第一章：实数连续性定理，数列极限

目录

第一章：实数连续性定理，数列极限

1 上（下）确界，实数系连续性定理

定义 1.1 我们说一个集合 E 是数集如果它是 $\mathbb{R}$ 中的子集.

定义 1.2 给定一个非空集合 $E \subseteq \mathbb{R}$

1. 如 $\exists M \in \mathbb{R}$,使得 $\forall x \in E$，有 $x \le M$，则称 E 是有上界的（*bounded above*），且称 M 是 E 的一个上界（*upper bound*）;
2. 如 $\exists m \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall x \in E$，有 $x \ge m$，则称 E 是有下界的（*lower bounded*），且称 m 是 E 的一个下界（*lower bound*）.
3. 若 E 同时有上界和下界，则称 E 为有界（*bounded*），反之，则称 E 是无界（*unbounded*）的. 换言之，$\exists \overline{M} > 0$，使得 $\forall x \in E$，有 $|x| \le \overline{M}$，此时称 $\overline{M}$ 为数集 E 的一个界（*bound*）.

显然，若 E 有上界 M，则上界不唯一，因为任何大于 M 的数都是 E 的上界；同理对下界，若其存在则必不唯一.

例 1.1 自然数集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ 有下界（任何负数都是其下界），但无上界. 它是无界集.

例 1.2 $E = \{x \mid x^2 \le 2\}$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 中是有界的，任何大（小）于 $\sqrt{2}$ $(-\sqrt{2})$ 的有理数都是其上（下）界. 注意到，在 $\mathbb{Q}$ 中，该数集没有最大数和最小数，但在 $\mathbb{R}$ 中，其最大数和最小数是存在的，即 $\max E = \sqrt{2}$；$\min E = -\sqrt{2}$.

例 1.2′ 考虑有界数集 $E = \{x \mid x^2 < 2\}$. 它在 $\mathbb{R}$ 中没有最大数和最小数，但我们可证明：它在 $\mathbb{R}$ 中存在如下定义的上确界和下确界.

定义 1.3 给定非空数集 $E \subseteq \mathbb{R}$，若 $\exists \beta \in \mathbb{R}$ 满足

1. $\forall x \in E$，有 $x \le \beta$，即 β 是 E 的一个上界;
2. $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E$，使得 $x_\epsilon > \beta - \epsilon$，即 β 是 E 所有上界中最小的一个上界.

则称 β 是 E 的上确界（*supremum*），记为 $\beta = \sup E$.

注记 1.1 $\beta = \sup E$ 意味着：任何小于 β 的数（即 $\forall \epsilon > 0$, $\beta - \epsilon$）都不再是 E 的上界，也就是说，存在 E 中的数 x_ϵ 大于 $\beta - \epsilon$.

上确界也称为最小上界（*least upper bound*）.

相应地，对有下界的数集 E，可定义其下确界（*infimum*），或最大下界（*greatest lower bound*）.

定义 1.3′ 若非空数集 E 有下界，则其下界 $\alpha \in \mathbb{R}$ 称为 E 的下确界当且仅当任何大于 α 的数不再是 E 的下界，即 $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E$，使得 $x_\epsilon < \alpha + \epsilon$. 记为 $\alpha = \inf E$.

注记 1.2 如数集 E 有最大数，则 $\max E = \sup E$；如有最小数，则 $\min E = \inf E$.

命题 1.1 如果非空数集 E 的上（下）确界存在，则其必唯一.

证明: 我们对上确界的唯一性加以证明，下确界的情形类似可证. 假如 $\sup E$ 不唯一，可设 $\beta \neq \beta'$ 是 E 的两不同上确界，则根据上确界的定义，有 $\beta \leq \beta'$，且 $\beta' \leq \beta$，故 $\beta = \beta'$ □

例 1.3 设 $E = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$，则 $\min E = \inf E = 0$；但 E 中无最大数，这是因为，如果 $\gamma = \max E \in E$ 存在，则 $0 \leq \gamma < 1$，且 $\forall x \in E$ 都有 $x \leq \gamma$，但我们可取数 $\gamma' = \frac{\gamma+1}{2} \in E$，然而 $\gamma' > \gamma$. 矛盾，故 E 中不存在最大数.

断言: $\sup E = 1$.

证明: 首先 1 是 E 的一个上界，我们只需表明它是 E 的最小上界. 如果不是，即存在 $\gamma \in \mathbb{R}$ 是比 1 更小的上界，也即，$\gamma < 1$，且 $\forall x \in E$，都有 $x \leq \gamma$. 但如果存在这样的 γ，则 $E \ni \gamma' = \frac{\gamma+1}{2} > \gamma$. 矛盾，故 1 是 E 的最小上界，即 $\sup E = 1$. □

注记 1.3 对上断言可按照定义 *1.3* 的文法结构直接（不用反证法）的证明如下：

首先，$\forall x \in E$，都有 $x < 1$，即 1 是 E 的一个上界. 只需证明：$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in E$，使得 $x_\epsilon > 1 - \epsilon$. 不难看出，取 $x_\epsilon = 1 - \frac{\epsilon}{2}$ 即满足条件. □

例 1.4 考虑数集 $E = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right\}$，我们证明 $\sup E = 1$.

证明: $\forall n, \dfrac{n}{n+1} < 1$,故 1 是 E 的一个上界,下证明 $\forall \epsilon > 0, \exists k$,使得 $\dfrac{k}{k+1} > 1 - \epsilon$.

分析: 我们反推，看该如何得到满足条件的 k. 如果 $\frac{k}{k+1} > 1 - \epsilon$ 成立，则有

$$\frac{k}{k+1} = \frac{k+1-1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} > 1 - \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k+1} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad k+1 > \frac{1}{\epsilon}$$

也就是说，只要取自然数 k 使得 $k+1 > \frac{1}{\epsilon}$，条件即可满足.

