על ידי

$$\arg(z) := \{\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}.$$

על פי ההגדרה, $\mathrm{A}(z)$ היא הזווית **היחידה** בקטע $[-\pi,\pi)$ שמתאימה ל-z, ו-$\arg(z)$ היא **קבוצת כל הזוויות** שמתאימות ל-z. כלומר, ההתאמה $z \mapsto \arg(z)$ אינה חד-ערכית.

הערות חשובות.

- לכל ערך של $z \in \mathbb{C}$, הביטוי $\arg(z)$ אינו ערך אחד אלא קבוצה של ערכים. למשל,

$$\arg(1) = \{\ldots, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots\}$$

לפונקציה המתאימה קבוצת ערכים לכל ערך בתחום הגדרתה קוראים בשם **פונקציה רב-ערכית**.

- הפונקציה $\mathrm{A}(z)$ היא למעשה דרך "לבחור" לכל $z \in \mathbb{C}$ זווית אחת בלבד מתוך $\arg(z)$. במקרה הנ"ל, זווית אחת ויחידה הנמצאת בקטע $[-\pi,\pi)$.

- על אף שלפונקציה $\mathrm{A}(z)$ קיים כבר ביטוי מפורש (ואלמנטרי בחלק מהרביעים), ניתן לזהות שהפונקציה אינה רציפה כאשר $\mathfrak{Im}(z) = 0, \mathfrak{Re}(z) < 0$.

הגדרה 1.1.5. ענף

תהא $E \subset \mathbb{C}$ קבוצה ו-$\mathcal{P}(\mathbb{C})$ פונקציה רב-ערכית $f : E \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ (כלומר, $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ היא קבוצת כל תתי-הקבוצות של $\mathbb{C}$). בהנתן $D \subset E$, אומרים שפונקציה חד-ערכית $F : D \to \mathbb{C}$ היא **ענף** של f ב-D אם F רציפה ולכל $z \in D$, מתקיים $f(z) \in F(z)$.

כלומר, ענף של פונקציה רב-ערכית היא דרך לבחור פונקציה "רגילה" מתוך פונקציה רב-ערכית, כך שתהיה רציפה.

דוגמה 1.1.1. הענף הראשי של הארגומנט

כפי שראינו, $\mathrm{A}(z)$ אינה ענף כי היא אינה פונקציה רציפה. לעומת זאת, הפונקציה

$$\mathrm{Arg}(z) := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} | \mathfrak{Im}(z) = 0, \mathfrak{Re}(z) \le 0\}, \quad \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{A}(z)$$

שהיא למעשה $\mathrm{A}(z)$ ללא הקבוצה שבה אינה רציפה - היא ענף של פונקציית הארגומנט. לעתים מכנים את $\mathrm{Arg}(z)$ בתור **הענף הראשי** של הארגומנט.

טענה 1.1.5. תכונות של אקספוננט מרוכב

יהיו $z = re^{i\theta}, w = r_2 e^{i\theta_2}$ מספרים מרוכבים הנתונים בצורתם הפולרית. אזי

- $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

- $zw = rr_2 e^{i(\theta+\theta_2)}$ וכפועל יוצא מכך
  - $z^n = r^n e^{in\theta}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
- $\frac{z}{w} = \frac{r}{r_2} e^{i(\theta-\theta_2)}$ אם $w \neq 0$.
- אוסף הפתרונות למשוואה $w^n = z$ (כאשר $n \in \mathbb{N}$) הוא

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

1.1.1 טופולוגיה

בצורתה הכללית ביותר, טופולוגיה על מרחב/קבוצה X היא רשימת תתי-קבוצות של X שמכונות בשם **קבוצות פתוחות**, ורשימה זו צריכה לקיים כללים מסויימים שלא נדון בהם בקורס. המבנה הטופולוגי על מרחב הוא מבנה מאוד "פרימיטיב", אך הוא מספר לנו עושר רב של כלים שניתן להשתמש בהם כדי לחקור את המרחב/קבוצה שלנו. מתברר שטופולוגיה היא זו שמגדירה לנו מהי פונקציה רציפה, ומתי גבול מסיים קיים או לא.

במקרה שלנו אנחנו לא נתקל בטופולוגיה כללית/מסובכת, אלא בטופולוגיה שמושרית באופן טבעי מאוד מהיכולת שלנו להגדיר מרחק בין נקודות.

הגדרה 1.1.6. כדורים/עיגולים

תהא $z_0 \in \mathbb{C}$ ויהא $r > 0$ נתונים.

- ה**כדור/עיגול הפתוח** ברדיוס r סביב z_0 הוא הקבוצה

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

- ה**כדור/עיגול הסגור** ברדיוס $r > 0$ סביב z_0 הוא הקבוצה

$$\overline{B(z_0, r)} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

- ה**ספירה/מעגל** ברדיוס $r > 0$ סביב z_0 הוא

$$C(z_0, r) = C_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}.$$

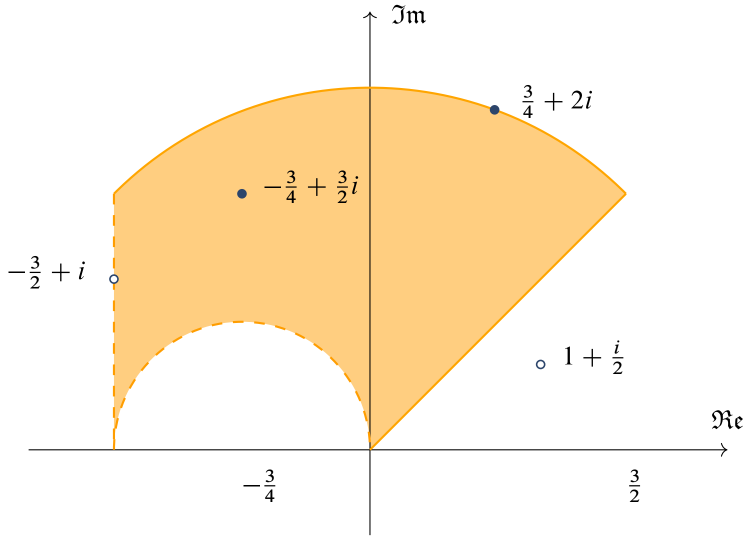
הגדרה 1.1.7. נקודות פנימיות, חיצוניות ושפה

תהא $A \subset \mathbb{C}$ קבוצה ותהא $z_0 \in \mathbb{C}$ נקודה נתונה.

- z_0 מכונה **נקודה פנימית** של A אם קיים $r > 0$ שעבורו $B(z_0, r) \subset A$.
- z_0 מכונה **נקודה חיצונית** של A אם קיים $r > 0$ שעבורו $B(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus A$.
- z_0 מכונה **נקודת שפה** של A אם **לכל** $r > 0$, $B(z_0, r)$ מכיל גם נקודה מ-A וגם נקודה שאינה ב-A.

מסמנים ב-$\operatorname{int}(A)$ את אוסף הנקודות הפנימיות של A, ב-$\operatorname{out}(A)$ את אוסף הנקודות החיצוניות של A וב-∂A את נקודות השפה של A. משתמשים גם במינוח **הסגור** של A לקבוצה $\bar{A} := A \cup \partial A$.

שימו לב שעל פי הגדרה זו, נקודה פנימית היא בפרט נקודה בקבוצה, נקודה חיצונית בהכרח אינה נקודה בקבוצה, ונקודת שפה יכולה להיות חלק מהקבוצה ויכולה להיות לא חלק מהקבוצה.



איור 1.1: דוגמאות לסוגי הנקודות מהגדרה 1.1.7

דוגמה 1.1.2 המחשה של סוגי נקודות

נתבונן בקבוצה

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \begin{array}{c} -\frac{3}{2} < \mathfrak{Re}(z) \leq \mathfrak{Im}(z) \\ |z| \leq \sqrt{\frac{9}{2}},\ \left|z+\frac{3}{4}\right| > \frac{3}{4} \end{array} \right\}$$

ובנקודות

$$\frac{3}{4}+2i,\ -\frac{3}{4}+\frac{3}{2}i,\ -\frac{3}{2}+i,\ 1+\frac{i}{2}$$

כמודגם באיור 1.1 שלעיל. אזי נקודות אלה (משמאל לימין, בהתאמה) הן נקודת שפה שנמצאת בקבוצה, נקודה פנימית, נקודת שפה שאינה בקבוצה ונקודה חיצונית לקבוצה.

הגדרה 1.1.8 קבוצות פתוחות/סגורות

תהא $A \subset \mathbb{C}$ קבוצה. אומרים כי

- A **פתוחה** אם $A = \operatorname{int}(A)$. כלומר, אם כל הנקודות ב-A הן נקודות פנימיות.
- A **סגורה** אם $\mathbb{C} \setminus A$ קבוצה פתוחה.

טענה 1.1.6. תכונות בסיסיות, קבוצות פתוחות וסגורות

- איחוד של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
- איחוד **סופי** של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
- חיתוך של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
- חיתוך **סופי** של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
- קבוצה היא סגורה אם ורק אם היא מכילה את השפה שלה, וזאת אם ורק אם היא שווה לסגור שלה.

הגדרה 1.1.9. קבוצה חסומה

קבוצה $A \subset \mathbb{C}$ מכונה **חסומה** אם קיים $r > 0$ שעבורו $|z| < r$ לכל $z \in A$.

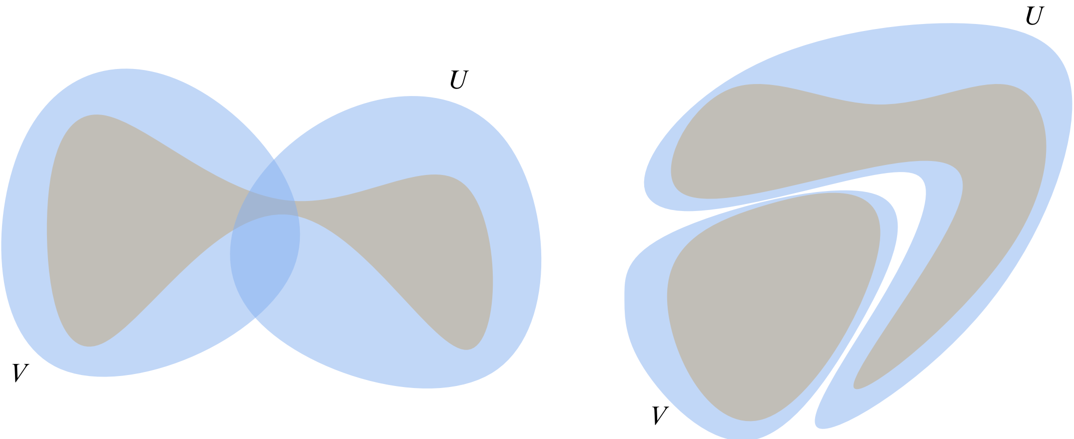
הגדרה 1.1.10. קבוצה קשירה

קבוצה $A \subset \mathbb{C}$ מכונה **קשירה** אם לכל זוג קבוצות פתוחות $V, U \subset \mathbb{C}$, אם

$$U \cap V = \emptyset, \quad A \subset U \cup V,$$

אזי בהכרח $U \supset A$ או $A \subset V$.

כלומר, קבוצה קשירה היא קבוצה שלא ניתן "לפרק" על ידי זוג קבוצות פתוחות וזרות (המחשה באיור 1.2 שלעיל). ההגדרה הבאה והמשפט שאחריה יעזרו לנו להבין קבוצות פתוחות וקשירות.



איור 1.2: המחשה של קבוצה קשירה (משמאל) וקבוצה לא קשירה (מימין). ניתן לראות שבכל ניסיון להפריד את הקבוצה הקשירה לשתי קבוצות פתוחות וזרות, החיתוך בין הקבוצות יהיה לא ריק (כך שהן לא באמת זרות).

הגדרה 1.1.11. קטע, קו-שבור

תהיינה $z, w \in \mathbb{C}$ נקודות נתונות. ה**קטע** המחבר את הנקודות הוא הקבוצה

$$[z, w] := \{z + t(w - z) | t \in [0, 1]\}.$$

קו-שבור המחבר את z, w הוא קבוצה מהצורה $\bigcup_{i=1}^{n} [z_i, w_i]$ כאשר $z_1 = z, w_n = w$ ולכל $1 \leq i < n$ מתקיים

$$w_i = z_{i+1}.$$

משפט 1.1.1. קשירות/קיום קו-שבור

תהא $A \subset \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה. אזי, A קשירה אם ורק אם לכל זוג נקודות קיים קו-שבור ב-A המחבר ביניהן.

הוכחה. 1. **קשירה גורר קיום קו-שבור.** נניח כי A קשירה, ויהיו $z, w \in A$ נקודות כלשהן. נגדיר את שתי הקבוצות

$$U := \left\{ h \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ניתן לחבר את } h \\ \text{ל-}z \text{ בקו שבור ב-}A \end{array} \right\}, \quad V := A \setminus U.$$

הקבוצות U, V שתיהן זרות ומכסות את A לפי הגדרה (כי כל נקודה ניתנת לחיבור ל-z או שלא). אי לכך, אם נוכיח כי שתי הקבוצות פתוחות, הקשירות של A תבטיח כי $U \subset A$, ומכאן שאת כל הנקודות ב-A אפשר לחבר ל-z, ובפרט את w.

- **U פתוחה.** אם $h \in U$, היא בפרט נקודה ב-A (שהיא קבוצה פתוחה). לכן, יש עיגול ברדיוס $r > 0$ סביב h המוכל כולו ב-A. ברור שכל נקודה בעיגול ניתנת לחיבור על ידי קו-שבור ל-h בתוך העיגול (שבתוך A), ו-h עצמה ניתנת לחיבור בקו-שבור ל-z ב-A. כלומר, כל נקודה ב-$B(h, r)$ ניתנת לחיבור ל-z בקו-שבור ב-A, כלומר $B(h, r) \subset U$. הראינו, שכל הנקודות ב-U פנימיות ולכן מדובר בקבוצה פתוחה.
- **V פתוחה.** נפעיל שיקול דומה ונבחר $h \in V$, ו-$r > 0$ כך ש-$B(h, r) \subset A$. על פי הנתון, את h לא ניתן לחבר ל-z על ידי קו-שבור ב-A, ולכן גם אף נקודה בעיגול סביב h. כלומר, $B(h, r) \subset V$. שוב, המסקנה היא ש-V פתוחה.

לסיכום, ברור כי $A \subset U$ או $A \subset V$. אך היות והקבוצות זרות, ו-$z \in U$ באופן טריוויאלי - נסיק כי $A \subset U$ מה שמסיים את החצי הראשון של ההוכחה.

2. **קיום קו-שבור גורר קשירות (חלק זה לא הועבר בהרצאות הפרונטליות).** עתה, נניח כי כל זוג נקודות ב-A ניתנות לחיבור בקו-שבור ב-A ונניח כי A אינה קשירה. כלומר, אפשר למצוא U, V פתוחות וזרות המכסות את A כך שגם ב-U וגם ב-V יש לפחות נקודה אחת מ-A (כלומר, A לא מוכלת ממש באף אחת מהן). אם נסמן ב-$z \in U, w \in V$ זוג נקודות כנ"ל, נקבל על פי הנתון שקיים קו-שבור $\bigcup_{i=1}^{n} [z_i, w_i]$ המחבר את הנקודות ב-A. היות והקו השבור מתחיל ב-U ומסתיים ב-V, חייב להיות לפחות קטע אחד $\left[z_{i_0}, w_{i_0}\right]$ שעבורו

$$z_{i_0} \in U, \quad w_{i_0} \in V.$$

נזכיר שהקטע $[z_{i_0}, w_{i_0}]$ הוא אוסף הנקודות מהצורה $z(t) = z_{i_0} + t(w_{i_0} - z_{i_0})$ כאשר $t \in [0,1]$. נסמן ונזהה כי $I_0 = [0,1]$

- בדיוק באחד מהקטעים $[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]$ מתקיים מתקיים שקצהו השמאלי נשלח ל-U וקצהו הימני נשלח ל-V. נסמן את הקטע שבו זה קורה ב-I_1.
- באופן אינדוקטיבי, נמשיך ונחצה את הקטעים שוב ושוב כך ש-I_n הוא קטע שאורכו $\frac{1}{2^n}$ שקצהו השמאלי נשלח ל-U וקצהו הימני נשלח ל-V.

על ידי שימוש בלמה של קנטור, ניתן להסיק שקיים t_0 השייך לכל אחד מהקטעים I_n. עבור ערך זה, מקבלים כי בכל סביבה של $z(t_0)$, יש גם נקודות מ-U וגם נקודות מ-V, כך שזו נקודת שפה של שתי הקבוצות ואינה שייכת לאף אחד מהן (כי הן פתוחות). כלומר, הקבוצות אינן מכסות את כל A, בסתירה להנחה שלנו - ומכאן ש-A חייבת להיות קשירה.

□

הערות.

- הטענה שקיום קו-שבור מבטיח קשירות נכונה לא רק בקבוצות פתוחות. הכיוון ההפוך, שבו קשירות גוררת קיום של קו-שבור נכונה רק כאשר מדובר בקבוצות פתוחות. אם נתבונן למשל בקבוצה

$$C = \left\{ t + i \sin\left(\frac{1}{t}\right) \middle| 0 < t \leq 1 \right\} \cup \{ it | -1 \leq t \leq 1 \}$$

המופיעה באיור 1.3 שלעיל, מדובר בקבוצה קשירה שאינה מקיימת את תנאי הקו-השבור (עובדה שלא נוכיח כאן).

- קיימת הגדרה חשובה נוספת, המכונה **קשירות מסילתית** שהיא קבוצה שבה כל זוג נקודות ניתנות לחיבור על ידי מסילה בתוך הקבוצה (שאינה בהכרח מורכבת מקווים ישרים). כאשר נגדיר מסילות רציפות, נציג הגדרה זו וגם היא תהיה שקולה לקשירות כאשר מדובר בקבוצה פתוחות (ולעתים, אף יותר שימושית).

הגדרה 1.1.12 תחום

קבוצה $D \subset \mathbb{C}$ מכונה **תחום** אם היא פתוחה וקשירה.

לאחר שמגדירים טופולוגיה על מרחב, ניתן לדון בסדרות והגבולות שלהן.

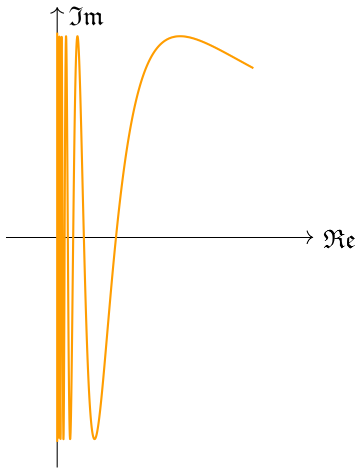
הגדרה 1.1.13 סדרה מרוכבת מתכנסת

סדרה של מספרים מרוכבים היא קבוצה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ של מספרים מרוכבים עם חשיבות לסדר (שמיוצג על ידי האינדקסים). אומרים שסדרה כזו **מתכנסת** לגבול $L \in \mathbb{C}$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|z_n - L| < \varepsilon$. לחלופין, אם

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - L| = 0.$$

במקרה כזה נסמן $\lim_{n\to\infty} z_n = L$.

כלומר, ההגדרה של התכנסות של סדרות מרוכבות דומה מאוד (אפילו זהה) להגדרה של התכנסות בעולם הממשי.



איור 1.3: הקבוצה $t+i\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ עם הקבוצה it.

טענה 1.1.7. התכנסות רכיב-רכיב

תהא $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים מרוכבים ויהא $L\in\mathbb{C}$ נתון. אזי

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L \iff \lim_{n\to\infty}\mathfrak{Re}\left(z_n\right)=\mathfrak{Re}\left(L\right),\ \lim_{n\to\infty}\mathfrak{Im}\left(z_n\right)=\mathfrak{Im}\left(L\right).$$

כלומר, סדרה מרוכבת מתכנסת אם ורק אם החלק הממשי והחלק המדומה שלה מתכנסים, בנפרד.

הוכחה. ניתן להשתמש בכך שמתקיים

$$\left|z_n-L\right|\le\left|\mathfrak{Re}\left(z_n\right)-\mathfrak{Re}\left(L\right)\right|+\left|\mathfrak{Im}\left(z_n\right)-\mathfrak{Im}\left(L\right)\right|\le 2\left|z_n-L\right|.$$

ועל ידי חישוב הגבול מסיקים שאם האגף האמצעי מתכנס ל-0 כך גם האגף השמאלי, ואם האגף הימני מתכנס כך גם האגף האמצעי, וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח. $\square$

בדומה לפירוק של סדרה לחלקה הממשי וחלקה המדומה, ניתן לפרק כל סדרה לרדיוס וזווית, כלומר לכתוב $z_n = r_n e^{i\theta_n}$. אך במקרה זה, אין תמיד שקילות בהתכנסות של הסדרה לבין ההתכנסות של הרדיוס והזווית.

דוגמה 1.1.3. התכנסות סדרה אל מול התכנסות רדיוס וזווית

נתבונן בסדרה:

$$r_n=1,\ \theta_n=(-1)^n\pi,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

שימו לב שעל פי הגדרה זו $z_n = r_n e^{i\theta_n} = -1$ היא סדרה מתכנסת. זאת על אף שסדרת הזוויות אינה מתכנסת.

2

פונקציות מרוכבות

2.1 פונקציות, גבולות ורציפות

הגדרה 2.1.1. פונקציה מרוכבת

פונקציה מרוכבת היא העתקה $f:D\to\mathbb{C}$ כאשר $D\subset\mathbb{C}$. כלומר פונקציה המקבלת משתנה מרוכב ותמונתה גם היא מרוכבת.

כאשר מתארים פונקציה מרוכבת, נהוג להשתמש בסימונים

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

כלומר $u=\mathfrak{Re}(f)\,,v=\mathfrak{Im}(f)$. במקרה זה ניתן לחשוב על $u(x,y),v(x,y)$ כעל פונקציות מתת-קבוצה ב-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}$ (כלומר, פונקציות בשני משתנים כפי שפגשתם בקורסי החדו"א). פונקציות אלה יהיו האובייקט המתמטי המרכזי שנחקור בקורס, ומטרתנו לנסות ולהגדיר כראוי חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי המשתמש בפונקציות אלה. כדאי לזהות כי פונקציות אלה מקבלות זוג פרמטרים כמקור ומספקות זוג פרמטרים כתמונה. לכן, הגרף של הפונקציה חי למעשה במרחב 4 ממדי ולא נוכל לצייר אותו באופן כללי. יחד עם זאת - נראה בהמשך שכן ניתן לצייר חלקים מסויימים מהפונקציה ולהיעזר בכך כדי לחקור אותה.

דוגמה 2.1.1. דוגמאות לפונקציות מרוכבות

1. **פולינום** מעל המרוכבים הוא פונקציה מהצורה $f(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ כאשר $a_j\in\mathbb{C},\ j=0,\ldots,n$ הם מקדמי הפולינום. שימו לב שלפי הגדרה, בפולינום מרוכב לא משתמשים ב-$\bar{z}$, אלא רק בחזקות של z.
2. **פעולת ההצמדה** היא למעשה פונקציה מהמרוכבים לעצמם, כלומר $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ המוגדרת על ידי $f(z)=\bar{z}$.
3. **פונקציות רציונליות** שהן מנות של פולינומים מרוכבים גם הן פונקציות המוגדרות בכל נקודה שבה

המכנה לא מתאפס.

4. ניתן להרכיב/לחבר/לכפול/לחלק פונקציות מרוכבות בדיוק כמו במקרה הממשי (עד כדי זיהוי תחום ההגדרה המתאים).

כהכנה ראשונית של חדו"א בעולם המרוכב נדון בגבול וברציפות של פונקציה מרוכבת.

הגדרה 2.1.2. גבול של פונקציה

תהא f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $z_0 \in \mathbb{C}$ (כלומר, קבוצה מהצורה $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$). אומרים כי $\lim_{z \to z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

בדומה לסדרות, גם בפונקציות ניתן לעבוד רכיב-רכיב.

טענה 2.1.1. גבול רכיב-רכיב

תהא $f = u + iv$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. אזי

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \mathfrak{Re}(L) \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \mathfrak{Im}(L) \end{array}.$$

עקב כך שגבולות בפונקציות מרוכבות דומים לגבולות של פונקציות בשני משתנים, לא מפתיע שהרבה תוצאות מחשבון במספר משתנים ממשיים נשמרות גם במעבר למרוכבים.

טענה 2.1.2. אריתמטיקה של גבולות

תהיינה f, g מוגדרות בסביבה מנוקבת של $z_0 \in \mathbb{C}$ ונניח כי

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L, \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = M.$$

אזי

- **חיבור/חיסור.** $\lim_{z \to z_0} f(z) \pm g(z) = L \pm M$.
- **כפל.** $\lim_{z \to z_0} f(z) g(z) = LM$.
- **חילוק.** אם $M \neq 0$, אזי $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$.

ההוכחה זהה לחלוטין להוכחה מקורסי החדו"א ונדלג עליה. מיד לאחר הגדרת הגבול אפשר כמובן לדבר על פונקציה רציפה.

הגדרה 2.1.3. רציפות

תהא $D \subset \mathbb{C}$ ותהא $f : D \to \mathbb{C}$. אומרים כי f **רציפה** ב-D אם לכל $z_0 \in D$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $z \in D$

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

אם z_0 נקודה פנימית (לחלופין, אם f מוגדרת בסביבה שלמה של z_0), ניתן לכתוב כי f רציפה ב-z_0 אם

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

שימו לב שהפירוט בהגדרה של רציפות מאפשר להגדיר רציפות גם בנקודות שפה של תחום ההגדרה (למשל, אם f לא מוגדרת בעיגול מנוקב אלא רק בחלק ממנו). ברוב המקרים נעבוד בקבוצות פתוחות ואז ניתן לחשוב (כרגיל) על ההגדרה הרגילה. כמו כן, היות וראינו שניתן לחשוב על גבול בעזרת החלק הממשי והחלק המדומה, אנחנו מקבלים "במתנה" את הרציפות של פונקציות רבות. כך למשל, כל נפוקציות מדוגמה 2.1.1 הן פונקציות רציפות בתחום הגדרתן. דוגמה חשובה נוספת היא האקספוננט המרוכב והלוגריתם המרוכב.

הגדרה 2.1.4. האקספוננט המרוכב

לכל $z \in \mathbb{C}$ מגדירים

$$e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y).$$

בפרט, $\mathfrak{Re}(e^z) = e^x \cos(y)$ ו-$\mathfrak{Im}(e^z) = e^x \sin(y)$.

טענה 2.1.3. תכונות האקספוננט המרוכב

לכל $z, w \in \mathbb{C}$, מתקיים

- $e^{z+w} = e^z e^w$.
- $e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}$.
- $|e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)}$.
- עבור x קבוע, הנקודות $e^z = e^x e^{iy}$ מתארות מעגל סביב הראשית ברדיוס e^x. עבור y קבוע, הנקודות $e^z = e^x e^{iy}$ מתארות קרן אינסופית היוצאת מהראשית בזווית y.

בדומה לאקספוננט הממשי, ניתן היה לחשוב שניתן להגדיר בקלות גם את הלוגריתם המרוכב, כפונקציה הופכית של האקספוננט. מתברר שהיכולת לעשות זאת מוגבלת במקצת, אך נציג נסיון ראשוני לעשות כן.

הגדרה 2.1.5. הענף הראשי של הלוגריתם המרוכב

לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \{x + 0i, x \le 0\}$ נגדיר

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{A}(z).$$

שימו לב כי לכל z בתחום מתקיים

$$e^{\operatorname{Log}(z)}=e^{\ln|z|}e^{i\operatorname{A}(z)}=|z|\,e^{i\operatorname{A}(z)}=z.$$

כלומר, האקספוננט הוא הפונקציה ההופכית של הלוגריתם. יחד עם זאת, ההיפך לא בהכרח נכון.

דוגמה 2.1.2. דוגמאות לחישובים עם לוגריתם

1. עבור i מתקיים
$$\operatorname{Log}(i)=\ln|i|+i\operatorname{A}(i)=\frac{\pi i}{2}.$$
2. הלוגריתם הוא לא בדיוק ההופכי של e^z. כך למשל, אם $z=2\pi i$ אז
$$\operatorname{Log}\left(e^{2\pi i}\right)=\operatorname{Log}(1)=0\neq 2\pi i.$$

לסיכום חלק המבוא לפונקציות מרוכבות, נציג גרסה של 2 תוצאות ידועות בנושא פונקציות רציפות בקבוצה סגורה וחסומה (זוהי גרסה מרוכבת לאריתמטיקה ולמשפט ויירשטראס).

משפט 2.1.1. אריתמטיקה של רציפות

סכום, מכפלה, מנה והרכבה של פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה בתחום ההגדרה שלה.

משפט 2.1.2. משפט ויירשטראס (גרסה מרוכבת)

תהא $D\subset\mathbb{C}$ קבוצה סגורה וחסומה, ותהא $f:D\to\mathbb{C}$ רציפה. אזי

- התמונה, $f(D)$, היא קבוצה סגורה וחסומה.
- $|f(z)|$ מקבלת ערך מקסימלי ב-D.

2.1.1 פונקציות רב-ערכיות וענפים

בהגדרה 1.1.5 ציינו שענף הוא מעין "חתך" של פונקציה רב-ערכית. עשינו זאת בעיקר בשל הצורך להגדיר את הארגומנט כאובייקט בסיסי שאיתו נעבוד. יחד עם זאת, פונקציות רב-ערכיות והענפים שלהן יהיו נושא חשוב בפני עצמו ולכן נגדיר זאת בצורה מסודרת גם כאן.

הגדרה 2.1.6. פונקציה רב-ערכית

נסמן ב-$\mathcal{P}(\mathbb{C})$ את אוסף כל תתי-הקבוצות של $\mathbb{C}$. פונקציה $f:E\to\mathcal{P}(\mathbb{C})$ כאשר $E\subset\mathbb{C}$ מכונה **פונקציה רב-ערכית**. כלומר, זו פונקציה שמתאימה לכל $z\in E$ קבוצה של מספרים $f(z)\subset\mathbb{C}$.

כך לדוגמה, הצבה של ערכים שונים ל-$\arg(z)$ מניבה בכל פעם קבוצה שונה

$$\arg(1)=\{\ldots,-2\pi,0,2\pi,\ldots\},\quad \arg(-1)=\{\ldots,-\pi,\pi,\ldots\}.$$

דוגמה 2.1.3. "הוצאת שורש ריבועי"

דוגמה זו לא הועברה בהרצאות הפרונטליות. לכל $0 \neq z \in \mathbb{C}$, קיימים בדיוק זוג פתרונות למשוואה $w^2 = z$.
נגדיר

$$\operatorname{sqr} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{C}), \quad \operatorname{sqr}(z) := \left\{ w \in \mathbb{C} \middle| w^2 = z \right\}$$

כך למשל, אם $z = re^{i\theta}$, מקבלים כי

$$\operatorname{sqr}(z) = \left\{ \sqrt{r} e^{\frac{i\theta}{2}}, \sqrt{r} e^{\frac{i\theta}{2} + \pi i} \right\}$$

כלומר, לכל $z \neq 0$, הביטוי $\operatorname{sqr}(z)$ הוא קבוצה של שני איברים (ומכאן שלא מהווה פונקציה "רגילה" אלא פונקציה רב-ערכית).

לעתים, כאשר נתונות פונקציות רב-ערכיות, אנחנו נרצה לפעמים "לשאוב" מתוכן פונקציה "רגילה". כך למשל, היינו רגילים שמתוך פתרונות המשוואה $y^2 = x$ בממשיים החיוביים, ניתן לקחת את הפתרון החיובי ולהגדיר אותו בתור פונקציה, $y = \sqrt{x}$. זהו הרעיון של הגדרת ענף (ובקורס שלנו, נשתמש בגרסה יותר ספציפית כמוצג בהגדרה שלעיל).

הגדרה 2.1.7. ענף

תהא f פונקציה רב-ערכית המוגדרת בתחום $D \subset \mathbb{C}$. **ענף** של f הוא פונקציה **רציפה** $F : E \to \mathbb{C}$ כאשר $E \subset D$ הוא תחום (ראו הגדרה 1.1.12). כלומר, לכל $z \in E$ מתקיים $F(z) \in f(z)$ (בחירה של "איבר אחד" מתוך $f(z)$).

דוגמה 2.1.4. הענף הראשי של הארגומנט

הפונקציה $\mathrm{A}(z)$ מהגדרה 1.1.4 מוגדרת לכל $z \neq 0$ (כלומר, בתחום). הבעיה היא שבנקודות שבהן $y = 0, x < 0$, הפונקציה אינה רציפה. כך למשל

$$\lim_{x=1, y \to 0^+} \mathrm{A}(x+iy) = \pi, \qquad \lim_{x=1, y \to 0^-} \mathrm{A}(x+iy) = -\pi.$$

אי לכך, הענף הראשי של הארגומנט מוגדר להיות

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{x + 0i | x \leq 0\} \to \mathbb{C}, \quad \operatorname{Arg}(z) = \mathrm{A}(z).$$

בצורה כזאת מקבלים פונקציה המוגדרת בתת-קבוצה פתוחה וקשירה, אך הפעם היא גם פונקציה רציפה. לתחום ההגדרה של הענף קוראים לעתים בשם **המישור המרוכב המחורץ**.

הערה. בהמשך הקורס נוכיח שלא קיימת שום דרך לבנות ענף של הארגומנט ללא הוצאה של "קרן אינסופית" בדומה לאופן שעשינו במישור המחורץ. ליתר דיוק, אם בקבוצה מסויימת קיים מעגל המקיף את הראשית, לא ניתן לבנות בה ענף לארגומנט.

דוגמה נוספת וחשובה מאוד לפונקציה רב ערכית וענף שלה היא פונקציית הלוגריתם.

הגדרה 2.1.8. הלוגריתם המרוכב

לכל $z \neq 0$, מגדירים את **הלוגריתם המרוכב** על ידי

$$\log(z) := \ln|z| + i \arg(z) = \{\ln|z| + i(\mathrm{A}(z) + 2\pi k) | k \in \mathbb{Z}\}.$$

זוהי פונקציה רב ערכית, ולכל $w \in \log(z)$ מתקיים $e^w = z$, ואפשר לכתוב זאת גם בצורה

$$e^{\log(z)} = z.$$

הענף הראשי של הלוגריתם הוא הפונקציה $\mathrm{Log}(z)$ המופיעה בהגדרה 2.1.5. ענף זה מוגדר ורציף במישור המרוכב המחורץ.

2.2 גזירות ואנליטיות

2.2.1 משוואות קושי רימן

ההגדרה של נגזרת לפונקציה מרוכבת דומה מאוד להגדרה בפונקציות ממשיות עם משתנה יחיד.

הגדרה 2.2.1. גזירות מרוכבת

תהא f מוגדרת בסביבה של z_0. אומרים כי f **גזירה** בנקודה z_0 אם קיים הגבול

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

אם f גזירה בסביבה של z_0, אומרים שהיא **אנליטית/הולומורפית** ב-z_0. אם f גזירה בכל $\mathbb{C}$, מכנים אותה בשם **פונקציה שלמה**. אם f פונקציה רב-ערכית, וקיים לה ענף שהוא פונקציה אנליטית בתחומו, מכנים אותו בשם **ענף אנליטי**.

