104273

מבוא לאנליזה פונקציונלית ואנליזת פורייה

רשימות תרגול

רן קירי

2022-2023

תוכן העניינים

רשימות התרגולים נכתבו בתיאום עם הרצאותיו של פרופ' אור משה שליט. ייתכן ורשימות אלו לא יכסו את כל הנושאים שילמדו בסמסטרים אחרים ותחת מרצים אחרים. המשפטים, הטענות, וההגדרות שמוזכרות כאן גם הן מופיעות כפי שהן נלמדו בהרצאות, ולא בהכרח יהיו תואמות במדויק לסמסטרים אחרים בהן הקורס יילמד.

1

משפט סטון-ויירשטראס

1.1 תזכורות מההרצאה

1.1.1 משפט סטון-ויירשטראס

הגדרה 1.1 (אלגברה)**.** בהנתן שדה $\mathbb{F}$, **אלגברה** מעל השדה הינה מרחב וקטורי (מעל אותו שדה) המצויידת גם במכפלה וקטורית ביליניארית.

אצלנו כל האלגבראות יהיו מעל הממשיים או המרוכבים, ואנחנו נניח גם כי פעולת הכפל היא אסוציאטיבית. בנוסף, האלגברה שלנו (כמרחב וקטורי) תצויד גם ב**נורמה**.

הגדרה 1.2 (תת-אלגברה ותת-אלגברה סגורה)**.** תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהא $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ תת-קבוצה לא ריקה. אם $\mathcal{B}$ היא אלגברה ביחס למכפלה המושרית עליה מ-$\mathcal{A}$, נכנה אותה **תת-אלגברה** של $\mathcal{A}$. אם בנוסף לכך, $\mathcal{B}$ סגורה כתת-מרחב טופולוגי של $\mathcal{A}$ (ביחס לנורמה המושרית, למשל), היא תקרא תת-אלגברה סגורה.

האלגברה הראשונה שנפגוש בקורס היא האלגברה של הפונקציות הרציפות.

הגדרה 1.3. יהא X מרחב טופולוגי האוסדורף וקומפקטי. נסמן ב-$C_{\mathbb{R}}\left(X\right)$ את המרחב של כל הפונקציות הממשיות (כלומר מהמרחב לממשיים), הרציפות ב-X. נסמן ב-$C\left(X\right)$ את מרחב הפונקציות המרוכבות (כלומר מהמרחב למרוכבים) שרציפות ב-X.

הגדרה 1.4 (נורמת הסופרמום)**.** במרחבי הפונקציות $C_{\mathbb{R}}\left(X\right), C\left(X\right)$, נעבוד עם הנורמה (כלומר אלו מרחבים נורמיים) שמכונה **נורמת הסופרמום**:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f\left(x\right)|$$

שימו לב שמרחבים אלו הם אלגברה ביחס לכפל הסטנדרטי $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$.

הגדרה 1.5 (הפרדת נקודות)**.** אומרים ש-$\mathcal{A}$ היא תת אלגברה של $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}\left(X\right)$ או $\mathbb{C}\left(X\right)$ ה**מפרידה נקודות** אם לכל x, y יש $f \in \mathcal{A}$ שעבורה $f\left(x\right) \neq f\left(y\right)$.

לאחר הגדרת השפה המתאימה, אפשר להתחיל בתוצאה החשובה הראשונה של הקורס.

משפט 1.6 (משפט סטון-ויירשטראס (גרסה ממשית))**.** תהא $\mathcal{A}$ תת-אלגברה סגורה של $C_{\mathbb{R}}\left(X\right)$ המכילה את הפונקציות הקבועות ומפרידה נקודות. אזי $\mathcal{A} = C_{\mathbb{R}}\left(X\right)$

המשפט למעשה אומר שעל ידי בחירת אוסף "קטן" של פונקציות המקיימות מספר תנאים "סבירים", אפשר לקרב כל פונקציה רציפה אחרת בעזרת פונקציות מהאוסף. המשפט כמובן מורחב גם לפונקציות קומפלקסיות תחת הנחה נוספת:

הגדרה 1.7. אומרים ש-$\mathcal{A}$ תת-אלגברה **צמודה לעצמה** של $C\left(X\right)$ אם לכל $f \in \mathcal{A}$, מתקיים $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

משפט 1.8 (משפט סטון ויירשטראס (גרסה מרוכבת))**.** תהא $\mathcal{A}$ תת-אלגברה סגורה וצמודה לעצמה של $C\left(X\right)$ המכילה את הפונקציות הקבועות ומפרידה נקודות. אזי $\mathcal{A} = C\left(X\right)$.

כמסקנה, מקבלים את שתי התוצאות החשובות הבאות:

משפט 1.9 (משפט הקירוב הפולינומי של ויירשטראס)**.** תהא $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי, לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום $p \in \mathbb{R}\left[x\right]$ עבורו:

$$\left\|f-p\right\|_{\infty} = \sup_{x\in[a,b]} |f(t)-p(t)| < \varepsilon.$$

הערה. במובן מסויים, ניתן לראות את הקבוצה $\left\{1, x, x^2, \dots\right\}$ בתור "בסיס" למרחב הפונקציות הרציפות, במובן שמדובר בקבוצה בת"ל המקיימת:

$$\overline{\operatorname{span}\left\{1, x, x^2, \dots\right\}}^{\|\cdot\|_{\infty}} = C_{\mathbb{R}}\left([a,b]\right).$$

שימו לב שגם פונקציה רציפה שאינה גזירה, ניתנת לקירוב כרצוננו על ידי פולינומים. בתרגול הקרוב נשתמש בתוצאה זו כדי להראות תכונות של פונקציות רציפות כלליות בעזרת בדיקה של תכונות אלה על פולינומים.

הגדרה 1.10 (פולינום טריגונומטרי)**.** פונקציה q מכונה **פולינום טריגונומטרי** אם היא מהצורה:

$$q(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(nx\right) + b_n \cos\left(nx\right)$$

כאשר $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{N}, \left\{b_n\right\}_{n=1}^{N}$ מקדמים ממשיים כלשהם.

משפט 1.11 (משפט הקירוב הטריגונומטרי של ויירשטראס)**.** תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2π, כלומר:

$$f\left(x+2\pi\right) = f\left(x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

אזי, לכל $\varepsilon > 0$, קיים פולינום טריגונומרי q שעבורו:

$$\left\|q-f\right\|_{\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|q(x)-f(x)\right|_{\infty} < \varepsilon.$$

כפי שראינו בהרצאה, זוהי אינה תוצאה ישירה של משפט סטון-ויירשטראס, אך ההוכחה שלה נשענת עליו בצורה משמעותית. כבר בתרגול הקרוב נראה דוגמה לעוד משפט "דמוי" סטון-ויירשטראס שנעזר במשפט המקורי בהוכחתו.

1.1.2 מרחבי הילברט

הגדרה 1.12 (מרחב מכפלה פנימית)**.** יהא $\mathcal{G}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. אזי התבנית $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathbb{F}$ מכונה **מכפלה פנימית** אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

בפרט, המכפלה של וקטור עם עצמי היא תמיד מספר ממשי.

- **חיוביות.** לכל $g\in\mathcal{G}$ מתקיים $\langle g,g\rangle\geq 0$ וערך זה מתאפס אם ורק אם $g=0$.
- **ליניאריות ברכיב הראשון.** לכל $\lambda\in\mathbb{F}$ (כלומר, בשדה), ו-$g_1,g_2,g_3\in\mathcal{G}$, מתקיים:

$$\langle\lambda g_1+g_2,g_3\rangle=\lambda\langle g_1,g_3\rangle+\langle g_2,g_3\rangle.$$

- **הרמיטיות/סימטריות.** לכל $g_1,g_2\in\mathcal{G}$, מתקיים $\langle g_1,g_2\rangle=\overline{\langle g_2,g_1\rangle}$. מעל $\mathbb{R}$, אין צורך בערך המוחלט.

המרחב $\mathcal{G}$ ביחד על המכפלה הפנימית יכונה **מרחב מכפלה פנימית**.

טענה 1.13 (אי שוויון קושי-שוורץ)**.** יהא $\mathcal{G}$ מרחב מכפלה פנימית. אזי לכל $g_1,g_2\in\mathcal{G}$ מתקיים:

$$|\langle g_1,g_2\rangle|\leq\sqrt{\langle g_1,g_1\rangle}\sqrt{\langle g_2,g_2\rangle}. \tag{1.1}$$

בזכות אי שוויון קושי שוורץ, כל מרחב מכפלה פנימית זוכה גם למבנה של מרחב נורמי, עם הנורמה המושרית:

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}.$$

באופן דומה, המרחב הוא גם מרחב מטרי, ביחס למטריקה המושרית:

$$\mathrm{d}\left(f,g\right)=\left\|f-g\right\|.$$

הגדרה 1.14 (סדרת קושי)**.** יהא X מרחב מטרי עם מטריקה $\mathrm{d}(\cdot,\cdot):X\times X\to\mathbb{R}$. סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ מכונה סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>m>N$, מתקיים $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$.

הגדרה 1.15 (מרחב הילברט)**.** מרחב מכפלה פנימית $\mathcal{G}$ שהוא גם מרחב שלם ביחס למטריקה המושרית, מכונה **מרחב הילברט**.

דוגמה. בהרצאה, פגשתם את מרחב הפונקציות הרציפות $C\left([a,b]\right)$ שהוא מרחב מכפלה פנימית ביחס למכפלה:

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_a^b f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x,$$

אך מרחב זה אינו שלם ולכן אינו מהווה מרחב הילברט (ראיתם דוגמה לכך בהרצאה).

על אף הקיום של מרחבי מכפלה פנימית כאלו שאינם מרחבי הילברט, ניתן תמיד לזהות אותם כתת מרחב צפוף החי בתוך מרחב הילברט גדול יותר. הנ"ל מבוטא בתוצאות המשפט הבא:

משפט 1.16 (משפט ההשלמה למרחב הילברט)**.** יהא $\mathcal{G}$ מרחב מכפלה פנימית. אזי, קיים מרחב הילברט $\mathcal{H}$ ושיכון ליניארי $\iota : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, המקיים:

- $\langle \iota(g_1), \iota(g_2)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle g_1, g_2\rangle_{\mathcal{G}}$ לכל $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$.
- $\iota(\mathcal{G})$ צפופה ב-$\mathcal{H}$. כלומר $\overline{\iota(\mathcal{G})} = \mathcal{H}$.

יתרה מכך, ההשלמה יחידה במובן הבא - אם $\mathcal{H}_2$ מרחב הילברט נוסף עם שיכון ליניארי $\iota_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{H}_2$ המקיים את הנ"ל, ניתן למצוא $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_2$ ליניארי, חד-חד ערכי ועל, המקיים:

- $\langle Uh_1, Uh_2\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle h_1, h_2\rangle_{\mathcal{H}}$ לכל $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$.
- $U(\iota(\mathcal{G})) = \iota_2(\mathcal{G})$.

דוגמה. מרחב ההשלמה של הפונקציות הרציפות $C([a,b])$ מסומן ב-$L_2[a,b]$. המרחב מזוהה גם עם הפונקציות המדידות לפי לבג שהן אינטגרביליות בריבוע, אך בקורס זה לא נידרש להשתמש בפרט מידע זה. האפשרות לסמן את המרחב בסימון מקובל נובעת בין השאר מהחלק של היחידות במשפט 1.16.

1.2 היכרות בסיסית - פונקציות מרוכבות

בקורס נזכה לעסוק לא מעט בפונקציות מהצורה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. כלומר, פונקציות שהארגומנט שלהן הוא משתנה ממשי, אך התוצאה היא מספר מרוכב. כל פונקציה כזאת ניתנת לכתיבה בצורה:

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

כאשר $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, כך שמתקיים למעשה:

$$\mathfrak{Re}(f) = u, \quad \mathfrak{Im}(f) = v.$$

נציין מספר הגדרות ותכונות של פונקציות מהצורה הזו, על מנת להכין אותנו לגזירה ואינטגרציה שלהן.

הגדרה 1.17 (גבול ורציפות של פונקציה מרוכבת)**.** תהא $f = u + iv$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0 \in \mathbb{R}$. אומרים כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$, מתקיים:

$$|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{(u(x) - u(x_0))^2 + (v(x) - v(x_0))^2} < \varepsilon,$$

אומרים ש-f רציפה ב-x_0 אם היא מוגדרת בה ואם $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

כל התכונות הרגילות של פונקציות רציפות ממשיות עוברות באופן טבעי גם לפונקציות מהצורה $f = u + iv$ (הרכבה של רציפות, אריתמטיקה, קריטריון היינה ועוד). תכונה אחת, פחות מובנת מאליה, ננסח בטענה הבאה:

טענה 1.18. תהא $f : u + iv$ מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. אזי, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אם ורק אם:

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = \mathfrak{Re}(L), \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = \mathfrak{Im}(L).$$

נגזרות ואינטגרלים. הגדרת נגזרת והגדרת האינטגרל, עוברות גם הן בצורה טבעית למדי לעולם המרוכב באופן הבא:

הגדרה 1.19 (גזירות פונקציה ממשית-מרוכבת)**.** תהא $f = u + iv$ מוגדרת בסביבה של x_0. אזי f גזירה ב-x_0 אם קיים וסופי הגבול:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0},$$

ובפרט, הנגזרת נתונה על ידי $f'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0)$.

כל כללי הגזירה הרגילים (מכפלה, מנה, שרשרת) מתקיימים גם הם במישור המרוכב.

הגדרה 1.20 (אינטגרציה של פונקציה ממשית-מרוכבת)**.** תהא $f = u+iv$ המוגדרת בקטע $[a, b]$, כך ש-u, v אינטגרביליות רימן בקטע זה. אזי:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x.$$

באופן דומה מרחיבים את ההגדרה גם לאינטגרלים מוכללים, כמובן.

טענה 1.21 (אי שוויון המשולש האינטגרלי)**.** תהא $f = u + iv$ המוגדרת בקטע $[a, b]$, כך ש-u, v אינטגרביליות רימן בקטע זה. אזי:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

טענה 1.22 (נוסחת ניוטון לייבניץ)**.** תהא $f = u + iv$ רציפה בקטע $[a, b]$ (בפרט, u, v רציפות בקטע). תהיינה U, V פונקציות קדומות בקטע של u, v בהתאמה ונסמן $F = U + iV$. אזי:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

סדרות פונקציות, טורי פונקציות. היות וההגדרות שסיפקנו מראות שהמעבר לפונקציות מהצורה $f = u + iv$ טבעי מאוד מפונקציות ממשיות "רגילות", לא יפתיע אם נציין כי כל עולם סדרות הפונקציות וטורי הפונקציות (התכנסות במידה שווה, אינטגרציה וגזירה איבר-איבר) גם הם מקבלים גרסה משלהם עבור פונקציות מהצורה החדשה שתיארנו. לא נצטט את כל המשפטים הידועים מהחשבון האינפיניטסימלי, אך נדגיש שיש להכיר היטב, ונשתמש בהם לא מעט לאורך הקורס.

דוגמאות ושימושים.

1. על פי זהות אוילר, מתקיים $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. אזי:

$$\left(e^{ix}\right) = (\cos(x) + i\sin(x))' = -\sin(x) + i\cos(x) = i(\cos(x) + i\sin(x)) = ie^{ix}.$$

בנוסף, אולי כדאי לזכור גם את הזהות:

$$\overline{e^{ix}} = \overline{\cos(x) + i\sin(x)} = \cos(x) - i\sin(x) = \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{-ix}.$$

2. לכל $n, m \in \mathbb{Z}$, מתקיים:

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi, & n = m \\ \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\Big|_0^{2\pi} = 0 \end{cases}.$$

3. טור הפונקציות $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}e^{inx}$ מתכנס במידה שווה בקטע $[0, 2\pi]$ ממבחן M של ויירשטראס, שהרי $\left|\frac{1}{n^2}e^{inx}\right| \leq$ $M_n =: \frac{1}{n^2}$, והטור $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס. אי לכך, ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר ולכתוב:

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{inx}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} e^{inx}\,\mathrm{d}x = 0.$$

לאחר סקירה זריזה של כלים אלו, נעבור בחזרה לנושא התרגול, משפט סטון-ויירשטראס והשלכותיו.

1.3 תרגיל - אלגבראות סגורות שאינן $C(X)$

1. נסמן ב-$\mathcal{A} \subset C([0,1])$ את אוסף כל הפונקציות הרציפות המקיימות $f(0) = 0$. הוכיחו כי $\mathcal{A}$ היא אלגברה סגורה.
2. הוכיחו כי $\mathcal{A} = \overline{\operatorname{alg}(x)}$. כלומר, ש-$\mathcal{A}$ היא האלגברה הסגורה הקטנה ביותר המכילה את הפונקציה x.

פתרון.

1. ברור כי קומבינציה ליניארית של פונקציות רציפות המתאפסות בראשית, תהיה בעצמה פונקציה כנ"ל ולכן $\mathcal{A}$ סגורה לחיבור וכפל בסקלר. כמובן שגם מכפלה של פונקציות רציפות המתאפסות בראשית, תהיה פונקציה רציפה שמתאפסת בראשית, ולכן $\mathcal{A}$ סגורה לכפל, מה שמוכיח שהיא אכן תת אלגברה. על מנת להוכיח סגירות, נניח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ סדרה המתכנסת בנורמה (כלומר, במידה שווה) ל-$f \in C([0,1])$. היות והתכנסות במידה שווה גוררת התכנסות נקודתית, נקבל כי:
$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0,$$
ולכן $f \in \mathcal{A}$, והאלגברה אכן סגורה כדרוש.

2. משפט סטון -ויירשאראס לא יועיל כאן כלשונו. שהרי, $\mathcal{A}$ אינה אלגברה מהצורה $C(X)$ (אלא תת-אלגברה ממש של כזו), ו-$\operatorname{alg}(x)$ לא מכילה את הפונקציות הקבועות, אלא רק פולינומים ב-x ללא מקדם חופשי. כדי להשתכנע בכך, נזכור כי המשמעות של $\operatorname{alg}(x)$ היא האלגברה הקטנה ביותר המכילה את x. כלומר, היא תכיל את x, החזקות שלו, וקומבינציות ליניאריות של החזקות הללו, אך היא אינה צריכה להכיל (ולכן גם לא תכיל) את הפונקציות הקבועות.

ננסה ללכת בדרך הארוכה, ולהוכיח את השוויון על ידי הכלה דו כיוונית.

- ברור כי $\mathrm{alg}(x) \subset \mathcal{A}$, היות וכל הפונקציות באלגברה מתאפסת בראשית לפי הגדרה. יתרה מכך, העובדה ש-$\mathcal{A}$ אלגברה סגורה, גוררת כי יתקיים גם $\overline{\mathrm{alg}(x)} \subset \mathcal{A}$.
- על מנת להוכיח את ההכלה השניה, נניח כי $f \in \mathcal{A}$ פונקציה רציפה המתאפסת בראשית. מספיק לנו להראות, כי ניתן לכתוב את f כגבול של פונקציות מ-$\mathrm{alg}(x)$, ואז ינבע (לפי הגדרה) כי $f \in \overline{\mathrm{alg}(x)}$. כפי שציינו קודם, משפט סטון-ויירשטראס לא יהיה תקף כאן, אך רק משום שחסרות לנו הפונקציות הקבועות. ברור כי האלגברה $\mathrm{alg}(x)$ מפרידה נקודות על ידי הפונקציה x ואף צמודה לעצמה (שכן, הצמדה של פולינום ב-x שקולה להצמדה של מקדמיו בלבד).

נעבור בלית ברירה להתבונן באלגברה גדולה יותר, שהיא אלגברת הפולינומים. שם, ניתן לקרב את הפונקציה f על פי משפט 1.9. כלומר, ניתן למצוא סדרה $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ של פולינומים, עבורה:

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_{\infty} = 0.$$

אמנם הפולינומים p_n אינם באלגברה שלנו, אך ניתן לכתוב אותם בצורה $p_n(x) = a_n + q_n(x)$, כאשר q_n פולינום שכן נמצא באלגברה שלנו. יתרה מכך, הערך של f בראשית הוא אפס, בעוד ש-$a_n = p_n(0)$, כך שניתן היה לצפות שאפשר יהיה לוותר על a_n לחלוטין, ולקבל כי q_n קירוב מספיק טוב ל-f. זה אכן המקרה!

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|q_n - f\|_{\infty} = \lim_{n\to\infty} \|p_n - f - a_n + f(0)\|_{\infty} \le \lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_{\infty} + |a_n - f(0)| \\ \le \lim_{n\to\infty} 2\|p_n - f\|_{\infty} = 0.\end{aligned}$$

כלומר, f היא גבול של פונקציות מ-$\mathrm{alg}(x)$ ולכן שייכת לסגור, כלומר $\mathcal{A} \subset \overline{\mathrm{alg}(x)}$.

1.4 תרגיל - אפיון פונקציות על ידי אינטגרלים

1. היעזרו בפירוק $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, כדי להוכיח שבאלגברה $C([-1,1])$, מתקיים:

$$\overline{\mathrm{alg}\left\{1, x^2\right\}} = \left\{f \in C([-1,1]) | f(x) = f(-x),\ \forall x \in [-1,1]\right\}.$$

2. תהא $f \in C([-1,1])$ פונקציה המקיימת $\int_{-1}^{1} f(x)x^n \,\mathrm{d}x = 0$ לכל $n = 0, 2, 4, \ldots$. הוכיחו כי f אי זוגית.

פתרון.

1. התרגיל דומה למדי לתרגיל הקודם שפתרנו והטכניקה דומה. משיקולים זהים לחלוטין לתרגיל הקודם, ברור שכל איבר באלגברה השמאלית הוא פונקציה רציפה וזוגית ולכן:

$$\overline{\mathrm{alg}\left\{1, x^2\right\}} \subset \left\{f \in C([-1,1]) | f(x) = f(-x)\, \forall x \in [-1,1]\right\}.$$

נותר לנו רק להוכיח את ההכלה ההפוכה. נניח אם כן, כי f פונקציה רציפה וזוגית. ממשפט 1.9, ידוע שקיימת סדרת פולינומים $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ שעבורם:

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - f\|_\infty = 0.$$

בעזרת הפירוק של פונקציה לחלק זוגי וחלק אי זוגי, נוכל להסיק כי מתקיים גם:

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_n(x)+p_n(-x)}{2} - f(x)\right| &= \left|\frac{p_n(x)+p_n(-x)}{2} - \frac{f(x)+f(-x)}{2}\right| \\ &\le \frac{1}{2}\left|p_n(x)-f(x)\right| + \frac{1}{2}\left|p_n(-x)+f(-x)\right| \le \|p_n - f\|_\infty .\end{aligned}$$

אך שימו לב כי הפולינום באגף השמאלי הוא בדיוק החלק הזוגי של p_n! נסמן $q_n(x) = \frac{p_n(x)+p_n(-x)}{2}$ ונקבל כי:

$$\|q_n - f\|_\infty \le \|p_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ולכן f היא גבול של פולינומים בחזקות זוגיות בלבד, ולכן גבול של פונקציות מהאלגברה שלנו, ונוכל להסיק את הדרוש.

2. נסמן $f(x) = f_p(x) + f_o(x)$, כאשר f_p, f_o הם החלקים הזוגיים והאי זוגיים של f מהפירוק שניתן בשאלה. על פי הנתון, לכל n זוגי:

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^n \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f_p(x)x^n \,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f_o(x)x^n \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f_p(x) \,\mathrm{d}x = 0,$$

היות והאינטגרל של החלק האי זוגי מתאפס כמכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי זוגית. היות ו-f_p פונקציה זוגית, ולכן גם $\bar{f}_p$, אפשר לכתוב אותה כגבול של פולינומים בחזקות זוגיות, כמסקנה מהסעיף הקודם. לכן:

$$\int_{-1}^{1} |f_p(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f_p(x)\bar{f}_p(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_p(x)p_n(x) \,\mathrm{d}x = 0.$$

שימו לב שהמעבר השני נובע מהעובדה שסדרת הפולינומים מתכנסת במידה שווה ולכן ניתן להחליף את הסדר בין האינטגרל לבין הגבול, ושוויון האחרון נובע מהנתון שלכל חזקה זוגית (ולכן גם לפולינום זוגי) האינטגרל של f_p כנגד אותו פולינום מתאפס. לסיכום, היות ו-f_p פונקציה רציפה, והאינטגרל של $|f_p|^2$ מתאפס, נסיק כי $f_p = 0$ ולכן:

$$f = f_o,$$

כלומר, הפונקציה f אי זוגית.

הערה להמשך. שימו לב שבתרגיל הזה, נעזרנו באינטגרציה כנגד פונקציה נתונה כלשהי. למעשה, בדיקה מהירה תראה שהפונקציה $f \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)x^n \,\mathrm{d}x$ היא למעשה פונקציונל ליניארי (אותו אחד מהקורסים באלגברה). קיבלנו בתרגיל זה הצצה לכך שפונקציונלים מחזיקים מידע מסויים על הוקטורים שחיים במרחב שלנו, וכי אפשר לחקור תכונות מסויימות של

וקטורים, על ידי מדידת ערכים של פונקציונלים מסויימים בוקטורים אלה. לאחר שנצבור את השפה והכלים הנכונים לדון בגרסאות האינסוף ממדיות, נשוב לסוגיה זו.

1.5 תרגיל - הצצה למרחבי סובולב

יהא $\mathcal{G}$ מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[a,b]$, ביחד עם המכפלה:

$$\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b f'(x)\bar{g}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. הוכיחו כי מדובר במרחב מכפלה פנימית.
2. הוכיחו כי לכל $-1 \le a < b \le 1$, הפונקציה $I_{a,b}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ רציפה ביחס לנורמה.
3. הראו כי המרחב אינו שלם.

פתרון.

1. ראשית, ברור כי המכפלה הנ"ל ליניארית ברכיב השמאלי ואנטי-ליניארית ברכיב הימני. היא גם אי שלילית, שהרי:

$$\langle f,f\rangle = \int\limits_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

לבסוף, אם $\langle f,f\rangle = 0$, נובע בפרט כי $\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$, ומכך ש-$f$ רציפה, נסיק כי $f\equiv 0$, כדרוש.

2. לכל $f,g\in\mathcal{G}$, מתקיים:

$$|I(f)-I(g)| = \left|\int\limits_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \sqrt{\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int\limits_a^b 1\,\mathrm{d}x} \le \sqrt{(b-a)}\,\|f-g\|\,.$$

כלומר, ההעתקה I רציפה, ואף מקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע ליפשיץ $\sqrt{b-a}$.

3. כדי להוכיח שהמרחב אינו שלם, יהיה עלינו למצוא סדרת קושי של פונקציות ביחס לנורמה, כך שלא קיים לה גבול במרחב. נתבונן בסדרה:

$$f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}\,,$$

שהיא סדרה של פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$ המקיימת:

$$f_n'(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|^{1-\frac{1}{n}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}\,.$$

נתחיל בלהוכיח כי הסדרה אכן סדרת קושי, ולאחר מכן ננסה להבין מדוע אין לה גבול במרחב. באשר להיות הסדרה סדרת קושי, נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|^2 &= 2\int_0^1 \left(x^{1+\frac{1}{n}} - x^{1+\frac{1}{m}}\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{|x|^{1-\frac{1}{n}}} - \frac{x}{|x|^{1-\frac{1}{m}}}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 x^{2+\frac{2}{n}} + x^{2+\frac{2}{m}} - 2x^{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \frac{x^2}{|x|^{2-\frac{2}{n}}} + \frac{x^2}{|x|^{2-\frac{2}{m}}} - \frac{2x^2}{|x|^{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

נשתמש שוב בזוגיות באגף הימני ונקבל:

$$= 2\left(\frac{x^{3+\frac{2}{n}}}{3+\frac{2}{n}} + \frac{x^{3+\frac{2}{m}}}{3+\frac{2}{m}} - 2\frac{x^{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\Bigg|_0^1\right) + 2\int_0^1 x^{\frac{2}{n}} + x^{\frac{2}{m}} - 2x^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3+\frac{2}{n}} + \frac{2}{3+\frac{2}{m}} - \frac{4}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} + \frac{2}{1+\frac{2}{n}} + \frac{2}{1+\frac{2}{m}} - \frac{4}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$$

בביטוי זה ניתן כבר לראות בבירור שכאשר $n, m \to \infty$, הביטוי אכן שואף לאפס כמבוקש. כלומר, מדובר בסדרת קושי, ואם נניח כי המרחב שלנו היה מרחב שלם, היה ניתן למצוא פונקציה גזירה ברציפות שעבורה $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת אליה בנורמה. על מנת להוכיח שלא קיימת פונקציה כזאת, נזהה תחילה שמועמדת לפונקציית הגבול היא הפונקציה $|x|$, שאינה גזירה בראשית (ולכן לא איבר במרחב). אבל איך מראים שלא יכולה להיות מועמדת אחרת?

אנחנו נשתמש בעובדה הבאה, היות ובסעיף הקודם הוכחנו שאינטגרציה היא פונקציה רציפה ביחס לנורמה, נקבל שלכל $-1 \le a < b \le 1$, מתקיים:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b |x|^{1+\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = \int_a^b |x|\,\mathrm{d}x.$$

המעבר האחרון, מוצדק מכך שהסדרה $|x|^{1+\frac{1}{n}}$ מתכנסת במידה שווה בקטע (זו עובדה שנשאיר כתרגיל עצמאי, אך היא לא קשה לבדיקה). מההנחה ש-f רציפה, נובע כי גם הפונקציה:

$$h(x) = f(x) - |x|\,,$$

ולכן הפונקציה:

$$H(x) = \int_{-1}^x h(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

היא פונקציה גזירה ועל פי המשפט היסודי מקיימת $H'(x) = h(x)$ בכל נקודה. אך היות ופונקציה זו שווה לאפס על פי השוויון שלעיל, יתקיים $f(x) = |x|$, בסתירה לכך ש-f לא רק רציפה, אלא גם גזירה ברציפות.

המסקנה היא, שהמרחב הזה הוא מרחב לא שלם, ועל פי משפט, יש לו השלמה.

שאלה למחשבה. במרחב ההשלמה, לסדרה שהגדרנו זה עתה קיים גבול. הגיוני לשער כי פונקציית הגבול תהיה $|x|$. יחד עם זאת, שימו לב שחישוב הנורמה של $|x|$ ב"מרחב ההשלמה" תתבצע על פי הגדרה כגבול הנורמות של $|x|^{1+\frac{1}{n}}$, הכולל גם אינטגרל על הפונקציה עצמה, אך גם אינטגרל על הנגזרת של פונקציות אלה. כלומר, במובן מסויים, נראה שכל פונקציה במרחב ההשלמה שלנו מגיעה עם "פונקציית נגזרת" מצורפת אליה, כאשר במקרה של פונקציה גזירה ברציפות, מדובר בנגזרת ה"רגילה" שאנחנו מכירים. על אף שבהמשך נוכל לתת תשובה לשאלה זו, נסו לחשוב כיצד ניתן לתאר את "הנגזרת" של הפונקציה $|x|$ כאיבר במרחב ההשלמה שלנו.

הערה נוספת. בתרגיל שפתרנו זה עתה, מצאנו דרך לאפיין פונקציות רציפות בעזרת אינטגרלים. כלומר, אם f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, הערכים:

$$\left\{\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\right\}_{a\leq c<d\leq b}$$

קובעים ביחידות את הפונקציה f. כלומר, אם f,g מזדהות על האינטגרלים בקטעים $[c,d]\subset[a,b]$, הן חייבות להיות שוות. ההפתעה, שנגלה בקרוב מאוד - היא שהנ"ל יהיה נכון גם לפונקציות לא רציפות ולמעשה גם לפונקציות ב-$L_2[a,b]$ (שכזכור, לא נחשבות באופן טכני כפונקציות אלא מחלקות שקילות של פונקציות). כלומר, כאשר נרצה לאפיין "מה זה אומר" שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$ נמצאת במרחב $L_2[0,1]$, הכוונה היא שיש איבר $f\in L_2[0,1]$, המקיים:

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^d \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}x,$$

לכל $0\leq c<d\leq 1$. כמובן שנצטרך עוד לדון על משמעות האינטגרל של פונקציה ב-$L_2[0,1]$, אך הדגש כאן הוא בעיקר על האופן שבו הפונקציונלים על המרחב מאפשרים לנו לתת אפיון חדש לוקטורים הנמצאים בו.

1.6 תרגיל - מרחב הילברט לא ספרבילי

יהא $\mathcal{G}$ המרחב הוקטורי של כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ שהן מהצורה:

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\mathbb{R}}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x},$$

כאשר הסכום שלעיל תמיד סופי (הווה אומר, $\hat{f}(\lambda)=0$ למעט בכמות סופית של ערכים). מעל מרחב זה, נגדיר את התבנית:

$$\langle f,g\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. הראו כי המרחב $\mathcal{G}$ ביחד עם התבנית שהגדרנו, הוא מרחב מכפלה פנימית.

2. הוכיחו כי המרחב לא שלם, וכי מרחב ההשלמה שלו אינו ספרבילי.

פתרון.

1. כדי להוכיח שאכן מקבלים תבנית שמתארת מכפלה פנימית, נחשב אותה במפורש. כלומר, לכל $f, g \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\right)\left(\sum_{\mu\in\mathbb{R}} \bar{\hat{g}}(\mu)e^{-i\mu x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \hat{f}(\lambda)\bar{\hat{g}}(\mu)e^{i(\lambda-\mu)x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

בשלב הזה נזהה כי ישנם שני מקרים אפשריים:

- אם $\lambda = \mu$ מתקבל האינטגרל $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \hat{f}(\lambda)\bar{\hat{g}}(\lambda)\,\mathrm{d}x = \hat{f}(\lambda)\bar{\hat{g}}(\lambda)$, וגם כאשר $T\to\infty$ הערך יישאר קבוע.
- אם $\lambda \neq \mu$, מתקבל האינטגרל:

$$\frac{1}{2T}\hat{f}(\lambda)\bar{\hat{g}}(\mu)\frac{e^{i(\lambda-\mu)T} - e^{-i(\lambda-\mu)T}}{i(\lambda-\mu)},$$

וכאשר $T\to\infty$, הערך שלעיל יתאפס.

לסיכום, גילינו שמתקיים:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\bar{\hat{g}}(\lambda),$$

שדומה מאוד למכפלה הפנימית הסטנדרטית. מכאן, קל לבדוק כי כל התנאים הרגילים של מכפלה פנימית מתקיימים, ונסיק את הדרוש.

2. כדי להוכיח שהמרחב אינו מרחב שלם, נתבונן בסדרה:

$$f_n(x) = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \hat{f}_n(\lambda)e^{i\lambda x},$$

כאשר:

$$\hat{f}_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \lambda = k,\ 1\le k\le n \\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

בצורה כזאת, אפשר לכתוב את סדרת הפונקציות שלנו בתור הסדרה:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}e^{ikx}.$$

נתחיל בלהוכיח שהסדרה שלנו היא אכן סדרת קושי, ולשם כך נשתמש בכך שהראינו בסעיף הקודם כי המכפלה הפנימית ניתנת לכתיבה בצורה נוחה באופן הבא:

$$\langle f,g\rangle = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\bar{\hat{g}}(\lambda),$$

ובפרט, לכל $n>m$:

$$\|f_n-f_m\|^2 = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} \left|\hat{f}_n(\lambda)-\hat{f}_m(\lambda)\right|^2 = \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

היות וידוע לנו כי טור המספרים $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ מתכנס, הוא מקיים את תנאי קושי לטורי מספרים, ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>m>N$ מתקיים:

$$\|f_n-f_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2} < \varepsilon,$$

ולכן $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי. נותר להראות כי לסדרה זו אין גבול במרחב, ולשם כך ננסה לחפש "אפיון" לאיברים ב-$\mathcal{G}$, שאיבר הגבול שלנו לא אמור לקיים. אם היה עלינו "לנחש" איך ייראה איבר הגבול, הוא כנראה יהיה האיבר:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}e^{ikx},$$

שכמובן אינו במרחב, משום שהוא מכיל אינסוף מקדמים שונים מאפס, בניגוד לאופן שבו המרחב שלנו מוגדר. אבל איך אפשר להוכיח שזה אכן חייב להיות ה"גבול", כשה"גבול" האינטואיטיבי הזה בכלל לא איבר במרחב?

לכל $\lambda\in\mathbb{R}$, נגדיר את הפונקציונל הליניארי:

$$\phi_\lambda(f) = \hat{f}(\lambda).$$

כלומר, פונקציונל המחזיר את המקדם המתאים לאינדקס λ. מהגדרת המרחב שלנו, לכל $f\in\mathcal{G}$, מתקיים $\phi_\lambda(f)=0$ למעט בכמות סופית של אינדקסים. בעזרת פונקציונלים אלו, נוכל להראות כי אם קיים לסדרה שלנו גבול, תנאי זה לא יתקיים (מה שיוביל לסתירה). כדי לעשות זאת, נתחיל בלהוכיח שהפונקציונלים הללו רציפים במרחב, ואכן:

$$|\phi_\lambda(f)-\phi_\lambda(g)| = \left|\hat{f}(\lambda)-\hat{g}(\lambda)\right| = \sqrt{\left|\hat{f}(\lambda)-\hat{g}(\lambda)\right|^2} \le \|f-g\|,$$

מה שאומר שהפונקציונל מקיים תנאי ליפשיץ במרחב, ולכן גם רציף. נניח בשלילה כי $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ הוא גבול שקיים במרחב שלנו לסדרה שהגדרנו. אזי:

$$\phi_k(f) = \lim_{n\to\infty}\phi_k(f_n) \overset{\substack{\hat{f}_n(k)=\frac{1}{k}\\ \forall n\ge k}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

כלומר, אם אכן קיים גבול במרחב, יש לו אינסוף מקדמים שונים מאפס, מה שכמובן לא אפשרי במרחב כפי שהגדרנו אותו.

השלב האחרון הוא להוכיח שהמרחב שלנו לא ספרבילי. זהו תרגיל קצר במרחבים טופולוגיים, שכן הקבוצה:

$$\left\{f_\lambda(x)=e^{i\lambda x}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\},$$

הוא אוסף לא בן מניה של פונקציות במרחב שלנו, המקיימות $\|f_\lambda-f_\mu\|=\sqrt{2}$. כלומר, אם E היא קבוצה צפופה במרחב, ניתן למצוא לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ איבר ב-E הנמצא בכדור $B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(f_\lambda)$. היות וכדורים אלו זרים (בגלל הנתון על המרחב), נסיק כי קבוצת האיברים הללו (שהיא תת קבוצה של E) לא יכולה להיות בת מניה. כלומר, כל קבוצה צפופה במרחב חייבת להיות לא בת מניה.

2

אורתוגונליות, הטלות ובסיסים

2.1 תזכורות מההרצאה

2.1.1 אורתוגונליות

הגדרה 2.1 (אורתוגונליות)**.** יהא $\mathcal{G}$ מרחב מכפלה פנימית. שני וקטורים $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ מכונים **אורתוגונלים** אם $\langle g_1, g_2 \rangle$ ומסמנים במקרה זה $g_1 \perp g_2$.

קבוצה $\{e_i\}_{i \in I}$ מכונה **אורתוגונלית** אם $e_i \perp e_j$ לכל $i \neq j$ והקבוצה מכונה **אורתונורמלית** אם $\|e_i\| = 1$ לכל $i \in I$. לעתים נשתמש גם במינוח **מערכת אורתונורמלית**.

טענה 2.2 (זהות פיתגורס)**.** יהא $\mathcal{G}$ מרחב מכפלה פנימית. אזי:

- לכל $f \perp g$, מתקיים $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.
- אם $\{e_i\}_{i=1}^n$ קבוצה אורתוגונלית סופית, אזי:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 .$$

דוגמה חשובה. המערכת $\left\{e^{2\pi in}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ היא מערכת אורתונורמלית ב-$C\left([0,1]\right)$ עם המכפלה הפנימית:

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

טענה 2.3 (זהות המקבילית)**.** יהא $\mathcal{G}$ מרחב מכפלה פנימית. אזי לכל f,g מתקיים:

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\|f\|^2+2\|g\|^2. \tag{2.1}$$

הערה. לא נדון בכך לעומק בקורס, אך למעשה ניתן להראות כי כל נורמה המקיימת את זהות המקבילית מושרית ממכפלה פנימית.

2.1.2 הטלת הקירוב הטוב ביותר

טענה 2.4 (קיום נורמה מינימלית)**.** תהא S קבוצה קמורה וסגורה במרחב הילברט $\mathcal{H}$. אזי קיים ב-S וקטור בעל נורמה מינימלית. יתרה מכך, וקטור זה הוא יחיד.

משפט 2.5 (הקירוב הטוב ביותר במרחב הילברט)**.** תהא S קבוצה קמורה וסגורה במרחב הילברט $\mathcal{H}$, ויהא $h\in\mathcal{H}$. אזי, קיים $g\in S$ יחיד, שעבורו:

$$\|g-h\|\leq\|f-h\|,\quad\forall f\in S. \tag{2.2}$$

האיבר $g\in S$ המקיים את הנ"ל מכונה **הקירוב הטוב ביותר** של h ב-S.

הגדרה 2.6 (הטלת הקירוב הטוב ביותר)**.** יהא $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ו-S קבוצה קמורה וסגורה ב-$\mathcal{H}$. נסמן ב-$P_S:\mathcal{H}\to S$ את ההעתקה שמתאימה לכל $h\in\mathcal{H}$ את הקירוב הטוב ביותר שלו ב-S. להעתקה זו נקרא (כמובן) **הטלת הקירוב הטוב ביותר** על S.

מסקנה חשובה. היות ותת-מרחב וקטורי הוא קבוצה קמורה, כל תת-מרחב סגור יקיים את תנאי משפט 2.5 ולכן ניתן למצוא קירוב טוב ביותר לכל איבר במרחב.

משפט 2.7 (אפיון שקול לקירוב הטוב ביותר)**.** יהא $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ו-S קבוצה קמורה וסגורה ב-$\mathcal{H}$. אזי לכל $h\in\mathcal{H}$, מתקיים כי $g=P_S(h)$ אם ורק אם:

$$\mathfrak{Re}\langle h-g,f-g\rangle\leq 0,\quad\forall f\in\mathcal{S}. \tag{2.3}$$

קירוב טוב ביותר בתת-מרחב. יהא $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ו-$\mathcal{M}$ תת-מרחב וקטורי סגור של $\mathcal{H}$. אזי לכל $h\in\mathcal{H},g\in\mathcal{M}$:

$$g=P_{\mathcal{M}}(h)\Longleftrightarrow h-g\perp m,\quad\forall m\in\mathcal{M}. \tag{2.4}$$

2.1.3 הטלות אורתוגונליות

הגדרה 2.8 (משלים אורתוגונלי)**.** יהא $\mathcal{G}$ מרחב מכפלה פנימית ותהא $S \subset \mathcal{G}$ תת-קבוצה. **המשלים האורתוגונלי** של S ב-$\mathcal{G}$ היא הקבוצה:

$$S^{\perp} = \{g \in \mathcal{G} | \langle s, g \rangle = 0, \, \forall s \in S\} \,. \tag{2.5}$$

הערה. לכל תת קבוצה S, $S^{\perp}$ הוא תת מרחב סגור ו-$S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

משפט 2.9 (פירוק אורתוגונלי)**.** יהא $\mathcal{M}$ תת-מרחב סגור במרחב הילברט $\mathcal{H}$. אזי, לכל $h \in \mathcal{H}$, קיים יחיד $m \in \mathcal{M}$ ו-$n \in \mathcal{M}^{\perp}$ יחיד שעבורם $h = n + m$.

סימון. את מסקנת המשפט נהוג לסמן גם ב-$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$, ואומרים ש-$\mathcal{H}$ הוא הסכום האורתוגונלי של $\mathcal{M}$ ו-$\mathcal{M}^{\perp}$.

