

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

**А.И. РЕПИН (ООО “ЭНЕРГОАВТОМАТИКА”),
Н.И. СМЕРНОВ, В.Р. САБАНИН, И.М. ШАРОВИН (МЭИ)**

Обсуждаются возможности применения дробного исчисления в задачах оптимального синтеза систем автоматического регулирования (САР). Рассматривается концепция дробного $PI^{\lambda}D^{\delta}$ -контроллера, включающего в себя интегратор и дифференциатор нецелых порядков [1, 2], анализируется его поведение и характеристики. Приводятся результаты моделирования и численной оптимизации целых и дробных САР, подтверждающие преимущество систем с дробными контроллерами. В основу параметрической оптимизации анализируемых систем положены численные методы имитационного моделирования с использованием авторской версии эволюционного алгоритма оптимизации “Optim-MGA” [3, 4].

Задачи оптимального синтеза САР в теории автоматического управления принято решать путем использования классического математического аппарата, в том числе с помощью интегро-дифференциальных уравнений в обыкновенных производных. Классический математический анализ предполагает, что интегралы и производные имеют порядки, выраженные целыми числами. Между тем, уже сравнительно давно установлено наблюдениями, что поведение целого ряда объектов и процессов не соответствует в полной мере целочисленным математическим моделям и что необходимо разрабатывать и использовать уточненные модели как объектов регулирования, так и используемых алгоритмов контроллеров. Аппроксимация сигналов на их выходах обнаружила наличие в них степенных зависимостей от времени и частоты с нецелыми показателями степеней [5].

В последнее время наблюдается растущий интерес к динамическим системам нецелого порядка. В литературе для их описания используется термин “вычисления дробного порядка” или “динамические системы дробного порядка” где под словом дробный понимается нецелый [6].

Развитие теории дробных степеней (фракталов) вызвало интерес к использованию нецелых порядков в задачах синтеза и анализа

САР, в составе которых объект регулирования и контроллер описываются моделями нецелых порядков. Другими словами, основы такого математического анализа базируются на использовании понятий интегралов и производных, порядки которых не являются целыми числами, а могут быть дробными, иррациональными и комплексными.

История возникновения дробного исчисления насчитывает более трех столетий, однако широкое развитие оно получило лишь в последние десятилетия [7, 8, 9]. Считается, что исследования систем регулирования с PID-контроллерами дробного порядка начались с момента выхода публикаций [1, 9, 10] (I. Podlubny), в которых предложена концепция дробного $PI^{\lambda}D^{\delta}$ -контроллера и показана его эффективность.

Применение дробного исчисления в теории автоматического управления подразделяется на две группы. Первую образуют методы математического и компьютерного моделирования систем дробного порядка во временной и частотной областях. Ко второй относятся методы использования дробного исчисления для синтеза систем управления, в частности, синтеза контроллеров нецелого порядка. Решение классических задач автоматического управления (устойчивость, наблюдаемость, робастность и др.) в случае систем дробно-

го порядка оказывается существенно сложнее из-за трансцендентности передаточных функций систем. В частности, это относится к PID- контроллерам, представляющим собой параллельное соединение пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих.

К ВОПРОСУ О ТЕОРИИ ДРОБНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Динамика систем автоматического регулирования нецелых степеней описывается дифференциальными уравнениями дробного порядка. В теории дробного исчисления операторы интегрирования и дифференцирования принято называть диферинтегралами, которые в общем случае имеют вид:

$${}_a D_t^r = \begin{cases} \frac{\partial^r}{\partial t^r}, & R(r) > 0; \\ 1, & R(r) = 0; \\ t \int_a^t (\delta t)^{-r}, & R(r) < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где r — порядок диферинтеграла, t — параметр, для которого вычисляется диферинтеграл, a — нижний предел интегрирования (дифференцирования).

В публикациях при написании диферинтегралов символы a и t часто опускают. В общем случае порядок r может являться комплексным числом, однако в теории дробного регулирования ограничиваются действительными числами. В случае положительного r осуществляется операция дифференцирования, отрицательного r — операция интегрирования.