שימו לב שעל אף שגזירות היא אכן תכונה נקודתית, אנליטיות/הולומורפיות היא תכונה שאינה נקודתית. הדוגמה הראשונה שלנו מראה שעל אף הדמיון בין הגדרות הנגזרת בעולם המרוכב והממשי, לא כל פונקציה "יפה" תהיה גזירה במובן המרוכב.

דוגמה 2.2.1. הצמדה אינה גזירה

הפונקציה $f(z) = \bar{z}$ רציפה בכל $\mathbb{C}$, אך אינה גזירה באף נקודה. אכן, אם נכתוב

$$f(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}.$$

הגבול שהתקבל אינו קיים וכדי להוכיח זאת נשתמש בשיטת המסלולים מקורסי החדו"א.

- אם נסמן $h = x + 0i,\ x \to 0$ נקבל שהגבול בדוגמה שווה ל-1.

- אם נסמן $h = 0 + yi,\ y \to 0$ נקבל שהגבול בדוגמה שווה ל--1.

היות והגבול שונה לאורך מסילות שונות, נסיק כי הוא אינו קיים.

לאחר הדוגמה הבעייתית, נציג גם מספר משפחות של פונקציות גזירות.

משפט 2.2.1 אריתמטיקה של גזירות

חיבור, חיסור, כפל, מנה והרכבה של פונקציות גזירות היא פונקציה גזירה בתחום הגדרתה.

הוכחת המשפט זהה לחלוטין להוכחה מהמקרה הממשי ולא נטרח לחזור עליה.

דוגמה 2.2.2 פולינומים

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$(z+h)^n = z^n + nhz^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}h^2z^{n-2} + \cdots + h^n$$

ולכן

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} nz^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}hz^{n-2} + \cdots + h^{n-1} = nz^{n-1}$$

כלומר, הפונקציה z^n גזירה ומתקיים $(z^n)' = nz^{n-1}$ (כמו במקרה הממשי). על ידי שימוש במשפט 2.2.1, נוכל להסיק כי פולינומים ופונקציות רציונליות תמיד גזירים בתחום ההגדרה שלהם.

כדי לקבל עוד משפחה גדולה ורחבה של פונקציות גזירות, נעבור לדון בדרך פשוטה מאוד לבדיקת גזירות של פונקציות מרוכבות.

הגדרה 2.2.2 משוואות קושי-רימן

תהיינה $u(x,y), v(x,y)$ פונקציות בעלות נגזרות חלקיות בנקודה $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. אומרים כי u,v מקיימות את **משוואות קושי-רימן** בנקודה זו, אם

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,.$$

שימו לב שיש חשיבות לסדר בין u, v, היות והמשוואות לא סימטריות להחלפה ביניהן. הקשר בין משוואות אלה לגזירות של פונקציות מרוכבות יתברר במשפט הבא.

משפט 2.2.2 תנאי הכרחי

תהא $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ פונקציה גזירה בנקודה $z_0 = x_0 + iy_0$. אזי, u, v בעלות נגזרות חלקיות

בנקודה (x_0, y_0) והן מקיימות את משוואות קושי-רימן מהגדרה 2.2.2 בנקודה זו. בנוסף, הנגזרת נתונה על ידי

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

הוכחה. על פי הנתון, הגבול הבא קיים וסופי

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

רעיון ההוכחה יהיה להסתכל על הגבול בדרך שונה, ולהסיק ממנה שמשוואות קושי-רימן חייבות להתקיים. כדי לעשות זאת יהיה עלינו לבטא את הגבול בשפה של u, v,

$$f'(z_0) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0, y_0) + i\left(v(x_0+h_1, y_0+h_2) - v(x_0, y_0)\right)}{h_1 + ih_2}.$$

ועתה, נשתמש בשיטה דומה לזו שהפעלנו בדוגמה 2.2.1, ונעבוד ב"מסלולים שונים".

- **ערך מדומה קבוע.** נסמן $h_2 = 0$ ונשאיף $h_1 \to 0$. במקרה זה נקבל

$$f'(z_0) = \lim_{h_1\to 0}\frac{u(x_0+h_1, y_0) - u(x_0, y_0)}{h_1} + i\frac{v(x_0+h_1, y_0) - v(x_0, y_0)}{h_1}.$$

עתה, נשתמש בכך **שידוע** שהגבול קיים, ושקיום הגבול שקול לכך שהחלק הממשי והחלק המדומה מתכנסים על פי טענה 2.1.1. אך הגבול של החלק הממשי והגבול של החלק המדומה הם בדיוק ההגדרה של הנגזרת החלקית של u ושל v לפי x. כלומר

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

- **ערך ממשי קבוע.** נסמן $h_1 = 0$ ונשאיף $h_2 \to 0$. במקרה זה נקבל

$$f'(z_0) = \lim_{h_2\to 0}\frac{u(x_0, y_0+h_2) - u(x_0, y_0)}{ih_2} + \frac{v(x_0, y_0+h_2) - v(x_0, y_0)}{h_2}.$$

גם כאן, ידוע שהגבול קיים והוא שקול לכך שקיים הגבול לחלק הממשי והחלק המדומה בנפרד. לכן

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}.$$

בשיטה שלנו, חישבנו את **אותו הגבול** בשתי דרכים שונות. מכאן, ששני הביטויים חייבים להיות זהים כלומר

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

מהשוואה של הרכיב הממשי והמדומה, מקבלים בדיוק את משוואות קושי-רימן. □

דוגמה 2.2.3. הוכחת אי-גזירות בעזרת המשפט

נוכיח כי הפונקציה $f(z)=e^{\bar{z}}$ אינה גזירה באף נקודה. כדי לעשות זאת נכתוב

$$f(z)=e^{x}e^{-iy}=\overbrace{e^{x}\cos(y)}^{=u(x,y)}+i\overbrace{(-e^{x}\sin(y))}^{=v(x,y)},$$

ונבדוק את קיום משוואות קושי-רימן.

$$\begin{array}{ll}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=e^{x}\cos(y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=-e^{x}\cos(y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-e^{x}\sin(y) & -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=e^{x}\sin(y).\end{array}$$

ניתן לזהות שהמשוואות לא מתקיימות באף נקודה, ועל פי משפט 2.2.2 - הפונקציה אינה גזירה באף נקודה.

דוגמה 2.2.4. הגבלות על פונקציות אנליטיות

יהא $D\subset\mathbb{C}$ תחום ו-$f=u+iv$ אנליטית ב-D.

1. נניח כי גם $\bar{f}=u-iv$ אנליטית ב-D. אזי, ממשפט 2.2.2 נובע כי

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(-v(x,y))=-\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial}{\partial x}(-v(x,y))=\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).\end{cases}$$

אם נשלב זאת עם משוואות קושי-רימן המקוריות עבור f, נקבל כי

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0$$

בכל $\tilde{D}=\{(x,y)|x+iy\in D\}$. היות ומדובר בתחום קשיר, נובע שהפונקציות קבועות. לסיכום, אם f וגם $\bar{f}$ אנליטיות, מתקיים בהכרח כי f קבוע.

2. נניח כי $|f(z)|=C$ עבור $C\geq 0$ נתון. במקרה זה נוכל לכתוב

$$|f(z)|^{2}=f(z)\bar{f}(z)=C^{2}.$$

אם $C=0$ מקבלים כי f קבועה ממילא ושווה לאפס. אחרת, אפשר לכתוב $\bar{f}(z)=\frac{C^{2}}{f(z)}$, ומכך שהאגף הימני אנליטי נובע כי $\bar{f}$ אנליטית. אך על פי הדוגמה הקודמת, נסיק כי f בהכרח קבועה.

לפני שנעבור למשפט החשוב הבא, שמראה את הכיוון ההפוך למשפט 2.2.2, נציג תזכורת להגדרה של "גזירות" לפונקציה ממשית בשני משתנים.

הגדרה 2.2.3. גזירות בשני משתנים (ממשי)

תהא $u(x,y)$ מוגדרת בסביבה של נקודה (x_0,y_0). אומרים כי $u(x,y)$ גזירה בנקודה זו אם קיימים קבועים A,B ופונקציית "שארית" $\varepsilon(h,k)$ שעבורם

$$u(x_0+h,y_0+k)=u(x_0,y_0)+Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2},$$

וגם

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0.$$

אם הפונקציה גזירה ניתן להראות גם כי $A=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\,,B=\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$.

הערה. לא נתעמק בכך, אך במשפט 2.2.2 אפשר למעשה להראות שאם f גזירה (מרוכבת) בנקודה z_0, אזי u,v גזירות ב-(x_0,y_0) במובן של הגדרה 2.2.3 (זכרו שגזירות במובן זה היא "חזקה" יותר מאשר קיום של נגזרות חלקיות).

משפט 2.2.3. תנאי מספיק

תהא $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ מוגדרת בסביבת $z_0=x_0+iy_0$, כך ש-u,v גזירות ב-(x_0,y_0) במובן של הגדרה 2.2.3. אזי, אם u,v מקיימות את משוואות קושי-רימן, f גזירה (מרוכבת) בנקודה z_0.

הערה. נדגיש שוב ששילוב של שני המשפטים למעשה נותן לנו שקילות. כלומר, f גזירה בנקודה אם ורק אם u,v גזירות בנקודה ומקיימות בה את משוואות קושי-רימן.

הוכחה. הגבול שעלינו לנסות ולחשב הוא הגבול

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}&\frac{f\left(x_0+h+i\left(y_0+k\right)\right)-f\left(x_0+iy_0\right)}{h+ik}\\&=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left(u(x_0+h,y_0+k)-u(x_0,y_0)\right)+i\left(v(x_0+h,y_0+k)-v(x_0,y_0)\right)}{h+ik}.\end{aligned}$$

עתה, נוכל להשתמש בנתון על u,v ובהגדרה 2.2.3 כדי לכתוב

$$\begin{aligned}u\left(x_0+h,y_0+k\right)-u(x_0,y_0)&=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\,h+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\,k+\varepsilon_u\left(h,k\right)\sqrt{h^2+k^2}\\v\left(x_0+h,y_0+k\right)-v(x_0,y_0)&=\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,h+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\,k+\varepsilon_v\left(h,k\right)\sqrt{h^2+k^2}\end{aligned}$$

נציב זאת בגבול שחישבנו ונקבל

$$\begin{aligned}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}&\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\,h+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\,k+i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,h+i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\,k}{h+ik}\\&+\left(\varepsilon_u\left(h,k\right)+\varepsilon_v\left(h,k\right)\right)\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{h+ik}.\end{aligned}$$

□

בשלב הפישוט האחרון, נשים לב כי

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\,h+i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\,k\overset{(2.2.2)}{=}(h+ik)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\,h+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,k\overset{(2.2.2)}{=}i\,(h+ik)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),$$

כך שלאחר הצבת שוויון זה בגבול, המכנה מצטמצם לחלוטין וניוותר עם הגבול

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)+\overbrace{(\varepsilon_u(h,k)+\varepsilon_v(h,k))}^{\to 0}\overbrace{\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{h+ik}}^{\text{חסום}}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

לסיכום, הראינו שהגבול קיים ומכאן ש-f גזירה, כדרוש.

טענה 2.2.1. גזירות אקספוננט ולוגריתם

הפונקציה e^z היא פונקציה שלמה, והפונקציה $\text{Log}\,(z)$ גזירה בתחום $\mathbb{C}\setminus\{x+0i\,|x\le 0\}$.

הוכחה. נזכיר כי ניתן לכתוב את שתי הפונקציות בצורה מפורשת באופן הבא

$$e^z=e^x\cos(y)+i\,e^x\sin(y),\quad \text{Log}\,(z)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+i\,\text{A}\,(x,y).$$

בשני המקרים, הפונקציות כתובות בצורה $u+iv$ כאשר u,v גזירות בתחומי ההגדרה המתאימים. אי לכך, מספיק להשתמש במשפט 2.2.3 ולבדוק שהפונקציות מקיימות את משוואות קושי רימן. עבור האקספוננט

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=e^x\cos(y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-e^x\sin(y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

עבור הלוגריתם

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

משוואות קושי-רימן מתקיימות ולכן הפונקציות גזירות. □

2.2.2 הערשה - נגזרות חלקיות לפי $z,\bar{z}$

חלק זה אינו נמצא בחומר הנדרש בקורס והוא מוגדר כפרק הערשה בלבד.

במהלך החלק האחרון, השתמשנו רבות ביכולת לעבור בין הכתיבה של f בעזרת $z,\bar{z}$ לבין הכתיבה שלה בעזרת x,y.

אפשר לחשוב (על אף שזה לא מדויק) על הכתיבות כעל "החלפת משתנים" ולכתוב

$$u\left(x(z,\bar{z}),y(z,\bar{z})\right)=u\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right).$$

נניח גם בנוסף (שוב, ללא הצדקה ריגורוזית) שניתן להשתמש בכלל השרשרת. במקרה זה נוכל לכתוב

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

באופן דומה

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

מה שעשינו כאן אמנם לא מוגדר טוב בצורה ריגורוגית, אך הוא מספק אינטואיציה ומוטיבציה להגדרות הבאות.

הגדרה 2.2.4. אופרטורי גזירה לפי $z,\bar{z}$

תהא $f=u+iv$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות (לפי x,y) בנקודה (x_0,y_0). אזי מגדירים את **הגזירה החלקית** לפי $z,\bar{z}$ על ידי

$$\frac{\partial f}{\partial z}:=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y},\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

משתמשים גם בסימון העזר

$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y},\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}:=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

שימו לב ש**לא ניתן** להגדיר את הנגזרות החלקיות הללו בעזרת גבולות בדומה לנגזרות חלקיות רגילות. יחד עם זאת, הנגזרות החלקיות לפי $z,\bar{z}$ מקיימות תכונות רבות ושימושיות. הראשונה בהן היא היכולת "לאתר" פונקציות גזירות במובן המרוכב.

טענה 2.2.2. קושי-רימן ו-$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

תהא $f=u+iv$ בעלת נגזרות חלקיות בנקודה $z_0=x_0+iy_0$. אזי, f מקיימת את משוואות קושי-רימן בנקודה זו (בפרט, f גזירה מרוכבת) אם ורק אם $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0$. יתרה מכך, אם $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$, הנגזרת המרוכבת של f (לפי הגדרה 2.2.1) נתונה על ידי

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0).$$

הוכחה. לפי הגדרה 2.2.4

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}&=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

מהשוואת הרכיב הממשי והמדומה של ביטוי זה, מקבלים כי $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ אם ורק אם מתקיימות משוואות קושי-רימן. לבסוף, תחת הנחה זו מקבלים כי f גזירה וכי

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = f'(z_0)$$

על פי שני הביטויים שראינו כבר בהוכחה 2.2.2. □

התוצאה המפתיעה מהגדרה זו היא שבאופן כללי, הקיום של $\frac{\partial f}{\partial z}$ לא מעיד על כך ש-f גזירה, אלא רק שיש לה נגזרת חלקית לפי z.

דרך יצירתית ומאוד שימושית לחשוב על הנתון $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, הוא שהפונקציה למעשה "לא תלויה" ב-$\bar{z}$ ומבוטאת בעזרת z בלבד. כלומר, הופעה של $\bar{z}$ בביטוי כלשהו בדרך כלל תעיד על בעיה בגזירות שלו. לפני שנדגים זאת, נציג מספר כללי גזירה שימושיים שיאפשרו לעבוד עם נוסחה זו.

טענה 2.2.3. כללי גזירה לפי $z, \bar{z}$

תהיינה f, g פונקציות בעלות נגזרות חלקיות לפי x, y (ולכן גם לפי $z, \bar{z}$) אזי

- **ליניאריות.** $\frac{\partial}{\partial z}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$.
- **כלל מכפלה.** $\frac{\partial}{\partial z}(fg) = \frac{\partial f}{\partial z}g + f\frac{\partial g}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$.
- **כלל השרשרת.** מתקיים

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g\right)\frac{\partial g}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ g\right)\frac{\partial \bar{g}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \circ g\right)\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \circ g\right)\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}.$$

- **הצמדה.** $\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$, $\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$.

בעזרת רעיון זה אנחנו יכולים לחשב את הנגזרות החלקיות של ביטויים רבים בקלות.

דוגמה 2.2.5. חישובים של $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z}$

1. הפונקציה z^n גזירה מרוכבות ולכן

$$\frac{\partial z^n}{\partial z} = (z^n)' = nz^{n-1}, \quad \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}} = 0.$$

מכאן אפשר להשתמש בטענה 2.2.3 כדי להסיק

$$\frac{\partial \bar{z}^n}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}}\right)} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}^n}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial z^n}{\partial z}\right)} = n\bar{z}^{n-1}.$$

מכאן אפשר להרחיב את הגזירה לכל פולינום ב-$z, \bar{z}$ בקלות.

2. הפונקציה e^z גזירה מרוכבת ולכן

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = (e^z)' = e^z, \qquad \frac{\partial e^z}{\partial \bar{z}} = 0.$$

נשתמש בכך שמתקיים גם (מחישוב ישיר) $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, כדי להסיק

$$\frac{\partial e^{\bar{z}}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial e^z}{\partial \bar{z}}\right)} = 0, \qquad \frac{\partial e^{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial e^z}{\partial z}\right)} = e^{\bar{z}}.$$

3. לפונקציה $f(z) = e^{z^2\bar{z}-4\bar{z}}$ יש נגזרות חלקיות, ולכן נוכל לנסות לבדוק מתי מתקיימות משוואות קושי-רימן על ידי שימוש בכללי הגזירה. נגדיר

$$g(z) = z^2\bar{z} - 4\bar{z}, \qquad h(z) = e^z$$

מכאן, מתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(h \circ g) = \left(\frac{\partial h}{\partial z} \circ g\right)\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \circ g\right)\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}.$$

היות ו-$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$ הנסכם הימני מתאפס לחלוטין. כלומר

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = e^{z^2\bar{z}-4\bar{z}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(z^2\bar{z} - 4\bar{z}\right) = e^{z^2\bar{z}-4\bar{z}}\left(z^2 - 4\right).$$

הביטוי שקיבלנו מתאפס רק כאשר $z = \pm 2$, ולכן רק בנקודות אלה מתקיימות משוואות קושי-רימן, ורק שם הפונקציה גזירה מרוכבת.

2.2.3 פונקציות הרמוניות

הגדרה 2.2.5. הלפלסיאן ופונקציות הרמוניות

יהא $D \subset \mathbb{R}^2$ תחום ותהא $u(x,y) : D \to \mathbb{R}$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר שני (כולל). אומרים כי u היא **פונקציה הרמונית** ב-D אם

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \qquad \forall (x,y) \in D.$$

לאופרטור $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ קוראים בשם **אופרטור לפלס** או **לפלסיאן**.

כפי שנראה בהמשך, קיים קשר עמוק בין פונקציות הרמוניות ממשיות לפונקציות מרוכבות אנליטיות.

דוגמה 2.2.6. דוגמאות לפונקציות הרמוניות

1. הפונקציה $u(x,y)=x^2-y^2$ היא פונקציה הרמונית בכל $\mathbb{R}^2$ כי

$$\Delta u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2-y^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2-y^2\right)=2-2=0.$$

2. הפונקציה $u(x,y)=e^x\cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל $\mathbb{R}^2$ כי

$$\Delta u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^x\cos(y)\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(e^x\cos(y)\right)=e^x\cos(y)-e^x\cos(y)=0.$$

3. הפונקציה $u(x,y)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ הרמונית ב-$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ כי

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y)&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\\&=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0.\end{aligned}$$

4. הפונקציה $u(x,y)=x^2+y^2$ אינה הרמונית באף נקודה כי

$$\Delta u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2+y^2\right)=2+2=4\neq 0.$$

נחזור לדוגמה 2.2.6 מיד לאחר הטענה הבאה ונבין אותה באור אחר לגמרי.

טענה 2.2.4. אנליטיות גוררת הרמוניות

תהא $D\subset\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ותהא $f=u+iv:D\to\mathbb{C}$ אנליטית, כך ש-u,v בעלות נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר שני כולל. אזי, u,v הרמוניות.

הוכחה. נשתמש במשוואות קושי-רימן (נובע מהנתון ומשפט 2.2.2), ונקבל כי

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\overbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)}^{=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right).$$

בשלב הזה נשתמש בכך שהנגזרות החלקיות רציפות עד לסדר השני כולל, ולכן ניתן להחליף את סדר הגזירה, ולהסיק כי

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\overbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right)}^{=-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\,.$$

לאחר העברת אגפים, נסיק את הדרוש. כמובן שהוכחה זהה לחלוטין מראה כי גם v הרמונית. □

בצורה פשוטה ניתן לומר שהחלק הממשי והחלק המדומה של פונקציה אנליטית הוא תמיד פונקציה הרמונית. לכן לא מפתיע, שבדוגמה 2.2.6, מתקיים

$$x^2-y^2=\mathfrak{Re}\left(z^2\right), \quad e^x\cos(y)=\mathfrak{Re}\left(e^z\right), \quad \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\mathfrak{Re}\left(\mathrm{Log}(z)\right),$$

כך שהיה ניתן להסיק שהפונקציות בדוגמה הרמוניות גם על פי הטענה שעתה הוכחנו. מנגד, הדוגמה הרביעית לא יכולה להיות החלק הממשי של פונקציה אנליטית היות והיא אינה הרמונית.

בשלב הבא, נראה שהרמוניות לא רק נובעת מאנליטיות, אלא גוררת אותה.

הגדרה 2.2.6. הרמוניות צמודות

יהא $\tilde{D}\subset\mathbb{R}^2$ תחום ותהיינה $u,v:\tilde{D}\to\mathbb{R}$ בעלות נגזרות חלקיות עד לסדר שני כולל. אומרים כי u,v **הרמוניות צמודות** ב-D אם u,v הרמוניות והן מקיימות את משוואות קושי-רימן ב-D.

במילים אחרות, u,v נקראות הרמוניות צמודות אם $u+iv$ היא פונקציה אנליטית ב-$D=\{x+iy|(x,y)\in\mathbb{C}\}$.

טענה 2.2.5. יחידות עד כדי קבוע

יהא $D\subset\mathbb{R}^2$ תחום ותהא $u:D\to\mathbb{R}$ הרמונית. אם v,w זוג פונקציות הרמוניות שצמודות ל-u, הן נבדלות בקבוע.

הוכחה. על פי משפט 2.2.2, מתקיים

$$\begin{array}{c}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y}(x,y)\end{array},$$

מה שאומר שלפונקציה $h(x,y)=v(x,y)-w(x,y)$ יש נגזרות חלקיות השוות באופן זהותי לאפס בתחום. היות ותחום הוא (בהגדרה) קבוצה פתוחה וקשירה, נסיק כי h פונקציה קבועה. □

לאחר שהוכחנו יחידות (עד כדי קבוע) של פונקציה הרמונית צמודה, נוכיח גם קיום שלה - אך רק באופן מקומי בשלב זה.

משפט 2.2.4. קיום הרמונית צמודה בעיגול

נניח כי $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בעיגול $B((x_0,y_0),r)$ $(r>0)$ כמובן. אזי, קיימת פונקציה $v(x,y)$ הרמונית בכדור שהיא הרמונית צמודה ל-$u(x,y)$.

הוכחה. תחילה, לשם נוחות - נניח כי $v(x_0, y_0) = 0$ (היות וממילא ההרמונית הצמודה נקבעת עד כדי קבוע). כדי למצוא את ההרמונית הצמודה, נזכיר שהדרישה הראשונית היא שיתקיימו משוואות קושי-רימן, ולכן ננסה להתחיל מהמשוואה

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y).$$

ולכן אפשר לנסות ולהגדיר את v בעזרת u הנתונה, משוואות קושי-רימן ונוסחת ניוטון-לייבניץ באופן הבא

$$v(x, y) := \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial y}(x, s)\, \mathrm{d}s + v(x, y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, s)\, \mathrm{d}s + v(x, y_0).$$

שימו לב שהביטוי שמגדיר את v (כלומר, אגף ימין) מכיל אינטגרל שתלוי רק ב-u, אך הוא עדיין מכיל את $v(x, y_0)$ שהוא ביטוי שלא ידוע לנו. כדי לטפל בו נשתמש במשוואת קושי-רימן השניה, ונוסחת ניוטון-לייבניץ כדי לכתוב

$$v(x, y_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial x}(t, y_0)\, \mathrm{d}t + v(x_0, y_0) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)\, \mathrm{d}t,$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בהנחה כי $v(x_0, y_0) = 0$. משילוב כל אלו, נקבל מועמדת להרמונית הצמודה v לפי

$$v(x, y) := \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, s)\, \mathrm{d}s - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)\, \mathrm{d}t.$$

כמובן שמציאת המועמדת לא מספיקה כדי להוכיח את הטענה, ועלינו לבדוק כי v הרמונית שמקיימת את משוואות קושי רימן.

היות וידוע כי u פונקציה הרמונית, יש לה נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר השני, כולל. לכן, אפשר לחשב את הנגזרות החלקיות של v שהגדרנו על פי כללי הגזירה הידועים מקורסי החדו"א, כלומר

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, s)\, \mathrm{d}s - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0).$$

בנוסף, העובדה כי u הרמונית גוררת כי $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$, כלומר

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= -\int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, s)\, \mathrm{d}s - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0)\\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).\end{aligned}$$

שימו לב שלא רק שחישבנו את הנגזרת החלקית $\frac{\partial v}{\partial x}$ - גילינו שהיא רציפה ואכן מקיימת את משוואת קושי-רימן הראשונה. באופן דומה

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y),$$

כך שמשוואות קושי רימן אכן מתקיימות. לבסוף, הוכחת ההרמוניות זהה לחלוטין להוכחה מטענה 2.2.4. $\square$

2.3 פונקציות אלמנטריות

בתת-פרק זה נקדיש זמן כדי לדון בארסנל של הפונקציות הנפוצות שנפגוש במהלך הקורס. כל הפונקציות שיוצגו כאן יהיו אנליטיות בתחום הגדרתן, ונציג את חלק מהתכונות המרכזיות שלהן.

האקספוננט. לכל $z = x + iy \in \mathbb{C}$ הגדרנו

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y).$$

בזכות הנוסחה לנגזרת ממשפט 2.2.2, נקבל כי

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos(y)\right) + i\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \sin(y)\right) = e^z.$$

כלומר, באופן לא מאוד מפתיע, הנגזרת של האקספוננט היא האקספוננט, בדומה למקרה הממשי.

- לכל x, y, הערך e^z הוא נקודה בעלת רדיוס e^x שנמצאת בזווית y יחסית לציר x החיובי.
- בזכות הנקודה הקודמת, נובע כי $f(z + 2\pi i) = f(z)$. כלומר, האקספוננט הוא פונקציה מחזורית ובעלת מחזור $2\pi i$.
- לכל x, ניתן להשתמש באקספוננט המרוכב על מנת להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות הממשיות

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

הנקודה האחרונה מובילה אותנו לסוג הבא של הפונקציות האלמנטריות.

הפונקציות הטריגונומטריות. לכל $z = x + iy$, נגדיר

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

בעזרת אריתמטיקה והרכבה, ברור שהפונקציות אנליטיות בכל $\mathbb{C}$.

- בדומה לעולם הממשי, הפונקציות מחזוריות ובעלות מחזור 2π.
- חישוב מפורש של הנגזרת מראה כי

$$(\cos(z))' = -\sin(z), \quad (\sin(z))' = \cos(z).$$

- כל הזהויות הטריגונומטריות הרגילות עדיין מתקיימות, וקל מאוד להוכיח אותן בעזרת ההצגה המרוכבת. כלומר

$$\begin{aligned} \cos^2(z)+\sin^2(z)&=1, & \cos^2(z)-\sin^2(z)&=\cos(2z) \\ 2\sin(z)\cos(z)&=\sin(2z), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-z\right)&=\sin(z) \\ \cos(-z)&=\cos(z), & \sin(-z)&=-\sin(z). \end{aligned}$$

- ניתן לזהות כי עבור $z=iy$ מתקיים

$$\cos(iy)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}, \quad \sin(iy)=\frac{e^{-y}-e^y}{2i}$$

כך שהפונקציות הטריגונומטריות **אינן חסומות** ב-$\mathbb{C}$.

הפונקציות ההיפרבוליות. לכל $z=x+iy$ נגדיר

$$\cosh(z):=\frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z):=\frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

בעזרת אריתמטיקה והרכבה, ברור שהפונקציות אנליטיות בכל $\mathbb{C}$.

- הדמיון בין הביטויים מרמז על קשר בין הפונקציות הטריגונומטריות להיפרבוליות. ואכן,

$$\cosh(iz)=\cos(z), \quad i\sinh(iz)=\sin(z).$$

- הדמיון בין הנוסחאות מרמז גם על דמיון בזהויות שהפונקציות הטריגונומטריות יקיימו. ואכן

$$(\cosh(z))'=\sinh(z), \quad (\sinh(z))'=\cosh(z).$$

- בנוסף לזהות על הנגזרות, מתקיים

$$\begin{aligned} \cosh^2(z)-\sinh^2(z)&=1, & \cosh^2(z)+\sinh^2(z)&=\cosh(2z) \\ 2\sinh(z)\cosh(z)&=\sinh(2z), & \cosh\left(\tfrac{\pi i}{2}+z\right)&=i\sinh(z) \\ \cosh(-z)&=\cos(z), & \sinh(-z)&=-\sinh(z). \end{aligned}$$

- גם הפונקציות ההיפרבוליות אינן חסומות.
- הפונקציות ההיפרבוליות מחזוריות ובעלות מחזור $2\pi i$.

הלוגריתם המרוכב. עבור $z\neq 0$ ניתן להגדיר

$$\log(z):=\{w\in\mathbb{C}|e^w=z\},$$

וניתן להראות כי

$$\log(z)=\ln|z|+i\arg(z)=\{\ln|z|+i\,(\mathrm{A}(z)+2\pi k)|k\in\mathbb{Z}\}.$$

הלוגריתם הוא הדוגמה החשובה ביותר בקורס לפונקציה מרוכבת רב-ערכית.

- הענף הראשי של הלוגריתם הוא הפונקציה $\operatorname{Log}(z) := \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)$ שמוגדרת, רציפה, ולמעשה גם אנליטית במישור המחורץ,
$$\mathbb{C} \setminus \{x+0i \,|\, x \le 0\}.$$
- ניתן להראות שבכל תחום קשיר, אם L_1, L_2 שני ענפים של הלוגריתם, הם נבדלים בכפולה שלמה של $2\pi i$.
- כפועל יוצא מכך, אם L ענף של הלוגריתם,
  - $e^{L(z)} = z$. לא בהכרח מתקיים $L(e^z) = z$.
  - $L'(z) = \frac{1}{z}$.
- **כרגע ללא הוכחה**, אם $D \subset \mathbb{C}$ תחום שבו קיים מעגל שמקיף את הראשית, לא ניתן להגדיר בתחום זו ענף של הלוגריתם (הוא לא יהיה רציף).

פונקציה מעריכית כללית. עבור $a = e, 0$ ברור לנו מהי הפונקציה $f(z) = a^z$. עבור $0, e \neq a \in \mathbb{C}$, הפונקציה המעריכית מוגדרת להיות **פונקציה רב ערכית** הנתונה לפי הנוסחה

$$f(z) = a^z := e^{z\log(a)}.$$

- היות והפונקציה מוגדרת בעזרת הלוגריתם, כל ענף של $\log(a)$ מגדיר ענף של הפונקציה המעריכית. **כמוסכמה בקורס שלנו**, אלא אם נאמר אחרת, נשתמש בסימון a^z **לענף הראשי** של פונקציה זו, כלומר

$$F(z) = a^z = e^{z\operatorname{Log}(a)}$$

שהוא ענף אנליטי במישור המחורץ. נדגיש שוב, שאנחנו נשתמש באותו הסימון גם לפונקציה הרב-ערכית וגם לענף שלה, על מנת לחסוך בסימונים מיותרים. כאשר כוונתנו תהיה לפונקציה המערכית הרב-ערכית, נציין זאת במפורש.

- מחישוב ישיר (שימו לב, עבור הענף הראשי, אך למעשה עבור כל ענף אחר)

$$F'(z) = (a^z)' = \operatorname{Log}(a)\, a^z.$$

- שימו לב שבניגוד לענפים של הלוגריתם, ענפים של פונקציה מעריכית אינם נבדלים בקבוע, אלא הם זהים עד כדי כפל בקבוע.

פונקציית החזקה. נכליל את הפונקציה $f(z) = z^a$ למישור המרוכב. ככלל, לכל $z \neq 0$ נגדיר

$$f(z) = z^a := e^{a\log(z)},$$

כך שגם כאן מדובר בפונקציה רב-ערכית באופן עקרוני.

- כאשר $a \in \mathbb{Z}$, ניתן להראות כי הפונקציה שמתקבלת היא פונקציה **חד-ערכית**.

- בכל מקרה שבו $a \neq \mathbb{Z}$, בחירה של ענף ללוגריתם גוררת בחירה של ענף לפונקציית החזקה. גם כאן, הבחירה הטבעית שלנו תהיה הענף הראשי (ונשתמש בסימון זהה לענף ולפונקציה הרב-ערכית

$$F(z) = z^a := e^{a\mathrm{Log}(z)},$$

שהוא ענף אנליטי במישור המחורץ.

- גם כאן, הנגזרת של הפונקציה "משחזרת" את הנגזרת מהמקרה הממשי, כלומר

$$F'(z) = az^{a-1}.$$

פונקציות טריגונומטריות והיפרבוליות הפוכות. נתחיל בלחפש פתרון למשוואה $\sin(z) = w$. כלומר

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w.$$

על ידי הכפלת כל אגפי המשוואה ב-$2ie^{iz}$ והעברת אגפים מקבלים את המשוואה

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0.$$

מכאן אנחנו יודעים לפתור עבור e^{iz} ולקבל

$$e^{iz} = iw + \left(1 - w^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

שימו לב שכתבנו את השורש בתור "חזקת $\frac{1}{2}$" היות וזו פונקציה רב-ערכית במרוכבים, שמכילה את שני השורשים של כל מספר מרוכב (לכן אנחנו לא נזקקים לסימן $\pm$ בנוסחת השורשים). אך מכאן נובע כי

$$iz = \log\left(iw + \left(1 - w^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \Longrightarrow z = -i\log\left(iw + \left(1 - w^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

כלומר, קיבלנו שהביטוי באגף הימני הוא למעשה "הפונקציה ההפוכה" של פונקציית הסינוס. מכאן הסימון (עבור הקוסינוס החישוב כמובן דומה),

$$\arcsin(z) := -i\log\left(iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad \arccos(z) := -i\log\left(z + \left(z^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

- שימו לב שלפי הגדרה $\sin(\arcsin(z)) = z$ וכן $\cos(\arccos(z)) = z$ לכל z בתחום ההגדרה של הפונקציות.
- בחירת ענף לשורש ובחירת ענף ללוגריתם מניבות ענף אנליטי לפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות.
- כאן נשתמש לעתים בסימון $\mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arccos}$ עבור בחירת הענפים הראשיים של הפונקציה המעריכית ופונקציית הלוגריתם, ואלו יהיו הענפים הראשיים של הפוננקציות הללו.

