期末复习题

目录

1 重积分

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=(D)$

$A.\ \int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy.$ $B.\ \int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy.$

$C.\ \int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy.$ $D.\ \int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy.$

分析： 分子分母同时除 $1/n^3$，得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)}\frac{1}{n^2}\qquad(*)$$

在这种形式下，该极限可看成是函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)}$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的二重积分的一种计算方法. 当将 $[0,1]\times[0,1]$ 用分点 $\left(\dfrac{i}{n},\dfrac{j}{n}\right),1\le i,j\le n$ 分成 n^2 个小方块，而每个小方块 $D_{ij}:=\left\{(x,y)\mid \dfrac{i-1}{n}\le x\le\dfrac{i}{n},\dfrac{j-1}{n}\le y\le\dfrac{j}{n}\right\}$ 的面积皆为 $\dfrac{1}{n^2}$，取点 $(\xi_i,\eta_i)=\left(\dfrac{i}{n},\dfrac{j}{n}\right)\in D_{ij}$. 则在该分法及取点下

$$\iint_D\frac{dxdy}{(1+x)(1+y^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{1\le i,j\le n}\frac{1}{(1+\xi_i)(1+\eta_j^2)}\times\frac{1}{n^2}=(*)$$

而该二重积分按照累次积分可写成选项 (D) 中的形式.

2. 记 $I_1=\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, $I_2=\iint_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$, $I_3=\iint_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，则 ($A$)

$A.\, I_3>I_2>I_1.\quad B.\, I_1>I_2>I_3.\quad C.\, I_2>I_1>I_3.\quad D.\, I_3>I_1>I_2.$

解：当 $x^2+y^2<1$ 时，显然有 $(x^2+y^2)^2<x^2+y^2<\sqrt{x^2+y^2}$，结合 $\cos\theta$ 当 $\theta\in[0,1)$ 时的单调性，知在 D 上成立

$$\cos\sqrt{x^2+y^2}<\cos(x^2+y^2)<\cos(x^2+y^2)^2$$

由重积分的保序性，即知 $I_1<I_2<I_3$，故选 (A).

3. 记 $I_i=\iint_{D_i}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma\ (i=1,2,3)$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，$D_2=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\le 1\}$，$D_3=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\le 1\}$，则 I_1,I_2,I_3 的大小满足 (A)

$A.\, I_1<I_2=I_3.\quad B.\, I_2=I_3<I_1.\quad C.\, I_2<I_3=I_1.\quad D.\, I_3<I_2=I_1.$

解： 首先，由对称性可知 $I_2=I_3$，故排除 $(C),(D)$. 下面判断 I_1 和 I_2 的相对大小. 令 $\begin{cases} u=x-1 \\ y=v \end{cases}$ 则 $dudv=dxdy$，故

$$I_2=\iint_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_{\{(u,v)\mid u^2+v^2\le 1\}}\sqrt{(u+1)^2+v^2}dudv$$

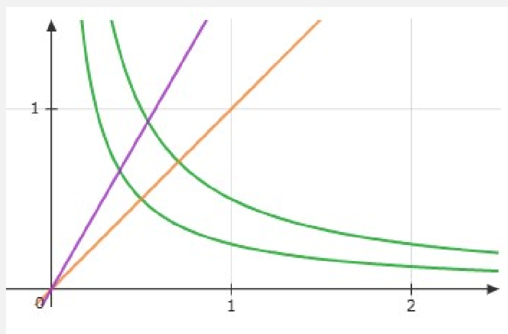
$$=\iint_{D_1}\sqrt{(x+1)^2+y^2}dxdy>\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=I_1$$

4. 设 D 是第一象限中的曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint_D f(x,y)dxdy=(B)$

$A.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$ $B.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$

$C.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr.$ $D.\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr.$

解:



区域 D 的边界曲线 $2xy=1$, $4xy=1$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ 在极坐标下的方程分别为

$$r=\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}};\quad r=\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}};\quad \theta=\frac{\pi}{4};\quad \theta=\frac{\pi}{3}$$

从而在极坐标下

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{\{\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\le r\le\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

故选 (B).

5. 设 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于 (C)

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$ B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$ D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

解： 积分区域 $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le \pi/4;\ 0 \le r \le 1\}$，即单位圆在第一象限中的一半：$\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1;\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，它可看做是 y-型区域，即

$$D = \left\{(x,y) \mid y \le x \le \sqrt{1-y^2};\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

从而按先 x 后 y 的累次积分模式，知原积分 $= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$ 故选 (C).

6. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx =$ (D)

A. $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

B. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy.$

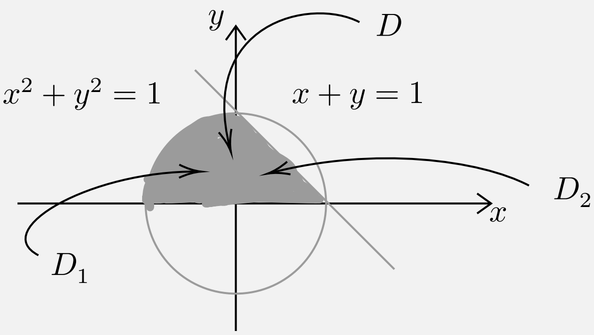
C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr.$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$

解: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx = \iint_D f(x,y)d\sigma$, 其中

$$D := \left\{(x,y) \mid -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y;\ 0 \le y \le 1\right\}$$

即 D 的图形如下



将区域 D 看成是 x-型的，则有描述 $D = D_1 \cup D_2$，其中

$$D_1 = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le \sqrt{1-x^2};\ -1 \le x \le 0\right\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le x \le 1\}$$

故重积分按先积 y 后积 x 的模式可写成如下累次积分

$$\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$$

从而 (A), (B) 都不正确. 将上面累次积分利用极坐标表示，即令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，则 $dxdy = rdrd\theta$；区域 D 的圆形边界有方程 $r = 1$, 直线边界有方程 $r = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$. 从而在极坐标下，上面的累次积分可表达为

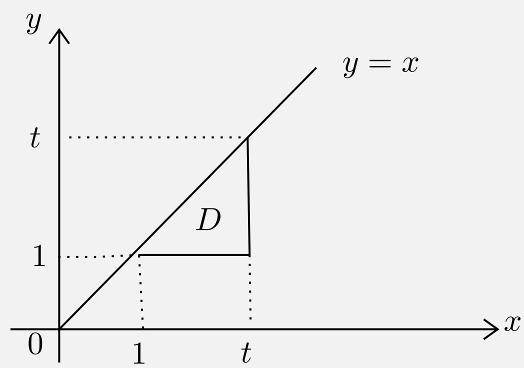
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

故应选 (D).

7. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)$ 等于 (B)

$A.\,2f(2).$　　$B.\,f(2).$　　$C.\,-f(2).$　　$D.\,0.$

解： $F(t)$ 是 $f(x)$ 在 $D=\{(x,y)\mid y\le x\le t;\,1\le y\le t\}$ 上的二重积分. 将 D 写成 x-型区域 $D:=\{(x,y)\mid 1\le y\le x;\,1\le x\le t\}$



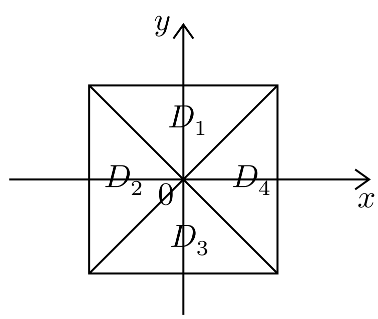
故

$$F(t)=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t (x-1)f(x)dx$$

从而 $F'(t)=(t-1)f(t)$, 由此 $F'(2)=f(2)$.

8. 如下图，正方形 $\{(x,y)\mid |x|\le 1,|y\le 1|\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\,(k=1,2,3,4)$, $I_k=\iint_{D_k} y\cos x dxdy$，则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\}=$ (A)

$A.\,I_1$　　$B.\,I_2.$　　$C.\,I_3.$　　$D.\,I_4.$



解： 由于被积函数 $y\cos x$ 在代换 $x \to -x$ 下不变号，且 D_2, D_4 关于 y-轴对称，故知 $I_2 = I_4$; 又其在代换 $y \to -y$ 下变号，且 D_1, D_3 关于 x-轴对称，故知 $I_1 = -I_3$. 只需比较 $|I_1$ 和 I_2 的大小. 首先注意到，由于 D_2 本身关于 x-轴对称，故 $I_2 = 0$，而

$$I_1 = 2\int_0^1 dy \int_0^y y\cos x dx = 2\int_0^1 y\sin y dy = 2(\sin 1 - \cos 1) > 0$$

9. 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续偶函数，积分区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$，则 $\iiint_\Omega f(x)dV$ 在 $[0,1]$ 上的定积分表示为 (D)

A. $\int_0^1 2\pi(1+x^2)f(x)dx$.　　B. $\int_0^1 2\pi(1-x)f(x)dx$

C. $\int_0^1 2\pi(1+x)f(x)dx$.　　D. $\int_0^1 2\pi(1-x^2)f(x)dx$

解： 利用“截面法”计算该三重积分，先将空间区域 Ω 表达如下:

$$\Omega := \left\{ (x,y,z) \mid (y,z) \in \underbrace{\{(y,z) \mid y^2+z^2 \le 1-x^2\}}_{D_z};\ -1 \le x \le 1 \right\}$$

$$\iiint_\Omega f(x)dV = \int_{-1}^1 dx \iint_{D_x} f(x)dydz = \int_{-1}^1 f(x)dx \iint_{D_x} dydz$$
$$= \int_{-1}^1 \pi(1-x^2)f(x)dx \xlongequal{f\text{ 为偶函数}} 2\int_{-1}^1 \pi(1-x^2)f(x)dx$$

10. 设空间区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge 0\}$（其中 $R > 0$）和 $\Omega_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$，则下列四式中正确的是 (C)

A. $\iiint_\Omega xdV = 4\iiint_{\Omega_1} xdV$.　　B. $\iiint_\Omega ydV = 4\iiint_{\Omega_1} ydV$.

C. $\iiint_\Omega zdV = 4\iiint_{\Omega_1} zdV$.　　D. $\iiint_\Omega xyzdV = 4\iiint_{\Omega_1} xyzdV$.

解: 由于 Ω 关于 xOy 平面对称, 也关于 yOz 平面对称, 且 z 在对称点处的值不变, 从而 $\iint_{\Omega} zdV = 4\iiint_{\Omega_1} zdV$, 故选 (C). 而由对称性, $\iiint_{\Omega} xdV = \iint_{\Omega} ydV = 0$; $\iiint_{\Omega} xyzdV = 0$.

11. 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$, 则以下各式正确的是 (B)

$A.\ \iiint_{\Omega} \tan(x+y+z)dV = 1.$

$B.\ \iiint_{\Omega} \tan(x+y+z)dV = 0.$

$C.\ \iiint_{\Omega} \tan(x+y+z)dV = 8\iiint_{\Omega_1} \tan(x+y+z)dV$ (Ω_1是 Ω 的第一卦限部分).

$D.\ \iiint_{\Omega} \tan(x+y+z)dV = \iiint_{\Omega} \tan(3x)dV.$

解: 注意到 Ω 关于平面 $\pi : x+y+z=0$ 对称. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为对称点, 则 $\overline{M_1M_2}$ 的中点 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$ 位于平面 π 之上, 即

$$\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \frac{z_1+z_2}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1+y_1+z_1 = -(x_2+y_2+z_2)$$

从而

$$\tan(x_1+y_1+z_1) = -\tan(x_2+y_2+z_2)$$

即 $\tan(x+y+z)$ 在对称点处的取值相反, 从而 $\iiint_{\Omega} \tan(x+y+z)dV = 0$.

12. 设 D_k 是 $D = \{(x,y) \mid x^2+4y^2 \le 1\}$ 位于第 k 象限的部分, 则对 $I_k = \iint_{D_k} (y^2 - x^2)dxdy$, 有 (C)

$A.\ I_1 > 0.$ $B.\ I_2 = 0.$ $C.\ I_3 < 0.$ $D.\ I_4 > 0.$

解： 首先，由对称性可知：$I_1 = I_2 = I_3 = I_4$，从而

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{4} = \frac{1}{4}\iint_D (y^2 - x^2)\, dxdy$$

其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 \le 1\}$ 是椭圆形封闭区域. 为判断 I_i 的正负性，有三种方法供大家参考:

(a) 直接计算上积分.（当然作为选择题这样处理比较费事些.）

(b) 令 $P(x,y) = x^2y, Q(x,y) = xy^2$，则 $\iint_D (y^2 - x^2)\, dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \xlongequal{Green\ 公式} \oint_{\partial D} Pdx + Qdy$，其中椭圆边界 ∂D 按逆时针定向，则令 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{1}{2}\sin t \end{cases}$，$t$ 从 0 增长到 2π，从而 $\iint_D (y^2 - x^2)\, dxdy = \oint_{\partial D} x^2ydx + xy^2dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos^2 t \sin t(-\sin t)dt\ +$

$$+\frac{1}{8}\cos t \sin^2 t \cos t dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t\, dt < 0$$

(c) 显然，如果积分区域是圆域 $D' = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$，则由对称性知 $\iint_{D'} (y^2 - x^2)\, dxdy = 0$. 考虑从 D' 到 D 的一个“连续形变”，即令 $D_\epsilon := \{(x,y) \mid x^2 + \epsilon y^2 \le 1\}$，则 $D_1 = D'$，$D_4 = D$. 显然，ϵ 从 1 连续变到 4 的过程中，区域从 D' 连续地形变为 D. 在该形变过程中，$\iint_{D_\epsilon} x^2dx$ 变大（因为 ϵ 增大时，x 方向拉长）；$\iint_{D_\epsilon} y^2dy$ 变小（因为 ϵ 增大时，y 方向缩短），由此可知，当 ϵ 连续从 1 变为 4 时 $\iint_{D_\epsilon} (y^2 - x^2)\, dxdy$ 连续地从 0 变为负值.（显然该方法比较形象化，只需定性判断，无需定量计算，极具启发性，值得借鉴.）

13. 设 $f(x,y)$ 是连续二元函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{-\sin\theta + \sqrt{3+\sin^2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$ 在直角坐标系中先 x 后 y 的二次积分为 $\underline{\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-(y+1)^2}} f(x,y)dx}$.

解： 积分区域 D 在极坐标下的表示为

$$D := \left\{(r,\theta) \mid 1 \le r \le -\sin\theta + \sqrt{3+\sin^2\theta};\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

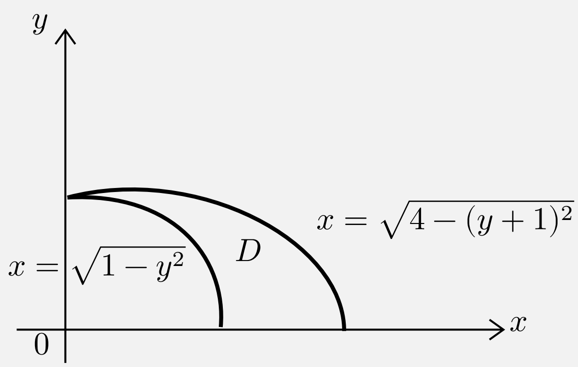
即 D 由曲线 $C_1 : r = 1(0 \le \theta \le \pi/2)$ 和曲线 $C_2 : r = -\sin\theta + \sqrt{3+\sin^2\theta}, 0 < \theta < \pi/2$，以及 $\theta = 0$ 所围成. 在直角坐标下，曲线 C_1 和 C_2 的方程分别为

$$C_1 : x = \sqrt{1-y^2},\ 0 \le y \le 1; \qquad C_2 : x^2 + y^2 + y = \sqrt{3x^2+4y^2}$$

将第二个方程写成 $x^2 + y^2 + 2y - y = \sqrt{3x^2+4y^2}$，两边平方后得到

$$(x^2+y^2+2y)^2 - (2y+3)(x^2+y^2+2y) + 6y = 0$$

即 $(x^2+y^2)(x^2+y^2+2y-3) = 0$，从而 $C_2 : x^2+y^2+2y = 3$，或 $C_2 : x = \sqrt{4-(y+1)^2}\ (0 \le y \le 1)$.



区域 D 由上图所示，其按 y-型区域，则对应的累次积分（即先 x 后 y）计算为

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-(y+1)^2}} f(x,y)\,dx$$

14. 设 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint_\Omega (x+2y+3z)dxdydz = \underline{1/4}$.