故取 $k = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$（$[\frac{1}{\epsilon}]$ 表示不超过 $\frac{1}{\epsilon}$ 的最大整数），则 $k > \frac{1}{\epsilon}$，即 $\frac{1}{k} < \epsilon$，从而

$$\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} > 1 - \frac{1}{k} > 1 - \epsilon \qquad \square$$

注记 1.4 另证（反证法）：我们证明 1 是 E 的最小上界，假设不是，即存在 $\beta < 1$，使得 $\forall n$，有 $\frac{n}{n+1} \leq \beta < 1$. 但下分析表明：可取 k，使得 $\frac{k}{k+1} > \beta$，由此知假设不成立，从而 1 是最小上界. k 的选取分析如下：

要使 $\frac{k}{k+1} > \beta$ 成立，则需 $1 - \frac{1}{k+1} > \beta$，即 $k+1 > \frac{1}{1-\beta}$. 由此知，可取 $k = \left[\frac{1}{1-\beta}\right]$.

回到例 *1.2'* 的讨论，可证 $E=\{x\mid x^2<2\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有上确界 $\sup E=\sqrt{2}$.

证明： $\forall x\in E$，有 $x^2<2=(\sqrt{2})^2$，故 $x<\sqrt{2}$，由此知 $\sqrt{2}$ 是 E 的一个上界，下证它是最小的（唯一）上界，即 $\sup E$. 假设 $\beta<\sqrt{2}$ 是 E 的上界，则 $\beta^2<2$，且 $\forall x\in E$，有 $x\le\beta$. 则对 $\gamma:=\frac{\beta+\sqrt{2}}{2}$，一方面，下面的计算表明 $\gamma\in E$

$$\gamma^2=\left(\frac{\beta+\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\beta^2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\beta+\frac{1}{2}<\frac{2}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}=2$$

但另一方面，由于 $\gamma-\beta=\frac{\beta+\sqrt{2}}{2}-\beta=\frac{\sqrt{2}-\beta}{2}>0$，故 $\gamma>\beta$. 但这与 β 是上确界的假设相矛盾，故假设不成立，从而 $\sqrt{2}$ 是 E 的上确界. $\square$

由于上确界存在必唯一，我们看出：仅局限于 $\mathbb{Q}$ 中是没法找到上面数集 E 的上确界的（其直接的证明见附录一），但在 $\mathbb{R}$ 中，$\sup E=\sqrt{2}$ 是存在的.

事实上，下面的确界存在定理表明：任何有界数集在 $\mathbb{R}$ 中总存在上确界. 从直观上来看，这表明实数集 $\mathbb{R}$ 和“连续延展”的数轴是可对等的. 换言之，实数集 $\mathbb{R}$ 中无“空隙”，故也称 $\mathbb{R}$ 为连续统（*continuum*）. 因为如果有空隙，设空隙处标记的数应是 α，则数集 $\{x\in\mathbb{R}\mid x<\alpha\}$ 是没有上确界的.

注记 1.5 $\mathbb{Q}$ 不能填满整个数轴，它里面的空隙很多很多（虽然 $\mathbb{Q}$ 本身稠密）. 上例表明：$\sqrt{2}$ 就是其中一个空隙，因为 $\{x>0\mid x^2<2\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中无上确界（但在 $\mathbb{R}$ 中存在上确界）. 直观上来看，就是 $\sqrt{2}$ 分割了 $\mathbb{Q}$ 中以下两个集合

$$A:=\{x\in\mathbb{Q}\mid x<0\}\cup\{x\in\mathbb{Q}\mid, x\ge 0\text{ 且 }x^2<2\}$$

$$B:=\{x\in\mathbb{Q}:x>0\text{ 且 }x^2>2\}$$

显然 $\mathbb{Q}=A\cup B$，且 A 中任意元素都小于 B 中任意元素，即 A 和 B 将 $\mathbb{Q}$ 一分为二. 另外，易见 A 中无最大数，B 中无最小数. 局限于 $\mathbb{Q}$ 中是无法找到 $\sup A=\inf B=\sqrt{2}$ 的，即 Q 中有空隙——分割点. 反之，可用分割点的位置来标记由 $\mathbb{Q}$ 的分割 (A,B) 所界定的数，由此，用这种方式从有理数“创造”出无理数出来，即得到实数连续统. 这种将有理数扩充为实数的方法最早是由数学家戴德金（*Dedekind*）开创的，故此方法被称作是戴德金分割法.

我们可以用有理数集的上（下）确界来定义无理数，比如，可将圆周率 π 定义为 $sup\,E$，其中 $E=\{3,3,14,3,141,1.1415,\cdots\}$

下定理表明上（下）确界的定义是合理和有必要的，即

定理 1.1 （确界存在定理，或实数系连续性定理）$\mathbb{R}$ 中非空有上（下）界的数集必有上（下）确界.

为证明该定理，我们先回忆一下实数的（无限）小数表示.

任何一个实数都可表示成其整数部分和其小数部分的和的形式，即

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ 有\ x = [x] + (x)$$

比如，对 $x = \sqrt{2}$，$[\sqrt{2}] = 1$，$(\sqrt{2}) = 0.414213562373\ \cdots$

再如，$\frac{4}{3} = 1 + 0.33333\ \cdots$

对有限小数，比如 1.213，我们将其看成是 $1.213000\ \cdots$

由此，我们可将任意实数用无限小数的形式表示出来，即 $x = [x] + (x)$，其中

$$(x) = 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \qquad a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$$

亦即

$$x = [x] + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots$$

注意上面是个无限和，即级数（*series*），本质上需要极限的概念才能明确其涵义，但极限的定义又依赖于先有全体实数的概念，否则，如数列 $\{1, 1.4, 1.41, 1.412, 1.4123, \cdots\}$ 的极限（上确界）是什么我们都将无从知晓.

