作业 四 参考答案

必做题：

1. 利用单调有界数列极限存在定理，证明下列数列极限的存在性.

   (a) $a_n = \dfrac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

   (b) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^n}$

   证明： $(a), (b)$ 中的数列显然都是单调增加的，下证它们都有上界，从而由单调有解收敛准则知两者的极限都存在.

$$a)\ a_n = \frac{3}{2^2} + \frac{5}{6^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < \frac{4}{2^2} + \frac{6}{6^2} + \cdots + \frac{2n+2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{2}{n^2(n+1)} < 1 + \frac{2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1} < 3$$

$$b)\ a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - 1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 2$$

   注： 如果知道级数 $1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$，则 *(b)* 中数列的有界性可按下证明

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2}{6}$$

   $\dfrac{\pi^2}{6}$ 显然是比 2 更精确的一个上界.

2. 证明下列递归数列收敛，并求其极限.

   (a) $a_1 > 0$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right) (n = 1, 2, \cdots)$

证明： 显然 $a_n > 0$，$\forall n > 0$. 利用 $A-G$ 不等式，可知

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \frac{1}{2} \times 2\sqrt{a_n \frac{1}{a_n}} = 1$$

从而 $\{a_n\}$ 有下界. 又考虑其前后两项之差，得到

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2a_n} - \frac{a_n}{2} = \frac{1-a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

由此可知 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，从而由单调有界收敛准则，知其收敛，设其极限值为 A. 递推式两边令 $n \to \infty$，并注意到 $A > 0$，得

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right) \quad \Longrightarrow \quad A = 1. \qquad \square.$$

(b) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n}{1+a_n}$，$n = 1, 2, \cdots$

证明： 显然 $a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n}{1+a_n} < 1 + \dfrac{a_n}{a_n} = 2$，故数列有上界，下证其单调增加.

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{a_n}{1+a_n} - a_n = -\frac{a_n^2 - a_n - 1}{1+a_n} = -\frac{\left(a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{a_n+1}$$

由于 $a_n < 2$，故 $a_{n+1} - a_n > 0$，即 $a_{n+1} > a_n$，从而 $\{a_n\}$ 单调增加. 综合便由单调有界收敛准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，记其值为 A. 在递推式两边令 $n \to \infty$，得到

$$A = 1 + \frac{A}{1+A} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{（负根舍去）} \qquad \square.$$

(c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{a_n}$, $n = 1, 2, \cdots$

分析： 首先易知 $a_n \geq 2$，$n = 1, 2, \cdots$. 故数列下界，此时很容易陷入尝试证明数列是单调减少的（“泥潭”），比如写出如下

$$a_{n+1} - a_n = 2 + \frac{1}{a_n} - a_n = -\frac{a_n^2 - 2a_n - 1}{a_n}$$

$$= -\frac{\left[a_n - (1+\sqrt{2})\right]\left[a_n - (1-\sqrt{2})\right]}{a_n}$$

但在随后我们需要估计 a_n 同 $1+\sqrt{2} \approx 2.41$ 的相对大小时陷入一筹莫展的境地. 貌似是失败的尝试，但也未必没有收获，比如你会知道若极限存在，则递推式两边令 $n \to \infty$，得到 $A = 2 + \dfrac{1}{A}$，即 $A = 1+\sqrt{2}$.

此时，你可能寻思，究竟是技术不够以至于无力证明其单调性，还是它本就不是单调的？你可能会尝试算一些项（在一筹莫展时应该这么做），比如 $a_1 = 2$, $a_2 = 2.5$，唉，好像增加了，再看 $a_3 = 2 + 1/2.5 = 2.4$，又减少了，$a_4 = 2 + 1/2.4 \approx 2.4167$，$\cdots$ 你突然恍然大悟，哦，不就是 *Fibonacci* 数列 $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ 前后两项之比的数列的模式吗？

你赶紧找到第一章讲义，翻到例 *6.7*，看到如下

例 *6.7* 由 $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = x_2 = 1$ 定义的数列称为是斐波拉切（*Fibonacci*）数列，记 $y_n := \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 为数列 $\{x_n\}$ 的增长率数列，则可证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在. 在此假设下，记极限为 y，则可按如下方式求解出 y.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{x_{n+1}}{x_n}},\text{ 即 } y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n},\ y_1 = 1$$

两边取极限，得 $y = 1 + \frac{1}{y} \implies y^2 - y - 1 = 0$，其正解为 $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$（即黄金分割数）. 我们尚需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 的存在性，才能确保上面计算的正确性.