解： 先定积分再二重积分的模式：Ω 在 xOy 平面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\mid x+y\le 1\}$，固定 $(x,y)\in D$，则 Ω 中 z 的取值范围是 $0\le z\le 1-x-y$，从而 $\iiint_\Omega (x+2y+3z)dxdydz=\iint_D dxdy\int_0^{1-x-y}(x+2y+3z)dz$

$$=\iint_D (x+2y)(1-x-y)dxdy+\frac{3}{2}\iint_D (1-x-y)^2dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+2y)(1-x-y)dy+\frac{3}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy$$

虽然计算步骤是明白无误的，但较繁琐，读者可完成余下计算. 下面介绍快捷解法. 反用 *Guass* 定理，将 $x+2y+3z$ 看成某个向量场的散度，不难看出对 $\mathbf{F}=\left(\frac{x^2}{2},y^2,\frac{3z^2}{2}\right)$，有 $\nabla\cdot\mathbf{F}=x+2y+3z$. 对区域 Ω 的边界取外侧定向，则

$$\iiint_\Omega (x+2y+3z)dxdydz=\oiint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\oiint_{\partial\Omega}\frac{x^2}{2}dydz+y^2dzdx+\frac{3z^2}{2}dxdy=$$

$$\underbrace{\iint_{\{z=0;x+y\le1;x,y\ge0\}}}_{0}+\underbrace{\iint_{x=0;y+z\le1;y,z\ge0}}_{0}+\underbrace{\iint_{y=0;x+z\le1;x,z\ge0}}_{0}+\iint_{x+y+z=1;x+y\le1;x,y\ge0}$$

$$=\iint_{\underbrace{x+y+z=1;x+y\le1;x,y\ge0}_{\Sigma}}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}\ \overset{\text{定向单位法向量为}}{\underset{\mathbf{n}^0=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\ \iint_\Sigma \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}^0dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\left(\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{3z^2}{2}\right)dS\ \overset{z=1-x-y}{\underset{dS=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_D\left(\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{3}{2}(1-x-y)^2\right)\sqrt{3}dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{3}{2}(1-x-y)^2\right)dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{2}\right]dx=\frac{1}{4}.$$

发现计算上也没有简化多少. 但借此进一步熟悉了 Gauss 公式的应用，也不算白花功夫. 读者有没有更快捷的方法?

15. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则 $\iiint_\Omega z^2dxdydz=\underline{\dfrac{4}{15}\pi}.$

解： 球坐标 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$ 下 $dxdydz=r^2\sin\varphi\, drd\varphi d\theta.$ 区域 $\Omega=\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\le r\le 1;0\le\varphi\le\pi;0\le\theta\le 2\pi\}.$ 故 $\iiint_\Omega z^2dxdydz=\iiint_\Omega r^2\cos^2\varphi\, r^2\sin\varphi\, drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\dfrac{4\pi}{15}.$

16. 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,x\ge 0\}$,计算二重积分 $I=\iint_D\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy.$

解： D 关于 x 轴对称, 且函数 $\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ 关于 y 是偶函数, 而 $\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 关于 y 是奇函数，从而

$$\iint_D\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}=2\iint_{x^2+y^2\le 1;x,y\ge 0}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}=\frac{\pi\ln 2}{2}$$

$\iint_D\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0$，从而 $I=\dfrac{\pi\ln 2}{2}+0=\dfrac{\pi\ln 2}{2}.$

17. 设 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\right\}$, $[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint_D xy\,[1+x^2+y^2]\,dxdy.$

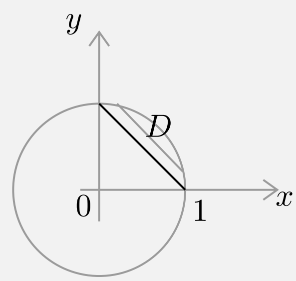
解： 记 $D_1=\{(x,y)\mid 0\le x^2+y^2<1,x\ge 0,y\ge 0\}$; $D_2=\left\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\right\}$，从而

$$\iint_D xy\,[1+x^2+y^2]\,dxdy=\iint_{D_1}xydxdy+2\iint_{D_2}xydxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^3dr+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}r^3dr=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

18. 设 $f(x,y)$ 为二元连续函数，将 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 化为在直角坐标系下的二次积分（先 y 后 x）.

解: 积分区域 $D = \left\{(r,\theta) \middle| \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta} \le r \le 1; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$, 其边界曲线为 $r=1$ 和 $r = \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，即 $x^2+y^2=1$ 和 $1 = \frac{1}{x+y}$ (即 $x+y=1$).



若先 y 后 x，需将 D 视作 x-型区域，即 $D = \left\{(x,y) \mid x \le y \le \sqrt{1-x^2}; 0 \le x \le 1\right\}$，从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$$

19. 计算 $\iint_D x dx dy$，其中 $D = \left\{(r,\theta) \mid 2 \le r \le 2(1+\cos\theta), -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$,

解: D 的边界曲线由 $r=2$ 和 $r=2(1+\cos\theta)$ 给出，即

$$x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=2+2x \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2+y^2=3$$

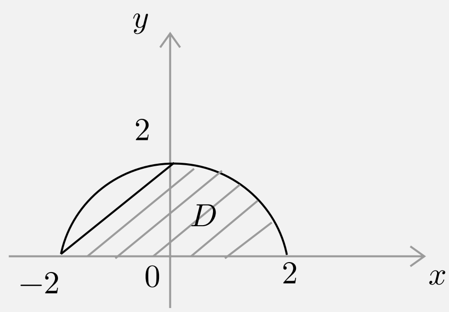
用极坐标计算，注意到 $dxdy = r dr d\theta$，则有

$$\iint_D x dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta\, dr = \frac{8}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1+\cos\theta)^3-1]\cos\theta d\theta$$

$$\xlongequal[x\text{ 轴对称}]{\text{区域关于}} \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta) d\theta = \frac{16}{3}\left(2 + \frac{15}{16}\pi\right) = \frac{32}{3} + 5\pi$$

20. 已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid y-2\le x\le\sqrt{4-y^2},\,0\le y\le 2\right\}$,计算 $I=\iint_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy$.

解： 积分区域如下图所示



由于 D 是 y-型区域，故先积 x 后积 y，可得

$$I=\int_0^2 dy\int_{y-2}^{\sqrt{4-y^2}}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dx$$

但问题是直接计算较复杂（虽然也是可以的），为在考场上赢得时间（或偷懒），或许想到了将 D 分为两个 x 型区域上的积分的和，即 $I=$

$$\int_{-2}^0 dx\int_0^{2+x}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dy+\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dy$$

但这并没方便，因为被积函数对 x 积和对 y 积的难度是相当的. 只能当做是做积分交换次序的练习聊以自慰了. 但注意到被积函数分布中的 x^2+y^2 在极坐标下就变成 r^2，且 D 在极坐标下的表示也并不十分困难，故就此一搏，希望极坐标下的计算容易上手.

直线 $y-2=x$ 的极坐标方程为 $r=\dfrac{2}{\sin\theta-\cos\theta}$，则 $I=$

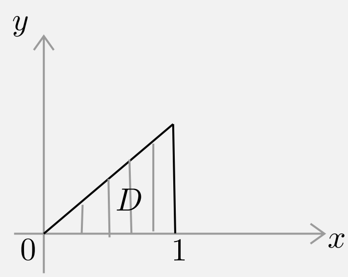
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2(\cos\theta-\sin\theta)^2rdr+\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\theta-\sin\theta)^2d\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta-\cos\theta}}rdr}_{\text{最恐怖的项将在下面被消除}}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2\theta)d\theta+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta=2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\pi=2\pi-2$$

所以，只要勤动脑筋，有时怕麻烦，想偷懒也未必会成大错!

21. 计算 $\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$,其中 $D=\left\{(r,\theta)\mid 0\le r\le\sec\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

解： 边界曲线 $r=\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$，即 $1=\dfrac{1}{r\cos\theta}$，即 $x=1$，由于 $\theta=\pi/4$ 为直线 $y=x$，故 D 由 $y=0$, $y=x$, $x=1$ 所围成，见下图



前面我们用极坐标简化计算，这题中，用极坐标显复杂，反其道而行，将积分用直角坐标表示为

$$\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}d(1-x^2+y^2)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2}{3}(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$\xlongequal{x=\sin\theta}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$$

22. 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0, \iint_D f(x,y)dxdy=a$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$,计算二重积分 $I=\iint_D xyf_{xy}(x,y)dxdy$.

解： $\iint_D xyf_{xy}(x,y)dxdy = \int_0^1 x\left(\int_0^1 yf_{xy}(x,y)dy\right)dx = \int_0^1 x\left(ydf_x(x,y)\right)dx$. 由分部积分，得

$$\int_0^1 ydf_x(x,y) = yf_x(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f_x(x,y)dy = -\int_0^1 f_x(x,y)dy$$

交换积分次序 $\int_0^1 x\left(ydf_x(x,y)\right)dx = -\int_0^1 x\left(\int_0^1 f_x(x,y)dy\right)dx = -\int_0^1\left(\int_0^1 xf_x(x,y)dx\right)dy$，再用分部积分，得

$$\int_0^1 xf_x(x,y)dx = \int_0^1 xdf(x,y) = xf(x,y)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x,y)dx = -\int_0^1 f(x,y)dx$$

从而 $\iint_D xyf_{xy}(x,y)dxdy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx = a.$

23. 设 Ω 是由 yOz 平面上直线 $z=0, z=2$ 以及曲线 $y^2-(z-1)^2=1$ 围成的平面图形绕 z 轴旋转一周而成的立体，求三重积分 $\iiint_\Omega (x^2+y^2)dxdydz.$

解： 由于 Ω 的水平截面是圆，故可用“先二后一”，即截面法求三重积分. 注意到 Ω 的侧面方程为 $x^2+y^2-(z-1)^2=1$，所以

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)dV = \int_0^2 dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{1+(z-1)^2}} r^2 rdr = 2\pi\int_0^2 \frac{[1+(z-1)^2]}{4}$$

$$\xlongequal{t:=z-1} \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 (1+t^2)^2dt = \pi\int_0^1 (1+2t+t^4)dt = \frac{28}{15}\pi$$

24. 设 $f(x)$ 连续且恒大于零,$\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2\}$,$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}$.

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dV}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)dx}$$

(a) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(b) 证明：当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

解： 在球坐标下

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi dr}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^t f(r^2)dr}$$

$$F'(t)=\frac{2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)dr}{\left[\int_0^t f(r^2)rdr\right]^2}$$

故在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$，故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 又 $G(t)=\dfrac{\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{\int_0^t f(r^2)dr}$，须证 $F(t)-\dfrac{2}{\pi}G(t)>0$，即

$$\int_0^t f(r^2)r^2dr\int_0^t f(r^2)dr-\left[\int_0^t f(r^2)rdr\right]^2>0$$

令左边函数为 $g(t)$，则 $g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2dr>0$，故 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 因为 $g(t)$ 在 $t=0$ 连续，所以当 $t>0$ 时，有 $g(t)>g(0)$，而 $g(0)=0$，从而当 $t>0$ 时，$g(t)>g(0)$，即 $t>0$ 时成立 $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

25. 设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $u(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C.

(a) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;

(b) 求 S 的质量 M.

解: 曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$$

消去 z 得到方程 $x^2+y^2=2x$. 故 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$$

而 S 的质量为 $M=\iint_S u(x,y,z)dS=\iint_S 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}dS$

$$\xlongequal[=\sqrt{2}dxdy]{S\text{上}dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy} 9\sqrt{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy \xlongequal{D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2x\}}$$

$$=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2dr=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=96\times\frac{2}{3}=64.$$

26. 设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2\,(0\le z\le 1)$ 与平面 $z=0$ 围成，求 Ω 的形心坐标.

解：设形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性知 $\bar{x}=0$. 而

$$\bar{y}=\frac{\iiint_\Omega ydV}{\iiint_\Omega dV};\qquad \bar{z}=\frac{\iiint_\Omega zdV}{\iiint_\Omega dV}$$

令 $D_z=\{(x,y)\mid x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2\}$，则按“先二后一”积分，得

$$\iiint_\Omega ydV=\int_0^1dz\iint_{D_z}ydxdy=\int_0^1dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1-z}(z+r\sin\theta)rdr$$

$$=\int_0^1\pi z(1-z)^2dz=\frac{\pi}{12}$$

$$\iiint_\Omega zdV=\int_0^1zdz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi z(1-z^2)dz=\frac{\pi}{12}$$

$$\iiint_\Omega dV=\int_0^1dz\iint_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi(1-z)^2dz=\frac{\pi}{3}$$

从而

$$\bar{y}=\frac{\pi/12}{\pi/3}=\frac{1}{4};\qquad \bar{z}=\frac{\pi/12}{\pi/3}=\frac{1}{4}$$

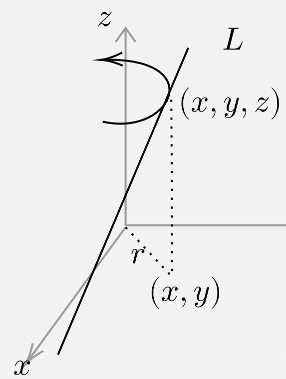
所以形心坐标为 $\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

27. 设直线 L 过 $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ, Σ 与平面 $z=0$, $z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(a) 求曲面 Σ 的方程；

(b) 求 Ω 的形心坐标.

解： 直线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，即有 $\begin{cases} x=1-z \\ y=z \end{cases}$ 所以 L 绕 z 轴旋转一周得到的曲面 Σ 的方程为: $x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$，即 $x^2+y^2-2z^2+2z-1=0$.



$$r^2=x^2+y^2=z^2+(1-z)^2$$

$$x=1-z$$
$$y=z$$

由 Σ 的方程可看出 Ω 关于 xOz，yOz 坐标平面是对称的，则形心坐标 $\bar{x}=\bar{y}=0$，而 $\bar{z}=\dfrac{\iiint_\Omega zdxdydz}{\iiint_\Omega dxdydz}$. 曲面 Σ 的柱面坐标方程为 $r=\sqrt{2z^2-2z+1}$，且 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 $D:=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，所以

$$\iiint_\Omega zdxdydz=\int_0^2 zdz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z^2-2z+1}}rdr=\pi\int_0^2 z(2z^2-2z+1)dz=\frac{14}{3}\pi$$

$$\iiint_\Omega dxdydz=\int_0^2 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z^2-2z+1}}rdr=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)dz=\frac{10}{3}\pi$$

从而 Ω 的形心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

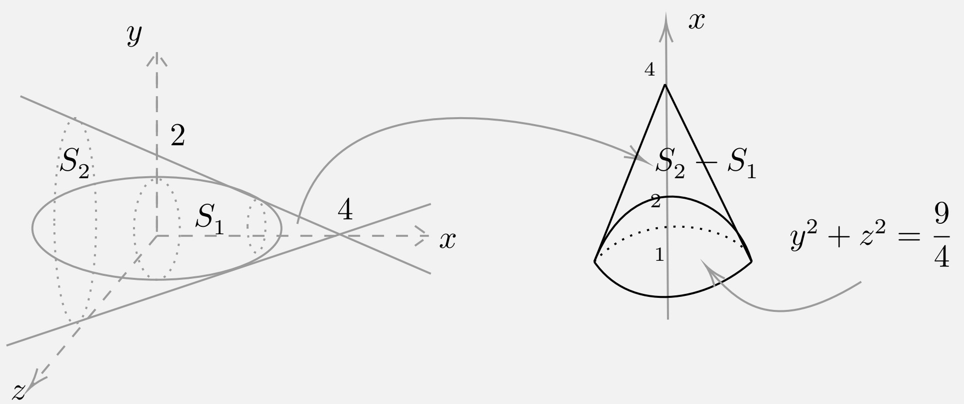
28. 椭球面 S_1 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成，圆锥面 S_1 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(a) 求 S_1, S_2 的方程；

(b) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

解: S_1 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2+z^2}{3}=1$. 椭圆方程两边微分, 得 $\dfrac{x}{2}dx+\dfrac{2}{3}ydy=0$. 故椭圆上过 (x_0,y_0) 的切线方程为 $3x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)=0$. 由于 $(x,y)=(4,0)$ 在切线上, 故 $3x_0(4-x_0)-4y_0^2=0$, 即 $12x_0=3x_0^2+4y_0^2=12$, 从而 $x_0=1$, $y_0=\pm\dfrac{3}{2}$. 从而切线方程为 $y=\pm\left(\dfrac{1}{2}x-2\right)$, 其绕 x 轴旋转成的锥面方程为 $y^2+z^2=\left(\dfrac{x}{2}-2\right)^2$. 与椭球方程联立解得 $\begin{cases} y^2+z^2=\dfrac{9}{4} \\ x=1 \end{cases}$.