כאשר מדובר בתתי-מרחבים סגורים, קיים קשר אדוק בין הטלת הקירוב הטוב ביותר לפירוק אורתוגונלי. יתרה מכך, גם הטלת הקירוב הטוב ביותר הופכת להעתקה "יפה", כמודגם באופן הבא:

משפט 2.10. תהא S קבוצה קמורה וסגורה במרחב הילברט $\mathcal{H}$. אזי הטלת הקירוב הטוב ביותר מקיימת:

- $P_S \circ P_S = P_S$ ו-$P_S(h) = h$ אם ורק אם $h \in S$.
- P_S העתקה ליניארית אם ורק אם S הוא תת-מרחב וקטורי.

הגדרה 2.11 (הטלה/הטלה אורתוגונלית)**.** העתקה ליניארית המקיימת $T \circ T = T$ מכונה **הטלה**. עבור S תת-מרחב סגור במרחב הילברט $\mathcal{H}$, הטלת הקירוב הטוב ביותר P_S מכונה גם **ההטלה האורתוגונלית** של $\mathcal{H}$ על S.

משפט 2.12. יהא $\mathcal{M}$ תת-מרחב של מרחב הילברט $\mathcal{H}$. אזי $\mathcal{M}$ סגור אם ורק אם $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$.

מסקנה. אם $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ תת-מרחב. אזי $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$.

טענה 2.13. יהא $\mathcal{M}$ תת-מרחב סוף ממדי של מרחב הילברט $\mathcal{H}$, ויהא $\{e_i\}_{i=1}^{N}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathcal{M}$. אזי, לכל $h \in \mathcal{H}$:

$$P_{\mathcal{M}} h = \sum_{i=1}^{n} \langle h, e_i \rangle e_i.$$

2.1.4 בסיסים אורתוגונליים

הגדרה 2.14 (מערכת אורתונורמלית שלמה)**.** תהא $E = \{e_i\}_{i \in I}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית $\mathcal{G}$. אומרים כי E **מערכת אורתונורמלית שלמה** אם $E^{\perp} = \{0\}$.

טענה 2.15. בכל מרחב מכפלה פנימית קיימת מערכת אורתונורמלית שלמה.

בחלק זה, ננסה להגדיר בצורה עקבית וטובה בסיס למרחב הילברט. כפי שנראה בתרגילים שלעיל, בסיסים אורתונורמליים הם אכן הבסיסים ה"טבעיים" למרחבים מעין אלו.

הגדרה 2.16 (התכנסות טורים במרחב מכפלה פנימית)**.** יהא $\mathcal{G}$ מרחב מכפלה פנימית, ו-I קבוצה אינדקסים כלשהי. נניח כי $\{v_i\}_{i\in I}$ אוסף איברים במרחב ויהא $g \in \mathcal{G}$. אומרים כי הטור $\sum_{i\in I} v_i$ **מתכנס** ל-g וכותבים $\sum_{i\in I} v_i = g$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה סופית $F_0 \subset I$ כך שלכל קבוצה סופית אחרת $F \subset I$, מתקיים:

$$F_0 \subset F \Longrightarrow \left\| \sum_{i\in F} v_i - g \right\| < \varepsilon.$$

הערה. ניתן להראות כי מהגדרה זו, תנאי הכרחי לכך שטור יתכנס הוא שתהיה $J \subset I$ בת מניה, כך שלכל $i \in I \setminus J$ מתקיים $v_i = 0$. כלומר, באופן אפקטיבי טור מתכנס חייב להיות בן מניה. בנוסף, ניתן להשתכנע כי אין תלות בסדר הסכימה במקרה של התכנסות.

טענה 2.17 (אי שוויון בסל)**.** תהא $\{e_i\}_{i\in I}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית $\mathcal{G}$. אזי, לכל $g \in \mathcal{G}$:

$$\sum_{i\in I} |\langle g, e_i\rangle|^2 \leq \|g\|^2 . \tag{2.6}$$

הגדרה 2.18 (מקדמי פוריה מוכללים)**.** תהא $\{e_i\}_{i\in I}$ מערכת אורתונורמלית במרחב מכפלה פנימית $\mathcal{G}$. אזי, הסקלים $\langle g, e_i\rangle$ מכונים **מקדמי פוריה המוכללים** של g ביחס ל-$\{e_i\}_{i\in I}$.

טענה 2.19. תהא $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית שלמה במרחב מכפלה פנימית $\mathcal{G}$. אזי, לכל $g \in \mathcal{G}$, הבאים שקולים:

- $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle g, e_n\rangle|^2 = \|g\|^2$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \langle g, e_n\rangle e_n = g$.
- לכל $\varepsilon > 0$ קיים N וסקלרים $a_1, \ldots, a_N$ שעבורם:

$$\left\| g - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| < \varepsilon.$$

עתה נעבור לדון במקרה של מרחבי הילברט. כאשר מוסיפים את תנאי השלמות, מערכות אורתונורמליות הופכות לכלי הרבה יותר שימושי ומיוחד.

טענה 2.20. תהא $\{e_i\}_{i\in I}$ מערכת אורתונורמלית במרחב הילברט $\mathcal{H}$, ויהיו $\{a_i\}_{i\in I}$ מספרים מרוכבים כלשהם. הסדרה $\sum_{i\in I} a_i e_i$ מתכנסת ל-$\mathcal{H}$ אם ורק אם $\sum_{i\in I} |a_i|^2 < \infty$.

עתה, אנחנו מוכנים למשפט שמראה שמערכת אורתונורמלית שלמה היא הדרך הטבעית ביותר להגדיר בסיס למרחב הילברט.

משפט 2.21 (מערכת אורתונורמלית שלמה היא בסיס)**.** תהא $\{e_i\}_{i\in I}$ מערכת אורתונורמלית שלמה במרחב הילברט $\mathcal{H}$. אזי, לכל $h \in \mathcal{H}$:

$$h = \sum_{i\in I} \langle h, e_i\rangle e_i, \tag{2.7}$$

וגם:

$$\|h\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle h, e_i\rangle|^2 . \tag{2.8}$$

הזהות האחרונה מכונה גם בשם **זהות פרסבל**.

בעקבות המשפט, נכנה מערכת אורתונורמלית שלמה במרחב הילברט בשם **בסיס אורתונורמלי**. יחד עם זאת, מערכות אורתונורמליות (לאו דווקא במרחב הילברט) שעדיין מקיימות את משוואות (2.7) ו-(2.8) מכונות גם בשם **מערכות אורתונורמליות סגורות**.

זהות פרסבל המוכללת. תהא $\{e_i\}_{i\in I}$ מערכת אורתונורמלית במרחב הילברט $\mathcal{H}$. אזי, לכל $h, g \in \mathcal{H}$:

$$\langle g, h\rangle = \sum_{i\in I} \langle g, e_i\rangle \overline{\langle h, e_i\rangle}. \tag{2.9}$$

משפט 2.22 (בסיס אורתורנומלי לתת-מרחב)**.** יהא $\mathcal{M}$ תת-מרחב סגור של מרחב הילברט $\mathcal{H}$, ו-$\{e_i\}_{i\in I}$ בסיס אורתונורמלי ל-$\mathcal{M}$. אזי:

$$P_{\mathcal{M}} h = \sum_{i\in I} \langle h, e_i\rangle e_i. \tag{2.10}$$

2.2 תרגיל - כשלון קיום הקירוב הטוב ביותר

תהא $\{x^m\}_{m=1}^{\infty} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ סדרה המוגדרת באופן הבא:

$$x^m = (x_1^m, x_2^m, \ldots), \quad x_n^m = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m}, & m = n \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} .$$

הוכיחו כי הסדרה מהווה קבוצה סגורה , אך הראו כי לא קיים בה קירוב טוב ביותר לראשית.

פתרון. הקבוצה שלנו היא קבוצה מאוד מיוחדת, במובן הבא - לכל $m_1 \neq m_2$, מתקיים:

$$\|x^{m_1} - x^{m_2}\| \geq \sqrt{2}.$$

לכן, כל סדרת קושי בקבוצה שלנו חייבת להתייצב (כלומר, להיות קבועה החל מנקודה מסויימת). בפרט, כל סדרה בקבוצה שמתכנסת ב-$\ell^2(\mathbb{N})$ חייבת להיות סדרה קבועה, ולכן הגבול שלה הוא אחד מאיברי הקבוצה.

כדי להוכיח שלקבוצה אין קירוב טוב ביותר לראשית, נשים לב שלכל x^m מתקיים:

$$\|x^m - 0\| = \|x^m\| = 1 + \frac{1}{m},$$

ולכן:

$$d\left(0,\{x^m\}_{m=1}^{\infty}\right)=\inf_{m\in\mathbb{N}}\|x^m-0\|=1,$$

אך 1 כמובן לא מתקבל כמרחק, ולכן הקירוב הטוב ביותר של הראשית לא קיים בקבוצה זאת. הבעיה היא כמובן שמדובר בקבוצה סגורה במרחב הילברט, אך היא אינה קמורה.

2.3 תרגיל - הטלת הקירוב הטוב ביותר

בתוך המרחב $\ell^2(\mathbb{N})$, מצאו במפורש את הטלת הקירוב הטוב ביותר על הקבוצה:

$$S=\{x=(x_1,x_2,\dots)|x_n\in[0,\infty)\,,\,\forall n\in\mathbb{N}\}\,.$$

פתרון. יהא $y=(y_1,y_2,\dots)\in\ell^2(\mathbb{N})$ וקטור כלשהו במרחב, וננסה לזהות את הקירוב הטוב ביותר שלו ב-S. הקירוב כמובן קיים היות ו-S בבירור קבוצה סגורה וקמורה, ו-$\ell^2(\mathbb{N})$ הוא מרחב הילברט. נשתמש במשפט 2.7 ובנוסחה (2.3). כלומר, נסמן:

$$P_S(y)=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\dots),$$

כך ש-$\tilde{y}_i\in[0,\infty)$ לכל $i\in\mathbb{N}$ ונדרוש כי לכל $x\in S$, יתקיים:

$$\mathfrak{Re}\langle y-P_S(y),x-P_S(y)\rangle\leq 0,\quad\forall x\in S.$$

בצורה מפורשת, נקבל כי:

$$\mathfrak{Re}\langle y-P_S(y),x-P_S(y)\rangle=\mathfrak{Re}\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-\tilde{y}_i)\overline{x_i-\tilde{y}_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mathfrak{Re}(y_i)-\tilde{y}_i\right)(x_i-\tilde{y}_i)\,,$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בכך ש-$\tilde{y}_i,x_i$ מספרים ממשיים. היות וכל שידוע לנו הוא ש-$x_i\geq 0$, נוכל לדאוג שהסכום יהיה אי שלילי באופן הבא:

- אם $\mathfrak{Re}(y_i)\geq 0$, נבחר $\tilde{y}_i=\mathfrak{Re}(y_i)$, והאיבר הרלוונטי בסכום יתאפס.
- אם $\mathfrak{Re}(y_i)<0$, נבחר $\tilde{y}_i=0$. במקרה כזה, נקבל כי המכפלה הרלוונטית בסכום עדיין תהיה אי חיובית.

הבחירה הנ"ל אכן מגדירה וקטור ב-S (ודאו זאת), ומיחידות הקירוב הטוב ביותר, נסיק כי:

$$P_S(y)=\left(\max\{0,\mathfrak{Re}(y_1)\},\max\{0,\mathfrak{Re}(y_2)\},\dots\right).$$

2.4 תרגיל - משלים אורתוגונלי

1. עבור $f\in L^2\left[0,1\right]$ וקטע $[a,b]\subset[0,1]$, נגדיר:

$$f\cdot\chi_{[a,b]}:=\lim_{n\to\infty}f_n\cdot\chi_{[a,b]},$$

כאשר $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת רציפות למקוטעין המתכנסת ל-f. הוכיחו כי המרחב:

$$\mathcal{M}=\left\{f\in L^2\left[0,1\right]\middle|f\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}=0\right\}\subset L^2\left[0,1\right]$$

הוא תת-מרחב סגור, וחשבו את $\mathcal{M}^{\perp}$.

2. נסמן ב-$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}_{\text{finite}}$ את מרחב כל הסדרות $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ עבורן קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$, מתקיים $x_n=0$. הוכיחו שהמרחב:

$$\mathcal{N}=\left\{x\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}_{\text{finite}}\middle|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{k}=0\right\}$$

הוא תת מרחב סגור של $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}_{\text{finite}}$, וחשבו את $V^{\perp}$.

פתרון.

1. תחילה, נראה כי ההגדרה שלנו ל-$f\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$ היא הגדרה טובה, ולאחר מכן נסביר מה היא אומרת כאשר הביטוי שמתקבל שווה לאפס (כאיבר במרחב ההילברט שלנו). תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות רציפות למקוטעין המתכנסת ל-f בנורמה של המרחב. הסדרה $\left\{f_n\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של רציפות למקוטעין שהיא למעשה גם סדרת קושי ב-$L^2\left[0,1\right]$:

$$\left\|f_n\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}-f_m\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\right\|^2=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left|f_n(x)-f_m(x)\right|^2\,\mathrm{d}x\leq\left\|f_n-f_m\right\|^2\xrightarrow{n,m\to\infty}0,$$

ולכן, לסדרה זו קיים גבול במרחב $L^2\left[0,1\right]$, היות והוא מרחב שלם. לפונקציית הגבול הזו, נקרא בשם $f\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$. שימו לב שכאשר f פונקציה רציפה, הפונקציה $f\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$ מקבלת את הצורה המוכרת המיוצגת על ידי פונקציה ששווה ל-f בקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ומתאפסת ביתר הקטע. בצורה כזאת אפשר לחשוב על הפונקציה $f\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$ (גם כאשר f אינה רציפה/רציפה למקוטעין), כפונקציה ה"מזדהה" עם f בקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ומתאפסת ביתר הקטע.

אי לכך, האמירה $f\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}=0$ אומרת למעשה שהצמצום של f לקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ הוא פונקציית האפס, ואפשר לחשוב על כך בתור האמירה "f היא פונקציה שמתאפסת בקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$".

לאלו שלמדו את הקורס בפונקציות ממשיות, הנ"ל למעשה שקול לכך ש-f מתאפסת כמעט בכל מקום בקטע.

השלב הבא הוא להבין מדוע המרחב $\mathcal{M}$ הוא תת-מרחב סגור.

- תת-מרחב וקטורי - ברור כי פונקציית האפס נמצאת במרחב. כמו כן, אם $f,g\in\mathcal{M}$, ו-$\alpha\in\mathbb{C}$, נוכל לבחור סדרות $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסות ל-f,g בהתאמה, ולקבל כי הסדרה $\{\alpha f_n+g_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-

$\alpha f+g$. אך מכאן נובע כי:

$$\begin{aligned}(\alpha f+g)\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} &= \lim_{n\to\infty}\left(\alpha f_n+g_n\right)\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} = \lim_{n\to\infty}\alpha f_n\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}+g_n\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\\ &= \alpha f\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}+g\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}=0.\end{aligned}$$

- כדי להוכיח ש-$\mathcal{M}$ תת-מרחב סגור, נתבונן בהעתקה:

$$T:L^2\left[0,1\right]\to L^2\left[0,1\right], T\left(f\right)=f\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]},$$

ונראה שהיא העתקה רציפה. בצורה כזו, נקבל כי $\mathcal{M}=T^{-1}\left(\{0\}\right)$, ולכן מדובר בקבוצה סגורה. ואכן, לכל $f,g\in L^2\left[0,1\right]$:

$$\begin{aligned}\left\|T(f)-T(g)\right\| &= \left\|\lim_{n\to\infty}f_n\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}-\lim_{n\to\infty}g_n\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\right\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\|f_n\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}-g_n\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\right\|\leq\lim_{n\to\infty}\left\|f_n-g_n\right\|=\left\|f-g\right\|,\end{aligned}$$

עבור סדרות $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסות ל-f, g בהתאמה. שימו לב שלמעשה הוכחנו כי T רציפה ולמעשה ליפשיצית, ולכן תת-המרחב אכן סגור, כדרוש.

שימו לב שבהמשך ננצל שוב את העובדה שכל פונקציה במרחב היא גבול של רציפות, ונניח מעתה כי אין צורך להדגיש זאת בכל פעם מחדש. לאחר שסיימנו להוכיח כי $\mathcal{M}$ תת-מרחב סגור, ננסה לחפש את המרחב הניצב שלו. לשם כך, נשתמש באינטואיציה לפיה המרחב הניצב לפונקציות שמתאפסות בקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, יהיה המרחב של הפונקציות המתאפסות בקטע $\left[\frac{1}{2},1\right]$. כלומר, ננסה להוכיח כי:

$$\mathcal{M}^{\perp}=\left\{g\in L^2\left[0,1\right]\middle|g\cdot\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}=0\right\}.$$

- בכיוון הראשון, נניח כי $g\cdot\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}=0$, ותהא $f\in\mathcal{M}$, כלומר $f\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}=0$. אזי:

$$\langle f,g\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle f_n,g_n\rangle=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\bar{g}_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

כאן, ננצל את העובדה כי האינטגרל הימני מורכב מפונקציות רציפות/רציפות למקוטעין, ולכן ניתן להשתמש בכל התכונות הסטנדרטיות של האינטגרל המסויים. כלומר:

$$\begin{aligned}&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)\bar{g}_n(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 f_n(x)\bar{g}_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left\langle f_n\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]},g_n\right\rangle+\left\langle f_n,g_n\cdot\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}\right\rangle\\ &=\left\langle f\cdot\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]},g\right\rangle+\left\langle f,g\cdot\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}\right\rangle=0.\end{aligned}$$

לכן, $g \in \mathcal{M}^\perp$.

- נניח עתה כי $g \in \mathcal{M}^\perp$. הפונקציה $g \cdot \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}$ שייכת באופן טריוויאלי ל-$\mathcal{M}$ (נסו להסביר מדוע, כתרגיל), ולכן:

$$0 = \left\langle g, g \cdot \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]} \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle g_n, g_n \cdot \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]} \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} g_n(x)\bar{g}_n(x)\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]} \,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{1} \left|g_n(x) \cdot \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}\right|^2 \,\mathrm{d}x = \left\|g \cdot \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]}\right\|^2.$$

כלומר, $g \cdot \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]} = 0$, כפי שרצינו להוכיח.

הערה. המפתח להבנת התרגיל היה לזהות את הדרך שבה ניתן להכליל מונחים מעולם הפונקציות הרציפות למרחב ההשלמה. בתרגיל זה ראינו שניתן להכליל מונחים כגון "התאפסות בקטע" ואף תכונות רבות של האינטגרל המסויים, בתנאי שאלו "רציפים" במובן המתאים במרחב שלנו. על אף שחשוב לזכור כי המרחב $L^2\left[0,1\right]$ הוא מרחב ידוע ומוכר מהעולם של תורת המידה, הטכניקות שאנחנו בונים כאן מאפשרות התבוננות שונה, ולעתים אף יותר יעילה, בפתרון בעיות במרחבים אלו.

2. ראשית, השוויון שמופיע ב-$\mathcal{N}$ בוודאי נשמר תחת קומבינציות ליניאריות ולכן מדובר בתת מרחב. כדי להוכיח שהוא תת מרחב סגור, מספיק לנו להראות שוב שהפונקציה באגף הימני היא פונקציה רציפה. ואכן, אם נסמן:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k},$$

נקבל כי:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k - y_k}{k}\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \left\|x - y\right\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left\|x - y\right\|.$$

שימו לב שאי השוויון שהשתמשנו בו הוא לא אחר מאשר אי שוויון קושי שוורץ המופיע במשוואה (1.1) ביחד למכפלה הפנימית של $\ell^2(\mathbb{N})$. כלומר, φ רציף ולכן $\mathcal{N}$ הוא המקור של היחידון אפס, ולכן קבוצה סגורה.

נעבור לחישוב המשלים הניצב, ולשם כך ננסה לזהות אילו איברים נמצאים ב-$\mathcal{N}$. האיברים הפשוטים ביותר שנמצאים במרחב הם:

$$\left(\frac{1}{2}, -1, 0, \dots\right), \quad \left(0, \frac{2}{3}, -1, 0, \dots\right),$$

ובאופן כללי, הסדרות x^n שבהן:

$$x_m^n = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & m = n, \\ -1, & m = n+1 \end{cases}.$$

לכן, אם $y=(y_1,y_2,\dots)$ הוא איבר ב-$V^\perp$, עליו להיות מאונך לכל אחד מהאיברים הללו שמצאנו. כלומר:

$$\langle y,x^1\rangle=\frac{y_1}{2}-y_2=0\Longrightarrow y_2=\frac{y_1}{2}.$$

$$\langle y,x^2\rangle=\frac{2y_2}{3}-y_3=0\Longrightarrow y_3=\frac{2y_2}{3}=\frac{y_1}{3},$$

ובאופן דומה נקבל לכל n כי $y_n=\frac{y_1}{n}$. מכאן, שאם $y_1\neq 0$, נקבל וקטור שאינו שייך ל-$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}_{\text{finite}}$, ולכן האפשרות היחידה היא $y_1=0$ שגורר $y=0$. ולכן:

$$\mathcal{N}^\perp=\{0\}\,.$$

הערה חשובה. העובדה שהמרחב שלנו אינו שלם שיחקה כאן תפקיד מכריע. שהרי, ידוע לנו כי במרחבי הילברט, אם $\mathcal{N}$ תת מרחב סגור, מתקיים $\mathcal{N}^{\perp\perp}=\mathcal{N}=\{0\}^\perp=\mathcal{H}$, אך במקרה שלנו, $\mathcal{N}$ בוודאי אינו כל המרחב. הוא אינו מכיל, למשל, את הוקטור $e_1=(1,0,0,\dots)$. אם היינו חושבים על V כתת מרחב סגור של $\ell^2(\mathbb{N})$ למשל, היינו מקבלים כי (בדקו זאת):

$$V^\perp=\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)\right\},$$

שהוא אכן תת מרחב משלים לא טריוויאלי ל-V.

2.5 תרגיל - פולינומי לז'נדר

היות ו-$\operatorname{span}\{1,x,x^2,x^3,\dots\}$ צפוף ב-$L^2[-1,1]$, הפעלת תהליך גרם שמידט על קבוצה זו תניב בסיס אורתונורמלי של פולינומים למרחב, המכונים **פולינומי לז'נדר המנורמלים**.

1. חשבו את ארבעת הפולינומים הראשונים.

2. הוכיחו כי לכל $n\geq 1$, מתקיימת נוסחת רודריגז:

$$u_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\,\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}^n}(x^2-1)^n,$$

כאשר $u_n(x)$ הוא פולינום לז'נדר ה-n-י.

פתרון.

1. הפולינום הראשון, $u_0(x)$, יהיה הנרמול של הפונקציה 1. כלומר:

$$\|1\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}1^2\,\mathrm{d}x}=\sqrt{2}\Longrightarrow u_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

לאחר מכאן, הפולינום השני יתקבל מהפונקציה x, ממנה נסיר את ההטלה על u_0, ואז ננרמל:

$$x - \langle x, u_0\rangle u_0 = x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x = x,$$

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Longrightarrow u_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

נמשיך בתהליך עבור הפולינום השלישי והרביעי:

$$x^2 - \langle x^2, u_1\rangle u_1 - \langle x^2, u_0\rangle = x^2 - \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$\left\|x^2 - \frac{1}{3}\right\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{8}{45}},$$

ולכן:

$$u_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3x^2 - 1\right).$$

לבסוף (נזהה כבר כי פולינומים זוגיים אורתוגונליים לפולינומים אי-זוגיים, ונחסוך חלק מהעבודה):

$$x^3 - \langle x^3, u_2\rangle u_2 - \langle x^3, u_1\rangle u_1 - \langle x^3, u_0\rangle u_0 = x^3 - \frac{3}{2}x\int_{-1}^{1} x^4 \,\mathrm{d}x = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$\left\|x^3 - \frac{3}{5}x\right\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2 \,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{8}{175}},$$

ולכן:

$$u_3(x) = \sqrt{8}7\left(5x^3 - 3x\right).$$

כמובן שניתן להמשיך בדרך זו כרצוננו, אם כי ניכר לנו שזמן החישוב הולך וגדל ככל שמתקדמים בתהליך.

2. מרביתו של סעיף יוקדש להוכחה שהנוסחה הנתונה אכן מספקת מערכת אורתונורמלית של פולינומים ממעלה n לכל $n \in \mathbb{N}$. אך למעשה, אנחנו נטען כי אלו בדיוק הפולינומים שמתקבלים מתהליך גרם שמידט על הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים. כדי לעשות זאת, נסמן ב-$\mathcal{M}_n$ את תת המרחב (הסגור, כי הוא סוף ממדי) של הפולינומים ממעלה n ב-$L^2\left[-1,1\right]$. בהנתן שמצאנו את $u_0, \ldots, u_{n-1}$, המרחב $\mathcal{M}_{n-1}$ הוא תת-מרחב סגור של $\mathcal{M}_n$ ולכן יש לו משלים אורתוגונלי, שהוא תת-מרחב חד-ממדי הנפרש על ידי פולינום ממעלה n כלשהו.

היות ו-u_n שייך למרחב זה (שהרי הוא מאונך לכל הפולינומים ממעלה נמוכה יותר), נסיק שכל פולינום ממעלה n המאונך לפולינומים ממעלה נמוכה יותר, חייב להיות כפולה בסקלר של u_n. אם נוסיף את הדרישה ש-u_n יהיה מנורמל, כך שהמקדם המוביל שלו יהיה מספר חיובי ממשי - הוא ייקבע ביחידות.

אנחנו נראה כי u_n הנתונים על פי נוסחת רודריגז אכן מקיימים את כל התנאים הללו, ובכך נסיק את הדרוש. ראשית, נוכיח אורתוגונליות, בכך שנבחר $n > m$ כלשהו, ונחשב:

$$\begin{aligned}\langle u_n, u_m\rangle &= c_{nm}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}^n}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}^m}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x\\ &= c_{nm}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}^{n-1}}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}^m}(x^2-1)^m\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}^{n-1}}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{m+1}x}{\mathrm{d}^{m+1}}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x\right]\\ &= -c_{nm}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}^{n-1}}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{m+1}x}{\mathrm{d}^{m+1}}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

שימו לב שבמעבר השלישי, השתמשנו בעובדה הבאה - לפונקציה $(x^2-1)^n$ מתקיים כי $x = \pm 1$ שורשים מסדר n, ולכן, גם לאחר גזירה שלהם $n-1$ פעמים, הפונקציה עדיין תתאפס בנקודות אלה. מכאן נובע, שנוכל להמשיך בתהליך $m+1$ פעמים, ולקבל לבסוף:

$$\langle u_n, u_m\rangle = (-1)^{m+1}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}x}{\mathrm{d}^{n-m-1}}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{2m+1}x}{\mathrm{d}^{2m+1}}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x.c_{n,m}$$

עתה, נוכל לזהות כי היות והפולינום $(x^2-1)^m$ הוא פולינום ממעלה $2m$, הנגזרת ה-$2m+1$ שלו תתאפס, ונקבל שהאינטגרל אכן מתאפס כדרוש. כמו כן, קל לוודא כי u_n הינו פולינום עם מקדם מוביל חיובי וממעלה n בדיוק, ולכן

נותר רק להוכיח כי הוא מנורמל.

$$\begin{aligned}
\langle u_n, u_n\rangle &= \frac{2n+1}{2}\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}^n}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}^n}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^n\,\frac{2n+1}{2}\frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\frac{\mathrm{d}^{2n}x}{\mathrm{d}^{2n}}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^n\,\frac{2n+1}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x-1)^n\,(x+1)^n\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^n\,\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}(x+1)^n\bigg|_{-1}^{1}-\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(x-1)^{n+1}(x+1)^{n-1}\,\mathrm{d}x\right] \\
&= (-1)^{n+1}\,\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\,(n!)^2}\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(x-1)^{n+1}\,(x+1)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{2n}\,\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\,(n!)^2}\frac{n!}{(n+1)\ldots(2n)}\int_{-1}^{1}(x-1)^{2n}\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{2n+2}\,\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\frac{n!}{(n+1)\ldots(2n+1)}2^{2n+1} = 1.
\end{aligned}$$

בשוויון השלישי, השתמשנו בכך שהפולינום $(x^2-1)^n$ הוא מהצורה $x^{2n}+\ldots$ ולכן לאחר גזירה $2n$ פעמים, כל שיוותר הוא הקבוע $(2n)!$. לאחר מכן, ביצענו אינטגרציה בחלקים n פעמים, כשבכל פעם ביצענו אינטגרציה לגורם השמאלי ואז גזרנו את הגורם הימני. לסיכום, הגורם אכן מנורמל, ונסיק שאלו הם הפולינומים הדרושים.

תכונות של פולינומי לז'נדר. מנוסחת רודריגז אנחנו יכולים ללמוד לא מעט על פולינומי לז'נדר:

- הפולינום $(x^2-1)^n$ הוא פולינום המכיל מקדמים שונים מאפס לחזקות $2n, 2n-2, 2n-4, \ldots$ (מנוסחת הבינום למשל). לכן, לאחר גזירה של הפולינום n פעמים, נקבל פולינום זוגי אם n זוגי ופולינום אי זוגי אם n אי זוגי, ולהיפך.

- היות והנוסחה מופיעה בצורת נגזרות, קל יחסית לוודא כי u_n מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$\left(1-x^2\right)u_n''(x)-2xu_n'(x)+n(n+1)u_n(x)=0,$$

הקרויה גם **משוואת לז'נדר**, היות וניתן לכתוב אותה גם בצורה:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)u_n(x)=-(n(n+1))u_n(x).$$

התכונה הבאה לא נובעת מנוסחת רודריגז אבל היא חשובה לא פחות. לפולינומי לז'נדר יש פונקציה יוצרת. כלומר - עבור t קרובים מספיק לאפס, מתקיים:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{2n+1}}u_n(x)t^n.$$

פולינומי לז'נדר משחקים תפקיד חשוב מאוד בבעיות פיזיקליות, הנפוצה שבהן היא הנוסחה הבאה לפיתוח במולטיפולים. נניח כי $\|x\|' < \|x\|$, אזי, הפוטנציאל החשמלי בנקודה x בהשפעת מטען הנמצא ב-x', יהיה פרופורציונלי לגודל:

$$\frac{1}{\|x-x'\|}=\frac{1}{\sqrt{\|x\|^2+\|x'\|^2-2\|x\|\|x\|'\cos(\theta)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|x'\|^n}{\|x\|^{n+1}}\sqrt{\frac{2}{2n+1}}u_n(\cos(\theta)),$$

כאשר θ היא הזווית בין הוקטורים x, x'.

2.5.1 בסיסים אורתונורמליים לא אינטואיטיביים

בתרגיל הקודם, הראינו כי ביצוע של תהליך גרם-שמידט לקבוצה $\{1, x, x^2, \dots\}$ מספקת בסיס אורתונורמלי של פונקציות למרחב $L^2[-1,1]$. האינטואיציה כבר הייתה שם, אנחנו יודעים שהפולינומים מקרבים בנורמת הסופרמום (ולכן גם בנורמת L^2) את כל הפונקציות הרציפות, וכי הרציפות מקרבות את כל הפונקציות ב-L^2 (לפי הגדרה, כמרחב השלמה שלהן).

מתברר, שקירוב בנורמת L^2 הוא משהו ש"קל יותר" להשיג ומאפשר לעשות זאת גם עם משפחות מוזרות יותר של פונקציות. כדי להדגים זאת, נתבונן במרחב הנפרש על ידי:

$$\{x, x^2, x^3, \dots\}$$

בקטע $[-1,1]$. בתרגיל הקודם (שעשינו עבור הקטע $[0,1]$, אך ההוכחה תקפה גם לקטע הנ"ל) הוכחנו כי:

$$\overline{\operatorname{span}\{x^n\}_{n=1}^{\infty}}^{\|\cdot\|_\infty}=\{f\in C[-1,1]|f(0)=0\}.$$

בפרט, נובע שכל פונקציה רציפה המתאפסת בראשית, ניתנת לקירוב על ידי פולינום נטול מקדם חופשי **גם בנורמת** L^2. אך עתה, נוכל להראות משהו נוסף, והוא שכל פונקציה רציפה ניתנת לקירוב בנורמה זו על ידי פונקציה רציפה שמתאפסת בראשית. ואכן, אם $f\in C[-1,1]$ (לאו דווקא מתאפסת בראשית), נגדיר את סדרת הפונקציות:

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\left[-1,-\frac{1}{n}\right]\cup\left[\frac{1}{n},1\right] \\ nxf\left(\frac{1}{n}\right), & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right] \\ -nxf\left(-\frac{1}{n}\right), & x\in\left[-\frac{1}{n},0\right]\end{cases}.$$

זוהי סדרת פונקציות רציפות המתאפסות בראשית, ובדיקה מהירה (שנשאיר כתרגיל), מראה כי $\|f_n-f\|_{L^2}$ אכן שואפת לאפס. משני הוכחות הצפיפות שלעיל, אנחנו מקבלים כי:

$$\overline{\operatorname{span}\{x^n\}_{n=1}^{\infty}}^{\|\cdot\|_{L^2}}=L^2[-1,1],$$

תוצאה מפתיעה כלשעצמה. התוצאה המוזרה יותר, היא שגם לאחר ביצוע תהליך גרם שמידט לקבוצה זו, נקבל אוסף של פולינומים שבאף אחד מהם אין מקדם חופשי. כלומר, "הורדנו" (לכאורה) איבר מהקבוצה הפורשת שלנו, ועדיין קיבלנו בעזרת הקבוצה שנותרה בסיס אורתונורמלי למרחב.

תופעה זו תחזור ותופיע שוב, לאחר שנראה שבנוסף לבסיס פוריה למרחב $L^2\left[0,1\right]$ (המורכב מסינוסים וקוסינוסים), קיים **גם** בסיס המורכב רק מסינוסים, ו**גם** בסיס המורכב רק מקוסינוסים. למעשה, בזכות המשפט מההרצאה, מובטח לנו שאם $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצה אורתונורמלית כך שהמרחב הנפרש על ידה יהיה צפוף ב-$\mathcal{H}$, הקבוצה תהיה בהכרח בסיס אורתונורמלי.

כמובן שלמעט העובדה שתופעה זו אינה אינטואיטיבית, מתברר שבסיסים חלופיים מעין אלה חשובים ושימושיים מאוד, ומופיעים גם בהקשר של בעיות פיזיקליות, גיאומטריות, ועוד.

3
טורי פוריה

3.1 תזכורות מההרצאה

הגדרה 3.1 (מקדמי פוריה)**.** בהנתן $K=[0,1]^k\subset\mathbb{R}^k$, והמכפלה הפנימית:

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_K f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x,$$

מגדירים לכל $n\in\mathbb{Z}^k$ את **מקדם הפוריה** ה-n על ידי:

$$\hat{f}(n)=\langle f,e_n\rangle,$$

כאשר $e_n(x)=e^{2\pi in\cdot x}$.

מסקנה ישירה ממשפט הקירוב הטריגונומטרי היא שאוסף הפולינומים הטריגונומטריים ב-$C(K)$ צפוף בפונקציות הרציפות והמחזוריות (בנורמת הסופרמום ולכן גם בנורמת L^2). שילוב של עובדה זו ביחד עם העובדה ש-$\{e_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$ היא מערכת אורתונורמלית - גורר את התוצאה החשובה הבאה:

משפט 3.2 (התכנסות L^2 של טורי פוריה)**.** לכל $f\in L^2(K)$, טור הפוריה של f מתכנס ל-f בנורמת L^2. בפרט, $\{e_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$

היא מערכת אורתונורמלית שלמה ולכן:

1. $\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^k} \left|\hat{f}(n)\right|^2$.
2. $\lim_{N\to\infty} \left\|f - \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)e_n\right\| = 0$.

כמקרה פרטי, אנחו מקבלים את טורי הפוריה של $L^2\left[0,1\right]$. כלומר, כל $f \in L^2\left[0,1\right]$ מקיימת:

$$f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx},$$

כאשר $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x$. הסימון של L^2 נועד להדגיש שהשוויון הוא כאיברים ב-$L^2\left[0,1\right]$, ולאו דווקא כפונקציות במובן הנקודתי.

זיהוי שימושי. בהנתן פונקציה $f \in L^2\left[0,1\right]$, שניתן לכתוב בצורה $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi inx}$, נוכל להגדיר את ההעתקה $\mathcal{F} : L^2\left[0,1\right] \to \ell^2\left(\mathbb{Z}\right)$, על ידי:

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi inx}\right) = \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

ההעתקה $\mathcal{F}$ היא העתקה ליניארית ומשמרת מכפלה פנימית, כמסקנה ממשפט 3.2.

טורי פוריה בקטעים אחרים. באופן דומה לקטע $\left[0,1\right]$ או התיבה $K = \left[0,1\right]^k$, ניתן לדבר על טוריה פוריה בקטעים אחרים. לדוגמה, עבור $L^2\left[a,b\right]$, בסיס פוריה המתאים הוא הבסיס $\left\{e^{\frac{2\pi inx}{b-a}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, עם המכפלה הפנימית:

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

כל המשפטים שינוסחו לקטע $\left[0,1\right]$, נכונים באותה המידה גם לקטע $\left[a,b\right]$.

3.1.1 התכנסות נקודתית של טורי פוריה

כפי שדנתם רבות בהרצאה, התכנסות בנורמה של טורי פוריה אינה גוררת אפריוריות את ההתכנסות הנקודתית של טור הפוריה. כלומר:

- ייתכנו טורי פוריה שלא יתכנסו נקודתית במספר נקודות בקטע (אפילו אינסופי!).
- יתכנו כי טור הפוריה של פונקציה f יתכנס נקודתית, אך לפונקציה שונה מ-f במספר נקודות.

על אף קשיים אלו, קיימים מקרים שבהם כן ניתן לדעת שטור פוריה יתכנס נקודתית, ולעתים אף יתכנס במידה שווה.

משפט 3.3 (התכנסות במ"ש במקרה המחזורי)**.** תהא $f\in C_{\text{per}}\left([0,1]\right)\cap C^1\left([0,1]\right)$. אזי, טור הפוריה של f מתכנס במידה שווה ל-f במובן הבא:

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{2\pi inx}-f(x)\right|=0.$$

נגדיר משפחה נוספת של פונקציות שהן "כמעט" כמו הפונקציות שמופיעות במשפט הקודם.

הגדרה 3.4 (גזירות ברציפות למקוטעין)**.** אומרים שפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ היא **גזירה ברציפות למקוטעין** אם היא רציפה למקוטעין, גזירה בכל הקטע למעט בכמות סופית של נקודות, והפונקציה f' (המוגדרת למעט בכמות סופית של נקודות) היא רציפה למקוטעין.

מתברר שמסקנת משפט 3.3 נכונה גם עבור פונקציות גזירות ברציפות למקוטעין, בעזרת תיקון קל להוכחה.

כמובן שטור פוריה המתכנס במידה שווה חייב להיות פונקציה מחזורית. כדי לטפל בטורי פוריה של פונקציות "יפות" אך לאו דווקא מחזוריות, נציג תחילה את הדרך המקובלת לסכום את האיברים בטור הפוריה, ואת גרעין הסכימה החבוי בו. לשם נוחות, נעבוד מעתה במרחב $L^2\left[-\pi,\pi\right]$:

הגדרה 3.5 (סכומים חלקיים וגרעין דיריכלה)**.** לכל $f\in L^2\left[-\pi,\pi\right]$, מגדירים את ה**סכומים החלקיים** של טור הפוריה של f על ידי:

$$S_N(f)(x)=\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{inx}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t, \tag{3.1}$$

כאשר:

$$D_N\left(x\right)=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}=\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{3.2}$$

הוא **גרעין דיריכלה** (כלומר, זה הכינוי של סדרת הפונקציות $\{D_N\}_{n=0}^{\infty}$).

הגדרה 3.6 (קונבולוציה בקטע)**.** תהיינה g,h פונקציות 2π-מחזוריות ב-$\mathbb{R}$, כך שהן אינטגרביליות בכל תת קטע סגור וחסום של $\mathbb{R}$. ה**קונבולוציה** של g,h היא הפונקציה המחזורית:

$$g*h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)h(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

בעזרת קונבולוציה, מקבלים את הקשר:

$$S_N(f)(x)=D_N*f(x)$$

לכל $N=0,1,\ldots$.

משפט 3.7 (משפט דיריכלה)**.** תהא $f \in PC^1\left[-\pi,\pi\right]$. אזי, בכל $t \in \left[-\pi,\pi\right]$, סדרת הסכומים (3.1) מתכנס, והגבול נתון על ידי:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}, \tag{3.3}$$

כאשר הסימונים באגף הימני הם הגבולות החד-צדדיים של הפונקציה באותה הנקודה.

בפרט, בתנאי משפט דיריכלה, טור הפוריה מתכנס נקודתית לפונקציה בכל נקודה שבה היא רציפה.

3.1.2 סכומי סזארו ומשפט פייר

הגדרה 3.8 (סכימת סזארו וגרעין פייר)**.** תהא $f \in L^2\left[-\pi,\pi\right]$. אזי, **סכומי סזארו** של הפונקציה מוגדרים להיות:

$$\sigma_N\left(f\right)\left(x\right) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x) = K_N * f(x), \tag{3.4}$$

כאשר:

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_N(x) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \tag{3.5}$$

הוא **גרעין פייר**.

גרעין פייר הוא מקרה פרטי של **גרעין סכימה** . הנ"ל בא לידי ביטוי בתכונות שהוא מקיים בלמה הבאה, ובמשפט פייר שנוכיח בעזרת תכונות אלה.

בניסוח פשוט, אלו משפחות של פונקציות שמאפשרות שחזור של פונקציה על ידי קונבולוציה.

טענה 3.9 (תכונות גרעין פייר)**.** לכל $N \in \mathbb{N}$, הפונקציה K_N מקיימת:

- $K_N(x) \geq 0$ לכל x.
- $K_N(x)$ מחזורית ובעלת מחזור 2π.
- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
- לכל $\delta > 0$, הפונקציה K_N מתכנסת במידה שווה לאפס בקבוצה $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

משפט 3.10 (משפט פייר)**.** תהא $f \in PC\left[-\pi,\pi\right]$. אזי:

- בכל נקודה $x \in \left[-\pi,\pi\right]$ שבה f רציפה, $\sigma_N(f)(x) \xrightarrow{N\to\infty} f(x)$.
- אם f רציפה ומחזורית, סכומי סזרו מתכנסים במידה שווה ל-f.

3.2 תרגיל - תכונות של טורי פוריה

עבור פונקציה f רציפה ומחזורית, חשבו:

1. $\hat{f_h}(n)$ כאשר $f_h(x) := f(x-h)$.
2. $\widehat{e^{2\pi i n_0 x}f}(n)$.
3. $\widehat{fg}(n)$, אם נתון כי g גזירה ברציפות ומחזורית.

פתרון.

1. מחישוב מפורש ותוך שימוש במחזוריות:

$$\hat{f_h}(n) = \int_0^1 f_h(x)e^{-2\pi i n x}\,\mathrm{d}x \overset{x-h=u}{=} \int_{-h}^{1-h} f(u)e^{-2\pi i n(u+h)}\,\mathrm{d}u$$
$$= e^{-2\pi i n h}\int_0^1 f(u)e^{-2\pi i n u}\,\mathrm{d}u = e^{-2\pi i n h}\hat{f}(n).$$

2. באופן דומה:

$$\widehat{e^{2\pi i n_0 x}f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{2\pi i n_0 x}e^{-2\pi i n x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i(n-n_0)x}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(n-n_0).$$

שימו לב לכך שהפעולה של הכפלה באקספוננט מרוכב והזזה "דואליות" אחת לשניה, במובן שביצוע פעולה אחת על פונקציה, גורר ביצוע של הפעולה השניה על מקדם הפוריה שלה.

