n阶常微分方程 $F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$. ①

每积分一次，其阶降一次，并带来一个任意常数. 理论上，进行 n 次"独立积分"，可将方程降为"0阶"（即方程里只涉及 $y^{(0)}=y$），便求解出未知函数 y 了，且通解中含有 n 个相互独立的任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$. 为确定它们，须加 n 个独立约束条件. 即须考虑如下初值问题：

$$\begin{cases} F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0 \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \end{cases}$$

直接可积类型

- 可分离变量方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y) \Rightarrow \int\frac{dy}{\psi(y)}=\int\varphi(x)dx$$

- $y^{(n)}=f(x)$ 型方程.

逐次积分 $\int dy^{(n-1)}=\int f(x)dx \Rightarrow y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$

$\Rightarrow \cdots$

例: $y'''=\sin x-\cos x$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=0$, $y''|_{x=0}=-1$

$y''=-\cos x-\sin x+C_1$, $y''|_{x=0}=-1 \Rightarrow C_1=0$

$y'=-\sin x+\cos x+C_2$, $y'|_{x=0}=0 \Rightarrow C_2=-1$

$y=\cos x+\sin x-x+C_3$, $y|_{x=0}=-1 \Rightarrow C_3=-1$.

下面是一些可通过变量替换转为直接可积的类型. ②

- 齐次微分方程 $y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \xRightarrow{y=xu} u + xu' = g(u)$

$$\Rightarrow \frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

- $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ (其中 $b \neq 0$) $\xRightarrow{u=ax+by+c}$

$$\frac{du}{dx} = bf(u) + a$$

- $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$.

1° $c_1 = c_2 = 0$, 齐次, 令 $u = \frac{y}{x}$ 即可.

2° c_1, c_2 不全为0, 且 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$. 即

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right) \xRightarrow{u=a_2x+b_2y}$$

$$\frac{du}{dx} - a_2 = b_2 f\left(\frac{\lambda u + c_1}{u + c_2}\right) \text{ (分离变量型)}$$

3° c_1, c_2 不全为0, 且 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, 此时 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$

有唯一解 (x_0, y_0). 令 $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$. 则

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right) \text{ (齐次型)}.$$