简图如下



由上草图可知，S_1 与 S_2 之间的体积 S_2-S_1 是一个底面半径为 $\dfrac{3}{2}$，高为 $4-1=3$ 的锥体的体积 $\dfrac{9}{4}\pi$ 与椭球上当 x 介于 1 和 2 给出的部分体积 V 的差，其中

$$V=\int_1^2 dx\iint_{\frac{y^2+z^2}{3}\le 1-\frac{x^2}{4}} dydz=\int_1^2 \pi\times 3\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{5}{4}\pi$$

故所求面积为 $\dfrac{9}{4}\pi-\dfrac{5}{4}\pi=\pi$.

2 第一型曲线积分

1. 已知曲线 $L: y=x^2\ (0\le x\le\sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds = \underline{\dfrac{13}{6}}$.

解： 曲线 L 上的弧长微分 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+4x^2}\,dx$，从而

$$\int_L x ds=\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2)$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{1}{12}\left(3^3-1\right)=\frac{13}{6}$$

2. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L xyds=\underline{-\dfrac{\pi}{3}}$.

解：交线为球面上的一大圆 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$ 消去 z，得到 L 在 xOy 平面上的投影曲线（椭圆）为 $2x^2+2y^2+2xy=1$. 配方，得到

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2=\frac{1}{2}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\\ \dfrac{x}{2}+y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cos t\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cos t\\ z=-(x+y)=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cos t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\end{cases}\qquad t\in[0,2\pi]$$

故 L 的弧长微分在上参数化下为 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt=$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}\sin^2 t+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}+\frac{\sin t}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{\sin t}{\sqrt{6}}-\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt=dt$$

所以 $\displaystyle\oint_L xyds=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{2}{3}}\cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t\right)dt=-\frac{\pi}{3}$.

上面解法依赖于对 L 的一个巧妙的参数化，但经过较复杂的计算后发现弧长微分非常简单：$ds = dt$! 所以必有更加简单的解法，如何？由于在曲线 L 上变量 x, y, z 的地位相当，故

$$\oint_L xyds = \oint_L yzds = \oint_L xzds \quad \Longrightarrow \quad \oint_L xyds = \frac{1}{3}\oint_L (xy + yz + xz)ds$$

但在 L 上，$0 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 1 + 2(xy + yz + xz)$，即 $xy + yz + xz = -\frac{1}{2}$. 从而 $\oint_L (xy + yz + xz)ds =$

$$= -\frac{1}{2}\oint_L ds = -\frac{1}{2} \times 2\pi = -\pi \quad \Longrightarrow \quad \oint_L xyds = -\frac{\pi}{3}$$

3. 计算曲线积分 $\oint_C x^2 ds$，其中 C 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

解：一种解法是用上题中的模式参数化, 可得 C 上的弧长微分为 $ds = Rdt$, 从而

$$\oint_C x^2 ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2}{R}} \cos t R^2 dt = \frac{2\pi R^3}{3}$$

但快捷的解法显然是利用对称性得到

$$\oint_C x^2 ds = \frac{1}{3}\oint_C (x^2 + y^2 + z^2)ds = \frac{R^2}{3}\oint_C ds = \frac{R^2}{3} \times 2\pi R = \frac{2\pi R^3}{3}$$

3 第二型曲线积分

1. 质点在变力 $\mathbf{F}=-yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 作用下沿螺旋线 $C: x=\cos t, y=\sin t, z=t$ 从点 $M_1(1,0,0)$ 运动到点 $M_2(-1,0,\pi)$，则变力 $\mathbf{F}$ 所做的功为 (B)

   $A.\ \pi.$ $\qquad B.\ \pi^2.$ $\qquad C.\ \dfrac{\pi^2}{2}.$ $\qquad D.\ \dfrac{\pi^2}{3}.$

解: 螺旋 C 上点的位置矢量为 $\mathbf{r}:=(\cos t,\sin t,t)$，从而其上的切向量场为

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}'(t)=(x(t),y(t),z(t))=(-\sin t,\cos t,1)$$

M_1 对应参数 $t=0$，M_2 对应参数 $t=\pi$，而 $\mathbf{r}'(0)=(0,1,1)$，$\mathbf{r}'(\pi)=(0,-1,1)$. 故当 t 从 0 变至 π 时，上面 $\mathbf{r}'(t)$ 的确指向螺线上点的移动方向，即可取 C 的单位定向切向量场为 $\mathbf{e}_\tau=\dfrac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}$；而弧长微分 $ds=||\mathbf{r}'(t)||dt$，从而 C 上的有向弧长微分为

$$d\mathbf{s}=\mathbf{e}_\tau ds=\frac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}||\mathbf{r}'(t)||\,dt=\mathbf{r}'(t)\,dt$$

从而做功为 $\displaystyle\int_{M_1\to M_2}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{s}=\int_{M_1\to M_2}\mathbf{F}\bullet\mathbf{r}'(t)\,dt=$

$$=\int_{M_1\to M_2}\left(-yz(-\sin t)+xz\cos t+z\right)\,dt$$

$$=\int_0^\pi\left(t\sin^2 t+t\cos^2 t+t\right)\,d=2\int_0^\pi tdt=\pi^2$$

2. 设 $L_1: x^2+y^2=1$，$L_2: x^2+y^2=2$, $L_3: x^2+2y^2=2$, $L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线, 记 $I_i=\displaystyle\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)dx+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)dy\ (i=1,2,3,4)$, 则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=(D)$

   $A.\ I_1.$ $\qquad B.\ I_2.$ $\qquad C.\ I_3.$ $\qquad D.\ I_4.$

解： $I_i = \oint_{L_i} ydx + 2xdy + \oint_{L_i} \frac{y^3}{6}dx - \frac{x^3}{3}dy \xlongequal[D_i\text{ 为 }L_i\text{ 围成的区域}]{Green\text{ 公式}}$

$$\iint_{D_i} dxdy - \iint_{D_i} \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) dxdy = Area(D_i) - \iint_{D_i} \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) dxdy$$

$$I_1 = \pi - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(r^2\cos^2\theta + \frac{r^2\sin^2\theta}{2}\right) rdr =$$

$$= \pi - \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\right) = \pi - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos^2\theta}{2} d\theta$$

$$= \pi - \frac{1}{8}\times 2\pi - \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{16} = \frac{5\pi}{8}$$

$$I_2 = 2\pi - \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos^2\theta}{2} d\theta = 2\pi - \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos^2\theta}{2} d\theta$$

$$= 2\pi - \frac{1}{2}\times 2\pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$I_3 \xlongequal[y=r\sin\theta]{x=\sqrt{2}r\cos\theta} \sqrt{2}\pi - \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(2r^2\cos^2\theta + \frac{r^2\sin^2\theta}{2}\right)\sqrt{2}rdrd\theta$$

$$= \sqrt{2}\pi - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(2\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\right) d\theta = \sqrt{2}\pi - \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (1 + 3\cos^2\theta) d\theta$$

$$= \sqrt{2}\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \sqrt{2}\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2}\pi - \frac{5\pi}{8}$$

$$I_4 \xlongequal[y=r\sqrt{2}\sin\theta]{x=r\cos\theta} \sqrt{2}\pi - \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^2\cos^2\theta + r^2\frac{2\sin^2\theta}{2}\right) rdrd\theta$$

$$= \sqrt{2}\pi - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \sqrt{2\pi} - \frac{\pi}{2}$$

显然 $I_4 > I_3$，且 $I_1 > I_2$. 但 $I_3 - I_1 = \sqrt{2}\pi - \frac{5\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = \sqrt{2}\pi - \frac{5\pi}{4} > 0.$

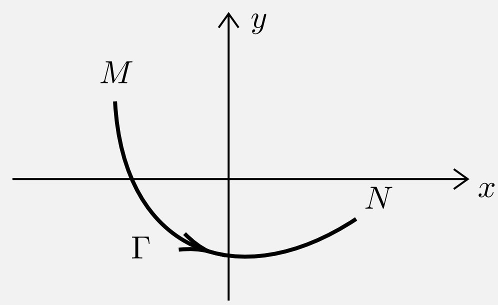
3. 设曲线 $L: f(x,y) = 1\,(f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数) 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N，Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零

的是（B）

$A.\ \int_\Gamma f(x,y)dx.\quad B.\ \int_\Gamma f(x,y)dy.\quad C.\ \int_\Gamma f(x,y)ds.\quad D.\ \int_\Gamma f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$

解： C 中 $\int_\Gamma f(x,y)ds=\int_\Gamma ds=\Gamma$ 的弧长 >0. 故先排除 C. 而

$$\int_\Gamma f(x,y)dx=\int_\Gamma dx;\qquad \int_\Gamma f(x,y)dy=\int_\Gamma dy$$



由上图，当从 M 移动到 N 时，x 坐标是增加的，即 $dx>0$（或曲线上有向弧长微分 $d\mathbf{s}=\boldsymbol{\tau}ds=(dx,dy)$ 在 x 正向的投影为正），故其“积累” $\int_\Gamma dx>0$. 那么同理，当从 M 移动到 N 时，y 坐标是减少的，即 $dy>0$，故其“积累” $\int_\Gamma dy<0$. 故选 (B).

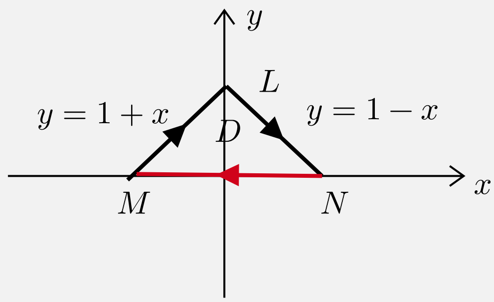
4. 设曲线 C 是 xOy 平面上圆周 $x^2+y^2=1$，则 $I_1=\oint_C(2x^3+y^2)ds$ 与 $I_2=\oint_C(x^4+3y)ds$ 的大小关系是 (C)

$A.\ I_1=I_2;\qquad B.\ I_1<I_2;\qquad C.\ I_1>I_2;\qquad D.$ 无法判断.

解： 由对称性 $\oint_C 2x^3ds=\oint_C 3yds=0$. 即 $I_1=\oint_C y^2ds=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta$, $I_2=\oint_C x^4ds\xlongequal{\text{对称性}}\oint_C y^4ds=\int_0^{2\pi}\sin^4\theta d\theta$. 由于除几个点外都有 $\sin^2\theta>\sin^4\theta$，故 $I_1>I_2$. 此外，由对称性 $I_1=\frac{1}{2}\oint_C(x^2+y^2)ds=\frac{1}{2}\oint_C ds=\pi$.

5. 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|,(x\in[-1,1])$，起点为 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy=\underline{0}$.

解: 可直接计算 $\int_L xydx+x^2dy=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+x^2dx+\int_0^1 x(1-x)dx-x^2dx=\int_{-1}^{0}(2x^2+x)dx+\int_0^1(x-2x^2)dx=0.$



或补充有向线段 $\overrightarrow{NM}$，与 L 围成封闭区域 D. 根据 Green 公式（注意曲线的定向与 ∂D 的正定向相反）

$$\int_L+\int_{\overrightarrow{NM}}=-\iint_D(2x-x)\,dxdy=-\iint_D xdxdy\xlongequal{\text{对称性}}0$$

从而 $\int_L xydx+x^2dy=-\int_{\overrightarrow{NM}}xydx+x^2dy=\int_{\overrightarrow{MN}}xydx+x^2dy$

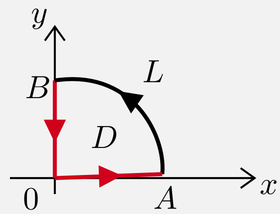
$$\xlongequal{\overrightarrow{MN}\text{上}y\equiv 0}\int_{\overrightarrow{MN}}0dx+x^2\times 0=0$$

6. 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 的第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为 $\underline{\frac{3}{2}\pi}$.

解: 直接计算，令 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\end{cases}$，$t$ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$，从而曲线积分为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 tdt-4\sin t(-\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 t)dt=\frac{3\pi}{2}$$

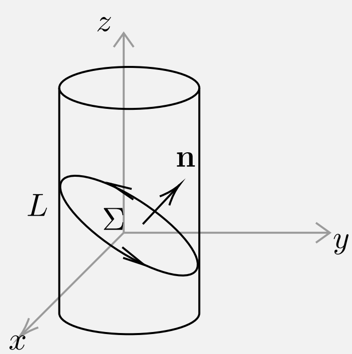
或，记 $A(1,0)$, $B(0,1)$，则 L 连同 $\overrightarrow{BO}$ 和 $\overrightarrow{OA}$ 围成区域 D（$\frac{1}{4}$ 圆）. 由 Green 公式，知



$\int_L + \int_{\overrightarrow{BO}} + \int_{\overrightarrow{OA}} = \iint_D (1-(-2))dxdy = 3 \times \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$. 而在 $\overrightarrow{BO}$ 和 $\overrightarrow{OA}$ 上曲线积分都为零，故知 $\int_L = \frac{3\pi}{2}$.

7. 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L zdx + ydz = \underline{\pi}$.

解： 可用“柱面坐标”直接计算的. 令 $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = -y = -\sin\theta \end{cases}$ 其中 θ 从 0 到 2π（考虑了 L 的定向）.



则 $\oint_L zdx + ydz = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta)(-\sin\theta)d\theta + \sin\theta(-\cos\theta)d\theta = \pi$.

上面计算是参数化后直接代入（须注意积分上下限）计算，直接了当，其背后的“底层逻辑”（即按原处定义）为：积分是向量场 $\mathbf{F} = (z, 0, y)$ 沿有向曲线 L 的“环流” $\oint_L \mathbf{F} \bullet ds$.

按上面参数化，L 上点由位置矢量 $\mathbf{r}(t)=(\cos t,\sin t,-\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ 描述. 故曲线上与定向一致的切向量场是 $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}'(t)=(-\sin t,\cos t,-\cos t)$, 且曲线上的弧长微分为 $ds=||\mathbf{r}'(t)||dt$. 从而有向弧长微分为

$$d\mathbf{s}=\mathbf{e}_\tau ds=\frac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}||\mathbf{r}'(t)||dt=\mathbf{r}'(t)dt=(-\sin t,\cos t,-\cos t)dt$$

故环流 $\displaystyle\oint_L \mathbf{F}\bullet d\mathbf{s}=\int_0^{2\pi}(-\sin t,0,\sin t)\bullet(-\sin t,\cos t,-\cos t)dt$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t-\sin t\cos t\right)dt$$

你看，结果跟上页直接代入是一样的，但由此我们明白了代入计算之可成立的背后原因.

当然，如将 L 视作其所围成的曲面 Σ 的与 Σ 本身定向一致的有向边界 $\partial\Sigma$, 则也可用 Stokes 公式计算. 注意，这里 Σ 理论上有无穷多种选择，简便起见，我们取 Σ 为平面 $y+z=0$ 上由 L 围成的面，其方向取外侧（一使与 L 的定向满足“右手螺旋法则”，见上页图）. 则由 Stokes 定理，得

$$\oint_L \mathbf{F}\bullet d\mathbf{s}=\iint_\Sigma(\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{S}$$

其中 $\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ z&0&y\end{vmatrix}=(1,1,0)$, 而 Σ 的定向法向量是 $\mathbf{n}=(0,1,1)$.

由于 Σ 是平面 $y+z=0$ 的部分，即是函数 $z=-y$ 图形的一部分，故 Σ 上的面积微元为

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+0+(-1)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

故

$$\oint_L \mathbf{F}\bullet d\mathbf{s}=\iint_\Sigma(1,1,0)\bullet\mathbf{n}^0\sqrt{2}dxdy=\iint_D dxdy=\pi$$

其中 D 为 Σ 在 xOy 平面上的投影区域，即 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$

8. 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $I=\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=\underline{\pi}$.