С учетом отмеченного, математическая модель линейной динамической системы дробного порядка с постоянными коэффициентами может быть представлена в виде:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_n D^{\beta_n} x(t) + b_{n-1} D^{\beta_{n-1}} x(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} x(t) \quad (2)$$

где a_i, b_j — коэффициенты уравнения, α_i, β_j — дробные порядки диферинтегралов, $x(t), y(t)$ — соответственно входной и выходной параметры динамической системы.

Применив преобразование Лапласа к уравнению (2), получим передаточную функцию динамической системы дробного порядка:

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{b_n s^{\beta_n} x(t) + b_{n-1} s^{\beta_{n-1}} x(t) + \dots + b_0 s^{\beta_0} x(t)}{a_n s^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 s^{\alpha_0} y(t)}. \quad (3)$$

Применение классического операционного исчисления Лапласа к дифференциальным уравнениям дробного порядка приводит к характеристическим уравнениям иррационального типа и возможно лишь для линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [5]. В связи с этим для решения дифференциальных уравнений дробного порядка обычно используются либо формулы численного дифференцирования Грюнвальда-Летникова, либо определение Римана-Лиувилля.

Формула численного дифференцирования Грюнвальда-Летникова имеет вид:

$$D_t^r x(t) = \frac{\partial^r x(t)}{\partial t^r} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(r-k+1)} x(t-k_h) \right], \quad (4)$$

где Γ — гамма функция Эйлера, h — временной интервал.

Формула (4) является обобщающей и дает выражения производной произвольного порядка при положительном r и для интегралов произвольных порядков при отрицательном r .

Другим широко распространенным определением производных и интегралов нецелых порядков является определение Римана-Лиувилля, которое является обобщением на нецелые порядки интегральной формулы Коши:

$${}_a D_t^r x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_a^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{r-n+1}} d\tau, \quad (5)$$

где $n-1 < r < n$, Γ — гамма функция Эйлера.

Анализ формул (4, 5) показывает, что в отличие от формул численного дифференцирования целых порядков, для нецелых порядков наблюдается эффект “памяти” предыдущих значений функции. Для вычисления текущего значения функции необходимо помнить значения функции в предыдущие моменты времени.

Известно, что обратное преобразование Лапласа не дает решения для переходных процессов в замкнутых САУ, если объект регули-

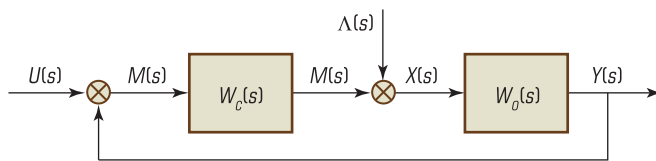


Рис. 1. Структурная схема одноконтурной САР

рования содержит транспортное запаздывание τ . С учетом отмеченного, а также довольно громоздких вычислений с использованием выражений (4, 5) авторы предлагают решение задач синтеза и анализа дробных систем проводить в частотной области с использованием интегральных преобразований Фурье. В соответствии с прямым преобразованием Фурье по аналогии с преобразованием Лапласа легко получается выражение для дробной комплексной частотной характеристики путем замены оператора s на $j\omega$:

$$W(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_n(j\omega)^{\beta_n} + b_{n-1}(j\omega)^{\beta_{n-1}} + \dots + b_0(j\omega)^{\beta_0}}{a_n(j\omega)^{\alpha_n} + a_{n-1}(j\omega)^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0(j\omega)^{\alpha_0}}. \quad (6)$$

В результате все исследования с математическими моделями дробных порядков представляется возможным проводить в частотной области с дальнейшим переходом во временную область с использованием обратного преобразования Фурье вида:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin(\omega t) \cdot \operatorname{Re}(W(\omega))}{\omega} d\omega, \quad (7)$$

где $\operatorname{Re}(W(\omega))$ — действительная часть КЧХ динамической системы, ω_c — частота среза, определяющая рабочий диапазон частот.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО НАСТРОЙКЕ PID-КОНТРОЛЛЕРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Известно, что математическая модель классического PID-контроллера является взвешенной суммой входного сигнала, его производной и интеграла:

$$\mu(t) = K_p \varepsilon(t) + K_i \int_0^t \varepsilon(t) dt + K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (8)$$

где $\varepsilon(t)$ — ошибка регулирования, $\mu(t)$ — регулирующее воздействие.