所以将实数定义为无限小数会涉及到循环论证（*circular argument*），且在表示实数方面，它有表示不唯一的缺陷：

$$0.999\cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = 1$$

即规定无限小数 $0.a_1 a_2 \cdots (a_p - 1)999\cdots\ (a_p \neq 0)$ 与无限小数 $0.a_1 a_2 \cdots a_p 000\cdots$ 是相等的. 但要说明等同的合理性，本质上仍需极限的定义，而极限运算（确界）又依赖于实数系这个“舞台”的存在.

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots = \sup\left\{\frac{9}{10}, \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}, \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3}, \cdots\right\}$$

则有

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= \frac{9}{10}\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{10}} \xlongequal{n\to\infty} \frac{9}{10}\frac{1}{9/10} = 1$$

虽然实数的无限小数表示本质上涉及极限，即有界实数集的确界存在，故下论证涉嫌循环论证，但它能让我们对定理的合理性有一直观认识，自有其（启发）价值.

定理 1.1 的（非严格）证明: 由上面的讨论，可知任意数集 E 可由一个确定的无限小数的集合来表示，即

$$\{a_0 + 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots \mid a_0 = [x],\, 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots = (x),\, x \in E\}$$

如 E 有上界，则 E 中所有数对应的诸 a_0 中必有最大者，记之为 α_0. 由此得到 E 的子集 $E_0 := \{x \in E \mid [x] = \alpha_0\}$. 显然，$E_0$ 非空，且 $\forall\, x \in E$，只要 $x \notin E_0$，则 $x < \alpha_0$.

再考虑 E_0 中所有数对应的诸 a_1 中的最大者，记为 α_1. 并记 $E_1 := \{x \in E_0 \mid x\,\text{的第一位小数为}\,\alpha_1\}$. 显然，$E_1$ 是 E_0 的非空子集，且 $\forall\, x \in E$，只要 $x \notin E_1$，则有 $x < \alpha_0 + 0.\alpha_1$.

继续该操作，一般地，考虑 E_{n-1} 中所有数对应诸 a_n 中的最大者，记之为 α_n，并记 $E_n := \{x \in E_{n-1} \mid x\text{ 的第 } n \text{ 位小数为 } \alpha_n\}$. 显然 E_n 是 E_{n-1} 的非空子集，且 $\forall\, x \in E$，只要 $x \notin E_n$，则有 $x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$.

由此，我们得到了一系列非空数集

$$E \supseteq E_0 \supseteq E_1 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq \cdots$$

及一系列数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots$ 满足：$\alpha_0 \in \mathbb{Z}$；$\alpha_k \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}, \forall k \in \mathbb{N}_+$

令 $\beta = \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$ 则不难猜出 $\beta = \sup E$. 下证之

1. $\forall x \in E$，或者 $x \in E_n, \forall\, n \geq 0$；或者 $\exists\, n_0 \geq 0$，使得 $x \notin E_{n_0}$.

   (a) 如 $x \notin E_{n_0}$，则 $x < \alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n_0} \leq \beta$;

   (b) 如 $\forall n$ 有，$x \in E_n$ （即 $x \in \cap_n E_n$），则 $x = \beta$.

   无论哪种情况，都有 $x \leq \beta$，故知 β 是 E 的一个上界.

2. 现在证明 β 是最小的上界, 即上确界. 即需证明: $\forall \epsilon > 0, \exists\, x_0 \in E$, 使得 $x_0 > \beta - \epsilon$. 这是容易的, 只需取足够大的 n_0 使得 $\frac{1}{10^{n_0}}$ 小于事先给定的 ϵ, 然后任取 $x_0 \in E_{n_0}$, 则由 E_{n_0} 的构造，知 β 与 x_0 的整数部分及前 n_0 位小数都是相同的，由此可知

$$\beta - x_0 \leq \frac{1}{10^{n_0}} < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad x_0 > \beta - \epsilon \qquad \square$$

2 数列及其单调性、有界性

定义 2.1 一个数列（*sequence*）$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是正整数集 $\mathbb{Z}_{>0}$ 上的函数，即映射

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R} \quad n \longmapsto x_n$$

其中 x_n 称为该数列的通项或一般项（*general term*）. 在这个数列中，第一项是 x_1，第二项是 x_2，···, 第 n 项是 x_n 等等. 常将 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 简写为 $\{x_n\}$.

有时，我们也考虑常数列（*constant sequence*），即每一项都是常数 C 的数列.

注记 2.1 不同于数集，其中的元素不计次序，数列中元素的顺序是非常关键的.

定义 2.2 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $\forall n$，有 $x_{n+1} \geq x_n\,(x_{n+1} > x_n)$，则称 $\{x_n\}$ 是单调增加（严格单调增加）数列；反之，若 $\forall n$, 有 $x_{n+1} \leq x_n\,(x_{n+1} < x_n)$，则称 $\{x_n\}$ 是单调减少（严格单调减少）数列.

定义 2.2 若数列 $\{x_n\}$ 满足：$\exists M > 0$ 使得 $\forall n$，都有 $|x_n| \leq M$，则称 $\{x_n\}$ 是有界数列. 类似地，可给出有上（下）界的定义.

注记 2.2 数列是函数的特例，故上面对数列单调性和有界性的定义也是对一般函数单调性和有界性定义的特例. 设 f 是定义在 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的函数, 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)\,(f(x_1) < f(x_2))$, 则称 f 在 I 上单调增加（严格单调增加）; 同理可定义（严格）单调减少的概念. 又若 $\exists M \in \mathbb{R}$，使得 $\forall x \in I$，有 $f(x) \leq M$，则称 f 在 I 上有上界，且 M 是其一上界；同理可定义有下界的概念. 如果 f 在 I 上既有上界又有下界，则称其在 I 上有界，即 $\exists \overline{M} > 0$，使得 $\forall x \in I$，使得 $|f(x)| \leq \overline{M}$.