解：与上题（17）相仿，L 有参数化：$\begin{cases} x=\cos\theta;\ y=\sin\theta \\ z=x+y=\cos\theta+\sin\theta \end{cases}$，其中 θ 从 0 走向 2π. 直接代入计算，得 $I=$

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)(-\cos\theta)d\theta+\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{2}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta$$

$$=\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\cos\theta}_{0}-\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\sin\theta}_{0}+\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\sin\theta}_{0}-\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta d\theta}_{0}=\pi$$

当然，令 $\mathbf{F}=\left(xz,x,\frac{y^2}{2}\right)$，则 $\nabla\times\mathbf{F}=(y,-x,1)$. 并取平面 $z=x+y$ 上由 L 围成的曲面记为 Σ，方向取 $\mathbf{n}=(-1,-1,1)$（与 L 方向相协调），其上面元为

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$$

则由 *Skokes* 公式，得

$$I=\oint_{L=\partial\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{s}=\iint_\Sigma(\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{S}=\iint_\Sigma\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}^0\sqrt{3}\,dxdy$$

$$=\iint_D(y,-x,1)\bullet(-1,-1,1)dxdy=\iint_D(1+x-y)\,dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 为 Σ 在 xOy 平面上的投影区域. 由对称性

$$\iint_D x\,dxdy=\iint_D y\,dxdy=0$$

故知 $I=\iint_D(1+x-y)\,dxdy=\iint_D dxdy=\pi.$

9. 设 C 是正向椭圆 $4x^2+y^2=8x$，则曲线积分 $\oint_C e^{y^2}dx+xdy=\underline{2\pi}$.

解: 将椭圆参数化代入直接计算显然是不明智的，故考虑利用 Green 公式求解. 记 C 所围椭圆区域为 D，则

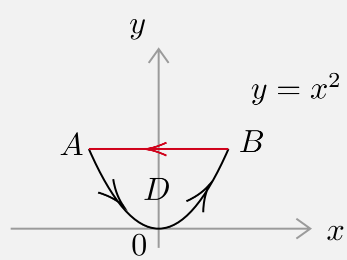
$$\oint_C e^{y^2}dx+xdy=\iint_D\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial e^{y^2}}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(1-2ye^{y^2}\right)dxdy$$

$$=\iint_D dxdy-2\iint_D ye^{y^2}dxdy$$

椭圆方程配方得 $4(x-1)^2+y^2=4$，标准化为 $(x-1)^2+\frac{y^2}{2^2}=1$. 故椭圆面积为 2π. 又由于 D 关于 x-轴对称，而上面第二个积分中的 ye^{y^2} 在代换 $y\to -y$ 下变号，故 $\iint_D ye^{y^2}dxdy=0$，从而所求积分为 $2\pi-0=2\pi$.

10. 计算曲线积分 $\int_C(y+3x)^2dx+(3x^2-y^2\sin\sqrt{y})dy$，其中 C 为曲线 $y=x^2$ 上由点 $A(-1,1)$ 到点 $B(1,1)$ 的弧段.

解: 令 $P=(y+3x)^2$, $Q=3x^2-y^2\sin\sqrt{y}$, 而 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=6x-2(y+3x)=-2y$，相当简单，故“必”设法利用 Green 公式求解.



如上图，补充有向线段 $\overrightarrow{BA}$，它与 C 围成区域 D，且其方向为正定向，故由 Green 公式，得

$$\int_C+\int_{\overline{BA}}=\iint_D(-2y)dxdy$$

由于在线段 $\overrightarrow{BA}$ 上 $y\equiv 1$，故 $\displaystyle\int_{\overrightarrow{BA}}(y+3x)^2dx+(3x^2-y^2\sin\sqrt{y})dy=$

$$=\int_{\overrightarrow{BA}}(1+3x)^2dx \xlongequal{\text{注意定向}} \int_1^{-1}(1+6x+9x^2)dx=-8$$

$$\iint_D ydxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 ydy=\int_{-1}^1\frac{1-x^4}{2}dx=\frac{4}{5}$$

从而所求积分为 $\displaystyle\int_C=-\int_{\overrightarrow{BA}}-2\iint_D ydxdy=8-2\times\frac{4}{5}=\frac{32}{5}$.

11. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x \end{cases}$,起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$,终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$. 计算曲线积分

$$I=\int_L(y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+x^2y^2dz$$

解: 与前面 7,8 两题相仿，可通过柱面坐标将 L 参数化求解. 从 L 的方程中消去 z，得到其在 xOy 平面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ ，其中 $-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$. 曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \\ z=\cos\theta \end{cases}$ ，其中 θ 从 $\pi/2$ 到 $-\pi/2$（考虑到了定向）. 故所求积分为

$$\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\Big[-(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta+\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{2}\cos\theta+$$

$$+\ (\cos^2\theta\cdot 2\sin^2\theta)(-\sin\theta)\Big]\,d\theta \xlongequal{\text{奇偶性}} 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

注: 由于该题中向量场 $\mathbf{F}=(y+z,z^2-x^2+y,\,x^2y^2)$ 的旋度场 $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ 为 $\nabla\times\mathbf{F}=(2x^2y-2z,1-2xy^2,-2x-1)$，并不简单或有对称性，故不优先考虑用 *Stokes* 公式求解.

12. 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2-1)y dy$，其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

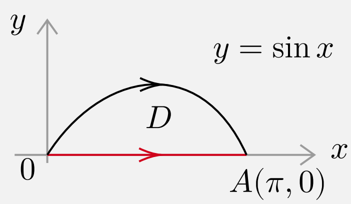
解： 将 x 看做曲线参数，定向决定 x 从 0 到 π，则直接计算如下

$$\int_L \sin 2x dx + 2(x^2-1)y dy = \int_0^\pi \left[\sin 2x + 2(x^2-1)\sin x \cdot \cos x\right] dx$$

$$= \int_0^\pi x^2 \sin 2x dx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi x\cos 2x dx$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x dx = -\frac{\pi^2}{2}$$

或按下图，补充有向线段 $\overrightarrow{OA}$，连同 L 围成区域 D，注意曲线的定向是**负**定向.



则由 Green 公式，可得

$$\int_L + \int_{\overrightarrow{OA}} = -\iint_D \left(\frac{\partial(2(x^2-1)y)}{\partial x} - \frac{\partial(\sin 2x)}{\partial y}\right) dxdy = -\iint_D 4xy dxdy$$

注意到在 $\overrightarrow{OA}$ 上，$y \equiv 0$，从而 $\int_{\overrightarrow{OA}} = \int_0^\pi \sin 2x dx = 0$，而

$$\iint_D xy dxdy = \int_0^\pi x dx \int_0^{\sin x} y dy = \int_0^\pi \frac{x\sin^2 x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi x\frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{8}\int_0^\pi x d\sin 2x = \frac{\pi^2}{8}$$

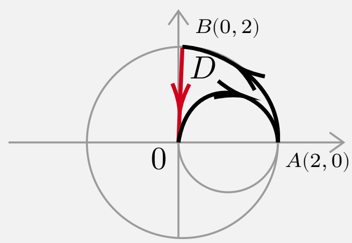
从而所求积分等于 $-\int_{\overrightarrow{OA}} - 4\iint_D xy dxdy = -4 \times \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{2}$. 相较之下，对该题直接算和补线 Green 法的计算强度差是不相上下的.

13. 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$.

解： 虽然可以直接参数化代入计算，但考虑到被积对象表达较复杂，故考虑它法，又

$$\frac{\partial(x^3+x-2y)}{\partial x}-\frac{\partial(3x^2y)}{\partial y}=3x^2+1-3x^2=1$$

相当清爽，故必设法利用 Green 公式求解（“天予不取，反受其乱”）. 如下图，记点 $A(2,0)$，$B(0,2)$，补充有向线段 $\overrightarrow{BO}$，它与 L 围成区域 D. 注意边界曲线定向是**正**定向（即是逆时针方向）.



在 D 上应用 Green 公式，知 $I+\int_{\overrightarrow{BO}}=\iint_D dxdy$，而在 $\overrightarrow{BO}$ 上，$x\equiv 0$，故其上的曲线积分为

$$\int_{\overrightarrow{BO}}-2ydy=\int_2^0-2ydy=\int_0^2 2ydy=4.$$

另一方面

$$\iint_D dxdy=\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy=\int_0^2(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2x-x^2})dx$$

不必硬算，注意到

$$\iint_D dxdy=Area\,(D)=\frac{1}{4}\pi\times 4-\frac{1}{2}\pi=\frac{\pi}{2}$$

综上可知

$$I=Area\,(D)-\int_{\overrightarrow{BO}}\quad=\quad\frac{\pi}{2}-4$$

14. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个领域内有定义，且 $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=3$, $f_y(0,0)=-1$. 记曲面 $z=f(x,f(x,y))$ 在点 $(0,0)$ 处的切平面为 π，求曲线积分 $\oint_C xydx+dy-z^2dz$，其中 C 是 π 与曲面 $S: z=\dfrac{3}{4}-x^2-y^2$ 的交线，且从 z 轴正向看去，C 是逆时针的.

解: 由于 $z_x(0,0)=f_x(0,0)+f_y(0,0)\cdot f_x(0,0)=0$, $z_y=f_y(0,0)\cdot f_y(0,0)=1$. 故 π 的方程为

$$z_x(0,0)(x-0)+z_y(0,0)(y-0)-(z-0)=0 \quad\Longrightarrow\quad z=y$$

从而 C 的方程为 $\begin{cases} z=\dfrac{3}{4}-x^2-y^2 \\ z=y \end{cases}$ 则 $\oint_C xydx+dy-z^2dz=$

$$=\oint_C xydx+dy-y^2dy=\oint_{C_{xy}} xydx+(1-y^2)dy$$

其中 C_{xy} 为 C 在 xOy 平面上的投影曲线，其方程为 $x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1$, 且具有正定向. 记其围成的圆域为 D_{xy}，则由 Green 公式

$$\oint_{C_{xy}} xydx+(1-y^2)dy=\iint_{D_{xy}} -xdxdy \xlongequal{\text{对称性}} 0$$

上面能直接代入转化为在 xOy 平面上的曲线积分的底层逻辑是：记 Σ 为平面 $\pi: z=y$ 上曲线 C 围成的曲面，定向与 C 的定向相协调，即取定向法向量为 $\mathbf{n}=(0,-1,1)$, 其上面元微分为

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{1+1}dxdy=\sqrt{2}dxdy$$

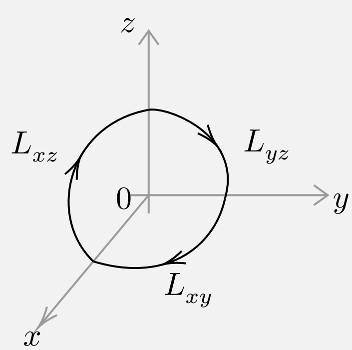
记 $\mathbf{F}=(xy,1,-z^2)$, 其旋度为 $\nabla\times\mathbf{F}=(0,0,-x)$, 故由 *Stokes* 公式，得

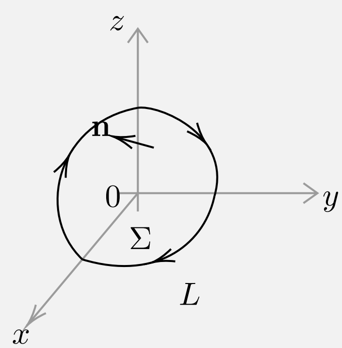
$$\oint_{C=\partial\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{s}=\iint_{\Sigma}(\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{S}=$$

$$=\iint_{\Sigma}(0,0,-x)\bullet\mathbf{n}dxdy=\iint_{D_{xy}}-xdxdy$$

15. 计算 $\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界，从球外看它是顺时针方向.

解： 一种方法是将 L 分成三个坐标平面内的部分 L_{xy}, L_{yz}, L_{xz}, 然后分别计算后相加. 由于 $L_{xy}: x^2+y^2=1$ 上 $z\equiv 0$, 故 $\int_{L_{xy}} = \int_{L_{xy}} y^2dx-x^2dy$, 补坐标轴长的线段后围成 $\frac{1}{4}$ 圆，其边界定向为**负**. 且在左边轴上部分上的积分为 0, 故由 Green 定理，知 $\int_{L_{xy}} y^2dx-x^2dy = -\iint_{\frac{1}{4}\text{圆}}(-2x-2y)dxdy = 2\iint_{\frac{1}{4}\text{圆}}(x+y)dxdy \xlongequal{\text{轮换对称}} 4\iint_{\frac{1}{4}\text{圆}} xdxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^1 r^2dr = \frac{4}{3}$. 再由轮换对称，知 $\int_{L_{yz}} = \int_{L_{xz}} = \int_{L_{xy}} = \frac{4}{3}$. 从而所求积分为 $\int_C = 3\times\frac{4}{3} = 4$.





上面的计算，如同上题中的情形，本质是投影到三个坐标面上后分别积分（*Stokes* 公式在坐标面的“投影”为 *Green* 公式）这种“降维”处理. 下面我们直接在三维中利用 *Stokes* 公式计算. 记曲面 Σ 为球面在第一卦限中的部分，为于其边界曲线 C 的定向相协调，其方向指向内侧，即定向单位法向量为 $\mathbf{n}^0=(-x,-y,-z)$. 令 $\mathbf{F}=(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$，则 $\nabla\times\mathbf{F}=(-2y-2z,-2x-2z,-2x-2y)$. 从而由 *Stokes* 公式 $\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{s} =$

$$\iint_\Sigma(\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{S} = \iint_\Sigma(-2y-2z,-2x-2z,-2x-2y)\bullet(-x,-y,-z)dS$$

$$= 4\iint_\Sigma(xy+yz+xz)dS \xlongequal{\text{轮换对称}} 12\iint_\Sigma xydS \xlongequal{\Sigma\text{ 表示为 } z=\sqrt{1-x^2-y^2}\text{ 的图像部分}}$$

$$= 12\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = 12\iint_{D_{xy}} xy\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r^2\sin\theta\cos\theta r dr}{\sqrt{1-r^2}} = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)d(2\theta)\int_0^1 \frac{r^3dr}{\sqrt{1-r^2}}$$

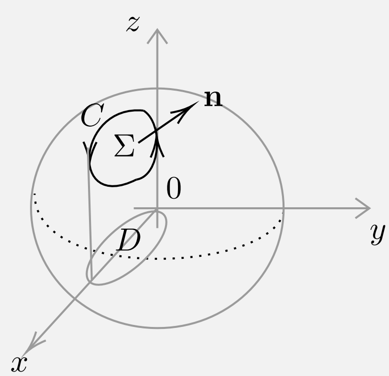
$$= -3\int_0^1 \frac{r^2d(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}} = -6\int_0^1 r^2 d\sqrt{1-r^2} = 12\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, rdr$$

$$= -6\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, d(1-r^2) = -6\times\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = 4$$

16. 计算 $\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$，其中曲线 C 由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 上 $z\geq 0$ 的部分（$a>0$），且从 x 轴正向看 C 是逆时针方向.

解： C 在 xOy 平面上的投影曲线显然是 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, 其所围圆域记为 D. 则 C 有参数表示 $\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta \\ y=\frac{a}{2}\sin\theta \\ z=\sqrt{a^2-ax}=\sqrt{a^2-a\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta\right)} \end{cases}$

即 $\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta \\ y=\frac{a}{2}\sin\theta \\ z=\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\theta} \end{cases}$ 其中 θ 从 0 到 2π.



C 的与定向一致的切向量场是

$$\boldsymbol{\tau}=(x'(\theta),y'(\theta),z'(\theta))=\left(-\frac{a}{2}\sin\theta,\frac{a}{2}\cos\theta,\frac{a}{2\sqrt{2}}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}\right)$$

令 $\mathbf{F}=(y^2,z^2,x^2)$，则所求积分为 $\displaystyle\oint_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{s}\int_0^{2\pi}\mathbf{F}\bullet\boldsymbol{\tau}d\theta$，其中

$$\mathbf{F}\bullet\tau=\left(\frac{a\sin\theta}{2}\right)^2\left(-\frac{a\sin\theta}{2}\right)+\frac{a^2(1+\cos\theta)}{2}\times\frac{a\cos\theta}{2}+$$

$$+\frac{a^2(1+\cos\theta)^2}{4}\times\frac{a}{2\sqrt{2}}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}=$$

还是可以积出来的，但稍显复杂，就不继续了. 试下能否用 Stokes 公式简化计算. 如上页图，球面上由 C 包围的面记为 Σ，取外侧，则与 C 的定向一致. 即取定向法向量为 $\mathbf{n}^0=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$. 由 Stokes 定理知 $\displaystyle\oint_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{s}=$

$$\iint_\Sigma(\nabla\times\mathbf{F})\bullet d\mathbf{S}=\iint_\Sigma(\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}^0dS=\frac{1}{a}\iint_\Sigma(-2z,-2x,-2y)\bullet(x,y,z)dS$$

$$=-\frac{2}{a}\iint_\Sigma(xz+xy+yz)dS\overset{\text{对称性}}{=\!=\!=}-\frac{2}{a}\iint_\Sigma xzdS$$

又因为在 Σ 上，有 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，故 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$. 从而所求积分为

$$-2\iint_D x\sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\overset{\text{舒服了！}}{=\!=\!=}-2\iint_D xdxdy$$

$$\overset{\text{极坐标}}{=\!=\!=}-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{a\cos\theta}r^2dr=-\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^3\cos^4\theta d\theta$$

$$=-\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=-\frac{4}{3}a^3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}a^3.$$

4 第一型曲面积分

1. 已知曲面 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=4\,(z\geq 0)$，S_1 为 S 在第一卦限中的部分则 $\iint_S (xy+z)dS$ 等于（C）

$A.\ 4\iint_{S_1}(xy+z)dS;$ $B.\ 4\iint_{S_1}xydS.$

$C.\ 4\iint_{S_1}zdS.$ $D.\ 0.$

解: 由于 S 关于 xOz 平面和 yOz 平面对称, 而 xy 当 $y\to -y$ 或 $x\to -x$ 时改变符号. 故 $\iint_S xydS=0$. 从而原积分 $\iint_S zdS \xlongequal{\text{对称性}} 4\iint_{S_1} zdS$.

