作业 十一 解答

1. 讨论下列反常积分的敛散性，如果收敛求出它的值:

$$a)\ \int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x};\qquad b)\ \int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$$

$$c)\ \int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx;\qquad d)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}$$

$$e)\ \int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx;\qquad f)\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(4+x)}$$

解： a) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_e^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln|\ln x|\Big|_e^{+\infty}$ 发散.

$$b)\ \int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx=-\sin xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos xdx$$

$$=-\cos xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xdx=1-\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xdx$$

$$\Longrightarrow\quad\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin xdx=\frac{1}{2}$$

$$c)\ \int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}-\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty}=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx+\frac{\pi}{4}$$

$$=\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_1^{+\infty}+\frac{\pi}{4}=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big|_1^{+\infty}+\frac{\pi}{4}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

$$d)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}}\xlongequal{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tan\theta}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\theta}{2\cos^2\theta}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tan\theta\right)\sqrt{\frac{1}{2}(\tan^2\theta+1)}} = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta(1+\tan\theta)}$$

$$= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{d\beta}{\sin\beta}$$

$$= \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \ln\tan\frac{3\pi}{8} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$e)$ $$\int_0^a \frac{xe^{-x}dx}{(1+e^{-x})^2} = \frac{x}{1+e^{-x}}\Bigg|_0^a - \int_0^a \frac{dx}{1+e^{-x}} = \frac{a}{1+e^{-a}} - \int_0^a \frac{d(e^x+1)}{e^x+1}$$

$$= \frac{ae^a}{1+e^a} - \ln\left(1+e^x\right)\Bigg|_0^a = \frac{ae^a}{1+e^a} - \ln\left(1+e^a\right) + \ln 2$$

$$= \frac{ae^a-(1+e^a)\ln\left(1+e^a\right)}{1+e^a} + \ln 2 \qquad \Longrightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}dx}{(1+e^{-x})^2} = \lim_{a\to\infty} \frac{ae^a-(1+e^a)\ln\left(1+e^a\right)}{1+e^a} + \ln 2$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \frac{ae^a-(1+e^a)\ln e^a}{1+e^a} + \ln 2 = \lim_{a\to+\infty} \frac{-a}{e^a} + \ln 2 = \ln 2$$

$f)$ $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(4+x)} \overset{t=\sqrt{x}}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} \frac{2tdt}{(4+t^2)t} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$= \arctan\frac{t}{2}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

2. 判断下列反常积分的敛散性，如果收敛求出它的值:

$a)$ $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

$c)$ $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}}$

解： $a)\ \int_{-1}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}\xlongequal{y=1+x}\int_{0}^{1}\frac{y-1}{\sqrt{y}}dy=\int_{0}^{1}\sqrt{y}dy-\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{y}}$

$$=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}-2\sqrt{y}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$$

$$b)\ \int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int_{0}^{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\int_{0}^{1}\cdots+\int_{1}^{2}\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|x-3|-\ln|x-1|\right)\Big|_{0}^{1}+\left(\ln|x-3|-\ln|x-1|\right)\Big|_{1}^{2}$$

当 $x\to 1$ 时发散，故反常积分发散.

$$c)\ \int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\xlongequal{y:=\ln x}\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{dy}}{\sqrt{1-y^2}}=\arcsin y\Big|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}$$

$$d)\ \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{-x^2+x}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}\xlongequal{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}\cos\theta}{\frac{1}{2}\cos\theta}d\theta+\ln\left|2x-1+\sqrt{(2x-1)^2-1}\right|\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

3. 设 $k\in\mathbb{R}$，讨论 $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 的敛散性.

解： $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}\xlongequal{y=\ln x}\int_{\ln 2}^{+\infty}y^{-k}dy=\frac{y^{1-k}}{1-k}\Big|_{\ln 2}^{+\infty}$ 由此可见

- $k=1$，时发散.
- $k<1$ 时，由于 $\lim\limits_{y\to+\infty}y^{1-k}$ 不存在，故也发散.
- $k>1$ 时，收敛.

