作业　十二

1. 利用级数收敛的必要条件,证明:$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$; $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0.$

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 中有一个收敛,另一个发散,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 必发散. 若所给的两个级数都发散，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 是否必发散?

3. 若数列 $\{na_n\}$ 收敛，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛（$a_0=0$），则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛. （提示：“移形换位”）

4. 判断 $\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$ 的敛散性.（提示：不要忘记最基本的收敛必要性条件）

5. 判别下列级数的敛散性，并求出其中收敛级数的和.

   1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{6^n}$　　2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$　　3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n}$

   4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}$　　5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n$　　6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

6. 用积分判别法判别下列级数的敛散性.（须验证判别法适用条件）

   1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$　　2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$　　3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arctan n}{n^2+1}$　　4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(\ln n)}{n\ln n}$

7. 用比较判别法或比较判别法的极限形式判别下列级数的敛散性.

   1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(1+n)}$　　2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$　　3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$　　4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arctan n}{n}$

   5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$　　6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$　　7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}\ (a>0)$　　8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$

8. 设 $a_n>0, b_n>0$ 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$，则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

9. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，且有 $a_n \leq c_n \leq b_n$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛. 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的敛散性如何?

10. 证明下列命题（提示：利用比较法）:

   (a) 若 $a_n \geq 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

   (b) 若 $a_n \geq 0$ 且数列 $\{na_n\}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

   (c) 若 $a_n \geq 0$，$b_n \geq 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$（提示：利用 a)）

11. 设 $a_n \geq 0$, 则下列结论中正确的是哪一项? 给出论证. 若结论不正确, 请给出反例.

   (a) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

   (b) 若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

   (c) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

   (d) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

12. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性.

   1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^{n}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^{2}}$ 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2n\arctan\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b}\right)^{n}$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\,(a,b>0)$，且 $a\neq b$.

13. 证明：若 $a_n\geq 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 也收敛.（提示：利用比值法或根值法）

14. 用适当的方法判别下列级数的敛散性.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n}\sin\frac{\pi}{3^{n}}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2}n}{n\sqrt{n}}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n}$ $(a>0)$

15. 利用不等式 $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

16. 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1\cdot 2}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ 存在.（提示：将乘积转为求和，然后判定所得级数的敛散性）

17. 判别下列 (交错) 级数的收敛性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\frac{n}{n+1}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3n}{3+4n}\right)^{n}$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ $(a>0)$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin^{2}n}{n}$（提示：利用 *Abel* 或 *Dirichlet* 判别法）

18. 判断下列级数的收敛性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$$ (提示：利用 *Abel* 或 *Dirichlet* 判别法)

19. 设常数 $\lambda>0$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 绝对收敛.（提示：先放缩简化，然后参考第 *13* 题结论）

20. 设 $a_n=e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 条件收敛.（提示：利用 e^x 的泰勒展开后比较即可）

21. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一领域内具有二阶连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛. （提示：利用泰勒展开获得 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的二阶信息）

22. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $a_{n+1}\le a_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 试证：a） 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛；b) $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. （参考第 *13* 题）

23. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 1) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.（提示：回到级数收敛的原始定义，即利用部分和 S_n 的收敛性来讨论，“归并原理” 等）

下面是一些知识综合运用的题目，帮助大家在情景应用中进一步熟悉并整合知识线索。主线脉络要清晰，细节还需耐心磨，灵活机变莫迟疑。

24. 求曲线 $y=e^{-x}\sin x$ $(x\ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

25. 设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积，记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求 S_1 与 S_2 的值.

26. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$

    (a) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$ $(n=2,3,\cdots)$

    (b) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

27. 设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数，证明此方程存在唯一正实根 x_n，并证明当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

28. 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ $(n=2,3,\cdots)$ 证明：1) a_n 收敛；2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.（提示：整理表达式并利用放缩简化到可利用结论 *1)*）；3） 给出上级数的一个上界.

29. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$. 1) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+2}}{n}$ 的值；2) 证明：当 $\lambda>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.