3. על פי משפט 3.3, טור הפוריה של $g(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}(m)e^{2\pi i m x}$ מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע $[0,1]$, ולכן:

$$\widehat{fg}(n) = \int_0^1 f(x)g(x)e^{-2\pi i n x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}(m)f(x)e^{-2\pi i(n-m)x}\,\mathrm{d}x.$$

העובדה כי הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה, מאפשרות לנו לבצע החלפה של האינטגרל והסכום, ולקבל כי:

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}\left(m\right)\int_0^1 f(x)e^{-2\pi i(n-m)x}\,\mathrm{d}x = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}\left(m\right)\hat{f}\left(n-m\right).$$

בפרט, מובטח לנו שהטור הזה יתכנס לכל f רציפה ומחזורית. נסו להשתכנע (בהמשך נוכל לנסח זאת בבהירות) מדוע ניתן להחליף את f בכל פונקציה אחרת מ-$L^2[0,1]$.

חשבו היטב על הנוסחה האחרונה שקיבלנו, לקראת התרגיל הבא.

3.3 תרגיל - קונבולוציה וחישובים לפי הגדרה

בהנתן $f,g\in \mathrm{PC}\left[0,1\right]$, נגדיר את הקונבולוציה שלהן בתור הפונקציה:

$$f*g\left(x\right)=\int\limits_{0}^{1}f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

כאשר מרחיבים את f,g באופן מחזורי לכל $\mathbb{R}$.

1. הראו כי מתקיים $\widehat{f*g}(n)=\hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

שימו לב לקשר ההדוק בין קונבולוציה למכפלה, תוך השוואה לתוצאה שקיבלנו בסעיף הקודם. כאשר כפלנו זוג פונקציות, מקדם הפוריה היה הקונבולוציה של מקדמי הפוריה של הפונקציות. עתה מתברר שכאשר מחשבים קונבולוציה, מקדם הפוריה שיתקבל יהיה מכפלת המקדמים.

2. חשבו את טור הפוריה של הפונקציה $g(x)=\pi\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}(x)$.

3. מצאו במפורש פונקציה $h(x)$ המקיימת לכל $x\in[0,1]$:

$$h(x)=\frac{\pi}{4}-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi(2n+1)^2}e^{2\pi i(2n+1)x},$$

4. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$. והוכיחו כי ההתכנסות היא במידה שווה בקטע.

פתרון.

1. על ידי חישוב מפורש:

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(n) &= \int_0^1 (f*g)(x)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{פוביני}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x-t)g(t)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{u=x-t}{=} \int_0^1 \left(\int_{-t}^{1-t} f(u)g(t)e^{-2\pi in(u+t)}\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{מחזוריות}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 f(u)e^{-2\pi inu}\,\mathrm{d}u\right) g(t)e^{-2\pi int}\,\mathrm{d}t \\
&= \hat{f}(n)\int_0^1 g(t)e^{-2\pi int}\,\mathrm{d}t = \hat{f}(n)\hat{g}(n).
\end{aligned}$$

<u>הערה</u> - שימו לב שהנוסחה באגף הימני של משפט הקונבולוציה נכונה לכל $f,g\in L^2[0,1]$. נסו להראות כי אם מגדירים בצורה כזאת קונבולוציה, היא תהיה רציפה ב-f וב-g ביחס לנורמה.

2. גם כאן, נשתמש בחישוב מפורש (נניח תחילה כי $n\neq 0$):

$$\begin{aligned}
\hat{g}(n) &= \pi\int_0^1 \chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}(x)\,e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi nx)+i\sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\left.\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n}-\frac{i\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\right|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{i}{2n}\left(\cos(\pi n)-1\right).
\end{aligned}$$

נפריד למקרה הזוגי והאי זוגי:

$$\hat{g}\left(2n\right)=0,\quad \hat{g}\left(2n+1\right)=\frac{i}{2n+1}.$$

וכאשר $n=0$ נקבל $\hat{g}(0)=\frac{\pi}{2}$. סה"כ, נקבל כי:

$$g(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{i}{2n+1}e^{2\pi i(2n+1)x}.$$

כשוויון בין איברים במרחב $L^2\left[0,1\right]$ (כמובן שאין התיימרות עדיין להתכנסות נקודתית/התכנסות במידה שווה).

3. את הטור המופיע באגף הימני אפשר לכתוב בצורה:

$$\frac{\pi}{4}-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi\left(2n+1\right)^2}e^{2\pi i(2n+1)x}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{i}{2n+1}\cdot\frac{i}{2\pi(2n+1)}e^{2\pi i(2n+1)x}.$$

בצורה כזאת, ניתן לזהות את h כטור הפוריה המתקבל מקונבולוציה של g עם פונקציה נוספת f שעבורה:

$$\hat{f}(2n+1)=\frac{i}{2\pi(2n+1)},\quad \hat{f}(0)=\frac{1}{2}.$$

לא ידוע לנו (היות ומקדמי פוריה הזוגיים שאינם מקדם האפס של g מתאפסים) מה הערך של $\hat{f}(2n)$, אם $n\neq 0$. למעשה, ניתן להסיק מכאן תוצאה מפתיעה יותר - והיא שהקונבולוציה כלל לא תלויה במקדמי פוריה הזוגיים של f שאינם מקדם ה-0. לכן נוכל לבחור אותם כרצוננו. במקרה של תרגיל זה, נגדיר:

$$\hat{f}\left(2n\right)=\frac{i}{2\pi(2n)}.$$

הסיבה לבחירה זו היא שעתה, קיבלנו שהמקדמים של הפונקציה f הם:

$$\hat{f}\left(0\right)=\frac{1}{2},\quad \hat{f}\left(n\right)=\frac{i}{2\pi n},\quad \forall n\neq 0.$$

אלו הם מקדמי הפוריה של הפונקציה $f(x)=x$, שפגשנו בהרצאה. כלומר:

$$h(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f*g}(n)e^{2\pi inx}.$$

ולכן (במובן של נורמת $L^2\left[0,1\right]$) מתקיים:

$$h(x)=f*g(x).$$

כדי שנוכל להסיק שהטור מתכנס במידה שווה ל-h, נחשב את h לפי הגדרה (נחלק ב-π לשם נוחות):

$$\frac{1}{\pi} f * g(x)=\int_0^1 f(x-t)\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}} f\left(x-t\right)\,\mathrm{d}t,$$

ועלינו להפריד למקרים בהתאם לערכי $x\in[0,1]$.

- כאשר $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, הערכים של $x-t$ נמצאים תמיד בקטע $[0,1]$. לכן, אין צורך בהרחבה המחזורית של f ואפשר לכתוב במפורש:

$$\frac{1}{\pi} f * g(x)=\int_0^{\frac{1}{2}} x-t\,\mathrm{d}t=-\frac{(x-t)^2}{2}\bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{2}-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}.$$

- כאשר $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, מקבלים שעבור $0\leq t\leq x$, אין צורך להשתמש בהרחבה המחזורית, אך כאשר $t\in\left[x,\frac{1}{2}\right]$, הערכים של $x-t$ נמצאים בקטע $[-1,0]$, ולכן נצטרך להשתמש שם בהרחבה המחזורית, כלומר בהגדרה $f(x-t)=f(x-t+1)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} f * g(x)&=\int_0^x x-t\,\mathrm{d}t+\int_x^{\frac{1}{2}} x-t+1\,\mathrm{d}t=-\frac{(x-t)^2}{2}\bigg|_0^x-\frac{(x-t+1)^2}{2}\bigg|_x^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{2}=-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

אפשר לכתוב בצורה מקוצרת:

$$f * g(x)=\pi\left(\frac{\left|x-\frac{1}{2}\right|}{2}+\frac{1}{8}\right).$$

עתה, נוכל להשתמש עתה בעובדה ש-$f*g=h$ היא פונקציה גזירה ברציפות למקוטעין ומחזורית (היות והערך שלה ב-0 וב-1 זהה), ולכן משפט 3.3 מבטיח התכנסות במידה שווה.

המשפט המקורי דן במקרה של פונקציה גזירה ברציפות ומחזורית, אך בתרגיל הבית תוכיחו כי גם גזירות ברציפות למקוטעין מספיקה למשפט זה.

שימו לב שניתן להוכיח התכנסות במידה שווה גם ללא שימוש במשפט. שהרי, טור הפורייה מתכנס במידה שווה ממבחן M של ויירשטראס, ולכן הטור מגדיר פונקציה רציפה ומחזורית הנמצאת באותה מחלקת שקילות של $L^2\left[0,1\right]$ עם הפונקציה h. היות ו-h רציפה, ובכל מחלקת שקילות של $L^2\left[0,1\right]$ יש לכל היותר פונקציה רציפה, אחת, נסיק כי הטור אכן מזדהה עם h בכל אחת מהנקודות.

4. על פי נוסחת פרסבל, מתקיים:

$$\|h\|^2=\int_0^1\left|h(x)\right|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{h}(n)\right|^2=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}.$$

אי לכך, חישוב של האינטגרל יאפשר לנו להסיק את הסכום הדרוש.

$$\begin{aligned}\left\|h^2\right\| &= \pi^2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{8}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= 2\pi^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{8} - \frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4} - x\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{2} \left[-\frac{\left(\frac{3}{4}-x\right)^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{27}{192} - \frac{1}{192}\right) = \frac{13\pi^2}{192}.\end{aligned}$$

כלומר, לאחר העברת אגפים נקבל כי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

הערה. שימו לב כי זהות פרסבל לא דרשה מאיתנו את ההנחה שהטור מתכנס במידה שווה, שהרי נוסחה זו נכונה בכל $L^2\left[0,1\right]$.

תכונה שימושית. שימו לב כי באופן כללי הטור:

$$\frac{1}{2^m} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{i}{2\pi n}\right)^m e^{2\pi i n x}$$

הינו טור הפוריה של הקונבולוציה של $f(x) = x$ עם עצמו m פעמים. היות ואת הקונבולוציה הזו אנחנו יודעים לחשב, ניתן לקבל מכאן נוסחאות לטורים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

מומלץ לנסות באופן עצמאי לחשב את המקרים $m=2, m=3$.

3.4 תרגיל - טורי פוריה ממשיים

בתרגיל זה נעבוד במרחב $L^2\left[-\pi,\pi\right]$ עם המכפלה הפנימית:

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. הוכיחו כי $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\left(x\right),\sin\left(x\right),\cos\left(2x\right),\sin\left(2x\right),\ldots\right\}$ היא מערכת אורתונורמלית שלמה במרחב.
2. הסיקו כי לכל $f\in L^2\left[-\pi,\pi\right]$ מתקיים:

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(nx\right)+b_n\sin\left(nx\right).$$

ומצאו נוסחה למקדמים. טורים אלו מכונים **טורי פוריה ממשיים**.

3. נסחו אנלוגים למשפטי ההתכנסות הנקודתית/במידה שווה עבור טורי פוריה ממשיים.
4. מצאו את טור הפוריה הממשי של הפונקציה $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע וחשבו בעזרתו את הסכום:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}.$$

פתרון.

1. ראשית, נוכיח נורמול:

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=1,$$

$$\langle\cos\left(nx\right),\cos\left(nx\right)\rangle=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2\left(nx\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}1+\cos\left(2nx\right)\mathrm{d}x=1,$$

$$\langle\sin\left(nx\right),\sin\left(nx\right)\rangle=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\left(nx\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}1-\cos\left(2nx\right)\mathrm{d}x=1.$$

עתה, נוכיח אורתוגונליות:

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\left(nx\right)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\left(nx\right)\mathrm{d}x=0,$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(nx) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned}
\langle \sin(nx), \cos(mx) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left. -\frac{\cos((n+m)x)}{n+m} - \frac{\cos((n-m)x)}{n-m} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) - \sin((n+m)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{\sin((n-m)x)}{n-m} - \frac{\sin((n+m)x)}{n+m} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{\sin((n+m)x)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)x)}{n-m} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

כל שנותר להוכיח הוא שהמערכת היא מערכת אורתונורמלית שלמה. על מנת לעשות כן, מספיק לנו להוכיח כי המערכת פורשת תת מרחב צפוף ב-$L^2[0,\pi]$. לכל פונקציה $g \in C([-\pi,\pi])$, נשתמש במשפט 1.11, כדי למצוא סדרה g_n שהיא קומבינציה של איברי המערכת שלנו, המתכנסת בנורמת הסופרמום (ולכן גם בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$) ל-g. אזי:

$$\langle f, g \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, g_n \rangle = 0,$$

ומכאן ש-f ניצבת לכל הפונקציות הרציפות, שהיא קבוצה צפופה במרחב ההשלמה $L^2[-\pi,\pi]$. מכאן, $f \equiv 0$ והמערכת אכן שלמה.

2. על פי מסקנות משפט 2.21, מערכת אורתונורמלית שלמה היא בסיס, ולכן לכל $f \in L^2[-\pi,\pi]$ מתקיים:

$$f(x) = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \cos(nx) \rangle \cos(nx) + \langle f, \sin(nx) \rangle \sin(nx).$$

על ידי השוואה עם הנוסחה בשאלה נקבל כי:

$$a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ועבור $n > 0$:

$$a_n = \langle f, \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \langle f, \sin(nx) \rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

3. נשתמש בזהות אוילר כדי לכתוב:

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$

ובעזרת זהויות אלה נוכל לשכתב את הסכומים החלקיים של טור הפוריה הממשי באופן הבא:

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}. \end{aligned}$$

אי לכך, הסכומים החלקיים של טור הפוריה הממשיים הם בדיוק הסכומים החלקיים של טורי הפוריה הקלאסיים! לכן, כל המשפטים שלמדנו על טורי פוריה קלאסיים הנוגעים להתכנסות נקודתית/במידה שווה, תקפים גם לטורי פוריה ממשיים.

4. על פי הנוסחה למקדמים:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $b_n = 0$ היות והמכפלה $\sin(nx)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ היא פונקציה אי זוגית. ולבסוף:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)+\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)}{n-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{n+\frac{1}{2}}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi}\left[\frac{2}{n-\frac{1}{2}}-\frac{2}{n+\frac{1}{2}}\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}. \end{aligned}$$

לכן מתקיים (כשוויון ב-$L^2\left[-\pi,\pi\right]$):

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}\cos(nx).$$

נשים לב שהפונקציה $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ היא פונקציה גזירה ברציפות ומחזורית בקטע $[-\pi,\pi]$, ולכן על פי משפט 3.3, טור הפוריה שלה (ולכן גם טור הפוריה הממשי שלה) מתכנס אליה במידה שווה בקטע, ובפרט נקודתית, בנקודה $x=\pi$. כלומר:

$$0=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)},$$

ולאחר העברת אגפים, נקבל כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=2.$$

לתרגול עצמי. הראו בעזרת $f_\alpha(x)=\cos(\alpha x)$ כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{\pi}{2\alpha}\cot(\pi\alpha),\qquad \forall\alpha\notin\mathbb{Z}.$$

3.5 תרגיל - טורי סינוסים ומבחן שלמות

בתרגיל הקודם דנו בטורי פוריה ממשיים. ראינו שהם אנלוגיים לטורי הפוריה המקוריים, ושהם מתקבלים מהם על ידי קומבינציות ליניאריות "הפיכות" של איברי הבסיס:

$$e^{inx}=\cos(nx)+i\sin(nx),\qquad \cos(nx)=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\qquad \ldots$$

בתרגיל זה נפגוש בסיס נוסף ונפוץ, אך פחות אינטואיטיבי, למרחב $L^2\left[0,1\right]$.

1. תהא $E=\left\{\sin\left(n\pi x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$. הוכיחו כי:

$$\overline{E}^{\|\cdot\|_{\infty}}=\left\{f\in C\left(\left[0,1\right]\right)|f(0)=f(1)=0\right\}$$

2. הסיקו כי הקבוצה $\left\{\sqrt{2}\sin\left(n\pi x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא בסיס אורתונורמלי ל-$L^2\left[0,1\right]$.

3. תהא $\left\{u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית ב-$L^2\left[0,1\right]$. הוכיחו כי המערכת שלמה אם ורק אם לכל $k=1,2,\ldots$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1\sin\left(k\pi x\right)u_n(x)\,\mathrm{d}x\right|^2=\frac{1}{2}.$$

(שימו לב שגם כאשר u_n אינן רציפות למקוטעין, ניתן לחשוב על האינטגרל כגבול של אינטגרלים על רציפות למקוטעין המקרבות את u_n).

פתרון.

1. ראשית, ברור כי מתקיימת ההכלה:

$$\overline{E}^{\|\cdot\|_{\infty}}\subset\left\{f\in C\left(\left[0,1\right]\right)|f(0)=f(1)=0\right\},$$

היות וכל הפונקציות ב-E מקיימת את הנ"ל ואלו תכונות הנשמרות בהתכנסות במידה שווה. כדי להוכיח את הכיוון ההפוך, נניח תחילה כי f פונקציה רציפה המתאפסת בראשית וב-1. ההתאפסות בראשית מאפשרות לנו להגדיר הרחבה אי זוגית של f לקטע $[-1,1]$:

$$\tilde{f}\left(x\right)=-f(-x),\quad\forall x\in[-1,0).$$

עתה, תנאי ההתאפסות גם בנקודה $x=1$, אומר כי $\tilde{f}$ היא פונקציה רציפה ומחזורית בקטע $[-1,1]$ ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים (לפי משפט 1.11) פולינום מהצורה:

$$p_{\varepsilon}(x)=\frac{a_0}{x}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\left(nx\right)+b_n\sin\left(nx\right),$$

שעבורו $\left\|\tilde{f}-p_{\varepsilon}\right\|_{\infty}<\varepsilon$. היות ו-$f$ אי זוגית, נוכל להוכיח כי החלק האי זוגי של p_{ε} גם הוא קירוב טוב של $\tilde{f}$:

$$\left|\tilde{f}(x)-\frac{p_{\varepsilon}(x)-p_{\varepsilon}(-x)}{2}\right|=\left|\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(-x)}{2}-\frac{p_{\varepsilon}(x)-p_{\varepsilon}(-x)}{2}\right|\leq\left\|\tilde{f}-p_{\varepsilon}\right\|_{\infty}<\varepsilon.$$

נסמן ב-$q_{\varepsilon}(x)$ את החלק האי זוגי של p_{ε}, שהוא פולינום המכיל את פונקציות הסינוס בלבד. היות והקירוב של $\tilde{f}$ נכון

בקטע $[-1,1]$, הוא בוודאי תקף גם בקטע $[0,1]$ ולכן נסיק כי $\|f-q_\varepsilon\|<\varepsilon$ גם בקטע $[0,1]$, ולכן:

$$f \in \overline{E}^{\|\cdot\|_\infty},$$

והוכחנו את ההכלה ההפוכה.

2. ראשית, בדיקה מהירה תראה שאכן מדובר במערכת אורתונורמלית (חישבנו בתרגילים הקודמים אינטגרלים דומים מאוד לאלו). כדי להוכיח שהמערכת מהווה בסיס אורתונורמלי ל-$L^2\left[0,1\right]$, עלינו להוכיח שהיא שלמה, וכדי לעשות זאת מספיק שנוכיח כי היא פורשת תת-מרחב צפוף. שהרי, אם אכן תת המרחב הנפרש על ידה צפוף, יתקיים:

$$\left(\left\{\sqrt{2}\sin\left(n\pi x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}\right)^{\perp} = \overline{\operatorname{span}\left\{\sqrt{2}\sin\left(n\pi x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}}^{\perp} = \left(L^2\left[0,1\right]\right)^{\perp} = \{0\}.$$

תהא $g \in C\left(\left[0,1\right]\right)$. סדרת הפונקציות:

$$g_\delta(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [\delta, 1-\delta] \\ \frac{x}{\delta} g(\delta), & x \in [0,\delta] \\ -\frac{g(1-\delta)}{\delta}\delta\left(x-1+\delta\right)+g(1-\delta), & x \in [1-\delta, 1] \end{cases}$$

הינה סדרה של פונקציות רציפות המקרבות (ודאו זאת) את g בנורמת $L^2\left[0,1\right]$, ומתאפסות בקצוות של הקטע. כל פונקציה כזאת, ניתנת לקירוב (על פי סעיף קודם) על ידי קומבינציה ליניארית של איברי המערכת האורתונורמלית שלנו (בנורמת סופרמום, ולכן גם בנורמת L^2). מכאן נובע כי ניתן לבחור סדרה $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ של פולינומים טריגומטריים המורכבים מסינוסים בלבד, המתכנסת בנורמת L^2 ל-g, וזה מוכיח את הדרוש.

שימו לב. עד כה פגשנו טורי פוריה קלאסיים, טורי פוריה ממשיים, ועכשיו פגשנו גם טורי סינוסים. בתרגיל הבית, תפגשו ותעסקו גם בטורי קוסינוסים. לכל אחד מהם ניתן לנסח וריאציה מתאימה למשפטים הנוגעים להתכנסות נקודתית/במידה שווה. היתרון בבחירת בסיס מסויים על פני אחר תלויה כמובן בשימושים של בסיסים אלו.

3. המפתח לפתרון השאלה הוא לזהות שהסכום המופיע כאן ניתן לכתיבה גם בצורה:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle\sin\left(k\pi x\right),u_n\rangle\right|^2 = \frac{1}{2} = \left\|\sin\left(k\pi x\right)\right\|^2.$$

כך שלמעשה מדובר כאן בזהות פרסבל המופיעה בנוסחה (2.8). מכאן נוכל לעבוד בקלות על שני כיווני ההוכחה:

- אם נניח כי $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית שלמה, היא תהיה בסיס על פי משפט 2.21, והנוסחה הדרושה תנבע מידית מזהות פרסבל לכל $k=1,2,\ldots$.
- עתה נניח כי השוויון אכן מתקיים לכל $k=1,2,\ldots$. על פי טענה 2.19, נובע כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle\sin\left(k\pi x\right),u_n\rangle u_n(x) = \sin\left(k\pi x\right), \quad \forall k=1,2,\ldots$$

כדי להוכיח שהמערכת האורתונורמלית שלמה, נניח כי f ניצבת למערכת. אזי:

$$\langle f, \sin(k\pi x)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n\rangle \langle \sin(k\pi x), u_n\rangle = 0,$$

ומכך ש-$\{\sin(k\pi x)\}_{k=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית שלמה, נסיק כי $f = 0$, כדרוש.

הטענה האחרונה כמובן כללית הרבה יותר, ולמעשה מראה לנו שכדי לבדוק שמערכת אורתונורמלית כלשהי היא מערכת שלמה, מספיק לראות שניתן לייצג איברי בסיס אחר וידוע בעזרת המערכת החדשה. ניתן להשתמש ברעיון זה כדי לספק הוכחה נוספת לקיום של טורי פוריה ממשיים.

4

טורי פוריה, המשך

4.1 תרגיל - התכנסות נקודתית כתכונה מקומית

1. הוכיחו את הוריאציה הבאה ללמה של רימן-לבג - אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ממשיים השואפת לאינסוף, אזי לכל $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ אינטגרבילית רימן:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin(a_n x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. תהא $\mathbb{C} \to [-\pi,\pi] : f$ פונקציה אינטגרבילית רימן. אומרים שפונקציה כנ"ל היא **ליפשיצית בנקודה** $x_0 \in (-\pi,\pi)$, אם בסביבת x_0 קיימת $u(x)$ חסומה שעבורה:

$$f(x) - f(x_0) = u(x-x_0)(x-x_0)$$

לכל x בסביבה זו. הוכיחו כי אם f ליפשיצית ב-x_0, טור הפוריה שלה מתכנס נקודתית ב-x_0.

3. הוכיחו כי אם f, g אינטגרביליות רימן כך ש-$f(x) = g(x)$ בסביבה של x_0, אזי טור הפוריה של f מתכנס ב-x_0 אם ורק אם טור הפוריה של g מתכנס ב-x_0.

פתרון.

1. נראה תחילה את נכונות הטענה לפונקציות גזירות ברציפות בקטע $[a, b]$. ואכן:

$$\int_a^b f(x)\sin(a_n x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(a_n x)}{a_n}f(x)\Big|_a^b + \frac{1}{a_n}\int_a^b f'(x)\cos(a_n x)\,\mathrm{d}x$$

הביטוי השמאלי שואף לאפס היות והמונה חסום והמכנה שואף לאינסוף, והאינטגרל הימני חסום, כך שגם כאשר מחלקים אותו בסדרה a_n, הביטוי ישאף סה"כ לאפס. עבור פונקציה אינטגרבילית רימן, נשתמש בעובדה שהיא למעשה גם פונקציה ב-$L^2[a, b]$, וניתן לקרב אותה כרצוננו על ידי פונקציות גזירות ברציפות (למשל, פולינומים). בהנתן $\varepsilon > 0$, נבחר f_ε גזירה ברציפות שעבורה:

$$\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

עתה:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin(a_n x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \left|\int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x))\sin(a_n x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\sin(a_n x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le (b-a)\|f - f_\varepsilon\|\overbrace{\|\sin(a_n x)\|}^{\le 1} + \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\sin(a_n x)\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

היות והאינטגרל הימני שואף לאפס על פי ההוכחה שלנו למקרה הגזיר ברציפות, קיים N שעבורו האינטגרל הימני קטן מ-ε לכל $n > N$ ולכן גם:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(a_n x)\,\mathrm{d}x\right| < C\varepsilon$$

עבור קבוע C כלשהו (שכמובן לא מאוד משנה), וכך נוכל להסיק את הדרוש.

2. נוכיח התכנסות נקודתית של הסכומים החלקיים בעזרת גרעין דיריכלה. כלומר, נעריך את הגבול:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x_0) - f(x_0) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)f(x_0 - t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)f(x_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\left(f(x_0 - t) - f(x_0)\right)\,\mathrm{d}t = [\star].\end{aligned}$$

על פי הנתון, אחנו יודעים דברים על הפונקציה רק בסביבת x_0. נסמן ב-$[-\delta, \delta]$ את את הסביבה שבה (על פי הנתון):

$$f(x_0 - t) - f(x_0) = -tu(-t),$$

ונשתמש גם באגף הימני בנוסחה (3.2) כדי לכתוב:

$$[\star] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{N+1}{2}t\right) \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} u(t) \sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)\mathrm{d}t = [\star\star].$$

אם נסמן את 2 הפונקציות:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, & t\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi] \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases},$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{-tu(-t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, & t\in[-\delta,\delta] \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases},$$

נקבל זוג פונקציות אינטגרביליות רימן איתן ניתן לכתוב את הגבול באופן הבא:

$$[\star\star] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)\mathrm{d}t = 0$$

והמעבר האחרון הוא בדיוק הלמה של רימן-לבג מסעיף קודם.

3. על פי הנתון, הפונקציה $f-g$ אינטגרבילית רימן, ושווה זהותית לאפס בסביבה כלשהי של x_0 (בפרט, ליפשיצית בנקודה). מהסעיף הקודם נוכל להסיק כי טור הפוריה של $f-g$ מתכנס נקודתית ל-0 ב-x_0. אם נכתוב:

$$f(x) = g(x) + (f-g)(x), g(x) = f(x) - (f-g)(x),$$

נוכל להשתמש בליניאריות של טורי פוריה ובליניאריות של טורים מתכנסים, כדי להסיק באופן מידי את הדרוש.

נקודה למחשבה. מקדמי פוריה של פונקציה f (שקובעים אותה באופן יחיד כאיבר במרחב ההילברט שלנו) נקבעים על פי אינטגרציה של f כנגד משפחה מסויימת של פונקציה. על אף שאינטגרציה היא פעולה גלובלית, מתברר בתרגיל שעשינו זה עתה, כי תכונת ההתכנסות הנקודתית היא דווקא כן תכונה נקודתית, ומידע עליה חבוי בדרך כלשהי במקדמי פוריה. ראינו שאם אנחנו משנים פונקציה "הרחק" מנקודה x_0, אנחנו לא נשנה את העובדה שטור הפוריה שלה מתכנס נקודתית. נסו לחשוב, איך מקדמי פוריה של הטור מצליחים "לתפוס" את ההתנהגות המקומית היפה של הפונקציה?

4.2 תרגיל - אינטגרציה איבר-איבר

מעל מרחב הפונקציות הרציפות $C\left([0,1]\right)$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, נגדיר את האופרטור הליניארי:

$$\tilde{V}f\left(x\right)=\int\limits_{0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. הוכיחו כי האופרטור $\tilde{V}$ רציף ליפשיץ מעל הפונקציות הרציפות.
2. הראו כי קיים אופרטור רציף יחיד $V:L^2\left[0,1\right]\to L^2\left[0,1\right]$, המקיים $V|_{C([0,1])}=\tilde{V}$.
3. הוכיחו כי אם $f\in\mathrm{PC}\left([0,1]\right)$, ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר לטור הפוריה של f. כלומר, אם:

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{2\pi inx},$$

אזי:

$$\int\limits_{0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\hat{f}(0)x+\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq0}}\frac{\hat{f}(n)}{2\pi in}\left(e^{2\pi inx}-1\right).$$

כשוויון בין שני איברים ב-$L^2\left[0,1\right]$.

4. הוכיחו כי לכל $f\in L^2\left[0,1\right]$, מתקיים כי $Vf(x)$ היא פונקציה רציפה (כלומר, קיימת נציגה רציפה במחלקת השקילות שלה).

פתרון.

1. לכל f,g רציפות, מתקיים:

$$\left\|\tilde{V}f-\tilde{V}g\right\|^2=\int\limits_{0}^{1}\left|\int\limits_{0}^{x}f(t)-g(t)\,\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x\le\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1}\left|f(t)-g(t)\right|^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\left\|f-g\right\|^2,$$

ומכאן ש-$\tilde{V}$ מקיים תנאי ליפשיץ עם קבוע ליפשיץ 1.

2. ראשית, ברור כי אם קיים אופרטור רציף כנ"ל, הוא נקבע ביחידות, היות וכל $f\in L^2\left[0,1\right]$ היא גבול בנורמה של פונקציות רציפות, ולכן:

$$Vf(x)=\lim_{n\to\infty}Vf_n(x)=\lim_{n\to\infty}\tilde{V}f_n(x).$$

למעשה, ניתן להשתמש באגף הימני בתור הגדרה של האופרטור $Vf(x)$, ולשם כך נצטרך להצדיק מספר דברים:

- **קיום הגבול.** נניח כי $f \in L^2[0,1]$ היא הגבול של סדרת הפונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. התנאי:

$$\left\|\tilde{V}f_n - \tilde{V}f_m\right\| \le \|f_n - f_m\|$$

למעשה מראה כי $\{Vf_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי, ולכן קיים לה גבול, שנוכל לסמן בתור Vf.

- **מוגדרות היטב.** אם $\left\{\tilde{f}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה אחרת המתכנסת ל-f בנורמה, נקבל כי:

$$\left\|\tilde{V}f_n - \tilde{V}\tilde{f}_n\right\| \le \left\|f_n - \tilde{f}_n\right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

ולכן הגבול אינו תלוי בבחירת הסדרה שמקרבת את f.

- **ליניאריות.** נניח כי $f = \lim_n f_n$ ו-$g = \lim_n g_n$. אזי לכל $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$V(\alpha f + g) = \lim_{n\to\infty} \tilde{V}(\alpha f_n + g_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha\tilde{V}f_n + \tilde{V}g_n = \alpha Vf + Vg.$$

- **רציפות.** נניח כי $f = \lim_n f_n$ ו-$g = \lim_n g_n$. אזי:

$$\|Vf - Vg\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\tilde{V}f_n - \tilde{V}g_n\right\| \le \lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\| = \|f - g\|.$$

כלומר, V מקיים תנאי ליפשיץ עם קבוע 1, ולכן רציף.

3. לכל $f \in \mathrm{PC}([0,1])$ מתקיים (כאיבר ב-$L^2[0,1]$):

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi inx} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{2\pi inx}.$$

מרציפות V שהוכחנו בסעיף הקודם, נקבל כי:

$$\begin{aligned} Vf(x) = V\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi inx}\right) &= \lim_{N\to\infty} \tilde{V}\left(\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N} \hat{f}(n)\, e^{2\pi inx}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \hat{f}(0)x + \sum_{n=-N}^{N} \frac{\hat{f}(n)}{2\pi in}\left(e^{2\pi inx} - 1\right) = \hat{f}(0)x + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{\hat{f}(n)}{2\pi in}\left(e^{2\pi inx} - 1\right). \end{aligned}$$

שימו לב שהשוויון מתקיים לכל $f \in L^2[0,1]$ ולא רק לפונקציה רציפה למקוטעין, אך עבור פונקציות כאלו, אנחנו יודעים להגיד בצורה יותר פשוטה מה משמעות האינטגרל.

4. כדי להוכיח שלפונקציה יש נציגה רציפה במחלקת השקילות שלה במרחב, מספיק להוכיח שהאגף הימני מגדיר

פונקציה רציפה. לשם כך, נשים לב שניתן לכתוב:

$$Vf(x) = \hat{f}(0)x + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{\hat{f}(n)}{2\pi in} e^{2\pi inx} - \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{\hat{f}(n)}{2\pi in}$$

בתנאי שנוכיח כי שני הטורים מתכנסים. אנחנו נוכיח יותר, בכך שנוכיח שהטור האמצעי מתכנס בהחלט ובמידה שווה בתחום. ואכן:

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left|\frac{\hat{f}(n)}{2\pi in}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{n^2}}\sqrt{\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left|\hat{f}(n)\right|^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\|f\right\|^2.$$

כלומר, האגף הימני מתכנס במידה שווה לפונקציה רציפה בקטע, כפי שרצינו להוכיח.

מסקנות מהתרגיל. בקורסי האינפי, התנאי הסטנדרטי לאינטגרציה איבר-איבר של טורי פוקציות הוא התכנסות במידה שווה. כאן הוכחנו שגם כאשר אין התכנסות במידה שווה, אך יש התכנסות ב-$L^2[0,1]$, הנוסחה עדיין נכונה. יתרה מכך, אנחנו הוכחנו שצוברות השטח של פונקציות ב-$L^2[0,1]$ הן פונקציות רציפות ומחזוריות עד כדי תוספת של כפולה של פונקציית הזהות.

בהמשך. עוד נחזור לשימוש בפעולת האינטגרציה ב-$L^2[0,1]$, כדי להוכיח תוצאות משמעותיות מאוד שמשמשות גם לפתרון בעיות דיפרנציאליות (כמו משוואות דיפרנציאליות רגילות/חלקיות).

4.3 תרגיל - גרעין פואסון

בתרגיל זה נעבוד במרחב $L^2[-\pi,\pi]$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

על אף שהצגנו אותם בד"כ כסדרת פונקציות, גרעיני סכימה עלולים להופיע גם כמשפחה חד פרמטרית של פונקציות המקיימות תכונות מתאימות. דוגמה מפורסמת למשפחה כזאת היא **גרעין פואסון**. זוהי משפחה חד פרמטרית של פונקציות $\{P_r(x)\}_{r\in(0,1)}$, המוגדרת על ידי:

$$P_r(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{inx}.$$

1. הוכיחו כי $P_r * f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{inx}$.
2. היעזרו בנוסחה לטור של סדרת הנדסית בכדי להראות שמתקיים:

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}.$$

3. הוכיחו כי אם $f\in C([-\pi,\pi])$ וגם $f(\pi)=f(-\pi)$, אזי:

$$\lim_{r\to 1^-} P_r * f(x) = f(x), \quad \forall x\in[-\pi,\pi],$$

וההתכנסות היא במידה שווה בקטע.

פתרון.

1. לכל $r<1$, מתקיים:
$$\left|r^{|n|}f(t)e^{in(x-t)}\right| \leq \|f\|_\infty r^{|n|},$$
והטור $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f\|_\infty r^{|n|}$ מתכנס. לכן, מבחן M של ויירשטראס מבטיח כי טור הפונקציות המופיע באינטגרל:
$$P_r * f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t)r^{|n|}e^{in(x-t)}\right)\mathrm{d}t$$
מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$, ולכן ניתן להחלף בין הסכום לבין האינטגרל, ולקבל כי:
$$P_r * f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{inx}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{inx},$$
כפי שרצינו להראות.

2. נשתמש בנוסחה לסכום סדרה הנדסית ונקבל:
$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{inx} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(re^{ix}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(r^{-1}e^{ix}\right)^n &= \frac{1}{1-re^{ix}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{-ix}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}\end{aligned}$$
כדרוש.

3. כדי להוכיח את הדרוש נראה תחילה כי גרעין פואסון מקיים תכונות דומות לאלו של גרעין פייר.

   - **חיוביות.** לכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים:
   $$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2} \geq \frac{1-r^2}{1+2r+r^2} = \frac{1-r^2}{(1+r)^2},$$
   ומכך ש-$r\in(0,1)$, האגף הימני חיובי ולכן גם האגף השמאלי.
   - **נרמול.** לכל $r\in(0,1)$ מתקיים:
   $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}e^{inx}\,\mathrm{d}x,$$

כאשר השתמשנו שוב בכך שלכל r, הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$. האינטגרל באגף הימני מתאפסים למעט כאשר $n=0$, ואז מקבלים את הערך 1, ולכן:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \forall r\in(0,1)\,.$$

- **התכנסות במידה שווה ל-0 מחוץ לסביבת הראשית.** תהא $\delta>0$ ונתבונן בקטעים $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$. אזי:

$$|P_r(x)| = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2} \le \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\delta)+r^2}.$$

הביטוי הימני שואף לאפס כאשר $r\to 1^-$ ולכן לכל $\varepsilon>0$, קיים $\mu>0$ כך שאם $1-\mu<r<1$, אז:

$$|P_r(x)| < \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\delta)+r^2} < \varepsilon,$$

וזה מוכיח את הדרוש.

- **מחזוריות ב-2π.** נובעת מידית הן מההגדרה באמצעות טור הפונקציות והן מהנוסחה הסגורה שמצאנו בסעיף הקודם.

עתה נניח כי $f\in C([-\pi,\pi])$ המקיימת $f(\pi)=f(-\pi)$ ונרחיב אותה באופן מחזורי לכל $\mathbb{R}$. בהנתן $\varepsilon>0$, נשתמש ברציפות במידה שווה של f (כי היא רציפה ומחזורית) כדי להסיק שקיימת $\delta>0$ שעבורה לכל $\tilde{x},\tilde{y}$:

$$|\tilde{x}-\tilde{y}|<\delta \Longrightarrow |f(\tilde{x})-f(\tilde{y})|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

כדי להעריך את הביטוי הדרוש נשתמש תחילה בתנאי הנרמול של גרעין פואסון ולאחר מכן נפרק את האינטגרל לתחום שבו (4.1) תקף ולשאר התחום:

$$\begin{aligned}|P_r*f(x)-f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)f(x)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \left|\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} P_r(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}P_r(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\,\mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

היות ובאינטגרל הימני מתקיים התנאי השמאלי ב-(4.1), נוכל להסיק כי:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}P_r(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2},$$

כאשר השתמשנו תחילה בחיוביות של גרעין פואסון ולאחר מכן בתנאי הנרמול שלו. כדי להעריך את הביטוי שנותר

נשתמש בכך שגרעין פואסון מתכנס במידה שווה ל-0 מחוץ לסביבת הראשית כאשר $r \to 1^-$. כלומר, קיים $\mu > 0$ שעבורו לכל $1 - \mu < r < 1$, מתקיים:

$$|P_r(t)| < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty},$$

ולכן:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} P_r(t)\left(f(x-t)-f(x)\right)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int\limits_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}\,\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

כלומר, מצאנו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\mu > 0$ כך שלכל $1 - \mu < r < 1$, מתקיים:

$$|P_r * f(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ולכן:

$$\lim_{r\to 1^-} P_r * f(x) = f(x).$$

יתרה מכך, העובדה כי μ לא תלוי ב-x (עקב הרציפות במידה שווה של f) נסיק שההתכנסות היא במידה שווה בקטע.

שימושים. עבור $f \in C([-\pi,\pi])$ המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$, נקבל כי לכל נקודה $z = re^{i\theta}$ כאשר $0 \le r < 1$, הפונקציה:

$$F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}\hat{f}(n) = \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\hat{f}(n)e^{in\theta} + r^n\hat{f}(-n)e^{-in\theta}$$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)z^n + \hat{f}(-n)\bar{z}^n$$

היא פונקציה רציפה בקבוצה $|r| < 1$ שעל פי הסעיף האחרון, ניתן תמיד להרחיב בצורה רציפה לדיסק היחידה הסגור (גם אם הטור לא מתכנס כאשר מציבים $z = 1$!). שימו לב שפונקציה זו אינה בהכרח אנליטית בדיסק היחידה הפתוח, ולמעשה היא אנליטית אם ורק אם $\hat{f}(-n) = 0$ לכל $n > 0$. במקרה המיוחד הזה, מקבלים פונקציה אנליטית בדיסק היחידה הפתוח, שניתן להרחיב בצורה רציפה גם לשפה.

כנקודה למחשבה, שימו לב כי גם כאשר $f \in L^2[-\pi,\pi]$, הטור שמוגדר על ידי $P_r * f$ מתכנס לכל $|r| < 1$, ומתקבלת פונקציה רציפה. מה ניתן לומר (אם בכלל) על $P_r * f$ כאשר $r \to 1^-$?

4.4 תרגיל - פתרון מד"ח בעזרת טורי פוריה

תהא $u(x,t)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר שני בתחום $[0,L]\times[0,\infty)$.

1. לכל $t>0$, נסמן את הפיתוח של $u(x,t)$ לטור סינוסים על ידי:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{u}(n,t)\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right).$$

מצאו נוסחה מפורשת למקדמים $\hat{u}(n,t)$, והראו כי הם גזירים ביחס למשתנה t.

2. נניח כי הפונקציה מהסעיף הקודם מקיימת את בעיית דיריכלה למשוואת החום במיתר סופי:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & x\in[0,L],\ t>0 \\ u(x,0)=f(x), & x\in[0,L] \\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t>0 \end{cases},$$

כאשר $f(x)$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0)=f(L)=0$. מצאו את טור הפוריה של $u(x,t)$ במונחי מקדמי פוריה המוכללים של f.

3. היכן באה לידי ביטוי המשוואה השלישית (המכונה גם תנאי שפה)? מה היה משתנה לו היינו מבצעים חישוב דומה עבור פיתוח לטור קוסינוסים?

פתרון.

1. הרעיון הוא למצוא מרחב מכפלה פנימית שבו $\left\{\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ הוא בסיס אורתונורמלי. כבר פגשנו מרחב כזה (עד כדי שינוי של הקטע), והוא המרחב $L^2[0,L]$ עם המכפלה הפנימית:

$$\langle f,g\rangle=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

במרחב זה אכן מדובר בבסיס אורתונורמלי ולכן מתקיים:

$$\hat{u}(n,t)=\left\langle u(x,t),\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)\right\rangle=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)\mathrm{d}x.$$

יתרה מכך, העובדה כי $u,\frac{\partial u}{\partial t}$ רציפות, מאפשרת להסיק כי $\hat{u}(n,t)$ גזירות לפי t על פי המשפט על גזירה תחת סימן האינטגרל, והנוסחה לנגזרת נתונה על ידי:

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(n,t)=\frac{2}{L}\int_0^L\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)\mathrm{d}x.$$

2. תחילה, נשתמש בעובדה כי $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ רציפה כדי לחשב את מקדמי פוריה המוכללים שלה.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(x,t) = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\mathrm{d}x \\ = \frac{2}{L}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L - \frac{2}{L}\frac{\pi n}{L}\int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\mathrm{d}x \\ = -\frac{2\pi n}{L^2}u(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\Big|_0^L - \frac{2\pi^2 n^2}{L^3}\int_0^L u(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\mathrm{d}x \\ = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \hat{u}(n,t).\end{aligned}$$

מכאן שאם $u(x,t)$ מקיימת את המשוואה הראשונה, נשתמש בליניאריות של הנוסחה למקדמי פוריה המוכללים ונקבל כי:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(n,t) = -c\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \hat{u}(n,t).$$

זו משוואה דיפרנציאלית רגילה, שפתרונה ידוע ונתון על ידי:

$$\hat{u}(n,t) = c_n e^{-c\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t}$$

מצד שני, כאשר $t=0$, מקבלים כי:

$$c_n = \hat{u}(n,0) = \left\langle u(x,0), \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\right\rangle = \left\langle f(x), \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\right\rangle = \hat{f}(n).$$

כלומר, קיבלנו שמתקיים:

$$u\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) e^{-c\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

שימו לב שעל פי הנתון על f, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|$ מתכנס בהחלט, ולכן גם טור הפוריה שקיבלנו לעיל מתכנס בהחלט ובמידה שווה ולכן מהווה פונקציה רציפה בתחום. ההוכחה בדיעבד כי מדובר בפונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות לכל $t>0$ עדינה קצת יותר ומושארת כתרגיל (מומלץ להתבונן בקרן מהצורה $[t_0,\infty)$ עבור $t_0>0$ שרירותי).