为看出 y_n 的变化趋势，我们计算其前几项：$y_1 = 1$，$y_2 = 2$，$y_3 = 1.5$，$y_4 \approx 1.6666$，$y_5 \approx 1.6$，$y_6 \approx 1.625$ $\cdots$ 由此猜测

$$y_1 < y_3 < y_5 < \cdots \qquad y_2 > y_4 > y_6 > \cdots$$

即其奇数项数列单调增加，其偶数项数列单调减少. 下证之：$y_{2k+2} -$

$$y_{2k}=1+\frac{1}{y_{2k+1}}-y_{2k}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{y_{2k}}}-y_{2k}=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-y_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+y_{2k}\right)}{1+y_{2k}}.$$

断言： $y_{2k}>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **证明：** 用归纳法，$y_2=2>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，设 $y_{2k}>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，则对 $2(k+1)$，有

$$y_{2(k+1)}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{y_{2k}}}>1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\quad\square$$

故 $y_{2k+2}-y_{2k}<0$，即 $\{y_{2k}\}$ 单调减少. $\{y_{2k+1}\}$ 单调增加的证明是类似的，请大家自行完成. 特别地，由这些证明可知 $y_{2k+1}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 且 $y_{2k}>\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

由此可知：$\{y_{2k}\}$ 单调减少有下界，而 $\{y_{2k+1}\}$ 单调增加有上界，故它们都有极限，且极限是相同的，即 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. 下面的命题保证数列 $\{y_n\}$ 本身的极限存在且为 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

由此，你找到了新的探索方向，一转念，就从冥思苦想的不解，顿入“照猫画虎”的不屑，便轻松获得了问题的如下解答.

证明： 我们断言：数列的奇数项单调增加，而数列的偶数项单调减少. 下证之

$$a_{2k+2}-a_{2k}=2+\frac{1}{a_{2k+1}}-a_{2k}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{a_{2k}}}-a_{2k}$$

$$=\frac{2(1+2a_{2k}-a_{2k}^2)}{1+2a_{2k}}=-\frac{2\left(a_{2k}-(1+\sqrt{2})(a_{2k}-(1-\sqrt{2}))\right)}{1+2a_{2k}}$$

下证 $a_{2k}>1+\sqrt{2}$，从而上面的式子 <0，得到 $\{a_{2k}\}$ 单调减少的结论，且其有下界 2，故知偶数项子列 $\{a_{2k}\}$ 有极限.

$a_2=2+2.5>1+\sqrt{2}$，设 $a_{2k}>1+\sqrt{2}$，则

$$a_{2k+2}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{a_{2k}}}>2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\sqrt{2}$$

故由数学归纳法知 $a_{2k} > 1+\sqrt{2}$，$\forall k$. 再证奇数项数列 $\{a_{2k+1}\}$ 是单调增加有上界的.

$$a_{2k+3}-a_{2k+1}=2+\frac{1}{a_{2k+2}}-a_{2k+1}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{a_{2k+1}}}-a_{2k+1}$$

$$=\frac{2(1+2a_{2k+1}-a_{2k+1}^2)}{1+2a_{2k+1}}=-\frac{2\left(a_{2k+1}-(1+\sqrt{2})\right)\left(a_{2k+1}-(1-\sqrt{2})\right)}{1+2a_{2k+1}}$$

下面证明 $a_{2k+1}<1+\sqrt{2}$，由此不仅证明上式 >0，从而 $\{a_{2k+1}\}$ 单调增加，也证明了其有上界，故其收敛. 显然，$a_1=2<1+\sqrt{2}$，设 $a_{2k-1}<1+\sqrt{2}$，则

$$a_{2k+1}=2+\frac{1}{a_{2k}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{a_{2k-1}}}<2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\sqrt{2}$$

由数学归纳法完成证明. 从而 $\{a_{2k+1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 都有极限，故其极限必相等，设为 A. 递推式两边令 $n\to\infty$，知 $A=1+\sqrt{2}$. $\square$.

