

hw_12

1. 利用级数收敛的必要条件, 证明:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 0);$

解:

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

解:

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 中有一个收敛, 另一个发散, 证明级数必发散。若所给的两个级数都发散, 那么级数 是否必发散?

解:

(1) 令 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

若 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛

$$S_{n(a+b)} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_a + S_b$$

$$S_b = S_{n(a+b)} - S_{n(a)}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛

故与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 矛盾, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 发散

(2)

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0 \quad \text{收敛}$$

3. 若数列 $\{na_n\}$ 收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛 ($a_0 = 0$) , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛。 (提示: “移形换位”)

解:

$$\text{令 } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{n=1}^n n(a_n - a_{n-1}) \\ &= -a_0 + a_1 - 2a_1 + 2a_2 + \cdots - (n-1)a_{n-2} + (n-1)a_{n-1} - na_{n-1} + na_n \\ &= -a_0 - a_1 - \cdots - a_{n-1} + na_n \\ &= na_n - S_{n-1} \\ S_{n-1} &= na_n - T_n \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ 均存在, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

4. 判断

$\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \cdots$ 的敛散性。 (提示: 不要忘记最基本的收敛必要性条件)

解:

令该级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = b_n, \quad b_{n+1}^2 - 2 = b_n$$

对于 $\{b_n\}$, $b_1 < 2$, $b_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$

若 $b_n < 2$, 则 $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$

故 $b_n < 2$

又 $b_1 < b_2$

若 $b_{n-1} < b_n$, 则

$$b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} > \sqrt{2 + b_{n-1}} = b_n$$

故 $\{b_n\}$ 单调增加, 且 $b_n < 2$

故令 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$

$$B^2 - 2 = B \Rightarrow (B - 2)(B + 1) = 0 \Rightarrow B = 2$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2 - b_{n+1}}{2 - b_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2 - b_{n+1}}{2 + 2 - b_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2 + b_{n+1}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} < 1 \quad \text{故} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

5. 判别下列级数的敛散性，并求出其中收敛级数的和。

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{6^n}$$

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} + \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{n+3} \right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{2^n}$$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{故发散}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = +\infty \quad \text{故发散}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} \neq 0 \quad \text{故发散}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right)$$

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \sqrt{2} + 1 \right) \\ &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

6. 用积分判别法判别下列级数的敛散性。（须验证判别法适用条件）

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

解:

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_3^{+\infty} \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_3^{+\infty} = +\infty$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$$

解:

$$\begin{aligned} f(x) &= x e^{-x^2} \\ f'(x) &= e^{-x^2} + x e^{-x^2} (-2x) = (-2x^2 + 1) e^{-x^2} \\ \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} e^{-x^2} d(x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2e} \quad \text{收敛} \end{aligned}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$$

解:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\arctan x}{x^2 + 1} = \frac{1 - 2x \arctan x}{(x^2 + 1)^2} \\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx &= \int_1^{+\infty} \arctan x d(\arctan x) = \frac{1}{2} \arctan^2 x \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{\pi^2}{32} \quad \text{收敛} \end{aligned}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n \ln n}$$

解:

$$f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}$$

$$f'(x) = \frac{1 - (\ln x + 1) \ln(\ln x)}{x^2 \ln^2 x}$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx = \int_{\ln(\ln 5)}^{+\infty} \ln(\ln x) d(\ln(\ln x)) = \frac{1}{2} [\ln(\ln x)]^2 \Big|_5^{+\infty} = +\infty \quad \text{发散}$$

7. 用比较判别法或比较判别法的极限形式判别下列级数的敛散性。

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$$

解:

$$\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \text{ 发散}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

解:

$$\sin \frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n} \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n} \text{ 收敛}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$$

解:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ 收敛}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\arctan n}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$ 发散

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$ 发散

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 \left(1 + \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}} \right)$$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln^2(1 + \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}})}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}} \right) \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^2 = 0$$

收敛

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + a^{2n}} \quad (a > 0)$$

解:

① $a = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ 发散

② $0 < a < 1$:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^n}{1+a^{2n}}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \cdot a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n}}{1+a^{2n}} = 1 \quad \text{收敛}$$

③ $a > 1$:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^n}{1+a^{2n}}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n}}{1+a^{2n}} = 1 \quad \text{收敛}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{2} \ln n} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty \quad \text{故发散}$$

8. 设 $a_n > 0, b_n > 0$ 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散。

解:

$$\frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 存在且大于 0

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同收敛性

9. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 且有 $a_n \leq c_n \leq b_n$, 证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛。当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的敛散性如何?

解:

(1)

$$c_n - a_n \leq b_n - a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n) \text{ 收敛}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n + a_n) \text{ 收敛}$$

(2) 不一定, 发散与收敛均有可能

10. 证明下列命题（提示：利用比较法）：

(a) 若 $a_n \geq 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛。

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

(b) 若 $a_n \geq 0$ 且数列 $\{na_n\}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛。

解:

$$\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad na_n < M \Rightarrow a_n^2 < \frac{M^2}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2} \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 收敛}$$

(c) 若 $a_n \geq 0, b_n \geq 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 和

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 收敛。 (提示: 利用 (a))

解:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \text{ 收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + b_n)^2 - a_n^2 - b_n^2}{2}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

11. 设 $a_n \geq 0$, 则下列结论中正确的是哪一项? 给出论证。若结论不正确, 请给出反例。

(a) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

(b) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

(c) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$.