3. תנאי השפה $u(L,t)=u(0,t)=0$ הוא תנאי שפה שמאפשר לנו לחשוב על הפונקציה u (וגם על הפונקציה f) בתור פונקציות גזירות ברציפות ואי זוגיות בקטע $[-L,L]$. תנאים אלו מבטיחים שטור הסינוסים של שתי הפונקציות יתכנס בהחלט ובמידה שווה בתחום, ולכן הבחירה בבסיס של הסינוסים היא בחירה "טובה".

בחירה בבסיס של קוסינוסים היא בחירה "לא רעה" אך יש בה בעיה לא צפויה. כידוע, חלק מהפיתוח דורש מאיתנו את טור הסינוסים של $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

היות ו-f עדיין גזירה ברציפות למקוטעין, ואפשר לחשוב עליה בתור ההרחבה הזוגית שלה לקטע $[-L,L]$, נקבל שהטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע. יחד עם זאת, טור הנגזרות לא בהכרח מקיים זאת, היות והנגזרת של f לא בהכרח קיימת כאשר מסתכלים על ההרחבה הזוגית שלה. כך למשל, ההרחבה הזוגית של $f(x)=x$ מהקטע $[0,L]$ לקטע $[-L,L]$ היא הפונקציה $f(x)=|x|$, שאינה גזירה בראשית.

כלומר, אם היינו משתמשים בטור של קוסינוסים, הפונקציה $u(x,t)$ הייתה גזירה מכל סדר ב-$t>0$, אך הנגזרת $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ הייתה לא רציפה בנקודה $x=0$. בפרט, טור הפוריה של $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ אולי לא היה מתכנס במידה שווה בקטע $[0,L]$ כאשר $t=0$. תוכלו לוודא שבמקרה של טור הסינוסים, אין לנו את הבעיה הזו, כך שהוא מהווה בסיס "טבעי יותר" לתיאור פונקציית הפתרון.

4.5 תרגיל - כשלון לשימוש במד"ר

בתרגיל זה נדון במשוואה הדיפרנציאלית הרגילה:

$$y''+4\pi^2y=0.$$

בקטע $[0,1]$.

1. הניחו כי $y(x),y'(x)$ גזירות ברציפות ומחזוריות. היעזרו בטור הפוריה של y כדי למצוא פתרונות למשוואה.
2. עתה נניח כי באגף הימני מחליפים את פונקציית האפס בפונקציה $\cos(2\pi x)$. נסו להשתמש בשיטה דומה על מנת למצוא פתרון למשוואה.
3. הראו כי $y(x)=\frac{x}{4\pi^2}\sin(2\pi x)$ הוא פתרון למשוואה מהסעיף הקודם. הסבירו מדוע השיטה מהסעיף הקודם נכשלה?

פתרון.

1. נניח כי $y(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{2\pi inx}$ מקיימת את הנ"ל. משום ש-$y'(x)$ גזירה ברציפות ומחזורית, ניתן לגזור את הטור של $y(x)$ פעמיים איבר-איבר (היזכרו בהוכחה לנגזרת ראשונה מההרצאה). לכן:

$$y''(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}-\left(4\pi^2n\right)a_ne^{2\pi inx}.$$

היות ו-$y''(x)=-4\pi^2y(x)$, נשווה מקדמים ונקבל כי $a_0=0$ וכי לכל $n\neq 0$ מתקיים:

$$\left(4\pi^2-4\pi^2n^2\right)a_n=0.$$

ולכן, לכל $n\neq\pm1$, מתקיים $a_n=0$ ועבור a_1,a_{-1} אין שום תנאי שמחייב אותם לקבל ערך מסויים. ולכן, כל פונקציה מהצורה:

$$y(x)=a_{-1}e^{-2\pi inx}+a_1e^{2\pi inx}.$$

היא פתרון למשוואה.

2. ננסה להציב כמו קודם, ונקבל כי:

$$4\pi^2 a_0 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} 4\pi^2\left(1-n^2\right) a_n e^{2\pi inx} = \cos\left(2\pi x\right).$$

כדי למצוא את המקדמים, נשתמש במכפלה הפנימית ונקבל כי:

$$4\pi^2 a_0 = \langle \cos\left(2\pi x\right), 1\rangle = 0,$$

ולכל $n\neq 0$:

$$4\pi^2(1-n^2)a_n = \langle \cos\left(2\pi x\right), e^{2\pi inx}\rangle.$$

אך לצערנו מתקבלת בעיה קשה כאשר $n=\pm 1$. למשל, כאשר $n=1$, מתקיים:

$$0 = \langle \cos\left(2\pi x\right), e^{2\pi ix}\rangle = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{2\pi ix}+e^{-2\pi ix}\right)e^{-2\pi ix}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 1+e^{-4\pi ix}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

לכאורה, לא קיים פתרון שקיים לו טור פוריה כך שגם y וגם y' גזירים ברציפות ומחזוריים.

3. בדיקה ישירה מראה כי $y(x)=\frac{x\sin\left(2\pi x\right)}{4\pi}$ הוא פתרון. שהרי:

$$y'(x) = \frac{\sin\left(2\pi x\right)}{4\pi} + \frac{x}{2}\cos\left(2\pi x\right),$$

$$y''(x) = \frac{\cos\left(2\pi x\right)}{2} + \frac{\cos\left(2\pi x\right)}{2} - \pi x\sin\left(2\pi x\right) = \cos\left(2\pi x\right) - 4\pi^2 y(x).$$

כלומר, הפונקציה אכן מהווה פתרון של המד"ר. כדי להסביר את ה"סתירה" לכאורה לסעיף הקודם, נזהה כי $y(x)$ פונקציה גזירה ברציפות ומחזורית, אך נגזרתה $y'(x)$ רציפה ו**לא** מחזורית. כלומר, לא מובטח לנו שניתן יהיה לגזור את טור הפוריה שלה פעמיים. נוכל גם לראות זאת במפורש, בכך שנחשב את טור הפוריה של הפונקציה.

- עבור $n=0$ מתקיים:

$$a_0 = \left\langle \frac{x\sin\left(2\pi x\right)}{4\pi}, 1\right\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 x\sin\left(2\pi x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi}\ \frac{x\cos\left(2\pi x\right)}{2\pi}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{8\pi^2}\int_0^1 \cos\left(2\pi x\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8\pi^2}.$$

- עבור $n=1$ מתקיים:

$$a_1 \left\langle \frac{x\sin(2\pi x)}{4\pi}, e^{2\pi ix} \right\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 x\frac{e^{2\pi ix}-e^{-2\pi ix}}{2i}e^{-2\pi ix}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8\pi i}\int_0^1 x - xe^{-4\pi ix}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{16\pi i} - \frac{1}{8\pi i}\left.\frac{xe^{-4\pi ix}}{-4\pi i}\right|_0^1 - \frac{1}{8\pi i}\int_0^1 \frac{e^{-4\pi ix}}{-4\pi i}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16\pi i} - \frac{1}{32\pi^2}.$$

- היות ומדובר בפונקציה ממשית, מתקיים $a_{-n}=\bar{a_n}$ לכל $n\in\mathbb{Z}$, ולכן:

$$a_{-1} = -\frac{1}{16\pi i} - \frac{1}{32\pi^2}.$$

- עבור $n\neq 0,1,-1$ מתקיים:

$$\begin{aligned} a_n &= \left\langle \frac{x\sin(2\pi x)}{4\pi}, e^{2\pi inx} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^1 x\frac{e^{2\pi ix}-e^{-2\pi ix}}{2i}e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8\pi i}\int_0^1 xe^{-2\pi i(n-1)x} - xe^{-2\pi i(n+1)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{1}{8\pi i}\frac{xe^{-2\pi i(n-1)x}}{-2\pi i(n-1)} - \frac{1}{8\pi i}\frac{xe^{-2\pi i(n+1)x}}{-2\pi i(n+1)}\right|_0^1 - \frac{1}{8\pi i}\int_0^1 \frac{e^{-2\pi i(n-1)x}}{-2\pi i(n-1)} - \frac{e^{-2\pi i(n+1)x}}{-2\pi i(n+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8\pi^2(n^2-1)}. \end{aligned}$$

כלומר, לכל $x\in[0,1]$ מתקיים:

$$\frac{x\sin(2\pi x)}{4\pi} = \frac{1}{8\pi^2} + \left(\frac{1}{16\pi i} - \frac{1}{32\pi^2}\right)e^{2\pi ix} - \left(\frac{1}{16\pi i} + \frac{1}{32\pi^2}\right)e^{-2\pi ix} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0,1,-1}} \frac{e^{2\pi inx}}{8\pi^2(n^2-1)}.$$

ניכר, כי את טור זה לא ניתן לגזור איבר-איבר, שכן גזירה פעמיים של הטור באגף הימני תותיר לנו טור שמתבדר בכל נקודה.

הערה חשובה. שימו לב כי לפונקציה $y''(x) = \cos(2\pi x) - \pi x \sin(2\pi x)$ דווקא יש טור פוריה מתכנס:

$$y''(x) = \frac{e^{2\pi ix} + e^{-2\pi ix}}{2} - \frac{1}{8\pi^2} + \left(\frac{1}{16\pi i} - \frac{1}{32\pi^2}\right) e^{2\pi ix} - \left(\frac{1}{16\pi i} + \frac{1}{32\pi^2}\right) e^{-2\pi ix} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0,1,-1}} \frac{e^{2\pi inx}}{8\pi^2(n^2-1)}$$

אך טור זה אינו מתקבל מהטור הקודם על ידי גזירה איבר-איבר.

5

אופרטורים חסומים מעל מרחבי הילברט

5.1 תזכורות מההרצאה

הגדרה 5.1 (אופרטור חסום/נורמה אופרטורית)**.** יהיו $\mathcal{H},\mathcal{K}$ מרחבי מכפלה פנימית ותהא $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$. אומרים כי T **חסומה** אם ה**נורמה האופרטורית** $\|T\|$ של T, המוגדרת על ידי:

$$\|T\| = \sup_{\|h\|=1} \|Th\|\,,$$

קיימת וסופית.

באופן מידי מקבלים כי לכל אופרטור חסום T ולכל $h\in\mathcal{H}$:

$$\|Th\| \le \|T\|\,\|h\|\,.$$

מוסכמה לקורס. קיימים גם אופרטורים ליניאריים שאינם חסומים, אך לא נדון בהם כמעט בכלל בקורס. אי לכך, המינוח **אופרטור** ישמש גם כמינוח מקוצר לאופרטור חסום, אלא אם נאמר במפורש אחרת.

טענה 5.2. עבור העתקה $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ בין מרחבי מכפלה פנימית, התנאים הבאים שקולים:

1. T אופרטור חסום.
2. T אופרטור רציף.
3. T אופרטור רציף בנקודה $h_0 \in \mathcal{H}$ כלשהי.

המשפט הבא מהווה כלי נוח לבדיקת חסימות של אופרטור, ולמעשה גם כלי נוח להגדרת אופרטור חסום על מרחב הילברט נתון.

טענה 5.3. יהא $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ תת-מרחב וקטורי צפוף ב-$\mathcal{H}$. נניח כי $\mathcal{K}$ מרחב הילברט נוסף ו-$T : \mathcal{M} \to \mathcal{K}$ העתקה ליניארית חסומה. אם:

$$\sup \{\|Tx\| | x \in \mathcal{M},\ \|x\| = 1\} = L < +\infty,$$

קיים אופרטור חסום יחיד $\tilde{T} : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, כך שמתקיים:

- $\tilde{T}\Big|_{\mathcal{M}} = T$.
- $\left\|\tilde{T}\right\| = L$.

יתרה מכך, אם $\|Tx\| = \|x\|$ לכל $x \in \mathcal{M}$, אזי $\left\|\tilde{T}h\right\| = \|h\|$ לכל $h \in \mathcal{H}$.

5.1.1 תכונות של אופרטורים חסומים

סימון. אוסף כל האופרטורים הליניאריים החסומים ממרחב הילברט $\mathcal{H}$ למרחב הילברט $\mathcal{K}$ מסומן על ידי $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, ובמקרה של $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ נסמן גם $B(\mathcal{H})$.

הגדרה 5.4 (גרעין ותמונה)**.** לכל $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, נגדיר את ה**גרעין** של T להיות הקבוצה:

$$\ker (T) = \{h \in \mathcal{H} | Th = 0\},$$

ואת ה**תמונה** של T להיות הקבוצה:

$$\operatorname{Im} (T) = \{Th | h \in \mathcal{H}\}.$$

שימו לב שהגרעין של אופרטור חסום הוא תמיד תת-מרחב סגור. התמונה של אופרטור חסום לא חייבת להיות סגורה.

טענה 5.5. יהיו $S, T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. אזי $S = T$ אם ורק אם:

$$\langle Sh, k\rangle = \langle Th, k\rangle, \quad \forall h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}.$$

במקרה שבו $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, מתקיים $S = T$ אם ורק אם:

$$\langle Sh, h\rangle = \langle Th, h\rangle, \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

הערה. החלק השני של הטענה נכון רק בהנחה ומרחב ההילברט שלנו מרוכב.

5.1.2 פונקציונלים ליניאריים ונוסחת ההצגה של ריס

הגדרה 5.6 (פונקציונל ליניארי)**.** יהא $\mathcal{H}$ מרחב מכפלה פנימית. אופרטור ליניארי $\Phi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ מכונה **פונקציונל ליניארי**. מרחב כל הפונקציונלים הליניאריים החסומים על $\mathcal{H}$ מסומן ב-$\mathcal{H}^*$.

דוגמה חשובה. עבור $g \in \mathcal{H}$, הפונקציונל $\Phi_g(h) = \langle h, g\rangle$ הוא פונקציונל ליניארי חסום, עם $\|\Phi_g\| = \|g\|$. המשפט הבא מראה שאלו הם כל הפונקציונלים במרחבי הילברט.

משפט 5.7 (נוסחת ההצגה של ריס)**.** יהא $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ו-$\Phi \in \mathcal{H}^*$. אזי, קיים (ויחיד!) איבר $g \in \mathcal{H}$, שעבורו $\Phi(h) = \langle h, g\rangle$, ובפרט $\|\Phi\| = \|g\|$.

5.1.3 האופרטור הצמוד

טענה 5.8. יהיו $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ מרחבי הילברט. אזי, לכל $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ קיים אופרטור יחיד $S \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ שעבורו:

$$\langle Th, k\rangle = \langle h, Sk\rangle, \quad \forall h \in \mathcal{H}, k \in \mathcal{K}.$$

הגדרה 5.9 (האופרטור הצמוד)**.** עבור $\mathcal{H}, \mathcal{K}, T$ המופיעים בטענה 5.8, נסמן ב-T^* את האופרטור היחיד שעבורו:

$$\langle Th, k\rangle = \langle h, T^*k\rangle. \tag{5.1}$$

טענה 5.10 (תכונות האופרטור הצמוד)**.** יהיו S, T אופרטורים חסומים בין מרחבי הילברט. אזי:

1. $(T^*)^* = T$.
2. $\|T\| = \|T^*\|$.
3. $(aS + bT)^* = \bar{a}S^* + \bar{b}T^*$ לכל $a, b \in \mathbb{C}$.
4. $(ST)^* = T^*S^*$.
5. $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.
6. אם T הפיך כך ש-T^{-1} חסום, אזי T^* הפיך ומתקיים $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.

טענה 5.11 (גרעין ותמונה של האופרטור הצמוד)**.** יהא $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. אזי:

1. $(\mathrm{Im}\,(T))^\perp = \ker\,(T^*)$.
2. $(\mathrm{Im}\,(T^*))^\perp = \ker\,(T)$.
3. $(\ker\,(T))^\perp = \overline{\mathrm{Im}\,(T^*)}$.
4. $(\ker\,(T^*))^\perp = \overline{\mathrm{Im}\,(T)}$.

5.1.4 סוגי אופרטורים

הגדרה 5.12 יהא $T \in B(\mathcal{H})$. אזי אומרים כי T:

- **נורמלי** אם $T^*T = TT^*$.
- **צמוד לעצמו** אם $T^* = T$.
- **חיובי** אם $\langle Th, h\rangle \geq 0$ לכל $h \in \mathcal{H}$.

ואם $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, אזי T מכונה:

- **כיווץ/מכווץ** אם $\|Th\| \leq \|h\|$ לכל $h \in \mathcal{H}$.
- **איזומטריה** אם $\|Th\| = \|h\|$ לכל $h \in \mathcal{H}$.
- **אוניטרי** אם T הפיך וגם $\langle Th, Tg\rangle = \langle h, g\rangle$ לכל $h, g \in \mathcal{H}$.

טענה 5.13 $T \in B(\mathcal{H})$ הוא אופרטור צמוד לעצמו, אם ורק אם $\langle Th, h\rangle \in \mathbb{R}$ לכל $h \in \mathcal{H}$.

טענה 5.14 עבור $T \in B(\mathcal{H})$, התנאים הבאים שקולים:

- T איזומטריה.
- $\langle Th, Tg\rangle = \langle h, g\rangle$ לכל $h, g \in \mathcal{H}$.
- $T^*T = I$.

טענה 5.15 $T \in B(\mathcal{H})$ הוא אופרטור אוניטרי אם ורק אם:

$$T^*T = TT^* = I.$$

5.2 תרגיל - חישובים עם האופרטור הצמוד

האופרטור $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ שהגדרנו בתרגול הקודם בתור ההרחבה היחידה של:

$$\tilde{V}f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

מהפונקציות הרציפות למרחב כולו, מכונה **אופרטור וולטרה**. בתרגיל זה נחקור תכונות נוספות שלו, בעזרת השפה החדשה שפיתחנו לאופרטורים חסומים על מרחבי הילברט.

1. חשבו את האופרטור הצמוד V^* וקבעו האם V אופרטור נורמלי/אוניטרי/צמוד לעצמו.
2. חשבו את הגרעין של V.
3. חשבו את הגרעין של V^*.

4. הראו כי לאופרטור וולטרה אין אף ערך עצמי.

5. על ידי הכפלה וחילוק ב-$\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$, מצאו את $\|V\|$ במדויק.

פתרון.

1. בתרגול הקודם הוכחנו כי V אופרטור חסום. יתרה מכך, הוכחנו כי $\|V\| \leq 1$, מה שאומר ש-V אופרטור מכווץ. משפט 5.8 מבטיח את קיומו של אופרטור צמוד $V^* \in B\left(L^2[0,1]\right)$ המקיים לכל $f, g \in L^2[0,1]$:

$$\langle Vf, g\rangle = \langle f, V^*g\rangle. \tag{5.2}$$

כדי למצוא את האופרטור V^*g, נשתמש בטכניקה הבאה:

- תחילה, נניח כי $g \in C([0,1])$ ונמצא איבר V^*g שעבורו נוסחה (5.2) מתקיימת לכל $f \in C([0,1])$. מצפיפות הרציפות ומרציפות המכפלה הפנימית, נסיק כי האיבר V^*g שמצאנו מקיים את הנוסחה לכל $f \in L^2[0,1]$, ומטענה 5.8 נסיק כי V^*g הוא אכן הוקטור הנכון.
- היות ומצאנו את V^*g לכל $g \in C([0,1])$, והיות וטענה 5.8 מבטיחה את חסימות V^*g, נסיק כי הנוסחה של V^* עבור איבר כללי ב-$L^2[0,1]$ מתקבלת בתור ההרחבה הרציפה היחידה של האופרטור שמצאנו מעל הרציפות.

נניח, אם כן, כי f, g שתיהן פונקציות רציפות. על פי משפט פוביני (והחלפה של סדר האינטגרציה), מתקיים:

$$\langle Vf, g\rangle = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\left(\int_t^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t = \langle f, V^*g\rangle,$$

כאשר:

$$V^*g(x) := \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

על פי הסכמה שתיארנו קודם, ברור כי זו אכן הנוסחה שמגדירה את V^* באופן יחיד על כל המרחב. נותר לנו לבדוק האם מדובר באופרטור נורמלי/אוניטרי/צמוד לעצמו. כדי לעשות זאת נחשב את VV^* ואת V^*V (שימו לב שגם כאן ניתן לחשוב על הנוסחה כנכונה מעל הרציפות, ובעלת הרחבה יחידה לכל המרחב).

$$VV^*f(x) = \int_0^x \left(\int_t^1 f(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t = \iint_{D_1(x)} f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t,$$

$$V^*Vf(x) = \int_x^1 \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t = \iint_{D_2(x)} f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t,$$

כאשר התחומים D_1, D_2 נתונים על ידי:

$$D_1(x)=\left\{(u,t)\middle|\begin{matrix}0\le t\le x\\ t\le u\le 1\end{matrix}\right\},\quad D_2\left(x\right)=\left\{(u,t)\middle|\begin{matrix}x\le t\le 1\\ 0\le u\le t\end{matrix}\right\}.$$

נבחר את הפונקציה $f(u)=1$, ונקבל כי $VV^*f(1)=\frac{1}{2}$, היות והאינטגרל הוא בדיוק שטח משולש ישר זווית בעל ניצבים באורך 1, ואילו $V^*Vf(1)=0$, כאינטגרל על תחום עם שטח אפס. מכאן שהאופרטור V אינו נורמלי, ובאופן אוטומטי לא יכול להיות אוניטרי/צמוד לעצמו.

2. נתחיל מהמקרה שבו f פונקציה רציפה. במקרה כזה, הפונקציה:

$$Vf(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

היא פונקציה גזירה ברציפות שנגזרתה היא f, על פי המשפט היסודי. לכן:

$$f\in\ker\left(V\right)\Longrightarrow Vf(x)=0\Longrightarrow\left(Vf\right)'\left(x\right)=f(x)=0,$$

ולכן f תהיה פונקציית האפס. כמובן שזה לא מספיק, וזה לא פותר את הבעיה למקרה שבו $f\in L^2\left[0,1\right]$ לאו דווקא רציפה. כדי לפתור את הבעיה הזאת נשתמש בתוצאה מהתרגול הקודם, ונזהה כי אם:

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(n\right)e^{2\pi inx},$$

אזי:

$$Vf(x)=\hat{f}(0)x+\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq0}}\frac{\hat{f}(n)}{2\pi in}e^{2\pi inx}-\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq0}}\frac{\hat{f}(n)}{2\pi in}.$$

ומכאן שאם $Vf(x)=0$, נסיק שמתקיים:

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq0}}\frac{\hat{f}(n)}{2\pi in}-\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq0}}\frac{\hat{f}(n)}{2\pi in}e^{2\pi inx}=\hat{f}(0)x.$$

מצד שני, ידוע לנו כי:

$$\hat{f}(0)x=\hat{f}(0)\left(\frac{1}{2}-\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\n\neq0}}\frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in}\right).$$

מהשוואה בין שני טורי הפוריה שקיבלנו, נוכל להסיק כי $\hat{f}(n)=\hat{f}(0)$ לכל $n\in\mathbb{Z}$. אך מנוסחת פרסבל:

$$\left\|f\right\|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(0)\right|^2,$$

וזה אפשרי אם ורק אם $\hat{f}(n) = 0$ לכל $n \in \mathbb{Z}$, ולכן $f = 0$.

3. ניתן לנסות ולפתח נוסחה ל-$V^* f$ במונחי מקדמי הפוריה של f, בדומה לתרגיל הקודם. אך למעשה, נוכל לחסוך הרבה מן העבודה ולהשתמש בטענה 5.11, ובחקירה של האופרטור V. כלומר, נשתמש בכך שמתקיים:

$$\ker(V^*) = (\operatorname{Im}(V))^{\perp}.$$

עתה, נוכל לזהות (על ידי בחירה של פונקציות מוכרות) משפחה גדולה של פונקציות הנמצאות בתמונה של V. כך למשל, אם $f_n(x) = (n+1)x^n$ (עבור $n = 0, 1, 2, \ldots$), מקבלים כי:

$$V f_n(x) = x^{n+1}.$$

היות והאוסף $\{x, x^2, x^3, \ldots\}$ פורש תת מרחב צפוף ב-$L^2[0,1]$, נסיק כי המרחב הניצב ל-$\operatorname{Im}(V)$ טריוויאלי, ולכן V^* חד-חד ערכי.

4. התוצאה הזאת לא אינטואיטיבית כלל. במרחבים וקטוריים סוף ממדיים, לכל אופרטור מעל המרוכבים יש לפחות ערך עצמי אחד, כמסקנה מהמשפט היסודי של האלגברה. מתברר שבמרחבים אינסוף ממדיים, מתרחשות גם תופעות מהסוג הזה. תחילה, נשתמש בסעיף ב' כדי להסיק שאין פונקציה עצמית של ערך עצמי 0, כי אם $f \in L^2[0,1]$ מקיימת $Vf = 0$, נקבל כי $f = 0$. נניח עתה כי $\lambda \neq 0$ וכי $f \in L^2[0,1]$ מקיימת:

$$Vf = \lambda f.$$

על פי התרגול הקודם, Vf היא פונקציה רציפה (או שקולה לכזו, כך שאפשר להניח שהיא הנציגה הרציפה) ולכן λf פונקציה רציפה, ומכאן שגם f עצמה. אך עתה, האינטגרל Vf הוא צובר שטח של פונקציה רציפה ולכן גזיר ברציפות על פי המשפט היסודי, ומכאן שגם f. אם נגזור את שני אגפי המשוואה נקבל כי לכל $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \lambda f'(x) \Longrightarrow f(x) = Ce^{\frac{1}{\lambda}x}.$$

כדי לקבוע את C, נזהה כי $Vf(0) = 0$, ולכן $C = 0$, מה שגורר בתורו כי $f = 0$. ואכן, קיבלנו כי אין פונקציה עצמית עבור ערך עצמי שאינו אפס.

5. נשתמש בהדרכה, ונניח כי $f \in C([0,1])$ לשם נוחות:

$$\begin{aligned}\|Vf\|^2 &= \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left|\int_0^x \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\frac{f(t)}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}}\,\mathrm{d}t\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x \frac{|f(t)|^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

את האינטגרל השמאלי אנחנו יודעים לחשב, ואת האינטגרל הימני לא. יחד עם זאת, לאחר חישוב האינטגרל הראשון,

נשתמש במשפט פוביני, ונוכל לקבל אינטגרל שניתן להעריך:

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \int_0^x \frac{|f(t)|^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{|f(t)|^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)} \int_t^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi^2} \|f\|^2 ,$$

ומכאן שמתקיים $\|V\| \le \frac{2}{\pi} < 1$. כדי להראות שאכן מתקבל שוויון, נשים לב כי:

$$\left\|V \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\|^2 = \int_0^1 \left(\int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi^2}$$

בעוד שמתקיים $\left\|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\|^2 = \frac{1}{2}$. לכן, לאחר חלוקה, מקבלים כי:

$$\frac{\left\|V \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\|}{\left\|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right\|} = \frac{2}{\pi},$$

והמקסימום אכן מתקבל כדרוש.

נקודה למחשבה. התבוננו באופרטור V^*V ובפונקציה $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. האם תוכלו למצוא סיבה לבחירה ה"שרירותית" שלנו בפונקציה זו כמועמדת לנורמה של V?

5.3 תרגיל - מטריצה מייצגת ביחס לבסיס אורתונורמלי

בהנתן $f \in C([0,1])$, נזכיר שהגדרנו את הקונבולוציה $f * g$ בתור הפונקציה:

$$f * g(x) = \int_0^1 f(t-x)g(t) \, \mathrm{d}t,$$

עבור g רציפה למקוטעין וכאשר האינטגרל מחושב בעזרת ההרחבה המחזורית של f.

1. נסמן ב-$C_f : C([0,1]) \to L^2([0,1])$ את האופרטור $C_f g = f * g$ לכל g רציפה. הוכיחו כי C_f חסום וכי ניתן להרחיבו בצורה רציפה לכל $L^2([0,1])$, וחשבו את $\|C_f\|$.
2. חשבו את C_f^*, וקבעו מתי C_f צמוד לעצמו.
3. עבור הבסיס הסטנדרטי, $\left\{e^{2\pi i n x}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, חשבו את המטריצה המייצגת $[C_f]$, והסיקו מהי המטריצה המייצגת של $\left[C_f^*\right]$. הסיקו כי C_f אופרטור נורמלי.

4. תהא $f \in L^2[0,1]$. היעזרו בהצגה המטריצית כדי להגדיר את C_f בצורה שתתלכד עם המקרה הרציף. הראו כי הגדרה זו רציפה, במובן שאם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2[0,1]$ סדרה מתכנסת ל-$f \in L^2[0,1]$, אזי C_{f_n} מתכנסת ל-C_f בנורמה האופרטורית.

5. לכל $f \in L^2[0,1]$, הוכיחו כי $C_f g$ היא פונקציה רציפה לכל $g \in L^2[0,1]$.

פתרון.

1. כפי שראינו, לכל g רציפה מתקיים:
$$\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n),$$
ולכן, על פי זהות פרסבל (2.8), מתקיים:
$$\|C_f g\|^2 = \|f * g\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|^2 |\hat{g}(n)|^2 \le \left(\max_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|^2\right) \|g\|^2$$
לכן, C_f חסום על ידי $\left\|\hat{f}\right\|_{\infty}$, וניתן להרחיבו לאופרטור חסום על כל $L^2([0,1])$. שימו לב שבמקרה זה מקבלים כי $\left\|\hat{f}\right\|_{\infty}$ הוא גם המקסימום. שהרי, $\hat{f}(n)$ דועכת לאפס כאשר $n \to \pm\infty$ על פי הלמה של רימן לבג, מה שמבטיח שקיים אינדקס n_0, שבו $\left|\hat{f}(n_0)\right|$ מקסימלי. במקרה כזה, וקטור הבסיס $e^{2\pi i n_0 x}$ מקיים:
$$\left\|C_f e^{2\pi i n_0 x}\right\| = \left|\hat{f}(n_0)\right| = \left\|\hat{f}\right\|_{\infty},$$
ולכן המקסימום מתקבל, ונסיק כי $\|C_f\| = \left\|\hat{f}\right\|_{\infty}$.

2. בדומה לתרגיל הקודם, מספיק שנחשב את $\langle C_f g, h\rangle$ כאשר g, h פונקציות רציפות. במקרה זה ניתן להשתמש במשפט פוביני ולכתוב:
$$\langle C_f g, h\rangle = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t\right)\bar{h}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(t)\overline{\int_0^1 \bar{f}(t-x)h(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t = \langle g, C_f^* h\rangle,$$
כאשר:
$$C_f^* h(x) = C_{\check{\bar{f}}} h(x),$$
כאשר $\check{\bar{f}}(x) = \bar{f}(-x)$. היות והקשר שמצאנו נכון לכל $g \in L^2[0,1]$, נסיק כי זו אכן הנוסחה ל-C_f^* לכל h רציפה, ומכך שהוא בהכרח אופרטור חסום (על פי משפט 5.8), ניתן להרחיבו בצורה יחידה למרחב כולו. שימו לב כי $C_f^* = C_f$ בדיוק כאשר $f(x) = \bar{f}(-x)$ לכל x (שימו לב שהנחנו כי f רציפה כך שניתן לדבר על השוויון הנקודתי).

3. בהנתן מרחב הילברט $\mathcal{H}$ ובסיס אורתונורמלי $\{e_i\}_{i\in I}$, נזכיר כי המטריצה המייצגת של T מוגדרת להיות:
$$[T] = (t_{ij})_{i,j\in I}, \quad t_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle.$$

בצורה כזאת, ניתן לזהות מספר תכונות שימושיות:

- **הצמדה.** בדומה למקרה הסוף ממדי, $[T^*] = (\bar{t}_{ji})_{i,j\in I}$, שהרי:

$$\langle T^* e_j, e_i\rangle = \overline{\langle Te_i, e_j\rangle} = \bar{t}_{ji}.$$

- **הרכבה.** בדומה למקרה הסוף ממדי $[ST] = [S]\,[T]$:

$$\langle STe_j, e_i\rangle = \left\langle \sum_{k\in I} St_{kj}e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k\in I} s_{ik}t_{kj}.$$

- **קשר לאופרטור המקורי.** לכל $h \in \mathcal{H}$ מגדירים $U : \mathcal{H} \to \ell^2(I)$ על ידי $Ue_i = f_i$ כאשר f_i הוא וקטור הבסיס הסטנדרטי של $\ell^2(I)$, ואז מקבלים כי:

$$T = U^*\,[T]\,U, \tag{5.3}$$

כאשר הפעולה של $[T]$ על וקטור ב-$\ell^2(I)$ מתבצעת בדיוק כמו במקרה הסוף ממדי, ככפל של מטריצה משמאל בוקטור עמודה.

במקרה שלנו, יתקיים:

$$[C_f]_{mn} = \langle C_f e^{2\pi imx}, e^{2\pi inx}\rangle = \hat{f}(m)\delta_{m,n},$$

כלומר:

$$[C_f] = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \hat{f}(-1) & 0 & 0 & \\ & 0 & \hat{f}(0) & 0 & \\ & 0 & 0 & \hat{f}(1) & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

עתה, ניתן להשתמש בנוסחה למטריצה של האופרטור הצמוד כדי לכתוב:

$$[C_f^*] = [C_f]^* = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \bar{\hat{f}}(-1) & 0 & 0 & \\ & 0 & \bar{\hat{f}}(0) & 0 & \\ & 0 & 0 & \bar{\hat{f}}(1) & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

היות והמטריצות $\left[C_f^*\right]$, $[C_f]$ אלכסוניות, הן בוודאי מתחלפות בכפל, ולכן:

$$C_fC_f^* = U^*\left[C_fC_f^*\right]U = U^*\,[C_f]\left[C_f^*\right]U = U^*\left[C_f^*\right][C_f]\,U = U^*\left[C_f^*C_f\right]U = C_f^*C_f,$$

מה שמוכיח כי C_f תמיד אופרטור נורמלי.

4. שימו לב שבזכות הקשר האוניטרי בין הצגה מטריצית לבין אופרטור, כל מטריצה $[T]$ המגדירה אופרטור חסום על $\ell^2(I)$, מגדירה בתורה אופרטור חסום על $\mathcal{H}$ על פי נוסחה (5.3). לכל $f \in L^2[0,1]$, ניתן לזהות כי המטריצה האלכסונית שאיבריה הם $\hat{f}(n)$, מגדירה אופרטור חסום על $\ell^2(\mathbb{Z})$. אכן, אם נסמן מטריצה זו ב-T_f, נקבל כי לכל $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ מנורמה 1:

$$\|T_f x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|^2 |x_n|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| = \|f\|^2 .$$

כלומר, מדובר באופרטור חסום ולמעשה $\|T_f\| \leq \|f\|$. מכאן, שניתן להשתמש בנוסחה זו כדי להגדיר את C_f על ידי:

$$C_f g = U^* T_f U g,$$

ובצורה מפורשת מקבלים כי:

$$C_f g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\hat{g}(n)e^{2\pi inx}.$$

כדי להוכיח את הרציפות, נשים לב כי לכל זוג $f, \tilde{f} \in L^2[0,1]$, מתקיים:

$$C_f g - C_{\tilde{f}} g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\hat{f}(n) - \hat{\tilde{f}}(n)\right)\hat{g}(n)e^{2\pi inx} = C_{f-\tilde{f}} g,$$

ולכן, אם $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ב-$L^2[0,1]$, מתקיים:

$$\|C_{f_n} - C_f\| = \|C_{f_n - f}\| \leq \|f_n - f\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

5. כדי להוכיח שהתמונה של האופרטור מוכלת ברציפות, נשתמש בנוסחה:

$$C_f g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\hat{g}(n)e^{2\pi inx}.$$

ניתן לזהות כי האגף הימני הוא טור מתכנס בהחלט ובמידה שווה, על פי אי שוויון קושי שוורץ וזהות פרסבל:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| |\hat{g}(n)| \leq \|f\| \|g\| ,$$

ומבחן M של ויישרטראס, יאפשר לנו להסיק את הדרוש.

5.4 תרגיל - הצגת בלוקים ביחס לתת-מרחב סגור

יהא $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ויהא $\mathcal{M}$ תת-מרחב סגור של $\mathcal{H}$. נסמן ב-$P = P_{\mathcal{M}}$ את ההטלה האורתוגונלית על $\mathcal{M}$ וב-$Q = I - P$ את ההטלה האורתונוגלית על $\mathcal{M}^{\perp}$. ניתן לזהות את $\mathcal{H}$ עם הסכום הישר:

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp} = \left\{(m,n) \middle| m \in \mathcal{M}, n \in \mathcal{M}^{\perp}\right\},$$

עם המכפלה הפנימית:

$$\langle (m,n), (m_2,n_2) \rangle = \langle m, m_2 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle n, n_2 \rangle_{\mathcal{H}}.$$

ההעתקה $U : \mathcal{H} \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ המוגדרת על ידי $Uh = (Ph, Qh)$ היא העתקה אוניטרית המאפשרת לנו את הזיהוי, כך שבמשך התרגיל (ובשאר הקורס) לא נכתוב זאת במפורש, ונזהה את שני המרחבים כמוסכמה.

1. הראו כי לכל $T \in B(\mathcal{H})$, מתקיים (תחת הזיהוי):

$$Th = (T_{11}m + T_{12}n, T_{21}m + T_{22}n),$$

כאשר $m = Ph, n = Qh$, וכן:

$$T_{11} \in B(\mathcal{M}),\ T_{12} \in B(\mathcal{M}^{\perp}, \mathcal{M}),\ T_{21} \in B(\mathcal{M}, \mathcal{M}^{\perp}),\ T_{22} \in B(\mathcal{M}^{\perp}).$$

כאשר האופרטורים T_{ij} נקבעים ביחידות. שימו לב כי מכאן מקבלים:

$$Th = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix},$$

והמטריצה באגף הימני מכונה **הפירוק לבלוקים** של T ביחס ל-$\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$.

2. הראו כי לכל T_{ij} כמקודם, קיים $T \in B(\mathcal{H})$ כך שהפירוק לבלוקים שלו נתון על ידי האופרטורים הנ"ל (כלומר, הקשר בין אופרטור לפירוק שלו לבלוקים הוא קשר הפיך).

3. עבור $T \in B(\mathcal{H})$, חשבו את הפירוק לבלוקים של T^*.

4. הוכיחו כי $\mathcal{M}$ אינווריאנטי ל-T (כלומר $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$) אם ורק אם $T_{21} = 0$.

5. תת מרחב מכונה **מצמצם** עבור T, אם הוא וגם המשלים האורתוגונלי שלו אינווריאנטיים ל-T. מצאו תנאי מספיק והכרחי (בתוך הפירוק לבלוקים) לכך ש-$\mathcal{M}$ מצמצם עבור T.

פתרון.

1. ראשית, מליניאריות נובע כי:

$$Th = Tm + Tn,$$

כאשר Tm, Tn לאו דווקא שייכים ל-$\mathcal{M}$ או ל-$\mathcal{M}^{\perp}$. לכן, קיים להם פירוק יחיד מהצורה:

$$Tm = PTm + QTm, \quad Tn = PTn + QTn.$$

כלומר, תחת הזיהוי $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ מתקיים:

$$Th = (PTm + PTn, QTm + QTn),$$

ולכן:

$$T_{11} = PT|_{\mathcal{M}}, T_{12} = PT|_{\mathcal{M}^{\perp}}, T_{21} = QT|_{\mathcal{M}}, T_{22} = QT|_{\mathcal{M}^{\perp}}.$$

שימו לב כי מדובר באופרטורים ליניאריים (צמצום של הרכבה של אופרטורים), והיחידות נובעית מהיחידות של הפירוקים לתת-מרחב סגור והמשלים האורתוגונלי שלו. החסימות נובעת מכך שמתקיים (למשל):

$$\| PT|_{\mathcal{M}} \|_{\mathcal{M}} \leq \|PT\| \leq \|P\| \|T\| \leq \|T\|,$$

ובאופן דומה מוכיחים לשאר האופרטורים. (כלומר, כל אחד מהבלוקים בעל נורמה קטנה/שווה לנורמה של האופרטור הגדול).

2. ראשית, ברור כי מדובר באופרטור ליניארי. כל שנותר להוכיח הוא שמדובר באופרטור חסום. ואכן:

$$\begin{aligned}
\|Th\|^2 &= \|T_{11}m + T_{12}n\|^2 + \|T_{21}m + T_{22}n\|^2 \\
&\leq (\|T_{11}\| \|m\| + \|T_{12}\| \|n\|)^2 + (\|T_{21}\| \|n\| + \|T_{22}\| \|n\|)^2 \\
&\overset{C:=\max\limits_{i,j}\|T_{ij}\|}{\leq} C^2 \left(2\|m\|^2 + 2\|n\|^2 + 4\|m\| \|n\|\right) \\
&\overset{\text{אי שוויון הממוצעים}}{\leq} 4C^2 \left(\|m\|^2 + \|n\|^2\right) = 4C^2 \|h\|^2
\end{aligned}$$

לכן, מדובר באופרטור חסום, ובפרט:

$$\|T\| \leq 2 \max_{i,j} \|T_{ij}\|.$$

3. נדרוש כי לכל $h = m + n, g = m_2 + n_2$ יתקיים $\langle Th, g \rangle = \langle h, T^* g \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle Th, g \rangle &= \langle T_{11}m + T_{12}n, m_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle T_{21}m + T_{22}n, n_2 \rangle_{\mathcal{M}^{\perp}} \\
&= \langle T_{11}m, m_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle T_{12}n, m_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle T_{21}m, n_2 \rangle_{\mathcal{M}^{\perp}} + \langle T_{22}n, n_2 \rangle_{\mathcal{M}^{\perp}} \\
&= \langle m, T_{11}^* m_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle n, T_{12}^* m_2 \rangle_{\mathcal{M}^{\perp}} + \langle m, T_{21}^* n_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle n, T_{22}^* n_2 \rangle_{\mathcal{M}^{\perp}} \\
&= \langle m, T_{11}^* m_2 + T_{21}^* n_2 \rangle_{\mathcal{M}} + \langle n, T_{12}^* m_2 + T_{22}^* n_2 \rangle_{\mathcal{M}^{\perp}} \\
&= \langle h, T^* g \rangle,
\end{aligned}$$

כאשר:

$$T^* = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{22}* \end{pmatrix}.$$

4. על מנת שיתקיים $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ עלינו לדרוש לכל $m \in \mathcal{M}$, $Tm = PTm$, כלומר $QTm = 0$. בסימונים מהסעיפים הקודמים, זה קורה אם ורק אם $T_{21} = 0$.

5. בדומה לסעיף הקודם, עלינו לדרוש תחילה כי $T_{21} = 0$. התנאי הנוסף, קרי $T\mathcal{M}^\perp \subset \mathcal{M}^\perp$, מתקיים אם ורק אם $T_{12} = 0$, משיקולים דומים.

5.5 תרגיל - תכונות נוספות של האופרטור הצמוד

יהא $\mathcal{H}$ מרחב הילברט מרוכב ויהא $T \in B(\mathcal{H})$.

1. הוכיחו כי $T = T^*$ אם ורק אם $\langle Th, h\rangle \in \mathbb{R}$ לכל $h \in \mathcal{H}$.
2. הוכיחו כי האופרטורים T^*T ו-TT^* הם אופרטורים חיוביים.
3. נניח כי $\|T\| = 1$. הוכיחו כי אם $Th = h$, אזי גם $T^*h = h$.

פתרון.

