hw_3

必做题：

2. $\forall\alpha>0, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=?$ 证明你的论断。

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$

证明：$\forall\epsilon>0$，取 $N=\left\lfloor\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor+1$

当 $n>N$ 时，必有
$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\epsilon$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$

3. 利用夹逼定理计算 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ （其中 $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots5\cdot3\cdot1;$ $(2n)!!=(2n)(2(n-1))\cdots4\cdot2$）

解：
$0<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$

故由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0$

4. 设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}(a_i>0,i=1,2,\cdots,m)$, 证明$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$

解：因为 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$

所以
$A=(A^n)^{\frac{1}{n}}<(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}<(mA^n)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{m}\cdot A$

由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}A=A$ ，由夹逼定理知， $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$

5. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n^3+2n^2+1}+\frac{2^2}{3n^3+2n^2+1}+\cdots+\frac{n^2}{3n^3+2n^2+1}\right)$

解：$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n^3+2n^2+1}+\frac{2^2}{3n^3+2n^2+1}+\cdots+\frac{n^2}{3n^3+2n^2+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{3n^3+2n^2+1}\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^3+2n^2+1)}\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3})}\right]$

$= \frac{1\cdot 2}{6\cdot 3} = \frac{1}{9}$

6. 计算 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

解:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

7. 利用结论 $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(a) 计算下列个极限（提示：本质上是凑出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 这种结构，一般地，只要凑出 $\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}$ 就可以了，其中 $\square$ 是任意（正负）无穷大量）

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}; \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n \sin n}$$

解: 7. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right]^2 = e^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n \sin n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{(-1)^n \sin n}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{(-1)^n \sin n}{n}} = e^0 = 1$$

(b) 以 $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$ 为例说明上面提示中说明的合理性。

解: (b)

$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$
$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n}$
$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$
$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)$
$= e \cdot 1 = e$

由提示可知

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

故上面提示中说明合理。

8. 计算 $\lim_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}$

解： 8. 当 $n\to\infty$ 时，有

$$n^2-n+2\sim n^2$$

故

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(n^2)^{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2=\left(\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\right)^2=1^2=1$$

9. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}\right)$

解： 9. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}$

$=1$

10. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\right]$

解： $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}$

11. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

解： $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})$

$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2^{n+1}-1}})$

$=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}})\div(1-\frac{1}{2})$

$=\lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{2^{2^{n+1}-1}})$

$=2$

12. 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$

解：$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}$

$=\frac{1}{3}$

选做题：

1. 给定数列 $\{a_n\}$，$\forall m\in\mathbb{N}$，记 $S_m:=\sum_{k=1}^{m}a_k$，即 $S_1=a_1,\quad S_2=a_1+a_2,\quad S_3=a_1+a_2+a_3\cdots$

证明：如果 $\{S_m\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 是无穷小量。并举例说明，$\{a_n\}$ 是无穷小并不能保证 $\{S_n\}$ 的收敛。

解：证明：若 $\{S_n\}$ 收敛，设$\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha$

则$a_n=S_{n+1}-S_n$

两边取极限
$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}-\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha-\alpha=0$

故 $\{a_n\}$ 为无穷小量

举例：
$a_n=\frac{1}{n}$

$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$，为调和级数，是发散的，不收敛

2. 证明：若 $\lim_{n\to\infty}x_n=A$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=A$。

解：2. $\lim_{n\to\infty}x_n=A$

即 $\forall\epsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbb{N}$，s.t. $\forall n>N_1$，$|x_n-A|<\frac{\epsilon}{2}$

$\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-A\right|$

$=\left|\frac{(x_1-A)+\cdots+(x_n-A)}{n}\right|\leq\frac{|x_1-A|+\cdots+|x_n-A|}{n}$

将和式分为两部分：
$\frac{|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n}+\frac{|x_{N_1+1}-A|+\cdots+|x_n-A|}{n}$

对于第二部分：
$\frac{|x_{N_1+1}-A|+\cdots+|x_n-A|}{n}<\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2}<\frac{\epsilon}{2}$

对于第一部分：

取 $N_2=\max\left\{N_1,\frac{2(|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|)}{\epsilon}\right\}$

s.t. $\frac{|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n}<\frac{\epsilon}{2}$

故当 $n > N_2$ 时

$\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} - A\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

故 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = A$