(d) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$.

解:

不正确

a)/ d) $a_n = \frac{1}{n \ln n}$

c) $a_n = \frac{1}{n^2}$

正确

b)

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

12. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性。

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n-1)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

发散

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = e \cdot 1 = e$$

故发散

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

收敛

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

收敛

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{3} - 1 \right)^n$$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{3} - 1) = 0$$

收敛

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{3}{e} \quad \text{发散}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(2n \arctan \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}}$$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n \arctan \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad \text{发散}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b} \right)^n, \text{ 其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a (a, b > 0), \text{ 且 } a \neq b.$$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b} = \frac{a}{b}$$

$a > b$ 发散

$a < b$ 收敛

13. 证明：若 $a_n \geq 0$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 也收敛。（提示：利用比值法或根值法）

解：

$$(a_n - n)^2 > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{n} < \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2n^2}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛

14. 用适当的方法判别下列级数的敛散性。

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$

解：

$$2^n \sin \frac{\pi}{3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

故收敛

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$

解：

$$\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

故收敛

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$

解：

$$\sqrt{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) < \frac{\pi^2}{2n^{3/2}}$$

故收敛

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$

解：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt[n]{n}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n + \frac{1}{n}}\right)^n \cdot \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2 + 1}\right)^n = 1$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{2} = +\infty$$

故收敛

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1} \right)^n \quad (a > 0)$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a$$

$$a \in [0, 1) \quad \text{收敛}$$

$$a = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} \quad \text{发散}$$

$$a > 1 \quad \text{发散}$$

15. 利用不等式 $\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$

证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散, 而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ 收敛。

解:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!} \text{ 发散}$$

$$\frac{(2n-3)!}{(2n)!} < \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}} \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!}{(2n)!} \text{ 收敛}$$

16. 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3} \right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 4} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n(n+1)} \right) \text{ 存在.}$$

(提示: 将乘积转为求和, 然后判定所得级数的敛散性)

解:

$$\text{令 } a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$a_n < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

故 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

原式 $= e^S$ 存在

17. 判别下列（交错）级数的收敛性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

1)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}$$

解：

由 6.(1) 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 发散

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

当 $n \geq 3$, $\frac{\ln n}{n}$ 单调减少

故 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}$ 收敛

故为条件收敛

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{n}{n+1}$$

解：

令 $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} < 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 收敛

又

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 发散

故为条件收敛

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

解：

令 $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

故 $\{a_n\}$ 单调减少

$$a_n = \sqrt{a_n^2} < \sqrt{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n-1) \cdot 2n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2n) \cdot (2n+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

$$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{(2n)!}$ 收敛

又 $a_n > \frac{1}{2n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

故为条件收敛

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-3n}{3+4n} \right)^n$$

解:

$$a_n = \left(\frac{3n-1}{4n+3} \right)^n$$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{4n+3} = \frac{3}{4}$$

故为绝对收敛

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{e}$$

故发散

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{a}{n} \right) \quad (a > 0)$$

解:

$$\text{令 } a_n = 1 - \cos \frac{a}{n} < \frac{a^2}{2n^2}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

故为绝对收敛

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

解:

$$\text{令 } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} < \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} < 1$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛

故为条件收敛

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} \quad (\text{提示: 利用 Abel 或 Dirichlet 判别法})$$

解:

$$\text{令 } a_n = (-1)^n \sin^2 n, b_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1 - \cos 2n}{2} = \frac{(-1)^n}{2} - \frac{(-1)^n \cos 2n}{2}$$

$$\sum_{n=1}^N a_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (-1)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos 2n$$

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n \text{ 有界}$$

$$\left| \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos 2n \right| \leq N \text{ 有界}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$$

对于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$:
 $\frac{1}{n}$ 单调减少且趋于 0,
 $\left| \sum_{k=1}^n \cos 2k \right|$ 有界

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$ 发散

故为条件收敛

18. 判断下列级数的收敛性, 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin \left(n\pi + \frac{1}{\ln n} \right)$

解:

$$\text{原式} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\ln n}$$

$$\text{令 } a_n = \sin \frac{1}{\ln n}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

又 $\{a_n\}$ 单调减少,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 故原级数收敛

故为条件收敛

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\pi \sqrt{1+n^2} \right)$

解:

$$\sin(\pi \sqrt{1+n^2}) = \sin \left(n\pi \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \right) = \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = (-1)^n \sin \left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2}$$

故发散

又 $\{a_n\}$ 单调递减且趋于 0

故原级数收敛

故条件收敛

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$ (提示: 利用 Abel 或 Dirichlet 判别法)

解:

$$\frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1 + \cos 2n}{2n}$$

由 17.(8) 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n} \text{ 收敛}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n} \text{ 发散}$$