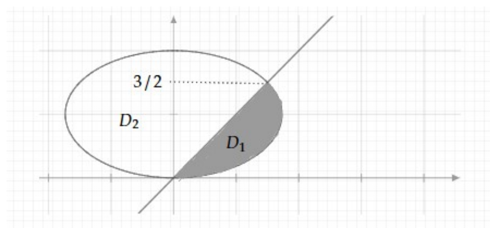
4. 求下列曲线所围成的图形的面积.

$$a)\ x^2+3y^2=6y \text{ 与直线 } y=x \text{ (两部分都要计算)}$$

$b)$ 抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的面积；

$c)$ 曲线 $y=e^x$ 与通过坐标原点的切线及 y 轴所围成的图形.

解： a) 曲线方程 $x^2+3y^2=6y$ 可写为 $\dfrac{x^2}{3}+(y-1)^2=1$，故所围椭圆的面积为 $\sqrt{3}\pi$.



见上图 D_1 的面积可通过积分 $I:=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{6y-3y^2}-y\right)dy$ 计算. 其中

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{6y-3y^2}dy=\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-(y-1)^2}dy \xlongequal{t=y-1}$$

$$\sqrt{3}\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt=\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t\right)\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}}y\,dy=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{8}.$$

因此

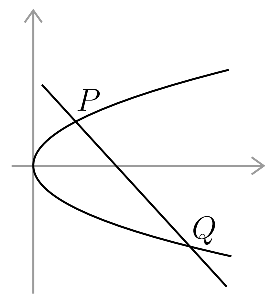
$$I=\left(\frac{3}{8}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{9}{8}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\frac{6}{8}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\frac{3}{4}.$$

而区域 D_2 的面积为 $\sqrt{3}\pi-I=\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}+\dfrac{3}{4}$.

b) 将 $y^2=2px$ 两边微分 $2ydy=2pdx$,代入点坐标 $Q\left(\dfrac{p}{2},p\right)$,并将 dx,dy 分别写为 $x-\dfrac{p}{2}$ 和 $y-p$, 则得到抛物线 $y^2=2px$ 上过点 Q 的切线方程:

$p(y-p)=p\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$, 即 $y=x+\dfrac{p}{2}$, 从而法线方程为 $y-p=-\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$, 即 $y=-x+\dfrac{3p}{2}$ 将其和 $y^2=2px$ 联立 $\begin{cases} y^2=2px, \\ y=-x+\dfrac{3p}{2}. \end{cases}$ 代入消元得

$$\left(-x+\frac{3p}{2}\right)^2=2px \quad \Rightarrow \quad x^2-5px+\frac{9p^2}{4}=0.$$



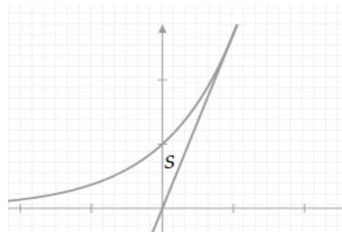
解得 $x=\dfrac{p}{2}$ 或 $x=\dfrac{9p}{2}$，对应地 $y=p$ 或 $y=-3p$. 故两交点为 $Q\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 和 $P\left(\dfrac{9p}{2},-3p\right)$. 故所求面积为

$$\begin{aligned}
S=S&=\int_{-3p}^{p}\left[\left(\frac{3p}{2}-y\right)-\frac{y^2}{2p}\right]dy=\left[\frac{3p}{2}y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6p}\right]_{-3p}^{p}\\
&=\left(\frac{3p}{2}\cdot p-\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{6p}\right)-\left(\frac{3p}{2}\cdot(-3p)-\frac{(-3p)^2}{2}-\frac{(-3p)^3}{6p}\right)\\
&=\left(\frac{3p^2}{2}-\frac{p^2}{2}-\frac{p^2}{6}\right)-\left(-\frac{9p^2}{2}-\frac{9p^2}{2}+\frac{27p^2}{6}\right)\\
&=\frac{5p^2}{6}-\left(-9p^2+\frac{9p^2}{2}\right)=\frac{5p^2}{6}+\frac{9p^2}{2}=\frac{16p^2}{3}.
\end{aligned}$$

由上两题知，用积分求面积（体积）的关键在于能画出草图，并由确定出积分区间．这一基本技能对下面各题及《高等数学 II》中的多重积分求解更是不可或缺的．请务必引起重视．

c) 由于 $dy=e^x dx$, 故过曲线上点 (x_0,y_0) 的切线方程为 $y-y_0=e^{x_0}(x-x_0)$，若切线经过原点，则 $-y_0=e^{x_0}(-x_0)$，即 $y_0=x_0e^{x_0}$，但另一方面