如果数列的一般项可写成 $a_n = f(n)$ 的形式，其中 f 是 $\mathbb{R}$ 上的函数（或至少是 $[1, +\infty)$ 上的函数），则如 f 单调，则 $\{a_n\}$ 亦单调. 比如 $\{\ln n\}$ 为（严格）单调增，$\{\frac{1}{n}\}$ 为（严格）单调减. 数列 $\{(-1)^n\}$ 不单调，但有界.

例 2.1 研究数列 $\{\sqrt[n]{a}\}\,(a > 1)$ 的单调性和有界性. 注意到 $\sqrt[n]{a} = f(n)$，其中 $f(x) = \sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$. 易见 $f(x)$ 对 $x > 0$ 是单调减少的，故 $\{\sqrt[n]{a}\}$ 是单调减少数列，事实上，它是严格单调减少的. 另一种证明方法是，记 $x_n = \sqrt[n]{a}$，由于 $x_n > 0, \forall n$，我们通过研究 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 与 1 的相对大小来判定单调性:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{-\frac{1}{n(n+1)}} = (a^{-1})^{\frac{1}{n(n+1)}} < 1$$

由此可见 $\{x_n\}$ 严格单调减少. 进而有：$1 < x_n < x_1 = a$，故该数列有界.

例 2.2 研究数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的单调性和有界性. 记 $x_n=\sqrt[n]{n}$，比较前后两项

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}=\frac{(1+n)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}}=\frac{(1+n)^{\frac{1}{n}\frac{n}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}}$$

为简化，考虑

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\frac{(1+n)^{\frac{n}{n+1}}}{n}=\left(\frac{(1+n)^n}{n^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

由此可见

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n<1 \;\Leftrightarrow\; \frac{(1+n)^n}{n^{n+1}}<1 \;\Leftrightarrow\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$$

回忆 **A-G 不等式:** 对正数 x_i，我们有

$$\boxed{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}$$

即 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的算术平均 $\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ 不小于其几何平均 $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$.

利用 *A-G* 不等式，有

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq\left(\frac{n+1+2/\sqrt{n}}{n+2}\right)^{n+2}$$

由上可知,当 $n>4$ 时,上面不等式右边开始严格 <1,即当 $n>4$ 时,有 $x_{n+1}<x_n$. 故数列 $\{x_n\}$ 从 $n=5$ 开始严格减少. 另外，由于 $\ln x_n=\frac{\ln n}{n}<1$，故 $x_n<e$. 从而数列有界.

例 2.3 研究序列 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的单调性和有界性.

$$0<x_n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\leq\ 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

故 $\{x_n\}$ 有界. 下面研究其单调性，利用 A-G 不等式，有

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\leq\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=x_{n+1}$$

故其严格单调增加.

有些数列由迭代生成，即它的通项满足递归关系：$x_{n+1}=f(x_n)$

例 2.4 $x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ 重}}$. 两边求平方，得 $x_n^2=2+x_{n-1}$，即 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$. 下面我们说明，x_n 是严格单调增加，且有界.

$$x_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}>\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+0}}}=x_n$$

$$0<x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\leq\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2}}}=2$$

例 2.5 设数列 $\{x_n\}$ 由递归公式 $x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$, $x_1>0$ 给出. 注意到

$$1<x_2=1+\frac{x_1}{1+x_1}<1+1=2$$

设 $1<x_k<2$，则对 $n=k+1$，有

$$1<x_{k+1}=1+\frac{x_k}{1+x_k}<1+1=2$$

故由数学归纳法知数列 $\{x_n\}$ 有界. 再考虑

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

即 $\forall n\geq 2$，$x_{n+1}-x_n$ 的符号是相同的，从而得知数列 $\{x_n\}$ 单调.

3　数列的极限

在数列 $\{x_n\}$ 中, 当 n 越来越大时, 如 x_n 同某个数 A 越来越接近, 我们可用 x_n 来逼近 A. 比如在实数的无限小数表示下，数列 $x_1 = 3, x_2 = 3.1, x_3 = 3.14, x_4 = 3.141, \cdots$ 的值随着 n 的增加，越来越接近于圆周率 π 的值. 即当 n 增加时，逼近的误差 $\pi - x_n$ 变得越来越小.

分析 I 我们再以先前的等式 $0.9999\cdots = 1$ 为例说明，由于 $0.999\cdots$ 可看成是下面的序列当 n 越来越大时的极限情形

$$x_1 = \frac{9}{10},\, x_2 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100}, \cdots,\, x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k},\, \cdots$$

显然，由于

$$x_n = \frac{9}{10} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

从而可见，当 n 足够大时，x_n 同 1 在数轴上的距离 $|x_n - 1| = \frac{1}{10^n}$ 无限接近于零.

但如何能精确地表达这里所说的“无限接近于零”的含义? 即，我们希望探寻出合适的数学语言，使得它既可以量化“接近”的程度，又能体现出可“无限”接近这一动态过程. 为此，我们分析如下:

- 如希望逼近的误差 (接近的程度) $|x_n - 1| = \frac{1}{10^n} < 0.1$, 取 $N = 1$, 则 $\forall n > N = 1$, 有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10} = 0.1$;
- 如希望 $|x_n - 1| = \frac{1}{10^n} < 0.01$, 取 $N = 2$, 则 $\forall n > N = 2$, 有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10^2} = 0.01$;
- 一般地，如希望 $|x_n - 1| = \frac{1}{10^n} < 0.\underbrace{0\cdots00}_{k-1}1$，取 $N = k$，则 $\forall n > N = k$，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10^k} = 0.\underbrace{0\cdots00}_{k-1}1$.