2. 已知曲面 $S: x^2+2y^2+3z^2=1\,(y\geq 0, z\geq 0)$, 平面区域 D : $x^2+2y^2\leq 1\,(x\geq 0)$, 则（C）

$A.\ \iint_S xdS=\iint_D xdxdy.$ $B.\ \iint_S ydS=\iint_D ydxdy.$

$C.\ \iint_S xdS=\iint_D ydxdy.$ $D.\ \iint_S ydS=\iint_D xdxdy.$

解: S 为椭球体, 它关于 yOz 对称, 而 x 在对称点处变号, 故 $\iint_S xdS=0$. 同理 $\iint_D ydxdy=0$，故选 (C).

3. 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$，则 $\iint_\Sigma y^2dS=\underline{\frac{\sqrt{3}}{12}}.$

解: Σ 是 $z=1-x-y$ 当 $(x,y)\in D:=\{(x,y)\mid x+y\leq 1, x,y\geq 0\}$ 的图像,故其面积微元为 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{3}\,dxdy$. 从而 $\iint_\Sigma y^2dS=\sqrt{3}\iint_D y^2dxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}y^2dy=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1(1-x)^3dx=\frac{\sqrt{3}}{12}.$

4. 设曲面 $\Sigma : |x| + |y| + |z| = 1$，则 $\oiint_{\Sigma} (x + |y|) dS = \underline{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$.

解： Σ 关于三个坐标面都对称. 故 $\oiint_{\Sigma} x dS = 0$. 而 $\oiint_{\Sigma} |y| dS = 8\iint_{\Sigma_1} y dS$，其中 $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1;\ x, y, z \geq 0\}$ 是 Σ 在第一卦限中的部分. 其上面元为（c.f. 上题中的计算）$dS = \sqrt{3}\, dxdy$. 记 $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1;\ x, y \geq 0\}$ 是 Σ_1 在 xOy 平面上的投影区域. 故所求积分为

$$8\sqrt{3} \iint_D y dxdy = 8\sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y dy = 4\sqrt{3} \int_0^1 (1 - x)^2 dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

5. 设环面由方程 $\begin{cases} x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (b + a\cos\theta)\sin\varphi \\ z = a\sin\theta \end{cases}$,$0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. 计算环面的表面积.

解： $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (x(\theta, \varphi),\ y(\theta, \varphi),\ z(\theta, \varphi))$. 直接计算可得

$$\mathbf{r}_\theta = (-a\sin\theta\cos\varphi,\ -a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta)\,;$$

$$\mathbf{r}_\varphi = (-(b + a\cos\theta)\sin\varphi,\ (b + a\cos\theta)\cos\varphi,\ 0)$$

不难看出 $\mathbf{r}_\theta \bullet \mathbf{r}_\varphi = 0$，即 θ-曲线和 φ-曲线是正交曲线族——两族正交的圆(经圆和维圆)，它们构成了环面上的正交曲线坐标网. 因为正交的缘故

$$dS = ||\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi||\, d\theta d\varphi = ||\mathbf{r}_\theta|| \cdot ||\mathbf{r}_\varphi||\, d\theta d\varphi = a(b + a\cos\theta)\, d\theta d\varphi$$

从而 $S \overset{D:=\{(\theta,\varphi)|0\leq\theta,\varphi\leq 2\pi\}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \displaystyle\iint_D a(b + a\cos\theta)\, d\theta d\varphi$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b + a\cos\theta) d\theta = 4\pi^2 ab$$

6. 在球坐标下计算球的表面积和体积.

解: 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 球面有参数方程 $\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$

其中 $(\theta,\varphi)\in D=\{(\theta,\varphi)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\}$.

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=R^2\sin^2\varphi\cos\theta,\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}=R^2\sin^2\varphi\sin\theta,\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=R^2\sin^2\varphi\cos\varphi$$

故 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=R^2\sin\varphi$, 故球面上的面积微元为 $dS=R^2\sin\varphi d\theta d\varphi$, 其面积可计算为

$$S=\iint\limits_D R^2\sin\varphi\, d\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}R^2\sin\varphi\, d\varphi=4\pi R^2$$

球面围成的球体 Ω 的体积计算为

$$V=\iiint_\Omega dV \xlongequal{\text{球坐标}} \iiint_V r^2\sin\varphi dr d\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^2dr=2\pi\times\frac{R^3}{4}=\frac{3}{4}\pi R^3$$

另解（利用 Gauss 定理）: 上球面取外侧，对 $\mathbf{F}=(x,y,z)$，用 Gauss 定理，得

$$\oiint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iiint_\Omega\nabla\bullet\mathbf{F}\,dV=3\iiint_\Omega dV$$

故 Ω 的体积 $V=\frac{1}{3}\oiint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}$. 其中

$$d\mathbf{S}=\mathbf{n}^0dS=\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)dS$$

故

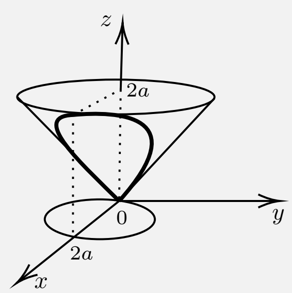
$$V=\frac{1}{3R}\oiint_{\partial\Omega}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{R}{3}\oiint_{\partial\Omega}dS=\frac{R}{3}\times 4\pi R^2=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

7. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS$，其中 Σ 是锥面 $S_1 : z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $S_2 : x^2+y^2 = ax\,(a>0)$ 所截下的有限部分.

解: 曲面 Σ 在 xy 平面上的投影区域为 $D_{xy} := \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2ax\}$, 曲面由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图像给出，故其上面元 $dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \sqrt{2}dxdy$，从而

$$I = \iint_{D_{xy}} z\sqrt{2}dxdy \xlongequal{\text{利用极坐标}} \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r^2 dr$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^3\theta d\theta = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}a^3.$$



8. 计算曲面 $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截下部分的面积.

解: 上题真会做，这题必也会做，而且更简单.

9. 计算曲面 $z = y^2 - x^2$ 夹在圆柱面 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=9$ 之间的面积.

解: 曲面是“马鞍面”，其上面元为

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

故所求面积为 $\iint_{1\le x^2+y^2\le 9} dS = \iint_{1\le x^2+y^2\le 9} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dxdy \xlongequal{\text{极坐标}}$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 \sqrt{1+4r^2}\,rdr = \frac{\pi}{4}\int_1^3 \sqrt{1+4r^2}\,d(1+4r^2) = \frac{\pi}{6}(37^{3/2}-5^{3/2})$$

10. 设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

解： 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$，则曲面 S 上动点 $P(x,y,z)$ 处的法向量为 $\mathbf{n}=\nabla F=(2x,2y-z,2z-y)$. 由于切平面垂直 xOy 面，故其方程为 $2x-y=0$. 注意到 P 在椭球上，故所求曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-yz=1 \\ 2z-y=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2+\frac{3}{4}y^2=1 \\ 2z-y=0. \end{cases}$$

曲线 C 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+\frac{y^2}{4/3}\le 1$. 而 Σ 是椭球面的部分. 对椭球方程 $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 两边同时对 x,y 求导，得

$$\begin{cases} 2x+2zz_x-yz_x=0 \\ 2y+2zz_y-z-yz_y=0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z_x=\frac{2x}{y-2z} \\ z_y=\frac{2y-z}{y-2z} \end{cases}$$

取 Σ 的面元为 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=$

$$\sqrt{1+\left(\frac{2x}{y-2z}\right)^2+\left(\frac{2y-z}{y-2z}\right)^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}dxdy$$

从而所求积分为

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS \xlongequal{\text{刚好抵消成}} \iint_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\,dxdy$$

$$=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}dxdy=\sqrt{3}\times\pi\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi$$

注： 我们知道若曲面可显式地表达为函数 $z=f(x,y)$ 的图像（的一部分），则其上面元为 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$. 当然，如果曲面由方程 $F(x,y,z)=0$ 表示，若它确定了隐函数关系 $z=z(x,y)$，则利用隐函数求导法计算出 z_x 和 z_y 后代入面元公式即知面元. 上题为该操作之一例.

5 第二型曲面积分

1. 设 Σ 是半球面 $x^2+y^2+z^2=4\,(z\geq 0)$ 的上侧,则曲面积分 $\iint_\Sigma (x+2)dydz+zdxdy$ 等于（C）

$A.\ 2\iint_{D_{yz}} \sqrt{4-y^2-z^2}dydz$

$B.\ 2\iint_{D_{yz}} \left(\sqrt{4-y^2-z^2}+2\right)dydz+\iint_{D_{xy}} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy.$

$C.\ 2\iint_{D_{yz}} \sqrt{4-y^2-z^2}dydz+\iint_{D_{xy}} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy.$

$D.\ \iint_{D_{xy}} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy.$

解: 用平面 $x=0$ 将 Σ 分为 $\Sigma_1: x=\sqrt{4-y^2-z^2}$ 与 $\Sigma_2: x=-\sqrt{4-x^2-y^2}$，两者在 yOz 平面上的投影区域相同，记为 D_{yz}，但球面上有向面元 $d\mathbf{S}$ 在其上的投影则刚好相反（一正一负），故而

$$\iint_\Sigma (x+2)dydz+zdxdy=\iint_{D_{yz}}\left(\sqrt{4-y^2-z^2}+2\right)dydz-$$

$$-\iint_{D_{yz}}\left(-\sqrt{4-y^2-z^2}+2\right)dydz+\iint_{D_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$$

$$=2\iint_{D_{yz}}\sqrt{4-y^2-z^2}\,dydz+\iint_{D_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$$

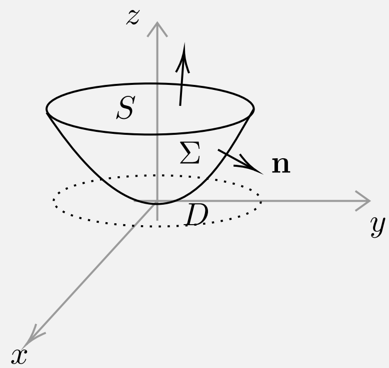
注: 这里核心的要点是：对第二型曲面积分 $\iint_\Sigma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=$

$$=\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

中的 $dydz$ 一定要理解为有向面元 $d\mathbf{S}$ 在 yOz 面上的投影大小，如 $d\mathbf{S}=\mathbf{n}^0dS$，其中定向法向量为 $\mathbf{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则若 $\cos\alpha>0$，则投影为正，即 $dydz$，否则投影为负，即 $-dydz$；若 $\cos\alpha=0$，则投影为零. $dzdx$ 和 $dxdy$ 的理解是同样的.

2. 记 Σ 为抛物面 $z = x^2 + y^2\,(z \le 1)$ 的下侧，则曲面积分 $\iint_\Sigma xydydz + xdzdx + x^2dxdy = \underline{-\frac{\pi}{4}}$.

解： 平面 $z = 1$ 被 Σ 所截的上侧记为 S，其在 xOy 平面上的投影区域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$，其与 Σ 围成的空间区域记为 Ω



则由 Gauss 定理，得 $\iint_\Sigma + \iint_S = \iint_\Omega \left[\frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(z)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2)}{\partial z}\right] dxdydz$

$$= \iiint_\Omega ydxdydz \xlongequal{\text{对称}} 0$$

而在 S 上由于 $z \equiv 1$，故 $\iint_S xydydz + xdzdx + x^2dxdy =$

$$= \iint_S x^2dxdy = + \iint_D x^2dxdy$$

注意这里的“$+$”是由于 S 的定向法向量为 $(0, 0, 1)$，故面元在 xOy 平面上投影为正.

即知所求积分为 $-\iint_S = -\iint_D x^2dxdy \xlongequal{\text{极坐标}} -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\cos^2\theta\, rdr$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)d\theta = -\frac{\pi}{4}$$

注： 也可直接按定义计算. Σ 的定向法向量为 $\mathbf{n} = (2x, 2y, -1)$. 其上面元为 $dS = ||\mathbf{n}||dxdy$，故其上有向面元为

$$d\mathbf{S}=\mathbf{n}^0 dS=\frac{\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||}||\mathbf{n}||dxdy=\mathbf{n}dxdy=(2x,2y,-1)\,dxdy$$

记 $\mathbf{F}=(xy,x,x^2)$，则所求积分为 $\iint_\Sigma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_D \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,dxdy$

$$=\iint_D (2x^2y+2xy-x^2)\,dxdy \xlongequal{\text{对称性}} -\iint_D x^2\,dxdy$$

殊途同归！

3. Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4\,(z\geq 0)$ 的上侧，则 $\iint_\Sigma \sqrt{4-x^2-4z^2}dxdy=\underline{\frac{32}{3}}$.

解: 曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\}$，其定向法向量场为 $\mathbf{n}=(x,y,4z)$，故有向面元在 D 上的投影 $dxdy$ 为**正**. 从而

$$\iint_\Sigma \sqrt{4-x^2-4z^2}\underbrace{dxdy}_{\text{此处尚是投影面元}}=\iint_D \sqrt{4-x^2-(4-x^2-y^2)}\underbrace{dxdy}_{\text{此处是无穷小面积}}$$

$$=\iint_D |y|\,dxdy=2\iint_{D_{\text{上半}}} ydxdy \xlongequal{\text{对称性}} 4\iint_{D_{\text{第一象限}}} ydxdy$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^2 r^2dr=\frac{32}{3}.$$

注: 按原始定理的完整形式：设 $\mathbf{F}=(0,0,\sqrt{4-x^2-4z^2})$，则所求积分为该向量场过有向曲面 Σ 的通量积分 $\iint_\Sigma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}$. 而有向面元为

$$d\mathbf{S}=\mathbf{n}^0 dS=\frac{\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{(x,y,4z)}{\sqrt{x^2+y^2+16z^2}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

故 $\iint_\Sigma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_D \frac{4z\sqrt{4-x^2-4z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+16z^2}}\cdot\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$. 方程 $x^2+y^2+4z^2=4$ 两边对 x，y 分别求导，得到 $z_x=-\frac{x}{4z},z_y=-\frac{y}{4z}$. 故 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{16z^2}+\frac{y^2}{16z^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+16z^2}}{4z}$. 代入后得到预期的抵消，舒服，从而 $\iint_\Sigma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_D \sqrt{4-x^2-4z^2}\,dxdy$. 殊途同归！

4. 设 Σ 为空间区域 $\{(x,y,z)\mid x^2+4y^2\le 4, 0\le z\le 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=\underline{4\pi}$.

解： 先计算 Σ 的位于柱面上的部分 Σ_0 上的积分，其方程为 $x^2+4y^2=4,\ 0\le z\le 2$，定向法向量场为 $\mathbf{n}=(x,4y,0)$. 曲面无法表达成 $z(x,y)$ 的图像，如表达成 $x(y,z)$ 或 $y(x,z)$ 的图像，则要讨论符号，较复杂. 另寻它途. 先参数化：$\Sigma_0:\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，其中 $0\le\theta\le 2\pi, 0\le z\le 2$. 即曲面上点的位置向量场为 $\mathbf{r}=(2\cos\theta,\sin\theta,z)$.

$$\mathbf{r}_\theta=(-2\sin\theta,\cos\theta,0);\quad \mathbf{r}_z=(0,0,1)$$

则曲面的法向量 $\mathbf{n}=\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_z=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ -2\sin\theta&\cos\theta&0\\ 0&0&1\end{vmatrix}=(\cos\theta,2\sin\theta,0)$，其与曲面定向一致. 故 Σ_0 上的有向面元为

$$d\mathbf{S}=\mathbf{n}\,d\theta dz=\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_z\,d\theta dz=(\cos\theta,2\sin\theta,0)\,d\theta dz$$

$\mathbf{F}=(x^2,y^2,z)=(4\cos^2\theta,\sin^2\theta,z)$，故所求积分为

$$\iint_{\Sigma_0}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_{D_{\theta,z}}(4\cos^3\theta+2\sin^3\theta)d\theta dz=2\int_0^2dz\int_0^{2\pi}(\sin^3\theta+2\cos^3\theta)d\theta$$

$$=4\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta-1)d\cos\theta+8\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=0$$

故只需计算在 $S_1: z=0$（下侧）和 $S_2: z=2$（上侧）上的积分. 显然 $\iint_{S_1}=0$，而 $\iint_{S_2}=2\iint_\Sigma dxdy\xlongequal{\text{投影为正}}2\iint_D dxdy=2\times 2\pi=4\pi$.