Преобразовав по Лапласу выражение (8), получим передаточную функцию классического PID-контроллера:

$$W_p(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p + K_i \cdot s^{-1} + K_d \cdot s. \quad (9)$$

PID-контроллеры дробного порядка в литературе обозначают аббревиатурой $PI^\lambda D^\delta$ (или $PI^\lambda D^\mu$ [1]). Их математическое описание во временной области записывается как:

$$\mu(t) = K_p \varepsilon(t) + K_i \cdot D_i^{-\lambda} \cdot \varepsilon(t) + K_d \cdot D_i^\delta \cdot \varepsilon(t). \quad (10)$$

С учетом (10), передаточная функция $PI^\lambda D^\delta$ -контроллера примет вид:

$$W_D(s) = K_p + K_i \cdot s^{-\lambda} + K_d \cdot s^\delta. \quad (11)$$

Таким образом, в дробном $PI^\lambda D^\delta$ -контроллере к трем классическим настроечным параметрам K_p , K_i , K_d добавляются два новых λ и δ , определяющих порядок интегральной и дифференциальной составляющих соответственно.

В настоящее время существует довольно много аналитических методов настройки классических PID-контроллеров. Приоритет здесь принадлежит наиболее широко распространенному в мировой практике методу Циглера-Никольса [11], согласно которому коэффициенты PID-контроллера определяются по параметрам переходной характеристики объекта регулирования. В отечественной литературе для определения настроечных параметров PID-контроллеров чаще всего рекомендуются такие аналитические методы, как: метод ВТИ [12], метод многомерного сканирования [13], и некоторые другие.

Однако, классические методы оптимальной настройки для дробных $PI^\lambda D^\delta$ -контроллеров неприменимы в силу многоэкстремальности целевых функций. Для оптимизации САР с такими контроллерами (рис. 1) рекомендуется применять численные методы имитационного моделирования с эволюционными алгоритмами оптимизации, не использующими производных в своей работе [14].

Для решения поставленной задачи использовался эволюционный алгоритм многопараметрической многоэкстремальной оптимизации “Optim-MGA” [3, 4, 16]. Алгоритм работает в контексте PSO (Particle Swarm Optimization) [15], согласно которому наилучшее решение определяется в ходе последовательной эволюции поисковых точек (особей). Основное отличие алгоритма “Optim-MGA” от

алгоритма PSO и его аналогов состоит в том, что для определения потомков используются операции метода поиска по деформируемому многограннику Нелдера-Мида, такие как: растяжение сжатие, отражение и редукция.

Поскольку решение поставленной задачи, как отмечалось выше, целесообразно искать в частотной области, наиболее приемлемым с точки зрения критерия оптимальности следует считать квадратичный интегральный критерий ISE¹ (Integral Square Error), связанный с КЧХ замкнутой САП аналитической зависимостью.

Его значение может быть вычислено по формуле, включающей КЧХ замкнутой системы относительно возмущения по каналу регулирующего органа $\Lambda(S)$ (рис. 1):

$$ISE = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{W_o(j\omega)}{1 + W_o(j\omega) \cdot W_p(j\omega)} \right|^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} d\omega. \quad (12)$$

Запас устойчивости по тем же соображениям предлагается оценивать по величине заданного значения частотного показателя колебательности M , легко определяемого по максимуму АЧХ замкнутой САП относительно управляющего воздействия $U(S)$. Такой подход позволяет сравнительно просто реализовать программу оптимизации дробной системы автоматического регулирования.