1. בכיוון הראשון, נניח כי $T = T^*$. במקרה כזה, לכל $h \in \mathcal{H}$, מתקיים:

$$\langle Th, h\rangle = \langle h, Th\rangle = \overline{\langle Th, h\rangle}$$

ולכן $\langle Th, h\rangle \in \mathbb{R}$. עתה, נניח כי $\langle Th, h\rangle \in \mathbb{R}$ לכל $h \in \mathcal{H}$. במרחב הילברט מרוכב, ניתן לחשב את $\langle Th, g\rangle$ על ידי שימוש בזהות הפולריזציה:

$$\langle Th, g\rangle = \frac{\langle T(h+g), h+g\rangle - \langle T(h-g), h-g\rangle + i\langle T(h+ig), h+ig\rangle - i\langle T(h-ig), h-g}{4}$$

בצורה כזאת ניתן לראות כי:

$$\overline{\langle Tg, h\rangle} = \frac{\overline{\langle T(g+h), g+h\rangle} - \overline{\langle T(g-h), g-h\rangle} - i\overline{\langle T(g+ih), g+ih\rangle} + i\overline{\langle T(g-ih), g-ih\rangle}}{4}$$

היות וכל המכפלות הפנימיות שמופיעות במונה ממשיות, אפשר להתעלם מסימן ההצמדה, ולקבל כי:

$$= \frac{\langle T(h+g), h+g\rangle - \langle T(g-h), g-h\rangle - i\langle T(g+ih), g+ih\rangle + i\langle T(g-ih), g-ih\rangle}{4}$$

עתה, נוציא מהמכפלה הפנימית השניה סימן מינוס מהרכיב הראשון והשני (מה שאומר ששניהם מצטמצמים), ומהמכפלה הפנימית השלישית נוציא i משני הרכיבים (ושוב, הוא מצטמצם). באופן דומה, ניתן להוציא $-i$ כגורם משותף, ולקבל

כי:

$$\overline{\langle Tg, h\rangle} = \langle Th, g\rangle,$$

ומצד שני:

$$\overline{\langle Tg, h\rangle} = \langle h, Tg\rangle,$$

מה שאומר שלכל $g, h \in \mathcal{H}$:

$$\langle Th, g\rangle = \langle h, Tg\rangle.$$

ומכאן ש-$T^* = T$ כדרוש (מיחידות האופרטור הצמוד).

2. לכל $h \in \mathcal{H}$:

$$\langle T^*Th, h\rangle = \langle Th, Th\rangle = \|Th\|^2 \geq 0,$$

ובאופן דומה מוכיחים עבור TT^*.

3. נניח כי $Th = h$ וכי $\|T\| = 1$. אזי $\|T^*\| = 1$ ולכן:

$$1 = \|Th\|^2 = \langle Th, Th\rangle = \langle Th, h\rangle = \langle h, T^*h\rangle \leq \|h\| \, \|T^*\| \, \|h\| = 1.$$

מכאן נובע כי אי השוויון שכתבנו (אי שוויון קושי שוורץ) חייב להיות שוויון. כידוע, שוויון באי שוויון קושי שוורץ מתקיים אם ורק אם הוקטורים תלוים ליניארית. כלומר, קיים λ שעבורו:

$$T^*h = \lambda h,$$

וכדי למצוא את λ, נשים לב כי:

$$\lambda = \langle \lambda h, h\rangle = \langle T^*h, h\rangle = \langle h, Th\rangle = \langle h, h\rangle = 1,$$

וזה מוכיח את הדרוש.

6
אופרטורים חסומים מעל מרחבי הילברט

6.1 תזכורות מההרצאה

הגדרה 6.1 (נורמה)**.** בהנתן מרחב וקטורי ממשי/מרוכב X, **נורמה** היא פונקציה $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ המקיימת:

- **חיוביות.** $\|x\| \geq 0$ לכל $x \in X$, ושוויון מתקיים אם ורק אם $x = 0$.
- **הומוגניות.** $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ לכל $x \in X$ ו-$\lambda \in \mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$).
- **אי שוויון המשולש.** $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ לכל $x, y \in X$.

מרחב וקטורי X עם נורמה שמוגדרת עליו מכונה **מרחב נורמי**.

הגדרה 6.2 (כדור היחידה הסגור)**.** כדור היחידה הסגור של מרחב נורמי X, המסומן על ידי X_1, מוגדר להיות:

$$X_1 = \{x \in X | \|x\| \leq 1\}.$$

הגדרה 6.3 (מרחב בנך)**.** מרחב נורמי X מכונה **מרחב בנך** אם הוא שלם כמרחב מטרי ביחס למטריקה המושרית:

$$\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\|.$$

דוגמאות למרחבי בנך.

1. כל מרחב הילברט הוא מרחב בנך, ביחס לנורמה המושרית מן המכפלה הפנימית.
2. לכל $p \in [1, \infty)$ מגדירים לכל סדרה $x = (x_k)_k$:

$$\|x\|_p := \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

במידה וסכום זה מתכנס. אם הסדרה חסומה, מגדירים גם:

$$\|x\|_\infty := \sup_k |x_k| .$$

מעל $\mathbb{C}^n$, כל הפונקציות הללו הן נורמות, והמרחבים הנורמיים המוגדרים בעזרתן מסומנים ב-ℓ_n^p. כל המרחבים הללו הינם מרחבי בנך.

(א) לכל $p \in [1, \infty]$ מגדירים:

$$\ell^p = \left\{ x = (x_k)_{k=0}^\infty \subset \mathbb{C}^\mathbb{N} \middle| \|x\|_p < +\infty \right\} .$$

מרחבים אלו גם הם מרחבים נורמיים, ומתברר שהם גם שלמים, מה שהופך אותם למרחבי בנך.

הגדרה 6.4 (צמוד מעריכי)**.** אומרים כי $p, q \in [1, \infty]$, הם **צמודים מעריכיים** אם:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

טענה 6.5 (אי שוויון הלדר)**.** נניח כי $p, q \in [1, \infty]$ צמודים מעריכיים. אזי, לכל זוג סדרות $(x_k)_k, (y_k)_k$ (סופיות או אינסופיות), מתקיים:

$$\sum_k |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q . \tag{6.1}$$

טענה 6.6 (אי שוויון מינקובסקי)**.** לכל $p \in [1, \infty]$, ולכל זוג סדרות $(x_k)_k, (y_k)_k$ (סופיות/אינסופיות) מתקיים:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

טענה זו למעשה מהווה חלק מההוכחה כי $\|\cdot\|_p$ אכן נורמה, זהו בדיוק אי שוויון המשולש.

6.1.1 מרחבי השלמה

בדומה למרחבי הילברט, ומרחבים מטריים באופן כללי, גם למרחבי בנך קיים משפט השלמה.

משפט 6.7 (משפט ההשלמה)**.** לכל מרחב נורמי X, ניתן למצוא מרחב בנך Y ושיכון איזומטרי ליניארי $\iota : X \to Y$, כך ש-$\iota(X)$ צפופה ב-Y.

הגדרה 6.8 (אופרטורים חסומים בין מרחבים נורמיים)**.** יהיו X, Y מרחבים נורמיים. אופרטור ליניארי $T : X \to Y$ מכונה **חסום** אם ה**נורמה האופרטורית** שלו חסומה, כאשר זו מוגדרת על ידי:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| .$$

את מרחב האופרטורים החסומים מ-X ל-Y מסמנים ב-$B(X,Y)$ ובמידה ו-$X = Y$ נשתמש גם בסימון $B(X)$.

טענה 6.9. הנורמה האופרטורית היא נורמה על $B(X,Y)$.

גם לאופרטורים בין מרחבי בנך מגדירים גרעין ותמונה בדומה למקרה של מרחבי הילברט. גם במרחבי בנך, רציפות שקולה לחסימות ששקולה לרציפות בנקודה בודדת.

טענה 6.10. אם Y מרחב בנך, ו-X מרחב נורמי, המרחב $B(X,Y)$ עם הנורמה האופרטורית הינו מרחב בנך.

נסמן ב-I_X או I את אופרטור הזהות מ-X לעצמו. זוג הדוגמה הפשוטה ביותר לאופרטור ב-$B(X)$.

הגדרה 6.11 (אופרטור מכווץ)**.** אופרטור $T \in B(X,Y)$ מכונה **מכווץ/כיווץ** אם $\|T\| \le 1$.

הגדרה 6.12 (איזומטריה)**.** אופרטור $T \in B(X,Y)$ מכונה **איזומטריה** אם $\|Tx\| = \|x\|$ לכל $x \in X$.

6.1.2 המרחב הדואלי

הגדרה 6.13 (המרחב הדואלי)**.** יהא X מרחב נורמי. העתקה ליניארית מ-X לשדה הסקלרים שלו ($\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$) מכונה **פונקציונל ליניארי**. נסמן ב-X^* את מרחב כל הפונקציונלים הליניאריים החסומים על X. המרחב X^* מכונה **המרחב הדואלי** של X.

המרחב הדואלי הוא למעשה $B(X,\mathbb{F})$, והוא מצויד בנורמה האופרטורית:

$$\|f\| = \sup_{x \in X_1} |f(x)| .$$

שימו לב שהיות ושדה הסקלרים הוא מרחב בנך, המרחב הדואלי הוא תמיד מרחב בנך.

דוגמה חשובה. קיימת איזומטריה ליניארית והפיכה מ-$\left(\ell^1\right)^*$ ל-ℓ^∞, המוגדרת באופן הבא - לכל $b \in \ell^\infty$ נגדיר $\Phi_b \in \left(\ell^1\right)^*$ על ידי:

$$\Phi_b\left(a\right) = \sum_n a a_n b_n, \quad \forall a \in \ell^1.$$

בהרצאה, הוכחתם כי אכן מדובר באיזומטריה ליניארית והפיכה.

אנטי-דוגמה חשובה. בכיוון ההפוך של הדוגמה הקודמת, הראיתם בהרצאה כי קיימת איזומטריה מ-ℓ^1 לתוך $(\ell^\infty)^*$, אך היא (ככל הנראה) לא הפיכה. ההוכחה שאינה הפיכה חורגת במקצת מחומר הקורס.

בתרגיל הבית. תראו כי לכל $p,q \in (1,\infty)$ צמודים מעריכיים, קיימת איזומטריה ליניארית והפיכה מ-ℓ^p ל-$(\ell^q)^*$. עקב הזיהוי כותבים לעתים $(\ell^q)^* = \ell^p$.

6.1.3 התכנסות חלשה

הגדרה 6.14 (התכנסות חלשה)**.** אומרים שסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ במרחב נורמי X היא סדרה **מתכנסת חלש** ל-$x \in X$, אם לכל $f \in X^*$:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

במקרה כזה, מסמנים גם $x_n \rightharpoonup x$.

שימו לב כי התכנסות "רגילה"/חזקה (כלומר, בנורמה) גוררת התכנסות חלשה. ההיפך אינו בהכרח נכון.

משפט 6.15 (בנך-סקס)**.** יהא $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ונניח כי $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה כך ש-$h \rightharpoonup h_n$. אזי, קיימת תת סדרה $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ שסכומי סזארו שלה מתכנסים ל-h בנורמה. כלומר:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h_{n_k} = h.$$

את המשפט ניתן להוכיח בעזרת המשפט החשוב הבא:

משפט 6.16 (עקרון החסימות במידה שווה)**.** תהא $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת חלש במרחב הילברט $\mathcal{H}$. אזי, הסדרה חסומה, כלומר:

$$\sup_n \|h_n\| < +\infty.$$

6.2 תרגיל - אי שוויון הלדר

1. תהא $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ מטריצה, שניתן לזהות גם כהעתקה ליניארית $L_A : \ell_n^p \to \ell_m^r$. במונחי האיברים של המטריצה A, חשבו את הנורמה $\|A\|$ במקרה:

   (א) $p = 1, r \in [1,\infty]$.

   (ב) $p \in [1,\infty], r = \infty$.

2. הוכיחו את אי שוויון הלדר לפונקציות. כלומר - לכל $f,g \in C([a,b])$ ולכל p,q צמודים מעריכיים:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

פתרון.

1. בכל אחד מהמקרים, נתחיל במציאת חסם ולאחר מכן להוכיח שהוא הסופרמום, בכך שנראה כי הוא למעשה מקסימום.

   (א) על ידי שימוש באי שוויון המשולש, ובהומוגניות של הנורמה:

$$\|Ax\|_p = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i \right\|_p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|Ae_i\|_p$$

כאשר e_i הוא וקטור הבסיס הסטנדרטי. מכאן שמתקיים:

$$\|Ax\|_p \leq \left(\sup_i \|Ae_i\|_p \right) \|x\|_1 \, ,$$

ולכן $\|A\| \leq \sup_i \|Ae_i\|_p$. כדי להוכיח שמתקיים שוויון, נסמן ב-i_0 את האינדקס שבו מתקבל המקסימום ונקבל כי e_{i_0} הוא וקטור שבו מתקבל המקסימום של הנורמה האופרטורית. לכן:

$$\|A\| = \sup_i \|Ae_i\|_p = \sup_i \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ji}|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

   (ב) נשתמש בחישוב דומה. לכל $x \in \ell_n^p$:

$$\|Ax\|_\infty = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right| .$$

עבור כל אחד מהסכומים נשתמש באי שוויון הלדר ונכתוב:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p \, ,$$

ולכן:

$$\|Ax\|_\infty \leq \left(\sup_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \|x\|_p$$

מכאן נסיק כי:

$$\|A\| \leq \sup_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}} ,$$

כדי לגלות מתי הסופרמום מתקבל, נצטרך לעבוד קצת יותר קשה מאשר בסעיף הקודם. נניח כי i_0 היא השורה

של המטריצה, שנורמת q שלה היא המקסימלית. אנחנו יודעים שהרכיב ה-i_0 של הוקטור Ax, נתון על ידי:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j .$$

אי לכך, דרך טובה "להנדס" את הרכיב להיות הסופרמום הדרוש, הוא לבחור את x כך שמתקיים:

$$a_{i_0 j} x_j = \left| a_{i_0 j} \right|^q .$$

לשם כך נבחר:

$$x_j = \begin{cases} \bar{a}_{i_0 j} \left| a_{i_0 j} \right|^{q-2}, & a_{i_0 j} \neq 0 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases},$$

ונחשב את הנורמה של הוקטור:

$$\|x\|_p^p = \sum_{j=1}^{n} \left| a_{i_0 j} \right|^{qp-p} \overset{\substack{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \\ pq-p=q}}{=} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{i_0 j} \right|^q .$$

אי לכך, מתקיים:

$$\|Ax\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} \left| a_{i_0 j} \right|^q = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| a_{i_0 j} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| a_{i_0 j} \right|^q \right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| a_{i_0 j} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p$$

כך ש-x אכן ממש את הסופרמום, ונסיק כי:

$$\|A\| = \sup_i \left(\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

2. ניעזר באי-שוויון הלדר לסכומים. נניח כי $f(x), g(x)$ הן פונקציות פשוטות. כלומר, פונקציות מהצורה:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{[a_i,b_i]}, \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{[a_i,b_i]}.$$

במקרה כזה, מתקיים:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\left(b_i-a_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^n \alpha_i(b_i-a_i)^{\frac{1}{p}}\beta_i\left(b_i-a_i\right)^{\frac{1}{q}}\right|$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^n \left|\alpha_i\right|^p\left(b_i-a_i\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n \left|\beta_i\right|^q\left(b_i-a_i\right)\right)^{\frac{1}{q}},$$

אך היות ומתקיים:

$$|f(x)|^p = \sum_{i=1}^n \left|\alpha_i\right|^p\chi_{[a_i,b_i]}$$

וכנ"ל עבור g, האגף הימני הוא בדיוק $\|f\|_p\,\|g\|_q$, ובכך מתקבל אי השוויון במקרה של פונקציות פשוטות. עתה, אם נניח כי f, g פונקציות רציפות, ניתן למצוא סדרות של פונקציות פשוטות $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ המתכנסות במידה שווה ל-f, g בהתאמה. אי לכך:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b f_n(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f_n(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g_n(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

6.3 תרגיל - הרחבות לעקרון החסימות במידה שווה

בתרגיל זה נוכיח כי כדורים סגורים במרחבי הילברט הם קומפקטיים סדרתיים במובן החלש. לשם כך, נשתמש רבות במשפט 6.16, ולמעשה בגרסה מקלה שלו. בנוסח המשפט המקורי, אנחנו דורשים כי $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ תקיים כי:

$$\langle h_n, g\rangle = \langle h, g\rangle,$$

אך למעשה, התבוננות מדוקדקת בהוכחת המשפט מראה כי ניתן להחליש תנאים אלו. למשל:

- מסקנת המשפט נכונה גם אם $\{\langle h_n, g\rangle\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת לכל $g\in\mathcal{H}$ (כלומר, ללא מידע לגבי הגבול).
- מסקנת המשפט נכונה גם אם $\{\langle h_n, g\rangle\}_{n=1}^\infty$ חסומה לכל $g\in\mathcal{H}$.

1. יהא $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ותהא $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ סדרה חסומה. הוכיחו כי קיימת תת סדרה $\{h_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ שמתכנסת במובן החלש.
2. נניח כי $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ סדרה המקיימת כי $\{\langle h_n, g\rangle\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת לכל $g\in\mathcal{H}$.

פתרון.

1. הוכחת טענה זו זהה להוכחת המשפט המקורי מההרצאה, וכל שנותר לוודא הוא שבשום שלב לא נזקקנו לכך שהסדרה $\{\langle h_n, g\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת דווקא ל-$\langle h, g\rangle$. הדבר היחיד שהיה משנה הוא העובדה שהיא מתכנסת.

2. נניח תחילה כי $\mathcal{H}$ ספרבילי ונסמן ב-$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ בסיס אורתונורמלי למרחב. היות והסדרה $\{\langle h_n, e_1\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה, קיימת תת סדרה $\left\{h_{n_k^1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$\left\{\langle h_{n_k^1}, e_1\rangle\right\}$ היא סדרה מתכנסת.

באופן דומה, היות והסדרה $\left\{\langle h_{n_k^1}, e_2\rangle\right\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה חסומה כתת סדרה של סדרה חסומה, נוכל למצוא תת סדרה שלה, שנסמן ב-$\left\{h_{n_k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$, כך שהסדרה $\left\{\langle h_{n_k^2}, e_2\rangle\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת. שימו לב כי גם הסדרה $\left\{\langle h_{n_k^2}, e_1\rangle\right\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת כתת סדרה של סדרה מתכנסת. באופן אינדוקטיבי, נוכל לבנות את תת הסדרה $\left\{h_{n_k^m}\right\}_{k=1}^{\infty}$ כך שהסדרה $\left\{\langle h_{n_k^m}, e_i\rangle\right\}_{k=1}^{\infty}$ היא תת סדרה מתכנסת.

עתה, נוכיח כי הסדרה $\left\{h_{n_m} := h_{n_m^m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ מקיימת כי $\{\langle h_{n_m}, e_i\rangle\}_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת לכל $i\in\mathbb{N}$. אכן, זה נובע מידי מכך שלכל i, מתקבלת תת סדרה של הסדרה המתכנסת שלנו. המועמד שלנו לגבול של הסדרה יהיה:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, \quad \lim_{m\to\infty}\langle h_{n_m}, e_i\rangle.$$

כמובן שהשלב הראשון יהיה להוכיח שהטור הזה מתכנס במרחב שלנו, ומטענה 2.19, מספיק להוכיח כי:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < +\infty.$$

ואכן, לכל $N\in\mathbb{N}$, מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i|^2 = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=-N}^{N} |\langle h_{n_m}, e_i\rangle|^2 \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \|h_{n_m}\|^2 .$$

מה שמבטיח את ההתכנסות הדרושה ונוכל להגדיר את המועמד לגבול $h = \sum_i a_i e_i$. לבסוף, העובדה כי:

$$\lim_{m\to\infty}\langle h_{n_m}, e_i\rangle = \langle h, e_i\rangle, \quad \forall i\in\mathbb{N},$$

תאפשר לנו להוכיח כי $h_{n_m} \rightharpoonup h$. יהא $g\in\mathcal{H}$ ונסמן:

$$g_N = \sum_{i=1}^{N}\langle g, e_i\rangle e_i.$$

אזי:

$$|\langle h_{n_m} - h, g\rangle| = |\langle h_{n_m} - h, g_N\rangle| + |\langle h_{n_m} - h, g - g_N\rangle| .$$

יהא $\varepsilon > 0$, ונעריך תחילה את האיבר הימני. היות ומתקיים:

$$|\langle h_{n_m} - h, g - g_N \rangle| \leq \left(\sup_m \|h_{n_m}\| + \|h\| \right) \|g - g_N\|,$$

נוכל לבחור N שעבורו ביטוי זה קטן מ-ε. עבור ה-N הנ"ל, האיבר השמאלי הינו סכום של מכפלות פנימיות השואפות לאפס כאשר $m \to \infty$ ולכן קיים M כך שלכל $m > M$ מתקיים:

$$|\langle h_{n_m} - h, g \rangle| < 2\varepsilon,$$

ומכאן ההתכנסות החלשה הדרושה.

3. נתוני השאלה מבטיחים את קיום מסקנת משפט 6.16, ולכן נסיק כי $\sup_n \|h_n\| < +\infty$, ועל פי הסעיף הקודם, ניתן למצוא תת סדרה $\{h_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ המתכנסת חלש ל-$h \in \mathcal{H}$. אך מכאן נובע כי לכל $g \in \mathcal{H}$:

$$\lim_{n\to\infty} \langle h_n, g \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle h_{n_m}, g \rangle = \langle h, g \rangle,$$

ולכן $h_n \rightharpoonup h$, כדרוש.

6.4 תרגיל - רציפות חלשה גוררת רציפות

1. נניח כי $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ העתקה ליניארית רציפה חלש. כלומר, אם $h_n \rightharpoonup h$, מתקיים $Th_n \rightharpoonup Th$. הוכיחו כי T אופרטור חסום.

2. תהא $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ מטריצה אינסופית שעבורה האופרטור $L_A : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ מוגדר היטב וליניארי. הכוונה במוגדרות היטב, היא שלכל $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, הטורים:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{jk}x_k := \sum_{k=-\infty}^{-1} a_{jk}x_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}x_k$$

מתכנסים, וכי $\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}x_k \right)_j \in \ell^2(\mathbb{Z})$. הוכיחו כי שורות המטריצה הן איברים ב-$\ell^2(\mathbb{Z})$.

3. הוכיחו כי $L_A \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

פתרון.

1. נניח כי T אינו חסום. כלומר, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ עם $\|x_n\| = 1$ שעבורה $\|Tx_n\| \geq n^2$. במקרה כזה, הסדרה $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $y_n := \frac{x_n}{n}$ היא סדרה שמתכנסת בנורמה (ולכן חלש ל-0), ומכאן שגם $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מתכנסת חלש, ועקרון החסימות במידה שווה מראה כי היא סדרה חסומה בנורמה. זאת

כמובן, בסתירה לכך שמתקיים:

$$\|Ty_n\| \geq n$$

שהוא ביטוי לא חסום.

2. העובדה כי האופרטור הנתון מוגדר היטב, אומרת למעשה כי לכל $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, הטור:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{jk}x_k$$

מתכנס לכל $j \in \mathbb{Z}$. מכאן, הסדרה:

$$\left\{\left(\ldots, 0, a_{j(-N)}, \ldots, a_{j(-1)}, a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jN}, 0, \ldots\right)\right\}_{j=-N}^{N}$$

היא סדרה מתכנסת חלש, ולכן חסומה (על פי משפט 6.16). כלומר, קיים M שעבורו:

$$\left\|\left(\ldots, 0, a_{j(-N)}, \ldots, a_{j(-1)}, a_{j0}, a_{j1}, \ldots, a_{jN}, 0, \ldots\right)\right\|^2 = \sum_{k=-N}^{N} |a_{jk}|^2 \leq M,$$

מה שמבטיח שהטור מתכנס ריבועית, ונסיק כי $(a_{jk})_{k\in\mathbb{Z}}$ הוא איבר ב-$\ell^2(\mathbb{Z})$ כדרוש.

3. אנחנו נוכיח כי L_A אופרטור רציף במובן החלש ולכן רציף. לשם כך, נוכיח כי לכל $y \in \ell^2(\mathbb{Z})$, הפונקציונל:

$$f_y(x) = \langle L_A x, y\rangle$$

הוא פונקציונל חסום, ולכן מהצורה:

$$f_y(x) = \langle x, y_0\rangle$$

עבור $y_0 \in \mathcal{H}$. מכאן נובע בבירור כי אם $x^n \rightharpoonup x$, אזי בפרט:

$$\langle L_A x^n, y\rangle = \langle x^n, y_0\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, y_0\rangle = \langle L_A x, y\rangle,$$

ולכן L_A יהיה רציף במובן החלש, ומסעיף קודם - חסום. נותר אם כן להוכיח כי אכן לכל y, הפונקציונל $f_y(x)$ חסום. לשם כך ניעזר בסימון:

$$y^{(N)} = (\ldots, 0, y_{-N}, \ldots, y_N, 0, \ldots)$$

שמתכנסת ל-y בנורמה, ולכן:

$$\langle L_A x, y\rangle = \langle L_A x, y^{(N)}\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=-N}^{N}(L_A x)_i\,\bar{y}_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=-N}^{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{ik}x_k\bar{y}_i$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \sum_{i=-N}^{N}\overline{\bar{a}_{ik}y_i}$$

כאשר את המעבר האחרון נצדיק בסוף ההוכחה. אם נגדיר:

$$\tilde{y}^{(N)} = \left(\dots, \sum_{i=-N}^{N}\bar{a}_{ik}y_i, \dots\right)$$

נקבל איבר ב-$\ell^2(\mathbb{Z})$, שהרי:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{i=-N}^{N}\bar{a}_{ik}y_i\right|^2 \le \sum_{k\in\mathbb{Z}}(2N+1)\left|y_k\right|^2\sum_{i=-N}^{N}\left|a_{ik}\right|^2 \le (2N+1)^2\sup_{\substack{i=-N,\dots,N\\ j\in\mathbb{Z}}}\left|a_{ij}\right|^2\left\|y\right\|^2,$$

והסופרמום קיים היות ו-$2N+1$ השורות הנתונות שייכות ל-$\ell^2(\mathbb{Z})$ על פי הסעיף הקודם, ולכן איבריהן חסומים. עתה, ניתן לכתוב:

$$\langle L_A x, y\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle x, \tilde{y}^{(N)}\rangle,$$

מה שמוכיח כי הסדרה $\left\{\tilde{y}^{(N)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי התרגיל הקודם, ונסיק שקיים $y_0\in\ell^2(\mathbb{Z})$ שעבורו:

$$\langle L_A x, y\rangle = \langle x, y_0\rangle,$$

כפי שרצינו להראות. נותר להצדיק את החלפת הסדר בין הסכומים, ולשם כך נעריך את הביטוי:

$$\left|\sum_{i=-N}^{N}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{ik}x_k\bar{y}_i\right) - \sum_{k=-M_1}^{M_2}\left(\sum_{i=-N}^{N}a_{ik}x_k\bar{y}_i\right)\right| = \left|\sum_{i=-N}^{N}\left(\sum_{k>M_2 \text{ או } k<-M_1}a_{ik}x_k\bar{y}_i\right)\right|$$
$$\le \sum_{i=-N}^{N}\sqrt{\sum_{k>M_2 \text{ או } k<-M_1}\left|a_{ik}\right|^2\left|y_i\right|^2}\sqrt{\sum_{k>M_2 \text{ או } k<-M_1}\left|x_k\right|^2}$$

היות ו-N קבוע, וכל השורות מ-$i=-N$ עד $i=N$ שייכות ל-$\ell^2(\mathbb{Z})$, הביטוי האחרון שקיבלנו שואף לאפס כאשר $M_1, M_2\to\infty$, מה שמוכיח כי:

$$\sum_{i=-N}^{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_{ik}x_k\bar{y}_i = \lim_{M_1,M_2\to\infty}\sum_{k=-M_1}^{M_2}\sum_{i=-N}^{N}a_{ik}x_k\bar{y}_i = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=-N}^{N}a_{ik}x_k\bar{y}_i$$

ובכך מסתיימת ההוכחה.

6.5 תרגיל - חישוב המרחב הדואלי

נסמן ב-c, c_0 את תתי המרחבים של ℓ^∞ המוגדרים על ידי:

$$c = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^\infty \middle| \lim_{n\to\infty} x_n ,\ \text{קיים} \right\}, \quad c_0 = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^\infty \middle| \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}.$$

1. הוכיחו כי $(c_0)^*$ איזומורפי על ידי איזומטריה ל-ℓ^1.
2. הוכיחו כי c^* גם הוא איזומורפי על ידי איזומטריה ל-ℓ^1.
3. הראו כי c_0 איזומורפי כמרחב בנך ל-c.
4. הוכיחו כי c, c_0 אינם איזומורפיים על ידי איזומטריה.

פתרון.

1. כדי להבין איך נראית האיזומטריה, ננסה להבין מהו המבנה הכללי של פונקציונל ליניארי ב-$(c_0)^*$. נשתמש בכך שאם $x \in c_0$, הסדרה:

$$x^{(N)} = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$$

מתכנסת ל-x בנורמה, ולכן אם $\phi \in (c_0)^*$, אזי:

$$\phi(x) = \lim_{N\to\infty} \phi\left(x^{(N)}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} x_i \phi(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \phi(e_i)$$

כאשר e_i הוא וקטור הבסיס הסטנדרטי. על פי הנוסחה שקיבלנו, נוכל להתאים לפונקציונל ϕ את הסדרה:

$$y = (\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots)$$

ואם נראה כי $y \in \ell^1$, נקבל את הנוסחה לאיזומטריה הדרושה. כדי להוכיח זאת, נשתמש בסדרה $x^{(N)}$ שמוגדרת על ידי:

$$x_n^{(N)} = \begin{cases} \frac{\bar{\phi}(e_i)}{|\phi(e_i)|}, & i \leq N,\ \phi(e_i) \neq 0 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases},$$

ונזהה כי $x^{(N)} \in c_0$ ומקיימת $\left\|x^{(N)}\right\|_\infty = 1$. בנוסף, הצבה בפונקציונל מראה כי:

$$\phi(x^{(N)}) = \sum_{i=1}^{N} |\phi(e_i)| \leq \|\phi\| \left\|x^{(N)}\right\| = \|\phi\|,$$

מה שמראה כי $\|y\|_1$ אכן סופית, ונוכל להגדיר את ההעתקה:

$$\Phi : (c_0)^* \to \ell^1, \quad \Phi(\phi) = (\phi(e_1), \phi(e_2), \dots) .$$

די ברור כי מדובר בהעתקה ליניארית. על מנת להוכיח את הדרוש עלינו להוכיח כי מדובר באיזומטריה הפיכה. כדי להוכיח שמדובר באיזומטריה, נחשב את $\|\phi\|$ ונשים לב כי אם $\|x\|_\infty = 1$, אזי:

$$|\phi(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \, |\phi(e_i)| \leq \|\Phi(\phi)\|_1 ,$$

ולמעשה הוכחנו כי הסופרמום ניתן לקירוב על ידי הסדרה $x^{(N)}$ מקודם. לכן:

$$\|\phi\| = \|\Phi(\phi)\|_1 ,$$

ומכאן ש-Φ איזומטריה ובפרט חד-חד ערכית. כדי להוכיח שהיא הפיכה נוכיח שהיא על, ונשים לב כי לכל $y \in \ell^1$, הפונקציונל:

$$\phi_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

הוא פונקציונל ליניארי חסום ב-$(c_0)^*$ ולכן $\Phi(\phi_y) = y$.

2. ההוכחה שלנו מסתמכת על העובדה הבאה - לכל $x \in c$, נסמן $L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ ונסמן גם:

$$e = (1, 1, 1, \dots) .$$

במקרה כזה, ניתן לכתוב:

$$x = L(x)e + (x - L(x)e) ,$$

כאשר $x - L(x)e \in c_0$, ולכן אם $\phi \in c^*$, מתקיים:

$$\begin{aligned}\phi(x) = L(x)\phi(e) + \phi\left(x - L(x)e\right) &= L(x)\phi(e) + \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - L(x))\phi(e_i) \\ &= L(x)\left(\phi(e) - \sum_{i=1}^{\infty}\phi(e_i)\right) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i\phi(e_i).\end{aligned}$$

בדומה לסעיף הקודם, נוכל להגדיר את ההעתקה $\Phi : c^* \to \ell^1$ על ידי:

$$\Phi(\phi) = \left(\phi(e) - \sum_{i=1}^{\infty}\phi(e_i), \phi(e_1), \phi(e_2), \dots\right).$$

ברור כי הטור מתכנס בהחלט, היות ו-ϕ נמצא גם ב-c_0^* וראינו כי במקרה זה $\sum_{i=1}^{\infty} |\phi(e_i)|$ מתכנס. ברור גם כי

מדובר בהעתקה ליניארית ולכן כל שנותר להראות הוא שההעתקה איזומטרית והפכיה. באשר לאיזומטריה, ברור כי לכל $x \in c$ עם $\|x\|_\infty = 1$, מתקיים:

$$|\phi(x)| \leq \|\Phi(\phi)\|_1$$

בעזרת חישוב דומה לזה שהראינו קודם. כדי להראות שזה אכן הסופרמום, נבחר את הסדרה המקרבת:

$$x_n^{(N)} = \begin{cases} \frac{\bar{\phi(e_i)}}{|\phi(e_i)|}, & n \leq N,\ \phi(e_i) \neq 0 \\ \frac{\overline{\phi(e) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi(e_i)}}{\left|\phi(e) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi(e_i)\right|}, & n > N,\ \phi(e) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi(e_i) \neq 0 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

ניתן לזהות כי מדובר בסדרה חסומה עם $\left\|x^{(N)}\right\|_\infty = 1$, והיא מקיימת:

$$\phi(x^{(N)}) = \sum_{n=1}^{N} |\phi(e_i)| + \left|\phi(e) - \sum_{i=1}^{\infty} \phi(e_i)\right| \xrightarrow{N \to \infty} \|\Phi(\phi)\|_1\,,$$

ומכאן שמדובר באיזומטריה. לבסוף, אם $y \in \ell^1$ סדרה נתונה, הפונקציונל:

$$\phi_y(x) = L(x)y_1 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_{i+1},$$

הוא בבירור פונקציונל חסום שמקיים $\Phi(\phi_y) = y$, ולכן ההעתקה הפיכה.

3. כשני מרחבי בנך, איזומורפיזם הוא העתקה רציפה עם הופכית רציפה. במקרה שלנו קל מאוד להגדיר:

$$T : c \to c_0, \quad T(x) = (L(x), x_1 - L(x), x_2 - L(x), \dots)$$

שהיא העתקה רציפה, עם הופכית:

$$T^{-1}(y) = (y_2 + y_1, y_3 + y_1, \dots)\,.$$

4. נורמי X מכונה מרחב **קדם דואלי** של מרחב בנך Y, אם X^* איזומורפי על ידי איזומטריה ל-Y. הטענה שלעיל מוכיחה שבאופן כללי, מרחב קדם דואלי אינו נקבע ביחידות, שהרי שני המרחבים, c, c_0, בעלי מרחב דואלי זהה. כדי להוכיח שלא קיימת איזומטריה הפיכה בין המרחבים, עלינו לזהות תכונה שצפויה להשמר תחת איזומטריה, המתקיימת במרחב אחד ולא בשני.

התכונה הנדרשת היא התכונה הבאה - במרחב c, קיימת סדרה אחת בדיוק המקיימת שהמרחק שלה מסדרת האפס והמרחק שלה מהסדרה הקבועה $2e$, הוא בדיוק 1. סדרה זו היא כמובן הסדרה הקבועה e. אם אכן היה ניתן למצוא איזומטריה הפיכה בין המרחבים, היינו מצפים לתכונה דומה גם ב-c_0. כלומר, קיומן של זוג סדרות כך שקיימת סדרה אחת בלבד הנמצאת במרחק 1 משתיהן.

אנחנו נראה כי ב-c_0, בין כל זוג סדרות, יש שלל סדרות הנמצאות במרחק שווה מזוג הסדרות. ואכן, נניח כי $x, y \in c_0$

וכי $x \neq 0$. אם נסמן $d = \|x-y\|_\infty$, ואם נזכור כי הסדרות שואפות לאפס, נסיק כי קיים N שעבורו:

$$|x_n - y_n| < \frac{d}{2}, \quad \forall n > N.$$

אי לכך, נוכל להגדיר את הסדרה $(z_n)_{n=1}^\infty$, לפי:

$$z_n = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad \forall n \leq N$$

וכן עבור $t \in [0,1]$ כלשהו, נגדיר:

$$z_n = tx_n + (1-t)\,y_n, \quad \forall n > N.$$

במקרה זה קל וודאי כי $\|z-y\|_\infty = \frac{d}{2}$, $\|z-x\|_\infty = \frac{d}{2}$, וזה בדיוק מה שרצינו להראות.

7
משפט ההעתקה ההפוכה, ספקטרום

7.1 תזכורות מההרצאה

בפרק זה אנחנו עוברים לדון במבנה האלגברי והנורמי של מרחבי אופרטורים ליניאריים חסומים.

טענה 7.1. יהיו X, Y, Z מרחבים נורמיים. לכל $S \in B\left(Y, Z\right)$ ו-$T \in B\left(X, Y\right)$, מתקיים $ST \in B\left(X, Z\right)$ וגם:

$$\left\| ST \right\| \leq \left\| S \right\| \left\| T \right\| .$$

בצורה כזאת, לכל אופרטור חסום $T \in B(X)$, ופולינום $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, ניתן להגדיר:

$$p(T) := \sum_{n=0}^{N} a_n T^N ,$$

והוא יהיה אופרטור חסום המקיים:

$$\left\| p(T) \right\| \leq \sum_{n=0}^{N} \left| a_n \right| \left\| T \right\|^n .$$

הגדרה 7.2 (אופרטור הפיך)**.** יהא $T \in B(X,Y)$. אומרים כי T **הפיך**, אם קיים $S \in B(Y,X)$ שעבורו:

$$TS = I_Y, \quad ST = I_X.$$

במקרה כזה אומרים כי S הוא **ההופכי** של T ומשתמשים בסימון $S = T^{-1}$.

הגדרה 7.3 (חסימות מלרע)**.** יהא $T \in B(X,Y)$. אומרים כי T חסום מלרע אם קיים $c > 0$ שעבורו:

$$\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

טענה 7.4. יהיו X, Y מרחבי בנך ויהא $T \in B(X,Y)$. אזי:

1. אם T חסום מלרע, לכל $F \subset X$ תת-מרחב סגור, מתקיים כי $T(F)$ הוא תת-מרחב סגור.
2. אם T חסום מלרע, ו-$\operatorname{Im}(T)$ צפופה, אזי T הפיך.

במקרה של מרחבי הילברט, אנחנו יכולים לאפיין טוב יותר אופרטורים הפיכים. תחילת הדרך היא המשפט הבא.

משפט 7.5. יהיו $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}, S : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ אופרטורים ליניאריים בין מרחבי הילברט $\mathcal{H}, \mathcal{K}$. אם:

$$\langle Th, g\rangle = \langle h, Sg\rangle, \quad \forall h \in \mathcal{H}, g \in \mathcal{K},$$

מתקיים כי T, S שניהם חסומים וגם $T^* = S$.

במובן מסוים, אם אופרטור ליניארי "מגדיר היטב" אופרטור צמוד, האופרטור היה חייב להיות חסום מלכתחילה. היות ואופרטור ליניארי חד-חד ערכי ועל "מגדיר היטב" אופרטור הופכי, אפשר להשתמש במשפט כדי להוכיח את התוצאה המרכזית של הפרק.

משפט 7.6 (משפט ההעתקה ההפוכה)**.** יהא $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ אופרטור חד-חד ערכי ועל. אזי, ל-T קיים הופכי חסום.

טענה 7.7. יהיו $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ מרחבי הילברט ויהא $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$. התנאים הבאים שקולים:

1. T אופרטור הפיך.
2. T חסום מלרע ו-$\operatorname{Im}(T)$ צפוף ב-$\mathcal{K}$.
3. T, T^* שניהם חסומים מלרע.
4. T^* אופרטור הפיך.

7.1.1 אופרטורים הפיכים ותורת ההפרעות

הגדרה 7.8. תהא $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה במרחב נורמי x. אומרים כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **מתכנס בהחלט** אם:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

טענה 7.9. יהא X מרחב נורמי. התנאים הבאים שקולים:

1. X מרחב בנך (כלומר, נורמי ושלם).
2. כל טור מתכנס בהחלט ב-X הוא טור מתכנס.

טענה 7.10 (טור נוימן)**.** יהא $T \in B\left(X\right)$, כך ש-$\|T\| < 1$. אזי, $I - T$ הוא אופרטור הפיך ומתקיים:

$$\left(I - T\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n}. \tag{7.1}$$

לטור באגף הימני קוראים גם **טור נוימן** של T.

מכאן נוכל להוכיח כי אם "מפריעים" לאופרטור הפיך בקצת, האופרטור ישאר הפיך.

טענה 7.11. יהא $T \in B(X)$ הפיך. לכל $S \in B(X)$ המקיים $\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, מתקיים כי S הפיך.

טענה 7.12. יהא X מרחב בנך ונסמן ב-$GL\left(X\right)$ את קבוצת האופרטורים ההפיכים ב-$B(X)$. אזי, $GL(X)$ פתוחה (בטופולוגיה המושרית מהנורמה האופרטורית) וההעתקה $T \mapsto T^{-1}$ רציפה ביחס לנורמה האופרטורית.

7.1.2 ספקטרום של אופרטור חסום

יהא X מרחב בנך מעל המרוכבים.

הגדרה 7.13 (רזולבנטה וספקטרום)**.** יהא $T \in B(X)$. **הרזולבנטה** של T היא הקבוצה:

$$\rho\left(T\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} | T - \lambda I \in GL(X)\right\}.$$

הספקטרום של T הוא הקבוצה המשלימה של הרזולבנטה, כלומר:

$$\sigma\left(T\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} | T - \lambda I \notin GL\left(X\right)\right\}.$$

הגדרה 7.14 (ערכים עצמיים)**.** יהא $T \in B(X)$. אומרים כי λ היא **ערך עצמי** של T אם קיים $x \neq 0$ שעבורו $Tx = \lambda x$. הוקטור x מכונה **וקטור עצמי** של T עבור הערך λ. קבוצת כל הערכים העצמיים של T מכונה **הספקטרום הנקודתי** והיא מסומנת ב-$\sigma_p\left(T\right)$. כמובן שמתקיים תמיד:

$$\sigma_p\left(T\right) \subset \sigma\left(T\right).$$

דוגמה. עבור אופרטור $T \in B\left(\ell^2\left(\mathbb{N}\right)\right)$ המוגדר באופן "אלכסוני" על ידי $T(x_n)_n = \left(\lambda_n x_n\right)_n$ עבור סדרה $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ כלשהי, מתקיים:

$$\sigma_p\left(T\right) = \left\{\lambda_n\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \sigma\left(T\right) = \overline{\left\{\lambda_n\right\}_{n=1}^{\infty}}.$$

7.2 תרגיל - התעקות לא הפיכות

יהא $T \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$ האופרטור האלכסוני המוגדר על ידי:

$$T(e_n) = \frac{1}{n}e_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

כאשר e_n הוא וקטור הבסיס הסטנדרטי.

1. מצאו תנאי מספיק והכרחי לכך ש-$y \in \mathrm{Im}\,(T)$.
2. הוכיחו כי $\mathrm{Im}\,(T)$ אינו סגור.
3. הראו כי ההעתקה $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathrm{Im}\,(T)$ אינה הפיכה.
4. חשבו את $\sigma(T)$ ואת $\sigma_p(T)$.

פתרון.

1. נניח כי $y = Tx$ עבור $x \in \ell^2(\mathbb{N})$. אזי:

$$y_n = \frac{x_n}{n} \Longrightarrow x_n = ny_n.$$

מההנחה כי $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, ברור שתנאי הכרחי לכך ש-$y = Tx$ הוא שמתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |y_n|^2 < +\infty.$$

למעשה, מדובר גם בתנאי מספיק, שכן במקרה זה $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדר על ידי $x_n = ny_n$ הוא המקור הדרוש ל-y.