或由 Gauss 定理直接可知所求积分为 $\iint_\Sigma\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=$

$$\iiint_\Omega\nabla\bullet\mathbf{F}\,dxdydz=\iiint_\Omega(2x+2y+1)\,dxdydz\xlongequal{\text{对称性}}\iint_\Omega dxdydz$$

$$=\text{椭圆柱体积}=\text{底面积}\times\text{高}=2\pi\times 2=4\pi.$$

5. 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint_\Sigma xydydz+xdzdx+x^2dxdy=\underline{4\pi}$.

解：这题就不演示先求法向量，接着求面元，再计算 $\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}$ 这一套，或利用球坐标将球面参数化后求 $\mathbf{dS}=\pm\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\varphi d\theta d\varphi$ 再计算这一套了. 不熟练的同学可自行演练，其套路在前例中已有详细说明，不再赘述. 下面是利用 Gauss 的快算. 记 $\mathbf{F}=(xy,x,x^2)$，其散度为 $\nabla\bullet\mathbf{F}=y$. 为利用 Gauss 公式，我们补充 xOy 平面上的面 $S:=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$，方向取下侧，它与 Σ 围成封闭上半球区域 Ω，则

$$\iint_\Sigma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}+\iint_S \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iiint_\Omega \nabla\bullet\mathbf{F}\,dV=\iiint_\Omega y\,dxdydz\xlongequal{\text{对称性}}0$$

故所求积分 $\displaystyle\iint_\Sigma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=-\iint_S \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=-\iint_{D_{xy}}(xy,x,x^2)\bullet(0,0,-1)dxdy$

$$=\iint_{D_{xy}}x^2dxdy=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^2 r^3dr=\frac{16}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=4\pi$$

6. 设 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$ 的下侧，则 $\iint_\Sigma xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\underline{2\pi}$.

解：锥面上面元 $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$（形式之所以如此简洁的本质原因是锥面沿其任意一条母线隔开后可平铺于平面）. 与定向一致的法向量场为 $\mathbf{n}=(z_x,z_y,-1)=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$. 故 Σ 上的有向面元为

$$d\mathbf{S}=\mathbf{n}^0dS=\frac{\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||}dS=\mathbf{n}\,dxdy=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)\,dxdy$$

记 $\mathbf{F}=(x,2y,3(z-1))$，则所求积分为 $\displaystyle\iint_\Sigma \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_D \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,dxdy$

$$=\iint_D\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-3(z-1)\right)\,dxdy$$

$$=\iint_D\left(3-\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 为锥面 Σ 在 xOy 平面的投影区域. 上积分计算如下

$$3\iint_D dxdy-\iint_D\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=3\pi-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{2r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r}rdr$$

$$=3\pi-\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta)d\theta\int_0^1 r^2dr=3\pi-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\frac{3+\cos 2\theta}{2}d\theta=3\pi-\pi=2\pi$$

上面又是一番从头算起的演示，重复来重复去无非是要强调它的基础性，其中的计算即便繁琐，但也是基本功训练的必然要求，忽视它们会导致系统化理解知识体系的障碍，也会让试图巧算的尝试屡屡受阻.

下面是巧算（快算）!

我们给锥面 Σ 添加个“盖” $S:=\{x^2+y^2=1,\ z=1\}$，方向取上侧（即定向单位法矢取 $\mathbf{n}=(0,0,1)$）, 则 $\Sigma\cup S$ 为其包围锥体 Ω 之边界，定向为外侧. 由 Gauss 定理知

$$\oiint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_\Sigma\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}+\iint_S\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iiint_\Omega\nabla\bullet\mathbf{F}\,dV=6\iiint_\Omega dV$$

其中锥体体积 $\iiint_\Omega dV=\frac{1}{3}\pi$. 而

$$\iint_S\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_D\mathbf{F}\bullet(0,0,1)\,dxdy=\iint_D 3(z-1)\,dxdy\xlongequal{S\text{上}z\equiv 1}0$$

从而所求积分 $\iint_\Sigma\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=6\times\frac{\pi}{3}-\iint_S\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=2\pi-0=2\pi.$

所以你也看到了，即使用 *Gauss* 定理巧算，最后拼的还是上面提的基本功!

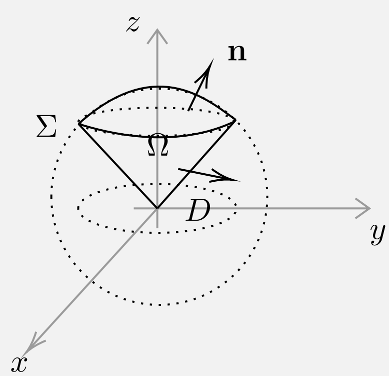
7. 设 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=$ $\underline{2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)R^3}$.

解: 直接用 Gauss 公式应该是最快捷的算法. 令 $\mathbf{F}=(x,y,z)$, 则 $\nabla\bullet\mathbf{F}=3$, 则

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\bullet\mathbf{F}\,dV=\iiint_{\Omega}3dV=3\times\text{球冠 }\Omega\text{ 体积}$$

计算球冠体积 $\iiint_{\Omega}dV$ 时用球坐标 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$ 显然是适宜的. 在球坐标下 Ω 的描述如下

$$\Omega:=\left\{(r,\theta,\varphi)\mid 0\le r\le R,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\right\}$$



球坐标下的体积微元为 $dV=r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$，故球冠体积为

$$V=\iiint_{\Omega}dV=\iiint_{\Omega}r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^R r^2dr$$

$$=2\pi\times\left(\cos 0-\cos\frac{\pi}{4}\right)\times\frac{R^3}{3}=\frac{2\pi R^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

从而知所求积分为 $3\times\frac{2\pi R^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)R^3$.

8. 设曲面 $\Sigma: z = 1-(x^2+y^2)\,(-3 \le z \le 1)$，则曲面积分 $\iint_{\Sigma(\text{上侧})} x^2dydz + xydzdx + zdxdy = \underline{-4\pi}$.

> **解：** 补充平面 $z=-3$ 上的圆盘 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$，定向取下（即定向法向量为 $\mathbf{n}=(0,0,-1)$）. 则 Σ 与 D 围成空间区域 Ω. 记 $\mathbf{F}=(x^2,xy,z)$. 由 Gauss 公式，可知
>
> $$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} + \iint_{D} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla\bullet\mathbf{F}\,dV$$
>
> $$= \iiint_{\Omega}(3x+1)\,dxdydz \xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} dV \xlongequal{\text{截面法}}$$
>
> $$= \int_{-3}^{1} dz \int_{x^2+y^2\le 1-z} dxdy = \int_{-3}^{1} \pi(1-z)dz = 8\pi$$
>
> 而 $\displaystyle\iint_D \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} = \iint_D (x^2,xy,z)\bullet(0,0,-1)\,dxdy = -\iint_D z\,dxdy$
>
> $$= -\iint_D (-3)\,dxdy = 3\iint_D dxdy = 3\times 4\pi = 12\pi$$
>
> 故 $\displaystyle\iint_{\Sigma} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla\bullet\mathbf{F}\,dV - \iint_D \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} = 8\pi - 12\pi = -4\pi.$

9. 计算曲面积分 $I = \displaystyle\iint_{\Sigma} \frac{(x-3)dydz+(2-y)dzdx+(z-1)^2dxdy}{z-x^2-y^2}$，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=1+x^2+y^2\,(1\le z\le 3)$ 的下侧.

> **解：** 这题的曲面和上题中的都是旋转抛物面，故想仿效上题做法. 但问题是向量场 $\mathbf{F}=\left(\dfrac{x-3}{z-x^2-y^2}, \dfrac{2-y}{z-x^2-y^2}, \dfrac{(z-1)^2}{z-x^2-y^2}\right)$，其散度计算较繁杂，说不定用 Gauss 公式算会更复杂. 又注意到在曲面 Σ 上，分母 $z-x^2-y^2\equiv 1$，故考虑按原始方法计算. 曲面 Σ 的定向法向量场为 $\mathbf{n}=(2x,2y,-1)$. 从而其上的有向面元为 $d\mathbf{S}=\mathbf{n}\,dxdy=(2x,2y,-1)\,dxdy$. 从而
>
> $$\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,dxdy = \iint_{D_{xy}} \frac{2x(x-3)+2y(2-y)-(z-1)^2}{z-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} (2x^2 - 6x + 4y - 2y^2 - (x^2+y^2)^2)\, dxdy \xlongequal{\text{对称性}}$$

$$2\iint_{D_{xy}} x^2 dxdy - 2\iint_{D_{xy}} y^2 dxdy - \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)^2 dxdy \xlongequal{\text{对称性}}$$

$$\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy - \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy - \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)^2 dxdy$$

$$= -\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)^2 dxdy \xlongequal{\text{极坐标下}} -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^5 dr = -\frac{8\pi}{3}.$$

或由于在曲面 Σ 上，被积表达式的分母为 1，故原积分等价于 $\iint_{\Sigma}(x-3)dydz + (2-y)dydz + (z-1)^2 dxdy$，可方便用 Gauss 定理计算，请大家自行尝试求解.

10. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xzdydz + 2zydzdx + 3xydxdy$，其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}\,(0 \le z \le 1)$ 的上侧.

解： 设 $\mathbf{F} = (xz, 2zy, 3xy)$，则 $\nabla \bullet \mathbf{F} = z + 2z = 3z$，比较简单，故尝试用 Gauss 定理计算. 为此添加平面 $S: \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1 \end{cases}$，定向取下侧（即取 $\mathbf{n} = (0,0,1)$）. Σ 与 S 围成封闭区域 Ω. 则

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} + \iint_{S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{F}\, dV = 3\iiint_{Z} zdV$$

$$= 3\int_0^1 zdz \iint_{x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 - z} dxdy = 6\pi \int_0^1 z(1-z)dz = \pi$$

而 $\iint_{S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1} 3xy\, dxdy \xlongequal{\text{对称性}} 0$. 从而知所求积分为

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{F}\, dV - \iint_{S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \pi - 0 = \pi.$$

11. 设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2\,(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

解： 基本同 8, 10 两题的计算方法. 记 $\mathbf{F}=((x-1)^3,(y-1)^3,z-1)$，则 $\nabla\bullet\mathbf{F}=3(x-1)^2+3(y-1)^2+1=3x^2+3y^2-6x-6y+7.$

补充平面 $S:\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2\le 1\end{cases}$，其与 Σ 围成的封闭区域记为 Ω，且定向取下侧，则由 Gauss 定理 $\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}+\iint_{S}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=$

$$\xlongequal{\text{上侧定向}}-\iiint_{\Omega}\nabla\bullet\mathbf{F}\,dV=-\iint_{\Omega}(3x^2+3y^2-6x-6y+7)dxdydz$$

$$\xlongequal{\text{对称性}}-3\iint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz-7\iint_{\Omega}dxdydz$$

$$=-3\int_0^1dz\iint_{x^2+y^2\le z}(x^2+y^2)\,dxdy-7\int_0^1dz\iint_{x^2+y^2\le z}dxdy$$

$$=-3\int_0^1dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}r^2rdr-7\int_0^1\pi z\,dz=6\pi\int_0^1\frac{z^2}{4}dz+\frac{7\pi}{2}=-4\pi$$

而 $\iint_{S}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathbf{F}\bullet(0,0,-1)\,dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-z)\,dxdy\xlongequal{z\equiv 1}0.$

12. 设有界区域 Ω 由曲面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)dydz-2ydzdx+3zdxdy$

解： 由 Gauss 公式直接得 $I=\iiint_{\Omega}(2x-2+3)\,dxdydz=\iiint_{\Omega}(2x+1)\,dxdydz$

$$=\int_0^1dx\iint_{D}(2x+1)\,dydz=\int_0^1(2x+1)dx\iint_{D_x}dydz$$

$$=\int_0^1(2x+1)\times\frac{1}{2}\times 2(1-x)^2\,dx=\int_0^1(2x^3-3x^2+1)\,dx=\frac{1}{2}.$$

13. Σ 是 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 前侧，计算 $I=\iint_\Sigma xdydz+(y^3+2)dzdx+z^3dxdy$.

解: 补 $S:\begin{cases} x=0 \\ 3y^2+3z^2\le 1\end{cases}$ 取后侧. 则 $I=\iiint_\Omega (1+3y^2+3z^2)\,dxdydz=$ $\iiint_\Omega dxdydz+3\iiint_\Omega (y^2+z^2)dxdydz=\frac{2}{9}\pi+\iint_{3y^2+3z^2\le 1}(y^2+z^2)\,dydz\int_0^x dx$

$$=\frac{2\pi}{9}+3\iint_{3y^2+3z^2\le 1}(y^2+z^2)\,dydz\int_0^{\sqrt{1-3y^2-3z^2}}dx=\frac{2\pi}{9}+$$

$3\iint_{3y^2+3z^2\le 1}(y^2+z^2)\sqrt{1-3y^2-3z^2}dydz=\frac{2\pi}{9}+3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}r^3\sqrt{1-3r^2}dr$ $=\frac{2}{9}\pi+\frac{4}{45}\pi=\frac{14}{45}\pi$. 另 $\iint_S xdydz+(y^3+2)dzdx+z^3dxdy\xlongequal{x=0}0$，从而 $I=\frac{14}{45}\pi$.

14. 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\,(z\ge 0)$ 的上侧.

解: 用 Gauss 公式. 记 S 为 xOy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧，并记 Ω 为 Σ 和 S 围成的空间封闭区域. 记 $\mathbf{F}=(2x^3,2y^3,3(z^2-1))$

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iiint_\Omega \nabla\bullet\mathbf{F}\,dV=\iiint_\Omega 6(x^2+y^2+z)\,dxdydz$$

$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2}(z+r^2)\,rdz=12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)\right]dr$ $=12\pi$. 又 $\iint_S\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathbf{F}\bullet(0,0,-1)\,dxdy=$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}-3(z^2-1)\,dxdy\xlongequal{z=0}\iint_{x^2+y^2\le 1}3\,dxdy=3\pi$$

从而 $I=2\pi-3\pi=-\pi$.

15. 设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成，Σ 为 Ω 边界面的外侧，计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma} 2xz dydz + xz\cos y dydx + 3yz\sin x dxdy$$

解： 直接由 Gauss 定理得 $I=\iiint_{\Omega}(2z-xz\sin y+3y\sin x)\,dxdydz$. 由于 Ω 关于 xOz 平面对称，且 $-xz\sin y+3y\sin x$ 当 $y\to -y$ 时变号，故其在 Ω 上的积分为零. 从而

$$I=\iiint_{\Omega} 2z\,dxdydz = 2\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy\int_0^{1-x} zdz$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x)^2\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r\cos\theta)^2 rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos^2\theta\right)d\theta=\frac{5}{4}\pi.$$

16. 计算 $I=\oiint_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

解： 被积表达式特别对称优美，但积分曲面 Σ 的定义方程却不对称. 如选择将 Σ 参数化或求出其法向量代入后会破坏原被积表达式的对称结构，得不偿失. 似乎陷入了不可逾越的困境.

但由被积表达式的对称结构猜到，若令

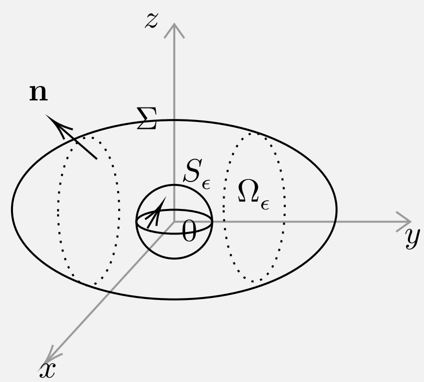
$$\mathbf{F}=\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

其散度或为零. 而事实果真如此(请大家自行验证)! 即当 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 时，$\nabla\bullet\mathbf{F}=0$. 那这有什么好处呢？有利于我们计算给定的积分吗？

当然是，其基本原理类似与用 Green 公式得到曲线与积分路径选择无关后对计算的大幅简化——通过选择简单的积分路径.