换言之，$\forall \epsilon > 0$ (即要让它多小就能让它取的多小)，总存在 N，使得当 $n > N$ 时，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10^N} < \epsilon$.

不难看出，对预先给定的数 ϵ，取 $N = [\log_{10} \frac{1}{\epsilon}] + 1$ 即可.

分析 II 为确信上面的分析具有一般性，我们再考察数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$. 直观上来说，当 n 越来越大时，n 和 $n+1$ 的量级相当，这导致其商可无限接近于 1 (或 $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$，而 $\frac{1}{n}$ 可无限接近于零）. 考虑逼近的误差 $|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1}$

- 为使 $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$，取 $N = 9$，则 $\forall n > N = 9$ 时，有 $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{9+1} = \frac{1}{10}$;

- 为使 $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^2}$，取 $N = 99$，则 $\forall n > N = 90$ 时，有 $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{99+1} = \frac{1}{10^2}$；
- 一般地，为使 $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^k}$，取 $N = \underbrace{99\cdots9}_{k}$，则 $\forall n > N = \underbrace{99\cdots9}_{k}$ 时，有 $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\underbrace{99\cdots9}_{k}+1} = \frac{1}{10^k}$

换言之，$\forall \epsilon > 0$（即要让它多小就能让他取的多小），总存在 N，使得当 $n > N$ 时，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10^N} < \epsilon$.

不难看出，对预先给定的数 ϵ，取 $N = [\frac{1}{\epsilon} - 1] + 1$ 即可.

定义 3.1 对数列 $\{x_n\}$，若 $\exists$ 数 A，$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$，则称 $\{x_n\}$ 的极限（*limit*）为 A，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛（*convergent*），且收敛于（*convergent to*） A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$（或者 $x_n \to A\,(n \to \infty)$）. 若不存在这样的常数 A，则称数列 $\{x_n\}$ 无极限，也称其发散（*divergent*）或不收敛.

直观上来看，就是说：无论 $\epsilon > 0$ 取得多么小，即数轴上对应的以 A 为中心，ϵ 为半径的领域（*neighborhood* ） $U(A, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - A| < \epsilon\}$ 多么小，总存在一项 x_N，使得其后所有项 $\{x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots\}$ 全部落入领域 $U(A, \epsilon)$ 之内.

上面分析 *I* 表明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

该结论可推广为

例 3.1 当 $|q| < 1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析： 为使 $|q^n - 0| = |q|^n < \epsilon$，需 $n > \log_{|q|} \epsilon$. 故取 $N = [\log_{|q|} \epsilon]$，则当 $n > N$ 时，有 $n > \log_{|q|} \epsilon$，从而 $|q^n - 0| > \epsilon$. 注意，为避免 $N = [\log_{|q|\epsilon}] < 0$ 的情形，需 $0 < \epsilon < 1$. 而当 $\epsilon > 1$ 时，对任意 n，都有 $|q^n| < 1 < \epsilon$.

证明： $\forall \epsilon > 0$（不妨设为 $\epsilon \leq 1$），存在 $N = [\log_{|q|} \epsilon]$，使得当 $n > N$ 时，有 $n > \log_{|q|} \epsilon$，即当 $n > N$ 时，$|q^n - 0| = |q|^n < \epsilon$. $\square$

上面分析 *II* 表明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

例 3.2 常数列 $x_n = c, \forall n$ 的极限是 c. 这是因为：$\forall \epsilon > 0,$ 当 $n > 1$ 时，有 $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$.

例 3.3 对数列 $\{n^3\}$，当 n 增大时，n^3 可任意地大，故不存在 A 使得与它越来越接近，故该数列无极限，或说它发散到无穷，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$.

例 3.4 数列 $\{(-1)^n\}$ 的值当 n 变大时，在 ± 1 之间横跳，故不存在固定的 A 与之无限接近，所以它是发散数列.

下面的命题表明：若极限存在，则其必唯一.

命题 3.1 如 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$，则 $A = B$.

证明： 假设 $A \neq B$，不妨设 $A > B$，并记 $\epsilon = \frac{A-B}{2}$，则 $\exists N_1$，使得当 $n > N_1$ 时，$|x_n - A| < \epsilon$，即有

$$x_n > A - \epsilon = \frac{A+B}{2}$$

又 $\exists N_2$，使得当 $n > N_2$ 时，$|x_n - B| < \epsilon$，即有

$$x_n < B + \epsilon = \frac{A+B}{2}$$

故取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，同时有

$$x_n > \frac{A+B}{2}, \quad x_n < \frac{A+B}{2}$$

矛盾，从而知假设 $A \neq B$ 不成立，故原结论成立. $\square$

注记 3.1 利用三角不等式：$||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$，可给出上命题的下面证明：

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_1, \text{使得} n > N_1 \text{时，有} |x_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{且} \exists N_2, \text{使得} n > N_2 \text{时，有} |x_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

则对 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，上两不等式同时成立，然后结合三角不等式，得

$$|A - B| = |A - x_n + x_n - B| \leq |x_n - A| + |x_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

由于 ϵ 选取的任意性（即可取得任意小），故上不等式的存在说明 $A = B$.

定义 3.2 极限为 0 的数列 $\{x_n\}$ 称为无穷小量（*infinitesimal*），简称 x_n 为无穷小（*infinite small*）.

比如 $\{\frac{1}{n^k}\}$ $(\forall\, k > 0)$ 是无穷小量；$\{\frac{1}{10^k}\}$ $(\forall\, k > 0)$ 是无穷小量；

注记 3.2 无穷小量不是数，它是一个过程量，即极限为零的数列.