$e^{x_0} = y_0$，联立解得 $(x_0, y_0) = (1, e)$. 故所求切线方程为 $y - e = e(x-1)$，即 $y = ex$. 据此画出如下草图:

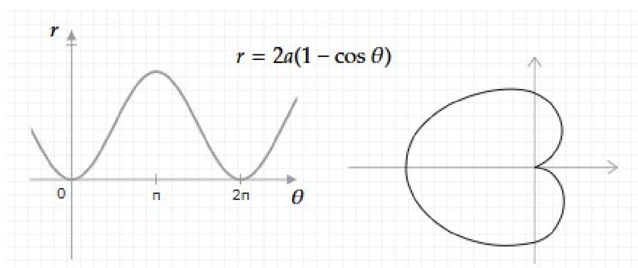


由此可知所求面积 S 计算为 $S = \int_0^1 (e^x - ex)\, dx = \left[e^x - \frac{ex^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1.$

5. 用两种方法计算心脏线所围成图形的面积

$a)$ 参数式：$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ ； $b)$ 极坐标下：$r = 2a(1 - \cos\theta)\ (a > 0)$

解: 在极坐标下画草图比较方便，如下:



有图在上，具体计算就不难了. 只需计算 $\theta \in [0, \pi]$ 对应曲线和射线 $\theta = 0, \theta = \pi$ 所围区域的面积，然后二倍之即可，即

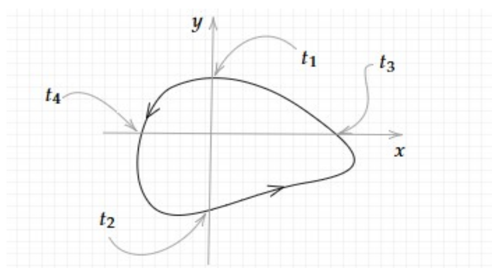
$$S = 2\int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^\pi 4a^2(1 - \cos\theta)^2\, d\theta =$$

$$= 4a^2 \int_0^\pi (1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta)\, d\theta = 4a^2 \int_0^\pi (1 + \cos^2\theta)\, d\theta = 4\pi a^2 +$$

$$+\ 4a^2\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta+1}{2}d\theta=4\pi a^2+2a^2\times\frac{\sin 2\theta}{2}\bigg|_0^{\pi}+2a^2\pi=6\pi a^2$$

我们知道：**曲线的极坐标表述，利用** $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ **自然诱导出一个参数化**，即 $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}$ 注意到 $x(t),y(t)$ 都是周期为 2π 的函数，故由其参数的曲线必是封闭的.

但这里的难点是对谁积分, 在什么范围积分可得到所围封闭图形的面积? 我们考虑一般情形, 设**封闭**曲线 $\mathcal{C}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $t\in[a,b]$, 且 $x(a)=x(b)$，$y(a)=y(b)$.



由上图，曲线 $\mathcal{C}$ 的面积可按下面两者方式计算

- 按 x 是 y 的函数分段处理, 则面积为 $S=\int_{y(t_2)}^{y(t_1)}xdy+\int_{y(t_2)}^{y(t_1)}(-x)dy$

$$=\int_{t_2}^{t_1}x(t)y'(t)dt+\int_{t_1}^{t_2}x(t)y'(t)dt=\int_a^b xdy$$

- 按 y 是 x 的函数分段处理, 则面积为 $S=\int_{x(t_4)}^{x(t_3)}ydx+\int_{x(t_4)}^{x(t_3)}(-y)dx$

$$=-\int_{t_3}^{t_4}y(t)x'(t)dt-\int_{t_4}^{t_3}y'(t)x'(t)dt=-\int_a^b ydx$$

综合可知 $\boxed{S=\frac{1}{2}\int_a^b xdy-ydx}$ 应用到我们的例子，则所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(2\cos t-\cos 2t)a(2\cos t-2\cos 2t)\ -$$

$$-\ a(2\sin t-\sin 2t)a(-2\sin t+2\sin 2t)]\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(2\cos t-\cos 2t)(\cos t-\cos 2t)dt+a^2\int_0^{2\pi}(2\sin t-\sin 2t)(\sin t-\sin 2t)dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}[3-3(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t)]\,dt=6\pi a^2-3a\int_0^{2\pi}\cos tdt=6\pi a^2$$