我们这里将选择在更简单的曲面上积分（与被积表达式相协调），却能得到与在原曲面上相同的结果.

如下图，由于向量场 $\mathbf{F}$ 在原点 $O(0,0,0)$ 处奇异，我们“挖掉”以 O 为圆心，半径为 ϵ（其中 $0<\epsilon<1$）的球体 $x^2+y^2+z^2\le\epsilon^2$，记其表面为 S_ϵ，取内侧. 则 Σ 和 S_ϵ 围成区域 Ω_ϵ，i.e., $\partial\Omega_\epsilon=\Sigma+S_\epsilon$.



在 Ω_ϵ 上，$\mathbf{F}$ 是非奇异的光滑向量场，故可应用 Gauss 公式，即

$$\oiint_{\partial\Omega_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}+\iint_{S_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iiint_{\Omega_\epsilon}\nabla\mathbf{F}\,dV=0$$

从而 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=-\iint_{S_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_{-S_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}\overset{d\mathbf{S}=(\frac{x}{\epsilon},\frac{y}{\epsilon},\frac{z}{\epsilon})dS}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$

$$\iint_{S_\epsilon}\frac{1}{\epsilon}\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dS=\iint_{S_\epsilon}\frac{1}{\epsilon(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}dS\overset{S_\epsilon\text{上}\,r=\epsilon}{=\!=\!=\!=}$$

$$=\iint_{S_\epsilon}\frac{dS}{\epsilon^2}=\frac{1}{\epsilon^2}\times4\pi\epsilon^2=4\pi$$

或者 $\displaystyle\iint_{-S_\epsilon}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}=\iint_{-S_\epsilon}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\overset{\text{球面上 }r=\epsilon}{=\!=\!=\!=\!=}$

$$=\iint_{-S_\epsilon}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\epsilon^3}=\frac{1}{\epsilon^3}\iint_{-S_\epsilon}xydz+ydzdx+zdxdy$$

$$\underset{\text{再用一次 Gauss}}{\overset{\text{记 }-S_\epsilon\text{ 包围的球体为 }V_\epsilon}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}\frac{1}{\epsilon^3}\iiint_{V_\epsilon}3\,dV=\frac{3}{\epsilon^3}\times\frac{4}{3}\pi\epsilon^3=4\pi.$$

殊途同归！

17. 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\le x^2+y^2\le 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数. 计算

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\,dydz+[yf(xy)+2y+x]\,dzdx+[zf(xy)+z]\,dxdy$$

解: 曲面 Σ 的法向量为 $\mathbf{n}=(-z_x,-z_y,1)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$,

则 $I=\iint_{\Sigma}(P,Q,R)\bullet\mathbf{n}\,dxdy=$

$$\iint_{\Sigma}\left[-\frac{x\,(xf(xy)+2x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y\,(yf(xy)+2y+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}+zf(xy)+z\right]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[-\sqrt{x^2+y^2}f(xy)-2\sqrt{x^2+y^2}+zf(xy)+z\right]dxdy$$

$$=\iint_{1\le x^2+y^2\le 4}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^2dr=\frac{14}{3}\pi.$$

6 Green, Gauss, Stokes 及综合应用

1. 设函数 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$，如果对上半平面 $(y>0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，那么函数 $P(x,y)$ 可取为（D）

$A.\, y=\dfrac{x^2}{y^3}.$ $\qquad$ $B.\, \dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}.$

$C.\, \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}.$ $\qquad$ $D.\, x-\dfrac{1}{y}.$

解： 由题意知，P,Q 当 (x,y) 在上半平面内时受约束：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y^2} \quad\Longrightarrow\quad P=\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{y}+C(x)$$

其中 $C(x)$ 是 x 的任意在上半平面内有定义的函数. (C) 中的 $\dfrac{1}{x}$ 在正 y-轴不能定义，故排除. 而 (D) 中函数满足要求.

2. 全微分方程 $(2x+y)dx+(x+e^y)dy=0$ 的通解为 $\underline{x^2+xy+e^y=C.}$

解： 令 $P=2x+y$, $Q=x+e^y$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. 从而 $Pdx+Qdy$ 必可写成 du 的形式. 可直接看出 $d(x^2+xy+e^y)=0$，故取 $u=x^2+xy+e^y$. 从而原方程的通解为 $u=C$，即 $x^2+xy+e^y=C$，其中 C 为任意常数. 如果直接凑不出来，可按下面两种方法求出“势函数”$u(x,y)$.

1. u 满足：$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=P=2x+y\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y}=x+e^y\end{cases}$ 第一个方程两边对 x 积分，得

$$u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int(2x+y)dx=x^2+xy+C(y)$$

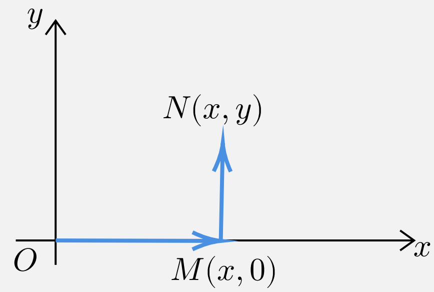
为确定 $C(y)$ 的形式，将求得的 $u(x,y)$ 代入第二个方程，得

$$x+C'(y)=x+e^y \quad\Longleftrightarrow\quad C'(y)=e^y \quad\Longrightarrow\quad C(y)=e^y+C$$

2. 由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，故 $\displaystyle\int_C Pdx+Qdy=\int_C (2x+y)dx+(x+e^y)dy$ 与路径无关——只与起点和终点的位置有关. 固定任意一个起点，比如 $(0,0)$，对 (x,y)，考虑从 $(0,0)$ 到 (x,y) 的如下路径积分

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x+y)dx+(x+e^y)dy$$

因为积分与路径无关，故 $u(x,y)$ 只依赖于 (x,y)，从而是一个良好定义的函数. 为计算出它的一个表达式，我们选取最简单的路径，即如下折线



即 $\displaystyle u(x,y)=\int_{\overrightarrow{OM}}(2x+y)dx+(x+e^y)dy+\int_{\overrightarrow{MN}}(2x+y)dx+(x+e^y)dy$

$$=\int_0^x 2xdx+\int_0^y(x+e^y)dy=x^2+xy+e^y-1$$

选择不同的起点会得到不同的常数.

3. 全微分方程 $(e^x\sin y+y)dx+(e^x\cos y+x)dy=0$ 的通解为$\underline{e^x\sin y+xy=C}$.

解： 令 $P=e^x\sin y+y$, $Q=e^x\cos y+x$，则 $P_y=e^x\cos y+1=Q_x$，从而 $\exists\, u(x,y)$，使得 $du=Pdx+Qdy$. 直接凑，有

$$e^x\sin ydx+e^x\cos ydy+ydx+xdy=0 \quad\Longleftrightarrow\quad d(e^x\sin y)+d(xy)=0$$

即 $d(xy+e^x\sin y)=0$，即 $u(x,y)=xy+e^x\sin y$.

或按 $u_x=e^x\sin y+y$, $u_y=e^x\cos y+x$ 求解；或按上折线计算 $u(x,y)=\displaystyle\int_{(0,0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$. 请大家作为热手自行完成.

4. 若 $\int_L \frac{xdx - aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a = \underline{-1}$.

解：被积对象在 D 内有定义（只在圆 $x^2+y^2=1$ 上奇异），故积分与路径无关当且仅当 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，即 $\frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2} = \frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$，从而 $a=-1$.

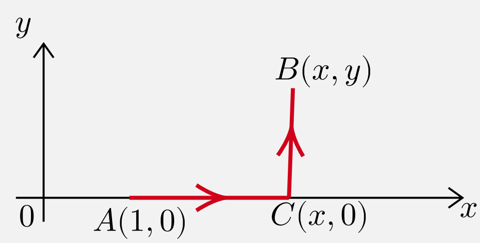
5. 确定常数 a，使得在右半平面 $(x>0)$ 内，曲线积分 $\int_C \frac{axy}{x^4+y^2}dx - \frac{x^2}{x^4+y^2}dy$ 与路径无关，并计算 $\int_{(1,1)}^{(\sqrt{3},\sqrt{3})} \frac{axy}{x^4+y^2}dx - \frac{x^2}{x^4+y^2}dy$

解：右半平面内，$(x,y)\neq(0,0)$（被积对象的奇点），故被积对象有定义. 应用 Green 公式，既然积分与路径无关，则在右半平面内必成立

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{axy}{x^4+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{x^4+y^2}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{ax(x^4+y^2)-2axy^2}{(x^4+y^2)^2} = \frac{4x^5-2x(x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2}$$

即 $ax^5 - axy^2 = 2x^5 - 2xy^2$，对比知 $a=2$. 由此知 $\frac{2xydx - x^2dy}{x^4+y^2}$ 是个全微分，即它可写成右半平面内某（一族）可微函数 $u(x,y)$ 的微分 du. 如直接凑不出 u，可按 *59, 60* 页提供的两种方法确定.



$$u(x,y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4+y^2} \overset{\text{沿折线积}}{=\!=\!=} \int_{\overrightarrow{AC}} + \int_{\overrightarrow{CB}} = 0 + \int_{\overrightarrow{CB}}$$

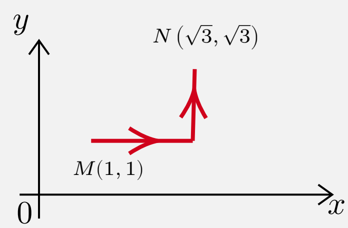
$$= \int_0^y \frac{-x^2dt}{x^4+t^2} = -\int_0^y \frac{d\left(\frac{t}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{t}{x^2}\right)^2} = \arctan\frac{t}{x^2}\Big|_0^y = \arctan\frac{y}{x^2}$$

即知 $u(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x^2}$ 为一势函数，从而所求积分

$$\int_{(1,1)}^{(\sqrt{3},\sqrt{3})}\frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}=\int_{(1,1)}^{(\sqrt{3},\sqrt{3})}du=$$

$$u(\sqrt{3},\sqrt{3})-u(1,0)=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\arctan 1=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}.$$

或直接考虑按下面折线路径计算. 请大家自行完成计算.



6. 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t)=\displaystyle\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求 $I(t)$ 的最小值.

解: 因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，故 $f(x,y)=xe^{2x}\cdot e^{-y}+\varphi(y)$，其中 $\varphi(y)$ 为 y 的任意可导函数. 又 $f(0,y)=\varphi(y)=y+1$，从而 $f(x,y)=xe^{2x-y}+1$，又知 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-xe^{2x-y}+y+1$. 故知

$$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\int_{L_t}\underbrace{(2x+1)e^{2x-y}}_{P}dx+\underbrace{(1-xe^{2x-y})}_{Q}dy$$

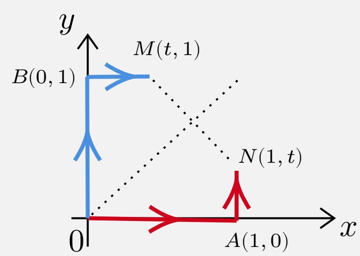
由于 $P_y=P_x=-(2x+1)e^{2x-y}$，知积分与路径无关. 从而按折线路径计算，得

$$I(t)=\int_0^1(2x+1)e^{2x}dx+\int_0^t(1-e^{2-y})dy=t+e^{2-t}$$

则 $I'(t)=1-e^{2-t}=0$，得 $t=2$，而 $I''(t)=e^{2-t}$，$I''(2)=1>0$. 所以当 $t=2$ 时，$I(t)$ 取极小值，即最小值，最小值为 $I(2)=3$.

7. 设二元函数 $P(x,y)$ 在 $x0y$ 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_C P(x,y)dx+2xydy$ 与路径无关,并且对任意实数 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} P(x,y)dx+2xydy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} P(x,y)dx+2xydy$，求函数 $P(x,y)$.

解： 由积分与路径无关知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2y$，从而 $P=y^2+C(x)$，其中 $C(x)$ 是 x 的任意可微函数. 考虑下图中红蓝折线路径



则

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} P(x,y)dx+2xydy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} P(x,y)dx+2xydy$$

左右分别用蓝，红路径计算，得

$$\int_0^t P(x,1)dx = \int_0^1 P(x,0)dx + \int_0^t 2ydy$$

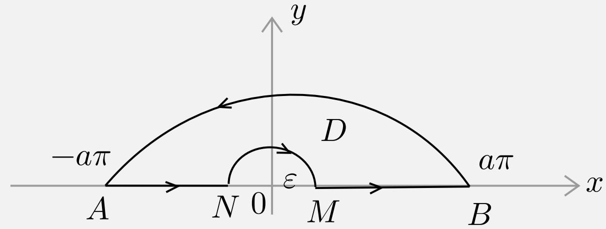
即 $\int_0^t (1+C(x))dx = \int_0^1 C(x)dx + t^2$. 两边同时对 t 求导，得

$$1+C(t)=2t \quad\Longrightarrow\quad C(x)=2x-1$$

从而得到 $P(x,y)=y^2+2x-1$.

8. 计算曲线积分 $I=\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 其中 C 为曲线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t)-a\pi \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段.

解: 如下图, C 的逆向曲线 $\widehat{BA}$, 有向线段 $\overline{AN}$、$\overline{MB}$ 及半径为 $\varepsilon>0$ 的半圆 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=\varepsilon^2,\, y\geq 0\}$ 构成了围绕区域 D 的正向闭曲线 $\gamma=\partial D$.



因为 $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 在 D 上非奇异，故在区域 D 上运用 *Green* 公式，得

$$\oint_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)}{\partial y}\right)dxdy\equiv 0$$

即成立

$$\left(\int_{\widehat{BA}}+\int_{\overline{AN}}+\int_{\widehat{NM}}+\int_{\overline{MB}}\right)\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)\equiv 0$$

由于在线段 $\overline{AN}$ 和 $\overline{MB}$ 上 $y=0, dy=0$，故其上积分为零. 从而

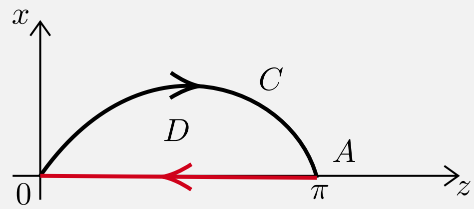
$$\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\int_{\widehat{BA}}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_{\widehat{NM}}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$$

$$\xlongequal[t:\,\pi\to 0]{x=\epsilon\cos t;y=\epsilon\sin t}\int_\pi^0\frac{\epsilon^2\cos^2 t+\epsilon^2\sin^2 t}{\epsilon^2}dt=\int_\pi^0 dt=-\pi.$$

9. (a) 设曲线 $L\begin{cases} x=\sin z \\ y=0 \end{cases}$ 求曲线积分 $\int_C(e^z\sin x+x-z)dz+(e^z\cos x-z)dx$, 其中 C 是由原点沿曲线 L 到点 $A(0,0,\pi)$ 的有向曲线;

(b) 记由曲线 $C\,(0\leq z\leq\pi)$ 绕 z 轴旋转一周而成曲面（外侧）为 Σ，计算曲面 $\oiint_\Sigma xzdydz+2xydzdx+3xydxdy$.

解: (a). 如下图, 补充有向线段 $\overrightarrow{AO}$, 则 $C+\overrightarrow{AO}$ 构成其所围区域 D 的负定向边界曲线. 而在 $\overrightarrow{AO}$ 上, $x\equiv 0$, 从而 $\int_{\overrightarrow{AO}} = \int_{\pi}^{0} -zdz = \frac{\pi^2}{2}$.