例 3.5 $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 是无穷小量，这是因为

$$x_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

分析: 为便于证明, 我们适当放缩, $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. 由此, 为使 $|x_n - 0| = x_n < \epsilon$，只需 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$，但这是容易求解的，只要 $n > N := [\frac{1}{\epsilon^2}]$.

证明: $\forall \epsilon > 0$，取 $N = [\frac{1}{\epsilon^2}]$，则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - 0| = x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

从而得证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

命题 3.2 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 当且仅当 $\{x_n - A\}$ 是无穷小量.

证明: " $\Rightarrow$ " 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}$，使得当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$，即 $|x_n - A - 0| < \epsilon$. 这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - A) = 0$.

" $\Leftarrow$ " 如果 $\{x_n - A\}$ 是无穷小量，则 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall\, n > N$，有 $|x_n - A| < \epsilon$，亦即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. $\square$

命题 3.3 若 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是无穷小，则 $\{x_n \pm y_n\}$ 也是无穷小.

证明: $\forall \epsilon > 0$，$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$\begin{aligned}&\text{当}\, n > N_1 \,\text{时，有}\, |x_n| < \tfrac{\epsilon}{2}\\ &\text{当}\, n > N_2 \,\text{时，有}\, |y_n| < \tfrac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，由三角不等式，知

$$|x_n \pm y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = 0$ $\square$

命题 3.4 若 $\{x_n\}$ 是无穷小，且 $\{y_n\}$ 为有界数列，则 $\{x_n y_n\}$ 也是无穷小.

证明: 由于 $\{y_n\}$ 有界，即 $\exists M > 0$，使得 $\forall n$，有 $|y_n| \le M$. 又由于 $\{x_n\}$ 是无穷小，故 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$，使得 $|x_n| < \frac{\epsilon}{M}$. 则当 $n > N$ 时，有

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \le |x_n|M < \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon \qquad \square$$

按照定义，$\{(-1)^n\}$ 和 $\{e^n\}$ 都没有极限，但两者又有区别，前者在不同值之间跳

动，导致其发散，但后者当 n 增大时，其项越来越大. 为区别之，引入下面的定义.

定义 3.3 对数列 $\{x_n\}$，若 $\forall G>0, \exists N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，$|x_n|>G$，则称 $\{x_n\}$ 是无穷大量，简称 x_n 为无穷大，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

若上面定义中的 $|x_n|>G$ 可改为 $x_n>G$（或 $x_n<-G$），则称 $\{x_n\}$ 为正无穷大（或负无穷大），记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty\ (-\infty)$.

命题 3.5 若 $x_n\neq 0$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$

证明: $\{x_n\}$ 是无穷大量，$\forall\epsilon>0$，取 $G=\frac{1}{\epsilon}>0$，则 $\exists N$, 使得 $\forall n>N$，有 $|x_n|>G=\frac{1}{\epsilon}$，从而 $\frac{1}{|x_n|}<\epsilon$. 反之，设 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小量，则 $\forall G>0$，取 $\epsilon=\frac{1}{G}>0$，于是 $\exists N$，使得 $\forall n>N$，有 $\frac{1}{|x_n|}<\epsilon=\frac{1}{G}$. 从而 $|x_n|>G$. □

例 3.6 $\{q^n\}$ $(|q|>1)$ 是无穷大量.

分析: 为证明这个论断, 需要 $\forall G>1$, 找到 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n>N$, 有 $|q^n|>G$. 即 $|q|^n>G$. 两边取自然对数，$n\ln|q|>\ln G$，即得 $n>\frac{\ln G}{\ln|q|}$. 这意味着可取 $N=\left[\frac{\ln G}{\ln|q|}\right]$.

证明: $\forall G>1$，取 $N=\left[\frac{\ln G}{\ln|q|}\right]$，则 $\forall n>N$，有 $|q|^n>|q|^{\frac{\ln G}{\ln|q|}}=G$ □

例 3.7 $\left\{\dfrac{n^2-2}{n+7}\right\}$ 是无穷大量.

证明: 需证 $\forall G>0, \exists N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n>N$，有 $\left|\frac{n^2-2}{n+7}\right|>G$. 但直接解这个不等式较困难，故我们考虑放缩：当 $n>8$ 时，有 $\frac{n^2-2}{n+7}>\frac{n}{2}$. 于是，$\forall G>0$，取 $N=\max\{[2G],8\}$，则当 $n>N$ 时，有 $\frac{n^2-1}{n+5}>\frac{n}{2}>G$.

注记 3.3 上例中放缩的由来：若希望 $\frac{n^2-1}{n+5}>\frac{n}{a}(a>0)$. 即 $(a-1)n^2-7n-2a>0$. 显然，为使它对所有大的 n 都成立，必须 $a>1$, 对这样的 a，只需解出上不等式的范围，便能确定所需要的 N 了. 比如，选取 $a=2$，则需 $n^2-7n-4>0$，故 $n>\frac{7+\sqrt{56}}{2}>7$.

注记 3.4 由于极限的存在或多少只依赖于当 n 趋向于无限时数列的变动趋势，故任意改变数列的有限项不影响其极限的存在及多少；这也表明，在采用放缩证明极限时，我们只需要关注当 n 大时，给定数列和放缩数列间的比较，而不在乎其任何有限项的取值情况.

由定义知：无穷大量必无界，但下面的例子表明：**无界数列未必是无穷大**.

例 3.7 考虑 $x_n=n\sin\frac{n\pi}{2}$. 有 $x_{2k}=2k\sin k\pi=0$; $x_{2k-1}=(2k-1)\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{k-1}(2k-1)$. 由此可知 $\forall M>0$, 取 $n_0=2[M]+1$, 则有 $|x_{n_0}|=n_0=2[M]+1>M$, 这与有界的定义矛盾（即 $\exists M>0$，使得 $\forall n$，都有 $|x_n|<M$.）故知 x_n 是无界的.