ПРИМЕР ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА САП С ДРОБНЫМ $P^{1.5}D^{\delta}$ -КОНТРОЛЛЕРОМ И ДРОБНОЙ МОДЕЛЬЮ ОБЪЕКТА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Математическая модель объекта регулирования в рассматриваемом примере представлена комплексной частотной характеристикой дробного порядка вида:

$$W_o(j\omega) = \frac{0.5 \cdot e^{-1.5 \cdot j\omega}}{8.32 \cdot (j\omega)^{2.65} + 10.3 \cdot (j\omega)^{1.88} + 3.74 \cdot (j\omega)^{0.93} + 1}. \quad (13)$$

¹ В мировой практике для различных интегральных критериев используют следующие обозначения:

IE (Integral Error) – линейный интегральный критерий;
IAE (Integral Absolute Error) – интегральный критерий по модулю;
ISE (Integral Square Error) – квадратичный интегральный критерий;
ITAE (Integral Time Absolute Error) – интеграл произведения модуля на время;
ITSE (Integral Time Square Error) – интеграл произведения квадрата регулируемой величины на время.

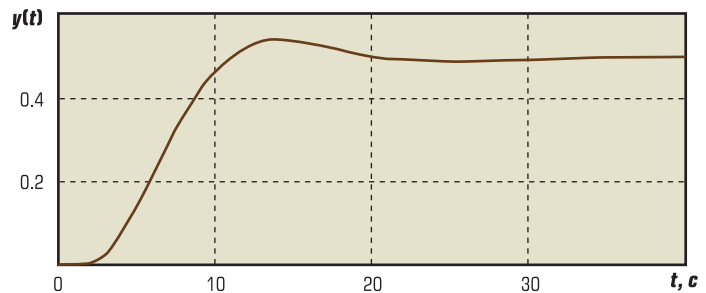


Рис. 2. Переходная характеристика объекта регулирования (14)

Как видно из рис. 2, переходная характеристика такого объекта содержит колебательную составляющую, часто имеющую место в переходных характеристиках реальных промышленных объектов.

Версия программы в среде MathCAD, реализующая процедуру параметрической оптимизации дробной системы регулирования с ограничением на заданный запас устойчивости $M=1.55$, представлена на рис. 3.

Основное место в программе после ввода КЧХ объекта регулирования и $P^{1.5}D^{\delta}$ -кон-