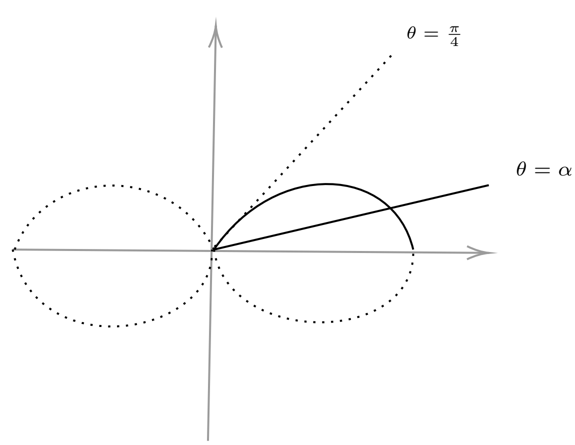
注： 上面面积公式是《高等数学 II》中曲线积分的格林公式的简单应用.

$$\frac{1}{2}\int_a^b xdy-ydx \xlongequal{\text{格林}} \frac{1}{2}\iint_D 2dxdy=\iint_D dxdy=Area\,(D)$$

其中区域 D 由封闭曲线 $\mathcal{C}$ 所围，$Area(D)$ 记其面积.

6. 求双纽线 $r^2=4\cos 2\theta$ 位于第一象限部分上求一点 M，使得坐标原点 O 与点 M 的连线 OM 将双纽线所围成的位于第一象限部分的图形分为面积相等的两部分.

解： 由 $\cos 2\theta\ge 0$ 解得 $2\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$，即 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.
第一象限对应 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$



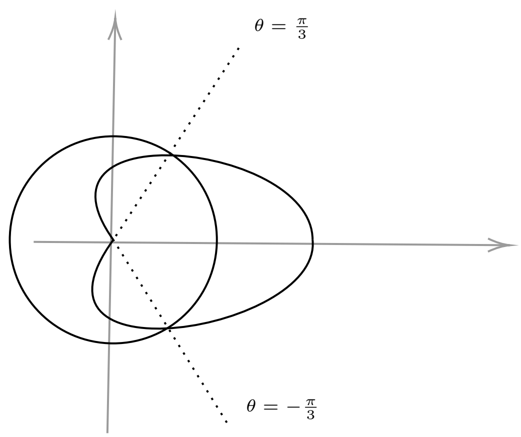
设射线 $\theta = \alpha$ 将第一象限中曲线和 $\theta = 0$ 围成的面积一分为二，则

$$\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta \quad \Longrightarrow \quad \sin 2\alpha = 1 - \sin 2\alpha$$

即知 $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$，故 $r^2 = 4\cos\dfrac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$，即 $r = \sqrt{2\sqrt{3}}$. 所求点 M 的极坐标为 $M\left(\sqrt{2\sqrt{3}}, \dfrac{\pi}{12}\right)$.

7. 求下曲线所围成的图形的公共部分的面积：$r = 3\cos\theta$，$r = 1 + \cos\theta$

解： $r = 3\cos\theta$ 描绘了圆心在原点，半径为 3 的圆，而 $r = 1 + \cos\theta$ 的图形是题 5 *b)* 中心脏线关于 y 轴（$\theta = \dfrac{\pi}{2}$）的镜面反射.



联立 $\begin{cases} r = 3\cos\theta \\ r = 1 + 3\cos\theta \end{cases}$，解得交点对应的极角为 $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$. 由上图，并由对称性，知所求公共部分面积为 $S = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos\theta)^2 d\theta = \dfrac{5\pi}{4}$.

8. 求由笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$ 所围图形的面积.