注记： 上面勾勒的解题情景是我理想中的，希望对大多数同学来说不是个梦幻图景. 但即便可以按此完成，你们或许会感慨这也太难了，如果想不起来怎么办？难道就没有它法了吗？当然不是. 首先，你已知道若极限存在，它必为 $A=1+\sqrt{2}$，对吧？而要证明 a_n 极限为 A，完全可以按最初定义的模式进行. 我们先按下估计（注意到：$a_n\geq 2$，且极限 $A>1$）$|a_n-A|=$

$$\left|\left(2+\frac{1}{a_{n-1}}\right)-\left(2+\frac{1}{A}\right)\right|=\left|\frac{a_{n-1}-A}{Aa_{n-1}}\right|\leq\frac{|a_{n-1}-A|}{2A}\leq\frac{|a_{n-1}-A|}{2}$$

把该放缩迭代下去

$$|a_n-A|\leq\frac{|a_{n-1}-A|}{2}\leq\frac{|a_{n-2}-A|}{2^2}\leq\cdots\leq\frac{|a_1-A|}{2^{n-1}}$$

即得到放缩 $0\leq|a_n-A|\leq\dfrac{\sqrt{2}-1}{2^{n-1}}$，由“夹逼定理”知 a_n-A 是无穷小，从而

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A=1+\sqrt{2}.\quad\square.$$

3. 请写出 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在的严格定义.

解: 以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在为例说明（$x \to -\infty$ 的情形类似）. 先写出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的严格定义. 即

$$\exists A \in \mathbb{R}，\text{使得 } \forall \epsilon > 0，\exists X > 0，\text{只要 } x > X，\text{就有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在的严格定义为: 或者 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, 即 $\forall M > 0$, $\exists X > 0$, 使得 $\forall x > X$, 成立 $|f(x) - M| > 0$; 或者 $f(x)$ 不以任意实数 A 为其极限, 即 $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists \epsilon_0$, 使得 $\forall X > 0$, $\exists x_0 > X$, 有 $|f(x_0) - A| \geq \epsilon_0$.

4. 用定义严格证明 $f(x) = \dfrac{x(x+3)}{(x-1)(x+2)}$ 在 $x = 1$ 处的左极限是 $-\infty$.

证明: 即需证明: $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $1 - \delta < x < 1$ 时, 成立 $f(x) < -M$.

当 $0 < x < 1$ 时, 设函数 $\dfrac{x(x+3)}{x+2}$ 的最小值为 $\lambda > 0$（无需明确求出其值）, 则当 $0 < x < 1$ 时, 若 $f(x) < \dfrac{\lambda}{x-1} < -M$, 则必有 $x > 1 - \dfrac{\lambda}{M}$.

由上分析, 可取 $\delta = \dfrac{\lambda}{M}$, 则当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时, 成立

$$f(x) < \frac{\lambda}{x-1} < -M \quad \text{从而 } \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty. \quad \square.$$

注记: 如想估计得更精确写，可将 x 的取值范围定在 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 内，则

$$\frac{x(x+3)}{x+2} = \frac{x(x+2+1)}{x+2} = x + \frac{x}{x+2} = x + 1 - \frac{2}{x+2}$$

显然是增函数，从而 $\dfrac{7}{10} < \dfrac{x(x+3)}{x+2} < \dfrac{4}{3}$，从而当 $1/2 < x < 1$ 时

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\frac{x(x+3)}{x+2} < \frac{7}{10}\frac{1}{x-1}$$

则当 $1/2 < x < 1$ 时，为使 $f(x) < -M$，只需 $\dfrac{7}{10}\dfrac{1}{x-1} < -M$，即

$$x > 1 - \frac{7}{10M}$$

故取 $\delta = \dfrac{7}{10M}$，则当 $x - 1 > -\delta$ 时，必有 $f(x) > -M$. $\Box$.

5. 用定义严格证明：$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-1}{x^2+3} = 2$.