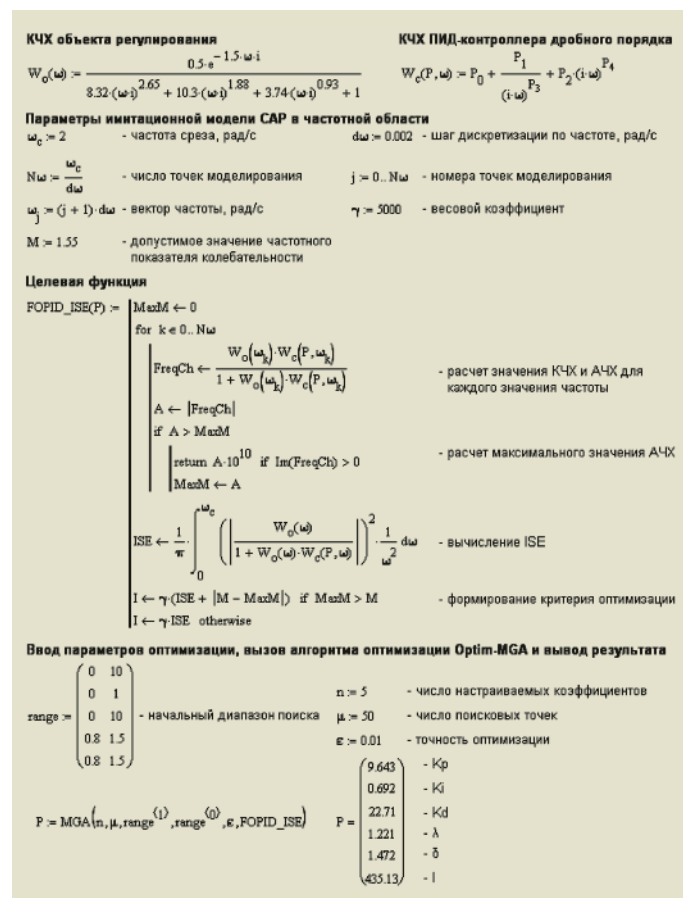


Рис. 3. Программа параметрической оптимизации дробной САП

Таблица 1

Тип контроллера	Настроечные параметры					Показатели качества			
	K_p	K_i	K_d	λ	δ	ISE	IAE	IE	y_{\max}
$PI^{\lambda}D^{\delta}$	9,64	0,69	22,7	1,22	1,47	0,087	1,096	0,542	0,143
PID	2,86	1,16	11,6	—	—	0,213	1,858	0,855	0,208

троллера занимает процедура формирования целевой функции $FOPID_{ISE(p)}$. В ней последовательно осуществляется вычисление максимального значения амплитудно-частотной характеристики замкнутой САР ($MaxM$) в частотном диапазоне от 0 до частоты среза ω_c , вводится ограничение на заданный запас устойчивости в виде функции штрафа с весовым коэффициентом γ и вычисляется интегральный квадратичный критерий ISE . Окончательное выражение для целевой функции с учетом принятого ограничения на запас устойчивости записывается в виде:

$$I = \begin{cases} \gamma \cdot ISE, & \text{если } MaxM \leq M; \\ \gamma \cdot (ISE + |M - MaxM|), & \text{если } MaxM > M. \end{cases} \quad (14)$$

После описанных операций осуществляется вызов алгоритма оптимизации Optim-MGA, и находится оптимальное решение с выводом матрицы настроечных параметров $PI^{\lambda}D^{\delta}$ -контроллера и минимального значения принятого критерия I . По аналогичной программе рассчитываются оптимальные настроечные параметры и для классического PID-контроллера.

Результаты расчета настроечных параметров дробного $PI^{\lambda}D^{\delta}$ - и классического PID-контроллеров представлены в табл. 1. Там же приведены количественные оценки основных интегральных критериев оптимальности (ISE , IAE , IE), а также значение динамической ошибки регулирования y_{\max} .

Графики переходных процессов в САР с дробным $PI^{\lambda}D^{\delta}$ и классическим PID-контроллером с целью их визуального сравнения представлены на рис. 4.

По результатам оценок качественных показателей, приведенных в табл. 1, и визуального анализа рис. 4,а, следует отметить заметное снижение площади под переходным процессом с $PI^{\lambda}D^{\delta}$ -контроллером (оценивается по критерию IAE). По сравнению с классическим PID-контроллером площадь снизилась примерно в 1,7 раза. То же самое можно сказать, сравнивая динамическую ошибку y_{\max} (снижается в 1,5 раза). Таким образом, наблюдается улучшение всех качественных показателей, представленных в табл. 1.

Выполнение условия запаса устойчивости, заданного штрафной функцией по соблюдению допустимого значения частотного показателя колебательности $M=1,55$, наглядно иллюстрируется расположением графиков КЧХ разомкнутого контура относительно M -окружности (рис. 5,а) и графиков АЧХ замкнутого контура соответствующих САР (рис. 5,б).

Анализируя графики АЧХ замкнутой системы, представленные на рис. 5,б, следует отметить, что, во-первых, заметно расширяется частотный диапазон САР с $PI^{\lambda}D^{\delta}$ -контроллером, во-вторых, ее АЧХ имеет два одинаковых резонансных пика и, как следствие, более сложный характер переходных процессов.

