作业　十

1. 求下列定积分

$$a)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx;$$

$$c)\ \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x} dx;\ (\text{提示：倍角公式}) \qquad d)\ \int_0^3 x^2 [x] dx$$

$$e)\ \int_{-5}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}} \qquad f)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$$

2. 求下列定积分

$$a)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx; \qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx$$

$$c)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx; \qquad d)\ \int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2} dx$$

$$e)\ \int_0^1 x\sqrt{(1-x^4)^3} dx; \qquad f)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+\cos 2x}$$

3. 求下列定积分

$$a)\ \int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx; \qquad b)\ \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$$

$$c)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}; \qquad d)\ \int_0^1 \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}$$

$$e)\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}}; \qquad f)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$$

4. 求下列定积分

$$a)\ \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{2+\sqrt{4+x^2}}; \qquad b)\ \int_0^2 \frac{dx}{2+\sqrt{4+x^2}}$$

$c)$ $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\,(a>0)$; $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5. 设 $f\in C[0,+\infty)$，且 $\forall a,b>0$ 满足下不等式 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\le\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
证明：$F(x):=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 满足下不等式

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{F(a)+F(b)}{2}$$

即若 $f(x)$ 下凸，则 $F(x)$ 亦下凸.

6. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶连续导数. 证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$$

7. 设 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$，求 $f(x)$.
提示： $f(x)=\int f'(x)dx+C$，所以先求出 $f'(x)$ 的表达式

8. 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\displaystyle\int f(x)dx$.
提示： 同上题提示

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{1+x\sin x}$，求 $\displaystyle\int f(x)f'(x)dx$.

10. 曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(e,1)$，且在任一点的切线斜率为该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.（最简单的建立微分方程然后求解的类型）

11. 设 $(0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 分别满足下列条件，求 $f(x)$ 的表达式：

$$a)\ f(x)=\sin x+\int_0^\pi f(x)dx;\quad b)\ f(x)=2\ln x+x^2\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx$$

提示： 题目没说函数可导，所以两边求导不好使，但两边可以求积分啊

12. 计算 $\displaystyle\int_1^3 f(x-2)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\le 0\\ \frac{1}{e^x}, & x>0\end{cases}$

13. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{1+\tan t^2}$

提示： 直接尝试求出 $f(x)$ 的表达式是不利的，但 $f(x)$ 的导数立马可知，所以。。。

14. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上具有二阶连续导数，设 $f(0) = 2, f(\pi) = 1$，求 $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x dx$

15. 设 $f(x)$ 连续，满足 $f(1) = 1$，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{\arctan x^2}{2}$，求 $\int_1^2 f(x)dx$.

提示： 用变量替换先将积分转化为两边可以对 x 求导的形式

16. 设函数 $f(x)$ 在 $U(0)$ 可导,且 $f(0) = 0$,求极限 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n)dt}{x^{2n}}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$

提示： 见上题的提示

17. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A$（$A$ 为常数），记 $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$. 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

18. 求不定积分 $I_1 = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$ 和 $I_2 = \int \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$

19. 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$. 证明当 $n \geq 2$ 时，有

a) $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$; *b)* $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$; *c)* $\lim_{n\to\infty} (nI_n) = \frac{1}{2}$

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导，且 $f''(x) \geq 0\,(x \in [0, 1])$，证明：$\int_0^1 f(x^2)dx \geq f\left(\frac{1}{3}\right)$.

21. 设 $f \in C^{(1)}[a, b]$，求证 $\max_{a\leq x\leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f(x)dx \right| + \int_a^b |f'(x)| \, dx$