证明: 即需证 $\forall \epsilon > 0$,$\exists X > 0$,使得当 $|x| > X$ 时,成立 $\left|\dfrac{2x^2-1}{x^2+3} - 2\right| < \epsilon$. 为此，我们估计如下，若

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2+3} - 2\right| = \frac{7}{x^2+3} < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |x| > \sqrt{\frac{7}{\epsilon} - 3}$$

由上，我们将 ϵ 限制于 $(0,1)$ 内，并取 $X = \sqrt{\dfrac{7}{\epsilon} - 3}$，则上面的分析表明，当 $|x| > X$ 时，必有 $\left|\dfrac{2x^2-1}{x^2+3} - 2\right| < \epsilon$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-1}{x^2+3} = 2 \quad \Box$.

6. 证明函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在点 $x = 0$ 的领域内无界，但当 $x \to 0$ 时，并非无穷大.

解: 由于当 $x \to 0$ 时, 因子 $\cos\dfrac{1}{x}$ 无限振荡, 导致 $f(x)$ 无极限. 严格说来, 取 $a_n = \dfrac{1}{2\pi n} \to 0$，$b_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$，但 $f(a_n) = 2\pi n \cos 2\pi n = 2\pi n$, $f(b_n) = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0$. 由海涅定理知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

下证 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的领域内无界. 即需表明：$\forall M > 0$，$\exists x_M \in \mathring{U}(0)$, 使得 $|f(x_M)| > M$. 为此我们分析如下

当 x 无限接近于 0 时, 固然 $\dfrac{1}{x}$ 也可无限大, 但问题是“振荡因子” $\cos\dfrac{1}{x}$ 会将其“抵消”（极限不存在的原因）. 但为表明其无界，我们可以控制 x 的取值范围，从而禁锢“振荡因子”的抵消效应，只保留 $\dfrac{1}{x}$ 的可无限大的特征.

令 $x=\dfrac{1}{\frac{\pi}{4}+2n\pi}$，控制 n 的取值可让其无限接近于 0，即 $x\in\mathring{U}(0)$. 这样取值的 x 将“振荡因子” $\cos\dfrac{1}{x}$ 的取值“禁锢”为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，则只需探讨何时 $f(x)>M$? 当 $x=\dfrac{1}{\frac{\pi}{4}+2n\pi}$ 时，若 $f(x)>M$，即

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)>M \quad\Longrightarrow\quad n>\frac{\sqrt{2}M-\frac{\pi}{4}}{2\pi}$$

由上分析 $\forall M>0$，取 $N_M=\left[\dfrac{\sqrt{2}M-\frac{\pi}{4}}{2\pi}\right]+1$，令 $x_M=\dfrac{1}{\frac{\pi}{4}+2N_M\pi}$，则

$$f(x_M)=\frac{1}{x_M}\cos\frac{1}{x_M}=\left(\frac{\pi}{4}+2N_M\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2N_M\pi\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}+2N_M\pi\right)>M \qquad \left(\text{由于 } N_M>\frac{\sqrt{2}M-\frac{\pi}{4}}{2\pi}\right) \qquad \square.$$

7. 求下列函数在指定点的左、右极限，并判断函数在该点处是否存在极限.

(a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ 在 $x_0=1$ 处.

解： $f(x)=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}=\dfrac{|x-1|}{x-1}$，由此可知当 $x<1$ 时，$f(x)=-1$，故 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1$；当 $x>1$ 时，$f(x)=1$，故 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$. 左右极限不限同，故 $f(x)$ 在 x_0 处的极限不存在.

(b) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 在 $x_0=0$ 处.

解： 易见 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$. 故 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$；另一方面，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$. 故

$$\lim_{x\to0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{2^{1/x}}}{1+\frac{1}{2^{1/x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

左极限 $\neq$ 右极限，故 $f(x)$ 在 x_0 处没有极限.

8. 对函数 $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$，证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. 并指出下面的计算错误在什么地方?

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = 0$$

解： 由于 $|f(x)| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$，故 $\forall\epsilon > 0$，取 $\delta = \epsilon$，则当 $0 < |x| < \delta$ 时，有

$$|f(x)| \leq |x| < \epsilon \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0. \quad \square.$$

只有当 $g(x), h(x)$ 在 x_0 的极限都存在时，才能应用

$$\lim_{x\to x_0}(g(x)h(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} h(x)\right)$$

否则可能得到错误的结果，即便计算结果碰巧正确，但也是不合法的.

