作业　一

必做题：

1. 写出命题 $p \Longleftrightarrow q$ 的真值表，其中 p, q 为任意命题.
2. 利用真值表，证明德摩根律

$$\begin{aligned} \neg(p \vee q) \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q \end{aligned}$$

3. 用逻辑符号（$\forall, \exists$ 等）严格写出下面命题，并写出其否定形式.
   (a) 非空数集 X 的最小值是 m.
   (b) f 是区间 (a, b) 上的单调增函数.
   (c) f 是区间 (a, b) 上的单调函数.
   (d) 当 n 趋于无穷大时，数列 a_n 的值趋于无穷大.
4. 利用数学归纳法证明 $(1+x)^n > 1+nx$,其中 $x > -1, x \neq 0, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.
5. 利用欧拉公式证明三角函数的加法公式.
6. 验证 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 和 $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
7. 写出尖点曲线 $y^2 = x^3$ 的一个参数方程描述.
8. 将下列隐函数方程曲线转化为参数方程曲线，并指出参数的变化范围.

$$a) \quad 4x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0; \qquad b) \quad e^y + y^3 + 2x = 1$$

9. 将下列曲线方程转化为极坐标方程，并指出 θ 的变化范围.

$$a) \quad x^2 - y^2 = 1; \qquad b) \quad (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = x^2 - y^2$$

10. 绘制下列极坐标方程表示的曲线的图形.

$$a) \quad r = a\theta \, (a > 0); \qquad b) \quad r = \tan\theta \sec\theta \qquad c) \quad r = a \cos 4\theta$$

选做题：

1. 迪利克雷（*Dirichlet*）函数定义为: $D(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 迪利克雷函数是否为周期函数? 如果是，其最小正周期是否存在?

2. 不通过求导，计算三次曲线 $y = x^3 + 2x + 3$ 在 $x = 1$ 处（即过点 $(1, 6)$）的切线方程.

3. 用归纳法证明：第 n 个素数 $p_n < 2^{2^n}$.

4. 对映射 T 及其逆映射 T^{-1}，证明有 $T \circ T^{-1} = I|_{R(T)}$；$T^{-1} \circ T = I|_{D(T)}$，其中 I 代表恒等映射，即满足 $I(x) = x, \forall x$ 的映射.

5. 写出命题“线性映射 $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是单射当且仅当：若 $T(x) = 0$，则 $x = 0$.”的逆否命题，并证明该命题.（提示：先证明对线性映射 T，必有 $T(0) = 0$，$T(-x) = -T(x)$）

6. 若 $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是线性映射，证明 T 是单射当且仅当 T 是满射.