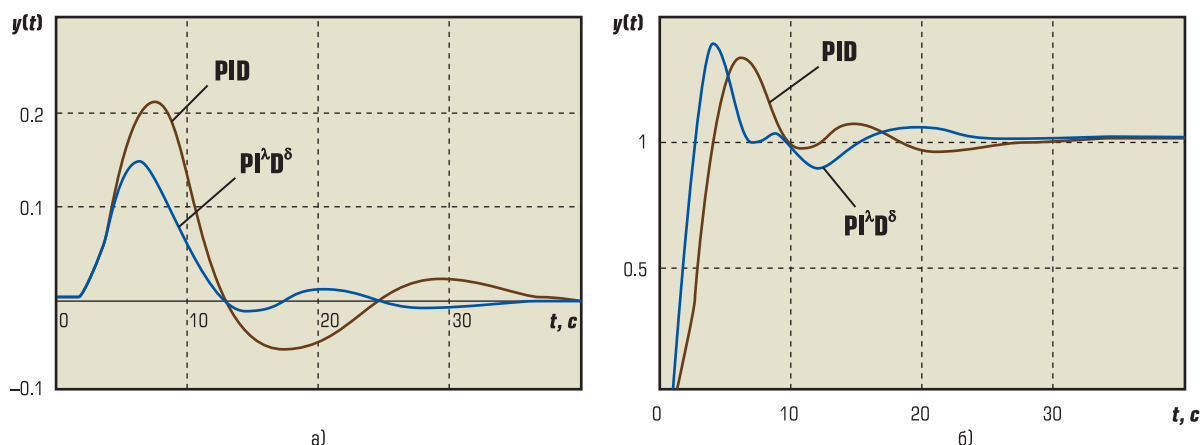


Рис. 4. Переходные процессы по каналу регулирующего воздействия $\Lambda(S)$ – (а) и по каналу задания $U(S)$ – (б)

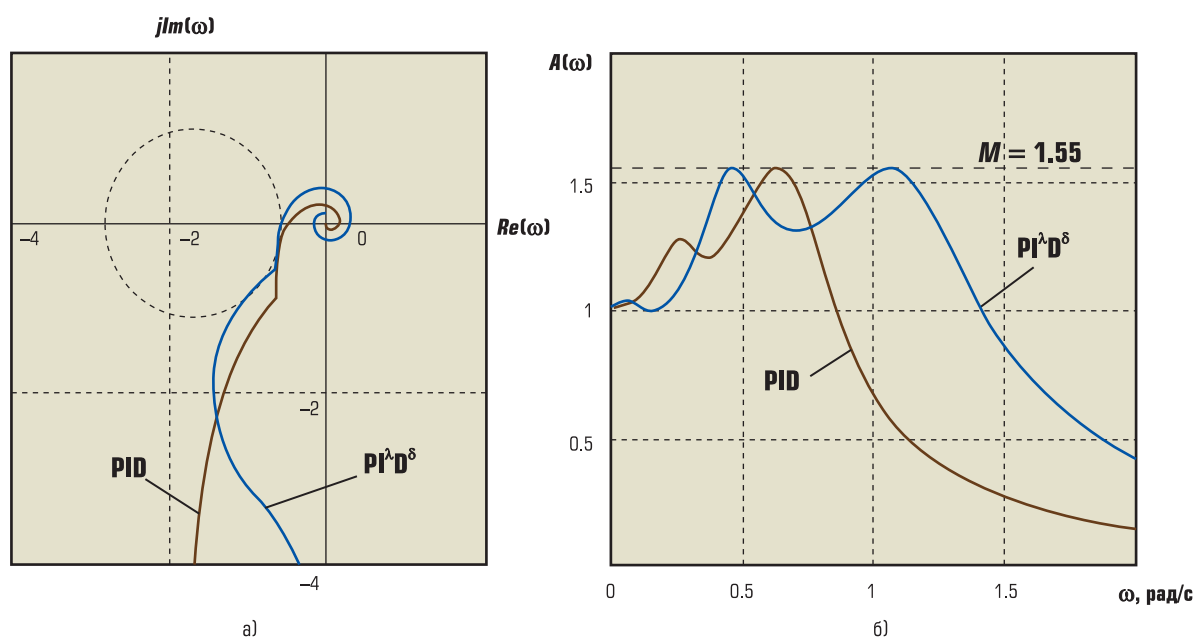


Рис. 5. Расположение КЧХ разомкнутой системы относительно M -окружности (а) и АЧХ замкнутого контура для заданного значения $M = 1,55$ (б)