上面计算的错误在于 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 的极限不存在（比如，取 $a_n = \frac{1}{2\pi n}$，$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$，则 $\sin\frac{1}{a_n} = \sin 2\pi n = 0$，$\sin\frac{1}{b_n} = 1$，故由"海涅定理"知，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 的极限不存在）.

9. 计算下面极限

$$a)\ \lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$$

$$c)\ \lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}; \qquad d)\ \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$$

解： a) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{x-2}{x-1} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{2x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x+x^2}\frac{x+x^2}{2x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x+x^2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{2}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{4}$$

c) $$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-8}\frac{\left(\sqrt{1-x}-3\right)\left(\sqrt{1-x}+3\right)}{(2+\sqrt[3]{x})\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=\lim_{x\to-8}\frac{-(x+8)}{(2+\sqrt[3]{x})\left(\sqrt{1-x}+3\right)}$$

$$\xlongequal{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}\lim_{x\to-8}\frac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+x^{2/3})}{\left(\sqrt{1-x}+3\right)(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+x^{2/3})}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{-(x+8)(4-2\sqrt[3]{x}+x^{2/3})}{(\sqrt{1-x}+3)(8+x)}$$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{-(4-2\sqrt[3]{x}+x^{2/3})}{\sqrt{1-x}+3}=\frac{-(4+4-4)}{3+3}=-\frac{2}{3}$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=a\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x+a}{x}}}=\frac{a}{2}$$

10. 计算下面极限

$$a)\ \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a};\qquad b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$c)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}};\qquad d)\ \lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$$

解： a)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a$$

注记： 本质上我们计算了 $(\sin x)'(a)=\cos a$.

b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x}\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x\sin x}-\cos x\right)\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x+x\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+2x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x\right)}=\frac{4\cdot1\cdot1+4\cdot1}{1\cdot(1+1)}=4$$

d) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}\xlongequal{t:=1-x}\lim\limits_{t\to0}t\tan\dfrac{\pi(1-t)}{2}=\lim\limits_{t\to1}t\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}$

$$=\lim_{t\to0}t\frac{\cos\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to0}\cos\frac{\pi t}{2}\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}\cdot\frac{2}{\pi}=1\cdot1\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

11. 计算下列极限

$$a)\ \lim_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x};\qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x};\qquad d)\ \lim_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$$

解： a) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left((1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}\right)^{-2}$

$$=\left(\lim_{x\to0}(1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}}\right)^{-2}=e^{-2}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{2}{x^2}+\cos\dfrac{1}{x}-1\right)\right)^{x^2}\xlongequal[\lim_{x\to\infty}\square=0]{\square:=\frac{2}{x^2}+\cos\frac{1}{x}-1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left((1+\square)^{\frac{1}{\square}}\right)^{x^2\square}$$

但 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\square = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2+x^2\cos\dfrac{1}{x}-x^2\right)$ 不存在，故上凑法不合适，需寻它途.（*c.f.* 第 *8* 题中的）

令 $t=1/x$，则原极限 $=\lim\limits_{t\to 0}\left(t^2+\cos t\right)^{\frac{1}{t^2}}$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\left(1+(t^2+\cos t-1)\right)^{\frac{1}{t^2+\cos t-1}}\right)^{\frac{t^2+\cos t-1}{t^2}}$$

$$= \left(\lim_{t\to 0}\left(1+(t^2+\cos t-1)\right)^{\frac{1}{t^2+\cos t-1}}\right)^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2+\cos t-1}{t^2}}$$

$$= e^{1+\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}} = e^{1+\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\right)^x = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right)^{\frac{x}{-x^2}}}$

$$= \frac{1}{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{-x}}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} \xlongequal{t:=\sqrt{x}} \lim\limits_{t\to 0^+}(\cos t)^{\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{t\to 0^+}\left((1+\cos t-1)^{\frac{1}{\cos t-1}}\right)^{\frac{\cos t-1}{t^2}}$

$$= \left(\lim_{t\to 0^+}(1+\cos t-1)^{\frac{1}{\cos t-1}}\right)^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

选做题：

1. 求 $\{a_n\}$ 的极限，其中 $a_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$， $n=1,2,\cdots$.