3

חקירה של פונקציות מרוכבות

3.1 מסילות והעתקות קונפורמיות

3.1.1 מסילות

הגדרה 3.1.1 מסילות רציפות וגזירות

פונקציה **רציפה** $\gamma : I \to \mathbb{C}$ כאשר $I \subset \mathbb{R}$ מכונה **מסילה/מסילה רציפה**. נהוג להשתמש בסימון

$$\gamma : I \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = x(t) + iy(t).$$

בנוסף

- אם $x(t), y(t)$ גזירות (ברציפות) ב-I אומרים כי γ **מסילה גזירה (ברציפות)** ב-I. הנגזרת שלה נתונה על ידי $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.
- אם γ גזירה ברציפות וגם $\gamma'(t) \neq 0$ לכל $t \in I$, אומרים כי γ **מסילה חלקה**. אם $\gamma'(t) \neq 0$ למעט בכמות סופית של נקודות, אומרים כי γ **חלקה למקוטעין**.
  - עבור מסילה חלקה, הישר שעובר בנקודה $\gamma(t)$ וכיוונו $\gamma'(t)$ משיק למסילה בנקודה. אם הנגזרת מתאפסת, לא בהכרח קיים ישר משיק.
- מסילה בקטע $I = [a, b]$ שעבורה $\gamma(a) = \gamma(b)$ מכונה **מסילה סגורה**.
- מסילה שאינה חותכת את עצמה (למעט אולי בנקודת ההתחלה והסיום) מכונה **מסילה פשוטה**. מסילה פשוטה וסגורה מכונה **מסילת ז'ורדן**.

הגדרה 3.1.2. פנים וחוץ של מסילה

על פי משפט ז'ורדן (שלא נוכיח בקורס), אם γ מסילה רציפה, פשוטה וסגורה - היא מחלקת את $\mathbb{C}$ לזוג קבוצות קשירות פתוחות וזרות, כאשר אחת מהן בדיוק אינה חסומה. לחלק שאינו חסום קוראים בשם **החוץ** של המסילה, ולחלק השני קוראים **הפנים של המסילה**.

הגדרה 3.1.3. מגמת מסילה

אם γ מסילה פשוטה ולא סגורה בקטע $I = [a, b]$, **המגמה** של γ היא **מ** $\gamma(a)$ **ל-** $\gamma(b)$. אם γ מסילה חלקה וסגורה, אומרים שהיא **במגמה חיובית** אם הפנים של המסילה נמצא משמאל לכיוון המשיק שלה. במסילה חלקה למקוטעין המגמה היא חיובית אם תכונה זו מתקיימת בכל נקודה שבה הנגזרת לא מתאפסת.

אם γ מסילה במגמה נתונה, המסילה

$$(-\gamma)(t) := \gamma(b - (t - a))$$

מניבה את אותן הנקודות בסדר הפוך (כלומר, מגמה הפוכה).

טענה 3.1.1. תמונת מסילה תחת העתקה רציפה

יהיו $D \subset \mathbb{C}, I \subset \mathbb{R}$ קבוצות. אם $\gamma : I \to \mathbb{C}$ מסילה שעבורה $\gamma(t) \in D$ לכל $t \in I$ ו-$f : D \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה, ההרכבה

$$f \circ \gamma : I \to \mathbb{C}, \quad f \circ \gamma\,(t) = f(\gamma(t)) = f(x(t) + iy(t))$$

היא מסילה רציפה.

הטענה כמובן נובעת באופן מידי מכך שהרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה. החשיבות של טענה זו היא שבאופן טבעי, אי אפשר לתאר את הגרף של פונקציה $f : D \to \mathbb{C}$ (נדרשים לכך 4 ממדים). לכן, דרך מאוד יעילה לחקור פונקציות מרוכבות היא התבוננות במסילות γ במישור המרוכב ובאופן שבו f משנה אותן, כלומר במסילות $f \circ \gamma$.

דוגמה 3.1.1. מסילות חשובות ונפוצות

בחלק זה נציג חלק מהמסילות הנפוצות שנפגוש בקורס.

1. **קו ישר.** בהנתן זוג נקודות $z, w \in \mathbb{C}$, המסילה

$$\gamma(t) = z + t(w - z), \quad t \in [0, 1]$$

היא מסילה חלקה שמתארת את הקו הישר מ-z אל w. נגזרתה היא $\gamma'(t) = w - z$.

2. **מעגל.** בהנתן $z \in \mathbb{C}, r > 0$, המסילה

$$\gamma(t) = z + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

היא מסילת ז'ורדן חלקה שמתארת את המעגל ברדיוס r סביב המרכז z. מגמת המסילה היא חיובית, ונגזרתה נתונה על ידי

$$\gamma'(t) = rie^{it}.$$

3. **שרשור מסילות.** נניח כי $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C},\ \eta : [c, d] \to \mathbb{C}$ מסילות רציפות שמקיימות $\gamma(b) = \eta(c)$. אזי המסילה

$$\gamma + \eta(t) = \begin{cases} \gamma(a + t(b - a)), & t \in [0, 1] \\ \eta(c + (t - 1)(d - c)), & t \in [1, 2] \end{cases}, \quad \forall t \in [0, 2]$$

היא מסילה רציפה שמחברת את שתי המסילות. אם γ, η חלקות למקוטעין, גם המסילה $\gamma * \eta$ תהיה חלקה למקוטעין.

3.1.2 זוויות בין מסילות

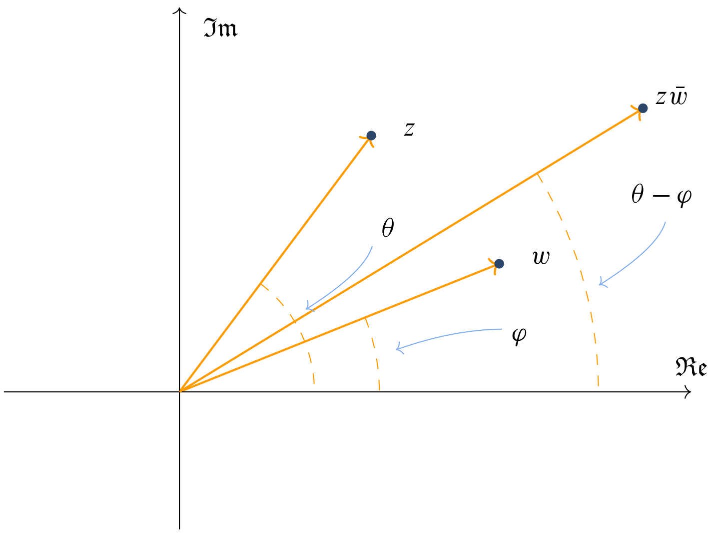
יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ מספרים מרוכבים ושונים מאפס. נסמן ב-$r, s > 0$ וב-$\theta, \varphi \in [-\pi, \pi)$ מספרים שעבורם

$$z = re^{i\theta}, \quad w = se^{i\varphi}.$$

בצורה כזאת מקבלים כי

$$z\bar{w} = re^{i(\theta - \varphi)}.$$

כלומר, הזווית שמתאימה למספר המרוכב $z\bar{w}$ היא (עד כדי הזזה ב-2π) הזווית הגיאומטרית בין הוקטורים שמתוארים על ידי z, w, כפי שמודגם באיור 3.1 שלעיל. על מנת לתקן את הזווית כך שתתן את הזווית הגיאומטרית (כלומר זווית בקטע



איור 3.1: המחשת הזווית בין מספרים מרוכבים.

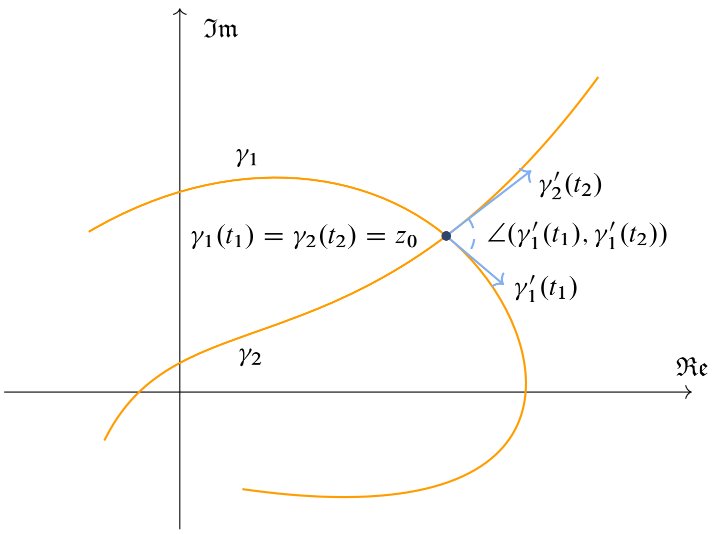
$[0,\pi]$), נתקן אותה בהגדרה לעיל.

הגדרה 3.1.4. זווית בין מספרים מרוכבים

יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ מספרים מרוכבים שונים מאפס. ה**זווית** בין המספרים מוגדרת להיות

$$\angle(z,w)=|\mathrm{Arg}(z\bar{w})|\,.$$

בעזרת הגדרה זו נוכל להגדיר זווית בין מסילות נחתכות כמודגם באיור 3.2 שלעיל.



איור 3.2: זווית בין מסילות בנקודת חיתוך.

הגדרה 3.1.5. זווית בין מסילות

תהיינה $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{C},\gamma_2:[c,d]\to\mathbb{C}$ מסילות חלקות כך שקיימים $t_1\in[a,b]\,,t_2\in[c,d]$ עבורם

$$\gamma_1(t_1)=\gamma_2(t_2)=z_0.$$

אזי, **הזווית בין המסילות בנקודה** z_0 מוגדרת להיות $\angle\left(\gamma_1'(t_1),\gamma_2'(t_2)\right)$ (כלומר, הזווית בין המשיקים בנקודה).

במידה והמסילות חלקות למקוטעין אך עדיין ניתן להגדיר משיק בנקודת החיתוך, הזווית תוגדר עדיין להיות הזווית בין המשיקים.

דוגמה 3.1.2. חישוב זווית בין מסילות

המסילות $\gamma_1(t)=e^{it}$ ו-$\gamma_2(t)=1+i+e^{it}$ נפגשות בנקודה $z_0=i$ כאשר $t_1=\frac{\pi}{2},t_2=\pi$. היות ושתי

המסילות חלקות, נקבל הזווית בין המסילות ב-z_0 היא

$$\angle\left(\gamma_1'\left(\frac{\pi}{2}\right),\gamma_2'(\pi)\right)=\angle\left(ie^{\frac{\pi i}{2}},ie^{-\pi i}\right)=\angle(-1,-i)=\frac{\pi}{2}.$$

כפי שמודגם באיור לעיל, ברור שהזווית אכן $\frac{\pi}{2}$.

בשלב הבא, ננסה לבדוק כיצד משפיעה הפעלה של פונקציה מרוכבת גזירה ברציפות על מסילה והמשיק שלה.

טענה 3.1.2. משיק של תמונת מסילה

יהא $D\subset\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית/אנליטית. אם $\gamma:I\to D$ מסילה גזירה ברציפות, מתקיים

$$(f\circ\gamma)'(t)=f'(\gamma(t))\gamma'(t),\qquad\forall t\in I.$$

הוכחה. נכתוב $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ וכן $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$. בצורה זו מקבלים כי

$$f\circ\gamma(t)=u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t)).$$

בשלב זה, נוכל לגזור את ההרכבה בעזרת כלל השרשרת ולקבל כי

$$(f\circ\gamma)'(t)=\frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t))x'(t)+\frac{\partial u}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\gamma(t))x'(t)+i\frac{\partial v}{\partial y}(\gamma(t))y'(t).$$

הנתון החשוב הוא העובדה ש-f הולומורפית, כך שנוכל להשתמש במשוואות קושי-רימן, לפי משפט 2.2.2 ולהסיק כי

$$\begin{aligned}(f\circ\gamma)'(t)&=\frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t))\left(x'(t)+iy'(t)\right)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\gamma(t))\left(x'(t)+iy'(t)\right)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t))+i\frac{\partial v}{\partial x}(\gamma(t))\right)\gamma'(t)=f(\gamma(t))\gamma'(t),\end{aligned}$$

כפי שרצינו להראות. □

משאנחנו יודעים כיצד משפיעה פונקציה גזירה במובן המרוכב על מסילות, נוכל להגדיר סוג מיוחד של פונקציות מרוכבות.

הגדרה 3.1.6. פונקציות קונפורמיות

יהא $D\subset\mathbb{C}$ תחום ותהא $f=u+iv:D\to\mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת. אומרים ש-f **קונפורמית** ב-$z_0=$ $x_0+iy_0\in D$ אם u,v דיפרנציאביליות ב-(x_0,y_0) ואם לכל זוג מסילות חלקות $\gamma_1:I\to D,\gamma_2:J\to D$ שעבורן

$$\gamma_1(t_1)=\gamma_2(t_2)=z_0,\quad t_1\in I,t_2\in J,$$

מתקיים

$$\angle\left(\gamma_1'(t_1),\gamma_2'(t_2)\right)=\angle\left((f\circ\gamma_1)'(t_1),(f\circ\gamma_2)'(t_2)\right).$$

אומרים ש-f קונפורמית ב-D אם היא מקיימת תכונה זו בכל נקודה ב-D.

שימו לב שלמעשה, פונקציה קונפורמית היא פונקציה ששומרת על הזווית בין מסילות נחתכות. על אף שזו נראית כמו משימה כמעט בלתי אפשרית לבדיקה, רכשנו כבר כלים כדי לאפיין אותן באופן כמעט מובהק.

משפט 3.1.1. קונפורמיות בנגזרת לא מתאפסת

יהא $\mathbb{C} \supset D$ תחום ו-$f : D \to \mathbb{C}$ הולומורפית. אם $z_0 \in D$ נקודה שבה $f'(z_0) \neq 0$, אזי f קונפורמית ב-z_0. בפרט, אם $f'(z) \neq 0$ לכל $z \in D$, היא קונפורמית ב-D.

הוכחה. מכך ש-f אנליטית ב-z_0 נובע כי u, v דיפרנציאביליות ב-(x_0, y_0). עתה, נניח כי γ_1, γ_2 מסילות חלקות כפי שמופיע בהגדרה 3.1.6. על פי טענה 3.1.2 ולאחר מכן על פי הגדרה 3.1.4,

$$\begin{aligned}
\angle\left((f \circ \gamma_2)'(t_1), (f \circ \gamma_2)'(t_2)\right) &= \angle\left(f'(\gamma_1(t_1))\gamma_1'(t_1), f'(\gamma_2(t_2))\gamma_2'(t_2)\right) \\
&= \left|\operatorname{Arg}\left(f'(z_0)\,\gamma_1'(t_1)\overline{f'(z_0)\gamma_2'(t_2)}\right)\right| \\
&= \left|\operatorname{Arg}\left(\left|f'(z_0)\right|^2 \gamma_1'(t_1)\overline{\gamma_2'(t_2)}\right)\right| \\
&= \left|\operatorname{Arg}\left(\gamma_1'(t_1)\overline{\gamma_2'(t_2)}\right)\right| \\
&= \angle\left(\gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2)\right)
\end{aligned}$$

כפי שרצינו להראות. $\square$

מה קורה בנקודות שבהן הנגזרת מתאפסת? אם f פונקציה אנליטית המקיימת $f'(z_0) = 0$, הפונקציה בהכרח לא תהיה קונפורמית. אנחנו לא נוכיח עדיין את הטענה הזאת בגרסתה הכללית, אך נראה דוגמה שממחישה זאת היטב.

דוגמה 3.1.3. פונקציה אנליטית לא-קונפורמית

נתבונן בפונקציה $f(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N}$, ובזוג המסילות

$$\gamma_1(t) = te^{\frac{\pi i}{n}}, \quad \gamma_2(t) = t$$

כאשר $t \in [0, 1]$. מדובר בזוג מסילות חלקות שעוברות בראשית כאשר $t = 0$. כמו כן

$$\angle\left(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)\right) = \left|\operatorname{Arg}\left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)\right| = \frac{\pi}{n}.$$

יחד עם זאת, ניתן לראות שמתקיים

$$f \circ \gamma_1(t) = -t^n, \quad f \circ \gamma_2(t) = t^n.$$

במקרה זה נקבל כי הזווית בין המסילות בראשית היא π, כלומר הוכפלה בדיוק פי n. בפרט, הפונקציה אינה קונפורמית בראשית (על אף שהיא קונפורמית בכל נקודה אחרת).

3.2 הספירה של רימן

בעולם הפונקציות הממשיות, מושג האינסוף בדרך כלל שימש כדי לתאר "בעיה". בין אם מדובר בסדרה שאין לה גבול רגיל, פונקציה בעלת אסימפטוטה אנכית ועוד. גם בקורס הזה האינסוף מופיע בהקשרים אלה, למשל בגבול

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{|z|}=\infty.$$

יחד עם זאת, מתברר שיש דרך גיאומטרית חשובה ביותר להתייחס אל האינסוף כאל "נקודה" חדשה במרחב. בצורה כזאת ניתן לחקור פונקציות בעזרת כלים חדשים ויעילים, שאת חלקם נראה בהמשך.

הגדרה 3.2.1. המישור המרוכב המורחב

המישור המרוכב המורחב הוא הקבוצה

$$\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\},$$

שהיא למעשה המישור המרוכב הרגיל, כאשר מצרפים אליו נקודה חדשה שמסמנים בסימון האינסוף.

שימו לב שהקבוצה החדשה שלנו אינה מרחב וקטורי. אי אפשר לחבר שום דבר עם אינסוף, ואי אפשר לכפול שום דבר עם אינסוף. יחד עם זאת, במישור המרוכב המורחב, ניתן לחשוב על הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ כאל פונקציה מ-$\mathbb{C}_\infty$ לעצמו שמקיימת

$$f(0)=\infty,\quad f(\infty)=0.$$

יתרה מכך, כאשר מדברים על $\mathbb{C}_\infty$, הפונקציה f היא פונקציה הפיכה, והיא ההופכית של עצמה. את המישור המרוכב המורחב (ולכן גם את המישור המרוכב) אפשר לתאר בדרך נוספת כקליפה של כדור, המכונה **הספירה של רימן**.

הערה שאינה נדרשת בחומר הקורס - טופולוגיה בספירה של רימן. כפי שציינו, לא ניתן להסתכל על $\mathbb{C}_\infty$ בתור מרחב וקטורי, אך הטענה שלנו היא שעדיין ניתן להגדיר בו פונקציות רציפות, סדרות מתכנסות ועוד. כזכור, לכל $z_0\in\mathbb{C}$, $R>0$ מגדירים את העיגול הפתוח ברדיוס R סביב z_0 על ידי

$$B(z_0,R)=\{z\in\mathbb{C}||z-z_0|<R\}.$$

כדי שיהיה אפשר להגדיר גם גבולות באינסוף, נגדיר "כדור פתוח" סביב האינסוף, על ידי

$$B(\infty,R):=\{z\in\mathbb{C}||z|>R\}\cup\{\infty\}.$$

כלומר הכדור מוגדר בצורה קצת הפוכה, אך אם נגדיר אותו להיות קבוצה פתוחה, יש עכשיו משמעות לדיון בסדרות מתכנסות. אומרים שסדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-∞ אם לכל $R>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $z_n\in B(\infty,R)$. לאחר שמגדירים סדרות מתכנסות, אפשר להגדיר גבולות של פונקציות ופונקציות רציפות. בצורה כזאת למשל, ברור שהפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ עם ההגדרות המיוחדות $f(\infty)=0, f(0)=\infty$ הופכת לפונקציה רציפה מהמישור המורחב לעצמו. בחזרה לחומר הקורס.

הגדרה 3.2.2. הספירה של רימן

תהא $\mathbb{S}$ ספירת היחידה ב-$\mathbb{R}^3$, כלומר

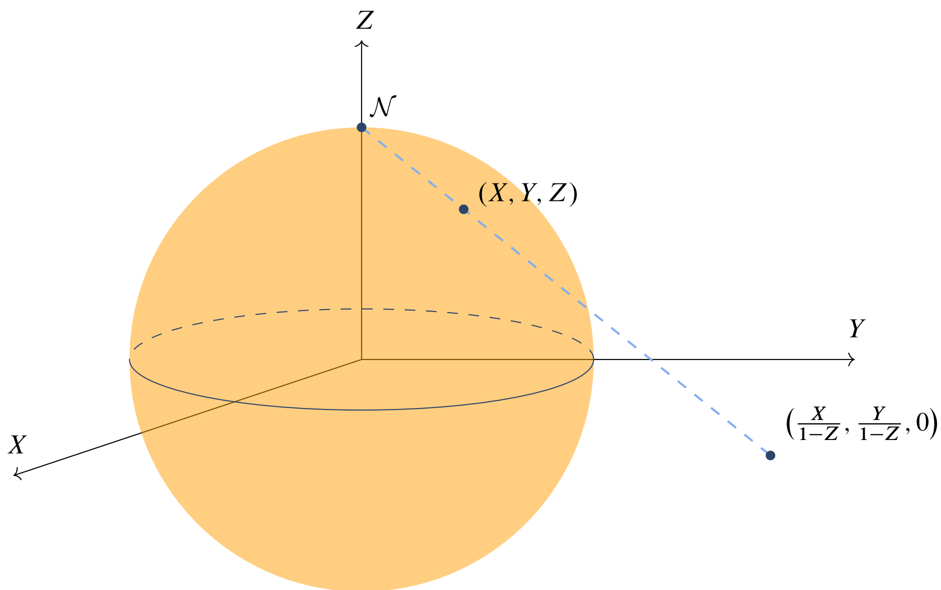
$$\mathbb{S} = \left\{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \middle| X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\right\}.$$

ונגדיר זיהוי $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{C}_\infty$ באופן הבא,

- עבור $\mathcal{N} = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}$ נגדיר $\sigma(\mathcal{N}) = \infty$.
- עבור $(X, Y, Z) \in \mathbb{S}$ שאינה הקוטב הצפוני, נסמן ב-$(X(t), Y(t), Z(t))$ את הקו הישר שעבור בקוטב הצפוני ובנקודה (X, Y, Z). לקו ישר זה קיימת נקודת חיתוך **יחידה** עם המישור $Z = 0$, בנקודה

$$\left(\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z}, 0\right).$$

בעזרת נקודה זו נגדיר $\sigma(X, Y, Z) = \frac{X}{1-Z} + i\frac{Y}{1-Z} \in \mathbb{C}$. להעתקה σ קוראים בשם **הטלה סטריאוגרפית** והמחשה שלה נתונה באיור 3.3 שלעיל.



איור 3.3: ההטלה הסטריאוגרפית, המחשה ב-$\mathbb{R}^3$.

תכונות של ההטלה הסטריאוגרפית.

1. ההטלה הסטריאוגרפית חד-חד ערכית ועל. ההטלה ההפוכה שלה היא

$$\sigma^{-1}(x+iy)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right),\qquad \sigma^{-1}(\infty)=\mathcal{N}.$$

2. אם (X,Y,Z) נקודה בקו המשווה של $\mathbb{S}$, מתקיים $Z=0$ ולכן $\sigma(X,Y,0)=X+iY$.

3. לכל $(X,Y,Z)\in\mathbb{S}$ מתקיים

$$|\sigma(X,Y,Z)|=\frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{1-Z}=\frac{\sqrt{1-Z^2}}{1-Z}\xrightarrow{Z\to 1^-}\infty.$$

מה שבעצם מראה כי σ העתקה רציפה.

4. לא נוכיח זאת, אך הייחוד בהטלה הסטריאוגרפית היא שהיא קונפורמית. כלומר, היא משמרת זוויות בין מסילות שנחתכות.

5. כל העתקה $f:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ מגדירה גם העתקה מתאימה על הספירה של רימן, על פי הנוסחה

$$\sigma^{-1}\circ f\circ\sigma:\mathbb{S}\to\mathbb{S}.$$

דוגמה 3.2.1. העתקת האינוורסיה

כפי שראינו, הפונקציה $I:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ המוגדרת על ידי $I(z)=\frac{1}{z}$ היא פונקציה שמוגדרת היטב (ואפילו הפיכה!) על המישור המרוכב המורחב. נגדיר בעזרתה העתקה על הספירה של רימן. אם $(X,Y,Z)\in\mathbb{S}$ אינה הקוטב הצפוני, יתקיים

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\circ I\circ\sigma(X,Y,Z)&=\sigma^{-1}\circ I\left(\frac{X}{1-Z}+i\frac{Y}{1-Z}\right)\\&=\sigma^{-1}\left(\frac{1-Z}{X+iY}\right)\\&=\sigma^{-1}\left(\frac{1-Z}{X^2+Y^2}(X-iY)\right)\\&=(X,-Y,-Z)\end{aligned}$$

כלומר, הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ היא למעשה שיקוף של ספירת היחידה. שימו לב שניתן לזהות כי קו המשווה מועתק לעצמו, מה שכמובן מסתדר עם כך שלכל $|z|=1$, $\frac{1}{z}$ גם הוא מספר מגודל 1. העתקה זו מחליפה בין הקוטב הצפוני לדרומי, דבר האנלוגי להחלפה בין $0,\infty$ במישור המרוכב המורחב.

מתברר שנוח מאוד לחקור סוגים מסויימים של פונקציות מרוכבות על ידי חקירת המשיכה של פונקציות אלה לספירת רימן. כדי להעמיק בחקירה הזאת, נדון במעגלים על ספירת רימן.

טענה 3.2.1. מעגלים מוכללים

אם $C\subset\mathbb{S}$ מעגל על ספירת רימן, התמונה שלו תחת ההטלה הסטריאוגרפית - קרי $\sigma\left(C\right)\subset\mathbb{C}$, היא מעגל או קו ישר. יתרה מכך, $\sigma\left(C\right)$ היא ישר אם ורק אם $\mathcal{N}\in C$.

הוכחה. **ההוכחה לא הועברה בהרצאות הפרונטליות.** תוצאה ידועה בגיאומטריה במישור ובמרחב, היא שכל מעגל על ספירת היחידה מתקבל מחיתוך של מישור עם הספירה. כלומר ניתן לכתוב את C בצורה

$$C=\left\{(X,Y,Z)\middle|\begin{aligned}aX+bY+cZ&=d\\X^2+Y^2+Z^2&=1\end{aligned}\right\}.$$

לכל $(X,Y,Z)\in\mathbb{S}$ נכתוב $z=x+iy=\sigma\left(X,Y,Z\right)$. במקרה זה נקבל כי $x+iy\in\sigma\left(C\right)$ אם ורק אם

$$\sigma^{-1}\left(x+iy\right)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\in C.$$

כדי לבדוק שנקודה זו אכן ב-C, צריך לבדוק שהיא מקיימת את משוואת הספירה ואת משוואת המישור. ראינו כבר קודם שנקודות מהצורה הזו תמיד תקיימנה את משוואת הספירה, ולכן נותר לבדוק שהיא מקיימת את משוואת המישור, כלומר

$$\frac{2ax}{x^2+y^2+1}+\frac{2by}{x^2+y^2+1}+\frac{c\left(x^2+y^2-1\right)}{x^2+y^2+1}=d.$$

לאחר סידור המשוואה מקבלים כי

$$\left(c-d\right)\left(x^2+y^2\right)+2ax+2by=c+d,$$

ומכאן שנותר להפריד למקרים השונים.

- אם $c=d$, מקבלים משוואת ישר.
- אם $c\neq d$, מקבלים משוואת מעגל (אולי מוזז, תלוי בערכי a,b).

בנוסף, מבין שני המקרים, $\mathcal{N}\in C$ אם ורק אם $c=d$, ולכן מעגל שעובר בקוטב הצפוני יתאים תמיד לקו ישר במישור המרוכב. $\square$

התוצאה האחרונה מצדיקה את ההגדרה הבאה.

הגדרה 3.2.3. מעגלים מוכללים

ישרים ומעגלים ב-$\mathbb{C}$ מכונים גם בשם **מעגלים מוכללים**.

3.2.1 העתקות מביוס

הגדרה 3.2.4. העתקת מביוס

פונקציה $f:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ שניתן לכתוב בצורה

$$f(z)=\begin{cases}\frac{az+b}{cz+d}, & z\neq\infty,-\frac{d}{c}\\ \infty, & z=-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c}, & z=\infty\end{cases}$$

עבור קבועים $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ שמקיימים $ad-bc\neq 0$ - מכונה בשם **העתקת מביוס**.

לעתים, על מנת לחסוך בכתיבה נכתוב $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ מבלי לציין במפורש את הנוסחאות בנקודות המיוחדות.

טענה 3.2.2. תכונות בסיסיות של העתקת מביוס

תהא $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$.

1. העתקת מביוס נקבעת ביחידות לפי הקבועים a,b,c,d עד כדי כפל של כולם בקבוע כפלי.
2. המטריצה $\mathbb{C}^{2\times 2}\ni\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=[f]$ נקראת לעתים המטריצה המייצגת של f.
   (א) הרכבה של העתקות מביוס היא העתקת מביוס, ובפרט $[f\circ g]=[f][g]$.
   (ב) ההעתקה $h(z)=\frac{z+0}{0z+1}=z$ היא העתקת מביוס, ומתקיים $[h]=I_2$.
   (ג) לכל העתקת מביוס קיימת העתקה הופכית לפי הנוסחה $[f^{-1}]=[f]^{-1}$, ובנוסחה מפורשת

$$f^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}.$$

הוכחה. **ההוכחה לא הועברה בהרצאות הפרונטליות.**

1. לכל $\alpha\in\mathbb{C}$, מתקיים $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\alpha az+\alpha b}{\alpha cz+\alpha d}$.
2. בהתאם לסעיף הקודם נדגיש שהמטריצה המייצגת קובעת את f ביחידות, אך לכל f מתאימות אינסוף מטריצות, בתנאי שהן כולן נבדלות בכפל בקבוע שונה מאפס. עבור יתר התכונות:
   (א) נניח כי $g(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$. אזי

$$f\circ g=\frac{a\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d}=\frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)}.$$

   על ידי הכפלה של המטריצות המייצגות מקבלים שאכן $[f\circ g]=[f][g]$.
   (ב) המקדמים שמתאימים להעתקה $f(z)=z$ הם $a=1,b=0,c=0,d=1$ שמקיימים $ad-bc=1\neq 0$. לכן מדובר בהעתקת מביוס עם מטריצה מייצגת I_2.

(ג) היות ו-$ad-bc\neq 0$, מקבלים כי $\det[f]=ad-bc\neq 0$ ומכאן שהמטריצה המייצגת $[f]$ תמיד הפיכה. נסמן ב-g את העתקת המביוס שעבורה $[g]=[f]^{-1}$, ונקבל כי

$$[f\circ g]=[f][g]=[f][f]^{-1}=I_2=[z]\,.$$

כלומר קיבלנו כי $f\circ g(z)=z$ ולכן $g=f^{-1}$. שימו לב שהנוסחה המפורשת להופכית של $[f]$ היא

$$[f]^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

אך משום שהמייצגת נקבעת עד כדי קבוע, ניתן לבחור את המטריצה ללא הקבוע שכופל אותה ולקבל את אותה העתקה, לכן

$$f^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$$

כדרוש.

□

בהמשך תת-פרק זה נרצה לחקור תכונות של העתקות מביוס. כדי לעשות זאת, נראה כי כל העתקת מביוס מורכבת למעשה ממספר העתקות בסיסיות.

טענה 3.2.3. מביוס כהרכבה של העתקות פשוטות

כל העתקת מביוס ניתנת לכתיבה כהרכבה של העתקות מהרשימה הבאה,

1. **כפל בקבוע.** כלומר $f_a(z)=az$.
2. **הזזה.** כלומר $h_b(z)=z+b$.
3. **אינוורסיה.** כלומר $I(z)=\frac{1}{z}$.

הוכחה. **ההוכחה לא הועברה בהרצאות הפרונטליות.** את הבניה נעשה בשלבים.

- ברור שניתן בצורה שנתונה בטענה לבנות כל פונקציה אפינית. כלומר

$$az+b=f_a\circ h_{\frac{b}{a}}(z)\,,$$

כאשר המקרה של $a=0$ אינו העתקת מביוס כך שאכן טיפלנו בכל המקרים הרלוונטיים.

- על ידי הרכבה של העתקת האינוורסיה (הופכי) ניתן לקבל כל פונקציה מהצורה $\frac{1}{cz+d}$.
- עבור המקרה הכללי, נחפש m,k שעבורם

$$f_m\circ h_k\circ I\circ f_c\circ h_{\frac{d}{c}}(z)=m\left(\frac{1}{cz+d}+k\right)=\frac{az+b}{cz+d},$$

וכך נסיים את ההוכחה. לאחר העלאה על גורם משותף מקבלים

$$\frac{mkcz+m(kd+1)}{cz+d}=\frac{az+b}{cz+d}.$$

אפשר להניח כי $c\neq 0$ אחרת אנחנו במקרה שכבר פתרנו, ולכתוב

$$mk=\frac{a}{c}$$

ולכן

$$mkd+m=\frac{ad}{c}+m=b\Longrightarrow m=\frac{ad-bc}{c}.$$

לאחר חישוב של m מקבלים כי $k=\frac{a}{ad-bc}$ ונסיים את ההוכחה.

$\square$

מכאן נעבור לטענה החשובה הבאה שמייצגת את התכונה המפורסמת והחשובה ביותר של העתקות מביוס.

טענה 3.2.4. העתקות מביוס מעבירות מעגלים למעגלים

אם $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ העתקת מביוס ו-$C\in\mathbb{C}$ מעגל מוכלל, אזי $f(C)$ גם הוא מעגל מוכלל.

הוכחה. היות ולפי טענה 3.2.3 כל העתקת מביוס היא הרכבה של העתקות פשוטות, מספיק שנוכיח שכל אחת מההעתקות הללו מקיימת את תכונה זו, ונוכל להסיק זאת גם עבור העתקת מביוס כללית.

1. **כפל בקבוע.** עבור $a=re^{i\theta}$, נניח תחילה כי

$$C=\{z\in\mathbb{Z}||z-z_0|=R\},\ R>0$$

אזי, עבור $w=az$ נקבל

$$|z-z_0|=\left|\frac{w}{a}-z_0\right|=\frac{1}{|a|}|w-az_0|=R\Longrightarrow|w-az_0|=|a|R$$

וגם זו משוואת מעגל. באופן דומה, אם C קו ישר, שניתן לתאר בצורה כללית ביותר על ידי

$$C=\{z_0+tw_0|t\in\mathbb{R}\}$$

אזי אם $w=az$ נקבל כי

$$f(C)=\{az_0+taw_0|t\in\mathbb{R}\}$$

שגם היא משוואת קו ישר. שימו לב שעבור כפל בקבוע מעגל מועתק תמיד למעגל וישר מועתק תמיד לישר.

2. **הזזה.** ברור כי הזזה של מעגל והזזה של קו ישר הם מעגלים וקווים ישרים.