2. כדי להוכיח שמדובר בתת מרחב לא סגור, נתחיל בלחפש סדרה שאינה נמצאת במרחב, והדוגמה הפשוטה ביותר לכך היא הסדרה $x^0 \in \ell^2(\mathbb{N})$ הנתונה על ידי:

$$x_n^0 = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

בדיקה מהירה מראה כי $x^0 \in \ell^2(\mathbb{N})$ שכן מקדמי הסדרה סכימים בריבוע, אך היא אינה בתמונה של המרחב היות ומתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|x_n^0\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

השלב הבא, יהיה למצוא סדרה $(x^m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathrm{Im}\,(T)$ שמתכנסת בנורמה ל-x^0. היות ו-$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ היא החזקה ה"גדולה ביותר" שבה הסדרה לא תהיה בתמונה, נוכל לבחור סדרות דומות עם חזקות הגדולות ב"קצת" מ-$\frac{3}{2}$. דוגמה לכך היא

הסדרה $(x^m)_{m=1}^{\infty}$ הנתונה על ידי:

$$x_n^m = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\frac{1}{m}}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

קל לוודא כי הסדרה אכן שייכת לתמונה, וכל שנותר לעשות הוא להוכיח התכנסות שלה ל-x^0 בנורמה:

$$\left\|x^m - x^0\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left| \frac{1}{n^{\frac{2}{m}}} - 1 \right|^2 .$$

היינו רוצים לטעון שכאשר $m \to \infty$, הביטוי בערך המוחלט שואף לאפס ולכן גם הטור. אך לשם כך יהיה עלינו להשתמש בכלים רלוונטיים לטורי פונקציות מהצורה הזאת. נגדיר:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left| \frac{1}{n^x} - 1 \right|^2 .$$

ניתן לזהות, על ידי שימוש במבחן M של ויירשטראס עם הסדרה $M_n = \frac{2}{n^3}$, כי הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה בקטע $[0,1]$, ולכן הגבול של f קיים בראשית (מימין) ושווה לאפס. הצבה של הסדרה $x_m = \frac{2}{m}$ מאפשרת להסיק את הדרוש במקרה שלנו.

3. ראשית, ניתן לזהות כי מדובר בהעתקה חד-חד ערכית בבירור, והיות וצמצמנו אותה לתמונה שלה, היא גם על. כלומר, T כן הפיכה במובן האלגברי, אך, לא הפיכה במובן של קיום הופכי חסום. כדי לראות מדוע - נזכיר כי כל העתקה בעלת העתקה הופכית וחסומה היא חסומה מלרע. כלומר, קיים $C > 0$ שעבורו $\|Tx\| \geq C\|x\|$. אך במקרה שלנו זה לא המקרה, שכן:

$$\frac{\|Te_n\|}{\|e_n\|} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

שימו לב שהדוגמה שלעיל למעשה מראה כי משפט ההעתקה ההפוכה בהחלט דורש מהמרחבים להיות מרחבי בנך. שהרי, הדוגמה שלנו היא העתקה חסומה והפיכה (אלגברית) בין מרחב בנך למרחב נורמי (לא שלם) כך שההעתקה ההפוכה אינה חסומה.

4. מההרצאה, ראינו כי עבור העתקות אלכסוניות, איברי האלכסון הם בדיוק הספקטרום הנקודתי, והסגור שלהם הוא הספקטרום הכללי. כלומר:

$$\sigma_p(T) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}, \quad \sigma(T) = \overline{\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \cup \{0\} .$$

7.3 תרגיל - תכונות של הספקטרום

1. יהא $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ויהא $T \in B(\mathcal{H})$.

   (א) הוכיחו כי $\sigma(T) \neq \emptyset$.

   (ב) הוכיחו כי $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

2. יהא X מרחב בנך ויהא $T \in B\left(X\right)$. הוכיחו כי $\sigma\left(T\right)$ קבוצה קומפקטית.

פתרון.

1. עבור $T \in B(\mathcal{H})$.

(א) אנחנו נוכיח כי אם $\sigma\left(T\right) = \emptyset$, אזי $\langle T^{-1}v, w\rangle = 0$ לכל v, w. כלומר, $T^{-1} = 0$, ומכאן נקבל סתירה. עבור $v, w \in \mathcal{H}$, נגדיר את הפונקציה:

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f\left(z\right) = \left\langle \left(T - zI\right)^{-1} v, w \right\rangle,$$

שאכן מוגדרת לכל $z \in \mathbb{C}$ מההנחה כי $T - zI$ הפיך לכל $z \in \mathbb{C}$. יתרה מכך, מדובר בפונקציה רציפה היות וראינו בהרצאה כי ההעתקה $T \mapsto T^{-1}$ רציפה ביחס לנורמה האופרטורית. אנחנו נוכיח, כי מדובר בפונקציה הולומורפית שדועכת לאפס באינסוף.

- **הולומורפיות.** לכל h:

$$\begin{aligned}\frac{f\left(z+h\right) - f(z)}{h} &= \left\langle \frac{\left(T - (z+h)I\right)^{-1} - \left(T - zI\right)^{-1}}{h} v, w \right\rangle \\ &= \left\langle \left(T - (z+h)I\right)^{-1} \frac{T - zI - \left(T - (z+h)I\right)}{h} \left(T - zI\right)^{-1} v, w \right\rangle \\ &= \left\langle \left(T - (z+h)\right)^{-1} \left(T - zI\right)^{-1} v, w \right\rangle.\end{aligned}$$

היות והעתקת ההופכי רציפה בנורמה, ביטוי זה שואף, כאשר $h \to 0$, לביטוי:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \left\langle \left(T - zI\right)^{-2} v, w \right\rangle,$$

ולכן f הולומורפית.

- **דעיכה לאפס באינסוף.** חישוב דומה מראה כי:

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \left| \left\langle \left(T - zI\right)^{-1} v, w \right\rangle \right| = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z|} \left\langle \left(\frac{T}{z} - I\right)^{-1} v, w \right\rangle = 0,$$

היות והמכפלה הפנימית חסומה, היות ו-$\frac{T}{z} - I$ מתכנס ל-$-I$ כאשר $|z| \to \infty$, ומרציפות הנורמה, $\left(\frac{T}{z} - I\right)^{-1}$ יתכנס ל-$-I$.

קיבלנו כי f היא פונקציה שלמה (הולומורפית בכל המישור המרוכב), חסומה, ושואפת לאפס באינסוף. כמסקנה ממשפט ליוביל, $f(z) = 0$ לכל z ובפרט:

$$\langle T^{-1}v, w\rangle = 0, \quad \forall v, w \in \mathcal{H}.$$

וכפי שציינו קודם לכן, מצב זה כמובן בלתי אפשרי.

(ב) כמסקנה ממשפט ההעתקה ההופכית, אם T אופרטור חסום והפיך, אזי T^{-1} צמוד, ובפרט:

$$\left(T^{-1}\right)^{*}=\left(T^{*}\right)^{-1},$$

כלומר $T-\lambda I$ הפיך אם ורק אם:

$$(T-\lambda I)^{*}=T^{*}-\bar{\lambda} I$$

אופרטור הפיך, ומכאן מסיקים את הדרוש.

2. ראשית, ידוע כי $GL\left(X\right)$ הוא קבוצה פתוחה במרחב האופרטורים החסומים. ולכן אם $T-\lambda I$ הפיך, אזי קיימת $\delta>0$ שעבורה אם:

$$\|T-\lambda I-(T-\mu I)\|=|\lambda-\mu|<\delta,$$

מתקיים כי $T-\mu I$ הפיך, ולכן $\rho\left(T\right)$ קבוצה פתוחה. מכאן נובע מידית כי $\sigma\left(T\right)$ סגורה, כמשלימה של קבוצה פתוחה. על מנת להוכיח כי היא חסומה (ולכן קומפקטית), נראה כי אם $|\lambda|>\|T\|$, $T-\lambda I$ אופרטור הפיך. ואכן, היות ומתקיים:

$$\left\|\frac{T}{\lambda}\right\|<1,$$

טור הנוימן המגדיר את $\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1}$ מתכנס, ולכן:

$$T-\lambda I=-\lambda\left(I-\frac{T}{\lambda}\right).$$

הוא אופרטור הפיך, ככפולה סקלרית של אופרטור הפיך.

7.4 תרגיל - הספקטרום של אופרטור מכפלה

1. תהא $f\in C\left([0,1]\right)$ ונסמן ב-$M_f\in B\left(L^2\left[0,1\right]\right)$ את אופרטור המכפלה המתקבל מ-f. הוכיחו כי:

$$\sigma\left(M_f\right)=f\left([0,1]\right).$$

2. חשבו את $\sigma\left(M_{f_i}\right)$ עבור זוג הפונקציות:

$$f_1(x)=x,\quad f_2(x)=\begin{cases}2x, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ 1, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases}.$$

3. נסמן ב-$T\in B\left(\ell^2\left(\mathbb{N}\right)\right)$ את האופרטור האלכסוני המוגדר על ידי:

$$T\left(e_n\right)=q_n e_n,$$

כאשר $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ הוא סידור כלשהו של הרציונלים בקטע $[0,1]$. האם קיים אוניטרי $U \in B\left(\ell^2(\mathbb{N}), L^2[0,1]\right)$ המקיים:

$$U^* M_{f_1} U = T?$$

פתרון.

1. תחילה, נראה כי אם $\lambda \notin f([0,1])$, אזי $M_f - \lambda I$ אופרטור הפיך. לשם כך נזהה כי היות ו-$f([0,1])$ קבוצה קומפקטית (שהרי f רציפה), קיים $\delta > 0$ שעבורו:

$$|f(x) - \lambda| \geq \delta.$$

מכאן נובע כי הפונקציה $\frac{1}{f(x)-\lambda}$ היא פונקציה רציפה, ובדיקה על הפונקציות הרציפות (למשל) מראה כי אכן:

$$(M_f - \lambda I) M_{\frac{1}{f-\lambda}} = I,$$

ובפרט $\lambda \not\in \sigma(M_f)$. נותר להוכיח כי אם $\lambda = f(x_0)$ (בה"כ, עבור x_0 שהיא נקודה פנימית), אזי $\lambda \in \sigma(M_f)$. באופן אינטואיטיבי, אם $f(x_0)$ היה ערך עצמי של הפונקציה, היה מספיק לנו למצוא פונקציה g שעבורה:

$$(f(x) - f(x_0))\, g(x) = 0.$$

הבעיה עם שיטה זו, היא שבמידה ו-$f(x_0)$ מתקבלת בנקודה בודדת (למשל), המסקנה היחידה האפשרית היא ש-$g(x) = 0$ בכל מקום למעט בנקודה אחת, ולכן $g = 0$ כאיבר במרחב $L^2[0,1]$. זו לא פונקציה עצמית, ולמעשה במקרה כזה אפשר להשתכנע כי $M_f - f(x_0)I$ כן חד-חד ערכי (על אף שנראה כי הוא לא הפיך). ניאלץ לנקוט בגישה אחרת, ולהראות שהאופרטור $M_f - f(x_0)I$ לא הפיך בכך שנראה שהוא אינו חסום מלרע. כלומר, עלינו למצוא סדרה $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2[0,1]$ שעבורה:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|(M_f - \lambda I) g_n\|}{\|g_n\|} = 0.$$

כדי למצוא פונקציות כאלה, נשים לב שבצורה מפורשת, ניתן לכתוב (למשל, כאשר g רציפה למקוטעין):

$$(M_f - f(x_0)I)\, g(x) = (f(x) - f(x_0)) g(x).$$

אם נרצה לחפש פונקציה שעבורה ביטוי זה "קרוב מאוד לאפס", נשתמש ברציפות של f ב-x_0, ולכל $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ נמצא $\delta_n > 0$ כך שבקטע $[x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n]$ מתקיים:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}.$$

כלומר, אם נגדיר $g_n(x) = \chi_{[x_0-\delta_n, x_0+\delta_n]}$, נקבל כי:

$$\|(M_f - f(x_0)I)g_n\|^2 \leq \int\limits_{x_0-\delta_n}^{x_0+\delta_n} \frac{1}{n^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\delta_n}{n^2}.$$

בעוד שמתקיים $normg_n{}^2 = 2\delta_n$. חלוקת שני הביטויים מראה שאכן האופרטור לא חסום מלרע, ולכן לא יכול להיות הפיך.

2. f_1, f_2 הן פונקציות רציפות המקבלות בדיוק את כל הערכים בין $[0,1]$ ולכן הסעיף הקודם מראה כי:

$$\sigma\left(M_{f_1}\right) = \sigma\left(M_{f_2}\right) = [0,1]\,.$$

כאשר עוברים לדון בספקטרום הנקודתי, מזהים בעיה. שהרי, הספקטרום הנקודתי הוא בדיוק הנקודות מהספקטרום שעבורן קיימת g כך שמתקיים:

$$\left(f(x) - f(x_0)\right)g(x) = 0.$$

במקרה של $f_1(x) = x$, אנחנו מקבלים כי g חייבת להתאפס בכל מקום למעט בנקודה x_0, ולכן נצפה כי $g = 0$ והנקודה לא תהיה ספקטרום נקודתי. ההוכחה של זה, במקרה שבו $g \in L^2[0,1]$ ולא דווקא רציפה למקוטעין, קצת יותר עדינה. נניח אם כן כי $x_0 \in [0,1]$ ונניח כי:

$$\left(M_{f_1} - x_0 I\right)g(x) = M_{x-x_0}g(x) = 0.$$

במקרה כזה, לכל $h \in L^2[0,1]$:

$$0 = \langle M_{x-x_0}g, h\rangle = \langle g, M_{x-x_0}h\rangle.$$

ובפרט, לכל קטע $[a,b]$ שאינו מכיל את x_0, יתקיים:

$$\frac{1}{x-x_0}\chi_{[a,b]} \in L^2[0,1] \Longrightarrow 0 = \left\langle M_{x-x_0}g, \frac{1}{x-x_0}\chi_{[a,b]}\right\rangle = \left\langle g, \chi_{[a,b]}\right\rangle = 0.$$

מכאן נובע כי g מאונכת למרחב הנפרש על ידי כל המציינות של קטעים שאינם מכילים את x_0. ברור כי קבוצה זו צפופה ב-$L^2[0,1]$, ולכן $g = 0$, ונסיק כי $M_{f_1} - x_0 I$ חד-חד ערכי לכל x_0, ולכן:

$$\sigma_p\left(M_{f_1}\right) = \emptyset.$$

באשר לפונקציה השניה,ההוכחה שעשינו לעיל תעבוד לכל ערך $x_0 \in [0,1)$. במקרה של $x = 1$ זה דווקא לא נכון, שהרי אם $(f_2(x) - 1)g(x) = 0$, מקבלים כי g צריכה להתאפס רק בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ולכן הפונקציה:

$$g(x) = \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right]} \in \ker\left(M_{f_2} - I\right).$$

לסיכום, $\sigma_p\left(M_{f_2}\right)=\{1\}$.

3. על פי הדוגמה שראינו בהרצאה, מתקיים:

$$\sigma\left(T\right)=\left[0,1\right], \quad \sigma_p\left(T\right)=\left(q_n\right)_{n=1}^{\infty}.$$

כידוע, אופרטור אוניטרי משמר ספקטרום וגם משמר ספקטרום נקודתי. לכן, לא ייתכן שקיים אופרטור אוניטרי כנ"ל, היות והספקטרום הנקודתי של האופרטורים שונה (על אף שהספקטרום שלהם זהה).

7.5 תרגיל - הספקטרום של אופרטור וולטרה

יהא $V\in B\left(L^2\left[0,1\right]\right)$ אופרטור וולטרה המוגדר על ידי:

$$Vf\left(x\right)=\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

הוכיחו כי $\sigma\left(V\right)=\{0\}$.

פתרון. ראשית, הוכחנו כבר בתרגול קודם כי $\sigma_p\left(V\right)=\emptyset$, אך מכאן אנחנו מסיקים רק כי $V-\lambda I$ חד-חד ערכי לכל $\lambda\in\mathbb{C}$. אנחנו נוכיח כי אם $\lambda\neq 0$, אזי $V-\lambda I$ על, ומכאן שהוא הפיך על פי משפט ההעתקה ההפוכה. לאחר מכן, נוכל להשתמש בכך שהספקטרום לא ריק כדי להסיק ש-0 חייב להיות בספקטרום. למעשה, ניתן לעשות זאת גם בדרך אחרת, היות וראינו כי $\mathrm{Im}\left(V\right)$ מכילה רק פונקציות רציפות, ולכן אינו על (ובפרט, לא הפיך), אך עלינו לוודא בכל מקרה כי אין ערכים אחרים בספקטרום. מעתה ועד סוף התרגיל, נקבע ערך $\lambda\neq 0$, וננסה להוכיח כי לכל $g\in L^2\left[0,1\right]$, קיימת $f\in L^2\left[0,1\right]$ שעבורה:

$$Vf(x)-\lambda f(x)=g(x).$$

היות ו-$\lambda\neq 0$, ניתן לכתוב את הפונקציה f בצורה:

$$f(x)=\frac{V}{\lambda}f(x)-\frac{g(x)}{\lambda}.$$

אם אכן קיימת פונקציה כזאת, הרי שאפשר להציב אותה באופן רקורסיבי שוב באגף הימני ולקבל:

$$f(x)=\frac{V}{\lambda}\left(\frac{V}{\lambda}f(x)-\frac{g(x)}{\lambda}\right)-\frac{g(x)}{\lambda}=\frac{V^2}{\lambda^2}f(x)-\frac{Vg(x)}{\lambda^2}-\frac{g(x)}{\lambda}.$$

באופן אינדוקטיבי, נקבל כי:

$$f(x)=\frac{V^n}{\lambda^n}f(x)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{V^n g(x)}{\lambda^{n+1}}.$$

כאשר $n\to\infty$, אנחנו נוכיח כי $\frac{V^nf(x)}{\lambda^n}$ שואף לאפס, ולכן מקבלים כי:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{V^ng(x)}{\lambda^{n+1}},$$

ומכאן שאכן קיים פתרון למשוואה (שימו לב כי אגף ימין תלוי ב-g בלבד). נותר אם כן להוכיח:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V^nf(x)}{\lambda^n}=0.$$

כדי לעשות זאת, נחסום את $V^nf(x)$ באינדוקציה. נשתמש בכך ש-Vf היא פונקציה רציפה (הוכחנו בתרגול הקודם) ולכן חסומה ונוכל להגדיר $M=\|Vf\|_\infty$. עתה:

$$\left|V^2f(x)\right|=\int\limits_0^x|Vf(t)|\ \mathrm{d}t\le x\,\|Vf\|_\infty\,.$$

$$\left|V^3f(x)\right|=\int\limits_0^x\left|V^2f(t)\right|\ \mathrm{d}t\le\int\limits_0^x t\,\|Vf\|_\infty\ \mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}\,\|Vf\|_\infty\,.$$

באופן אינדוקטיבי:

$$|V^nf(x)|\le\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\|Vf\|_\infty\le\frac{\|Vf\|_\infty}{(n-1)!}.$$

כלומר, נוכל להשתמש בקשר בין נורמת L^2 לנורמת סופרמום של פונקציה רציפה ולהסיק כי:

$$\|V^nf\|\le\|V^nf\|_\infty\le\frac{\|Vf\|_\infty}{(n-1)!}.$$

בזכות חסם זה, קל מאוד לוודא כי לכל $\lambda\neq 0$:

$$\left\|\frac{V^nf(x)}{\lambda^n}\right\|\le\frac{\|Vf\|_\infty}{(n-1)!\lambda^n}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

ובכך מסתיימת ההוכחה. שימו לב שלמעשה, בתהליך ההוכחה, קיבלנו משפט קיום ויחידות למשוואה אינטגרלית פשוטה. כלומר, לכל $g\in L^2\left[0,1\right]$, קיימת $f\in L^2\left[0,1\right]$ יחידה שעבורה:

$$\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\lambda f(x)=g(x),\quad \lambda\neq 0.$$

בד"כ, לאחר הוכחת קיום ויחידות של פתרון לבעיות מהסוג הזה, אפשר (ומומלץ) לדון ברגולריות של הפתרונות. נסו להוכיח (למשל) כי אם g רציפה, גם f רציפה, ואם g לא רציפה (כלומר, אין לה פונקציה רציפה במחלקת השקילות ב-L^2), אזי גם לפתרון f אין נציגה רציפה.

7.6 תרגיל - ספקטרום ביחס לפירוק בלוקים

יהא $A \in B(\mathcal{H})$, ונגדיר $T \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ הנתון על ידי מטריצת הבלוקים:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

חשבו את $\sigma(T), \sigma_p(T)$ בעזרת $\sigma(A), \sigma_p(A)$.

פתרון. נתחיל מהמקרה של ערכים עצמיים, ונניח כי $\lambda \in \sigma_p(T)$. אזי, קיים (h, g), כך ש-h, g לא שניהם אפס, שעבורו:

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ag \\ Ah \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda h \\ \lambda g \end{pmatrix}.$$

במקרה כזה, נשים לב כי אם $h \neq g$, אזי:

$$A\left(h-g\right) = -\lambda\left(h-g\right) \Longrightarrow -\lambda \in \sigma_p(A).$$

מנגד, אם $h = g$, אזי:

$$A\left(h+g\right) = \lambda\left(h+g\right) \Longrightarrow \lambda \in \sigma_p(A).$$

כלומר:

$$\sigma_p\left(T\right) \subset \sigma_p(A) \cup \left(-\sigma_p(A)\right).$$

כדי להראות שוויון, נשים לב כי אם $\lambda \in \sigma_p(A)$, אזי קיים $h \neq 0$ שעבורו $Ah = \lambda h$, ולכן:

$$T\begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda \in \sigma_p(T),$$

אך גם:

$$T\begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix} \Longrightarrow -\lambda \in \sigma_p(T).$$

לסיכום:

$$\sigma_p\left(T\right) = \sigma_p\left(A\right) \cup \left(-\sigma_p\left(A\right)\right).$$

בעבור הספקטרום הלא נקודתי, המצב כמובן מעט יותר עדין. נשים לב שבמקרה הסקלרי, ניתן להשתמש בנוסחה:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & a \\ a & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2-\lambda^2}\begin{pmatrix} \lambda & a \\ a & \lambda \end{pmatrix},$$

ולכן המטריצה תהיה הפיכה אם $(a-\lambda),(a+\lambda)$ שניהם שונים מאפס. בגרסה המטריצית, נשים לב שאם $A\pm\lambda I$ שניהם הפיכים, המטריצה:

$$\begin{pmatrix}\lambda\left(A-\lambda I\right)^{-1}\left(A+\lambda I\right)^{-1} & a\left(A-\lambda I\right)^{-1}\left(A+\lambda I\right)^{-1}\\ a\left(A-\lambda I\right)^{-1}\left(A+\lambda I\right)^{-1} & \lambda\left(A-\lambda I\right)^{-1}\left(A+\lambda I\right)^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda & A\\ A & -\lambda\end{pmatrix}^{-1}=\left(T-\lambda I\right)^{-1}.$$

ולכן נסיק כי אם:

$$\lambda\in\rho\left(A\right)\cap\left(-\rho\left(A\right)\right)\Longrightarrow\lambda\in\rho\left(T\right).$$

כדי לדון בספקטרום נתבונן על המשלים, ונסיק כי:

$$\lambda\in\sigma\left(T\right)\Longrightarrow\lambda\in\sigma\left(A\right)\cup\left(-\sigma\left(A\right)\right),$$

שאפשר לכתוב גם בצורה:

$$\sigma\left(T\right)\subset\sigma\left(A\right)\cup\left(-\sigma\left(A\right)\right).$$

כדי להוכיח את ההכלה ההפוכה, נניח כי $\lambda\in\sigma\left(A\right)$ (בה"כ, הוכחה דומה עבור $\lambda\in\left(-\sigma\left(A\right)\right)$), ונתבונן על תת המרחב:

$$\mathcal{M}=\{(h,h)|h\in\mathcal{H}\}\subset\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}.$$

ונזהה כי על תת מרחב זה מתקיים:

$$\left(T-\lambda I\right)\begin{pmatrix}h\\ h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(A-\lambda I)h\\ (A-\lambda I)h\end{pmatrix}.$$

אם נניח בשלילה כי T הפיך, וההופכי שלו נתון על ידי המטריצה:

$$\left(T-\lambda I\right)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

אזי:

$$\begin{pmatrix}h\\ h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)(A-\lambda I)h\\ (\gamma+\delta)(A-\lambda I)h\end{pmatrix},$$

ומכאן שמתקיים $\left(\alpha+\beta\right)=\left(A-\lambda I\right)^{-1}$, בסתירה להפיכות. לסיכום:

$$\sigma\left(T\right)=\sigma\left(A\right)\cup\left(-\sigma\left(A\right)\right).$$

8

אופרטורים קומפקטיים ומשפט הפירוק הספקטרלי

8.1 תזכורות מההרצאה

8.1.1 אופרטורים קומפקטיים

בהנתן מרחב בנך X, נשתמש בסימון X_1 או $(X)_1$ לכדור היחידה סביב הראשית ב-X.

הגדרה 8.1 (אופרטור קומפקטי)**.** יהיו X, Y מרחבי בנך. אופרטור ליניארי $A : X \to Y$ מכונה **קומפקטי** אם $A(X_1)$ פרה-קומפקטי. כלומר, אם $\overline{A(X_1)}$ קומפקטי ב-Y. מרחב האופרטורים הקומפקטיים מ-X ל-Y מסומן על ידי $K(X, Y)$.

היות וקומפקטיות שקולה לקומפקטיות סדרתית במרחבים מטריים, ניתן להסיק כי $A : X \to Y$ קומפקטי אם ורק אם לכל סדרה חסומה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ קיימת תת-סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset Y$ מתכנסת.

הגדרה 8.2 (אופרטור מדרגה סופית)**.** יהיו X, Y מרחבי בנך. אופרטור ליניארי וחסום $A : X \to Y$ מכונה **מדרגה סופית** אם $\operatorname{Im}(A)$ מרחב סוף ממדי.

משפט 8.3. יהיו X, Y, Z מרחבי בנך ויהיו $A, B \in B(X,Y),\ C \in B(Y,Z)$ אופרטורים. אזי:

- אם A קומפקטי, אזי αA קומפקטי לכל $\alpha \in \mathbb{C}$.
- אם A, B קומפקטיים, אזי $A + B$ קומפקטי.

- אם A או C קומפקטיים, אזי CA קומפקטי.
- אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של אופרטורים קומפקיים המתכנסים (בנורמה האופרטורית) לאופרטור A, אזי A קומפקטי.

דוגמאות חשובות.

- כל אופרטור מדרגה סופית הוא אופרטור חסום.
- בהנתן $k \in C\left([0,1]^2\right)$, האופרטור $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ המוגדר על ידי:

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

הוא אופרטור חסום ביחס לנורמת הסופרמום, ואף מקיים $\|K\| \le \|k\|_\infty$. יתרה מכך, ניתן להשתמש במשפט ארצלה אסקולי כדי להסיק שהוא אופרטור קומפקטי.

- עבור $k \in L^2\left([0,1]^2\right)$ ניתן להגדיר $K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ על ידי:

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

אזי, האופרטור K חסום ומקיים $\|K\| \le \|k\|_2$, והוא קומפקטי, היות וניתן להציגו כגבול של אופרטורים $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרות בעזרת פונקציות רציפות, ומכאן ש-K גבול של אופרטורים קומפקטיים ולכן קומפקטי.

8.1.2 הספקטרום של אופרטור קומפקטי

טענה 8.4. יהא X מרחב בנך ויהא Y תת-מרחב סגור של X. אם $X \ne Y$, קיים וקטור יחידה $x \in X$ שעבורו:

$$\inf\{\|x-y\| | y \in Y\} \ge \frac{1}{2}.$$

משפט 8.5. יהא X מרחב בנך. אזי, X_1 קומפקטי אם ורק אם X סוף-ממדי.

כמסקנה, אופרטור הזהות I_X קומפקטי אם ורק אם X הוא סוף ממדי.

משפט 8.6. יהיו X, Y מרחבי בנך ויהא $A \in K(X,Y)$. אם X או Y אינסוף ממדיים, אזי A לא הפיך. בפרט, אם $A \in K(X)$, ו-$\dim(X) = \infty$, אזי:

$$0 \in \sigma(A).$$

טענה 8.7. יהא X מרחב בנך ויהא $Y \subset X$ תת-מרחב סגור. עבור $A \in K(X)$, נניח כי $\ker(I-A) \cap Y = \{0\}$. אזי, הצמצום $(I-A)|_Y$ חסום מלרע. בפרט, $(I-A)Y$ תת-מרחב סגור.

טענה 8.8. יהא X מרחב בנך ויהא $A \in K(X)$. אם $\ker(I-A) = \{0\}$, אז $\operatorname{Im}(I-A) = X$.

משפט 8.9 (אלטרנטיבת פרדהולם)**.** יהא X מרחב בנך ויהא $A \in K(X)$. עבור $\lambda \neq 0$, מתקיים כי $\dim \ker (\lambda I - A)$ סופי, ומתקיים בדיוק אחד מהבאים:

- $\ker (\lambda I - A) \neq \{0\}$.
- $\lambda I - A$ הפיך.

כלומר, כל ערך שונה מאפס בספקטרום של אופרטור קומפקטי הוא ערך עצמי. בפרט, אם X אינסוף ממדי, מתקיים תמיד:

$$\sigma (A) = \sigma_p (A) \cup \{0\} .$$

משפט 8.10. יהא X מרחב בנך ויהא $A \in K(X)$. אזי, הערכים העצמיים השונים מאפס ב-$\sigma (A)$ מהווים סדרה בת מניה השואפת לאפס.

8.2 תרגיל - בדיקת קומפקטיות

יהא $X = C([0,1])$ מרחב הבנך המוגדר בעזרת נורמת הסופרמום, ויהא $Y = C^1([0,1])$ מרחב הבנך המוגדר עם הנורמה:

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

קבעו אילו מן האופרטורים הבאים הוא אופרטור קומפקטי.

1. $A : X \to Y$ המוגדר על ידי $Af(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. $B : Y \to X$ המוגדר על ידי $Bf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $C : Y \to Y$ המוגדר על ידי $Cf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. $D : Y \to X$ המוגדר על ידי $Df(x) = f'(x)$.
5. $E : Y \to X$ המוגדר על ידי $Ef(x) = f(x)$.

פתרון. האופרטורים שנתחיל להוכיח שהם קומפקטיים הם האופרטורים שתמונתם חיה ב-X. זאת משום שב-X ניתן להשתמש במשפט ארצלה אקסולי כדי לבדוק את הקומפקטיות של תמונת כדור היחידה.

1. האופרטור E הוא אופרטור קומפקטי. אכן, אם $f \in Y_1$, מתקיים:

$$\|f\|_\infty , \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1} \leq 1.$$

ולכן $\|Ef\|_\infty \leq 1$ ונסיק שתמונת כדור היחידה חסומה. לאחר מכן, נוכיח שהתמונה רציפה במידה אחידה, כי אם $f \in Y_1$ ואם $x, y \in [0,1]$:

$$|Ef(x) - Ef(y)| = |f(x) - f(y)| = |f'(c_{xy})|\,|x - y| \leq \|f'\|_\infty |x - y| \leq |x - y| .$$

מכאן שלכל $\varepsilon > 0$ אם $|x-y| < \varepsilon$, אזי $|Ef(x) - Ef(y)| < \varepsilon$ לכל $f \in Y_1$, כלומר, התמונה רציפה במידה אחידה. סה"כ נקבל כי E אופרטור קומפקטי.

שימו לב שהקומפקטיות של E מאפשרת להסיק את הטענה הבאה - לכל סדרת פונקציות גזירות ברציפות עם נגזרת חסומה בקטע, יש תת-סדרה המתכנסת במידה שווה בקטע.

2. האופרטור C קומפקטי. כדי להראות זאת, נשים לב כי A אופרטור חסום:

$$\|Af\|_{C^1} = \|Af\|_\infty + \|Af'\|_\infty = \|Af\|_\infty + \|f\|_\infty \le 2\|f\|_\infty .$$

לכן, הכתיבה:

$$C = AE$$

מראה כי C הוא הרכבה של אופרטור קומפקטי עם אופרטור חסום, ועל פי משפט 8.3, גם C קומפקטי.

3. האופרטור B קומפקטי, היות וניתן לכתוב אותו בצורה:

$$B = EC,$$

כלומר, הרכבה של קומפקטיים, ומכאן קומפקטי.

4. שני האופרטורים A, D אינם קומפקטיים. אחרת, הכתיבה:

$$I_X = DA,$$

הייתה מראה כי I_X קומפקטי, בסתירה לכך ש-X מרחב בנך אינסוף ממדי.

8.3 תרגיל - אופרטורים מסוג וולטרה

1. תהא $k \in C\left([0,1]^2\right)$ פונקציה רציפה. הראו שקיימים אופרטורים חסומים:

$$K_1 : L^2[0,1] \to \left(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right), \quad K_2 : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$$

המקיימים לכל f רציפה:

$$K_i f(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y.$$

2. היעזרו בהעתקה $\iota : \left(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right) \to L^2[0,1]$ המוגדרת על ידי $\iota(f) = f$, כדי להוכיח שמתקיים:

$$\operatorname{Im}(K_2) \subset C([0,1]).$$

כלומר, לכל פונקציה בתמונה של K_2 ניתן לבחור נציגה רציפה.

3. הראו כי אם $f(x)$ פונקציה עצמית של K_2 עם ערך עצמי $\lambda \neq 0$, ו-$\frac{\partial^m k}{\partial x^m}$ רציפות לכל $m \leq n$, אזי $f(x)$ גזירה ברציפות m פעמים.

פתרון.

1. כדי להוכיח שקיימות הרחבות כנ"ל מספיק שנראה כי האופרטור:

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

ניתן להרחבה הן כאופרטור מ-L^2 לרציפות וכן מ-L^2 לעצמו. את המקרה השני ראינו בהרצאה ולכן מספיק שנוכיח רק את המקרה הראשון. ואכן, לכל f רציפה מתקיים:

$$\left|\int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq \sqrt{\int_0^1 |k(x,y)|^2\,\mathrm{d}y}\,\|f\|_2 \leq \|k\|_\infty \|f\|_2 .$$

ולכן ניתן להרחיב את האופרטור כפי שרצינו.

2. ההעתקה ι היא העתקה חסומה, ולכן:

$$\|\iota(f)\|_2 = \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty .$$

מכאן נובע שההעתקה $\iota \circ K_1 : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ חסומה ומקיימת:

$$\iota \circ K_1(f) = K_2(f), \quad \forall f \in C([0,1]) .$$

מכאן נובע כי $\iota \circ K_1 = K_2$. היות וברור כי תמונת $\iota \circ K_1$ מוכלת ברציפות, נוכל להסיק את הנ"ל גם עבור K_2, כדרוש.

3. נניח כי $f \in L^2[0,1]$ מקיימת:

$$\int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = \lambda f(y).$$

על פי הסעיפים הקודמים, ניתן להניח בה"כ כי f רציפה, ובמקרה זה אגף שמאל גזיר על פי המשפט על גזירה תחת סימן האינטגרל היות ו-$k, \frac{\partial k}{\partial x}$ רציפות. היות ו-$\lambda \neq 0$, נוכל להסיק שאגף ימין גם הוא גזיר ברציפות, ולכן:

$$\lambda f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial k}{\partial x}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

מכאן ניתן להמשיך בתהליך עד לנגזרת ה-n ולהסיק את הדרוש.

הערה. שימו לב שכל הטענות שמובאות לעיל נכונות גם כאשר האופרטור הוא מהצורה:

$$Kf(x) = \int_0^x k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

8.4 תרגיל - בעיית שטורם ליוביל

נתבונן בבעיית שטורם-ליוביל עם תנאי שפה דיריכלה הבאה:

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = \lambda f(x) \\ f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}. \tag{8.1}$$

לכל $\lambda \in \mathbb{C}$, מתקיים כי $f(x) = 0$ פתרון לבעיה, אך כאשר קיימת $f(x)$ שאינה פונקציית האפס הפותרת את הבעיה, אומרים כי λ ערך עצמי של הבעיה וכי $f(x)$ פונקציה עצמית.

1. נגדיר את האופרטור $K \in L^2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ על פי הנוסחה:

$$Kf(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad k(x,y) = \begin{cases} -\cos(y)\sin(x), & 0 \le x \le y \\ -\sin(y)\cos(x), & y \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

הראו כי אם $f(x)$ פונקציה עצמית של הבעיה (8.1) עם ערך עצמי $\lambda \neq 0$, אזי היא פונקציה עצמית של האופרטור K. מהו הקשר בין הערכים העצמיים?

2. הראו כי אם $f \in L^2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ פונקציה עצמית של האופרטור K, עם ערך עצמי $\lambda \neq 0$, אזי קיים לה נציג גזיר ברציפות פעמיים לפחות שמהווה פונקציה עצמית של הבעיה (8.1).

3. נניח כי $g(x)$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת את תנאי השפה ב-$x = 0, \frac{\pi}{2}$. הוכיחו כי אז הפונקציה $f(x) = Kg(x)$ מקיימת את המשוואה:

$$f''(x) + f(x) = g(x).$$

4. עבור הפונקציה f מהסעיף הקודם, הסיקו כי קיים פיתוח (ב-L^2) מהצורה:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x),$$

כאשר $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית של הפונקציות העצמיות של K עבור הערכים העצמיים השונים מאפס. מצאו את המקדמים a_n.

פתרון.

1. נניח כי $f(x)$ פונקציה עצמית של הבעיה (8.1). אזי, ניתן לכתוב:

$$Kf(x) = K\left(\lambda f(x) - f''(x)\right) = \lambda Kf(x) - Kf''(x).$$

מצד שני:

$$\begin{aligned}
Kf''(x) &= -\int_0^x \cos(x)\sin(y) f''(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(y) f''(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -\cos(x)\sin(y)f'(y)\Big|_0^x - \sin(x)\cos(y)f'(y)\Big|_x^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad + \int_0^x \cos(x)\cos(y) f'(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin(y) f'(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \cos(x)\cos(y)f(y)\Big|_0^x - \sin(x)\sin(y)f(y)\Big|_x^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad - \int_0^x \cos(x)\sin(y) f(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(y) f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= Kf(x) + f(x)
\end{aligned}$$

כלומר, נוכל לכתוב:

$$Kf(x) = \lambda Kf(x) - Kf(x) - f(x) \Longrightarrow (2-\lambda)\,Kf(x) = -f(x) \Longrightarrow Kf(x) = \frac{1}{\lambda-2} f(x),$$

כלומר f פונקציה עצמית של האופרטור K עם ערך עצמי $\frac{1}{\lambda-2}$. כמובן שהחישוב שלנו לא תקף כאשר $\lambda = 2$, אך במקרה כזה אנחנו נקבל כי f מקיימת את המשוואה:

$$\begin{aligned}
f''(x) - f(x) = 0 &\Longrightarrow \left(f'(x) + f(x)\right)' = \left(f'(x) + f(x)\right) \Longrightarrow f'(x) + f(x) = Ae^x \\
&\Longrightarrow \left(e^x f(x)\right)' = Ae^{2x} \Longrightarrow e^x f(x) = \frac{A}{2} e^{2x} + B \Longrightarrow f(x) = Ce^x + De^{-x}.
\end{aligned}$$

יחד עם זאת, הצבה של תנאי השפה $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ מראה כי $C = D = 0$, ולכן מלכתחילה לא קיימת פונקציה עצמית עבור $\lambda = 2$. לכן החישוב שביצענו קודם תקף תמיד.

2. נניח כי f פונקציה עצמית של האופרטור K עם ערך עצמי μ. אזי:

$$-\int_0^x \cos(x)\sin(y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(y)f(y)\,\mathrm{d}y = \mu f(x).$$

היות והאגף השמאלי הוא פונקציה חלקה (על פי התרגיל הקודם, שהרי הפונקציות בתוך האינטגרלים בעלות נגזרות רציפות לפי x מכל סדר) - נסיק כי $\mu f(x)$ בעלת נציגה חלקה במחלקת השקילות שלה ב-$L^2[0,1]$ ונוכל להניח בה"כ כי f חלקה. נגזור פעמיים את שני אגפי המשוואה ונקבל:

$$f(x) + Kf(x) = \mu f''(x). \Longrightarrow f(x) + \mu f(x) = \mu f''(x) \Longrightarrow \left(\frac{1}{\mu} + 2\right) f(x) = f''(x) + f(x).$$

כמו כן, ניתן להציב באגף שמאל של המשוואה המקורית את הערכים $x = 0, \frac{\pi}{2}$ ולגלות כי f מתאפסת גם שם. אי לכך, f פונקציה עצמית של הבעיה (8.1) עם ערך עצמי $\frac{1}{\mu} + 2$.

3. היות ו-g גזירה ברציפות, ברור כי $Kg(x) = f(x)$ תהיה גזירה ברציפות פעמיים. מהגדרת K ברור כי מתקיימים תנאי ההתחלה, ולכן כל שנותר לבדוק הוא שהפונקציה מקיימת את המד"ר. ואכן:

$$\begin{aligned}(Kg(x))'' &= \left(-\int_0^x \cos(x)\sin(y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^1 \sin(x)\cos(y)f(y)\,\mathrm{d}y\right)''\\ &= \left(\int_0^x \sin(x)\sin(y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^1 \cos(x)\cos(y)f(y)\,\mathrm{d}y\right)'\\ &= g(y) - Kg(x).\end{aligned}$$

לאחר העברת אגפים נסיק את הדרוש.

4. ראשית, היות ו-$f = Kg$, היא נמצאת בתמונה. היות ו-K אופרטור קומפקטי וצמוד לעצמו, ידוע שקיים ל-f פיתוח לטור ב-$L^2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ בפונקציות העצמיות המנורמלות של K, ללא הפונקציות השייכות לערך העצמי אפס היות ו-f בתמונה. כלומר:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n.$$

בשלב הבא, נחפש את מקדמי הטור. לשם כך, נשתמש בנוסחה הרגילה:

$$a_n = \langle f, \phi_n \rangle,$$

ולאחר מכן נשתמש בעובדה כי $f = Kg$. כלומר:

$$a_n = \langle Kf, \phi_n \rangle = \langle g, K\phi_n \rangle = \lambda_n \langle g, \phi_n \rangle.$$

כדי להדגיש את חשיבות התוצאה, נסכם את שגילינו בתרגיל זה:

- בהנתן בעיית שטורם ליוביל מסויימת, מצאנו אופרטור אינטגרלי (וצמוד לעצמו) כך שכל פונקציה עצמית של הבעיה המקורית היא פונקציה עצמית של האופרטור האינטגרלי ולהיפך.
- כפועל יוצא, יכלנו להסיק לגבי מידת הרגולריות של וקטורים עצמיים של האופרטור האינטגרלי (עבור הערכים העצמיים השונים מאפס).
- לאחר מכן, גילינו שהאופרטור האינטגרלי מספק נוסחה לפתרון של הבעיה המקורית בגרסתה האי הומוגנית (בתנאי שהאיבר האי הומוגני מקיים תנאים מספיקים).
- מצאנו שאת הפתרון לבעיה האי הומוגנית אפשר למצוא בצורת טור ב-L^2, שאת מקדמיו ניתן למצוא רק בעזרת האיבר האי הומוגני והפונקציות העצמיות של הערכים השונים מאפס.

את הרעיון הזה ניתן ליישם (למעשה) בכל בעיית שטורם ליוביל רגולרית, ואנחנו רק הדגמנו כאן את אחד מהמקרים המפורשים.

8.5 תרגיל - אופרטורים במרחבי סדרות

נגדיר את האופרטור $T \in B\left(\ell^1\right)$ על ידי:

$$T\left(x_1, x_2, x_3, \dots\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{1}, \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{x_3 + x_4}{3}, \dots\right)$$

1. הוכיחו כי T אופרטור חסום וחשבו את $\|T\|$.
2. הוכיחו כי T הוא גבול בנורמה של אופרטורים מדרגה סופית (ביחס לנורמה האופרטורית).
3. חשבו את $\sigma\left(T\right)$.

פתרון.