   解：

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1!+2!+\cdots+(n+1)!}{(n+1)(1!+2!+\cdots+n!)} = \frac{3+3!+\cdots+(n+1)!}{(n+1)+(n+1)2!+\cdots+(n+1)!}$$

   当 $n>2$ 时，分母的每一项大于或等于分子的对应项，因此 $\{a_n\}$ 当 $n>2$ 后是单调减少的，且显然 0 是其一下界，故由单调有界收敛准则

知其收敛. 为计算其值，我们做如下恒等变形

$$a_{n+1} = \frac{1! + 2! + \cdots + n! + (n+1)!}{(n+1)!} = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+1)n!} + 1 = \frac{a_n}{n+1} + 1$$

递推式两边令 $n \to \infty$，并设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，得到 $A = 0 + 1 = 1 \quad \square$.

2. 给定两个正数 a 和 b，且有 $0 < b < a$. 令 $a_0 = a$, $b_0 = b$，并按递推公式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

定义数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$. 证明这两个数列收敛于同一个极限（但不需求出极限值）.

证明: 由于 $0 < b_0 < a_0$，结合 $A - G$ 不等式，得到 $b_0 < b_1 < a_1 < a_0$. 如此迭代下去，不难得知（建议利用数学归纳法严格写出）

$$b_0 < b_1 < \cdots < b_n < a_n < \cdots < a_1 < a_0$$

由此可知, 数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界 b_0, 同时 $\{b_n\}$ 单调增加有上界 a_0, 故两者都有极限，其值分别记为 A，B. 下证 $A = B$.

在递推式 $a_n = \dfrac{a_{n+1} + b_{n-1}}{2}$ 两边令 $n \to \infty$，得到 $A = \dfrac{A+B}{2}$，解得 $A = B$；或在递推式 $b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$ 两边令 $n \to \infty$，得到 $B = \sqrt{AB}$，同样得到 $A = B$. $\square$.

注记: 称上面的极限为 a, b 的算术几何平均值，记为 $AG(a, b)$，高斯计算出其值为

$$AG(a,b) = \frac{\pi}{2G}, \text{ 其中 } G = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$$

而 G 也是著名的椭圆积分（*elliptic integral*）的一种变体.

3. 证明: $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0\,(a > 1)$.

证明: 需证 $\forall \epsilon > 0$, $\exists X > 0$, 使得当 $x < -X$ 时，成立 $a^x < \epsilon$. 这样的 X 的取法可由下分析得来:

由于 $a>1$，式子 $a^x<\epsilon$ 两边取以 a 为底的对数，得 $x<\log_a\epsilon$.

不妨设 $0<\epsilon<1$，从而 $\log_a\epsilon<0$，取 $X=-\log_a\epsilon>0$，则当 $x<-X$ 时，即 $x<\log_a\epsilon$，成立 $a^x<\epsilon$. $\square$.

4. 用定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

证明： 由和差化积，得 $\sin x-\sin x_0=2\cos\dfrac{x_0+x}{2}\sin\dfrac{x-x_0}{2}$，从而

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$<2\times\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|$$

故 $\forall\epsilon>0$，取 $\delta=\epsilon$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，由上知

$$|\sin x-\sin x_0|<|x-x_0|<\epsilon\quad\Longrightarrow\quad\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0\quad\square.$$

5. 考虑数列 $x_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

(a) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\sin x}{x}$ （提示：利用 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$）

证明： $x_n\sin\dfrac{x}{2^n}=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\sin\dfrac{x}{2^n}\cos\dfrac{x}{2^n}$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2^2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}}=\cdots=\frac{1}{2^n}\sin x$$

即

$$x_n=\frac{\frac{\sin x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\quad\Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{x/2^n}{\sin x/2^n}=\frac{\sin x}{2}\qquad\square.$$

(b) 证明 *Vieta* 公式：$\dfrac{2}{\pi}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}\cdots$ （提

示：利用 $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta}$ 及 $\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}$)

证明： 在上面公式中令 $x=\frac{\pi}{2}$，则知

$$\frac{2}{\pi}=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cos\frac{\pi}{2^4}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\xlongequal{\text{由提示中的公式}}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$