3. **אינוורסיה.** ניעזר בתוצאה שקיבלנו בדוגמה 3.2.1. נניח כי $C \subset \mathbb{C}$ מעגל מוכלל, ונסמן

$$\tilde{C} = \sigma^{-1}(C)$$

כאשר σ היא ההטלה הסטריאוגרפית על הספירה של רימן. על פי טענה 3.2.1, הקבוצה $\tilde{C}$ היא מעגל על הספירה של רימן. אם נסמן

$$F : \mathbb{S} \to \mathbb{S}, \quad F(X, Y, Z) = \sigma^{-1} \circ I \circ \sigma(X, Y, Z) = (X, -Y, -Z),$$

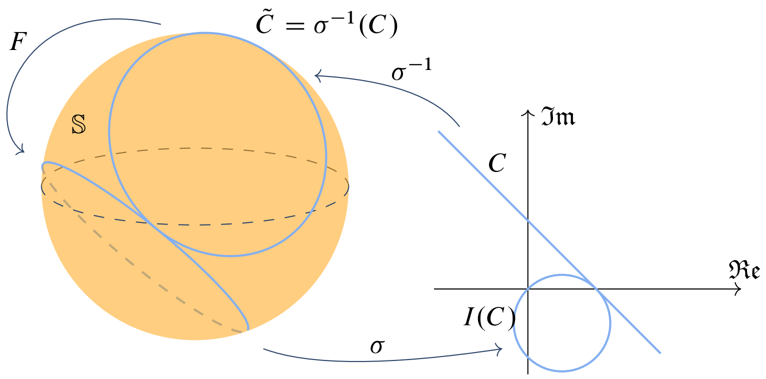
נקבל כי F היא שיקוף, ולכן $F(\tilde{C})$ גם היא מעגל. שוב, על פי טענה 3.2.1, נקבל כי

$$\sigma(F(\tilde{C})) = \sigma \circ \sigma^{-1} \circ I \circ \sigma \circ \sigma^{-1}(C) = I(C)$$

היא מעגל מוכלל, כפי שרצינו להראות. בנוסף, טענה 3.2.1 מאפשרת לנו לדעת בדיוק מתי המעגל המוכלל שיתקבל הוא ישר ומתי לא.

- אם C אינו עובר בראשית, הקוטב הדרומי $\mathcal{S}$ אינו נמצא על $\tilde{C}$, ולכן $\mathcal{N} \notin F(\tilde{C})$. מכן נובע כי $I(C)$ חייבת להיות מעגל.
- אם C עוברת בראשית, הקוטב הדרומי $\mathcal{S}$ נמצא על $\tilde{C}$, ולכן $\mathcal{N} \notin F(\tilde{C})$. מכאן נובע כי $I(C)$ חייבת להיות ישר.

המחשה של העתקת האינוורסיה עבור מעגל מוכלל דרך המעבר בספירת רימן באיור 3.4 שלעיל.



איור 3.4: המעגל המוכלל C, תמונתו $\sigma^{-1}(C)$ ב-$\mathbb{S}$, המעגל $F(C)$ שמתקבל על ידי אינוורסיה ב-$\mathbb{S}$, ואז הזיהוי שלו חזרה $I(C)$ ב-$\mathbb{C}$.

$\square$

טענה 3.2.5. נקודות שבת

לכל העתקת מביוס שאינה העתקת הזהות יש לכל היותר זוג נקודות שבת, כלומר פתרונות למשוואה $f(z) = z$.

הוכחה. **ההוכחה לא הועברה בהרצאה ולא נדרשת בקורס.** נניח בשלילה כי $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ העתקת מביוס וכי $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}_\infty$ כולן נקודות שבת. נפריד למקרים לשם נוחות.

1. אם $z_1=\infty$, מתקיים $f(\infty)=\infty$ אם ורק אם $c=0$. אך זו העתקה ליניארית, ומכך שיש לה 3 נקודות שבת היא חייבת להיות הזהות.

2. נניח כי כל הנקודות סופיות. נגדיר את הפונקציה

$$g(z)=f(z+z_1)-z_1.$$

במקרה זה מקבלים שוב העתקת מביוס שעבורה

$$g(0)=0,\quad g(z_2-z_1)=z_2-z_1,\quad g(z_3-z_1)=z_3-z_1,$$

כלומר, גם לה יש 3 נקודות שבת סופיות, רק שאחת מהן היא אפס. נגדיר העתקה נוספת על ידי

$$h(z)=\frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$$

שהיא גם העתקת מביוס כהרכבה של כאלה, והיא מקיימת

$$h(\infty)=\infty,\quad h\left(\frac{1}{z_2-z_1}\right)=\frac{1}{z_2-z_1},\quad h\left(\frac{1}{z_3-z_1}\right)=\frac{1}{z_3-z_1}.$$

על פי המקרה הקודם, h חייבת להיות הזהות, כלומר

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=z\implies g\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}\implies g(z)=z,$$

ולבסוף

$$f(z+z_1)-z_1=z\implies f(z+z_1)=z+z_1\implies f(z)=z,$$

ונסיק את הדרוש.

□

החלק הבא מוקדש להעמקה בדרך שבה אנו בונים העתקות מביוס.

הגדרה 3.2.5. היחס הכפול

לכל 4 נקודות ב-$\mathbb{C}_\infty$, נגדיר את היחס הכפול שלהן על ידי

$$(z_1,z_2,z_3,z_4):=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4},$$

עם המוסכמה

$$\frac{z_1-\infty}{z_2-\infty}:=1$$

על מנת להמנע מכתיבה מסובכת לשווא.

טענה 3.2.6. היחס הכפול אינווריאנטי למביוס

אם $f(z)$ העתקת מביוס ו-$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ נקודות שונות, מתקיים

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)).$$

הוכחה. הנ"ל נובע מידית מהצבה ווידוא שמתקיים השוויון. נשאיר זאת כתרגיל. $\square$

כמסקנה, נראה כי בחירה של 3 נקודות קובעת ביחידות את העתקת המביוס שלנו.

משפט 3.2.1. העתקת מביוס מ-3 נקודות

תהיינה $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ נקודות שונות ותהיינה $w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{C}_\infty$ נקודות שונות. אזי, קיימת העתקת מביוס יחידה $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ המקיימת $f(z_k) = w_k$ לכל $k = 2, 3, 4$. העתקה זו נתונה על ידי הנוסחה

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (f(z), f(z_2), f(z_3), f(z_4)),$$

שממנה ניתן לחלץ נוסחה מפורשת עבור $f(z)$.

הוכחה. ראשית, ניתן לוודא בקלות כי הנוסחה שמתקבלת במשפט מספקת העתקת מביוס שמקיימת את הדרוש (מושאר כתרגיל). היחידות נובעת מכך שכל העתקת מביוס אחרת חייבת לקיים את השוויון הנ"ל לכל $z \in \mathbb{C}_\infty$, ולכן תזדהה עם הנוסחה הנ"ל. $\square$

שילוב של משפט 3.2.1 וטענה 3.2.4 מוביל לרעיון הבא - נניח כי C_1, C_2 מעגלים נתונים. אם נבחר

$$z_2, z_3, z_4 \in C_1, \quad w_2, w_3, w_4 \in C_2$$

נסיק שקיימת העתקת מביוס יחידה שמקיימת $f(z_k) = w_k$ לכל $k = 2, 3, 4$. מצד שני, ידוע לנו כי העתקות מביוס מעתיקות מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים, וכי מעגל מוכלל נקבע ביחידות על ידי 3 נקודות (בין אם הוא ישר או מעגל). לכן, העתקה זו תקיים בהכרח

$$f(C_1) = C_2$$

ולכן, לכל זוג מעגלים מוכללים ניתן למצוא העתקת מביוס שמעתיקה את האחד על השני. **ללא הוכחה** ניתן להוכיח כי העתקת מביוס שומרת גם על מגמה. כלומר, השטח שימצא משמאל לתנועתנו מ-z_2 ל-z_3 ול-z_4 יועתק לשטח שנמצא משמאל לתנועה מ-w_2 ל-w_3 ול-w_4.

דוגמה 3.2.2. מציאת העתקת מביוס

נחפש העתקת מביוס המעתיקה את העיגול

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$$

לחצי המישור שנמצא משמאל לציר המדומה, שנסמן ב-D_2. כדי לעשות זאת נבחר 3 נקודות "נוחות" על מעגל השפה של D_1

$$z_2 = 0, \quad z_3 = 1 - i \quad , z_4 = 2$$

שימו לב שהשטח של D_1 נמצא משמאל כאשר נעים לאורך הנקודות לפי הסדר. היות והציר המדומה הוא מעגל מוכלל, נבחר 3 נקודות לאורכו במגמה שבה השטח רצוי נמצא משמאל, למשל

$$w_2 = 0, \quad w_3 = i, \quad w_4 = \infty.$$

הערה. כאשר אינסוף היא הנקודות האחרונה מבינים אותה כ"המשך" מכיוון הישר שמחבר את w_2 עם w_3.

עתה, על פי משפט 3.2.1, ההעתקה

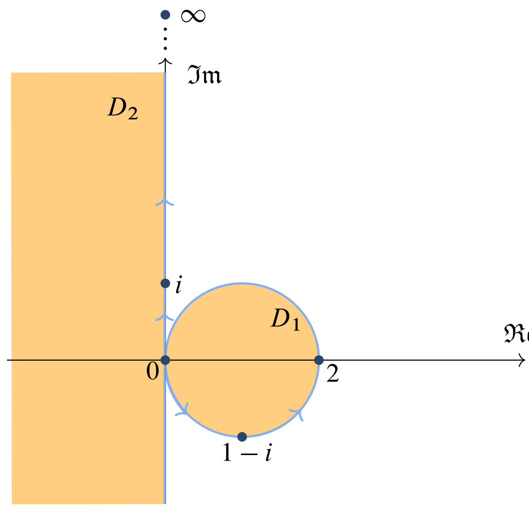
$$(z, 0, 1 - i, 2) = (f(z), 0, i, \infty)$$

היא העתקת המביוס הדרושה. נחשב אותה במפורש

$$\frac{z - 1 + i}{0 - 1 + i} \cdot \frac{0 - 2}{z - 2} = \frac{f(z) - i}{0 - i} \cdot \frac{0 - \infty}{f(z) - \infty}$$

$$f(z) = \frac{1}{i}\left(\frac{\frac{2z}{1-i} - 2}{z - 2} - 1\right) = \frac{z}{z - 2}.$$

לא קשה לבדוק שאכן העתקה זו מעתיקה את הנקודות כפי שדרשנו, ולכן $f(D_1) = D_2$. המחשה של בחירת הנקודות והתחומים ניתן לראות באיור 3.5 שלעיל.



איור 3.5: התחומים D_1, D_2, ובחירת הנקודות על המעגלים המוכללים שמהווים השפה של תחומים אלה. שימו לב למיקום השטח הרצוי ביחד למגמת התנועה לאורך הנקודות שנבחרו.

4

אינטגרציה מרוכבת

4.1 הגדרת האינטגרל המרוכב

לפני שנגדיר את האינטגרל הטבעי לפונקציה מ-$\mathbb{C}$ ל-$\mathbb{C}$, נגדיר אינטגרל למסילה.

הגדרה 4.1.1. אינטגרל למסילה

תהא $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה, שנכתוב לשם נוחות בצורה $g(t)=u(t)+iv(t)$. אם g רציפה, מגדירים

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t+i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

כלומר, האינטגרל של מסילה מוגדרת בצורה מאוד פשוטה כסכום של האינטגרל על חלקה הממשי והאינטגרל על חלקה המדומה.

טענה 4.1.1. תכונות אינטגרל של מסילה

תהא $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה. אזי

1. **אדיטיביות.** לכל $c\in[a,b]$ מתקיים

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2. **ליניאריות.** אם $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה, אזי לכל $\alpha\in\mathbb{C}$ מתקיים

$$\int_a^b(\alpha f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

3. **ניוטון-לייבניץ.** אם $G:[a,b]\to\mathbb{C}$ פונקציה גזירה ברציפות שעבורה $G'(t)=g(t)$, אזי

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t=G(b)-G(a)\,.$$

4. **המשפט היסודי של החדו"א.** לכל $t\in[a,b]$ מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t g(s)\,\mathrm{d}s=g(t)\,.$$

5. **אי-שוויון המשולש.** מתקיים

$$\left|\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t\le(b-a)\max_{t\in[a,b]}|g(t)|\,.$$

אי-השוויון האחרון קרוי גם בשם **למת-ההערכה**.

הוכחה. **ההוכחה לא הועברה בהרצאות הפרונטליות.** היות והאינטגרל של מסילה מוגדר כסכום נפרד של האינטגרל על החלק הממשי והחלק המדומה, ארבעת התכונות הראשונות נובעות מידית מכך שהן מתקיימות לאינטגרל ממשי במשתנה יחיד. נותר להוכיח רק את התוצאה האחרונה. כדי לעשות זאת, נשים לב כי

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t=\left|\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|e^{i\theta}$$

בזכות הכתיבה הפולרית של מספרים מרוכבים (הרי, האינטגרל באגף השמאלי הוא מספר מרוכב). נגדיר פונקציה רציפה חדשה על ידי $h(t)=g(t)e^{-i\theta}$ ונקבל כי

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\overset{\text{ליניאריות}}{=}e^{-i\theta}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t=\left|\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|\,.$$

אם נזכור שניתן לכתוב $h(t)=u(t)+i\,v(t)$, נסיק כי

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t+i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

היות והביטוי שקיבלנו חייב להזדהות עם $\left|\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|$, שהוא מספר ממשי, נסיק כי האינטגרל של החלק המדומה של h

חייב להתאפס. כלומר

$$\left|\int_a^b g\left(t\right)\mathrm{d}t\right| = \int_a^b u\left(t\right)\mathrm{d}t = \left|\int_a^b u\left(t\right)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \left|u\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$$

כאשר המעבר האחרון נובע מאי-שוויון המשולש האינטגרל למקרה הממשי הרגיל. עתה, נשתמש בכך שמתקיים

$$\left|u\left(t\right)\right| = \sqrt{\left(u(t)\right)^2} \leq \sqrt{\left(u(t)\right)^2 + \left(v(t)\right)^2} = \left|h\left(t\right)\right|,$$

כדי להסיק

$$\int_a^b \left|u\left(t\right)\right|\mathrm{d}t \leq \int_a^b \left|h\left(t\right)\right|\mathrm{d}t = \int_a^b \left|g\left(t\right)\right|\overbrace{\left|e^{-i\theta}\right|}^{=1}\mathrm{d}t = \int_a^b \left|g\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$$

ומכאן נוכל להסיק את הדרוש. $\square$

עתה, נוכל להכליל את מושג האינטגרל שלנו גם לפונקציות מרוכבות ($f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

הגדרה 4.1.2. אינטגרל מרוכב לאורך מסילה

יהא $\Omega \subset \mathbb{C}$ תחום ו-$\gamma : [a,b] \to \Omega$ מסילה חלקה למקוטעין. אזי, לכל $f : \Omega \to \mathbb{C}$ רציפה, מגדירים את **האינטגרל של f לאורך המסילה γ** על ידי

$$\int_\gamma f\left(z\right)\mathrm{d}z := \int_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\gamma'\left(t\right)\mathrm{d}t\,.$$

וכאשר המסילה סגורה נשתמש גם בסימון $\oint_\gamma f\left(z\right)\mathrm{d}z$.

הערות.

1. שימו לב שגם במידה ו-γ חלקה למקוטעין והנגזרת γ' לא מוגדרת/מתאפסת בכמות סופית של נקודות, לאינטגרל שהגדרנו עדיין יש משמעות מוגדרת היטב.
2. האינטגרל שקיבלנו מזכיר בצורתו את האינטגרל הקווי מסוג ראשון שלומדים ב-$\mathbb{R}^2$. אכן, אם נכתוב בצורה מפורשת את הנוסחה באגף הימני נקבל כי

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\left(z\right)\mathrm{d}z &= \int_a^b \left(u(x(t),y(t)) + i\,v\left(x(t),y(t)\right)\right)\left(x'(t)+iy'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} u\left(x,y\right)\mathrm{d}x - v\left(x,y\right)\mathrm{d}y + i\int_{\tilde{\gamma}} u\left(x,y\right)\mathrm{d}y + v\left(x,y\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

כאשר $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ היא מסילה חלקה למקוטעין ב-$\mathbb{R}^2$. כלומר, האינטגרל המסילתי הנ"ל שקול למעשה לשני אינטגרלים כנגד השדות הוקטוריים $(u, -v)$ (החלק הממשי) ו-(v, u) (החלק המדומה).

3. בדומה ל-$\mathbb{R}^2$, גם במרוכבים ניתן להגדיר על ידי אינטגרל את האורך של מסילה חלקה למקוטעין γ:

$$\mathrm{L}(\gamma) := \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| \mathrm{d}t\,.$$

וההוכחה/בניה זהה למקרה הממשי, עם הסימון החדש שמתאים למרוכבים.

טענה 4.1.2. מגמה, אדיטיביות

יהא $\mathbb{C} \supset \Omega$ תחום ו-$f : \Omega \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה.

1. אם $\gamma : [a, b] \to \Omega$ ו-$\eta : [c, d] \to \Omega$ מסילות חלקות למקוטעין עבורן $\gamma(b) = \eta(c)$, אזי

$$\int_{\gamma+\eta} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\eta} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

כאשר $\gamma + \eta$ היא המסילה שמתקבלת משרשור המסילות כמופיע בדוגמה 3.1.1.

2. אם $\gamma : [a, b] \to \Omega$ מסילה חלקה למקוטעין, אזי

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

כאשר $(-\gamma)$ היא המסילה ההפוכה שמוגדרת אחרי הגדרה 3.1.3. כלומר, האינטגרל המסילתי תלוי במגמה.

הוכחה. **ההוכחה לא הועברה בהרצאות הפרונטליות.**

1. נשתמש בהגדרה של המסילות כמופיע בדוגמה 3.1.1. נקבל שלכל $t \in [0, 1]$

$$(\gamma + \eta)'(t) = \gamma'(a + t(b - a))(b - a)$$

ולכל $t \in [1, 2]$ מתקיים

$$(\gamma + \eta)'(t) = \eta'(c + (t - 1)(d - c))(d - c)\,,$$

ולכן, על פי הגדרה 4.1.2

$$\int_{\gamma+\eta} f(z)\,\mathrm{d}z := \int_0^1 f(\gamma(a+t(b-a)))\,\gamma'(a+t(b-a))\,(b-a)\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_1^2 f(\eta(c+(t-1)(d-c)))\,\eta'(c+(t-1)(d-c))\,(d-c)\,\mathrm{d}t$$

עבור האינטגרל הראשון נשתמש בנוסחת החלפת המשתנים (הרגילה, במשתנה יחיד) ונגדיר

$$s = a+t(b-a)\,, \quad s\in[a,b]$$

ועבור האינטגרל השני נגדיר

$$s = c+(t-1)(d-c)\,, \quad s\in[c,d]$$

ונקבל

$$= \int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,\mathrm{d}s + \int_c^d f(\eta(s))\,\eta'(s)\,\mathrm{d}s = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\eta f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

2. על פי הגדרה 4.1.2 ועל פי הגדרת המסילה $(-\gamma)$, נקבל

$$\int_{-\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f(\gamma(b-t+a))\,\big(-\gamma'(b-t+a)\big)\,\mathrm{d}t$$

נשתמש בהחלפת המשתנים

$$s = b-t+a \Longrightarrow \mathrm{d}s = -\,\mathrm{d}t\,, \quad s\in[b,a]\,,$$

כלומר

$$= -\int_b^a f(\gamma(s))\,\big(-\gamma'(s)\big)\,\mathrm{d}s = -\int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

□

דוגמה 4.1.1. אנלוג מרוכב ל"שדה המפורסם"

נחשב את האינטגרל $\oint_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ לאורך זוג מסילות שונות.

1. $\gamma(t) = re^{it}$ ו-$t \in [0, 2\pi]$ (מעגל סביב הראשית ברדיוס r), לפי הגדרה 4.1.2

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it}\,\mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i.$$

2. $\gamma(t) = 1 + t(i-1)$ ו-$t \in [0,1]$ (הישר שמחבר את $1, i$). לפי הגדרה 4.1.2

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1}{1+t(i-1)}(i-1)\,\mathrm{d}t\,.$$

עתה, נגדיר את הפונקציה $h(t) = \mathrm{Log}(1+t(i-1))$, ונזהה שהיא פונקציה גזירה ברציפות לפי טענה 3.1.2, ומתקיים

$$h'(t) = \mathrm{Log}'(1+t(i-1))(i-1) = \frac{1}{1+t(i-1)}(i-1)\,.$$

לכן, על פי המשפט היסודי של החדו"א (טענה 4.1.1), מתקיים

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t(i-1)}(i-1)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Log}(1+t(i-1))\Big|_0^1 = \mathrm{Log}(i) = \frac{\pi}{2}i.$$

דוגמה 4.1.2. אינטגרל של חזקה

הדוגמה לא הוצגה בהרצאות הפרונטליות. עבור מעגל ברדיוס $r > 0$ סביב הראשית, כלומר $\gamma(t) = re^{it}$, נקבל כי לכל $k \neq -1$

$$\int_\gamma z^k\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{r^k}{ik}e^{ikt}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

עבור $k = -1$ ראינו שהערך לא מתאפס, ותמיד שווה ל-$2\pi i$.

טענה 4.1.3. למת ההערכה

יהא $\Omega \subset \mathbb{C}$ תחום ו-$f : \Omega \to \mathbb{C}$ רציפה. אם $\gamma : [a,b] \to \Omega$ מסילה חלקה למקוטעין, אזי

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \left(\max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|\right) \mathrm{L}(\gamma)\,.$$

הוכחה. **ההוכחה לא הועברה בהרצאות הפרונטליות.** על ידי חישוב מפורש, נקבל כי

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \overset{(4.1.2)}{=} \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \overset{(4.1.1)}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\left(\max_{t\in[a,b]}|f(\gamma(t))|\right) = \left(\max_{t\in[a,b]}|f(\gamma(t))|\right)\mathrm{L}(\gamma)$$

כפי שרצינו להראות. □

דוגמה 4.1.3. שימוש בלמת ההערכה

נחשב את הגבול $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$ כאשר γ_R היא החצי העליון של המעגל ברדיוס R סביב הראשית, במגמה חיובית. נעשה זאת על ידי שימוש בלמת ההערכה.

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right| \leq \overbrace{\pi R}^{=\mathrm{L}(\gamma)}\max_{t\in[0,\pi]}\left|\frac{1}{1+\left(Re^{it}\right)^2}\right|$$
$$\leq \frac{\pi R}{R^2-1}\xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

ומכאן שהגבול של האינטגרל הדרוש הוא 0.

4.2 משפטי קושי

נתבונן בפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$. על ידי מעבר לאינטגרלים מסילתיים ממשיים, מקבלים כי

$$\int_\gamma\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\left(\int_{\tilde{\gamma}}\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right)+i\left(\int_{\tilde{\gamma}}-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right).$$

האינטגרל הימני מבין השניים הוא לא אחר מאשר האינטגרל של "השדה המפורסם". האינטגרל ידוע בכך שלכל מסילה שמקיפה את הראשית במגמה חיובית, ערכו יהיה כפולה שלמה של 2π. האינטגרל השמאלי הוא אינטגרל של שדה משמר (למעט בראשית) ולכל מסילה שמקיפה את הראשית, אינטגרל זה יתאפס.

בפרק זה נגלה שפונקציות מרוכבות אנליטיות הן גרסה כללית יותר של "שדות משמרים מקומית" ב-$\mathbb{R}^2$. מטרתנו היא להוכיח את שני המשפטים החשובים הבאים שינחו את שארית הקורס.

משפט 4.2.1. משפט קושי-גורסה

יהי $\Omega\subset\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\Omega\to\mathbb{C}$ אנליטית. נניח כי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה פשוטה וחלקה למקוטעין, כך

שה**פנים** שלה מוכל כולו ב-Ω. אזי

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

דוגמה 4.2.1 שימוש פשוט למשפט קושי-גורסה

הפונקציה $f(z) = \frac{\sin(z)}{z+2}$ אנליטית ב-$\mathbb{C} \setminus \{-2\}$. מכאן שמעגל היחידה הוא מסילה כך שגם היא וגם הפנים שלה מוכלים בתחום האנליטיות של f, ולכן

$$\oint_{C_1(0)} \frac{\sin(z)}{z+2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

משפט 4.2.2 נוסחת האינטגרל של קושי

יהא $\Omega \subset \mathbb{C}$ תחום ו-$f : \Omega \to \mathbb{C}$ אנליטית. נניח כי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילה פשוטה וחלקה למקוטעין במגמה חיובית, כך שה**פנים** של המסילה מוכל כולו ב-Ω. אזי, לכל z_0 בפנים של המסילה,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\,.$$

דוגמה 4.2.2 שימוש פשוט למשפט קושי

תהא $z_0 \in B(0,1)$ נקודה בעיגול היחידה. אזי, עבור הפונקציה $f(z) = 1$ שהיא פונקציה אנליטית בכל מקום, מתקיים

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1(0)} \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 1,$$

כלומר $\oint_{C_1(0)} \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$.

בפרק שלאחר מכן, נראה כיצד שני משפטים אלו מאפשרים לנו להרחיב את התורה של פונקציות אנליטיות אף יותר, אך יש לנו כברת דרך עד שנגיע לשם.

4.2.1 משפט קושי-גורסה

באינטגרלים ממשיים, נוסחת ניוטון-לייבניץ אומרת כי אם G פונקציה קדומה של פונקציה רציפה g, כלומר G גזירה ברציפות ומקיימת $G' = g$, אזי

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)\,.$$

קיים ניסוח זהה גם לאינטגרציה מרוכבת.

משפט 4.2.3. המשפט היסודי לאינטגרל מרוכב

יהא $\mathbb{C} \supset \Omega$ תחום ותהא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילה חלקה למקוטעין. אם $g : \Omega \to \mathbb{C}$ אנליטית כך ש-$g' : \Omega \to \mathbb{C}$ גם היא אנליטית, מתקיים

$$\int_\gamma g'(z)\,\mathrm{d}z = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

בפרט, אם γ מסילה סגורה, האינטגרל מתאפס.

הוכחה. לפי הגדרה 4.1.2

$$\int_\gamma g'(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b g'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (g\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t \overset{(4.1.1)}{=} g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

אם המסילה סגורה, מתקיים $\gamma(b) = \gamma(a)$ ולכן האינטגרל יתאפס. □

דוגמה 4.2.3. אי-קיום ענף אנליטי ללוגריתם

בדוגמה זו נוכיח כי לפונקציה $\log(z)$ לא קיימת פונקציה קדומה בתחום

$$\Omega := B(0,1) \setminus \{0\}.$$

נניח בשלילה שאכן קיים ענף כנ"ל. כלומר $L : \Omega \to \mathbb{C}$ שעבורה $e^{\mathrm{L}(z)} = z$. מכלל השרשרת נקבל כי

$$1 = \left(e^{\mathrm{L}(z)}\right)' = e^{\mathrm{L}(z)}\mathrm{L}'(z) = z\mathrm{L}'(z)$$

כלומר $\mathrm{L}'(z) = \frac{1}{z}$. היות ו-$\mathrm{L}, \mathrm{L}'$ שתיהן אנליטיות לפי ההנחה שלנו, מתקיים

$$\oint_{\gamma_r} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 0$$

כאשר γ_r היא המעגל ברדיוס $r \in (0,1)$ סביב הראשית. אך על פי דוגמה 4.1.1, אינטגרלים אלו שווים כולם ל-$2\pi i$ מה שמוביל לסתירה.

ניתן להשתמש בטכניקה לעיל על מנת להוכיח טענה משמעותית הרבה יותר - לא ניתן לבחור ענף אנליטי ללוגריתם בתחום שמכיל מעגל שמקיף את הראשית.

דוגמה 4.2.4. שימוש במשפט היסודי

1. נחשב את $\int_\gamma \sin(z)\,\mathrm{d}z$ כאשר

$$\gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \left(2 - \sin^2(t)\right) e^{it}.$$

היא המסילה שמתוארת באיור 4.1 שלעיל. הצבה מפורשת לתוך האינטגרל לפי הגדרה היא אפשרית, אך מאוד קשה. יחד עם זאת, אנחנו יודעים כי $F(z) = -\cos(z)$ היא פונקציה אנליטית בכל $\mathbb{C}$ שנגזרתה היא בדיוק $F'(z) = \sin(z)$. לפי 4.2.3,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \sin(z)\,\mathrm{d}z &= -\cos\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \cos\left(\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos(-i) - \cos(i) = 0\end{aligned}$$

היות ו-$\cos(z)$ היא פונקציה זוגית.

2. נחשב את $\int_\gamma z^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z$ כאשר

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = 1 + i(t-1)$$

הענף הראשי של $z^{\frac{1}{2}}$ רציף ואנליטי במישור המחורץ, שהוא תחום שמכיל את תמונת המסילה שלנו. כמו כן הענף הראשי של הפונקציה $\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$ הוא פונקציה אנליטית שמקיימת

$$\left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right)' = z^{\frac{1}{3}},$$

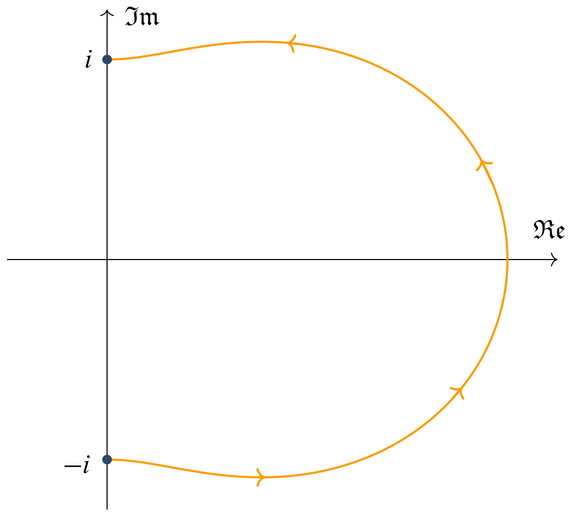
ולכן, על פי משפט 4.2.3 מתקיים

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z &= \frac{2}{3}i^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\mathrm{Log}(i)} - \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\mathrm{Log}(1)} \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\frac{\pi i}{2}} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{2}+2}{3} + \frac{i}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

שימו לב שענפים שונים יתנו תוצאות שונות לאינטגרל. אם לא מצויין אחרת, נבחר את הענף הראשי תמיד.

עתה נעבור למשפט קושי-גורסה, שלמעשה אומר שבתחומים מתאימים, לפונקציה אנליטית תמיד תהיה פונקציה קדומה, ובפרט האינטגרל שלה לאורך מסילה סגורה יתאפס.

הוכחת משפט 4.2.1. את הוכחת המשפט נהוג לחלק לארבעה שלבים, כאשר השלב החשוב מתוכם הוא השלב הראשון.



איור 4.1: תיאור המסילה המסובכת מדוגמה 4.2.4.

1. הוכחת המשפט למסילה משולשת.
2. הוכחת המשפט למצולע פשוט.
3. הוכחת המשפט למצולע כלשהו.
4. הוכחת המשפט למסילה חלקה למקוטעין כללית.

1. נניח כי γ מסילה שמתארת משולש. נסמן $I = \left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ ונניח בשלילה כי $I < 0$. נחבר את אמצעי כל הצלעות של המשולש ונקבל מסילות של 4 משולשים חדשים, γ_j עבור $j = 1, 2, 3, 4$ כמתואר באיור 4.2 (שימו לב שהמשולשים "הורחקו" מהמשולש הגדול רק כדי לעזור לראות אותם באיור. בפועל המשולשים מרכיבים את המשולש הגדול). בזכות טענה 4.1.2, אנחנו יודעים כי

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

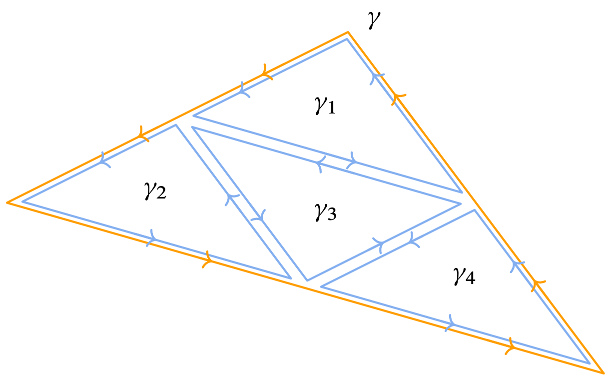
ולכן, אי-שוויון המשולש מלמד אותנו כי

$$I \le \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$

נשים לב כי אם כל האינטגרלים באגף הימני היו קטנים מ-$\frac{I}{4}$, אי השוויון לא היה יכול להתקיים. כלומר, יש בהכרח מסילה (בה"כ γ_1) שעבורה

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \ge \frac{I}{4}.$$

בעזרת דמיון משולשים, אנחנו יודעים כי $\mathrm{L}\left(\gamma_1\right)=\frac{1}{2}\mathrm{L}\left(\gamma\right)$. מכאן נמשיך באינדוקציה כמומחש באיור 4.3 שלעיל



איור 4.2: חלוקת מסילת המשולש γ למשולשים, שמוגדרת בעזרת אמצעי הצלעות של המשולש המקורי.

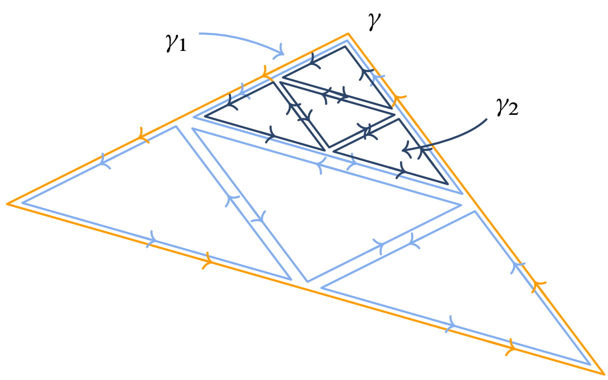
- נניח שבחרנו מסילה γ_{n-1} שעבורה

$$\left|\int_{\gamma_{n-1}} f\left(z\right)\mathrm{d}z\right| \geq \frac{I}{4^{n-1}},\quad \mathrm{L}\left(\gamma_{n-1}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{L}\left(\gamma\right),$$

נחזור על התהליך של חלוקת המשולש γ_{n-1} ל-4 משולשים, נשתמש שוב באדיטיביות ובאי-שוויון המשולש, כדי להסיק שאחת מהמסילות, שנסמן ב-γ_n, תקיים

$$\left|\int_{\gamma_n} f\left(z\right)\mathrm{d}z\right| \geq \frac{I}{4^n},\quad \mathrm{L}\left(\gamma_n\right)=\frac{1}{2^n}\mathrm{L}\left(\gamma\right),$$

נסמן ב-$\left\{\Delta_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ את המסילות $\left\{\gamma_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ביחד עם הפנים שלהן (כלומר, המשולש הסגור). היות ומתקיים



איור 4.3: תיאור השלב השני בתהליך האינדוקציה, מציאת המשולש γ_2.

$$\Delta_{n+1} \subset \Delta_n, \quad \operatorname{diam}(\Delta_n) \le \mathrm{L}(\gamma_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

מקבלים מהלמה של קנטור שקיימת $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ (בנוסף, מקבלים שהיא יחידה). הנתון שטרם השתמשנו בו הוא העובדה ש-f אנליטית במשולש שלנו ולכן גם ב-z_0. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ שעבורה

$$\forall z, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon.$$

ובדרך אחרת, לכל נקודה כנ"ל מתקיים

$$\left| f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \right| < \varepsilon |z - z_0|.$$

היות והנ"ל נכון לכל $\varepsilon > 0$, נבחר $\varepsilon = \frac{I}{2(\mathrm{L}(\gamma))^2}$, ונשתמש בכך שקוטר המשולשים שואף לאפס, כדי להסיק שקיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו

$$\operatorname{diam}(\Delta_n) \le \mathrm{L}(\gamma_n) = \frac{1}{2^n}\mathrm{L}(\gamma) < \delta.$$

בפרט לכל נקודה במשולש מתקיים $|z - z_0| < \delta$, ולכן

$$\left| \int_{\gamma_n} f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)\,\mathrm{d}z \right| < \mathrm{L}(\gamma_n) \max_{\gamma_n} \varepsilon |z - z_0| < \mathrm{L}(\gamma)^2 \varepsilon < \frac{I}{4^n}$$

בנוסף, אנחנו יודעים כי $f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0)$ הוא פולינום, שיש לו פונקציה קדומה. על פי משפט 4.2.3, האינטגרל של פולינום זה על המסילה γ_n מתאפס, כלומר

$$\frac{I}{4^n} \le \left| \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int_{\gamma_n} f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)\,\mathrm{d}z \right| < \frac{I}{4^n},$$

מה שמוביל לסתירה. מכאן שבהכרח מתקיים $I = 0$, וההוכחה הושלמה עבור משולש.