1. כדי להוכיח שהאופרטור חסום נזהה כי:

$$\|Tx\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n + x_{n+1}}{n}\right| \le 2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 2\,\|x\|_1 \,,$$

כלומר $\|T\| \le 2$. מפתה לשער כי $\|T\| = 2$ אך לא זה המקרה. בחינה מדוקדקת יותר תראה כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n + x_{n+1}}{n}\right| \le |x_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n| \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \le \frac{3}{2}\,\|x\|_1 \,,$$

היות והמקסימום של הביטוי $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ הוא בדיוק $\frac{3}{2}$. עתה, נראה שמתקבל המקסימום על ידי בחירת הוקטור e_2:

$$\|Te_2\|_1 = \left\|\left(1, \frac{1}{2}, 0, \dots\right)\right\|_1 = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\,\|e_2\|_1 \,.$$

2. נגדיר את סדרת האופרטורים:

$$T_N\left(x_1,x_2,x_3,\dots\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{1},\dots,\frac{x_N+x_{N+1}}{N},0,\dots\right).$$

ברור שמדובר באופרטורים מדרגה סופית, ונראה שהם מתכנסים בנורמה האופרטורית ל-T. כדי לעשות זאת, נשים לב כי לכל $x\in\ell^1$, מתקיים:

$$\|(T-T_N)x\|_1=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{x_n+x_{n+1}}{n}\right|\le\frac{2}{N+1}\|x\|_1 .$$

לכן:

$$\|T-T_N\|\le\frac{2}{N+1}\xrightarrow{N\to\infty}0.$$

3. על פי התרגיל הקודם, T הוא גבול של אופרטורים מדרגה סופית (קומפקטיים) ולכן בעצמו אופרטור קומפקטי. על פי אלטרנטיבת פרדהולם, אנחנו יודעים כי:

$$\sigma\left(T\right)=\{0\}\cup\sigma_p\left(T\right),$$

וכל שנותר לעשות הוא לחפש את הוקטורים העצמיים של T. נניח אם כן, כי:

$$\left(T-\lambda I\right)x=0\Longrightarrow\left(\frac{x_1+x_2}{1}-\lambda x_1,\frac{x_2+x_3}{2}-\lambda x_2,\dots\right)=\left(0,0,\dots\right).$$

ננסה לבדוק האם יתכן פתרון למערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x_2=\left(\lambda-1\right)x_1\\ x_3=\left(2\lambda-1\right)x_2\\ \vdots\\ x_{n+1}=\left(n\lambda-1\right)x_n\\ \vdots\end{cases}.$$

אכן, כאשר $\lambda_n=\frac{1}{n}$, מקבלים כי $x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=0$ ומתקבל וקטור עצמי. כאשר $\lambda\neq\frac{1}{n}$, מקבלים כי:

$$x_{n+1}=\left(n\lambda-1\right)\left((n-1)\lambda-1\right)\dots\left(\lambda-1\right)x_1,$$

ומקבלים כי האיבר הכללי של הסדרה לא שואף לאפס, אלא אם $x_1=0$ ואז כל הסדרה מתאפסת. לכן:

$$\sigma\left(T\right)=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

9
התמרת פוריה

9.1 תזכורות מההרצאה

הגדרה 9.1 (נורמת p ומרחבי $L^p(\mathbb{R})$)**.** יהא $p \in [1,\infty]$. המרחב $\mathrm{PC}_c(\mathbb{R})$ הוא מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין ב-$\mathbb{R}$ שהן בעלות תומך קומפקטי, ומזוהות עד כדי כמות סופית של נקודות. במקרה זה המרחב $L^p(\mathbb{R})$ הוא מרחב ההשלמה (כמרחב בנך) של מרחב זה ביחס לנורמה:

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

אינטואטיבית, המרחב $L^p(\mathbb{R})$ הוא אוסף כל ה"פונקציות" שהאינטגרל המוכלל שלהן בחזקת p מתכנס. כמובן שהמרחב מכיל נציגות של פונקציות "אמיתיות" שמקיימות את הנ"ל, אך בדומה למרחבי $L^p[a,b]$" גם כאן קיימות גם נציגות של פונקציות "פחות" אינטואיטיביות. במקרה של $L^2(\mathbb{R})$, מדובר במרחב ההילברט, שמתקבל כהרחבה מהרציפות למקוטעין עם המכפלה הפנימית:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x) \, \mathrm{d}x.$$

טענה 9.2. הפונקציונל $I : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ המוגדר על ידי:

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

הוא פונקציונל חסום עם $\|I\| \leq 1$.

טענה 9.3. תהא $g \in C_b(\mathbb{R})$ (רציפה וחסומה). האופרטור $M_g : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ המוגדר על ידי:

$$M_g(f)(x) = g(x)f(x)$$

הוא אופרטור חסום עם $\|M_g\| = \|g\|_\infty$.

9.1.1 התמרת פוריה על $L^1(\mathbb{R})$

הגדרה 9.4 (התמרת פוריה)**.** תהא $f \in L^1(\mathbb{R})$. **התמרת פוריה** של f היא הפונקציה $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ המוגדרת על ידי:

$$\hat{f}(\omega) = I \circ M_{e^{-i\omega t}}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

בעזרת התמרה זו מגדירים את האופרטור $\mathcal{F}_1$ הליניארי על $L^1(\mathbb{R})$, בתור הנוסחה $\mathcal{F}_1[f] = \hat{f}$.

דוגמה שימושית. לכל $[a,b]$ מתקיים:

$$\mathcal{F}_1\left[\chi_{[a,b]}\right](\omega) = \frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega},$$

וכאשר $a = -b$ מקבלים את הנוסחה הנוחה:

$$\mathcal{F}_1\left[\chi_{[-b,b]}\right](\omega) = \frac{2\sin(b\omega)}{\omega}.$$

משפט 9.5. האופרטור $\mathcal{F}_1$ הוא אופרטור חסום כאופרטור מ-$L^1(\mathbb{R})$ לתוך $C_0(\mathbb{R})$ עם נורמת הסופרמום. יתרה מכך, האופרטור הוא אופרטור מכווץ.

שימו לב שהתוצאה $\hat{f}(\omega) \xrightarrow{\omega \to \pm\infty} 0$ מכונה לעתים גם בשם **הלמה של רימן-לבג**, ונעזרנו בגרסה דומה שלה בתרגול על טורי פוריה.

טענה 9.6 (תכונות בסיסיות של התמרת פוריה)**.** תהא $f \in L^1(\mathbb{R})$. אזי:

- לכל $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}_1[f(t-a)](\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega), \quad \mathcal{F}_1\left[e^{iat}f(t)\right](\omega) = \hat{f}(\omega - a). \tag{9.1}$$

- לכל $a \neq 0$,

$$\mathcal{F}_1 \left[f\left(at \right) \right] \left(\omega \right) = \frac{1}{|a|} \hat{f} \left(\frac{\omega}{a} \right) \tag{9.2}$$

- אם $f \in C^1\left(\mathbb{R} \right), f' \in L^1\left(\mathbb{R} \right)$, אזי:

$$\mathcal{F}_1 \left[f' \right] \left(\omega \right) = i\omega \hat{f}\left(\omega \right). \tag{9.3}$$

- אם $f \in C_0\left(\mathbb{R} \right)$ וגם $tf\left(t \right) \in L^1\left(\mathbb{R} \right)$:

$$\mathcal{F}_1 \left[tf(t) \right] \left(\omega \right) = i\hat{f}'\left(\omega \right). \tag{9.4}$$

9.1.2 משפט הקונבולוציה

הגדרה 9.7 (קונבולוציה)**.** תהיינה $f, g \in \mathrm{PC}_c\left(\mathbb{R} \right)$. הקונבולוציה של f, g מוגדרת להיות:

$$f * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x - t \right) g(t) \,\mathrm{d}t.$$

טענה 9.8 (תכונות של קונבולוציה)**.** תהיינה $f, g, h \in \mathrm{PC}_c\left(\mathbb{R} \right)$. אזי:

1. $f * g \in C_c\left(\mathbb{R} \right)$.
2. $\left\| f * g \right\|_\infty \leq \left\| f \right\|_\infty \left\| g \right\|_1$.
3. $\left\| f * g \right\|_1 \leq \left\| f \right\|_1 \left\| g \right\|_1$.
4. $f * g = g * f$.
5. $f * \left(g + h \right) = f * g + f * h$ וגם $\left(f + g \right) * h = f * h + g * h$.
6. $f * \left(g * h \right) = \left(f * g \right) * h$.
7. $\left(f * g \right) \left(x - a \right) = f\left(x - a \right) * g = f * \left(g(x - a) \right)$.

משפט 9.9 (משפט הקונבולוציה)**.** לכל $f \in L^1\left(\mathbb{R} \right)$, התמרת פוריה מקיימת:

$$\mathcal{F}_1 \left[f * g \right] = \mathcal{F}_1 \left[f \right] \mathcal{F}_1 \left[g \right], \quad \widehat{f * g}\left(\omega \right) = \hat{f}\left(\omega \right) \hat{g}\left(\omega \right).$$

9.1.3 נוסחת ההיפוך הנקודתית

הגדרה 9.10 (גזירות ברציפות למקוטעין)**.** אומרים שפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ **גזירה ברציפות למקוטעין** אם היא רציפה למקוטעין, גזירה בכל הקטע למעט בכמות סופית של נקודות, ו-f' (כפונקציה שמוגדרת בכל הקטע למעט בכמות סופית של נקודות) היא פונקציה רציפה למקוטעין. אומרים שפונקציה גזירה ברציפות למקוטעין ב-$\mathbb{R}$, אם היא גזירה ברציפות למקוטעין בכלל תת קטע סגור וחסום של $\mathbb{R}$

עבור פונקציה גזירה ברציפות למקוטעין $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, אומרים כי היא אינטגרבילית בהחלט, אם מתקיים:

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}|f(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty.$$

משפט 9.11. תהא $f\in\mathrm{PC}^1(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$. אזי, לכל $t_0\in\mathbb{R}$:

$$\frac{f\left(t_0^+\right)+f\left(t_0^-\right)}{2}=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\hat{f}(\omega)\,e^{i\omega t_0}\,\mathrm{d}\omega.$$

בפרט, אם f רציפה וגם $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$, מתקיים:

$$f(t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,e^{i\omega t_0}\,\mathrm{d}\omega,$$

ובניסוח מעט שונה:

$$\hat{\hat{f}}(t_0)=2\pi f(-t_0).$$

9.2 תרגיל - התמרת פוריה לגאוסיאן

1. הראו כי אם $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, אזי:

$$\hat{f}'(\omega)+\omega\hat{f}(\omega)=0,$$

והסיקו כי $\hat{f}(\omega)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$.

2. לכל $\varepsilon>0$, חשבו את התמרת פוריה של $f_\varepsilon(x)=e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}}$ ולאחר מכן את התמרת פוריה של הפונקציה שהתקבלה.

פתרון.

1. ראשית, נזהה כי הפונקציה $f(x)e^{-i\omega x}$ מקיימת את כל התנאים הדרושים לגזירה תחת סימן האינטגרל, היות ומתקיים:

$$\left|f(x)e^{-i\omega x}\right|=e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad\left|\frac{\partial}{\partial\omega}f(x)e^{-i\omega x}\right|=\left|-ixf(x)e^{-i\omega x}\right|=xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

ושתי הפונקציות החוסמות בעלות אינטגרל מתכנס בהחלט. אי לכך, ניתן להסיק מהנוסחה:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}_1\left[f\right](\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x,$$

כי:

$$\hat{f}'(\omega) = i\int\limits_{-\infty}^{\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = i\left[e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x\right]$$
$$= -\omega\hat{f}(\omega),$$

מה שמראה כי $\hat{f}$ אכן מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית הדרושה. כדי לפתור אותה נכפול את אגפי המשוואה ב- $e^{\frac{\omega^2}{2}}$ ונקבל כי:

$$\left(e^{\frac{\omega^2}{2}}\hat{f}(\omega)\right)' = 0 \Longrightarrow \hat{f}(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

כדי למצוא את הקבוע C, נשתמש בכך שמתקיים:

$$\hat{f}(0) = C = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi},$$

וזה מסיים את ההוכחה.

2. נשתמש בהחלפת משתנים פשוטה ונקבל כי:

$$\hat{f}_\varepsilon(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sqrt{\varepsilon}x)^2}{2}} e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x \overset{u=\sqrt{\varepsilon}x}{=} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-i\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\hat{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}e^{-\frac{\omega^2}{2\varepsilon}}.$$

נותר לנו לחשב את התמרת פוריה של הפונקציה שהתקבלה, אך עד כדי הכפלה בקבוע $\sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}$ זוהי בדיוק אותה הנוסחה של ההתמרה שחישבו זה עתה, כאשר מסמנים $\mu = \frac{1}{\varepsilon}$. כלומר:

$$\hat{\hat{f}}_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}e^{-\frac{x^2}{2\mu}} = 2\pi e^{-\frac{\varepsilon x^2}{2}}.$$

כלומר, קיבלנו שהפעלה כפולה של התמרת פוריה מחזירה אותנו (עד כדי קבוע) לפונקציה שהתחלנו איתה.

9.3 תרגיל - נוסחת הדואליות

1. תהיינה $u, v \in L^1(\mathbb{R})$. הוכיחו כי מתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\hat{v}(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. נניח כי u אינטגרבילית ובעלת גבולות חד-צדדיים בראשית. הוכיחו כי:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} u * \hat{f}_\varepsilon(y) = 2\pi\frac{u\left(y^+\right)+u\left(y^-\right)}{2}.$$

3. תהא $v \in L^1(\mathbb{R})$. הוכיחו כי:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} v * f_\varepsilon(x) = \hat{v}(0).$$

4. תהא $v \in L^1(\mathbb{R})$ רציפה כך ש-$\hat{v} \in L^1(\mathbb{R})$. הוכיחו כי:

$$\hat{\hat{v}}(x) = 2\pi v(-x)$$

פתרון.

1. כמיטב המסורת של האנליזה הפונקציונלית, נפתח בהוכחת הנוסחה במקרה ה"נוח". כלומר - במקרה של פונקציות רציפות ובעלות תומך קומפקטי. במקרה זה נוכל להניח בה"כ כי הפונקציות u, v מתאפסות מחוץ לקטע $[-M, M]$ ולכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-M}^{M}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M} u(t)v(x)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,$$

ובשלב הזה, נוכל להפעיל את משפט פוביני ולכתוב:

$$= \int_{-M}^{M} u(t)\int_{-M}^{M} v(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{-M}^{M} u(t)\int_{-\infty}^{\infty} v(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{-M}^{M} u(t)\hat{v}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\hat{v}(t)\,\mathrm{d}t$$

עתה, נרצה להרחיב את הנוסחה לכל הפונקציות ב-$L^1(\mathbb{R})$ ולשם כך נשים לב שלכל זוג פונקציות רציפות ובעלות

תומך קומפקטי, מתקיים:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|\hat{u}\|_{\infty}\|v\|_1 \leq \|u\|_1\|v\|_1\,,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\hat{v}(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|u\|_1\|\hat{v}\|_{\infty} \leq \|u\|_1\|v\|_1\,.$$

אי לכך, אם נקבע פונקציה u רציפה ובעלת תומך קומפקטי, נוכל להרחיב את השוויון לכל $L^1(\mathbb{R})$. אך לאחר מכן, היות והביטוי נשאר חסום גם כאשר $v \in L^1(\mathbb{R})$ מקובע, ניתן להרחיב את הנוסחה גם ביחס ל-u ולהסיק את השוויון לכל זוג פונקציות ב-$L^1(\mathbb{R})$.

2. כדי להוכיח את הטענה, נשתמש בקשרים השימושיים הבאים:

- לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \hat{\hat{f}}_\varepsilon(0) = 2\pi f_\varepsilon(0) = 2\pi.$$

- לכל $\delta > 0$, מתקיים:

$$\int\limits_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,\infty)} \hat{f}_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\int\limits_{\left(-\infty,-\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\right]\cup\left[\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}},\infty\right)} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0.$$

ועתה:

$$2\pi\frac{u(y^+)+u(y^-)}{2} = \int_{-\infty}^{0} u(y^+)\hat{f}_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} u(y^-)\hat{f}_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x.$$

כך שנוכל להעריך בעזרת כתיבה זו את הביטוי:

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} u(y-x)\hat{f}_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x - 2\pi\frac{u(y^+)+u(y^-)}{2}\right| &\leq \left|\int_{-\infty}^{0}\left(u(y-x)-u(y^+)\right)\hat{f}_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\quad+\left|\int_{0}^{\infty}\left(u(y-x)-u(y^-)\right)\hat{f}_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x\right| = [\star]\end{aligned}$$

בשלב הבא נפרק את האינטגרל לשני חלקים נוספים.

- על פי הנתון, הגבול של u ב-y קיים משני הצדדים. לכן, ניתן למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (-\delta, 0)$ מתקיים:

$$\left|u(y-x) - u(y^+)\right| < \mu,$$

ולכל $x \in (0,\delta)$, מתקיים:

$$\left|u(y-x)-u(y^-)\right| < \mu.$$

שילוב של אלו ביחד עם העובדה כי u פונקציה חסומה מראה כי:

$$\begin{aligned}[\star] &\le 2\left\|u\right\|_\infty \int\limits_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,\infty)} \hat{f}_\varepsilon\left(x\right)\,\mathrm{d}x + \mu\int\limits_{-\delta}^{\delta}\hat{f}_\varepsilon\left(x\right)\,\mathrm{d}x \\ &\le 2\left\|u\right\|_\infty \int\limits_{(-\infty,-\delta]\cup[\delta,\infty)} \hat{f}_\varepsilon\left(x\right)\,\mathrm{d}x + 2\pi\mu.\end{aligned}$$

- עבור החלק שנותר באינטגרל, נשתמש בתכונה השניה שציינו ונסיק שקיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, האינטגרל הנותר קטן מ-$\mu$.

סה"כ נקבל כי לכל $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, מתקיים:

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)\hat{f}_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x - 2\pi\frac{u(y^+)+u(y^-)}{2}\right| < \left(2\left\|u\right\|_\infty + 2\pi\right)\mu,$$

וזה מוכיח כמובן את הגבול הדרוש.

3. נשתמש בנוסחת הדואליות, ונכתוב:

$$\begin{aligned}v * f_\varepsilon(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(y-x)f_\varepsilon\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(y-x)\hat{\hat{f}}_\varepsilon\left(x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{v(y-x)}\hat{f}_\varepsilon\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\hat{v}\left(x\right)\hat{f}_\varepsilon\left(x\right)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

עתה, נשתמש בכך שהפונקציה $e^{-ixy}\hat{v}(x)$ היא פונקציה רציפה, ועל פי הסעיף הקודם, האינטגרל הימני ביותר שואף לערך הפונקציה הזו בנקודה $x = 0$, כלומר $\hat{v}(0)$, כפי שרצינו להראות.

4. נשים לב שמתקיים:

$$\hat{\hat{v}}\left(x\right) = \mathcal{F}_1\left[e^{-ixy}\hat{v}(y)\right](0),$$

ולכן ניתן להשתמש בסעיף הקודם ולכתוב:

$$\hat{\hat{v}}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(e^{-ixy}\hat{v}\right) * f_\varepsilon(0) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(y)e^{-ixy} f_\varepsilon(-y)\, \mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} v(y)\,\hat{f}_\varepsilon(-x-y)\,\mathrm{d}y = 2\pi \hat{v}(-x)$$

9.4 תרגיל - התנהגות לא טובה של $\mathcal{F}_1$

בתרגיל זה נחקור חלק מהתכונות הכלליות של האופרטור $\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$.

1. חשבו את התמרת הפוריה של הפונקציה $f_a(x) = \frac{\sin^2(ax)}{x^2}$, והוכיחו בעזרתה כי $\mathcal{F}_1$ אופרטור חד-חד ערכי.
2. היעזרו בסדרה $f_n(x) = \frac{\sin(x)\sin(nx)}{x^2}$ כדי להוכיח ש-$\mathcal{F}_1$ אינו חסום מלרע.
3. הוכיחו כי אם $g \in L^1(\mathbb{R})$ אי-זוגית (כלומר, מזדהה עם $-g(-x)$ כאיבר ב-$L^1(\mathbb{R})$), אזי קיים $M > 0$ כך שלכל $0 < r < R$ מתקיים:
$$\left| \int_r^R \frac{\hat{g}(\omega)}{\omega}\,\mathrm{d}\omega \right| \le M.$$
4. הוכיחו כי הפונקציה:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e}, & 0 \le x \le e \\ \frac{1}{\ln(x)}, & x > e \end{cases},$$
מקיימת שההרחבה האי-זוגית שלה אינה בתמונה של $\mathcal{F}_1$ והסיקו כי הוא אינו על.
5. הוכיחו כי $\mathcal{F}_1$ אינו קומפקטי.

פתרון.

1. ראשית, נשתמש במשפט הקונבולוציה כדי להסיק:

$$\mathcal{F}_1\left[\chi_{[-a,a]} * \chi_{[-a,a]}\right](x) = \mathcal{F}_1\left[\chi_{[-a,a]}\right](x)\mathcal{F}_1\left[\chi_{[-a,a]}\right](x) = \frac{4\sin^2(ax)}{x^2}.$$

נשים לב שהתנאים לשימוש בנוסחה $\hat{\hat{v}}(x) = 2\pi v(-x)$ מתקיימים ולכן:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin^2(ax)}{x^2}\right](\omega) = \frac{\pi}{2}\chi_{[-a,a]} * \chi_{[-a,a]}(-\omega).$$

נחשב את הקונבולוציה במפורש:

$$\chi_{[-a,a]} * \chi_{[-a,a]}(\omega) = \int_{-a}^{a} \chi_{[-a,a]}(\omega - t)\ \mathrm{d}t.$$

כאשר $\omega > 2a$ או $\omega < -2a$, האינטגרל מתאפס באופן זהותי. כאשר $\omega \in [0, 2a]$ מקבלים שכאשר $t \in [\omega - a, a]$ האינטגרנד שווה ל-1 ואחרת אפס, ומכאן שהערך של הקונבולוציה יהיה $2a - \omega$. באופן דומה, כאשר $\omega \in [-2a, 0]$, מקבלים את הערך $2a + \omega$. לכן:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin^2(ax)}{x^2}\right](\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2a - |x|), & x \in [-2a, 2a] \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

עתה, נניח כי $\hat{f} = 0$ (במטרה להוכיח כי $f = 0$). אזי, נוסחת הדואליות מאפשרת לנו לכתוב:

$$\mathcal{F}_1\left[\hat{k}_a f\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}_a(x) f(x) e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} k_a(x)\hat{f}(x+\omega)\,\mathrm{d}x = 0.$$

מכך ש-$\hat{k}_a$ בעלת תומך בקטע $[-2a, 2a]$, נקבל כי:

$$\int_{-2a}^{2a} \hat{k}_a(x) f(x) e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

כל פונקציה רציפה ובעלת תומך שמוכל ב-$[-a, a]$ ניתנת לקירוב (בנורמת L^1, אך מספיק למעשה נורמת L^2) על ידי סכומים של פונקציות מהצורה $\left\{e^{-i\omega x}\right\}_{\omega \in \mathbb{R}}$. לכן, ניתן להסיק שלכל פונקציה כנ"ל מתקיים:

$$\int_{-a}^{a} g(x)\hat{k}_a(x) f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

מצד שני, היות ו-$h(x) = \frac{g(x)}{\hat{k}_a(x)}$ גם היא רציפה ובעלת תומך קומפקטי ב-$[-a, a]$ נקבל שלמעשה:

$$\int_{-a}^{a} h(x) k_a(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

היות והפונקציות הרציפות ובעלות תומך קומפקטי צפופות ב-$L^1(\mathbb{R})$, נסיק כי $f(x) = 0$, כדרוש.

2. על ידי שימוש בטכניקה דומה לסעיף הקודם, ניתן להראות כי מתקיים:

$$\mathcal{F}_1\left[f_n\right](x)=\frac{\pi}{2}\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-n,n]}(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |\omega|\leq n-1\\ \frac{\pi}{2}\left(n+1-|\omega|\right), & n-1<|\omega|<n+1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}.$$

כלומר:

$$\left\|\hat{f}_n\right\|_\infty=\frac{\pi}{2}.$$

מצד שני:

$$\|f_n\|_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin(x)\sin(nx)}{x^2}\right|\mathrm{d}x=n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin(y)\sin\left(\frac{y}{n}\right)}{y^2}\right|\mathrm{d}y\geq 2\int\limits_{0}^{\infty}\left|\frac{\sin(y)\sin\left(\frac{y}{n}\right)}{y\cdot\frac{y}{n}}\right|\mathrm{d}y.$$

נשתמש בכך ש-$\frac{\sin\left(\frac{y}{n}\right)}{\frac{y}{n}}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,n]$ כדי לכתוב:

$$\|f_n\|_1\geq 2\int\limits_0^n\left|\frac{\sin(y)}{n}\right|\sin(1)\,\mathrm{d}y\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

לכן מקבלים כי:

$$\frac{\left\|\hat{f}_n\right\|_\infty}{\|f_n\|_1}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

ולכן האופרטור אינו חסום מלרע.

3. היות ומדובר בפונקציה אי זוגית, מתקיים:

$$\hat{g}(\omega)=2i\int\limits_0^\infty g(x)\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x.$$

על ידי שימוש זהיר בביטוי זה ובמשפט פוביני (חשבו כיצד להצדיק זאת באופן פורמלי עם הכלים שלמדנו בקורס):

$$\begin{aligned}\int\limits_r^R\frac{\hat{g}(\omega)}{\omega}\,\mathrm{d}\omega&=2i\int\limits_r^R\left(\int\limits_0^\infty g(x)\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\omega\\&=2i\int\limits_0^\infty f(x)\left(\int\limits_r^R\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}x=2i\int\limits_0^\infty f(x)\left(\int\limits_{rx}^{Rx}\frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

היות והאינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}x$ מתכנס, קיים $K > 0$ שעבורו:

$$\left| \int_{rx}^{Rx} \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s \right| \leq K, \quad \forall r, R, x.$$

אי לכך:

$$\left| \int_{r}^{R} \frac{\hat{g}(\omega)}{\omega}\,\mathrm{d}\omega \right| \leq \int_{0}^{\infty} |f(x)| \left| \int_{rx}^{Rx} \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s \right| \mathrm{d}x \leq K \|f\|_1 ,$$

ואם נסמן את האגף הימני ב-M, נקבל את הדרוש.

4. נזהה את f עם ההרחבה האי-זוגית שלה לשם נוחות. נשים לב שאם $f = \hat{g}$ עבור $g \in L^1(\mathbb{R})$, אז גם עבור $h(x) = -g(-x)$ מתקיים $f = \hat{h}$. מכך ש-$\mathcal{F}_1$ חד-חד ערכית, נסיק כי $g(x) = -g(-x)$ ולכן המקור של f חייב להיות פונקציה אי-זוגית. על פי הסעיף הקודם, f חייבת לקיים:

$$\left| \int_{r}^{R} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right| \leq M$$

לכל $0 < r < R$. אך במקרה שלנו, אם $r > e$ מקבלים כי:

$$\left| \int_{r}^{R} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{r}^{R} \frac{1}{x \ln(x)}\,\mathrm{d}x \right| = \ln(\ln(R)) - \ln(\ln(r)) \xrightarrow{R \to \infty} \infty,$$

ומכאן שביטוי זה אינו חסום, בסתירה להנחה שלנו. כלומר - f אינה בתמונה של $\mathcal{F}_1$ ולכן האופרטור לא על.

5. האופרטור אינו קומפקטי. כדי לזהות זאת נסמן את סדרת הפונקציות:

$$f_n(x) = \frac{e^{inx} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

חישוב מפורש מראש כי $\|f_n\|_1 = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$. מצד שני, על ידי שימוש בתכונות של התמרת פוריה:

$$\hat{f}_n(\omega) = e^{-\frac{(\omega - n)^2}{2}}.$$

לסדרה זו אין אף תת-סדרה מתכנסת (בנורמת הסופרמום), שהרי התכנסות בנורמת הסופרמום שקולה להתכנסות במידה שווה הגוררת התכנסות נקודתית. במקרה שלנו, כל תת סדרה של $\left\{ \hat{f}_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ תתכנס נקודתית לפונקציית האפס, אך התכנסות זו כמובן שלא תהיה במידה שווה, כי:

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \hat{f}_n(\omega) \right| = 1.$$

6. אנחנו נוכיח שהתמונה של $\mathcal{F}_1$ צפופה ב-$C_0\left(\mathbb{R}\right)$. ואכן, לכל $f\in C_c^\infty\left(\mathbb{R}\right)$, נוסחת ההיפוך מראה כי:

$$\mathcal{F}_1^2\left[f\right]\left(x\right)=2\pi f\left(-x\right),$$

ולכן:

$$C_c^\infty\left(\mathbb{R}\right)\subset\operatorname{Im}\left(\mathcal{F}_1\right).$$

בהרצאה ראיתם כי מרחב זה צפוף ב-$C_0\left(\mathbb{R}\right)$ ומכאן שנקבל את הדרוש. עתה, משידוע שהתמונה צפופה, נסיק כי אם היא הייתה סגורה, האופרטור היה על, בסתירה לסעיף הקודם.

9.5 תרגיל - נוסחת הסכימה של פואסון

1. תהא f פונקציה גזירה ברציפות ב-$\mathbb{R}$ כך שקיים קבוע C שעבורו:

$$|f(x)|\leq\frac{C}{1+|x|^2},\quad |f'(x)|\leq\frac{C}{1+|x|^2}.$$

הוכיחו כי מתקיים:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(n\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(2\pi n\right).$$

2. חשבו את סכום הטור:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}.$$

פתרון.

1. ראשית, חשוב לזהות כי על פי הנתונים, טור הפונקציות:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(x+n\right)$$

מתכנס בהחלט ובמידה שווה לפונקציה רציפה ומחזורית בעלת נגזרת רציפה ומחזורית בעלת מחזור של 1. מכאן נובע כי לטור קיים פיתוח לטור פוריה בקטע $[0,1]$ מהצורה:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(x+n\right)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_me^{2\pi mx},$$

כאשר:

$$a_m=\int_0^1\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)\right)e^{-2\pi imx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1 f\left(x+n\right)e^{-2\pi imx}\,\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_n^{n+1} f\left(u\right)e^{-2\pi im(u-n)}\,\mathrm{d}u=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_n^{n+1} f\left(u\right)e^{-2\pi imu}\,\mathrm{d}u.$$

כלומר:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(x+n\right)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{2\pi imx}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_n^{n+1}f\left(u\right)e^{-2\pi imu}\,\mathrm{d}u.$$

בפרט, כאשר מציבים $x=0$, נקבל:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(n\right)=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}\int_n^{n+1}f\left(u\right)e^{-2\pi imu}\,\mathrm{d}u=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(u\right)e^{-2\pi imu}\,\mathrm{d}u$$
$$=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(2\pi m\right).$$

2. נגדיר את הפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. נשאיר לוודא (כתרגיל), כי הפונקציה מקיימת את תנאי נוסחת הסכימה של פואסון. נחשב את ההתמרה של הפונקציה:

$$\hat{f}\left(\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

כאשר $\omega=0$ הערך המתקבל ידוע ושווה ל-π. כאשר $\omega\neq 0$ נשתמש בנוסחה הבאה הנובעת ממשפט השארית.

משפט 9.12. יהיו $p(z),q(z)$ זוג פולינומים כך ש-$\deg\left(q\right)\geq\deg\left(p\right)+2$, וכך ש-$q$ נטול שורשים על הציר הממשי. אזי, לכל α:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}e^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{z_k}\mathrm{Res}_{z_k}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{-i\alpha z}\right),$$

כאשר:

- אם $\alpha\geq 0$, הנקודות $\{z_k\}_k$ הן הקטבים של הפונקציה בחצי המישור העליון.
- אם $\alpha<0$, הנקודות $\{z_k\}_k$ הן הקטבים של הפונקציה בחצי המישור התחתון.

בנוסף, נשתמש בתוצאה השימושית הבאה לחישובי שאריות:

טענה 9.13. נניח כי $f(z),g(z)$ הולומורפיות בסביבה של נקודה z_0 כך ש-z_0 אפס פשוט של $g(z)$ וגם $f(z_0)\neq 0$.

אזי, z_0 היא קוטב פשוט של הפונקציה $\frac{f}{g}$ ומתקיים:

$$\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

אם נחזור לחישוב שלנו, נקבל שעבור $\omega>0$ מתקיים:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=2\pi i\mathrm{Res}_i\left(\frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}\right)=2\pi i\left.\frac{e^{-i\omega z}}{2z}\right|_{z=i}=\pi e^{-\omega},$$

ואשר $\omega<0$ נקבל:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=2\pi i\mathrm{Res}_{-i}\left(\frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}\right)=2\pi i\left.\frac{e^{-i\omega z}}{2z}\right|_{z=-i}=\pi e^{\omega},$$

ולסיכום:

$$\hat{f}\left(\omega\right)=\pi e^{-|\omega|}.$$

על פי סעיף קודם:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+n^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\pi e^{-2\pi|n|}=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-2\pi n}=\pi+2\pi\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\pi\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

10
התמרת פוריה (המשך)

10.1 תזכורות מההרצאה

10.1.1 התמרת פוריה ב-$L^2(\mathbb{R})$

בפרק הקודם דנו בהתמרת פוריה בצורתה ה"אינטואיטיבית". כלומר - ההתמרה הוגדרה על פונקציות אינטגרביליות בהחלט, שהן פונקציות שעבורן "ברורה" משמעות האינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x.$$

יחד עם זאת, ראינו בסוף הפרק כי התמרת הפוריה כאופרטור, היא אופרטור "לא כל כך טוב". האופרטור שמתקבל חד-חד ערכי, לא על, לא חסום מלרע, בעל תמונה לא סגורה, ולא קומפקטי. מתברר שבמונחים אלו, התמרת הפוריה שנגדיר מעל $L^2(\mathbb{R})$ תהיה מבטיחה יותר.

טענה 10.1. תהא $f \in \mathrm{PC}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, כך ש-$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. אזי $f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

בעזרת טענה זו, נוכל להוכיח שניתן להרחיב את התמרת פוריה מפונקציות "יפות" וצפופות ב-$L^2(\mathbb{R})$ לכל המרחב.

משפט 10.2 (נוסחת פלנשרל)**.** לכל $f,g\in C_c^2\left(\mathbb{R}\right)$, מתקיים $\hat{f},\hat{g}\in C_0\left(\mathbb{R}\right)\cap L^2\left(\mathbb{R}\right)$, וגם:

$$2\pi\langle f,g\rangle=\langle\hat{f},\hat{g}\rangle,$$

ובפרט:

$$2\pi\left\|f\right\|^2=\left\|\hat{f}\right\|^2.$$

כלומר, עד כדי הכפלה בקבוע, התמרת פוריה משמרת מכפלה פנימית על הפונקציות ה"יפות" (גזירות ברציפות פעמיים ובעלות תומך קומפקטי). נותר להוכיח את הצפיפות שלהן:

משפט 10.3. יהא $p\in[1,\infty)$. לכל $\varepsilon>0$ ולכל $f\in\mathrm{PC}_c\left(\mathbb{R}\right)$, קיימת $g\in C_c^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ שעבורה:

$$\left\|f-g\right\|_p<\varepsilon.$$

כלומר, $C_c^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ צפופה ב-$L^p\left(\mathbb{R}\right)$.

משפט 10.4 (משפט פלנשרל)**.** התמרת פוריה ניתנת להרחבה מ-$C_c^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ ל-$L^2\left(\mathbb{R}\right)$, כך שמתקבל אופרטור רציף:

$$\mathcal{F}_2:L^2\left(\mathbb{R}\right)\to L^2\left(\mathbb{R}\right),$$

כאשר נשתמש בסימון $\hat{f}=\mathcal{F}_2\left(f\right)$ לכל $f\in L^2\left(\mathbb{R}\right)$. $\mathcal{F}_2$ היא איזומטריה עד כדי קבוע סקלרי, כלומר:

$$2\pi\langle f,g\rangle=\langle\hat{f},\hat{g}\rangle,\quad 2\pi\left\|f\right\|^2=\left\|\hat{f}\right\|^2.$$

שימו לב שניתן להשתמש גם בנוסחה:

$$\hat{f}\left(\omega\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}f\left(x\right)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x,$$

כאשר הגבול הוא בנורמת $L^2\left(\mathbb{R}\right)$.

10.1.2 נוסחת השיקוף ב-$L^2\left(\mathbb{R}\right)$

משפט 10.5 (נוסחת השיקוף)**.** לכל $f\in L^2\left(\mathbb{R}\right)$, מתקיים:

$$\hat{\hat{f}}(x)=2\pi f\left(-x\right),$$

ובצורה אופרטורית, $\mathcal{F}_2\circ\mathcal{F}_2=2\pi\mathcal{R}$, כאשר $\mathcal{R}$ הוא האוניטרי:

$$\mathcal{R}\left(f\right)\left(x\right)=f\left(-x\right).$$

משפט 10.6 (נוסחת ההיפוך)**.** התמרת פוריה $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ היא אופרטור הפיך. בפרט:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} \, \mathrm{d}\omega,$$

כאשר הגבול מחושב בנורמת $L^2(\mathbb{R})$.

10.2 תרגיל - לכסון התמרת פוריה

בהרצאה ראינו כי המרחב $C_c^\infty(\mathbb{R})$ מאוד שימושי בדיון על $L^2(\mathbb{R})$, היות והפונקציות הנמצאות בו "מספיק יפות" כדי להצדיק נוסחאות - שלאחר מכן ניתן להרחיב בצורה רציפה לכל המרחב. בתרגיל זה נדון בתת-מרחב נוסף ומאוד שימושי של $L^2(\mathbb{R})$, שמכיל את $C_c^\infty(\mathbb{R})$, הידוע בשם **מרחב שוורץ**:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \middle| \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^m \left| f^{(n)}(x) \right| < +\infty, \ \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

מרחב זה מכיל את כל הפונקציות שהן ונגזורתיהן "דועכות מהר מספיק" באינסוף. כלומר - מהר יותר מכל פולינום. בעזרת מולטי-אינדקסים, ניתן כמובן להגדיר את $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ באופן דומה, אך אנחנו נדון רק במקרה של $n = 1$ בתרגיל זה. היות ומרחב זה מכיל את הפונקציות החלקות בעלות תומך קומפקטי, מרחב זה צפוף ב-$L^2(\mathbb{R})$.

1. נגדיר את האופרטורים הליניאריים $a, a^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ על ידי:

$$af(x) = xf(x) + f'(x), \quad a^*f(x) = xf(x) - f'(x).$$

הוכיחו כי a^* חד-חד ערכי וכי הגרעין של a חד-ממדי.

2. נגדיר את האופרטור $N = a^*a + I : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$. הוכיחו את הזהויות:

$$N = aa^* - I, \quad Na = aN - 2a, \quad Na^* = a^*N + 2a^*, \quad \mathcal{F}_2 N = N\mathcal{F}_2.$$

3. הראו כי לכל $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, מתקיים $\langle af, g\rangle = \langle f, a^*g\rangle$, והסיקו כי הערכים העצמיים של N גדולים/שווים ל-1.

4. הוכיחו כי הערכים העצמיים של N הם בדיוק המספרים האי-זוגיים החיוביים, וכי הם כולם פשוטים.

5. הוכיחו כי הוקטורים העצמיים מהסעיף הקודם הם גם וקטורים עצמיים של $\mathcal{F}_2$.

6. הראו כי לאחר נרמול, הוקטורים העצמיים הללו מהווים בסיס אורתונורמלי ל-$L^2(\mathbb{R})$.

פתרון.

1. נניח כי מתקיים $a^*f(x) = 0$. אזי:

$$f'(x) - xf(x) = 0 \Longrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}f'(x) - xe^{-\frac{x^2}{2}}f(x) = \left(e^{-\frac{x^2}{2}}f(x)\right)' = 0.$$

לכן, קיים $C \in \mathbb{R}$ שעבורו:

$$f(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

אך כאשר $C \neq 0$, מקבלים פונקציה שלא שייכת ל-$\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ומכאן ש-$C = 0$, והאופרטור אכן חד-חד ערכי. באשר ל-a, נשתמש בשיטה דומה ונקבל כי הפתרון הוא מהצורה:

$$af(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}},$$

והגאוסיאן כן שייך ל-$\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ובפרט קיבלנו כי הגרעין של a חד-ממדי ומכיל רק כפולות של הגאוסיאן.

2. מחישוב מפורש:

$$\begin{aligned}(a^*a - aa^*)f(x) &= a^*(xf(x) + f'(x)) - a(xf(x) - f'(x)) \\ &= x^2f(x) - (xf(x))' + xf'(x) - f''(x) \\ &- x^2f(x) - (xf(x))' + xf'(x) + f''(x) \\ &= -2f(x),\end{aligned}$$

ולכן:

$$N = a^*a + I = aa^* + (a^*a - aa^*) + I = aa^* - 2I + I = aa^* - I.$$

באשר לזהויות הבאות, נכתוב:

$$Na - aN = (aa^* - I)a - a(a^*a + I) = aa^*a - a - aa^*a - a = 2a,$$

$$Na^* - a^*N = (a^*a + I)a^* - a^*(aa^* - I) = a^*aa^* + a^* - a^*aa^* + a^* = 2a^*.$$

ולבסוף, באשר לזהות האחרונה, נעשה זאת בשני שלבים. בשלב הראשון נשתמש בחישוב העזר הבא:

$$\mathcal{F}_2[af] = \mathcal{F}_2[xf + f'] = i\hat{f}' + i\omega\hat{f} = ia\mathcal{F}_2[f],$$

$$\mathcal{F}_2[a^*f] = \mathcal{F}_2[xf - f']\, i\hat{f}' - i\omega\hat{f} = -ia^*\mathcal{F}_2[f].$$

ובשלב השני:

$$\mathcal{F}_2[Nf] = \mathcal{F}_2[a^*af] + \mathcal{F}_2[f] = -ia^*\mathcal{F}_2[af] + \mathcal{F}_2[f] = a^*a\mathcal{F}_2[f] + \mathcal{F}_2[f] = N\mathcal{F}_2[f].$$

3. היות ו-f,g הן פונקציות במרחב שוורץ, נוכל לבצע מניפולציות כגון אינטגרציה בחלקים ללא חשש:

$$\begin{aligned}\langle af,g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{xg(x)}\,\mathrm{d}x + f(x)\bar{g}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g'(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{xg(x)-g'(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \langle f,a^*g\rangle.\end{aligned}$$

מכאן נובע כי:

$$\langle Nf,f\rangle = \langle a^*af,f\rangle + \langle f,f\rangle = \langle af,af\rangle + \langle f,f\rangle \geq \|f\|^2.$$

לכן, אם $Nf=\lambda f$ מקבלים כי $\lambda \geq 1$.

4. ההוכחה תתחלק לשני חלקים. תחילה, נוכיח שהערכים $1,3,5,\ldots$ הם אכן ערכים עצמיים של $\mathcal{N}$. נסמן $f_1(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ ונזהה כי:

$$Nf_1(x) = a^*(af_1(x)) + f_1(x) = f_1(x),$$

היות וראינו כי $f_1 \in \ker(a)$. כלומר, f_1 וקטור עצמי עם ערך עצמי 1. בנוסף, ידוע לנו שערך זה פשוט כי:

$$Nf(x) = f(x) \Longrightarrow a^*af(x) = 0,$$

ומכך ש-a^* חד-חד ערכי, נסיק כי $af(x)=0$, כלומר $f(x)=cf_1(x)$ עבור c כלשהו. עתה, נגדיר $f_3(x)=a^*f_1(x)$ ונשים לב כי:

$$Nf_3(x) = Na^*f_1(x) = a^*Nf_1(x) + 2a^*f_1(x) = 3a^*f_1(x) = 3f_3(x),$$

ובאופן דומה, ניתן להמשיך בצורה זו ולקבל $f_5=a^*f_3$ כפונקציה עצמית של ע"ע 5, וכן הלאה. היות ו-a^* חד-חד ערכי, כל הוקטורים האלו שונים מאפס, ואכן מדובר בפונקציות עצמיות. כדי להוכיח שאין ערכים עצמיים נוספים, נניח כי $\lambda>1$ אינו מספר שלם ואי-זוגי, וכי f וקטור עצמי של ערך זה. כלומר $Nf=\lambda f$ ולכן:

$$Naf = aNf - 2af = (\lambda-2)\,af.$$

היות ו-$af=0$ רק כאשר $f=cf_1(x)$, נסיק כי $af\neq 0$, וקיבלו פונקציה עצמית של ערך עצמי $\lambda-2$. ניתן להמשיך בצורה כזאת ולקבל כי a^mf היא פונקציה עצמית של הערך העצמי $\lambda-2m$, אך בצורה כזאת ניתן להמשיך עד אשר נקבל ערך עצמי קטן מ-1, מה שמוביל כמובן לסתירה. השלב האחרון הוא להוכיח את הפשטות של ערכים עצמיים אלה.