解： 令 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 代入原方程化简后得到笛卡尔曲线的极坐标方程如下

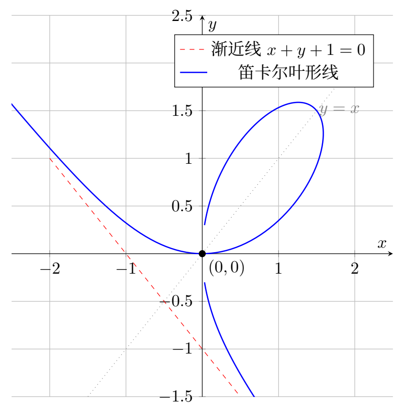
$$r = \frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$$

注意到 $r(\theta=0)=r\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，但当 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$r(\theta)\neq 0$，故知笛卡尔叶形线围成的面积对应 $\theta:\ 0\to\dfrac{\pi}{2}$. 从而所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)^2}d\theta$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}d\theta=\frac{3a^2}{2}\left[\frac{-1}{1+\tan^3\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a^2}{2}$$

或者利用 $y=tx$（即过原点的直线族）“扫射”曲线，即与曲线方程联立，解得曲线的参数方程为 $x=\dfrac{3t}{1+t^3},\quad y=\dfrac{3t^2}{1+t^3},\quad t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.



注意到原点对应参数 $t=0$，也对应 $t\to+\infty$，而渐近线对应 $t=-1$，故所求面积可计算为

$$S=\left|\int_0^{+\infty}x(t)y'(t)\,dt\right|=\left|\frac{3at^2}{1+t^3}\cdot\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}dt\right|$$

$$=9a^2\left|\int_0^{+\infty}\frac{3t^2}{(1+t^3)^3}dt-\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{(1+t^3)^3}dt\right|$$

$$=9a^2\left|-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t^3)^2}\bigg|_0^{+\infty}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+t^3}\bigg|_0^{+\infty}\right|=\frac{3a^2}{2}$$

9. 求下列各立体的体积:

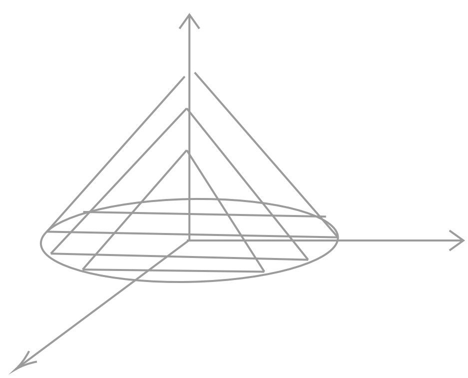
   (a) 以椭圆域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 为底面，且垂直于长轴的截面都是等边三角形的立体;

   (b) 由曲面 $y^2+z^2=e^{-2x}$ 与平面 $x=0, x=1$ 所围成的立体.

   解: a) 点 $(0,y)$ 的截面面三角形的边长为 $2a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}$，故截面面积为

$$S(y)=\frac{1}{2}\times 2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\ \times\ 2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=2a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$



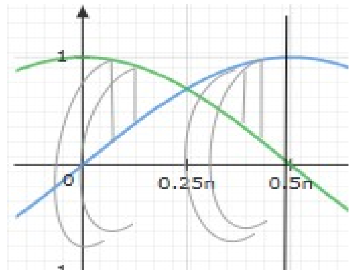
故由这些面积“堆叠”成的体积为 $V=\displaystyle\int_{-b}^{b}S(y)\,dy=$

$$\sqrt{3}a^2\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\sqrt{3}a^2\left(2b-\frac{y^3}{3b^2}\bigg|_{-b}^{b}\right)=\frac{4\sqrt{3}a^2b}{3}$$

10. 求下列各旋转体的体积:

   (a) 曲线 $y=\sin x$，$y=\cos x$ $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$，$x=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得到的旋转体;

   解: 如下草图所示



所求体积为 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\,d\theta$

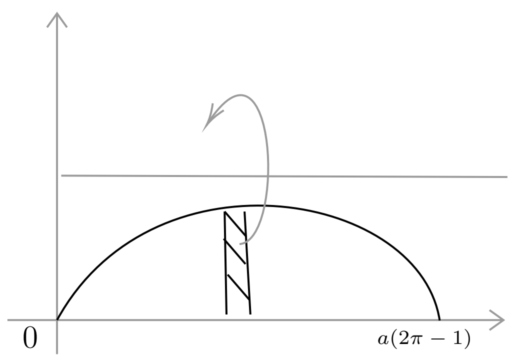
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,d\theta = \pi$$

(b) 摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$ 的第一拱（$0 \le t \le 2\pi$）与 x 轴所围成的图形绕直线 $y = 2a$ 旋转所得的旋转体.