19. 设常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$ 绝对收敛。 (提示: 先放缩简化, 然后参考第 13 题结论)

解:

由 13 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛

$$\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} < \frac{|a_n|}{n}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \text{ 绝对收敛}$$

20. 设 $a_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 条件收敛。 (提示: 利用 e^x 的泰勒展开后比较即可)

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\text{令 } f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) < 0$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

又

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2n}$$

故 $\{a_n\}$ 发散

故得证

21. 设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。 (提示: 利用泰勒展开获得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近的二阶信息)

解:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 = \frac{f''(\theta x)}{2}x^2$$

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| f''\left(\frac{\theta}{n}\right) \right| \cdot \frac{1}{2n^2}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 收敛

故为绝对收敛

22. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $a_{n+1} \leq a_n (n = 1, 2, \dots)$, 试证:

a) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛;

解:

$$S_n = a_1 - a_2 + 2a_2 - 2a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} - (n-1)a_n + na_n - na_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n - na_{n+1} < \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

又 $n(a_n - a_{n+1}) > 0$, 故 S_n 单调增加且有上界

故原级数收敛

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$. (参考第 13 题)

解:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ s.t. } \forall n \geq N, p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$$na_{2n} < \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \varepsilon \Rightarrow 2na_{2n} < 2\varepsilon$$

$$(2n+1)a_{2n} \leq (2n+1)a_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \cdot 2na_{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = 1 \Rightarrow \exists N_1 \geq 1 \text{ s.t. } \forall n \geq N_1, \frac{2n+1}{2n} \leq 2$$

$$(2n+1)a_{2n+1} \leq 4na_{2n} < 4\varepsilon$$

故综上, $na_n < 4\varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$$

23. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. (提示: 回到级数收敛的原始定义, 即利用部分和 S_n 的收敛性来讨论, “归并原理”等)

解:

$$S_{2N} = (u_1 + u_2) + \dots + (u_{2N-1} + u_{2N}) = \sum_{n=1}^N (u_{2n-1} + u_{2n})$$

故 $\{S_{2N}\}$ 收敛

$$S_{2N+1} = S_{2N} + u_{2N+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2N+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2N}$$

故 $\{S_{2N+1}\}$ 收敛

故 $\{S_n\}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

下面是一些知识综合运用的题目，帮助大家在情景应用中进一步熟悉并整合知识线索。主线脉络要清晰，细节还需耐心磨，灵活机变莫迟疑。

24. 求曲线 $y = e^{-x} \sin x$ ($x \geq 0$) 与 x 轴之间图形的面积。

解:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi}}{2} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)} \end{aligned}$$

25. 设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 所围成区域的面积，记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值。

解:

$$a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

令 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$S_2 + \ln 2 = 1 \Rightarrow S_2 = 1 - \ln 2$$

26. 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

(a) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$ ($n = 2, 3, \dots$)

解:

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 x^n (x-1) \sqrt{1-x^2} dx < 0$$

故 $\{a_n\}$ 单调减少

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 -\frac{1}{3} x^{n-1} d\left((1-x^2)^{3/2}\right) \\ &= -\frac{1}{3} x^{n-1} (1-x^2)^{3/2} \Big|_0^1 - \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} d\left(-\frac{1}{3} x^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} (n-1) x^{n-2} dx = \frac{n-1}{3} \int_0^1 (1-x^2) x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{n-1}{3} (a_{n-2} - a_n) \end{aligned}$$

故

$$a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$$

(b) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

解:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \\ \frac{n-1}{n+2} &< \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= 1 \end{aligned}$$

27. 设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数, 证明此方程存在唯一正实根 x_n , 并证明当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛。

解:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + nx - 1 \\ f'(x) &= nx^{n-1} + n > 0 \\ f(0) &= -1, \quad f(1) = n \\ \exists x_n &\in (0, 1) \text{ s.t. } f(x_n) = 0 \end{aligned}$$

故该方程存在唯一正实根 x_n

$$x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n^n < \frac{1}{n^2}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^n$ 收敛

28. 设 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明:

1) a_n 收敛;

解:

$$a_1 > 1$$

若 $a_n > 1$, 则

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) > 1$$

故 $\{a_n\}$ 有下界 1

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2} \left(a_n - \frac{1}{a_n} \right) < 0$$

故 a_n 收敛

2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛。(提示: 整理表达式并利用放缩简化到可利用结论 1));

解:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 &= \frac{2a_n}{a_n + \frac{1}{a_n}} - 1 = \frac{a_n - \frac{1}{a_n}}{a_n + \frac{1}{a_n}} < \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{1}{a_n} \right) = a_n - a_{n+1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) &= a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ 收敛

3) 给出上述级数的一个上界。

解:

由 (2), 为 1

$$29. \text{ 设 } a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx.$$

1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n}$ 的值;

解:

$$\begin{aligned} \frac{a_n + a_{n+2}}{n} &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) \, dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, d(\tan x) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

2) 证明：当 $\lambda > 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

解：

$$\frac{a_n}{n^\lambda} \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda}$$

令

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