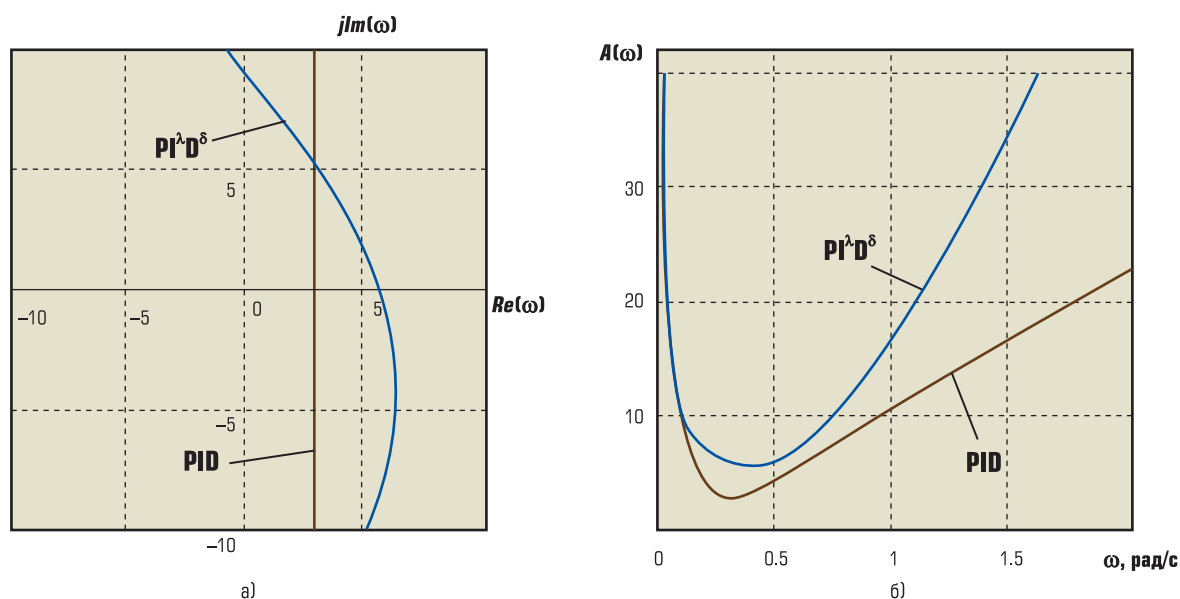


Рис. 6. КЧХ (а) и АЧХ (б) дробного $PI^\lambda D^\delta$ -контроллера в сравнении с классическим

Сравнительный анализ КЧХ и АЧХ самих контроллеров представлен на рис. 6.

Если КЧХ классического PID-контроллера при изменении частоты от 0 до бесконечности (рис. 6,а) проходит последовательно лишь два квадранта комплексной плоскости (1-ый и 4-ый), то КЧХ дробного $PI^\lambda D^\delta$ -контроллера последовательно проходит 2-ой, 1-ый, 4-ый и 3-ий квадранты.