解： 按下草图，所求体积为

$$V = \pi(2a)^2\,[a(2\pi - 1)] - \pi \int_0^{a(2\pi-1)} (2a - y)^2\,dx =$$

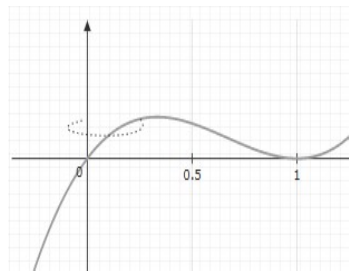
$$4\pi a^3(2\pi - 1) - \int_0^{2\pi} [2a - a(1 - \cos t)]^2\, a(1 - \cos t)dt = 7a^3\pi^2$$



11. 用“薄壳法”求下列各旋转体的体积:

(a) 由曲线 $y = x(x-1)^2$ 与 x 轴所围绕的图形绕 y 轴旋转所得到的旋转体.

解： 画出草图如下

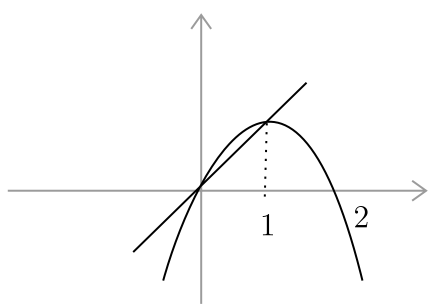


故所求体积为 $V = 2\pi \int_0^1 x f(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 x^2 (x-1)^2\, dx$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) dx = 2\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{15}$$

(b) 由抛物线 $y = 2x - x^2$ 与直线 $y = x$ 及 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得的旋转体.

解： 画出草图如下



所求体积 $V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x dx + 2\pi \int_1^2 x(2x - x^2) dx = \frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}.$

12. 求下列各旋转体的面积:

(a) 立方抛物线 $y = x^3$ 介于 $x = 0$ 与 $x = 1$ 之间的一段弧绕 x 轴旋转所得到的旋转面.

解： 曲线上的弧长微分为 $ds = \sqrt{1+(3x^2)^2}dx$，旋转面的面积微元为 $dS = 2\pi f(x)ds = 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx$，从而所求面积为

$$\int_0^1 dS = \int_0^1 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

(b) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转面.

解： 星形线有参数方程 $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ 故曲线上的弧长微分为

$$ds = \sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\,d\theta = \sqrt{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

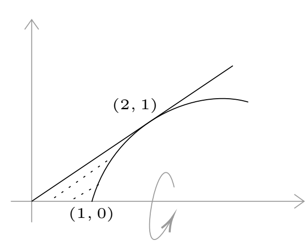
故所求旋转面面积为（考虑到对称性）

$$2\times 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(\theta)ds = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3\theta\times(3a\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\sin\theta = 12\pi a^2\frac{\sin^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12\pi a^2$$

13. 求抛物线 $y=\sqrt{x-1}$ 与它的通过坐标原点的切线及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的表面积.

解： $dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x-1}}$,故过 (x_0, y_0) 的切线方程为 $y-y_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)$. 令 $(x,y)=(0,0)$，得 $y_0 = \dfrac{x_0}{2\sqrt{x_0-1}}$，联立 $y_0=\sqrt{x_0-1}$，解得 $x_0=2$，$y_0=1$，从而所求切线方程为 $y-1=\dfrac{1}{2}(x-2)$，即 $y=\dfrac{1}{2}x$



该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体可分为三部分:

- 圆锥侧面：由切线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 在区间 $[0,1]$ 上绕 x 轴旋转生成.
- 抛物旋转面：由 $y=\sqrt{x-1}$ 在区间 $[1,2]$ 上绕 x 轴旋转生成.
- 圆形底面：在 $x=1$ 处，旋转体的截面是一个圆，半径为 $r=\dfrac{1}{2}$，该圆面为旋转体的一个底面.