根据无穷大量的定义：$\forall G>0$，存在 N，使得 $\forall n>N$，有 $|x_n|>G$. 这里的重点是：$|x_n|>G$ 需对大于 N 的**所有** n 都成立. 但对我们的例子，由于 $x_{2k}=0$，显然这一条件是无法保障的，故 $\{x_n\}$ 不是无穷大量（即便它是无界的）.

注记 3.5 显然，同号无穷大量的和仍然是具有该符号的无穷大量；异号无穷大量之差也是无穷大量. 无穷大量与有界量之和或差亦是无穷大量.

与命题 *3.4* 相对的是下面的

命题 3.6 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，且 $\{y_n\}$ 满足：$\exists\,\delta>0, \exists N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n\geq N$，有 $|y_n|\geq\delta$，则 $\{x_ny_n\}$ 是无穷大量.

4 极限证明技巧举例

例 4.1 对 $x_n=\dfrac{n^2+1}{3n^2-2n+8}$. 当 n 足够大时，分子分母的主要贡献项是 n^2 和 $3n^2$，故我们期待，当 n 足够大时，x_n 的变化趋势同于 $\frac{n^2}{3n^2}$ 的变化趋势，故猜测极限为 $\frac{1}{3}$. 也可这么看：$x_n=\frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}}$，故当 n 足够大时，忽略表达式中无穷小量的贡献，知 x_n 可无限接近于 $\frac{1+0}{3-0+0}=\frac{1}{3}$. 下面严格证明之.

$$\left|x_n-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{n^2+1}{3n^2-2n+8}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{2n-5}{3(3n^2-2n+8)}\right|$$

分析： 右边的式子不好控制，为此我们做适当放缩. 注意到当 $n>2$ 时，上式右边

$$=\frac{2n-5}{3(3n^2-2n+8)}<\frac{2n}{3(3n^2-2n+8)}<\frac{2n}{3(3n^2-2n)}<\frac{2n}{3(4n^2)}=\frac{1}{6n}<\frac{1}{n}$$

由此可知：为使左边 $<\epsilon$，只需 $\frac{1}{n}<\epsilon$，这只要 $n>N=[\frac{1}{\epsilon}]$ 即可.

证明： $\forall\epsilon>0$，取 $N=\max\{2,[\frac{1}{\epsilon}]\}$，则由上分析知，当 $n>N$ 时，必有 $\left|x_n-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{n}<\epsilon$. $\square$

例 4.2 设 $a>1$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

证明： 直接处理 $\sqrt[n]{a}-1$ 不方便，故令 $x_n:=\sqrt[n]{a}-1>0$，则 $\sqrt[n]{a}=1+x_n$. 由二项式展开得

$$a=(1+x_n)^n=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2}x_n^2+\cdots+x_n^n>1+nx_n$$

由此得到 $|\sqrt[n]{a}-1|=|x_n|<\frac{a-1}{n}$. 由此可知，$\forall\epsilon>0$，取 $N=[\frac{a-1}{\epsilon}]$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\frac{a-1}{n}<\epsilon \qquad \square$$

注记 4.1 上面二项式的展开给出了 **伯努利（Bernoulli）不等式：** 若 $x\geq 0, n\in\mathbb{N}$，则

$$(1+x)^n\geq 1+nx$$

例 4.3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

证明： 同上例中用到了方法，令 $\sqrt[n]{n}=1+x_n\,(x_n>0)$. 由二项式展开，知

$$n=(1+x_n)^n=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2}x_n^2+\cdots+x_n^n>1+\frac{n(n-1)}{2}x_n^2$$

由此可得

$$|\sqrt[n]{n}-1|=|x_n|<\sqrt{\frac{2}{n}}$$

故 $\forall\epsilon>0$，取 $N=[\frac{2}{\epsilon^2}]$，则当 $n>N$ 时，成立 $|\sqrt[n]{n}-1|<\sqrt{\frac{2}{n}}<\epsilon$ $\square$

注记 4.2 上面问题的另证：当 $n\geq 2$ 时，利用 A-G 不等式，有

$$1\leq\sqrt[n]{n}=(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-2\text{ 个 }1})^{\frac{1}{n}}<\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

由此 $0\leq\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$. 由此可知，$\forall\epsilon>0$，取 $N=\left[\frac{4}{\epsilon^2}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\epsilon$ $\square$.

例 4.4 (*) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=ab$$

证明： 设 $x_n=a+\alpha_n$，$y_n=b+\beta_n$，则 α_n,β_n 是无穷小量. 有

$$\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=$$

$$=\frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n)+(a+\alpha_2)(b+\beta_{n-1})+\cdots+(a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n}$$

$$ab+\underbrace{a\frac{\beta_1+\cdots+\beta_n}{n}}_{\text{无穷小}}+\underbrace{b\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}}_{\text{无穷小}}+\underbrace{\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}}_{\Delta}$$

下面证明 Δ 也是无穷小，从而结论得证. 因为 $\alpha_n\to 0$，故特别地，它有界，即 $\exists M>0$，使得 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $|\alpha_n|\leq M$，故可估计 Δ 如下

$$0<|\Delta|\leq M\,\frac{|\beta_n|+|\beta_{n-1}|+\cdots+|\beta_1|}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0\qquad\square$$

上面的论证用到了结论：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=A$. 下对该结论予以证明.