Таким образом, проведенный сравнительный анализ дробной и обычной САР показывает, что использование $PI^\lambda D^\delta$ -контроллера заметно повышает качество регулирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проведенных исследований представляется возможным сделать ряд выводов:

1. Теория дробного исчисления раскрывает смысл дробного интегрирования и дифференцирования, распространяя эти операции на нецелые порядки.
2. Из разных методов представления дробных производных наиболее часто используются определение Грюнвальда-Летникова и интеграл Римана-Лиувилля. Для анализа

- и синтеза линейных дробных САР по мнению авторов наиболее удобным является преобразование Фурье в частотной области.
3. Поскольку наиболее востребованным алгоритмом регулирования в последнее время является классический PID-контроллер, на него и направлены попытки улучшения качества и робастности. Одной из таких попыток является использование дробного алгоритма с нецелыми интегральными и дифференциальными составляющими. В принятой для него аббревиатуре ($PI^{\lambda}D^{\delta}$ -контроллер) дробные порядки интегральной и дифференциальной составляющих, обозначаемые греческими буквами λ и δ , расширяют диапазон настроечных параметров от трех в классическом, до пяти в дробном.
 4. Для аппроксимации переходных характеристик реальных объектов регулирования предпочтительными становятся дробные математические модели, поскольку целочисленная аппроксимация часто приводит к существенным расхождениям между математической моделью и реальной системой.
 5. Расширение интегральной и дифференциальной составляющих в контроллере за счет их дробности и использование дробных математических моделей реальных объектов регулирования добавляют больше гибкости структуре САР, что дает возможность регулировать реальные объекты с более высокой точностью.
 4. Модифицированный генетический алгоритм для задач оптимизации и управления // Сабанин В.Р., Смирнов Н.И., Репин А.И. // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. №3-4. С.78-85.
 5. Васильев В.В., Симаков Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание. — Киев, НАН Украины, 2008. — 256 с.
 6. Dingyu Xue, Chunna Zhao, YangQuan Chen, "Fractional Order PID control of A DC-Motor with Elastic Shaft: A Case Study", Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006, pp. 3182-3187.
 7. Oldham K.B. and Spanier J., The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, vol. 11 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, NY, USA, 1974.
 8. Miller K.S., Ross B., "An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations", A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 1993.
 9. Podlubny, Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.
 10. Podlubny, I.: The Laplace Transform Method for Linear Differential Equations of the Fractional Order, UEF-02-94, Inst. Exp. Phys, Slovak Acad. Sci., Kosice, 1994, 32 pp.
 11. Ziegler J.G., Nichols N.B. "Optimum settings for automatic controllers", Transactions of the ASME, Vol. 64, pp. 759-768, 1942.
 12. Давыдов Н.И., Идзон О.М., Симонова О.В. Определение параметров настройки ПИД регуляторов по переходной характеристике объекта регулирования // Теплоэнергетика. 1993. №10.
 13. Ротач В.Я. Теория автоматического управления. М.: Издательский дом МЭИ, 2007.
 14. Chakraborty Mithun, Maiti Deepyaman, Konar Amit, "The Application Of Stochastic Optimization Algorithms to the Design of a Fractional-order PID Controller", 2008 IEEE Region 10 Colloquium and the Third ICIIS, Kharagpur, INDIA December 8-10.
 15. Kennedy J. and Eberhart R.C., "Particle swarm optimization," in Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, pp. 1942-1948, November 1995.
 16. <http://ai.xss.ru/index-3-1.htm>

Список литературы

1. Podlubny, "Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\delta}$ controllers", IEEE Trans. On Automatic Control, vol.44, no. 1, pp. 208 – 213, 1999.
2. YangQuan Chen, Ivo Petras, Dingyu Xue, Fractional Order Control – A Tutorial, 2009 American Control Conference, Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA, June 10-12, 2009. PP. 1397 – 1411.
3. Сабанин В.Р., Смирнов Н.И., Репин А.И. Универсальная программа для оптимизации многоэкстремальных задач "Optim-MGA" // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2004610862. Российское агентство по патентам и товарным знакам / (РОСПАТЕНТ). Москва, 8 апреля 2004.

Репин Андрей Иванович — канд. техн. наук, с.н.с. ООО "Энергоавтоматика",
Сабанин Владимир Романович — канд. техн. наук, доцент каф. АСУ ТП МЭИ,
Смирнов Николай Иванович — канд. техн. наук, доцент каф. АСУ ТП МЭИ,
Шаровин Игорь Михайлович — аспирант каф. АСУ ТП МЭИ.