2. כל מצולע פשוט וסגור ניתן לחלוקה לכמות סופית של משולשים, כך שהטענה נובעת מידית מאדיטיביות וההוכחה עבור משולש.

3. כל מצולע (לאו דווקא פשוט) ניתן לחלוקה לכמות סופית של מצולעים פשוטים. שוב, נקבל את התוצאה מאדיטיביות.

4. ההוכחה דורשת מעט כלים טופולוגיים שלא נכנס אליהם בקורס, ולכן רק נציין שרעיון ההוכחה שהוא שכל מסילה חלקה למקוטעין כללית ניתן לקרב על ידי סדרה של מסילות מצולעים ועל ידי לקיחת גבול, מסיקים את נכונות המשפט גם עבור מסילה חלקה למקוטעין כללית.

□

הגדרה 4.2.1. תחום פשוט קשר

יהא $\Omega \subset \mathbb{C}$ תחום. אומרים כי Ω הוא **תחום פשוט קשר** אם לכל מסילה סגורה ופשוטה $\gamma : [a,b] \to \Omega$, הפנים של המסילה מוכל כולו ב-Ω.

לחלופין, תחום פשוט קשר הוא תחום שבו "אין חורים". נסיק מסקנה חשובה ראשונה ממשפט קושי-גורסה.

משפט 4.2.4. קיום פונקציה קדומה

יהא $\Omega \subset \mathbb{C}$ תחום פשוט קשר, ותהא $f : \Omega \to \mathbb{C}$ אנליטית. אזי

1. לכל $z_1, z_2 \in \Omega$, אם γ_1, γ_2 זוג מסילות חלקות למקוטעין שמחברות את שתי נקודות אלה, מתקיים

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

2. קיימת ל-f פונקציה קדומה בתחום. כלומר, פונקציה $F : \Omega \to \mathbb{C}$ אנליטית שעבורה $F'(z) = f(z)$.

הוכחה. 1. נשרשר את המסילות באוריינטציה הפוכה, ונקבל כי המסילה $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ היא מסילה חלקה למקוטעין וסגורה ולכן על פי משפט 4.2.1, מתקיים

$$0 = \int_{\gamma_1+(-\gamma_2)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

מכאן שהאינטגרלים שווים.

2. הטענה הקודמת למעשה מראה כי בתנאי משפט 4.2.1, אינטגרל מסילתי אינו תלוי במסילה אלא רק בנקודות ההתחלה והסיום. לכן, נקבע $z_0 \in \Omega$, ונגדיר

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w\,,$$

כאשר γ_z היא מסילה **כלשהי** שמחברת את z_0 ל-z. קיימת מסילה כזאת היות והנחנו שמדובר בתחום (ולכן הקבוצה קשירה), והאינטגרל מוגדר היטב היות והוא לא תלוי בבחירת המסילה. כדי להוכיח שהפונקציה אכן אנליטית ונגזרתה f, נקבע z ונבחר $r > 0$ שעבורו

$$B(z, r) \subset \Omega\,.$$

היתרון בכדור הוא שעתה ניתן לבחור בתור מסילות את הקווים הישרים שמחברים בין הנקודות. כלומר

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= \int_{[z_0,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &= \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &= \int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w\,. \end{aligned}$$

לאחר שהערכנו את הגבול הנ"ל, נוכל לחשב את הנגזרת

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)\,h\,\mathrm{d}t-\int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$=\int_0^1 |f(z+th)-f(z)|\,\mathrm{d}t\le\max_{t\in[0,1]}|f(z+th)-f(z)|,$$

אך מכך ש-f רציפה, הגבול בצד הימני שואף ל-0 כאשר $h\to 0$, ולכן F גזירה וגם $F'(z)=f(z)$.

□

4.2.2 נוסחת האינטגרל של קושי

נשתמש במשפט קושי-גורסה על מנת לחשב משפחה גדולה של אינטגרלים חשובים.

דוגמה 4.2.5. אינטגרציה לפונקציה $\frac{1}{z-z_0}$

1. נחשב תחילה את הערך $\oint_{C_r(z_0)}\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$ במפורש על ידי הצבת המסילה

$$\gamma(t)=z_0+re^{it},\quad \gamma'(t)=ire^{it},\quad t\in[0,2\pi],$$

ונקבל

$$\oint_\gamma\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{1}{z_0+re^{it}-z_0}ire^{it}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}i\,\mathrm{d}t=2\pi i.$$

2. נניח כי γ מסילה חלקה למקוטעין ופשוטה, כך ש-z_0 נמצאת בפנים שלה. נבחר רדיוס קטן מספיק $r>0$ עבורו $C_r(z_0)$ מוכלת כולה בפנים המסילה ונסמן ב-γ_r את המסילה של המעגל. נסמן ב-L_1 את הקו הישר היוצא מהמעגל למסילה החיצונית (בכיוון כלשהו) וב-L_2 נסמן את אותו המקטע הישר אך בכיוון ההפוך (כמודגם באיור 4.4 שלעיל). בצורה כזאת מתקבלת מסילה סגורה, והפונקציה $\frac{1}{z-z_0}$ אנליטית לאורך המסילה וגם בפנים שלה. אי לכך, על פי משפט קושי-גורסה,

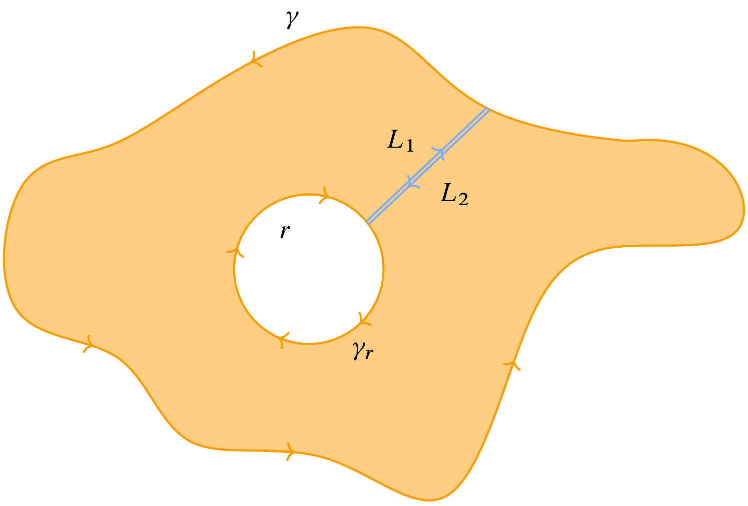
$$\int_\gamma\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z+\int_{L_2}\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z+\int_{L_1}\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z-\int_{C_r(z_0)}\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=0.$$

היות והאינטגרלים על המקטעים הישרים זהים למעט הסימן ההפוך, הם מתקזזים, ואנחנו מקבלים כי

$$\int_\gamma\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\int_{C_r(z_0)}\frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=2\pi i.$$

נשתמש בתוצאה זו בהמשך.

בטרם נגיע לנוסחת האינטגרל של קושי (נוסחה חשובה מאוד!) נציג תוצאה מקדימה.



איור 4.4: תיאור סכמטי של "החלפת המסילה" החיצונית במסילה המעגלית הפנימית.

טענה 4.2.1. אינדקס של נקודה ביחס למסילה

תהא γ מסילה סגורה וחלקה למקוטעין ותהא z_0 נקודה שאינה על המסילה. אזי, קיים $k \in \mathbb{Z}$ שעבורו

$$\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i k.$$

המספר k מכונה **האינדקס** של z_0 ביחס למסילה, והוא מסומן ב-$k = \operatorname{Ind}(\gamma, z_0)$.

הוכחה. על פי הגדרה 4.1.2,

$$\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}\,\mathrm{d}t\,.$$

היות והפונקציה בתוך האינטגרל רציפה, נוכל להגדיר $h(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0}\,\mathrm{d}s$ (שימו לב, זוהי צוברת השטח של האינטגרל), ולקבל פונקציה גזירה ברציפות שנגזרתה היא

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0},$$

שימו לב שלמעשה, $h(t)$ משמשת כגרסה מסויימת של $\log(\gamma(t)-z_0)$ ולכן היינו מצפים שיתקיים

$$e^{h(t)} = \gamma(t) - z_0.$$

כדי להוכיח שהיא אכן מקיימת את הדרוש מבלי להכנס לחקירה של לוגריתמים, נגדיר את הפונקציה

$$g\left(t\right)=e^{-h(t)}\left(\gamma(t)-z_{0}\right),$$

ונקבל פונקציה גזירה שעבורה

$$g'\left(t\right)=-e^{-h(t)}h'\left(t\right)\left(\gamma(t)-z_{0}\right)+e^{-h(t)}\gamma'(t)=0.$$

אך מכאן נובע כי g קבועה, וכדי למצוא את הקבוע נציב $t=a$ ונקבל

$$g\left(a\right)=e^{-h(a)}\left(\gamma(a)-z_{0}\right)=\gamma\left(a\right)-z_{0}.$$

לסיום ההוכחה, נחשב גם את הערך $g(b)$ ונשתמש בעובדה שהמסילה סגורה, כלומר $\gamma(b)=\gamma(a)$, ונקבל

$$\gamma\left(a\right)-z_{0}=g\left(a\right)\overset{g\text{ קבועה}}{=}g\left(b\right)=e^{-h(b)}\left(\gamma(b)-z_{0}\right)=e^{-h(b)}\left(\gamma(a)-z_{0}\right).$$

מהשוואה בין הביטויים מקבלים כי

$$e^{-h(b)}=1\Longrightarrow h\left(b\right)=2\pi ik,k\in\mathbb{Z},$$

וזה בדיוק מה שרצינו להראות. □

<u>הערה.</u> בפועל, עבור מסילה במגמה חיובית, $\mathrm{Ind}\left(\gamma,z_{0}\right)$ הוא מספר הפעמים שהמסילה γ מקיפה את הנקודה z_0.
עבור מסילה פשוטה, האינדקס תמיד יהיה 0 או 1.

מכאן נוכל לעבור להוכחת נוסחת האינטגרל של קושי.

הוכחת משפט 4.2.2. תחילה, נזהה כי לפי דוגמה 4.2.5, מתקיים

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(z_{0}\right)}{z-z_{0}}\mathrm{d}z=f\left(z_{0}\right).$$

כך שלמעשה, אפשר לסיים את ההוכחה בכך שנראה שמתקיים

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-z_{0}}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(z_{0}\right)}{z-z_{0}}\mathrm{d}z.$$

נחסר ביניהם ונעריך את ההפרש. כדי לעשות זאת נשתמש בטכניקה של החלק השני של דוגמה 4.2.5 ובמשפט קושי-גורסה, כדי להסיק שעבור רדיוס קטן מספיק

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(z\right)-f\left(z_{0}\right)}{z-z_{0}}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r}(z_{0})}\frac{f\left(z\right)-f\left(z_{0}\right)}{z-z_{0}}\mathrm{d}z.$$

את האינטגרל הימני נוכל לחסום על ידי למת ההערכה מטענה 4.1.3, ולקבל כי

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_r(z_0)}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right|\le\frac{2\pi r}{2\pi}\max_{z\in C_r(z_0)}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{r}$$
$$=\max_{z\in C_r(z_0)}|f(z)-f(z_0)|\xrightarrow{r\to0^+}0,$$

כאשר השאיפה האחרונה נובעת מהרציפות של f ומכך שהאינטגרל הנ"ל זהה לכל ערך של r קטן מספיק. היות והאינטגרל המקורי על γ לא תלוי ב-r, נסיק כי גם הוא חייב להיות אפס. □

4.2.3 שימושים ישירים למשפטי קושי

טענה 4.2.2. עקרון ערך הממוצע

יהא $\mathbb{C}\supset\Omega$ תחום עבורו $\Omega\supset\overline{B(z_0,r)}$. אם $f=u+iv:\Omega\to\mathbb{C}$ אנליטית, מתקיים

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{it}\right)\mathrm{d}t\,,$$

ובפרט

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(x_0+r\cos(t),y_0+r\sin(t)\right)\mathrm{d}t$$
$$v(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v\left(x_0+r\cos(t),y_0+r\sin(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

הוכחה. על פי נוסחת האינטגרל של קושי ממשפט 4.2.2, עבור המסילה $\gamma(t)=z_0+re^{it},\ t\in[0,2\pi]$.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+re^{it}\right)}{re^{it}}ire^{it}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{it}\right)\mathrm{d}t\,.$$

על ידי לקיחת החלק הממשי והחלק המדומה, מקבלים את הנוסחה גם עבור u,v. □

זכרו, שהוכחנו כי כל פונקציה הרמונית היא חלק ממשי של פונקציה אנליטית. אי לכך, מצאנו הוכחה לכך שכל פונקציה הרמונית מקיימת את עקרון ערך הממוצע. למעשה, לא נוכיח זאת בקורס - אך ניתן להוכיח כי כל פונקציה שמקיימת את עקרון ערך הממוצע היא הרמונית, ולכן היא החלק הממשי של פונקציה אנליטית כלשהי. תוצאות אלו מחזקות את הקשר העמוק שקיים בין פונקציות הרמוניות ממשיות לבין פונקציות מרוכבות אנליטיות.

דוגמה 4.2.6. התמרת פוריה של הגאוסיאן

בקורסי החדו"א נהוג להוכיח את הנוסחה

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

בתרגיל זה נחשב לכל $\omega \in \mathbb{R}$ את האינטגרל

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x\,,$$

שלמעשה מייצג (עד כדי נרמול מתאים) את **התמרת פוריה** של הפונקציה $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. כדי לעשות זאת נעבור להתבונן בפונקציה $f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$, שהיא פונקציה אנליטית, ונחשב את האינטגרל

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

כאשר γ_R היא המסילה המלבנית המקבילה לצירים שמחברת את הקדקודים

$$-R \to R \to R + i\omega \to -R + i\omega \to -R.$$

כמודגם באיור 4.5 שלעיל. לכאורה, אין צורך לפתור את האינטגרל בצורה מפורשת. היות והפונקציה אנליטית על המסילה ובפנים שלה, משפט קושי-גורסה גורס כי

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \forall R > 0.$$

הסוד הוא בכך שניתן לחשב את האינטגרל בדרך נוספת - במפורש. נסמן ב-$\gamma_k,\ k = 1,2,3,4$ את 4 הצלעות של המסילה.

- $\gamma_1(t) = t,\ t \in [-R, R]$, ולפי הגדרה

$$\oint_{\gamma_1} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

- $\gamma_2(t) = t + i\omega,\ t \in [-R, R]$, ולפי הגדרה

$$\oint_{\gamma_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(t+i\omega)^2}{2}}\,\mathrm{d}t = e^{\frac{\omega^2}{2}}\int_{-R}^{R} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\,.$$

- עבור המסילות $\gamma_{3,4}$, הצלעות האנכיות, לא נציב במפורש אלא נחסום את האינטגרלים על ידי שימוש בלמת ההערכה.

$$\left|\int_{\gamma_3} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z\right| \le \omega \max_{t\in[0,\omega]} \left|e^{-\frac{(R+it)^2}{2}}\right| = \omega \max_{t\in[0,\omega]} \left|e^{-\frac{R^2}{2}}\right| \left|e^{-i\omega t}\right| \left|e^{\frac{t^2}{2}}\right|$$
$$= \omega e^{\frac{\omega^2}{2}} e^{-\frac{R^2}{2}},$$

וחסם דומה נכון עבור הצלע השמאלית, γ_4. בפרט, כאשר $R \to \infty$, האינטגרלים על שתי המסילות ישאפו לאפס.

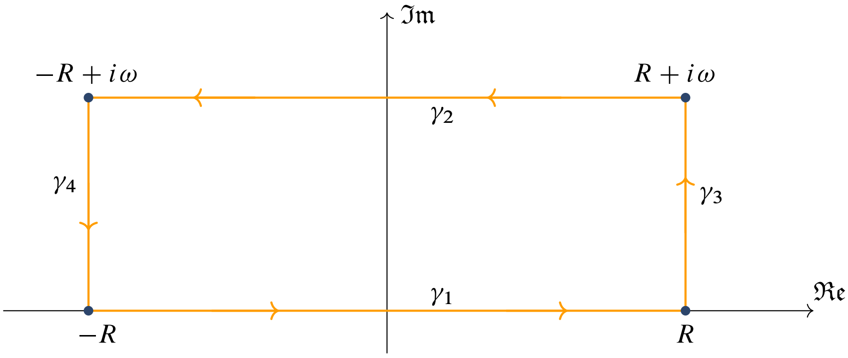
לסיכום, לכל $R > 0$ האינטגרל על המסילה γ_R כולה מתאפס, ולכן גם בגבול $R \to \infty$. כלומר

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t + e^{\frac{\omega^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 1 + e^{\frac{\omega^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\,.$$

לאחר השוואה בין הביטויים, נקבל כי

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

כלומר, קיבלנו שהגאוסיאן הוא למעשה התמרת הפוריה של עצמו.



איור 4.5: המסילה המלבנית γ_R מדוגמה 4.2.6.

השימוש החשוב הבא הוא ההוכחה שפונקציה אנליטית בקבוצה פתוחה, למעשה גזירה בה מכל סדר.

משפט 4.2.5. הצגה אינטגרלית

תהא $\mathbb{C} \supset \Omega$ קבוצה פתוחה, $\gamma : [a, b] \to \Omega$ מסילה פשוטה כך שהפנים של γ מוכל כולו ב-Ω. אם g פונקציה רציפה בכל הנקודות של γ, הפונקציה

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w$$

אנליטית מכל סדר בפנים של המסילה, ומתקיים

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(w)}{(w - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \, .$$

הוכחה. נוכיח תחילה עבור הנגזרת הראשונה, ונסביר בקצרה כיצד ניתן להמשיך את ההוכחה באינדוקציה. על מנת להוכיח כי f אנליטית, נבחר $r > 0$ שעבורו $B(z, r) \subset \Omega$ ונעריך עבור $|h| < \frac{r}{2}$ את המנה

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i h} \left(\oint_\gamma \frac{f(w)}{w - z - h} \, \mathrm{d}w - \oint_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)\,(w - z - (w - z - h))}{(w - z - h)(w - z)} \, \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w - z - h)(w - z)} \, \mathrm{d}w \, .
\end{aligned}$$

כאשר $h \to 0^+$ ניתן לשער כי הגבול שמתקבל הוא הנוסחה הדרושה, נוכיח זאת על ידי הערכת

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^2} \, \mathrm{d}w \right| =$$

$$\frac{|h|}{2\pi} \mathrm{L}(\gamma) \max_\gamma |f(\gamma(t))| \frac{1}{|\gamma(t) - z - h| \, |\gamma(t) - z|^2}$$

כדי לסיים את ההוכחה, נשים לב שהמסילה שלנו לא עוברת בתוך הכדור ולכן

$$|\gamma(t) - z| > r, \quad |\gamma(t) - z - h| > \frac{r}{2},$$

כלומר

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^2} \, \mathrm{d}w \right| \leq \frac{h}{2\pi \frac{r}{2} r^2} \max_\gamma |f(\gamma(t))| \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

ומכאן שהראינו כי f גזירה ונגזרתה נתונה על פי הנוסחה במשפט. **ההכללה לנגזרות גבוהות לא הועברה בהרצאות הפרונטליות.** נניח עתה שהוכחנו את הנוסחה עבור $f^{(n-1)}(z)$ ונוכיח את הנוסחה לנגזרת $f^{(n)}(z)$ ולשם כך נשתמש

באותו הכדור ובאותו התחום $|h| < \frac{r}{2}$, ונכתוב

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i h}\oint_\gamma f(w)\left(\frac{1}{(w-z-h)^n}-\frac{1}{(w-z)^n}\right)\mathrm{d}w\,.$$

ועתה

$$\begin{aligned}\frac{1}{(w-z-h)^n}-\frac{1}{(w-z)^n} &= \frac{(w-z)^n-(w-z-h)^n}{(w-z-h)^n(w-z)^n}\\ &= \frac{(w-z)^n-(w-z)^n+n(w-z)^{n-1}+\sum_{k=2}^n\binom{n}{k}(-h)^k(w-z)^{n-k}}{(w-z-h)^n(w-z)^n}\\ &= \frac{nh}{(w-z)(w-z-h)^n}+h^2\frac{\sum_{k=2}^n\binom{n}{k}(-h)^{k-2}(w-z)^{n-k}}{(w-z-h)^n(w-z)^n}.\end{aligned}$$

ונזהה כי כי הפונקציה באגף הימני חסומה על המסילה כי

$$\left|\frac{\sum_{k=2}^n\binom{n}{k}(-h)^{k-2}(w-z)^{n-k}}{(w-z-h)^n(w-z)^n}\right| \le \frac{\sum_{k=2}^n r^{k-2}R^{n-k}}{\frac{r^{2n}}{2^n}} = M$$

כאשר R הוא חסם כלשהו של $(w-z)$ (המסילה חסומה, כך שברור שביטוי זה חסום על ידי קבוע כלשהו), ו-M יהיה קבוע שיסמן את החסם של פונקציה זו כדי להקל על החישוב. עתה

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z-h)^n}\mathrm{d}w\\ &+\frac{h(n-1)!}{2\pi i}\oint_\gamma f(w)\frac{\sum_{k=2}^n\binom{n}{k}(-h)^{k-2}(w-z)^{n-k}}{(w-z-h)^n(w-z)^n}\mathrm{d}w\end{aligned}$$

היות וראינו שהאינטגרל הימני הוא אינטגרל של פונקציה חסומה על המסילה, כאשר $h\to 0$ האיבר הימני ביותר ישאף לאפס, ונותר להעריך רק את האינטגרל השמאלי בגבול. לשם כך נעריך את ההפרש:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z-h)^n}-\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\mathrm{d}w\right|\\ &\le \frac{n!}{2\pi i}\max_\gamma|f(w)|\left|\frac{(w-z)^n-(w-z-h)^n}{(w-z)^{n+1}(w-z-h)^n}\right|\end{aligned}$$

ושוב על ידי הערכה דומה, ניתן להראות כי ביטוי זה שואף לאפס כאשר $h \to 0$. ☐

על אף שהנוסחה הזו מפתיעה בפני עצמה, השימוש העיקרי שלה הוא המשפט החשוב מאוד הבא.

משפט 4.2.6. נוסחת האינטגרל של קושי לנגזרות

תהא $\Omega \subset \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ אנליטית ב-Ω. אזי:

1. f גזירה מכל סדר ב-Ω.
2. לכל מסילה $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ פשוטה, סגורה, חלקה למקוטעין כך שהפנים שלה מוכל ב-Ω, מתקיים

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$$

לכל z_0 בפנים של γ.

הוכחה. אם $z_0 \in \Omega$, היא נקודה פנימית ואפשר למצוא $r > 0$ שעבורו

$$\bar{B}(z_0, r) \subset \Omega .$$

על פי משפט 4.2.5 ומשפט 4.2.2, מתקיים

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w ,$$

ופונקציה זו גזירה מכל סדר לכל $z \in B(z_0, r)$ (בפרט, ב-z_0). הנוסחה לנגזרות היא

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w .$$

הוכחת החלק השני זה כמעט לחלוטין לחלק הראשון, אלא שהפעם מראש נתונה לנו מסילה שמקיימת את תנאי המשפטים שבהם השתמשנו. ☐

4.3 מסקנות משפט קושי

בחלק זה נפגוש מסקנות שאינן נובעות ישירות ממשפט קושי, אך הן אפליקטיביות מאוד והוכחתן מתבססת על משפטי קושי. במשפט 4.2.1 ראינו כי אם פונקציה אנליטית, האינטגרל על כל מסילה שהפנים שלה מוכל בתחום האנליטיות יתאפס. המשפט הבא מהווה מעין גרסה הפוכה, שמאפשרת להסיק אנליטית כאשר אינטגרלים על מסילות סגורות מתאפסים.

משפט 4.3.1. משפט מורירה

תהא $\mathbb{C} \supset \Omega$ קבוצה פתוחה וקשירה, ותהא $f : \Omega \to \mathbb{C}$ רציפה שעבורה

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

לכל משולש ב-Ω. אזי f אנליטית ב-Ω.

הוכחה. נקבע $z_0 \in \Omega$ ונגדיר

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

כאשר γ_z היא מסילה **כלשהי** היוצאת מ-z_0 ל-z בתוך Ω. שימו לב שהיות והאינטגרל על מסילה סגורה מתאפס, נובע למעשה שהאינטגרל שהגדרנו לא תלוי בבחירת המסילה, מה שאומר שהפונקציה שלנו אכן מוגדרת היטב. בפרט, ניתן להסיק שלכל z, w,

$$F(z) - F(w) = \int_{\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_w} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{w,z}} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

כאשר $\gamma_{z,w}$ היא מסילה כלשהי היוצאת מ-w ל-z. כדי להשתכנע בכך שימו לב כי

$$\int_{\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_w} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{z,w}} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_z + (-\gamma_{w,z}) + (-\gamma_w)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

היות וזו מסילה סגורה. עתה, נוכיח שהפונקציה גזירה ב-z בכך שנבחר $r > 0$ עבורו

$$B(z, r) \subset \Omega.$$

לכל $|h| < r$, נוכל להשתמש במסילה הישרה שמחברת את z עם $z + h$ כדי לכתוב

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)\,h\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t\,.$$

כבר ניתן לזהות שכאשר $h \to 0$ נצפה לקבל את האינטגרל $\int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t = f(z)$, וזה יוכיח את הגזירות. אכן

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\int_0^1 f(z+th) - f(z)\,\mathrm{d}t\right| \le \max_{t\in[0,1]} |f(z+th) - f(z)| \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

כאשר הגבול האחרון נובע מהרציפות של f. כלומר, הוכחנו כי F אנליטית, ו-$F' = f$. אך עתה, משידוע לנו שפונקציה אנליטית גזירה מכל סדר, נובע כי גם f אנליטית, כפי שרצינו להראות. □

דוגמה 4.3.1 הרחבה אנליטית

תהא $f:B(0,1)\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ואנליטית למעט בציר הממשי. נוכיח כי f אנליטית בכל התחום. כדי לעשות זאת נשתמש במשפט מוררה (הרי נתון כי f רציפה), ונוכיח כי האינטגרל של כל מסילה סגורה מתאפס. אם γ משולש, נפריד למספר מקרים אפשריים.

- המשולש מוכל כולו בחצי התחתון או בחצי העליון של העיגול. לפי משפט קושי-גורסה, האינטגרל יתאפס כי f אנליטית במשולש ובפנים שלו.
- הציר הממשי חותך את המשולש. במקרה זה נפרק את המשולש ונזיז את שני חלקיו לאיזורים שבהם f אנליטית כמודגם באיור 4.6 שלעיל. נשים לב שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים

$$\oint_{\gamma_{1,2}^{\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

כי המסילות מוכלות בתחום שבו f אנליטית (גם הפנים של המסילות, כמובן). מצד שני, ניתן לזהות כי

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\oint_{\gamma_1^{\varepsilon}} f(z)+\oint_{\gamma_2^{\varepsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z=0,$$

ומכאן שהאינטגרל על המשולש גם הוא מתאפס בהכרח. שימו לב שההשאפה $\varepsilon\to 0^+$ מוצדקת בזכות העובדה ש-f רציפה ולכן הערכים על המסילות יתקרבו לערכים של המסילה γ בגבול.

- נניח כי המשולש נמצא רק בחצי התחתון/העליון של העיגול, אבל כן חותך את הציר עצמה (בין אם עקב צלע שמשיקה או קדקוד שנוגע). במקרה זה נעבוד כמו במקרה הקודם, אך לא נפרק את המסילה, רק נזיז אותה לכיוון המתאים ונשתמש שוב בגבול.

המסקנה היא שהאינטגרל של כל משולש בעיגול מתאפס, ולכן f למעשה אנליטית.

נעבור למסקנה הבאה של משפט-קושי, שעוסקת במקסימום של פונקציה אנליטית.

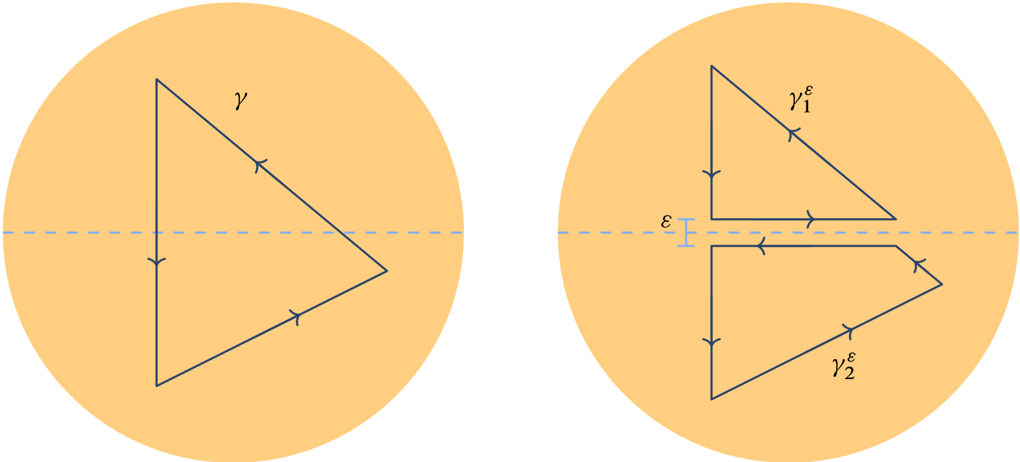
משפט 4.3.2 עקרון המקסימום

תהא f אנליטית בתחום D. אזי $|f|$ מקבלת מקסימום ב-D אם ורק אם f פונקציה קבועה ב-D.

הוכחה. ברור כי אם f פונקציה קבועה, לפונקציה $|f|$ יש ערך מקסימלי ב-D (הוא מתקבל בכל הנקודות). נניח עתה כי f מקבלת מקסימום ונוכיח כי f קבועה.

נניח כי $z_0\in\Omega$ הוא מקסימום גלובלי של $|f|$. כלומר, לכל $z\in\Omega$ מתקיים

$$|f(z)|\le|f(z_0)|\,.$$



איור 4.6: פירוק המשולש והזזה של חלקיו לאיזורים שבהם הפונקציה אנליטית.

נבחר $r > 0$ שעבורו $\bar{B}(z_0, r) \subset \Omega$ ונשתמש בעקרון הממוצע של פונקציה אנליטית כדי לכתוב

$$|f(z_0)| \le \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) \mathrm{d}t \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right| \mathrm{d}t \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| \, \mathrm{d}t = |f(z_0)| .$$

מכאן נובע כי

$$0 \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| - \left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right| \mathrm{d}t \le 0.$$

כלומר האינטגרל האמצעי צריך להתאפס. אך היות ומדובר בפונקציה רציפה ואי-שלילית, האינטגרל שלה מתאפס אם ורק אם הפונקציה מתאפסת זהותית בתוך האינטגרל, כלומר, אם

$$\left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right| = |f(z_0)| , \quad \forall t \in [0, 2\pi] .$$

כלומר $|f|$ מקבלת ערך זהה על כל המעגל ברדיוס r סביבה. אך היות ונוסחה זו נכונה גם לכל הרדיוסים שקטנים מ-r, נקבל כי $|f|$ היא פונקציה קבועה בכדור $\bar{B}(z_0, r)$.

סוף ההוכחה תתבצע על ידי טיעון טופולוגי. נגדיר את הקבוצה

$$G = \{z \in \Omega \,|\, |f(z)| = |f(z_0)|\} .$$

ההוכחה שהראינו זה עתה מראה כי G קבוצה פתוחה כי לכל נקודה שבה המקסימום מתקבל, הראינו שיש עיגול שבו המקסימום מתקבל באופן זהותי. מצד שני,

$$\Omega \setminus G = \{z \in \Omega \,|\, |f(z)| \ne |f(z_0)|\}$$

היא גם קבוצה פתוחה. אכן, אם $|f(z)| \ne |f(z_0)|$, מרציפות $|f|$ קיימת סביבה של z (כלומר עיגול) שבו אף נקודה

לא מקבלת את המקסימום. נזכיר שעל פי הנחה, Ω היא קבוצה פתוחה וקשירה, בעוד שמתקיים

$$G \cap (\Omega \setminus G) = \emptyset, \quad \Omega \subset G \cup (\Omega \setminus G)\,.$$

ולכן Ω חייב להיות מוכל כולו בתוך אחת הקבוצות. מפני שהוא מכיל לפחות נקודה אחת מ-G לפי הנחה, נסיק כי $\Omega \subset G$ ולכן $|f|$ קבועה. כזכור, הראינו כבר בדוגמה 2.2.4 כי אם $|f|$ קבועה, נובע כי גם f קבועה. $\square$

מסקנה חשובה. נניח כי $\Omega \subset \mathbb{C}$ תחום ו-$f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ רציפה כך ש-f אנליטית ב-Ω ולא קבועה. אזי, **אם** $|f|$ מקבלת מקסימום, הוא מתקבל ב-$\partial\Omega$. בפרט, אם Ω קבוצה חסומה, משפט ויירשטראס מבטיח כי $|f|$ תקבל מקסימום על $\bar{\Omega}$, ולכן

$$\max_{z\in\bar{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|\,.$$

דוגמה 4.3.2 שימוש לעקרון המקסימום

נחשב את המקסימום של $\left|\frac{1}{z^2+2}\right|$ בקבוצה $\bar{B}(0,1)$. היות וזאת קבוצה חסומה המקסימום חייב להתקבל (הפונקציה הולומורפית), ונסיק כי על פי עקרון המקסימום, עלינו לחפש את המקסימום על השפה. נציג

$$\gamma(t) = e^{it}$$

כדי לתאר את השפה בצורה יותר פשוטה עבור $[0,2\pi] \ni$ ונקבל

$$\left|\frac{1}{(\gamma(t))^2+2}\right| = \frac{1}{\left|e^{2it}+2\right|} = \frac{1}{\sqrt{(\cos(2t)+2)^2+\sin^2(2t)}} = \frac{1}{\sqrt{5+4\cos(2t)}}$$

ברור אם כן שהמקסימום מתקבל כאשר המכנה מינימלי, כלומר $t=\pi$, ואז המקסימום של הפונקציה יהיה 1.

המסקנה הבאה ממשפט קושי שנפגוש עוסקת בפונקציות שלמות.

משפט 4.3.3 משפט ליוביל

תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פונקציה אנליטית (כלומר, פונקציה שלמה). אם f חסומה, אזי f קבועה.