נתחיל מהערך העצמי 3. נשים לב כי אם $Nf = 3f$, אזי $Naf = af$ ולכן $af = cf_1(x)$. עתה:

$$a^* af = (N - I)\, f = 2f(x) = ca^* f_1(x) = cf_3(x).$$

לכן, גם 3 הוא ערך עצמי פשוט. בצורה אינדוקטיבית, ניתן להמשיך ולוודא כי יתר הערכים העצמיים אכן פשוטים.

5. לכל $n = 0, 1, 2, \dots$, מקבלים כי:

$$\mathcal{F}_2 \left[(a^*)^{n-1} f_1(x) \right] = (-i)^{n-1} (a^*)^{n-1} \mathcal{F}_2 \left[f_1(x) \right] = \frac{(-i)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} (a^*)^{n-1} f_1(x),$$

ומכאן שאכן מדובר בוקטורים עצמיים של התמרת פוריה, עם ערכים עצמיים $\frac{(-i)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}$ לכל $n = 0, 1, 2, \dots$.

הערה. לאחר נרמול, ניתן לכתוב את הפונקציות העצמיות הללו בצורה:

$$e_n(x) = c_n (a^*)^n e^{-\frac{x^2}{2}} = c_n \left(x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} = h_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

ו-$\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם פולינומים ממעלה n בדיוק. לפולינומים אלו (עד כדי מוסכמת נרמול שונה) קוראים בשם **פולינומי הרמיט**.

6. נוכיח תחילה שאכן מדובר במערכת אורתוגונלית. ואכן, לכל $n > m \geq 0$:

$$\langle (a^*)^n f_1(x), (a^*)^m f_1(x) \rangle = \left\langle (a^*)^{n-m-1} f_1(x), a^{m+1} (a^*)^m f_1(x) \right\rangle = 0.$$

כל שנותר להוכיח הוא שהמערכת שלמה, ולשם כך נניח כי $f \perp f_{2n+1}$ לכל $n = 0, 1, 2, \dots$ (בפרט, f מאונכת לכל הפונקציות מהצורה $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$). נגדיר את הפונקציה:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-ty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t$$

שכמובן מוגדרת לכל $z = x + iy$ היות והפונקציה:

$$e^{-ty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)$$

היא פונקציה ב-$L^1(\mathbb{R})$ (ניתן לראות זאת למשל על ידי שימוש בקושי שוורץ). אנחנו נוכיח שהפונקציה היא פונקציה שלמה וכי מתקיים:

$$g'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} ite^{itz} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

לשם כך, נעריך את הביטוי:

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(z+h)}-e^{itz}}{h}e^{-\frac{t^2}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{\infty}ite^{itz}e^{-\frac{t^2}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{ith}-1}{h}-it\right)e^{itz}e^{-\frac{t^2}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\|f\|\left\|\left(\frac{e^{ith}-1}{h}-it\right)e^{itz}e^{-\frac{t^2}{2}}\right\|\end{aligned}$$

ונראה כי הנורמה הימנית שואפת לאפס:

$$\left\|\left(\frac{e^{ith}-1}{h}-it\right)e^{itz}e^{-\frac{t^2}{2}}\right\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{ith}-1}{h}-it\right|^2|t|^2e^{-2ty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

כדי להוכיח שביטוי זה שואף לאפס, נשים לב שבכל קטע מהצורה $[-M,M]$, הביטוי $\frac{e^{-ith}-1}{h}-it$ מתכנס במידה שווה ל-0 כאשר $h\to0^+$. מחוץ לקטע כנ"ל, הביטוי לא מתכנס במידה שווה באופן כללי, אבל ניתן לחסום אותו, על ידי שימוש בטענת העזר הבאה:

טענה 10.7. תהא $h:[a,b]\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה בקטע הסגור וגזירה בקטע הפתוח. אזי קיים λ מגודל לכל היות 1 ונקודה $\lambda\in(a,b)$ שעבורה:

$$h(b)-h(a)=\zeta h'(\lambda)(b-a).$$

את טענת העזר נשאיר כתרגיל, אך נוכל להשתמש בה במקרה שלנו, ונכתוב:

$$\left|e^{ith}-1\right|=\left|ihe^{ish}\right||t|=|ht|\left|e^{-s\mathfrak{Im}(h)}\right|\le|ht|\,e^{|t|}.$$

כלומר:

$$\int\limits_{|t|\ge M}\left|\frac{e^{ith}-1}{h}-it\right|^2|t|^2e^{-2ty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\le\int\limits_{|t|\ge M}2\,|t|^3\,e^{|t|}e^{-2ty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

היות והאינטגרל המוכלל מתכנס, לכל $\varepsilon>0$ קיים M שעבורו:

$$\int\limits_{|t|\ge M}\left|\frac{e^{ith}-1}{h}-it\right|^2|t|^2e^{-2ty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}.$$

עתה, נשתמש בהתכנסות במידה שווה לאפס בקטע $[-M,M]$ כדי להסיק שקיימת $\delta>0$ כך שלכל $0<|h|<\delta$, יתקיים:

$$\int_{M}^{M}\left|\frac{e^{ith}-1}{h}-it\right|^2|t|^2e^{-2ty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}.$$

לסיכום,הראינו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ שעבורה לכל $0 < |h| < \delta$, יתקיים:

$$\left\| \left(\frac{e^{ith} - 1}{h} - it \right) e^{itz} e^{-\frac{x^2}{2}} \right\| < \varepsilon,$$

ומכאן שהפונקציה g אכן פונקציה שלמה וזוהי נגזרתה. יתרה מכך, ניתן לזהות כי על פי הנתון:

$$g\left(0\right) = \langle e^{-\frac{t^2}{2}}, f \rangle = 0, \quad g'\left(t\right) = i \langle t e^{-\frac{t^2}{2}}, f \rangle = 0.$$

אך ניתן להמשיך בצורה זו ולגזור את g שוב ושוב ולקבל שבאופן כללי:

$$g^{(m)}\left(z\right) = i^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itz} f\left(t\right) \, \mathrm{d}t,$$

ולהסיק כי $g^{(m)}\left(0\right) = 0$ לכל m. אך מכאן נובע כי $g \equiv 0$.

המסקנה האחרונה דרשה מאיתנו לעבוד בקונטקסט המרוכב. באופן כללי, איפוס הנגזרות בנקודה לא גוררת שהפונקציה שווה באופן זהותית לאפס.

עתה, נציב נקודות מהצורה $z = -x + 0i$ ונקבל כי:

$$g\left(-x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(t\right) e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itx} \, \mathrm{d}t = \mathfrak{F}_2 \left[f\left(t\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \right] \left(x\right) = 0.$$

מכך שהתמרת פוריה מעל $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ היא אופרטור אוניטרי, נוכל להסיק כי $e^{-\frac{t^2}{2}} f\left(t\right) = 0$. המעבר האחרון הוא להוכיח כמובן ש-$f = 0$, וכדי לעשות זאת נשים לב שלכל $-\infty < a < b < \infty$, מתקיים:

$$0 = \left\langle \chi_{[a,b]} e^{\frac{t^2}{2}}, e^{-\frac{t^2}{2}} f \right\rangle = \left\langle \chi_{[a,b]}, f \right\rangle,$$

ומכאן ש-f אורתוגונלית לקבוצה צפופה ב-$L^2\left(\mathbb{R}\right)$, וניתן להסיק בבטחה כי $f = 0$.

אם נסכם את התוצאה, קיבלנו כי הפונקציה $e_n(x)$ עבור $n = 0, 1, 2, \ldots$ מהוות בסיס אורתונומלי שביחס אליו $\mathcal{F}_2$ הוא אופרטור אלכסוני עם ערכים עצמיים:

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\pm i}{\sqrt{2\pi}}.$$

הערה. האופרטורים a, a^*, N הם אופרטורים לא חסומים, והם מוגדרים רק על תת-קבוצה צפופה של $L^2\left(\mathbb{R}\right)$. יחד עם זאת, אופרטורים אלה משחקים תפקיד חשוב במכניקת הקוונטים. האופרטורים a, a^* מכונים בהתאמה "אופרטורי הורדה/העלאה" והאופרטור N מכונה בשם "אופרטור המספר", ולמעשה מייצג (עד כדי נרמול) את ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני קוונטי.

10.3 תרגיל - חישובים מפורשים, נוסחת ההיפוך ומשפט פלנשרל

1. חשוב את התמרת פוריה של הפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x, & x\in\left[-1,0\right]\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}.$$

2. חשבו את האינטגרל המוכלל:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\left(t\right)-t\sin\left(t\right)}{2\pi^{2}\left(1+t^{2}\right)t^{2}}\,\mathrm{d}t.$$

3. חשבו את $\hat{f}\left(\omega\right)e^{-i\omega}$ והסיקו את ערך האינטגרל:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\omega\right)-1}{\omega^{2}}\,\mathrm{d}t.$$

פתרון.

1. היות ומדובר בפונקציה רציפה למקוטעין עם תומך קומפקטי, ניתן לחשב את התמרת הפוריה לפי הגדרה:

$$\begin{aligned}\hat{f}\left(\omega\right)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}xe^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x=\left.\frac{xe^{-i\omega x}}{-i\omega}\right|_{-1}^{0}+\frac{1}{i\omega}\int\limits_{-1}^{0}e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{e^{i\omega}}{i\omega}+\left.\frac{e^{-i\omega x}}{\omega^{2}}\right|_{-1}^{0}=-\frac{e^{i\omega}}{i\omega}+\frac{1}{\omega^{2}}-\frac{e^{i\omega}}{\omega^{2}}=\frac{1-e^{i\omega}+i\omega e^{i\omega}}{\omega^{2}}.\end{aligned}$$

2. כדי לחשב את האינטגרל הנ"ל, נזהה תחילה כי:

$$\mathfrak{Re}\left(\hat{f}\right)\left(\omega\right)=\frac{1-\cos\left(\omega\right)-\omega\sin\left(\omega\right)}{\omega^{2}}.$$

מכאן שמתקיים:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\left(\omega\right)-\omega\sin\left(\omega\right)}{2\pi^{2}\left(1+\omega^{2}\right)\omega^{2}}\,\mathrm{d}\omega=\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{2\pi^{2}}\left\langle\hat{f},\frac{1}{1+\omega^{2}}\right\rangle\right).$$

נרצה להשתמש בנוסחת פלנשרל, ולשם כך נחפש פונקציה $h(x)$ שעבורה $\hat{h}\left(\omega\right)=\frac{1}{1+\omega^{2}}$. למעשה, כבר מצאנו כזאת בתרגול הקודם, כאשר הוכחנו כי:

$$\mathcal{F}_{2}\left[\frac{1}{1+x^{2}}\right]\left(\omega\right)=\pi e^{-|\omega|},$$

ולכן, על פי נוסחת ההיפוך:

$$\mathcal{F}_2\left[\pi e^{-|\omega|}\right](x)=\frac{2\pi}{1+x^2},$$

כך שנוכל להסיק כי הפונקציה הדרושה היא $h(x)=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$. עתה, נקבל מנוסחת פלנשרל כי:

$$\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{2\pi^2}\langle\hat{f},\hat{h}\rangle\right)=\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{\pi}\langle f,h\rangle\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{0}xe^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left(x-1\right)e^x\Big|_{-1}^{0}=\frac{-1+2e^{-1}}{2\pi}.$$

3. מחישוב מפורש:

$$\hat{f}\left(\omega\right)e^{-i\omega}\frac{e^{-i\omega}-1+i\omega}{\omega^2}=\frac{\cos\left(\omega\right)-1}{\omega^2}+i\frac{\omega-\sin\left(\omega\right)}{\omega^2}.$$

היות והחלק המדומה של הפונקציה אי זוגי, האינטגרל המוכלל של חלק זה יתאפס, כלומר:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(\omega\right)-1}{\omega^2}\,\mathrm{d}\omega=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(\omega\right)e^{-i\omega}\,\mathrm{d}\omega=2\pi\frac{f\left(-1^{+}\right)+f\left(-1^{-}\right)}{2}=-\pi$$

10.4 תרגיל - משפט הקונבולוציה

1. חשבו את התמרת הפוריה של הפונקציה $f(x)=\left(x^2+1\right)\chi_{[-1,1]}\left(x\right)$.
2. קבעו לאילו מן המשוואות הבאות קיים פתרון ב-$L^2\left(\mathbb{R}\right)$. למשוואות שקיים להן פתרון, מצאו פתרון כזה, וקבעו האם הוא יחיד או לא.
   - $\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x-t\right)\frac{\left(t^2-1\right)\sin\left(t\right)+t\cos\left(t\right)}{t^3}\,\mathrm{d}t=e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   - $\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x-t\right)\frac{\left(t^2-1\right)\sin\left(t\right)+t\cos\left(t\right)}{t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{2\sin\left(t\right)}{t}$.

פתרון.

1. נשתמש בכך שידוע לנו, כי:

$$\mathcal{F}_2\left[\chi_{[-1,1]}\right]\left(\omega\right)=\frac{2\sin\left(\omega\right)}{\omega}.$$

עבור $x^2\chi_{[-1,1]}\left(x\right)$ נרצה להשתמש בנוסחה (9.4), אך הפונקציה לא עומדת בתנאים הראשוניים שעבורם הצדקנו את הנוסחה. יחד עם זאת, ניתן להראות שהנוסחה עדיין עובדת "בידיים" ולקבל:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2\left[x^2\chi_{[-1,1]}\right]\left(\omega\right)=i^2\left(\frac{2\sin\left(\omega\right)}{\omega}\right)''&=-\left(\frac{2\cos\left(\omega\right)}{\omega}-\frac{2\sin\left(\omega\right)}{\omega^2}\right)'\\&=\frac{2\sin\left(\omega\right)}{\omega}+\frac{4\cos\left(\omega\right)}{\omega^2}-\frac{4\sin\left(\omega\right)}{\omega^3}\end{aligned}$$

ולכן:

$$\mathcal{F}_2\left[\left(x^2+1\right)\chi_{[-1,1]}\right](\omega)=4\frac{\left(\omega^2-1\right)\sin(\omega)+\omega\cos(\omega)}{\omega^3}.$$

2. כדי לפתור את המשוואות, אנחנו נניח כי $f \in L^2(\mathbb{R})$ וניתן להשתמש במשפט הקונבולוציה. לפני שנפעיל אותו, נזהה כי הפונקציה בתוך האינטגרל היא ההתמרה של הפונקציה מהסעיף הקודם ולכן, על פי נוסחת ההיפוך:

$$\mathcal{F}_2\left[\frac{\left(t^2-1\right)\sin(t)+t\cos(t)}{t^3}\right](\omega)=\frac{\pi}{2}\left(\omega^2+1\right)\chi_{[-1,1]}(\omega).$$

- נפעיל את $\mathcal{F}_2$ על שני אגפי המשוואה ונקבל:

$$\frac{\pi}{2}\hat{g}(\omega)\left(\omega^2+1\right)\chi_{[-1,1]}(\omega)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

שימו לב שהאגף השמאלי בעל תומך קומפקטי בעוד האגף הימני לא, ולכן למשוואה לא קיים פתרון.

- באופן דומה, נקבל הפעם כי:

$$\frac{\pi}{2}\hat{g}(\omega)\left(\omega^2+1\right)\chi_{[-1,1]}(\omega)=2\pi\chi_{[-1,1]}(\omega).$$

הפעם, שני האגפים בעלי תומך המוכל בקטע $[-1,1]$ ולכן, לכל $\omega \in [-1,1]$ אפשר להגדיר:

$$\hat{f}(\omega)=\frac{4}{\omega^2+1}.$$

מכאן ניתן להרחיב את $\hat{f}$ באופנים רבים ושונים, כדי לקבל פתרון למשוואה. לשם נוחות, נרחיב את $\hat{f}$ בעזרת הנוסחה שקיבלנו גם כאשר $|\omega|>1$, ואז נסיק כי:

$$f(x)=2e^{-|x|}$$

תהיה פתרון למשוואה. כמובן שהפתרון אינו יחיד, שכן גם הפונקציה:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{4e^{i\omega x}}{\omega^2+1}\,\mathrm{d}\omega,$$

כלומר, ההיפוך של הפונקציה $\hat{f}(\omega)=\frac{4}{\omega^2+1}\chi_{[-1,1]}(\omega)$, תהיה פתרון למשוואה.

10.5 תרגיל - משוואות דיפרנציאליות חלקיות

1. תהא $f \in \mathrm{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. הראו שקיים פתרון $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ למשוואה:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}.$$

2. איך הייתה משתנה התשובה במידה והמד"ח הייתה $u_t - u_{xx} = g(x,t)$, כאשר g פונקציה רציפה כך שלכל t, $g(x,t) \in L^2(\mathbb{R})$?

פתרון.

1. ננסה להניח תחילה כי u פונקציה יפה מספיק כדי שכל החישובים שנבצע לעיל יהיו הגיוניים. נצדיק אותם כמובן בדיעבד. נגדיר:

$$\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x.$$

כלומר, התמרת פוריה של u ביחס למשתנה x. במקרה זה נוכל להשתמש בנוסחה (9.4) כדי לקבל:

$$\mathcal{F}_2[u_x](\omega,t) = i\omega\hat{u}(\omega,t),$$

ולכן:

$$\mathcal{F}_2[u_{xx}](\omega,t) = -\omega^2\hat{u}(\omega,t).$$

בנוסף, תחת הנחות שמצדיקות גזירה תחת סימן האינטגרל המוכלל (לפי t), נקבל כי:

$$\mathcal{F}_2[u_t](\omega,t) = \hat{u}_t(\omega,t).$$

ולכן, אם $u_t - u_{xx} = 0$, נפעיל התמרת פוריה על שני האגפים ונקבל כי:

$$\hat{u}_t(\omega,t) + \omega^2\hat{u}(\omega,t) = 0.$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית רגילה שפתרונה הכללי הוא:

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\, e^{-\omega^2 t}.$$

כדי למצוא את $A(\omega)$, נשים לב שמתקיים:

$$\hat{u}(\omega,0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x = \hat{f}(\omega) = A(\omega).$$

ולכן:

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)\,e^{-\omega^2 t}=\mathcal{F}_2\left[f*e^{-\frac{x^2}{4t}}\right](\omega,t)\,.$$

כלומר, תחת ההנחות שלנו, ניתן להציע פתרון למד"ח מהצורה:

$$u(x,t)=f*e^{-\frac{x^2}{4t}}\,(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\,e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}}\,\mathrm{d}t.$$

כאשר $t>0$, מתקיימים כל התנאים לגזירה תחת סימן האינטגרל, הן לפי x והן לפי t. למעשה, הצורה של האינטגרל מראה שהפונקציה שלנו גזירה לפי שני המשתנים מכל סדר שהוא, כך שהיא חלקה באופן אוטומטי. . החלקות מאפשרות לנו להצדיק בדיעבד את כל נוסחאות הגזירה שלנו, וכל שנותר להראות הוא שהיא מקיימת את תנאי ההתחלה. מדובר בנוסחה שכבר ראינו בתרגול הקודם:

למעשה, ניתן להראות כי גם אם מניחים $f\in L^2(\mathbb{R})$, הביטוי שכתוב לעיל מגדיר פונקציה חלקה לכל $t>0$

$$\lim_{t\to 0^+}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x-u)\,e^{-\frac{u^2}{4t}}\,\mathrm{d}t=f(x)\,.$$

2. במקרה זה, המשוואה שלנו תהיה (לאחר הפעלת התמרת פוריה על שני האגפים):

$$\hat{u}_t(\omega,t)+\omega^2\hat{u}(\omega,t)=\hat{g}(\omega,t)\,.$$

עדיין מתקבלת מד"ר אך עתה המד"ר היא אי-הומוגנית, ונוכל לפתור אותה על ידי הכפלה בגורם אינטגרציה:

$$\left(e^{\omega^2 t}\hat{u}(\omega,t)\right)_t=\hat{g}(\omega,t)\,e^{\omega^2 t},$$

ולכן:

$$\hat{u}(\omega,t)=e^{-\omega^2 t}\int\limits_0^t\hat{g}(\omega,\tau)\,e^{\omega^2\tau}\,\mathrm{d}\tau+A(\omega)\,e^{-\omega^2 t}.$$

היות והאיבר השמאלי ממילא מתאפס כאשר $t=0$, נוכל להסיק שוב כי תנאי ההתחלה גורר $A(\omega)=\hat{f}(\omega)$. במקרה זה נוכל לחזור אחורה בעזרת נוסחת ההיפוך ולקבל כי:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2 t}\left(\int\limits_0^t\hat{g}(\omega,\tau)\,e^{\omega^2\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\,e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}}\,\mathrm{d}u.$$

במקרה זה יהיה מורכב יותר לדון במידת החלקות של הפתרון u, אך כמובן שבמידה ו-g פונקציה "יפה מספיק" - גם הפונקציה u תהיה חלקה.

11
התמרת לפלס

11.1 תזכורות מההרצאה

בהרצאה ראינו כי אם $y \in L^2\left[0, \infty\right)$, הנוסחה:

$$z \mapsto \int_0^\infty y(t)e^{izt}\,\mathrm{d}t$$

מגדירה פונקציה ב-$H^2\left(\mathbb{C}_+\right)$. במקרה שבו $z = is$ עבור $s \in \mathbb{H}_0$, כאשר:

$$\mathbb{H}_0 = \left\{x + iy | x > 0,\, y \in \mathbb{R}\right\},$$

מקבלים את הפונקציה:

$$Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

ופונקציה זו הולומורפית בחצי המישור הימני ומתקיים:

$$\sup_{\sigma>0}\int_{\mathbb{R}} |Y(\sigma+iu)|^2 \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\|y\|_2^2 .$$

אנחנו נעבוד עם משפחות ספציפיות שניתן להגדיר עבורן התמרת לפלס.

הגדרה 11.1 (פונקציות מטיפוס מעריכי)**.** לכל $a\in\mathbb{R}$, נסמן ב-$\mathcal{E}_a$ את אוסף כל הפונקציות $y:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ המצומצמות לפונקציות רציפות למקוטעין בכל תת קטע סגור וחסום של $[0,\infty)$, וכך שקיים קבוע $C\geq 0$ שעבורו:

$$|y(t)|\leq Ce^{at},\quad \forall t\in[0,\infty) .$$

נסמן גם את המרחב $\mathcal{E}=\bigcup_{a\in\mathbb{R}}\mathcal{E}_a$.

כמו כן, מגדירים לכל $a\in\mathbb{R}$ את חצי המישור:

$$\mathbb{H}_a=\{\sigma+iu|\sigma>a\} .$$

הגדרה 11.2 (התמרת לפלס)**.** לכל $y\in\mathcal{E}_a$, **התמרת לפלס** של הפונקציה היא הפונקציה $\mathcal{L}[y](s)$ המוגדרת על פי:

$$\mathcal{L}[y](s)=\int_0^\infty y(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,\quad \forall s\in\mathbb{H}_a.$$

האינטגרל תמיד מתכנס בהחלט, ולעתים מסמנים $Y=\mathcal{L}[y]$. כמתברר, Y הולומורפית ב-$\mathbb{H}_a$.

דוגמה. עבור $a\in\mathbb{C}$, מתקיים $y(t)=e^{at}$ שייכת ל-$\mathcal{E}_a$, ולכן לכל $s\in\mathbb{C}$ כך ש-$\mathfrak{Re}(s)>a$ מתקיים:

$$Y(s)=\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s)=\frac{1}{s-a}.$$

דוגמה נוספת. עבור הפונקציות הטריגונומטריות, מתקיים:

$$\mathcal{L}[\cos(bt)](s)=\frac{s}{s^2+b^2},\quad \mathcal{L}[\sin(bt)](s)=\frac{b}{s^2+b^2}.$$

טענה 11.3 (דעיכה של התמרת לפלס)**.** לכל $y\in\mathcal{E}_a$ ולכל $\sigma>a$, מתקיים:

$$\lim_{u\to\pm\infty} Y(\sigma+iu)=0.$$

ניתן להוכיח כי לכל $u\in\mathbb{R}$ מתקיים גם $\lim_{\sigma\to\infty}Y(\sigma+iu)=0$.

הגדרה 11.4. פונקציית הביסייד היא הפונקציה:

$$H(t) = \chi_{[0,\infty)}(t),$$

השייכת ל-$\mathcal{E}_0$ והתמרת לפלס שלה נתונה על ידי:

$$\mathcal{L}\left[H\right](s) = \frac{1}{s}.$$

טענה 11.5 (הזזה בזמן)**.** תהא $y \in \mathcal{E}$ ויהא $b > 0$. אזי:

$$\mathcal{L}\left[H(t-b)y(t-b)\right](s) = e^{-bs}\mathcal{L}\left[y\right](s). \tag{11.1}$$

אם $c \in \mathbb{C}$, מתקיים:

$$\mathcal{L}\left[e^{ct}y(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[y\right](s-c). \tag{11.2}$$

טענה 11.6 (התמרה לנגזרת)**.** תהא $y \in \mathcal{E} \cap C([0,\infty))$ ונניח כי y גזירה למעט בכמות סופית של נקודות או בסדרה של נקודות השואפת לאינסוף, ולבסוף, נניח גם כי $y' \in \mathcal{E}$. אזי:

$$\mathcal{L}\left[y'\right](s) = s\mathcal{L}\left[y\right](s) - y(0).$$

כמו כן, אם נניח כי $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ כולן ב-$\mathcal{E}$ ומקיימות את תנאי המשפט, אזי:

$$\mathcal{L}\left[y^{(n)}\right](s) = s^n\mathcal{L}\left[y\right](s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0), \tag{11.3}$$

כאשר הערכים ב-0 (כולל הנגזרות) הם הגבולות הרלוונטיים מימין.

טענה 11.7 (התמרה של צוברת שטח)**.** תהא $y \in \mathcal{E}$. אזי, $\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathcal{E}$ ומתקיים:

$$\mathcal{L}\left[\int\limits_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[y\right](s). \tag{11.4}$$

טענה 11.8 (התמרה לפולינום)**.** נניח כי $y \in \mathcal{E}$. אזי $t^n y \in \mathcal{E}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ומתקיים:

$$\mathcal{L}\left[t^n y(t)\right](s) = (-1)^n\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\mathcal{L}\left[y\right](s). \tag{11.5}$$

הגדרה 11.9 (קונבולוציה)**.** עבור $f, g \in \mathcal{E}$, נרחיב אותן להתאפס בציר הממשי השלילי ונגדיר:

$$f * g(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

משפט 11.10 (משפט הקונבולוציה)**.** תהיינה $f, g \in \mathcal{E}_a$. אזי $f * g \in \mathcal{E}_{a+\varepsilon}$ לכל $\varepsilon > 0$ ומתקיים:

$$\mathcal{L}\left[f * g\right](s) = \mathcal{L}\left[f\right](s)\mathcal{L}\left[g\right](s). \tag{11.6}$$

11.1.1 נוסחת ההיפוך

בדומה להתמרת פוריה, גם להתמרת לפלס קיימת "נוסחת היפוך" שמאפשרת (בתנאים מסויימים) לשחזר את הפונקציה y מתוך ההתמרה שלה, Y.

משפט 11.11 (נוסחת ההיפוך)**.** תהא $y \in \mathrm{PC}^1([0,\infty)) \cap \mathcal{E}_a$, ונסמן $Y = \mathcal{L}\left[y\right]$. אזי, לכל $b > a$, ולכל $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{y(t^+) + y(t^-)}{2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} Y\left(b + i\omega\right) e^{(b+i\omega)t} \,\mathrm{d}\omega = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} Y(z)e^{zt} \,\mathrm{d}z. \tag{11.7}$$

שימו לב שלכאורה, היות והפונקציה הנתונה היא $Y(s)$, לא נתון לנו מיהו ה-a המתאים (כך שנוכל לחשב את האינטגרל עם $b > a$). יחד עם זאת, ידוע לנו כי $Y(s)$ אמורה להיות הולומורפית בחצי המישור $\mathbb{H}_a$, ולכן ניתן לבחור את b כך שב-$\mathbb{H}_b$ אין ל-$Y(s)$ נקודות סינגולריות.

האינטגרל באגף הימני של משוואה (11.7) מכונה גם בשם **אינטגרל ברומוויץ'/אינטגרל פורייה-מלין**.

11.2 תרגיל - חישובי התמרות

חשבו את $\mathcal{L}\left[f\right](s)$ עבור הפונקציות הנתונות הבאות. עבור אילו ערכי s ההתמרה מוגדרת?

1. $f(t) = \chi_{[a,b]}(t)$ עבור $b > a \geq 0$.
2. $f(t) = e^{at}\sin(bt)$ כאשר $a \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.
3. $f(t)$ היא פונקציה רציפה ומחזורית בעלת מחזור T. לאחר מכאן חשבו את ההתמרה במקרה שבו $f(t) = 1$ בקטע $[0,1]$ ו-$f(t) = -1$ בקטע $[1,2]$, ומרחיבים אותה לכל הציר הממשי החיובי.
4. $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.

פתרון —

1. ראשית, ברור שהאינטגרל המגדיר את $F(s) = \mathcal{L}\left[f\right](s)$ יתכנס לכל $s \in \mathbb{C}$. עבור $s = 0$:

$$F(s) = \int_0^\infty \chi_{[a,b]}(t) \,\mathrm{d}t = b - a,$$

ועבור s כך ש-$\mathfrak{Re}\,(s) \geq 0$:

$$F(s) = \int\limits_0^\infty \chi_{[a,b]}(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}.$$

2. הפעם, ניכר כי האינטגרל יתכנס לכל $s \in \mathbb{C}$ שעבורו $\mathfrak{Re}(s) > a$, ויתבדר אחרת. ובמקרה זה נקבל:

$$F(s) = \int\limits_0^\infty e^{(a-s)t}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{(a-s)t}\sin(bt)}{a-s}\right|_0^\infty - \frac{b}{a-s}\int\limits_0^\infty e^{(a-s)t}\cos(bt)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{b}{(a-s)^2}e^{(a-s)t}\cos(bt) - \frac{b^2}{(a-s)^2}F(s) = \frac{b}{(a-s)^2} - \frac{b^2}{(a-s)^2}F(s).$$

כלומר:

$$\left(\frac{(a-s)^2 + b^2}{(a-s)^2}\right)F(s) = \frac{b}{(a-s)^2} \Longrightarrow F(s) = \frac{b}{(a-s)^2 + b^2}.$$

שימו לב שדרך אחרת להסיק את התוצאה, היא שימוש בנוסחה:

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[f\right](s-a),$$

שניתן להוכיח באותה הצורה בדיוק, ולאחר מכן להשתמש בהתמרה הידועה של פונקציית הסינוס שפגשנו בהרצאה.

3. היות ומדובר בפונקציה חסומה, האינטגרל יתכנס בהחלט רק כאשר $\mathfrak{Re}(s) > 0$, ובמקרה זה נוכל לכתוב:

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int\limits_{nT}^{(n+1)T} f(t-nT)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int\limits_0^T f(u)\,e^{-s(u+nT)}\,\mathrm{d}u$$
$$= \sum_{n=0}^\infty e^{-nsT}\int\limits_0^T f(u)e^{-su}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1-e^{-sT}}\mathcal{L}\left[f\chi_{[0,T]}\right](s).$$

עבור הפונקציה שנתונה בשאלה, המחזור הוא 2 ולכן במקרה זה:

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\int\limits_0^1 e^{-st}\,\mathrm{d}t - \int\limits_1^2 e^{-st}\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{1-e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}\right]$$
$$= \frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{2\left(1-e^{-2s}\right)} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}.$$

4. תחילה, נזהה כי האינטגרל הרלוונטי יתכנס בהחלט כאשר $\mathfrak{Re}(s) > 0$. כדי לפתור את האינטגרל נזהה כי:

$$\mathcal{L}\left[tf(t)\right](s) = F'(s),$$

ומצד שני:

$$\mathcal{L}\left[tf(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[\sin(t)\right](s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

כלומר:

$$F'(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

נשתמש בכך שהתמרת לפלס תמיד דועכת באינסוף ונקבל:

$$F(s) = F(s) - \lim_{M\to\infty} F(M) = \lim_{M\to\infty} \int\limits_s^M F'(u)\,\mathrm{d}u = \int\limits_s^\infty \frac{1}{s^2+1}\,\mathrm{d}s = \arctan(s) - \frac{\pi}{2}.$$

11.3 תרגיל - התמרת לפלס ומשוואות דיפרנציאליות

1. נסו למצוא פתרון בעזרת התמרת לפלס למשוואה:

$$y'' + 4y' + 7y = H(t-1),$$

בכפוף לתנאי ההתחלה $y(0) = 1, y'(0) = 0$. מה ניתן לומר על הפונקציה שהתקבלה?

2. חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{1}{t}}$, על ידי שימוש בהצבה $x = \sqrt{t}$ וגזירה תחת סימן האינטגרל. היעזרו בהתמרה זו כדי למצוא פתרון (בעזרת התמרת לפלס בזמן), למשוואה:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_x(0,t) = -1, \\ \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}.$$

פתרון —

1. בהנחה ש-$y \in \mathcal{E}$, נוכל להפעיל התמרה על שני האגפים ולקבל:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 7Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}.$$

$$\left(s^2+4s+7\right)Y(s) - (s+4) = \frac{e^{-s}}{s} \implies Y(s) = \frac{e^{-s}}{s}\left(s^2+4s+7\right) + \frac{s+4}{s^2+4s+7}.$$

נשים לב שניתן לכתוב:

$$\frac{s+4}{s^2+4s+7}=\frac{s+2}{(s+2)^2+3}+\frac{2}{(s+2)^2+3},$$

וכן:

$$\frac{1}{s(s^2+4s+7)}=-\frac{s+4}{7((s+2)^2+3)}+\frac{1}{7s}=-\frac{1}{7}\frac{s+2}{(s+2)^2+3}-\frac{2}{7\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(s+2)^2+3}+\frac{1}{7s}.$$

כלומר:

$$Y(s)=-\frac{1}{7}\frac{s+2}{(s+2)^2+3}e^{-s}-\frac{2}{7\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(s+2)^2+3}e^{-s}+\frac{1}{7s}e^{-s}+\frac{s+2}{(s+2)^2+3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(s+2)^2+3}.$$

מכאן ניתן לחזור אחורה ולקבל את הפתרון:

$$\begin{aligned}y(t)=-\frac{1}{7}H(t-1)\left(e^{-2(t-1)}\cos(\sqrt{3}(t-1))-\frac{2}{7\sqrt{3}}e^{-2(t-1)}\cos(\sqrt{3}(t-1))+\frac{1}{7}\right)\\+e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t)+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sin(\sqrt{3}t).\end{aligned}$$

ניתן לוודא כי הפתרון רציף לכל $t\geq 0$, אך צורתו משתנה בצורה מידית כאשר $t=1$, ובנקודה זו הפתרון אינו גזיר. שימו לב שבמובן מסויים "ברור" לנו כי מדובר בפתרון יחיד, על אף שהפתרון (וגם המד"ר) לא עומדים בתנאי משפט הקיום והיחידות. לעתים משתמשים במשוואות כאלו (שבהן יש אפקט "הלם" שבא בצורת קפיצה במשוואה) כדי לתאר תהליכים שבהם יש שינוי מידי. שיטות אלו אכן מתארות בצורה מצוינת מערכות רבות (למשל, מערכת חשמלית שבה מתג כלשהו נדלק באופן פתאומי).

2. נתחיל מחישוב ההתמרה על פי ההדרכה. לא קשה לוודא שהפונקציה שייכת ל-$\mathcal{E}_0$, ולכן נניח כי $\mathfrak{Re}(s)>0$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{1}{t}}\right](s)=\int\limits_0^\infty\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{1}{t}-st}\,\mathrm{d}t\overset{\substack{x=\sqrt{st}\\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}}{=}\frac{2}{\sqrt{s}}\int\limits_0^\infty e^{-x^2-\frac{s}{x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

את האינטגרל שקיבלנו נחשב בעזרת גזירה תחת סימן האינטגרל. כלומר, נסמן:

$$I(s)=\int\limits_0^\infty e^{-x^2-\frac{s}{x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

ונשאיר כתרגיל את ההוכחה שאכן ניתן לגזור תחת סימן האינטגרל המוכלל. לאחר גזירה נקבל:

$$I'(s)=-\int\limits_0^\infty\frac{1}{x^2}e^{-x^2-\frac{s}{x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

ונשתמש בהחלפת המשתנים $u=\frac{\sqrt{s}}{x}$, כלומר $\mathrm{d}u=-\frac{\sqrt{s}}{x^2}\,\mathrm{d}x$, ולכן:

$$I'(s)=-\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-u^2-\frac{s}{u^2}}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{\sqrt{s}}I(s).$$

ומכאן שמתקיים:

$$I(s)=Ae^{-2\sqrt{s}}.$$

על ידי הצבה של $s=0$ נקבל את האינטגרל הגאוסיאני המוכר שערכו $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ולכן $I(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\sqrt{s}}$. כלומר:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{1}{t}}\right](s)=\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-2\sqrt{s}}.$$

עתה, נניח שלמד"ח שלנו יש פתרון בעל התמרת לפלס (שמתנהג "מספיק יפה"). נסמן ב-$U(x,s)$ את התמרת לפלס של הפתרון לפי הזמן, ונקבל כי:

$$\mathcal{L}\left[u_{xx}(x,t)\right](x,s)=U_{xx}(x,s),\quad \mathcal{L}\left[U_t(x,t)\right](x,s)=sU(x,s)-u(x,0)=sU(x,s).$$

אם נציב במד"ח נקבל:

$$U_{xx}(x,s)-sU(x,s)=0\Longrightarrow U(x,s)=A(s)e^{\sqrt{s}x}+B(s)e^{-\sqrt{s}x}.$$

תחת ההנחה לפיה $u(x,t)$ דועך באינסוף, נוכל להניח בבטחה כי $A(s)=0$ (כי שם יש אקספוננט ששואף לאינסוף) ולכן הפתרון יהיה מהצורה:

$$U(x,s)=B(s)e^{-\sqrt{s}x}.$$

על ידי הצבה בתנאי ההתחלה על הנגזרת נקבל:

$$U_x(0,s)=-\frac{1}{s}=-\sqrt{s}B(s)\Longrightarrow B(s)=\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}.$$

כלומר:

$$U(x,s)=\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\sqrt{s}x}.$$

נראה שקיבלנו ביטוי שמזכיר את ההתמרה שחישבנו, ואכן:

$$\mathcal{L}\left[\frac{b}{\sqrt{t}}e^{-\frac{a}{t}}\right](s)=\frac{b}{\sqrt{a}}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{t}{a}}}e^{-\frac{1}{\frac{t}{a}}}\right](s)=\sqrt{a}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{1}{t}}\right](as)=\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-2\sqrt{a}\sqrt{s}}.$$

עלינו לחפש a שעבורו $2\sqrt{a}=x$ כלומר $a=\frac{x^2}{4}$. ולכן:

$$U(x,s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}\left[1\right](s)\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right](s).$$

על פי משפט הקונבולוציה, נקבל כי:

$$u(x,t)=\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\,\mathrm{d}t.$$

שימו לב שאכן מדובר בפתרון הידוע שמתקבל בעזרת גרעין החום. יחד עם זאת, קיים הבדל משמעותי, והוא שהפעם (בניגוד לפתרון שהשגנו בעזרת התמרת פוריה) הקונבולוציה היא בזמן, ולא במרחב. כדאי לנסות ולחשוב כיצד היה נראה הפתרון לו היינו מחליפים את תנאי ההתחלה $u(x,0)$ בפונקציה $f(x)$ כלשהי במקום בפונקציית האפס.

11.4 תרגיל - קונבולוציה

1. חשבו את התמרת לפלס של t^n לכל $n=0,1,2,\ldots$.

2. פונקציית בטא מוגדרת לכל $p,q\geq 1$ על ידי:

$$B\left(p,q\right)=\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x\right)^{q-1}\,\mathrm{d}x.$$

ופונקציית גאמא נתונה לכל $z\in\mathbb{C}$ עם $\mathfrak{Re}(z)>0$ על ידי:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

על ידי התבוננות בפונקציה $f(t)=\int_0^t x^{p-1}(t-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$, הוכיחו את הנוסחה:

$$B\left(p,q\right)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma\left(p+q\right)}.$$

3. נתונה בעיית הקונבולוציה:

$$\begin{cases}\int_0^t f(x)f'(t-x)\,\mathrm{d}t=\frac{a^3t}{8}\sin\left(at\right)-\frac{a^2}{4}\\ f(0)=a\end{cases}.$$

מצאו את כל הפתרונות הרציפים ששייכים ל-$\mathcal{E}_0\cap C([0,\infty))$.

פתרון —

1. ראשית, ניתן לזהות בקלות כי $t^n \in \mathcal{E}_0$ לכל $n \geq 0$. במקרה $n = 0$ נקבל לכל $s \in \mathbb{H}_0$:

$$\mathcal{L}\left[1\right](s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}.$$

ועתה, על פי נוסחה (11.5):

$$\mathcal{L}\left[t^n\right](s) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

2. נשים לב שאת הפונקציה $f(t)$ אפשר לכתוב בתור הקונבולוציה:

$$f(t) = t^{p-1} * t^{q-1}.$$

שתי הפונקציות שייכות ל-$\mathcal{E}_0$ ועל פי משפט הקונבולוציה:

$$\mathcal{L}\left[f\right](s) = \mathcal{L}\left[t^{p-1}\right](s)\mathcal{L}\left[t^{q-1}\right](s) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{s^{p+q}}.$$

עתה, את המוכפל הימני באגף הימני נוכל לזהות גם כן כהתמרה, בעזרת הסעיף הקודם. כלומר:

$$\mathcal{L}\left[f\right](s) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\mathcal{L}\left[t^{p+q-1}\right](s).$$

על פי משפט (**??**), מתקיים:

$$\int\limits_0^t x^{p-1}(t-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}t^{p+q-1}.$$

על ידי הצבה של $t = 1$, מקבלים בדיוק את הזהות הדרושה.

3. נפעיל התמרת לפלס על שני האגפים. ונקבל:

$$\mathcal{L}\left[f * f'\right](s) = \mathcal{L}\left[f\right](s)\mathcal{L}\left[f'\right](s) = F(s)\left(-f(0) + sF(s)\right) = sF^2(s) - aF(s),$$

כאשר $F(s) := \mathcal{L}\left[f\right](s)$. באגף הימני נקבל:

$$\mathcal{L}\left[\frac{a^3 t}{8}\sin(at) - \frac{a^2}{4}\right](s) = -\frac{a^3}{8}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)' - \frac{a^2}{4s} = \frac{a^4}{4}\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2} - \frac{a^2}{4s}.$$

מהשוואה בין שני האגפים נקבל:

$$F^2(s)-\frac{a}{s}F(s)+\frac{a^2}{4s^2}-\frac{a^4}{4}\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}=0.$$

הפתרון של המשוואה הריבועית הוא:

$$F(s)=\frac{a}{2s}\pm\frac{a^2}{2\left(s^2+a^2\right)}.$$

על ידי שימוש בהתמרות הידועות שיש ברשותינו, נקבל כי הפתרונות הרציפים הם בדיוק שתי הפונקציות:

$$f(t)=\frac{a}{2}\pm\frac{a}{2}\cos(at).$$

כדי שיתקיים תנאי ההתחלה, עלינו לדרוש את הפתרון החיובי וזהו הפתרון היחיד. כלומר:

$$f(t)=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos(at).$$