则

$$\int_C + \int_{\overrightarrow{AO}} \xlongequal{Green} -\iint_D \left(\frac{\partial(e^z\cos x - z)}{\partial z} - \frac{\partial(e^z \sin x + x - z)}{\partial x}\right) dxdy$$

$$= 2\iint_D dxdy = 2\int_0^{\pi} dz \int_0^{\sin z} dx = 4$$

故

$$\int_C (e^z \sin x + x - z)dz + (e^z\cos x - z)dx = 4 - \int_{\overrightarrow{AO}} = 4 - \frac{\pi^2}{2}.$$

(b) $\Sigma: \sqrt{x^2+y^2} = \sin z\,(0\le z\le \pi)$ 闭曲面, 其围成区域 Ω, 则

$$\oiint_{\Sigma} xzdydz + 2xydzdx + 3xydxdy \xlongequal{Gauss} \iiint_{\Omega}(z+2x)\,dV$$

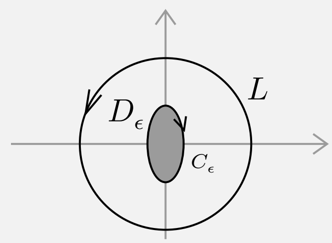
$$\xlongequal{\text{对称性}} \iiint_{\Omega} z\,dxdydz = \int_0^{\pi} zdz \iint_{x^2+y^2\le \sin^2 z} dxdy$$

$$= \pi\int_0^{\pi} z\sin^2 zdz = \pi\int_0^{\pi} z\frac{1-\cos 2z}{2}dz = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} zd\left(z - \frac{\sin 2z}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[z\left(z-\frac{\sin 2z}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(z - \frac{\sin 2z}{2}\right)dz\right] = \frac{\pi^3}{4}.$$

10. 计算曲线积分 $I=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

解：被积对象在 $(0,0)$ 处奇异，而 L 绕该点，故不能用 Green 公式计算；将 L 参数化后代入被积对象有太复杂，不可取（*参考 p.56 第 16 题中的情形，看是否神似！*）那就把“奇点” $(0,0)$ 挖掉，且考虑到被积表达式分母 "$4x^2+y^2$" 的形式, 我们为其“量身定制”一个“洞”: $0<4x^2+y^2\le\epsilon^2<1$. 其边界为曲线 $C_\epsilon: 4x^2+y^2=\epsilon^2$，定向取顺时针.



$$\partial D_\epsilon = L + C_\epsilon$$

则 C_ϵ 与 L 包围的区域 D_ϵ 的边界为 $L+C_\epsilon$，而被积对象在挖了洞后的区域上是有意义的，故由 Green 公式得 $\oint_L+\oint_{C_\epsilon}=$

$$\iint_D\left(\frac{(4x^2+y^2)-8x(x+y)}{(4x^2+y^2)^2}-\frac{-(4x^2+y^2)-2y(4x-y)}{(4x^2+y^2)^2}\right)dxdy=0$$

即

$$\oint_L\frac{(4x-y)dx+(x+y)dy}{4x^2+y^2}=\oint_{-C_\epsilon}\frac{(4x-y)dx+(x+y)dy}{4x^2+y^2}\,\xlongequal[y=\epsilon\sin\theta]{x=\epsilon/2\cos\theta}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(2\epsilon\cos\theta-\epsilon\sin\theta)\left(-\frac{\epsilon}{2}\sin\theta\right)d\theta+\left(\frac{\epsilon}{2}\cos\theta+\epsilon\sin\theta\right)(\epsilon\cos\theta)d\theta}{\epsilon^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left((\sin\theta-2\cos\theta)\frac{\sin\theta}{2}+\left(\frac{\cos\theta}{2}+\sin\theta\right)\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta=\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi.$$

11. (a) 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是有界单连通区域，$I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dxdy$ 取得最大值的积分域记为 D_1. 求 $I(D_1)$ 的值；

(b) 计算 $\int_{\partial D_1} \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2}$，$\partial D_1$ 为 D_1 的正向边界.

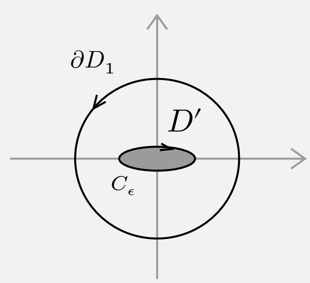
解： (a) 当且仅当被积函数 $4 - x^2 - y^2$ 在 D 上非负时，$I(D)$ 取最大，故 $D_1 : x^2 + y^2 \le 4$. 从而 $I(D_1) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r dr = 8\pi$.

(b) 令 $P = \frac{xe^{x^2+4y^2} + y}{x^2 + 4y^2}, Q = \frac{4ye^{x^2+4y^2} - x}{x^2 + 4y^2}$，故当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(8xye^{x^2+4y^2} - 1)(x^2 + 4y^2) - 2x(4ye^{x^2+4y^2} - x)}{(x^2 + 4y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{(8xye^{x^2+4y^2} + 1)(x^2 + 4y^2) - 8y(xe^{x^2+4y^2} + y)}{(x^2 + 4y^2)^2}$$

故 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 从而在“挖去”奇点 $(0, 0)$ 的区域上曲线积分与路径无关.



根据被积表达式分母“$(x^2+4y^2)^2$”的形式按需“挖”洞：$x^2+4y^2 \le \epsilon^2 \to 0$，记其边界曲线为 C_ϵ，定向为顺时针，从而 C_ϵ 和 ∂D_1 共同构成其所围区域 D' 的正向边界曲线. 由 Green 公式，得

$$\oint_{\partial D_1} Pdx + Qdy + \oint_{C_\epsilon} Pdx + Qdy = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

$$\oint_{\partial D_1} Pdx + Qdy = \oint_{-C_\epsilon} Pdx + Qdy = \frac{1}{\epsilon^2} \oint_{-C_\epsilon} (xe^{\epsilon^2} + y)dx + (4ye^{\epsilon^2} - x)dy$$

$$\overset{\text{再用一次 Green 公式}}{\underset{\text{新积分无奇点了}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} -2dxdy = \frac{-2}{\epsilon^2} \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \frac{\epsilon}{2} = -\pi.$$

12. 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$$

解： $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 同时求导

$$xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$$

令 $t=1$，则 $xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=-2f(x,y)$. 记 $P=yf(x,y),Q=-xf(x,y)$，由

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-f(x,y)-xf_x(x,y),\quad \frac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf_y(x,y)$$

由先前得到的关系即知 $Q_x=P_y$. 从而对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)-xf(x,y)dy=0$.

13. 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：

(a) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$;

(b) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

解： (a) 左边 $=\int_0^\pi \pi e^{\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$，右边 $=\int_0^\pi \pi e^{-\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$，所以

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx.$$

(b) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2$，由 (a) 中的结论知

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge 2\pi^2.$$

14. 已知 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x,y)dx + x\cos y dy = t^2$，其中 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，求 $f(x,y)$.

> **解:** 由题意知积分与路径无关, 故 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial(x\cos y)}{\partial x} = \cos y$. 从而 $f(x,y) = \displaystyle\int \cos y\, dy = \sin y + C(x)$. 将它代入 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x,y)dx + x\cos y dy = t^2$，得
>
> $$t^2 = \int_{(0,0)}^{(t,t^2)} [\sin y + \varphi(x)]\, dx + x\cos y dy = \int_{(0,0)}^{(t,t^2)} d(x\sin y) + C(x)dx$$
>
> $$= (x\sin y)\Big|_{(0,0)}^{(t,t^2)} + \int_0^t C(x)\, dx = t\sin t^2 + \int_0^t C(x)\, dx$$
>
> 即得到 $\displaystyle\int_0^t C(x)\, dx = t^2 - t\sin t^2$，两边对 t 求导得 $C(t) = 2t - \sin t^2 - 2t^2\cos t^2$. 从而 $f(x,y) = \sin y + 2x - \sin x^2 - 2x^2\cos x^2$.

15. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,曲面 $S(t)$ 为半球 $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le t^2, z \ge 0\}$ 的表面, 它在 xOy 平面上的投影为 $D(t)$, $D(t)$ 的边界曲线为 $L(t)$, 并设对 $t>0$, 有

$$\oint_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}ds + \oiint_{S(t)} (x^2+y^2+z^2)dS = \iint_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma$$

求 $f(t)\,(t \ge 0)$ 的表达式.

> **解:** 记半球 $S(t)$ 的外表面为 $S_1 : x^2+y^2+z^2 = t^2, z \ge 1$；其底面记为 $S_2(t)$ 为其底面. 则
>
> $$\oint_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}ds = \int_0^{2\pi} f(t^2)t\cdot t d\theta = 2\pi t^2 f(t^2)$$
>
> $$\oiint_{S(t)} (x^2+y^2+z^2)dS = \iint_{S_1} (x^2+y^2+z^2)dS + \iint_{S_2} (x^2+y^2+z^2)dS =$$
>
> $$t^2\cdot 2\pi t^2 + \iint D(t)(x^2+y^2)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2)rdr = 2\pi\int_0^t f(r^2)rdr$$

根据题意，有 $2\pi t^2 f(t^2)+\frac{5}{2}\pi t^4 = 2\pi\int_0^t f(r^2)rdr$，即 $t^2f(t^2)+\frac{5}{4}t^4 = \int_0^t f(r^2)rdr$. 两边对 t 求导得 $f'(t^2)+\frac{1}{2t^2}f(t^2)=-\frac{5}{2}$. 令 $u=t^2$，则方程变为

$$f'(u)+\frac{1}{2u}f(u)=-\frac{5}{2}\quad\Longrightarrow\quad f(u)=e^{-\int\frac{du}{2u}}\left(C-\int\frac{5}{2}e^{\int\frac{du}{2u}}du\right)$$

$$=\frac{C}{\sqrt{u}}-\frac{5}{3}u\quad\Longrightarrow\quad f(t)=\frac{C}{\sqrt{t}}-\frac{5}{3}t$$

由于 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，所以 $\lim\limits_{t\to0^+}f(t)$ 存在，因此 $C=0$. 从而 $f(t)=-\frac{5}{3}t,\ t\geq 0$.

16. 对半空间 $x>0$ 内任意光滑有向闭曲面 S，有 $\oiint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0$，其中 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续可导，且 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$. 求 $f(x)$.

解： 取 S 的定向为外侧，其围成的区域记为 Ω，则由 Gauss 公式知

$$\iiint_\Omega\left[\frac{\partial(xf(x))}{\partial x}+\frac{\partial(-xyf(x))}{\partial y}+\frac{\partial(-e^{2x}z)}{\partial z}\right]dxdydz=0$$

故对 $\forall x>0$，有 $\frac{\partial(xf(x))}{\partial x}+\frac{\partial(-xyf(x))}{\partial y}+\frac{\partial(-e^{2x}z)}{\partial z}\equiv 0$. 即

$$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x},\quad x>0.$$

其通解是 $f(x)=e^{-\int(\frac{1}{x}-1)dx}\left(C+\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx}dx\right)$

$$=\frac{e^x}{x}\left(C+\int e^x dx\right)=\frac{e^x}{x}(C+e^x),\ x>0.$$

两边令 $x\to0^+$，且与题设 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$ 比较得 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x(C+e^x)}{x}=1$，故知 $C=-1$，即 $f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1),\ x>0$.

17. 设曲面积分 $\iint_S x^2zdydz+yz^2dzdx+xz^2dxdy$ 的值为 A，其中 S 是曲面 $z=x^2+y^2\,(z\le 1)$ 的第一卦限部分上侧. 求满足 $f(0)=A$，$f'(0)=-A$ 的 2 阶可导函数 $f(x)$，使得 $y\left(f(x)+3e^{2x}\right)dx+f'(x)dy$ 是某个二元函数的全微分.

解: 记 S 切下 yOz 平面, xOz 平面及平面 $z=1$ 的部分为 S_1（前侧），S_2（右侧）及 S_3（下侧），则 $\iint_S x^2zdydz+yz^2dzdx+xz^2dxdy=$

$$\iint_{S+S_1+S_2+S_3} x^2zdydz+yz^2dzdx+xz^2dxdy-\iint_{S_1} x^2zdydz+yz^2dzdx+xz^2dxdy$$

$$-\iint_{S_2} x^2zdydz+yz^2dzdx+xz^2dxdy-\iint_{S_s} x^2zdydz+yz^2dzdx+xz^2dxdy$$

记 Ω 为 S,S_1,S_2,S_3 所围区域，则由 Gauss 公式，得

$$\iint_S x^2zdydz+yz^2dzdx+xz^2dxdy=-\iiint_\Omega (4xz+2yz)\,dxdydz$$

$$=-\int_0^1 dz\iint_{x^2+y^2\le z;x,y\ge 0}(4xz+2yz)dxdy$$

$$=-\int_0^1 dz\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}(4zr\cos\theta+2zr\sin\theta)\,rdr=-\int_0^1 2z^{5/2}dz=-\frac{4}{7}.$$

在 S_1 上，$x=0$，故 $\iint_{S_1}=0$；同理，在 S_2 上，$y=0$，故 $\iint_{S_2}=0$；而在 S_3 上，其定向法向量为 $\mathbf{n}=(0,0,-1)$，故

$$\iint_{S_3} x^2zdydz+yz^2dzdx+xz^2dxdy=\iint_{S_3}(x^2z,yz^2,xz^2)\bullet(0,0,-1)\,dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1;x,y\ge 0} xz^2dxdy \xlongequal{S_3\text{上 } z=1} -\iint_{x^2+y^2\le 1;x,y\ge 0} xdxdy$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\cos\theta\cdot rdr=-\frac{1}{3}.$$

故 $A=-\frac{4}{7}+\frac{1}{3}=-\frac{5}{21}$.

由于 $y\left[f(x)+3e^{2x}\right]dx+f'(x)dy$ 是某个二元函数的全微分，所以

$$\frac{\partial f'(x)}{\partial x}=\frac{\partial\left(y(f(x)+3e^{2x})\right)}{\partial y}\quad\Longrightarrow\quad f''(x)-f(x)=3e^{2x}$$

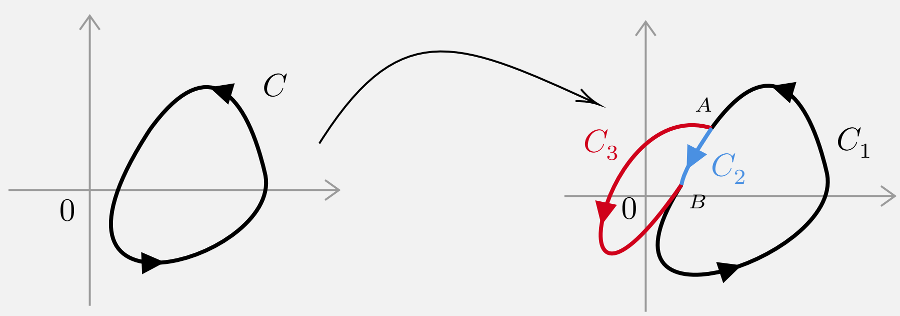
其通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^{2x}$，且 $f'(x)=C_1e^x-C_2e^{-x}+2e^{2x}$. 将 $f(0)=A=-\frac{5}{21}$, $f'(0)=-A=\frac{5}{21}$ 代入上两式得 $C_1=-\frac{3}{2}$，$C_2=\frac{11}{42}$. 所以 $f(x)=-\frac{3}{2}e^x+\frac{11}{42}e^{-x}+e^{2x}$.

18. 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(a) 证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有 $\oint_C\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$；

(b) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

解： 如图，用分点 A,B 将曲线 C 分为收尾相续的两部分 $C=C_1+C_2$，再在两个分点处接上一绕原点的简单闭曲线 C_3，它们的定向如图所示.



则 C_1+C_3 是绕原点的分段光滑简单闭曲线，由题设知

$$\oint_{C_1+C_3}\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=C$$

其中 C 是一常数. 但另一方面，C_3-C_2 亦是绕原点的一分段光滑简单闭曲线，从而在其上积分也等于常数 C. 故知

$$\oint_{C_1+C_3} - \oint_{C_3-C_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{C_1} + \int_{C_3} - \int_{C_3} - \left(- \int_{C_2} \right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{C_1} = - \int_{C_2} = \int_{-C_2}$$

由于 C 是右半平面内的任意分段光滑简单闭曲线，分点 A, B 的选择亦任意，从而知对右半平面 $x > 0$ 内的任意两点 A, B，路径积分 $\displaystyle\int_A^B$ 与沿接连 A, B 的路径上的积分与路径无关！

由 Green 定理的推论知：这等价于其沿右半平面内任意封闭简单的分段光滑曲线向的积分为 0.

(b) 由 (a) 中结论可推知：当 $x > 0$ 时，必成立

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy}{2x^2+y^4}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y)+\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}$$

对比即知

$$\begin{cases} \varphi'(y) = -2y \\ \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5 \end{cases}$$

由第一个式子两边对 y 积分得 $\varphi(y) = -y^2 + C$，将其代入第二个方程，得到

$$2y^5 - 4Cy^3 = 2y^5 \quad \Longrightarrow \quad C = 0$$

从而知 $\varphi(x) = -y^2$.