הוכחה. נקבע $z_0 \in \mathbb{C}$ נשתמש בנוסחת קושי לנגזרת הראשונה של f ממשפט 4.2.6 על המעגלים $C_R(z_0)$ (מה שתמיד מתאפשר היות והפונקציה אנליטית בכל מקום), ונכתוב

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,\mathrm{d}w\,.$$

נעריך את האינטגרל כדי לבדוק מה קורה כאשר $R \to \infty$, תוך הנחה כי f חסומה, כלומר $|f| \le M$,

$$\left|f'(z_0)\right| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{M}{R^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

כלומר, הוכחנו שבתנאי המשפט הנגזרת מתאפסת זהותית בתחום, ולכן f פונקציה קבועה. $\square$

דוגמה 4.3.3. שימוש פשוט למשפט ליוביל

נניח כי $f = u + iv$ היא פונקציה שלמה שעבורה

$$u(x, y) \leq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

נוכיח כי f קבועה. אכן, נתבונן בפונקציית העזר

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - 2} = \frac{1}{(u(x,y) - 2) + iv(x,y)}.$$

היות והמכנה לא מתאפס אף פעם, מקבלים שגם g פונקציה שלמה. יתרה מכך

$$|g(z)| \leq \frac{1}{|u(x,y) - 2|} \leq 1,$$

כלומר g פונקציה חסומה. על פי משפט 4.3.3, g קבועה וקיים $w_0 \in \mathbb{C}$ עבורו

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - 2} = w_0 \Longrightarrow f(z) = \frac{1}{w_0} + 2,$$

ולכן גם f פונקציה קבועה.

לבסוף, נשתמש במשפט ליוביל על מנת להוכיח בקלות את אחת מהמשפטים הבסיסיים והחשובים ביותר במתמטיקה.

משפט 4.3.4. המשפט היסודי של האלגברה

יהא $p(z)$ פולינום ממעלה 1 או יותר. אזי, ל-p יש שורש.

הוכחה. נניח בשלילה כי ל-p אין שורש, ונגדיר את הפונקציה

$$g(z) = \frac{1}{p(z)}.$$

הפונקצי g שלמה היות והמכנה לא מתאפס, וכידוע מתכונות של פולינומים, מתקיים

$$\lim_{z \to \infty} |g(z)| = 0.$$

אך מכאן נובע כי g פונקציה שלמה וחסומה, ולכן קבועה (בסתירה להנחה שהדרגה של הפולינום גדולה מ-1. □

5

טורי חזקות וטורי לורן

בפרק זה מטרתנו היא לעסוק בטורי חזקות מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

ובאופן כללי יותר, ב**טורי לורן** מהצורה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

(שבהם מאפשרים גם חזקות שליליות). פונקציות שמוגדרות על ידי טורים כאלו הן פונקציות שמובנות לנו היטב וידועות לנו תכונות רבות שלהן. יתרה מכך, נגלה בהמשך שלמעשה כל פונקציה אנליטית ניתן לכתוב בצורה כזאת (עד כדי מגבלות מסויימות), כך שיש יתרון גדול בלדעת שניתן לנתח פונקציות אנליטיות בעזרת הטורים שמייצגים אותן. על מנת לעשות זאת, נפתח בהכללת עולם טורי החזקות הממשיים שפגשנו בקורסים קודמים, לעולם המרוכב.

5.1 הכללת טורי חזקות למרוכבים

הגדרה 5.1.1 טורי מספרים מרוכבים

תהא $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה של מספרים מרוכבים. על ידי הגדרת **סדרת הסכומים החלקיים**

$$\{S_n\}_{n=0}^{\infty} , \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} z_k ,$$

אפשר לשאול האם לסדרה $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ יש גבול. במידה והוא קיים, אומרים ש**טור המספרים** $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ **מתכנס** ומגדירים

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k$$

לעתים נכנה את האגף השמאלי בשם **סכום הטור**.

מספר תכונות שנובעות באופן מידי הגדרה זו והעובדה שהיא זהה לחלוטין להגדרה מהמקרה הממשי.

טענה 5.1.1. תכונות בסיסיות, טורי מספרים

יהיו $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}, \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרות של מספרים מרוכבים כך ש-$\sum_{n=0}^{\infty} w_n, \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ הם טורים מתכנסים. אזי

1. **ליניאריות.** לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ הסדרה $\{\alpha z_n + w_n\}_{n=0}^{\infty}$ מגדירה טור מתכנס ומתקיים
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha z_n + w_n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$
2. **אי-שוויון המשולש.** אם $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ הוא טור מספרים מתכנס, אזי
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|.$$
3. **התנאי ההכרחי.** מכך ש-$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ מתכנס, נובע $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

תכונות נוספות שמאפשרות להוכיח/לבדוק התכנסות של טורים.

משפט 5.1.1. תנאי קושי, התכנסות בהחלט, התכנסות ממשי ומדומה

תהא $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים מרוכבים.

1. **תנאי קושי.** הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ מתכנס אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > m > N$, מתקיים
$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} z_k\right| < \varepsilon.$$
2. **התכנסות בהחלט.** אומרים כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$, ואם הטור מתכנס בהחלט, הוא גם מתכנס.
3. **התכנסות רכיב-רכיב.** הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Re}(z_n), \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Im}(z_n)$ מתכנסים בנפרד.

5.1.1 סדרות וטורי פונקציות מרוכבות

הגדרה 5.1.2. התכנסות נקודתית של סדרה מרוכבת

סדרת פונקציות מרוכבות $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ המוגדרות בתחום Ω **מתכנסת נקודתית** לפונקציה f אם
$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \quad \forall z \in \Omega.$$

הגדרה 5.1.3. התכנסות במידה שווה של סדרה מרוכבת

סדרת פונקציות מרוכבות $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ המוגדרות בתחום Ω **מתכנסת במידה שווה** לפונקציה f אם

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|\right)=0,$$

או לחלופין, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $z\in\Omega$, מתקיים

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon.$$

הערה. מהגדרה 5.1.3 נובע כי אם סדרה מתכנסת במידה שווה היא מתכנסת נקודתית. בפרט, ההתכנסות בשני המקרים היא לאותה הפונקציה.

דוגמה 5.1.1. דוגמה פשוטה, התכנסות נקודתית ולא במידה שווה

נתבונן בסדרה $f_n(z)=z^n$ המוגדרת בעיגול היחידה הפתוח, כלומר הנקודות שמקיימות $|z|<1$. נשים לב שלכל נקודה כנ"ל, מתקיים

$$|f_n(z)|=|z|^n\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

ולכן הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית לפונקציית האפס. כדי לבדוק האם היא מתכנסת במידה שווה, נחשב לכל $n\in\mathbb{N}$ את החסום

$$\sup_{|z|<1}|f_n(z)-f(z)|=\sup_{|z|<1}|z^n-0|=1,$$

היות וערך זה לא שואף לאפס כאשר $n\to\infty$, נסיק שההתכנסות היא נקודתית אך לא במידה שווה.

טענה 5.1.2. אריתמטיקה של התכנסות במידה שווה

תהיינה $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ זוג סדרות של פונקציות ב-Ω המתכנסות במידה שווה ל-f,g בהתאמה. אזי

1. לכל $\alpha\in\mathbb{C}$, $\{\alpha f_n+g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ל-$\alpha f+g$ ב-Ω.
2. אם לפחות אחת מהסדרות חסומה, $\{f_n\cdot g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ל-$f\cdot g$ ב-Ω.
   - בפרט, לכל h חסומה ב-Ω, $\{h\cdot f_n\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ל-$h\cdot f$ ב-Ω.
3. אם $\varphi:E\to\mathbb{C}$ כך ש-$\varphi(z)\in\Omega$ לכל $z\in E$, אזי $\{f\circ\varphi\}_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ב-E.

משפט 5.1.2. תכונות מורשות לפונקציה הגבולית

תהיינה $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת פונקציות רציפות בתחום Ω המתכנסות במידה שווה ל-f בכל תת-קבוצה סגורה וחסומה של Ω. אזי

1. **רציפות.** f רציפה ב-Ω.

2. **החלפת גבול ואינטגרל.** לכל מסילה חלקה למקוטעין γ שתמונתה מוכלת ב-Ω, מתקיים

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

3. **אנליטיות.** אם $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ סדרה של פונקציות אנליטיות, אזי גם f אנליטית ב-Ω, והסדרה $\{f_n'\}_{n=0}^\infty$ מתכנסת במידה שווה בכל תת-קבוצה סגורה וחסומה של Ω.

הוכחה. **ההוכחה לא עברה בהרצאות הפרונטליות.** ההוכחה של הרציפות זהה לחלוטין להוכחה של המקרה הממשי, ולכן נדלג עליה. באשר להחלפת הגבול והאינטגרל, נשים לב כי היות והתמונה של γ היא תת-קבוצה סגורה וחסומה של Ω, מקבלים כי $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ מתכנסות במידה שווה ל-f בקבוצה זו, ולכן

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \mathrm{L}(\gamma)\sup_{z\in\gamma([a,b])}|f_n(z)-f(z)| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

כפי שרצינו להראות (כאן, $[a,b]$ הוא תחום ההגדרה של המסילה γ). באשר לאנליטיות, נקבע $z_0\in\Omega$ ונבחר $r>0$ כך ש-$\bar{B}_r(z_0)\subset\Omega$. היות ו-$f_n$ אנליטיות, נוכל להשתמש בנוסחת ההצגה של קושי (משפט 4.2.2) ולהסיק כי לכל $|z-z_0|<r$,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,.$$

עתה, העובדה כי $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ מתכנסת במידה שווה ל-f על המסילה (שוב, לפי הנתון), גוררת כי לכל z, $\left\{\frac{f_n(w)}{w-z}\right\}_{n=0}^\infty$ מתכנסת במידה שווה ל-$\frac{f(w)}{w-z}$, כלומר

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{f_n(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,.$$

אך עתה, על פי משפט 4.2.5, נובע כי f אנליטית! כדי להוכיח את ההתכנסות במידה שווה על קבוצות סגורות וחסומות, נניח כי $K\subset\Omega$ סגורה וחסומה. בזכות הסגירות והחסימות, אפשר למצוא $\delta>0$ כך שלכל $z\in K$ מתקיים

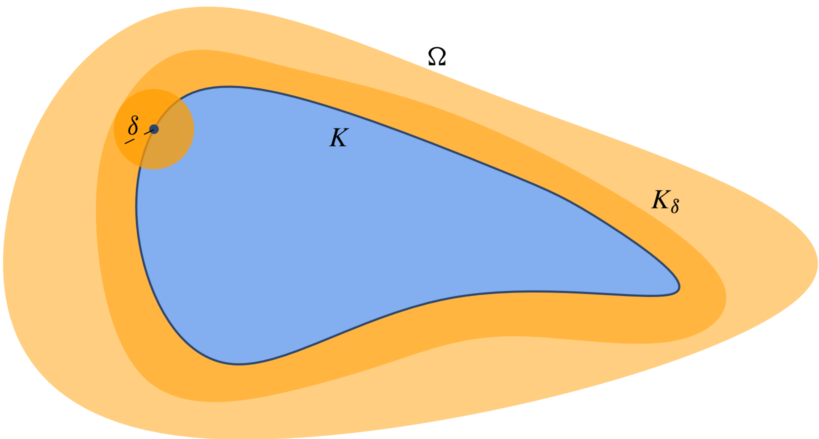
$$\bar{B}(z,\delta)\subset\Omega\,.$$

נסמן ב-K_δ את האיחוד של כל הכדורים הללו (כמודגם באיור 5.2 שלעיל), ונקבל קבוצה סגורה וחסומה כך ש-$K\subset K_\delta\subset\Omega$. בצורה כזאת נוכל להשתמש בנוסחת האינטגרל של קושי ובכך שנתון שהסדרה $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ מתכנסת במידה שווה ל-f על K_δ, כדי לכתוב

$$\sup_{z\in K}\left|f_n'(z)-f'(z)\right| = \sup_{z\in K}\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\delta(z)}\frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w\right| \overset{(4.1.3)}{\le} \frac{1}{2\pi\delta^2}(2\pi\delta)\sup_{z\in K_\delta}|f_n(z)-f(z)|$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בלמת ההערכה ובכך שהגדלנו את הסופרמום על ידי בחירת קבוצה גדולה יותר. אך

על קבוצה זו ההתכנסות היא במידה שווה ולכן ביטוי זה שואף לאפס כאשר $n \to \infty$, ומכאן שההתכנסות היא במידה שווה. $\square$



איור 5.1: קבוצה סגורה וחסומה K ובחירת K_δ, קבוצה סגורה וחסומה אחרת שנמצאת "בין" K לבין התחום Ω כולו.

נעבור מסדרות של פונקציות לטורים של פונקציות. נפתח בדוגמה,

דוגמה 5.1.2. הטור ההנדסי

נניח כי $|z| < 1$, ונתבונן בסדרת הפונקציות

$$S_0(z) = 1,\ S_1(z) = 1 + z,\ S_2(z) = 1 + z + z^2$$

ובאופן כללי נגדיר $S_n(z) = 1 + \cdots + z^n$. על ידי שימוש בנוסחאות לסכום סדרה הנדסית סופית, אפשר להסיק כי

$$S_n(x) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

כך שלמעשה מדובר בסדרת פונקציות פשוטה למדי, ועבור $|z| < 1$ ניכר כי הסדרה מתכנסת לפונקציית הגבול $S(z) = \frac{1}{1-z}$.

נכליל את הרעיון מדוגמה 5.1.2 ונדון בסדרות של סכומים של פונקציות, או בשמם המקובל - טורי פונקציות.

הגדרה 5.1.4. טורי פונקציות מתכנסים ומתכנסים במידה שווה

תהא $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום Ω. אזי, סדרת הפונקציות $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ באותו התחום, המוגדרת על ידי

$$S_n(z) := \sum_{k=0}^{n} f_k(z) = f_0(z) + \cdots + f_n(z),$$

מכונה **סדרת הסכומים החלקיים**.אם סדרה זו מתכנסת/מתכנסת במידה שווה אומרים כי **הטור** $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ **מתכנס נקודתית/במידה שווה** ומכנים את הפונקציה הגבולית בשם **סכום הטור**. באופן דומה, אומרים כי $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ **מתכנס בהחלט** אם $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ מתכנס.

משפט 5.1.3. תנאי קושי לטורי פונקציות

תהא $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום Ω. אזי, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס במידה שווה אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > m > N$ ולכל $z \in \Omega$,

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

הדרך הנפוצה והיעילה ביותר לבדיקת התכנסות במידה שווה של טורי פונקציות היא המבחן הבא.

משפט 5.1.4. מבחן M של ויירשטראס

תהא $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ מוגדרות בתחום Ω. נניח שקיימת סדרת מספרים $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ שעבורה

- $|f_n(z)| \le M_n$ לכל $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ הוא טור מספרים מתכנס.

אזי, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה ב-Ω.

דוגמה 5.1.3. שימוש במבחן המיורנטות

פונקציית זטא של רימן מוגדרת (לפחות היכן שהוא קיים) בעזרת הטור

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

נניח כי $\Omega := \{x + iy | x > 1 + \varepsilon\}$. אזי

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \left|\frac{1}{e^{z\,\mathrm{Log}(n)}}\right| = \frac{1}{e^{x \ln(n)}} = \frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

אם נסמן את האגף הימני בתור סדרה $\left\{M_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, נקבל על פי משפט 5.1.4 כי $\zeta(z)$ הוא טור מתכנס בהחלט ובמידה שווה ב-Ω. יתרה מכך, היות וכל הפונקציות בטור אנליטיות, נוכל להסיק כי גם ζ פונקציה אנליטית בתחום.

את המסקנה מסוף הדוגמה האחרונה ננסח כמשפט כללי.

משפט 5.1.5. אנליטיות טור פונקציות

אם $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת פונקציות אנליטיות ב-Ω והטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ מתכנס במידה שווה ב-Ω, אזי סכום הטור הוא פונקציה אנליטית ב-Ω.

עתה, נוכל לעבור לדון בטורים החשובים של הקורס - טורי חזקות.

5.2 טורי חזקות/טורי טיילור

הגדרה 5.2.1. טור חזקות סביב z_0

בהנתן סדרת מספרים מרוכבים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ מכונה בשם **טור חזקות סביב z_0**.

הערה. באופן כללי, הביטוי 0^0 אינו מוגדר. כלומר, הטור שלנו לא מוגדר היטב כאשר $z=z_0$. ניתן לכתוב תמיד את הטור בצורה

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

אך כתיבה זו בוודאי אינה נוחה. על מנת למנוע את אי הנוחות, נסמן בקורס $0^0=1$ ובצורה כזאת אפשר לכתוב את הטור בצורה קומפקטית יותר.

ברור כי טור החזקות מתכנס תמיד בנקודה $z=z_0$, וערכו בנקודה הוא a_0. העניין המיוחד בטורי חזקות הוא שתחום ההתכנסות שלהם תמיד סימטרי סביב נקודת המרכז של הטור.

טענה 5.2.1. דיסק התכנסות

נניח כי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ מתכנס בנקודה $z_1\neq z_0$, ונסמן $\tilde{r}=|z_1-z_0|$. אזי, הטור למעשה מתכנס בהחלט בכל נקודה שבה $|z-z_0|<\tilde{r}$, ובכל תחום Ω עבורו

$$\Omega\subset\{z\in\mathbb{C}||z-z_0|\leq r\},$$

כאשר $r<\tilde{r}$, ההתכנסות תהיה במידה שווה.

הוכחה. היות והטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z_1-z_0)^n$ מתכנס, נובע מהתנאי ההכרחי (טענה 5.1.1), כי $\lim_{n\to\infty} a_n\,(z_1-z_0)^n$, ובפרט, הסדרה חסומה (במודולו) על ידי $K>0$ כלשהו. לכן, אם

$$|z-z_0|\leq r<\tilde{r}=|z_1-z_0|,$$

נוכל לכתוב

$$\left|a_n\,(z-z_0)^n\right|=\left|a_n\,(z_1-z_0)^n\right|\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n\leq K\left(\frac{r}{\tilde{r}}\right)^n:=M_n.$$

ברור כי הסדרה $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ מקיימת את כל הדרישות של משפט 5.1.4, ולכן טור החזקות מתכנסת בהחלט ובמידה שווה בקבוצה הנקודות שבה $r\leq|z-z_0|$ לכל $r<\tilde{r}$. בפרט יש התכנסות בהחלט נקודתית בכל הדיסק הפתוח ברדיוס

$\tilde{r}$. □

מכאן נוכל להסיק את המשפט הבא שקובע באופן מוחלט את צורת תחום ההתכנסות של כל טורי החזקות.

משפט 5.2.1. קיום רדיוס התכנסות

יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור חזקות. אזי, מתקיים אחד מהבאים.

- הטור מתכנס בהחלט בכל $\mathbb{C}$.
- הטור מתכנס רק עבור $z = z_0$.
- קיים $R \in (0,\infty)$ שעבורו הטור מתכנס בהחלט בעיגול $B(z_0, R)$, ומתבדר מחוץ ל-$\bar{B}(z_0, R)$.

בכל המקים, ההתכנסות תהיה בהחלט ובמידה שווה בתתי-קבוצות סגורות וחסומות של תחום ההתכנסות.

הוכחה. נסמן

$$R = \sup\left\{|z-z_0| \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right\}.$$

עבור $R = \infty$ מקבלים בעזרת טענה 5.2.1 את המקרה הראשון. אם $R = 0$ מקבלים את המקרה השני, ואם $R \in (0,\infty)$ מקבלים את המקרה השלישי, שוב על ידי הפעלת טענה 5.2.1. □

למספר R (שנסמן גם ב-$R = 0$, $R = \infty$ עבור שני המקרים הראשונים) קוראים בשם **רדיוס ההתכנסות של הטור**. המשפט מראה כי תחום ההתכנסות של הטור הוא תמיד בצורת דיסק, כאשר המקרה החריג היחיד הוא המקרה השלישי. אם $R \in (0,\infty)$, המשפט לא אומר כלום כאשר $|z-z_0| = R$, ואכן - הטור עלול להתכנס/להתבדר בכל הנקודות ויש לבדוק כל מקרה בנפרד. לפני שנציג דוגמאות בנושא, נספק נוסחה למציאת רדיוס ההתכנסות.

משפט 5.2.2. נוסחת קושי-הדמרד/נוסחת המנה

יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור חזקות. אזי,

1. רדיוס ההתכנסות נתון על ידי

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

2. אם הגבול $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, אזי גבול זה שווה גם הוא ל-R.

דוגמה 5.2.1. דוגמאות חשובות

1. הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ חושב כבר קודם, אך ניתן לזהות כי מקדמי הטור כולם 1, ולכן

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n} \sqrt[n]{1} = 1,$$

כלומר $R = 1$ והטור מתכנס בעיגול היחידה הפתוח. במקרה זה, על השפה $|z| = 1$ הטור מתבדר בכל

הנקודות היות והאיבר הכללי של הטור לא שואף לאפס.

2. נמצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. במקרה זה נקבל כי

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

ולכן גם טור זה מתכנס בעיגול היחידה הפתוח. הפעם, בשפה קורית תופעה מוזרה (שלא נכנס לפרטי ההוכחה שלה), והטור מתכנס למעשה לכל $z \neq 1$ שעבורו $|z| = 1$. כלומר, הטור מתכנס בכל הנקודות בעיגול הסגור למעט בנקודה $z = 1$, תופעה שלא ניתן לזהות ישירות מהנוסח של המשפט על רדיוס ההתכנסות.

3. נחשב את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{nk}}{n}$ ונזהה כי

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{m}, & n = mk \\ 0, & n \neq mk, \end{cases}$$

ולכן הגבולות החלקיים הם למעשה $\lim_{m\to\infty} \sqrt[mk]{\frac{1}{m}} = 1$ ו-0, ולכן הגדול מביניהם הוא 1, כלומר $R = 1$. כלומר גם טור זה מתכנס כאשר $|z| < 1$ ומתבדר כאשר $|z| > 1$. הפעם, ההתכנסות כאשר $|z| = 1$ היא לכל נקודה שעבורה $z^k \neq 1$, כלומר בכל השפה למעט ב-k שורשי היחידה.

4. נמצא את תחום ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n + 3^n + (-1)^n \left(2^n - 3^n\right)\right) (z - 1)^n$. הפעם סדרת המקדמים היא

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 2\sqrt[n]{2}, & n \text{ זוגי} \\ 3\sqrt[n]{2}, & n \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

והגבולות החלקיים יהיו $2, 3$. מכאן שהגדול מביניהם הוא 3 כלומר $R = \frac{1}{3}$. נשאיר כתרגיל את הבדיקה של מה שיקרה בשפת הדיסק $|z - 1| = \frac{1}{3}$.

בטרם נעבור להבין את הקשר בין פונקציות אנליטיות לבין טורי חזקות, נציג את התוצאות המוכרות מהמקרה הממשי לגבי מה מותר לעשות בתחום ההתכנסות של טורי חזקות.

משפט 5.2.3 גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

יהא $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות $R > 0$. אזי, אם נסמן את סכום הטור ב-$f(z)$, נקבל כי בעיגול $B(z_0, R)$ f אנליטית וכן

1. **גזירה איבר-איבר.** $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.

2. **אינטגרציה איבר-איבר.** $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_\gamma (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z$ לכל מסילה חלקה למקוטעין γ שתמונתה מוכלת בעיגול.

יתרה מכך, לאחר גזירה איבר-איבר מתקבל טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R.

הוכחה. כל ההוכחה מסתמכת על כך בכל תת-קבוצה סגורה וחסומה של התחום ההתכנסות היא בהחלט ובמידה שווה. לפי משפט 5.1.2 המופעל על סדרת הסכומים החלקיים, נקבל מידית את הדרוש. $\square$

5.2.1 טורי טיילור

עתה, משראינו כי טורי חזקות מתארים פונקציות אנליטיות בתחום ההתכנסות, נרצה להציג מסקנה "הפוכה" - כל פונקציה אנליטית ניתנת לפיתוח לטור חזקות מסביב לכל נקודה בתחום הגדרתה. כדי לעשות זאת נשים לב כי אם

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

הוא טור חזקות המתכנס ברדיוס $R > 0$ כלשהו סביב z_0, אזי f גזירה מכל סדר, על פי משפט 5.2.3, וניתן להסיק כי

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

לאחר הצבת נוסחה זו בחזרה לטור, מקבלים כי טור החזקות מתאר את מה שמכונה בשם **טור טיילור** של f מסביב לנקודה z_0. המשפט הבא מראה שלכל פונקציה אנליטית קיים פיתוח לטור כנ"ל.

משפט 5.2.4. משפט טיילור

יהא $r_0 > 0$ ותהא f אנליטית בעיגול $B(z_0, r_0)$. אזי, לכל $z \in B(z_0, r_0)$ מתקיים

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n ,$$

בפרט, רדיוס ההתכנסות של טור זה הוא לכל הפחות r_0.

הוכחה. לכל $z \in B(z_0, r_0)$ נבחר $0 < r < r_0$ ונציג את f בעזרת נוסחת האינטגרל של קושי, לפי משפט 4.2.2,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w , \quad \forall\, |z - z_0| < r.$$

בשלב הבא, נהפוך את המכנה כך שהוא יתאם נוסחה לסדרה הנדסית, כלומר

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 + (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n$$

והמנה $\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$ היות וידוע כי z היא נקודה בתוך העיגול. נרצה להצדיק בהמשך התכנסות במידה שווה של הטור, ולשם כך נניח כי $z \in B(z_0, r_1)$ כאשר $r_1 < r$, ואז נכתוב

$$\frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} \le \frac{r_1}{r} < 1.$$

על ידי הצבת נוסחה זו בתוך האינטגרל נקבל כי

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r(z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w \,.$$

כאמור, בחרנו את z כך שההתכנסות של הטור היא במידה שווה (והיא מוכפלת ב-$f(w)$ שהיא פונקציה חסומה, מה שמוכיח התכנסות במידה שווה לפי 5.1.2, כלומר

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}w \right) (z - z_0)^n \,,$$

ועל פי נוסחת קושי לנגזרות (משפט 4.2.6), נקבל כי

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \,,$$

וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח. היות ונוסחה זו למעשה תקפה בכל העיגול, נסיק שרדיוס ההתכנסות של הטור הוא לפחות הרדיוס של העיגול. □

הערות.

1. טור טיילור נקבע ביחידות. כלומר, אם $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, אזי $a_n = b_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

2. המשפט למעשה מראה כי רדיוס ההתכנסות של הטור של f סביב z_0 יהיה תמיד המרחק מ-z_0 עד לנקודה הראשונה שבה f לא אנליטית. כלומר

$$R = \inf\{|z - z_0| \mid f \text{ לא מוגדרת או לא אנליטית בנקודה } z\} \,.$$

3. הקשר בין פונקציה אנליטית לטור החזקות שלה הוא מקומי בלבד. אכן, הפונקציה $\frac{1}{1-z}$ מוגדרת לכל $z \neq 1$ על אף שהטור של פונקציה זו סביב הראשית מוגדר רק בעיגול היחידה הפיתוח. עדיין, סביב נקודות אחרות יהיה ניתן למצוא טור חזקות אחר שמזדהה עם f.

דוגמה 5.2.2. הטורים החשובים

1. לפונקציה $f(z) = e^z$ קיים טור חזקות סביב הראשית שמתכנס ב-$\mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ניתן אף לראות כי

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k (iy)^(n-k)}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{(iy)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \right) = e^x e^{iy}. \end{aligned}$$

2. לפונקציות $f(z) = \sin(z), g(z) = \cos(z)$ קיימים גם כן טורי חזקות סביב הראשית המתכנסות ב-$\mathbb{C}$,

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

אם נחזור לנוסחה מהדוגמה הקודמת ניתן לראות כי

$$\begin{aligned} e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ = \cos(y) + i \sin(y), \end{aligned}$$

מה שמוכיח למעשה בפעם הראשונה את התקפות של זהות אוילר בה השתמשנו כל הקורס. כמו כן, בדרך זו ניתן להוכיח בקלות את חוקי החזקות של האקספוננט מה שגם כאן, יצדיק בדיעבד את כל הכלים שהשתמשנו בהם במהלך הקורס עד כה.

3. הפונקציה $f(z) = \mathrm{Log}(1+z)$ אנליטית בעיגול היחידה הפתוח ולכן אמור להיות לה טור חזקות שמתכנס ברדיוס 1. כדי למצוא את הטור נשתמש בכך שמתקיים

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} \overset{|-z|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \overset{(5.2.3)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n,$$

ומכאן שמתקיים $a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}$, ונקבל כי

$$\mathrm{Log}(1+z) = a_0 + \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n,$$

ומכך שמתקיים $\mathrm{Log}(1+0) = 0$, נסיק כי $a_0 = 0$. שימו לב שטור זה מתלכד עם הטור הממשי של $\ln(1+x)$ כאשר $x \in (-1,1)$ ממשי.

דוגמה 5.2.3. מציאת רדיוסי התכנסות

1. עבור הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1-z}$ מתקיים כי f אנליטית ב-$z_0 = \frac{3}{2}$. הנקודה הקרובה ביותר ל-z_0 שבה f לא אנליטית היא $z = 1$, ולכן רדיוס ההתכנסות של טור החזקות הנ"ל יהיה בדיוק $\frac{1}{2}$. אכן
$$\frac{1}{1-z} = -\frac{2}{1+2\left(z-\frac{3}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} -2^{n+1}\left(z-\frac{3}{2}\right)^n,$$
שהוא טור חזקות עם רדיוס התכנסות $\frac{1}{2}$.

2. באופן דומה, נחפש את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות של $f(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1}$ סביב הנקודה $z_0 = \frac{2}{\pi i}$. הנקודות שבהן f אנליטית הן הנקודות מהצורה
$$z = \frac{1}{2\pi i n},$$
והקרובה ביותר ל-z_0, היא $z = \frac{1}{2\pi i}$. לכן, רדיוס ההתכנסות של הטור יהיה
$$R = \left|\frac{1}{2\pi i} - \frac{2}{\pi i}\right| = \left|-\frac{3}{2\pi i}\right| = \frac{3}{2\pi}.$$
בניגוד לסעיף הקודם, קשה למדי למצוא את הנוסחה המפורשת של מקדמי הטור, וטוב לדעת שניתן לזהות את רדיוס ההתכנסות של הטור ללא מציאת הטור במפורש.

5.3 אפסים של פונקציה אנליטית

כדי להבין את הנושא של הפרק הקרוב, נניח כי $p(z)$ הוא פולינום ממעלה n. כידוע (ובמיוחד לאחר שהוכחנו את המשפט היסודי של האלגברה), ל-$p(z)$ יש **בדיוק** n שורשים ב-$\mathbb{C}$. בדרך אחרת - ניתן לומר כי אם ל-$p(z)$ יש $n+1$ אפסים, הוא חייב להיות פונקציית האפס.

כמובן שתכונה כזאת לא חייבת להתקיים סתם כך לפונקציות, ואפילו לא לפונקציות אנליטיות.

דוגמה 5.3.1. אינסוף אפסים

תהא $f(z) = e^{\frac{1}{z}} - 1$. לפונקציה זו יש אינסוף אפסים בנקודות $z_n = \frac{1}{2\pi i n}$, על אף שהיא אנליטית בכל נקודה למעט בראשית.

בדוגמה 5.3.1, שימו לב שאמנם לפונקציה יש אינסוף אפסים, אך האפסים הם סדרת נקודות $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ השואפת ל-$z_0 = 0$, שבה הפונקציה לא אנליטית. נראה שזה המקרה היחיד שבו לפונקציה אנליטית יכולים להיות אינסוף אפסים.

משפט 5.3.1. אפסים לא מבודדים

תהא f אנליטית בתחום Ω, ונניח כי $\Omega \supset \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת נקודות המתכנסת ל-$z_0 \in \Omega$. אזי, אם $f(z_n) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים כי $f(z) = 0$ לכל $z \in \Omega$.

הוכחה. הרעיון של ההוכחה טבוע בכך שאם $z_0 \in \Omega$ ניתן למצוא $r > 0$ כך ש-$B(z_0, r) \subset \Omega$ ובו

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

היות והפונקציה f בפרט רציפה ב-z_0, מקבלים כי

$$f(z_0) = a_0 = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0.$$

שימו לב, כי אם נצליח להראות כי $a_n = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, הרי שמההצגה של f כטור חזקות נובע כי $f(z) = 0$ בכל העיגול. נסמן ב-N את המקדם הראשון בטור החזקות של f שלא מתאפס, ונכתוב

$$f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

מכאן נובע כי

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^N} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-N},$$

כך שהפונקציה באגף השמאלי מזדהה עם טור חזקות לכל $z \neq z_0$, ולכן

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)}{(z_n - z_0)^N} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-N} = a_N.$$

אך מכאן נובע כי $a_N = 0$ בסתירה להנחה שלנו. לסיכום, טור החזקות מתאפס זהותית ולכן

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

עתה, נגדיר

$$E = \{z \in \Omega | \exists r > 0 : f(w) = 0, \forall w \in B(z, r)\}.$$

תת הקבוצה הזו של Ω היא קבוצה פתוחה ולא ריקה, כי ראינו ש-$z_0 \in E$, והפתיחות נובעת מכך שאם $f(w) = 0$ לכל $w \in B(z, r)$, ניתן לבחור רדיוס $\tilde{r} > 0$ שעבורו $B(w, \tilde{r}) \subset B(z, r)$ ואז להסיק כי $w \in E$, כלומר

$$B(z, r) \subset E.$$

מצד שני, ברור כי $\Omega \setminus E$ היא קבוצה פתוחה (כי אם $z \in \Omega \setminus E$, הפונקציה לא מתאפסת זהותית ולכן אי אפשר למצוא סדרת אפסים שמתכנסת ל-z, כלומר, יש רדיוס שבה אף נקודה לא מאפסת את f למעט אולי z, ולכן העיגול כולו יהיה מוכל ב-$\Omega \setminus E$).

הטיעון הסופי הוא ששתי הקבוצות $E, \Omega \setminus E$ הן קבוצות פתוחות וזרות שאיחודן הוא Ω (קבוצה קשירה). מכאן נובע כי Ω מוכלת באחת מהקבוצות, ומכך ש-E לא ריקה נסיק כי $E = \Omega$, כלומר $f(z) = 0$ באופן זהותי ב-Ω. □

שימו לב שבדוגמה 5.3.1, הגבול של סדרת האפסים אינו בתחום האנליטיות של f. אם הוא היה, הפונקציה הייתה צריכה להיות זהותית אפס. מכאן נוכל להסיק את התוצאה השימושית הבאה,

משפט 5.3.2 משפט היחידות

תהיינה f, g אנליטיות בתחום $\Omega \subset \mathbb{C}$. נניח כי $f(z_n) = g(z_n)$ כאשר $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת נקודות ב-Ω כך ש-$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in \Omega$. אזי $f(z) = g(z)$ בכל Ω.

הוכחה. ההוכחה מידית ממשפט 5.3.1, כאשר נתבונן בפונקציה $h(z) = f(z) - g(z)$, ונקבל סדרת אפסים מתאימה שממנה נובע כי $h(z) = 0$ בכל התחום, כלומר $f(z) = g(z)$. □

דוגמה 5.3.2 שימושים למשפט היחידות

1. נחפש את כל הפונקציות האנליטיות בעיגול היחידה שמקיימות $f(\frac{1}{n}) = \frac{n^2}{1+n^2}$ לכל $n \geq 2$. תחילה, נשכתב את המשוואה הנתונה בשפת $z_n = \frac{1}{n}$. כלומר

$$f(z_n) = \frac{n^2}{1+n^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{1+z_n^2}.$$

כלומר, הפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ היא פונקציה שמקיימת את הדרוש. משפט 5.3.2 מבטיח כי זו הפונקציה היחידה שתקיים את הדרוש.