(a) 圆锥侧面面积：弧长微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{d}x$，故旋转面面积为

$$S_1=2\pi\int_0^1 y\,\mathrm{d}s=2\pi\int_0^1\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi\sqrt{5}}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi\sqrt{5}}{4}.$$

(b) 抛物线旋转面面积：抛物线 $y=\sqrt{x-1}$ 的导数为 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$，弧长微分为 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{4x-3}}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$，从而旋转面积为

$$S_2=2\pi\int_1^2 y\,\mathrm{d}s=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\cdot\frac{\sqrt{4x-3}}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\,\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{1}{6}(4x-3)^{3/2}\right]_1^2=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

(c) 圆形底面面积：在 $x=1$ 处，截面圆半径 $r=\dfrac{1}{2}$，故 $S_3=\pi r^2=\dfrac{\pi}{4}$.

综上，旋转体总表面积为上面三部分面积之和，即

$$S=S_1+S_2+S_3=\frac{\pi\sqrt{5}}{4}+\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)+\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{12}\left(3\sqrt{5}+10\sqrt{5}-2+3\right)=\frac{\pi}{12}(13\sqrt{5}+1).$$

14. 计算下列各弧长：

(a) 曲线 $y=\ln(\cos x)$ 上从 $x=0$ 到 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 的一段弧长.

解： 所求弧长为 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+y'^2(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2}+1)$$

(b) 曲线 $x = \arctan t,\ y = \dfrac{\ln(1+t^2)}{2}$ 相应于 $0 \le t \le 1$ 的一段弧.

解: 所求弧长为 $\int_0^1 \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(1+t^2)^2} + \left(\frac{2t}{2(1+t^2)}\right)^2} dt$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

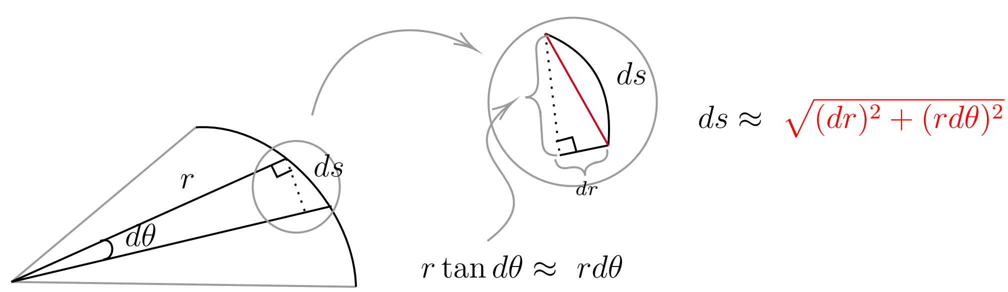
(c) 曲线 $\theta = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$ 相应于 $1 \le r \le 3$ 的一段弧.

解： 所求弧长为 $\int_r \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \int_1^3 \sqrt{dr^2 + r^2\left(\theta'(r)\right)^2 dr^2}$

$$= \int_1^3 \sqrt{1 + r^2\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\right]^2} dr = \int_1^3 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2} dr = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(r + \frac{1}{r}\right) dr$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{2} + \ln r\right)\Big|_1^3 = 2 + \frac{\ln 3}{2}$$



15. 设 $f\in C[0,1]$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$，并且满足关系式 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数)，又曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的图形 S 的面积为 2.

(a) 求函数 $f(x)$;

(b) 当 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积最小?

解： 有条件知 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{3a}{2}$，即 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{3a}{2}$，故知

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{3a}{2}x+C \quad\Longrightarrow\quad f(x)=\frac{3a}{2}x^2+Cx$$

由于 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{3a}{2}x^2+Cx\right)dx=\frac{3a}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1+C\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=2$，故

$$\frac{a}{2}+\frac{C}{2}=2 \quad\Longrightarrow\quad C=4-a$$

从而 $f(x)=\dfrac{3a}{2}x^2+(4-a)x$，故 S 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积为

$$V(a)=\int_0^1\pi(f(x))^2dx=\pi\int_0^1\left[\frac{9}{4}a^2x^4+3a(4-a)x^3\right.$$
$$\left.+\,(4-a^2)\,x^2\,\right]dx=\pi\left(\frac{a^2}{30}+\frac{a}{3}+\frac{16}{3}\right)$$

令 $V'(a)=\pi\left(\dfrac{a}{15}+\dfrac{1}{3}\right)=0$，$V''(-5)=\dfrac{\pi}{15}>0$，故 $a=-5$ 时体积取最小.