2. נניח כי Ω הוא תחום **כלשהו** שמכיל את הציר הממשי החיובי, כלומר

$$\mathbb{R}_+ := \{x + 0i \,|x > 0\} \subset \Omega.$$

נניח גם כי $\mathrm{L}(z)$ הוא ענף אנליטי של $\log(z)$ שמתקיים $\mathrm{L}(x+0i) = \ln(x)$. כלומר, $\mathrm{L}(z)$ הוא הרחבה של הלוגריתם הממשי מהציר הממשי לסביבה שלו במישור המרוכב. כידוע, $\mathrm{Log}(z)$ הוא פונקציה שמקיימת בדיוק את זה, ואז נסיק שעבור הסדרה $z_n = 1 + \frac{1}{n}$, מתקיים

$$\mathrm{L}(z_n) = \mathrm{Log}(z_n).$$

הסדרה $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$1 \in \Omega$, מה שאומר כי $\mathrm{L}(z) = \mathrm{Log}(z)$ בכל Ω. במילים אחרות, $\mathrm{Log}(z)$ הוא **הדרך היחידה להרחיב את הלוגריתם הממשי מהציר הממשי למרוכבים בצורה אנליטית**.

3. טיעון דומה מראה שגם $e^z, \sin(z), \cos(z)$ ולמעשה כל הפונקציות האלמנטריות שלנו שמרחיבות את הגרסה הממשית שלהן, הן ההרחבות האנליטיות היחידות שמשמרות את הערכים המוכרים בציר הממשי.

עוד מסקנה שימושית של משפט היחידות היא המסקנה הבאה.

טענה 5.3.1 מקור סופי

תהא f פונקציה אנליטית ולא קבועה בתחום Ω. אזי, בכל תת-קבוצה סגורה וחסומה של f, כל ערך ש-f מקבלת יתקבל כמות סופית של פעמים בלבד.

הוכחה. אם $\Omega \subset K$ סגורה וחסומה, ו-$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה אינסופית של נקודות כך ש-$f(z_n) = C$ לכל $n \in \mathbb{N}$ - נוכל

לבחור תת-סדרה מתכנסת לסדרה זו ולהסיק כי $f(z) = C$ בכל K, ולכן גם בכל Ω. □

את כל אוסף המשפטים והטענות האחרונים אפשר לתמצת בכך שלפונקציה אנליטית שאינה קבועה, כל האפסים הם אפסים מבודדים. השלב הבא יהיה לחקור את האפסים המבודדים הללו, ולראות שגם שם - ניתן ללמוד המון על הפונקציה.

טענה 5.3.2. סדר של אפס

תהא f אנליטית ולא קבועה בתחום Ω. אם $z_0 \in \Omega$ נקודה שבה $f(z_0) = 0$ קיים מספר **יחיד** $m \in \mathbb{N}$ שעבורו

1. $f(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ וגם $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.
2. קיימת סביבה $B(z_0, r) \subset \Omega$ ופונקציה g אנליטית בסביבה זו שעבורה $g(z_0) \neq 0$ וגם

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad \forall z \in B(z_0, r)$$

בפרט, ניתן לבחור את הסביבה כך ש-$g(z) \neq 0$ לכל z בסביבה.

במקרה זה אומרים כי **z_0 הוא אפס מסדר m של f**.

הוכחה. עבור $r > 0$ מתאים, נקבל כי $B(z_0, r) \subset \Omega$, ואז ניתן לכתוב

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

על פי הנתון, $f(z_0) = 0$ ולכן המקדם הראשון מתאפס. נסמן ב-m את המקדם הראשון שאינו מתאפס בטור, כלומר

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

מכאן נובע מידית החלק הראשון של הטענה. באשר לחלק השני, נשים לב שניתן להוציא $(z - z_0)^m$ כגורם משותף ולכתוב

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m} = (z - z_0)^m g(z) .$$

הפונקציה g אנליטית כי היא נתונה כטור חזקות שמתכנס בכדור, והעובדה כי $g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$ מראה גם את החלק השני. על מנת לדרוש סביבה שבה g לא מתאפסת, נשתמש בכך שפונקציה אנליטית היא רציפה, כך שאם הפונקציה לא מתאפסת בנקודה, תהיה סביבה שבה היא לא תתאפס. □

5.4 טורי לורן ונקודות סינגולריות

פרק זה ידון בגרסה "מוכללת" של טורי טיילור. על מנת לקבל מוטיבציה, נפתח בדוגמה.

דוגמה 5.4.1 טור עם חזקות שליליות בטבעת

תהא $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. כידוע, מדובר בפונקציה אנליטית בתחום $|z|<1$ ולכן קיים לה פיתוח לטור חזקות. כדי למצוא אותו נוכל לכתוב

$$f(z)=\frac{1}{2-z}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}.$$

היות ו-$|z|<1$, מתקיים גם $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, וניתן להשתמש בסכום של סדרה הנדסית כדי לכתוב

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)z^n.$$

טור הטיילור שקיבלנו סביב $z=0$ בעל רדיוס התכנסות של 1, וזה לא מפתיע היות ונקודת הסינגולריות הראשונה נמצא ב-$z=1$ (יחסית לראשית). יחד עם זאת, ידוע לנו שהפונקציה אנליטית גם כאשר $1<|z|<2$, על אף שלא מדובר בעיגול. נבצע מניפולציה אלגברית מסויימת לפונקציה ונכתוב אותה באופן הבא

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}.$$

עתה, קורית תופעה משונה. כאשר $1<|z|<2$, מתקיים $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ אך גם $\left|\frac{1}{z}\right|<1$. ולכן

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

כלומר, קיבלנו שבטבעת, f ניתנת לביטוי כטור של חזקות של z, אך הטור מכיל גם חזקות שליליות (למעשה, אינסוף מהן!). הטור הנ"ל כמובן אינו מהווה טור טיילור עבור f, ולמקדמים של הטור כבר אין משמעות של נגזרות של f. ובכל זאת - ניתן להציג את f כטור חזקות מתכנס בטבעת.

הגדרה 5.4.1 טור לורן

תהא $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ סדרה של מספרים מרוכבים ותהא $z_0\in\mathbb{C}$. פונקציה מהצורה

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

מכונה **טור לורן סביב f עם מקדמים a_n**. שימו לב שהטור מוגדר כסכום נפרד של החזקות החיוביות והשליליות ואומרים כי הטור **מתכנס בהחלט/במידה שווה** אם שני הטורים הנפרדים מקיימים זאת. לחלק של הטור עם החזקות השליליות קוראים בשם **החלק העיקרי של הטור**.

מתברר שבדומה לכך שטורי חזקות מוגדרים באופן מקומי בעיגולים, טורי לורן מוגדרים באופן טבעי על טבעות.

הגדרה 5.4.2. טבעת במישור המרוכב

יהיו $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. ה**טבעת סביב z_0 ברדיוסים R_1, R_2** היא הקבוצה

$$A_{R_1,R_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} | R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

בטרם ניגד לדוגמאות נוספות, נוכיח אנלוג למשפט טיילור בטבעות.

משפט 5.4.1. קיום של טור לורן בטבעת

יהיו $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ ותהא f אנליטית בטבעת $R_1 < |z - z_0| < R_2$. אזי

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in A_{R_1,R_2}(z_0),$$

והנוסחה למקדמים נתונה על ידי

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \mathrm{d}w, \quad R_1 < r < R_2.$$

יתרה מכך, הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בתוך תתי קבוצות סגורות וחסומות של הטבעת.

הוכחה. תהא $z \in A_{R_1,R_2}(z_0)$, תחילה נבחר $R_1 < r < |z| < R < R_2$ ונוכיח שמתקיים

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w = f(z).$$

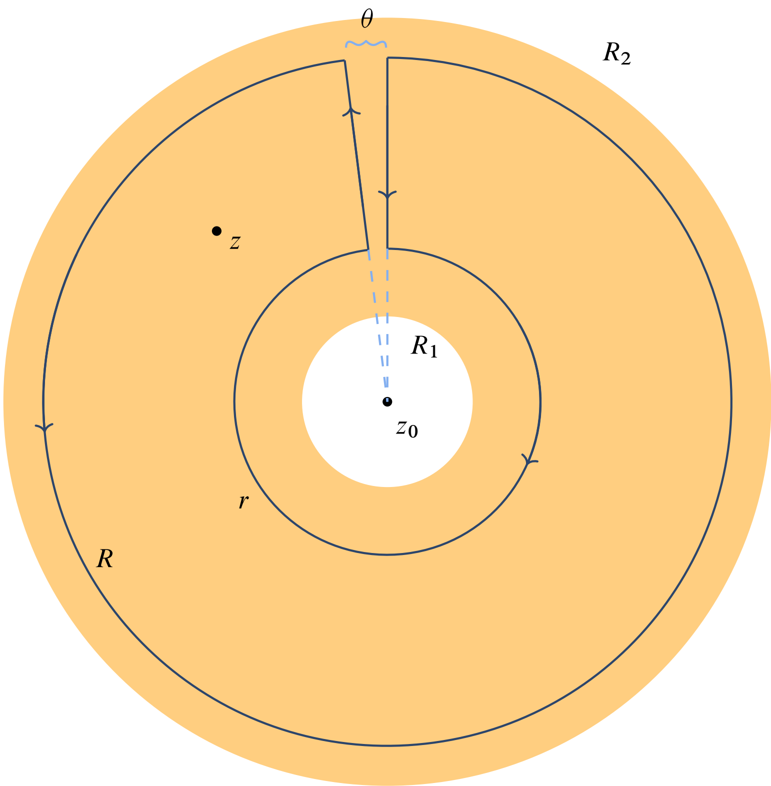
לשם כך נבחר $\theta > 0$ ונבצע אינטגרציה על המסילה γ_θ שמתוארת באיור 5.2 שלעיל. היות ו-f אנליטית בטבעת והמסילה היא מסילה פשוטה כך שהפנים שלה גם הוא מוכל בטבעת, נובע מנוסחת האינטגרל של קושי כי

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\theta} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w = f(z).$$

היות והנ"ל נכון לכל $\theta > 0$, נחשב את הגבול $\theta \to 0^+$ ונקבל למעשה שהאינטגרל על הקווים הישרים מתאפס (כי הקווים במגמה הפוכה) וניוותר עם השוויון הדרוש. השלב הבא יהיה להעריך כל אחד מהאינטגרלים שקיבלנו, ולהגיד לנוסחה המבוקשת.

- עבור האינטגרל השמאלי (על הרדיוס הגדול) נכתוב

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R(z_0)} \frac{1}{(w - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} \mathrm{d}w$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R(z_0)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right) \mathrm{d}w.$$



איור 5.2: תיאור של המסילה γ_θ.

הטור ההנדסי $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$ מתכנס במידה שווה כי $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| \le \frac{|z-z_0|}{R} < 1$ בעוד ש-$f(w)$ חסומה על המעגל (כי היא רציפה בו). אי לכך, ניתן להחליף בין הסכום והאינטגרל ולקבל

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \right) (z-z_0)^n .$$

למעשה, קיבלנו את החלק של טור הלורן עם החזקות החיוביות.

- עבור האינטגרל הימני נעבוד בדיוק באותה צורה אבל על ידי "הוצאת ההופכי" כדי שיתקיים $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(z-z_0)\left(1-\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} \,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(z-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^n} \,\mathrm{d}w . \end{aligned}$$

שוב, מתאפשר להחליף את הסדר בין האינטגרל ובין הסכום ונקבל

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n}}\,\mathrm{d}w\right)(z-z_0)^{-n-1}.$$

לפני שנציג את התוצאה הסופית שימו לב שבשני האינטגרלים השתמשנו ברדיוסים שונים. אך היות והאינטגרלים שנותרנו איתם לא תלויים ב-z אלא רק ב-z_0, נובע שאפשר להזיז את הרדיוסים כרצוננו בתוך הטבעת, ולכתוב

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-z_0)^{n}$$

כאשר $r>0$ הוא רדיוס כלשהו בין R_1 ל-R_2. היות והנ"ל נכון לכל z בטבעת, נסיק את הדרוש. $\square$

מספר הערות.

1. מקדמי טור לורן (בדומה למקדמי טור טיילור) נקבעים ביחידות בתחום שבו טור הלורן מתכנס. נניח למשל כי

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-z_0)^n\,.$$

הוא טור לורן שמתכנס בטבעת $A_{R_1,R_2}(z_0)$. נבחר $R_1<r<R_2$ ונזהה כי לכל $n_0\in\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n_0+1}}\,\mathrm{d}w=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{1}{(z-z_0)^{n_0-n+1}}\,\mathrm{d}z\,,$$

כאשר השוויון נובע מכך שהטור הלורן מתכנס במעגל ו-f חסומה עליו. עתה, נזכיר כי את האינטגרלים בטור הימני אנחנו יודעים לחשב, והם מתאפסים בכל פעם שהחזקה של המכנה שונה מ-1. לכן, האינטגרל מתאפס לכל $n\neq n_0$ וכאשר $n=n_0$ מקבלים $2\pi i$, וסה"כ נסיק כי

$$b_{n_0}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n_0+1}}\,\mathrm{d}z\,.$$

2. טור לורן הוא הכללה של טור טיילור. אכן, אם f אנליטית ב-$B(z_0,R_2)$ יש לה פיתוח לטור חזקות שהוא בעצם טור לורן בטבעת $A_{0,R_2}(z_0)$, כך שבטור אין כלל חלק עיקרי.

3. בדומה לרדיוס ההתכנסות של טור חזקות, גם לטורי לורן יש נוסחאות לרדיוסי ההתכנסות הפנימיים והחיצוניים.

$$\frac{1}{R_2}=\limsup_n\sqrt[n]{|a_n|},\qquad R_1=\limsup_n\sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

הנוסחה נובעת ישירות מכך שהתכנסות הטור מוגדרת בעזרת שני החלקים שלו, וכל אחד מהם הוא טור חזקות עד כדי שינוי צורת הכתיבה.

דוגמה 5.4.2. דוגמאות לפיתוחים, טורי לורן

1. הפונקציה $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ אנליטית ב-$A_{0,\infty}(0)$. כדי למצוא את טור הלורן שלה בתחום זה נסמן תחילה $w = \frac{1}{z}$ כסימון עזר ונזכור כי לכל $w \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!},$$

ולכן

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

2. נמצא את המקדם a_0 בטור הלורן של הפונקציה $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ בטבעת $A_{0,\infty}(z_0)$. כדי לעשות זאת נבחר רדיוס 1, ונשתמש בנוסחה ממשפט 5.4.1.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1(0)} \frac{e^{z+\frac{1}{z}}}{z} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1(0)} \frac{e^z}{z} e^{\frac{1}{z}} \, \mathrm{d}z .$$

נשתמש בטור של $e^{\frac{1}{z}}$ שמצאנו בסעיף הקודם ונקבל כי

$$a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1(0)} \frac{e^z}{n! z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1(0)} \frac{e^z}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z \right),$$

אך האחרונה היא למעשה נוסחת האינטגרל של קושי לנגזרות (משפט 4.2.6), כלומר אינטגרלים אלו שווים לנגזרת ה-n של e^z ב-$z = 0$, ששווה תמיד ל-1. כלומר

$$a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

5.4.1 סיווג נקודות סינגולריות

הגדרה 5.4.3. נקודת סינגולריות מבודדת

תהא f מוגדרת ואנליטית בתחום $0 < |z - z_0| < r$ עבור $r > 0$. אזי, z_0 נקראת נקודת סינגולריות מבודדת של f אם f לא מוגדרת או לא אנליטית ב-z_0.

מתברר שיש בדיוק 3 סוגים של נקודות סינגולריות מבודדות. אך למעשה, יש גם נקודות סינגולריות לא מבודדות.

דוגמה 5.4.3 סינגולריות לא מבודדת

נחשב את נקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$. ראשית, ברור כי $z=0$ היא נקודת סינגולריות של הפונקציה, אך למעשה כל נקודה שמאפסת את $\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$ תהיה נקודת סינגולריות. לכן

$$\frac{\pi}{z}=\pi n,\; n\in\mathbb{Z},$$

מה שאומר כי $\left\{z_n=\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ הן נקודות סינגולריות של הפונקציה. אך היות והן קרובות כרצוננו לנקודה הסינגולרית $z_0=0$, נסיק שהיא לא מבודדת.

באשר לנקודות המבודדות, נאפיין אותן במספר דרכים - והראשונה מביניהן היא בעזרת טור הלורן של הפונקציה.

הגדרה 5.4.4 סוגי נקודות סינגולריות

תהא z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של f. אזי, ל-f קיים פיתוח לטור לורן בטבעת $A_{0,R}(z_0)$ מהצורה $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$. נזכיר כי החלק העיקרי של הטור הוא הכינוי לטור של כל החזקות השליליות. במקרה זה אומרים כי

1. z_0 **נקודה סינגולרית סליקה** אם החלק העיקרי של הטור מתאפס זהותית (אין חזקות שליליות כלל).
2. z_0 **קוטב מסדר m** אם $a_n=0$ לכל $n<-m$, וגם $a_{-m}\neq 0$. כלומר, החלק העיקרי של הטור הוא מהצורה
$$\sum_{n=-m}^{-1}a_n(z-z_0)^n,\qquad a_{-m}\neq 0.$$
אם $m=1$ אומרים שמדובר ב**קוטב פשוט**.
3. z_0 **סינגולריות עיקרית** אם קיימים אינסוף מקדמים בחלק העיקרי של הטור שאינם מתאפסים.

לא תמיד יש לנו טור לורן זמין עבור הפונקציה, ולכן נציג דרכים נוספות לאפיין/לסווג את נקודות הסינגולריות שלנו.

טענה 5.4.1 תנאי הסליקות של רימן

תהא z_0 סינגולריות מבודדת של f, כך ש-f אנליטית בטבעת $A_{0,R}(z_0)$. אזי, z_0 היא נקודת סינגולריות סליקה אם ורק אם $|f|$ חסומה בסביבת הנקודה z_0. במקרה זה, ניתן להמשיך את f בצורה אנליטית ל-z_0.

<u>הערה</u>. שימו לב שבפרט, אם f אנליטית ב-$A_{0,R}(z_0)$ וגם $\lim_{z\to z_0}f(z)$ קיים וסופי, הפונקציה חסומה בסביבת הנקודה ולכן הסינגולריות סליקה.

הוכחה. תחילה נניח כי z_0 היא סינגולריות סליקה, כך שטור הלורן של f הוא מהצורה

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n.$$

היות ומדובר בטור חזקות, ברור שהוא רציף בנקודה z_0. כלומר, הגבול $\lim_{z\to z_0}f(z)$ קיים וסופי, והפונקציה שמתקבלת

מהשלמת הגבול בנקודה תהיה אנליטית גם בנקודה (כי היא כבר נתונה שם כטור חזקות מתכנס). בכיוון ההפוך, נניח כי $|f|$ חסומה, כך שמתקיים

$$|f| \leq M, \quad \forall 0 < |z - z_0| < R_0 < R.$$

אם נסמן ב-$\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ את המקדמים של טור הלורן של f, נקבל שלכל $n < 0$, ולכל $0 < r < R_0$.

$$|a_n| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \right| \leq \frac{1}{2\pi} (2\pi r) \left(M r^{-n-1} \right) \xrightarrow{r \to 0} 0.$$

ומכאן שמתקיים $a_n = 0$ לכל $n < 0$ - כך שהחלק העיקרי של f מתאפס והסינגולריות היא סליקה. בפרט יש לפונקציה השלמה אנליטית לנקודה z_0 כפי שרצינו להראות. $\square$

דוגמה 5.4.4 סינגולריות סליקה

לפונקציה $f(z) = \frac{z}{\sin(z)}$ יש סינגולריות בנקודה $z = 0$, והסינגולריות סליקה כי $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(z)} = 1$, ובפרט הפונקציה חסומה בסביבת הסינגולריות.

המקרה הבא הוא האפיון של קוטב.

טענה 5.4.2 אפיון לקוטב

תהא z_0 נקודת סינגולריות מבודדת של f, כך ש-f אנליטית בטבעת $A_{0,R}(z_0)$. אזי התנאים הבאים שקולים.

1. z_0 היא קוטב.
2. קיים $m \in \mathbb{N}$ שעבורו $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ לכל $z \in A_{0,R}(z_0)$, כאשר g הולומורפית ב-$B(z_0, R)$ וגם $g(z_0) \neq 0$.
3. $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

הוכחה. נוכיח תחילה כי $(2) \Longrightarrow (1)$. נניח כי z_0 היא קוטב ונכתוב לכל $z \in A_{0,R}(z_0)$,

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0.$$

במקרה זה נקבל כי

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m} \neq 0,$$

ולפי טענה 5.4.1, $(z - z_0)^m f(z)$ בעלת סינגולריות סליקה ב-z_0 וניתן להרחיב אותה לפונקציה אנליטית $g(z)$ שמקיימת $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$, ומכאן נסיק את הדרוש. נוכיח כי $(3) \Longrightarrow (2)$. כדי לעשות זאת נכתוב בסביבת z_0,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

ומאריתמטיקה של גבולות נקבל שהיות ו-$g(z_0) \neq 0$,

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

נותר להוכיח כי $(1) \implies (3)$ ונסיים. נניח כי $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. מכאן נובע שבסביבת z_0, הפונקציה $f(z)$ לא מתאפסת, ולכן הפונקציה

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

היא פונקציה אנליטית בסביבה זו, ומקיימת $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$. לפי טענה 5.4.1, ניתן להמשיך את $g(z)$ לפונקציה אנליטית ב-z_0, שמתאפסת ב-z_0 (כי ערכה בנקודה שווה לגבול). כלומר, z_0 היא אפס מבודד של $g(z)$, מה שאומר שקיים $m \in \mathbb{N}$ עבורו

$$g(z) = (z - z_0)^m k(z),$$

כאשר k אנליטית ולא מתאפסת ב-z_0. מכאן נובע כי לכל $z \neq z_0$,

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \frac{1}{k(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-m}^{\infty} a_{n+m} (z - z_0)^n ,$$

ומכאן ש-z_0 היא קוטב של f, כדרוש. $\square$

דוגמה 5.4.5. זיהוי קטבים

1. לפונקציה $f(z) = \frac{z}{\sin^2(z)}$ יש קוטב פשוט ב-$z = 0$. כדי לראות זאת, נשים לב כי הפונקציה $g(z) = \frac{z^2}{\sin^2(z)}$ בעלת סינגולריות סליקה בראשית (הגבול קיים) ולכן ניתן להשלים אותה לפונקציה אנליטית שלא מתאפסת בראשית. אך עתה

$$f(z) = \frac{1}{z} g(z),$$

ולפי האפיון מהטענה, מדובר בקוטב מסדר 1, קוטב פשוט.

2. נניח כי z_0 היא אפס מסדר n של $f(z)$ ואפס מסדר $m > n$ של $g(z)$. אזי, z_0 קוטב מסדר $m - n$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$. אכן, ניתן לכתוב

$$f(z) = (z - z_0)^n k(z), \quad g(z) = (z - z_0)^m r(z),$$

כאשר k, r אנליטיות ולא מתאפסות בנקודה. לכן

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^{m-n}} \frac{k(z)}{r(z)},$$

ומכאן שמדובר בקוטב לפי הטענה. שימו לב שכאשר $n = m$ מקבלים למעשה סינגולריות סליקה.

3. לפונקציה $\frac{e^z-1}{z^3}$ יש קוטב מסדר 2 ב-0 $z=0$ כי

$$\frac{e^z-1}{z^3}=\frac{1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots-1}{z^3}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2z}+\ldots,$$

והחלק העיקרי של הטור מתחיל מ-$\frac{1}{z^2}$.

האפיון האחרון ובמובן מסויים ה"פשוט יותר" הוא הסינגולריות העיקרית. למעשה ניתן לקצר את כל שאלת האפיון שלה ל"נקודה שאינה קוטב או סליקה". ובכל זאת - נציג אפיון שימושי מאוד.

טענה 5.4.3. אפיון גבולי לסינגולריות עיקרית

תהא z_0 נקודה סינגולריות מבודדת של f, כך ש-f אנליטית בטבעת $A_{0,R}(z_0)$. אזי z_0 היא **סינגולריות עיקרית** של f אם ורק אם הגבול $\lim_{z\to z_0}|f(z)|$ לא קיים (גם במובן הרחב!).

שימו לב שאין צורך להוכיח דבר - הרי זה בדיוק התנאי המשלים לנקודה סליקה (שבה הגבול קיים וסופי) ונקודת קוטב (שבה הגבול קיים ואינסופי).

דוגמה 5.4.6. סינגולריות עיקרית ללא טור לורן

נוכיח שלפונקציה

$$f(z)=\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{z}\right)$$

יש סינגולריות עיקרית בראשית. כדי להראות שהגבול

$$\lim_{z\to 0}|f(z)|$$

לא קיים, מספיק שנראה שיש זוג סדרות ששואפות לאפס שעבורן מתקבלים גבולות שונים. נבחר למשל

$$z_n=\frac{1}{n},\qquad \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=|\sin(\pi n)\cos(3\pi n)|=0\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

וכן את הסדרה

$$z_n=\frac{i}{n},\qquad f\left(\frac{i}{n}\right)=|\sin(\pi i n)\cos(3\pi i n)|=\sinh(\pi n)\cosh(3\pi n)\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

לכן מדובר בסינגולריות עיקרית. שימו לב שדי קשה למצוא במפורש את טור הלורן של הפונקציה, כך שהשיטה הזו יכולה בהחלט לחסוך עמל רב בבדיקת נקודות סינגולריות.

לבסוף נכנס ללא הוכחה משפט שמתאר עד כמה "עיקרית" נקודת סינגולריות עיקרית.

משפט 5.4.2 משפט פיקארד הגדול

תהא z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של f. אזי בכל טבעת מהצורה $A_{0,R}(z_0)$ שבה f אנליטית, היא מקבלת את כל הערכים ב-$\mathbb{C}$ למעט אולי נקודה אחת.

דוגמה 5.4.7 הדגמת משפט פיקארד הגדול

ננסה לפתור, לכל $w \neq 0$ את המשוואה

$$e^{\frac{1}{z}} = w.$$

כלומר

$$\frac{1}{z} = \log(w) \Longrightarrow z = \frac{1}{\log(w)} = \frac{1}{\ln|w| + i\arg(w)}.$$

היות ו-$\arg(w)$ מקבל ערכים גדולים כרצוננו, נוכל למצוא z קרוב לראשית כרצוננו שיהווה פתרון למשוואה, מה שמוכיח במפורש את מסקנת משפט פיקארד הגדול.

6
משפט השארית של קושי

6.1 השארית בנקודה סינגולריות

ראינו כי אם f אנליטית בטבעת מהצורה $A_{0,R}(z_0)$, וטור הלורן שלה בטבעת נתון על ידי

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

אזי

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z \,.$$

כלומר, המקדם a_{-1} מקושר לאינטגרל של הפונקציה על מסילות סגורות שמכילות בפנים שלהן את הנקודה הסינגולרית. במובן זה - המקדם "מעניין יותר" מיתר המקדמים ללא תלות בסוג הנקודה הסינגולרית.

הגדרה 6.1.1. שארית

למקדם a_{-1} בטור הלורן של f בטבעת $A_{0,R}(z_0)$, קוראים בשם **השארית של f בנקודה z_0** ומשתמשים גם בסימון $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$. כלומר

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z \,, \qquad r \in (0, R) \,.$$

שימו לב שבפרט, אם פונקציה אנליטית ב-z_0 (או שיש לה סינגולריות סליקה), מתקיים $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$. במקרה של קוטב, השארית לא חייבת להתאפס - ויש נוסחה שימושית לחישוב השארית.

טענה 6.1.1. שארית בקוטב

יהא z_0 קוטב מסדר $m \in \mathbb{N}$ של פונקציה f, ונגדיר

$$\varphi(z) = (z - z_0)^m f(z) \,.$$

אזי

$$\operatorname{Res}(f;z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi^{(m-1)}(z)}{(m-1)!}.$$

הוכחה. על פי האפיון שלמדנו בהרצאה הקודמת קיימת סביבה של z_0 שבה

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

כאשר φ אנליטית ב-z_0 ומקיימת $\varphi(z_0)\neq 0$. לכן עבור $r>0$ קטן מספיק, ניתן לכתוב

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;z_0)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{(m-1)!}\frac{(m-1)!}{2\pi i}\oint_{C_r(z_0)}\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}\,\mathrm{d}z=\frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}\end{aligned}$$

לבסוף, היות ו-φ אנליטית, הנגזרת ה-$m-1$ שלה רציפה ב-z_0 ולכן ניתן לכתוב

$$\operatorname{Res}(f;z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi^{(m-1)}(z)}{(m-1)!},$$

כדרוש. □

דוגמה 6.1.1. חישובי שארית בקטבים

1. תהינה f,g פונקציות אנליטיות ב-z_0 כך שמתקיים

$$f(z_0)\neq 0,\quad g(z_0)=0,\quad g'(z_0)=0.$$

שימו לב שמהנתון על $g(z)$ ניתן לכתוב $g(z)=(z-z_0)h(z)$ כאשר $h(z)$ אנליטית ולא מתאפסת ב-z_0, ולכן

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{1}{z-z_0}\overbrace{\frac{f(z)}{h(z)}}^{\text{אנליטית ולא מתאפסת}},$$

כלומר לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש קוטב מסדר 1 ב-z_0. על פי טענה 6.1.1, אם נגדיר

$$\varphi(z)=\frac{(z-z_0)\,f(z)}{g(z)},$$

נקבל כי

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g},z_0\right)&=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(1-1)!}\left(\frac{(z-z_0)f(z)}{g(z)}\right)^{(0)}\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}\\&=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.\end{aligned}$$

2. נחשב את השארית של $h(z)=\frac{1}{1+z^n}$ בנקודה $z_0=e^{\frac{\pi i}{n}}$. נשים לב כי המונה $f(z)=1$ אנליטי ולא מתאפס בנקודה, בעוד המכנה $g(z)=1+z^n$ אנליטי ומקיים $g(z_0)=0$ וכן $g'(z_0)=ne^{\frac{\pi i(n-1)}{n}}\neq 0$. על פי הסעיף הקודם

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^n},e^{\frac{\pi i}{n}}\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}=\frac{1}{ne^{\frac{\pi i(n-1)}{n}}}=-\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{n}.$$

3. נחשב את השארית של $f(z)=\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}$ בנקודה $z=0$. כדי לעשות זאת נשים לב כי

$$f(z)=\frac{\pi\cos(\pi z)}{z^2\sin(\pi z)}.$$

המונה לא מתאפס, ובמכנה יש אפס מסדר 3 (בזכות המכפלה של z^2 ו-$\sin(\pi z)$). לכן נגדיר

$$\varphi(z)=z^3f(z)=\frac{\pi z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)},$$

ולפי טענה 6.1.1,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2},0\right)&=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(\pi z\cot(\pi z))''\\&=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\pi\cot(\pi z)-\frac{\pi^2 z}{\sin^2(\pi z)}\right)'\\&=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}+\frac{2\pi^3 z\cos(\pi z)}{\sin^3(\pi z)}\\&=\pi^2\lim_{z\to 0}\frac{\pi z\cos(\pi z)-\sin(\pi z)}{\sin^3(\pi z)}\\&\overset{\text{לופיטל}}{=}\pi^2\lim_{z\to 0}\frac{-\pi^2 z\sin(\pi z)}{3\pi\sin^2(\pi z)\cos(\pi z)}=-\frac{\pi^3}{3}.\end{aligned}$$

הערה. שימו לב שבניגוד לקטבים - בנקודת סינגולריות עיקרית אין לנו נוסחה סגורה לחישוב השארית. הדרך הנפוצה היא לפתח את טור הלורן של הפונקציה בסביבת נקודת הסינגולריות הרלוונטית, ומציאת המקדם המתאים.

דוגמה 6.1.2. שארית בסינגולריות עיקרית

נחשב את השארית של $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ בנקודה $z = 0$. נשים לב שניתן להשתמש בטור הידוע

$$\sin(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

לכל $w \in \mathbb{C}$ כדי לכתוב לכל $z \neq 0$

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}}.$$

כלומר

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n-1}} = z - \frac{1}{6z} + \ldots,$$

ולכן

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = -\frac{1}{6}.$$

6.2 משפט השארית

תהא f פונקציה אנליטית בתחום Ω למעט בנקודת סינגולריות מבודדת אחת z_0. אזי, בטבעת $A_{0,R_2}(z_0)$ כלשהי, ניתן לכתוב

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

נסמן ב-$P_{z_0}(z)$ את החלק העיקרי של הטור. נשים לב שרדיוס ההתכנסות הפנימי של הטור של f נקבע על פי המקדמים של החלק העיקרי, ולכן ל-P_{z_0} יש רדיוס פנימי 0 להתכנסות. מצד שני, רדיוס ההתכנסות החיצוני של הטור של f תלוי רק במקדמים של החלק הלא עיקרי של f - ומכך של-P_{z_0} אין חלק שאינו עיקרי, רדיוס ההתכנסות החיצוני הוא אינסופי.

כלומר, P_{z_0} מתכנס לכל $z \neq z_0$. יתרה מכך, אם נגדיר את הפונקציה

$$g(z) = f(z) - P_{z_0}(z),$$

נקבל כי $g(z)$ בעלת סינגולריות **סליקה** ב-z_0, ולכן אפשר לחשוב עליה כעל פונקציה אנליטית בכל Ω.

מה לגבי המקרה שבו ל-f יש כמות סופית של נקודות סינגולריות? במקרה זה נוכל לכתוב

$$g(z) = f(z) - P_{z_0}(z) - \cdots - P_{z_m}(z),$$

ולקבל שוב פונקציה אנליטית בכל Ω.

הכנה למשפט השארית. נניח כי $\gamma : [a,b] \to \Omega$ מסילה פשוטה חלקה למקוטעין וסגורה כך ש-$z_m, \ldots, z_0$ נמצאות בפנים של המסילה. על פי משפט קושי גורסה, היות ו-g אנליטית, מתקיים

$$\oint_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0 = \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{j=0}^{m} \oint_\gamma P_{z_j}(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

אך שימו לב שבכל אחד מהאינטגרלים של החלקים העיקריים, זוהי בדיוק הנוסחה (עד כדי הכפלה ב-$2\pi i$) לשארית ב-z_j של P_{z_j}, שהיא בעצם השארית ב-z_j של f. כלומר

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=0}^{m} \operatorname{Res}\left(f, z_j\right).$$

ננסח את הרעיון בצורה יותר כללית כמשפט.

משפט 6.2.1. משפט השארית של קושי

תהא f אנליטית בתחום $\Omega \subset \mathbb{C}$ למעט בכמות סופית של נקודות סינגולריות. תהא $\gamma : [a,b] \to \Omega$ מסילה חלקה למקוטעין וסגורה כך שאף נקודה סינגולרית של f לא נמצאת על המסילה. אזי

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\substack{z\in\Omega \\ \text{נקודה סינגולרית } z}} \operatorname{Res}(f,z)\operatorname{Ind}(\gamma,z)\,.$$

בפרט, אם γ מסילה פשוטה ובמגמה חיובית כך ש-$z_m, \ldots, z_1$ הן נקודות סינגולריות של f שנמצאות בפנים שלה, אזי

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}\left(f, z_j\right).$$

שימו לב שלמעשה ההכנה שלנו למשפט מספקת כמעט את כל ההוכחה שלו. מומלץ מאוד לנסות ולהשלים את הפרטים החסרים.

6.3 שימושים למשפט השארית

נפתח במספר שימושים מידיים יחסית למשפט.

דוגמה 6.3.1. חישובים ישירים, משפט השארית

1. נחשב את האינטגרל $\oint_{C_2(0)} \frac{3z^2}{z^3+1}\,\mathrm{d}z$. נזה כי הפונקציה שלנו הולומורפית בכל $\mathbb{C}$ למעט בנקודות שבהן

$$z^3+1=0 \Longrightarrow z = e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\pi i}, e^{-\frac{\pi i}{3}}\,.$$

כמו כן, נזהה כי נקודות אלה מהוות קוטב פשוט כי שלושת הנקודות אפסים מסדר 1 של המכנה, שאינם

מאפסים את המונה. כלומר

$$\operatorname{Res}\left(\frac{3z^2}{z^3+1}, e^{\frac{\pi i}{3}}\right) = \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} 3z^2 \frac{z-e^{\frac{\pi i}{3}}}{z^3+1} = \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} 3z^2 \frac{1}{3z^2} = 1.$$

תוצאה זהה בדיוק תתקבל עבור יתר השורשים. לכן, על פי משפט 6.2.1 נקבל

$$\oint\limits_{C_2(0)} \frac{3z^2}{z^3+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i + 2\pi i + 2\pi i = 6\pi i.$$

הערה. לא נלמד זאת בקורס, אך למעשה ניתן להראות כי אם f אנליטית בפנים של המסילה γ, האינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ יהיה בדיוק מספר האפסים שיש ל-f בתוך γ.

2. נחשב את האינטגרל $\oint_{C_\pi(0)} \frac{z^2}{\cos^2(z)}\,\mathrm{d}z$. לשם כך נזהה כי נקודות הסינגולריות היחידות שיש לפונקציה בעיגול הן $\pm\frac{\pi}{2}$, ובהן מדובר בקוטב מסדר שני (המונה לא מתאפס, והמכנה אפס מסדר 2). לכן, על פי משפט 6.2.1,

$$\oint\limits_{C_\pi(0)} \frac{z^2}{\cos^2(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{\cos^2(z)}, \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{\cos^2(z)}, -\frac{\pi}{2}\right).$$

נחשב את השארית ב-$z=\frac{\pi}{2}$ בדרך מעט שונה שלעתים חוסכת המון חישובי גבולות ונגזרות. הרעיון הוא לכתוב את z^2 ואת $\frac{1}{\cos^2(z)}$ כטורי לורן באופן חלקי סביב הנקודה ולמצוא במכפלה את כל הגורמים שתורמים לשארית. תחילה נכתוב

$$z^2 = \left(z-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)^2 = \left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi\left(z-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi^2}{4}.$$

ולאחר מכן נכתוב

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2(z)} &= \frac{1}{\sin^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{6}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3+\dots\right)^2} \\
&= \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2+\dots\right)^2} \\
&= \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{3}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2+\dots} \\
&\overset{\text{סדרה הנדסית}}{=} \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(1-\frac{1}{3}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2+\dots\right) \\
&= \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}-\frac{1}{3}+\dots
\end{aligned}$$

ולכן לאחר הכפלה נקבל

$$\frac{z^2}{\cos^2(z)} = \frac{\pi}{4\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{\pi}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}+\dots.$$

מכאן, שמתקיים $\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{\cos^2(z)},\frac{\pi}{2}\right)=\pi$. נשאיר כתרגיל לוודא כי

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{\cos^2(z)},-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi.$$

מכאן נובע כי

$$\oint_{C_\pi(0)} \frac{z^2}{\cos^2(z)}\,\mathrm{d}z = 0.$$

6.3.1 אינטגרלים טריגונומטריים

טענה 6.3.1. הצגת אינטגרל טריגונומטרי על מעגל היחידה

תהא $f(x,y)$ פונקציה רציפה בשני משתנים. אזי

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta),\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \oint_{C_1(0)} f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

הוכחה. מחישוב ישיר, ועל ידי הצבת הפרמטריזציה $\gamma(\theta)=e^{i\theta}$ למעגל היחידה, נקבל כי

$$\oint\limits_{C_1(0)} f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2},\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}=\int\limits_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\frac{i\,e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta}{i\,e^{i\theta}}$$

ולאחר צמצום האיברים ושימוש בזהות אוילר, נסיק את הדרוש. □

הערות.

1. למעשה ניתן להשתמש בשיטה דומה כאשר מופיעות פונקציות טריגונומטריות של כפולה של θ. כלומר

$$\cos(n\theta)=\frac{z^n+\frac{1}{z^n}}{2},\quad \sin(n\theta)=\frac{z^n-\frac{1}{z^n}}{2i}.$$

ניתן לעשות זאת אף לכפול לא שלמות, אך במקרה זה נצטרך לעבוד עם ענפים.

2. על פניו השוויון כלל לא קשור למשפט השארית. אך הרעיון הוא שאינטגרלים טריגונומטריים עלולים להיות קשים לחישוב. האפשרות למעבר לאינטגרל על מעגל היחידה מאפשר לנו להשתמש במשפט השארית כדי לחשב את האיטנגרלים הללו - ולעתים לקבל פתרון פשוט בהרבה.

דוגמה 6.3.2 דוגמאות לחישוב אינטגרלים טריגונומטריים

1. נחשב את האינטגרל $\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos(x)}\,\mathrm{d}x$. לפי טענה 6.3.1, מתקיים

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos(x)}\,\mathrm{d}x=\oint\limits_{C_1(0)}\frac{1}{3-2\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{iz}=-\frac{1}{i}\oint\limits_{C_1(0)}\frac{1}{z^2-3z+1}\,\mathrm{d}z\,.$$

נוכל לנסות ולפתור את האינטגרל בעזרת משפט השארית. לשם כך, נחפש את נקודות הסינגולריות של הפונקציה, כלומר הנקודות שמאפסות את המכנה.

$$z^2-3z+1=0\Longrightarrow z=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

מבין נקודות הסינגולריות רק הנקודה $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ נמצאת בעיגול היחידה ולכן

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{3-2\cos(x)}\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{i}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2-3z+1},\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\\&=-2\pi\lim_{z\to\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}\frac{1}{z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

2. נחשב את האינטגרל $\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)}{5-4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$. בהתאם למסקנה מטענה 6.3.1, נקבל

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)}{5-4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=\oint_{C_1(0)}\frac{\frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{2}}{5-2\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{\mathrm{d}z}{iz}=-\frac{1}{2i}\oint_{C_1(0)}\frac{z^4+1}{z^2\left(2z^2-5z+2\right)}\,\mathrm{d}z$$

ולאחר פירוק הפולינום נקבל

$$=-\frac{1}{2i}\oint_{C_1(0)}\frac{z^4+1}{z^2\left(2z-1\right)\left(z-2\right)}\,\mathrm{d}z\,.$$

מבין כל נקודות הסינגולריות של הפונקציה, רק $z=\frac{1}{2}$ ו-$z=0$ נמצאות במעגל ולכן עלינו לחשב את השארית רק בנקודות אלה. עבור $z=\frac{1}{2}$ מדובר בקוטב פשוט ולכן

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2\left(2z-1\right)\left(z-2\right)},\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z^4+1}{2z^2\left(z-2\right)}=-\frac{17}{12}.$$

עבור $z=0$ מדובר בקוטב מסדר שני ולכן

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2\left(2z-1\right)\left(z-2\right)},0\right)&=\lim_{z\to0}\left(\frac{z^4+1}{\left(2z-1\right)\left(z-2\right)}\right)'\\&=\lim_{z\to0}\frac{4z^3\left(2z-1\right)\left(z-2\right)-\left(z^4+1\right)\left(4z-5\right)}{\left(2z-1\right)^2\left(z-2\right)^2}=\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

אי לכך, נסיק כי

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)}{5-4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2i}2\pi i\left(-\frac{17}{12}+\frac{5}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

6.3.2 אינטגרלים ממשיים מוכללים

נפתח בניסוח המשפט.

משפט 6.3.1. אינטגרל מוכלל לפונקציה רציונלית

יהיו $p(z),q(z)$ פולינומים כך ש-$\deg(q)\geq\deg(p)+2$. נניח גם כי $q(z)$ נטולת שורשים בציר הממשי. אזי,

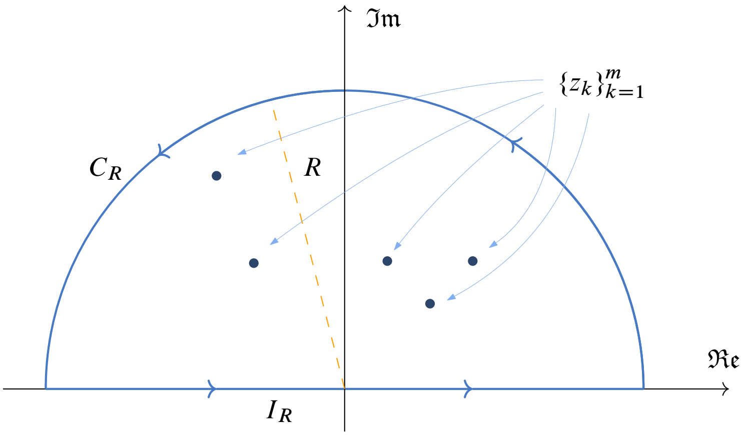
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)},z_k\right),$$

כאשר $z_1,\ldots,z_m$ הם שורשי $q(x)$ בחצי המישור העליון.

הוכחה. נסמן ב-n את ההפרש בין דרגות הפולינומים, שעל פי הנתון הוא גדול מ-2. מכאן נובע כי

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{p(x)}{q(x)}}{\frac{1}{x^n}}$$

קיים ושונה מאפס. על פי מבחן ההשוואה הגבולי האינטגרל המוכלל הדרוש מתכנס. נותר לנו להראות שערכו שווה לאגף הימני ולשם כך נגדיר את משפחת המסילות γ_R המורכבת מהקטע $I_R=[-R,R]$ ומחצי המעגל C_R בחצי המישור העליון. עבור R_0 כלשהו מתקיים כי γ_R מכילה בפנים שלה את כל השורשים של q בחצי המישור העליון, ובפרט, את כל הקטבים של הפונקציה $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ כמודגם באיור 6.1 שלעיל. היות ו-f אנליטית בסביבת המסילה ובפנים שלה למעט



איור 6.1: תיאור המסילות C_R, I_R והקטבים של $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ בחצי המישור העליון.

בכמות סופית של נקודות, נקבל לפי משפט השארית (משפט 6.2.1) כי

$$\oint_{\gamma_R}\frac{p(z)}{q(z)}\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)},z_k\right),$$

כאשר $z_1,\ldots,z_m$ הם שורשי q בחצי המישור העליון. שוויון זה נכון לכל $R>R_0$, ולכן נוכל להשאיף את $R\to\infty$ ולקבל שוויון גם בגבול. מצד שני,

$$\oint_{\gamma_R}\frac{p(z)}{q(z)}\,\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R}\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{p(z)}{q(z)}\,\mathrm{d}z$$

ובגבול, האינטגרל השמאלי באגף הימני הופך לאינטגרל הדרוש $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$. אם נראה כי האינטגרל הימני שואף לאפס, סיימנו. לשם כך נשתמש שוב בכך שעבור n, ההפרש בין דרגות הפולינומים, מתקיים

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|z^n\frac{p(z)}{q(z)}\right|$$

קיים וסופי, כלומר קיים C שעבורו

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq \frac{C}{|z|^n}$$

ולכן

$$\left|\int_{C_R} \frac{p(z)}{q(z)}\,\mathrm{d}z\right| \leq \pi R \frac{C}{R^n} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

מכאן נסיק את הדרוש. $\square$

דוגמה 6.3.3. אינטגרל לפונקציה רציונלית

1. עבור $n > 1$, נחשב את האינטגרל המוכלל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x\,,$$

ולשם כך נזהה שמתקיימים תנאי המשפט, ולכן עלינו לחשב את שורשי הפולינום בחצי המישור העליון. נשים לב כי

$$1+z^{2n}=0 \Longrightarrow z=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}}, \quad k=0,\ldots,2n-1.$$

בחצי המישור העליון, השורשים היחידים הם השורשים שעבורם $k=0,\ldots,n-1$. לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n}}, e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}}\right).$$

כדי לחשב את השארית נזהה שמדובר במונה שלא מתאפס ובאפס מסדר 1 של המכנה. ראינו בדוגמה 6.1.1 כי

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^{2n}}, e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}}\right) &= \frac{1}{2nz^{2n-1}}\bigg|_{z=e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}}} = \frac{1}{2n e^{(2k+1)\pi i} e^{-\frac{\pi i}{2n}}} \\ &= -\frac{1}{2n} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}} = -\frac{1}{2n} e^{\frac{\pi i}{2n}} \left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^k\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{\pi i}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{\pi i}{n}}\right)^k \\ &= -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{\pi i}{2n}} \frac{1-e^{\pi i}}{1-e^{\frac{\pi i}{n}}} \\ &= \frac{2\pi i}{n} \frac{e^{\frac{\pi i}{2n}}}{e^{\frac{\pi i}{2n}}\left(e^{-\frac{\pi i}{2n}} - e^{\frac{\pi i}{2n}}\right)} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\end{aligned}$$

שימו לב שבפרט, המקרה $n = 2$ הוא מכרה ידוע,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{\pi}{1}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi.$$

2. נחשב את האינטגרל המוכלל

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2},$$

כאשר $\mathfrak{Re}\,(a) \neq 0$. הנ"ל מבטיח שלפולינום במכנה אין שורשים ממשיים. נשתמש בזוגיות של הפונקציה ונכתוב

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

ונשתמש במשפט ובכך ש-$\pm ia$ הם השורשים היחידים של הפולינום, אחד מהם בלבד בחצי המישור העליון (נניח בה"כ ia). כלומר

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2}, ia\right).$$

מדובר בקוטב מסדר שני ולכן

$$\begin{aligned}2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^2}, a\right) &= 2\pi i \lim_{z\to ia}\left(\frac{(z-ia)^2}{(z-ia)^2\,(z+ia)^2}\right)' \\ &= 2\pi i \lim_{z\to ia} -\frac{2}{(z+ia)^3} = -\frac{4\pi i}{-8ia^3} = \frac{\pi}{2a^3}.\end{aligned}$$

שימו לב שכאשר $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, התוצאה כמובן ממשית, כצפוי.

לפני שנציג את המשפט הבא ואת הכלי השימושי הבא שנלמד בקורס, נשים לב לכך שבאופן טבעי, אינטגרל של פונקציה רציונלית $\frac{p(x)}{q(x)}$ מתכנס אם המכנה במעלה שהיא לפחות 2 יותר מהמונה. כך למשל האינטגרל המוכלל של $\frac{1}{x+i}$ לא מתכנס. יחד עם זאת, כאשר כופלים את הפונקציה בפונקציה טריגונומטרית האינטגרל עלול לפתע להתכנס. כך למשל,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

מתכנס על אף שהמעלה של המכנה היא 1 יחסית למונה (אפס). נציג זאת כמשפט.

משפט 6.3.2. אינטגרל של פונקציה רציונלית מוכפלת בסינוס/קוסינוס

יהיו $p(z), q(z)$ פולינומים כך ש-$\deg(q) \geq \deg(p) + 1$. נניח כי $q(z)$ נטולת שורשים בציר הממשי. אזי, לכל $\alpha > 0$,

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{p(x)}{q(x)}e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\left(\int_{-M}^{M}\frac{p(x)}{q(x)}\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x + i\int_{-M}^{M}\frac{p(x)}{q(x)}\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{i\alpha z}, z_k\right),$$

כאשר $z_1, \ldots, z_m$ הם השורשים של $q(z)$ בחצי המישור העליון.

שימו לב, בטרם נעבור להוכחת המשפט - שהשתמשנו כאן בגבול ש**לא מגדיר** את האינטגרל המוכלל באופן טבעי. יחד עם זאת, אם ידוע מראש כי האינטגרל המוכלל המתאים מתכנס, הגבול יהיה זהה וכך ניתן לחשבו.

הוכחה. שימו לב שלמעשה, הוכחת המשפט זהה לחלוטין להוכחת משפט 6.3.1, עבור הפונקציה החדשה שהגדרנו $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}e^{i\alpha z}$? החלק היחיד שלא מובן מאליו הוא הסיבה שבגינה האינטגרל על הקשר C_R של הפונקציה החדשה ישאף לאפס. כדי לטפל בסוגיה נסמן ב-$n \in \mathbb{N}$ את הפרש הדרגות בין מעלת המכנה למונה, ונזהה כי

$$\lim_{z\to\infty} z^n\frac{p(z)}{q(z)}$$

קיים וסופי. לכן, קיים C שעבור לכל $R > 0$ גדול מספיק,

$$\left|z^n\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq C \implies \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq \frac{C}{|z|^n}$$

לכל $z \in C_R$. נציב פרמטריזציה לקשת (שימו לב לתחום הזוויות בגלל שמדובר בחציו העליון של המעגל),

$$\left|\int_{C_R}\frac{p(z)}{q(z)}e^{i\alpha z}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi}\frac{p\left(Re^{i\theta}\right)}{q\left(Re^{i\theta}\right)}e^{i\alpha Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right|$$

נשתמש באי-שוויון המשולש האינטגרלי ונקבל

$$\leq \int_0^{\pi}\left|\frac{p\left(Re^{i\theta}\right)}{q\left(Re^{i\theta}\right)}\right|\left|e^{i\alpha R\cos(\theta)}e^{-\alpha R\sin(\theta)}\right|\left|iRe^{i\theta}\right|\mathrm{d}\theta \leq \frac{cR}{R^n}\int_0^{\pi}e^{-\alpha R\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

בשלב הבא נשתמש בשני טריקים. הטריק הראשון הוא ש-$\sin(\theta)$ מקבלת את אותם הערכים בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ובקטע $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, והשני הוא שבקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, הפונקציה $\frac{\sin(\theta)}{\theta}$ מונוטונית יורדת ולכן

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} \geq \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \implies \sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta.$$

כלומר,

$$\frac{c}{R^{n-1}}\int_{0}^{\pi} e^{-\alpha R\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \le \frac{C}{R^{n-1}}\int_{0}^{\pi} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{C\pi}{2\alpha R^{n-2}}\left(1-e^{-2\alpha R}\right),$$

על ידי שימוש בכלל לופיטל ועל ידי שימוש בכך ש-$n \ge 1$ נקבל מקלות כי הגבול הוא אפס כאשר $R \to \infty$ ונסיים את ההוכחה. □

הערות.

1. במידה ומעוניינים לחשב את האינטגרל עם $\alpha < 0$, הסכימה תהיה עבור השורשים של $q(z)$ בחצי המישור התחתון והסימן של האינטגרל יהיה מנוגד (בגלל המגמה ההפוכה).

2. במקרה שבו $p(x), q(x)$ פולינומים במקדמים ממשיים, מקבלים כי

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \mathfrak{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \mathfrak{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x\right).$$

דוגמה 6.3.4. אינטגרל לפונקציה רציונלית מוכפלת בפונקציה טריגונומטרית

1. נחשב את התמרת הפוריה של הלורנציאן $f_a(x) = \frac{1}{\pi(a^2+x^2)}$ כאשר $a > 0$ נתון, והתמרת הפוריה מוגדרת על ידי

$$\hat{f}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\,e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x\,.$$

נטפל תחילה במקרה שבו $\omega < 0$, היות ובמקרה זה ניתן להפעיל ישירות את משפט 6.3.2 ולקבל כי

$$\hat{f}_a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{\pi(a^2+x^2)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-i\omega z}}{\pi\left(a^2+z^2\right)}, ai\right)$$

היות ו-ai הוא השורש היחיד של $q(z) = a^2+z^2$ בחצי המישור העליון. כמו כן, מדובר בקוטב פשוט ולכן

$$\hat{f}_a(\omega) = 2\pi i\lim_{z\to ai}\frac{e^{-i\omega z}}{\pi(z+ai)} = 2\pi i\,\frac{e^{a\omega}}{2\pi ai} = e^{a\omega}.$$

עבור $\omega > 0$ מבצעים חישוב זהה עם השורש $-ai$ בחצי המישור התחתון והחלפת הסימן ומקבלים

$$\hat{f}_a(\omega) = -2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-i\omega z}}{\pi(a^2+z^2)}, -ai\right) = e^{-a\omega}.$$

כאשר $\omega = 0$ מקבלים את האינטגרל הידוע $\hat{f}_a(0) = 1$. ולסיכום

$$\hat{f}_a(\omega) = e^{-a|\omega|}, \qquad \forall\omega\in\mathbb{R}.$$

2. נחשב את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$. תחילה, נזהה שהאינטגרל לא מהצורה שמופיע במשפט 6.3.2. כדי להפוך אותו לכזה, נשתמש בכך שהפונקציה זוגית ולכן

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin(x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

עתה נרצה להפעיל את המשפט. נשים לב שבגלל שהפולינומים במונה ובמכנה בעלי מקדמים ממשיים, ניתן לכתוב

$$\frac{1}{2}\mathfrak{Im}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ix}}{x^4+1}\,\mathrm{d}x\right).$$

עתה ניתן להפעיל את המשפט. לשם כך נחשב את הקטבים של הפונקציה במכנה, ונקבל כי

$$z^4+1=0 \Longrightarrow z=e^{\frac{\pi i}{4}+\frac{\pi i}{2}k},\ k=0,\ldots,3.$$

השורשים של המכנה שנמצאים בחצי המישור העליון הם השורשים שמתאימים ל-$k=0,1$. בנוסף, מדובר בקטבים פשוטים ולכן

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ix}}{x^4+1}\,\mathrm{d}x &= 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1},e^{\frac{\pi i}{4}}\right)+2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^4+1},e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)\\
&= 2\pi i\left(\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{4}}} ze^{iz}\frac{z-e^{\frac{\pi i}{4}}}{z^4+1}+\lim_{z\to e^{\frac{3\pi i}{4}}} ze^{iz}\frac{z-e^{\frac{3\pi i}{4}}}{z^4+1}\right)\\
&= 2\pi i\left(\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{4}}}\frac{ze^{iz}}{4z^3}+\lim_{z\to e^{\frac{3\pi i}{4}}}\frac{ze^{iz}}{4z^3}\right)\\
&= 2\pi i\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}e^{ie^{\frac{\pi i}{4}}}}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}}+\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}e^{ie^{\frac{3\pi i}{4}}}}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}}\right)\\
&= 2\pi i\left(-\frac{i}{4}e^{ie^{\frac{\pi i}{4}}}+\frac{i}{4}e^{ie^{\frac{3\pi i}{4}}}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(e^{\frac{i}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}-e^{-\frac{i}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\\
&= \pi i e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

לסיכום, נקבל כי

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

7

התמרת z

7.1 הגדרה

קיימים מקרים רבים בעולם המדע וההנדסה, בהם מידע חשוב דורש אחסון ועיבוד שעלולים להיות מורכבים. התמרה הוא כינוי כללי למדי לאחסון מידע מסויים בצורה מסויימת שמשמרת את המידע בשלמותו וגם מאפשרת לעבד אותו ביעילות.

התמרת z שנדון בה בפרק זה היא דרך לאחסן מידע על סדרות אינסופיות $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ בעזרת פונקציות אנליטיות. מקרה נפוץ שבו התמרה זו דרושה היא בעיבוד אותות, בו לעתים המכשור שברשותינו מאפשר לדגום את האות רק במרווחים מסויימים ולא באופן רציף.

הגדרה 7.1.1. התמרת z של סדרה

תהא $\{a(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ סדרה של מספרים מרוכבים. **התמרת z של הסדרה** היא טור הלורן

$$A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)z^{-n}.$$

כאשר הפונקציה מוגדרת כמובן בכל מקום שבו טור הלורן מתכנס.

דוגמה 7.1.1. מספר דוגמאות מוכרות

1. תהא $a(n) = 1$ לכל $n \geq 0$ ו-$a(n) = 0$ לכל $n < 0$. התמרת z של סדרה זו היא הפונקציה

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}.$$

2. תהא $a(n)=e^{-|n|}$ לכל $n\in\mathbb{Z}$. התמרת z של סדרה זו היא הפונקציה

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|n|}z^{-n} \\ &= \sum_{-\infty}^{0} e^{n}z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}z^{-n} \\ &= \sum_{-\infty}^{0} \left(\frac{z}{e}\right)^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{ez}\right)^{n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{z}{e}} + \frac{1}{ez-1}. \end{aligned}$$

7.2 תכונות ההתמרה

טענה 7.2.1. רדיוסי התכנסות

תהא $\{a\left(n\right)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ סדרה ונגדיר

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{n} \sqrt[n]{|a(n)|}}, \qquad R_1 = \limsup_{n} \sqrt[n]{|a(-n)|}.$$

אזי, התמרת z של $\{a(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ אנליטית בטבעת $A_{R_1,R_2}(0)$.

הוכחה. כפי שהגדרנו בפרקים הקודמים, הטור

$$A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)z^{-n}$$

שהוא טור לורן, מתכנס כאשר הטור של החזקות החיוביות והטור של החזקות השליליות מתכנס בנפרד. לכן נכתוב

$$A(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} a(n)z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)z^{-n}.$$

- עבור הטור הימני, נסמן $w=\frac{1}{z}$ ונקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)w^n$. וזה טור חזקות בעל רדיוס התכנסות

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{\limsup_{n} \sqrt[n]{|a(n)|}},$$

ולכן הטור מתכנס לכל

$$\left|\frac{1}{z}\right| = |w| < \frac{1}{R_1} \implies |z| > R_1,$$

כפי שרצינו להראות.

- עבור הטור השמאלי, נסמן $m=-n$ בשביל הנוחות ונקבל את הטור $\sum_{m=0}^{\infty} a(-m)z^m$, שהוא שוב טור חזקות עם רדיוס התכנסות

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_m \sqrt[m]{|a(-m)|}},$$

כלומר הטור מתכנס לכל $|z| < R_2$.

שילוב שני התנאים מאפשר לנו להסיק את הדרוש. □

משפט 7.2.1. תכונות בסיסיות, התמרת z

תהא $A(z)$ התמרת z של הסדרה $\{a(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ בטבעת $A_{r,R}(0)$.

1. **ליניאריות.** אם $B(z)$ התמרת z של סדרה $\{b(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, אזי $D(z)=\alpha A(z)+\beta B(z)$ היא התמרת z של הסדרה $\{\alpha a(n)+\beta b(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ בתחום ההתכנסות המשותף.
2. **הזזה.** התמרת z של הסדרה $\{a(n+1)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא $zA(z)$ באותו תחום התכנסות.
3. **כפל ב-n.** התמרת z של הסדרה $\{na(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא $-zA'(z)$ באותו תחום התכנסות.
4. **כפל ב-α^n.** התמרת z של הסדרה $\{\alpha^n a(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא $A\left(\frac{z}{\alpha}\right)$ בטבעת $A_{|\alpha|r,|\alpha|R}(0)$.

הוכחה. 1. תכונת הליניאריות נובעת מידית מהליניאריות של טורי לורן מתכנסים (לכן הדרישה לתחום ההתכנסות המשותף).

2. הוכחת הזזה מתבצעת גם היא במפורש בעזרת הזזה של האינדקסים

$$zA(z) = z\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)z^{-(n-1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n+1)z^{-n}.$$

3. נובע מידית מהנוסחה לגזירה איבר-איבר של טורי לורן,

$$A'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -na(n)z^{-n-1} = -\frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{\infty} na(n)z^{-n} = -\frac{1}{z}A(z).$$

לאחר העברת אגפים נקבל את הדרוש.

4. באופן דומה,

$$A\left(\frac{z}{\alpha}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n a(n)z^{-n}.$$

□

דוגמה 7.2.1. שימוש בתכונות לחישוב התמרות

1. נשים לב כי התמרת z של הסדרה $a(n) = 1$ לכל $n \geq 0$ ו-$a(n) = 0$ לכל $n < 0$ היא $A(z) = \frac{z}{z-1}$.
אי לכך התמרת z של $a(n) = n$ לכל $n \geq 0$ ו-$a(n) = 0$ לכל $n < 0$ היא
$$B(z) = -zA'(z) = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

2. באופן דומה, על ידי הכפלה ב-α^n נקבל כי התמרת z של הסדרה $a(n) = \alpha^n$ לכל $n \geq 0$ ו-$a(n) = 0$ לכל $n < 0$ היא
$$C(z) = A\left(\frac{z}{\alpha}\right) = \frac{\frac{z}{\alpha}}{\frac{z}{\alpha}-1} = \frac{z}{z-\alpha}.$$

3. נניח כי $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה שמקיימת
$$\begin{cases} a(n) = 2a(n-1) - a(n-2), \ \forall n \geq 2 \\ \quad a(0) = 1, \ a(1) = 2 \end{cases}$$

נסמן ב-$A(z)$ את התמרת z של הסדרה. כאשר מגדירים $a(n) = 0$ לכל $n < 0$. נרצה להפוך את השוויון $a(n) = 2a(n-1) - 2a(n-2)$ לנכון לכל $n \in \mathbb{Z}$, ולשם כך נשים לב כי

- עבור $n < 0$ השוויון עדיין מתקיים ושני האגפים מתכנסים.
- עבור $n = 0$ השוויון לא מתקיים, היות ובאגף הימני כתוב 1 ובאגף הימני כתוב 0.
- עבור $n = 1$ השוויון מתקיים ובשני האגפים כתוב 2.

כלומר, השוויון הנכון הוא למעשה
$$a(n) = 2a(n-1) - a(n-2) + c(n), \quad c(n) := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

עתה, השוויון מתקיים לכל z וניתן להסיק כי התמרת z על שני האגפים תתן את אותו הביטוי. תוך שימוש בתכונות של התמרת z נקבל
$$A(z) = \frac{2}{z}A(z) - \frac{1}{z^2}A(z) + C(z),$$

כאשר $C(z) = 1$ לפי הגדרה. כלומר
$$A(z)\left(\frac{z^2-2z+1}{z^2}\right) = 1 \Longrightarrow A(z) = \frac{z^2}{z^2-2z+1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

עתה, ידוע לנו שהיות ולסדר אין מקדמים של חזקות חיוביות - שרדיוס ההתכנסות החיצוני שלה הוא

אינסוף. נפתח את $A(z)$ לטור לורן בטבעת מהצורה הנ"ל באופן הבא

$$A(z)=z^2\left(\frac{1}{1-z}\right)'=z^2\left(-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)'=z^2\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\right)'$$
$$=z^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{-n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,z^{-n}.$$

מכאן נובע כי $a(n)=n+1$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4. נמצא נוסחה מפורשת לסדרת פיבונאצ'י. זוהי הסדרה $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$ שמקיימת

$$\begin{cases}a(n)=a(n-1)+a(n-2), & \forall n\geq 2\\ a(0)=a(1)=1\end{cases}.$$

נגדיר כמו קודם את $A(z)$ להיות התמרת z של הסדרה לאחר שנגדיר $a(n)=0$ לכל $n<0$, ביחד עם "סדרת התיקון" $c(0)=1$ ו-$c(n)=0$ לכל $n\neq 0$. נקבל מכך את המשוואה

$$A(z)=\frac{1}{z}A(z)+\frac{1}{z^2}A(z)+C(z)$$

כאשר $C(z)=1$, לכן

$$A(z)=\frac{z^2}{z^2-z-1}.$$

שוב, נפתח את הפונקציה $A(z)$ לטור לורן בטבעת חיצונית כלשהי (עם רדיוס חיצוני אינסוף) באופן הבא - נסמן $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ונקבל כי

$$\begin{aligned}A(z)&=\frac{z^2}{(z-\Phi)\left(z+\frac{1}{\Phi}\right)}\\&=\frac{z}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{\Phi}{z}}-\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi z}}\right)\\&=\frac{z}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\Phi^n-(-1)^n\left(\frac{1}{\Phi^n}\right)\right)\frac{1}{z^n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\Phi^n-\frac{1}{(-\Phi)^n}}{\sqrt{5}}\right)z^{-n+1}\end{aligned}$$

ולסיכום

$$a(n)=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}.$$

7.3 התמרת z הפוכה

אחת מהרעיונות החשובים בהתמרות הוא שימור המידע של האובייקט המקורי. היות והתמרת z של סדרה היא למעשה טור לורן, ניתן לשחזר את הסדרה המקורית מתוך הטור על ידי כלים שכבר למדנו.

משפט 7.3.1. התמרת z הפוכה

תהא $A(z)$ התמרת z של סדרה $\{a(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ בטבעת $A_{r,R}(0)$. אזי, לכל $n \in \mathbb{Z}$,

$$a(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\rho(0)} A(z) z^{n-1}\, \mathrm{d}z\,,$$

כאשר $\rho \in (r, R)$ ומגמת המעגל חיובית.

שימו לב שאין צורך להוכיח את הנוסחה, שכן זו בסה"כ הנוסחה למקדמי טור-לורן שכבר פגשנו.

דוגמה 7.3.1. חילוץ נוסחה מפורשת, סדרת פיבונאצ'י

נשחזר את הסדרה $\{a(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ שמקיימת

$$A(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

לכל $n \in \mathbb{Z}$ מקבלים ממשפט השארית כי

$$a(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(0)} \frac{z^{n+1}}{(z-\Phi)\left(z+\frac{1}{\Phi}\right)} \mathrm{d}z = \mathrm{Res}\left(\frac{z^{n+1}}{(z-\Phi)\left(z+\frac{1}{\Phi}\right)}, 0\right)$$
$$+ \mathrm{Res}\left(\frac{z^{n+1}}{(z-\Phi)\left(z+\frac{1}{\Phi}\right)}, \Phi\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z^{n+1}}{(z-\Phi)\left(z+\frac{1}{\Phi}\right)}, -\frac{1}{\Phi}\right).$$

נפריד למקרים.

- עבור $n \geq -1$ מקבלים כי 0 היא סינגולריות סליקה (או שבכלל לא סינגולריות) ולכן השארית הראשונה מתאפסת. עבור יתר הנקודות נקבל שארית בקוטב פשוט, כלומר

$$a(n) = \lim_{z\to\Phi} \frac{z^{n+1}}{\left(z+\frac{1}{\Phi}\right)} + \lim_{z\to-\frac{1}{\Phi}} \frac{z^{n+1}}{(z-\Phi)} = \frac{\Phi^{n+1} + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\left(\Phi+\frac{1}{\Phi}\right)},$$

שהיא בדיוק הנוסחה שקיבלנו קודם לכן. ניתן גם לזהות כי $a(-1) = 0$.

- עבור $n < -1$, נסמן $n = -m$ ונקבל כי $m > 1$ והקוטב הוא מסדר $m - 1$, כלומר

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left(\frac{z^{-m+1}}{(z-\Phi)\left(z+\frac{1}{\Phi}\right)}, 0\right) &= \frac{1}{(m-2)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{(z-\Phi)\left(z+\frac{1}{\Phi}\right)}\right)^{(m-2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}(m-2)!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z-\Phi}-\frac{1}{z+\frac{1}{\Phi}}\right)^{(m-2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}(m-2)!}\lim_{z\to 0}\frac{(-1)^{m-2}(m-2)!}{(z-\Phi)^{m-1}} - \frac{(-1)^{m-2}(m-2)!}{\left(z+\frac{1}{\Phi}\right)^{m-1}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\Phi^{m-1}} - \Phi^{m-1}
\end{aligned}$$

ובדיקה מהירה מראה כי שארית זו היא בדיוק נגדית לשארית של זוג הקטבים הפשוטים, ולכן $a(n) = 0$ לכל $n < 0$ כפי שקיבלנו גם במקרה הקודם שבו חישבנו את המקדמים במפורש.