证明: 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 故 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N_1$, 有 $|x_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$. 故

$$\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} - A\right| \le \frac{|x_1-A|+\cdots+|x_n-A|}{n}$$

$$\le \frac{|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n} + \frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2}$$

由于 $|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|$ 是个定数, 故对上面的 $\epsilon>0$, 可取 $N_2\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, 成立

$$\frac{|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 综上, 则当 $n>N$ 时, 我们有

$$\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} - A\right| \le \frac{|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n} + \frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2}$$

$$\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \square$$

例 4.5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

证明: 因为

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n} = 2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n} < 2\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

故 $\forall\epsilon>0$, 取 $N=[\frac{4}{\epsilon}]$, 则当 $n>N$ 时, 有 $\left|\frac{2^n}{n!}\right| < \frac{4}{n} < \frac{4}{N} < \epsilon$. $\square$

例 4.6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{2^n}=0$

分析: 我们需对 $\frac{n^5}{2^n}$ 进行适当的放缩, 使得 $\frac{n^5}{2^n}<f(n)$, 其中 $f(n)$ 的形式足够简单, 且 $f(n)$ 必须是无穷小量 (否则就是放缩过头了), 以使 $f(n)<\epsilon$ 对任意的 $\epsilon>0$, 当 n 足够大时能够成立, 且易于从其反解出 n 的取值范围, 从而界定出一个恰当的 N, 使得当 $n>N$ 时, 恒成立 $\frac{n^5}{2^n}<f(n)<\epsilon$.

分子 n^5 已足够简单, 故我们考虑对分母 2^n 变换形式.

$$2^n = (1+1)^n = 1+\binom{n}{2}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

当然, 在这种形式下, 放缩方式是很多的, 比如 $2^n>\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, $2^n>\binom{n}{8}=\frac{n(n-1)\cdots(n-7)}{8!}$ (当 n 足够大时) 等等. 那么, 究竟该如何选择合适的放缩呢?

答：只需放缩到恰好使 $\frac{n^5}{2^n}$ 为一无穷小量 $f(n)$，且 $f(n)$ 的形式足够简单. 由于分子是 n 的 5 次方，故分母需放缩出一个关于 n 的 k 次幂，且 $k \geq 6$.

最优 $k=6$ 时，需

$$2^n > \binom{n}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-5)}{6!}$$

注意到上不等式当 $n>6$ 时才是恒成立的. 故我们所需的放缩是

$$\text{当 } n>6 \text{ 时，有 } \frac{n^5}{2^n} < \frac{6!\,n^5}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} =$$

$$= \frac{6!\,n^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} < \frac{6!\,n^4}{(n-5)^5}$$

右边的形式还是不够简单. 但注意到 $n>10$ 时，有 $(n-5)^5 > \left(\frac{n}{2}\right)^5$，故可进一步放缩为

$$\text{当 } n>10 \text{ 时，有 } \frac{n^5}{2^n} < \frac{6!\,n^4}{(n-5)^5} < \frac{2^5\,6!\,n^4}{n^5} < \frac{10^5}{n}$$

证明: 由上分析 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \max\left\{10, \left[\frac{10^5}{\epsilon}\right]\right\}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\frac{n^5}{2^n} < \epsilon$. $\square$

5 数列极限的性质及运算法则

命题 5.1 收敛数列必有界，即若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，则 $\exists M > 0$，使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，有 $|x_n| \leq M$.

证明: 由 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，知 $\forall \epsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N$，有 $|x_n - A| < \epsilon$，即

$$A - \epsilon < x_n < A + \epsilon$$

令 $M = \max\{|A-\epsilon|, |A+\epsilon|, x_1, \cdots, x_n\}$，则 $\forall n$，有 $|x_n| < M$.

但相反的结论显然不成立. 有界数列未必收敛, 比如 $\{(-1)^n\}$ 有界, 但是它不收敛. 当然，无界数列必不收敛，它是上命题的逆否命题，故与原命题等价.

再看一个有界但不收敛的例子, 它表明: 有界数列不收敛的原因往往是, 当 n 变大时，数列的值将反复震荡，以致于无法趋向于某一固定值.

例 5.1 证明 $\lim_{n\to\infty} \sin n$ 的极限不存在.

证明: 只需证明 $\forall A \in [0,1]$，$\lim_{n\to\infty} \sin n \neq A$（$A \in [-1,0]$ 的情形类似）. 按照定义, 需证明: $\exists \epsilon_0 > 0$，$\forall N \in \mathbb{N}$，$\exists n > N$，使得 $|\sin n - A| \geq \epsilon_0$. 不妨取 $\epsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\forall N$，令 $n = [(2N\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4}]$. 由于 $(2N\pi - \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{4} < n < (2N\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4}$，从而 $\sin n < -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由此即知 $|\sin n - A| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

命题 5.2（保序性）若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim_{n\to\infty} y_n = B$，且 $A > B$，则 $\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N$，有 $x_n > y_n$.

证明: 由于 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 取 $\epsilon = \frac{A-B}{2}$, 则 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N_1$, 有 $|x_n - A| < \epsilon$. 特别地，有

$$x_n > A - \epsilon = \frac{A+B}{2}$$

又因 $\lim_{n\to\infty} y_n = B$，故 $\exists N_2 \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N_2$，有 $|y_n - B| < \epsilon$，特别地，有

$$y_n < B + \epsilon = \frac{A+B}{2}$$

综上，当 $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ 时，有 $x_n > \frac{A+B}{2} > y_n$ □

如果 $y_n = 0$ 是常数数列，则上面的结论给出下面的推论

推论 5.1（保号性）若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 且 $A > 0\,(A < 0)$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$, 有 $x_n > \frac{A}{2} > 0\,(x_n < \frac{A}{2} < 0)$.

“保号性”的逆否命题是: 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，且 $\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N$，有

$x_n \geq 0\,(x_n \leq 0)$，则 $A \geq 0\,(A \leq 0)$. 注意，即便把条件 $x_n \geq 0$ 改成 $x_n > 0$，结论也是 $A \geq 0$，而不能是 $A > 0$，比如 $\{\frac{1}{n}\}$，其每一项都大于 0，但极限等于 0.

命题 5.3（夹逼定理）若对数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N$，$z_n \leq x_n \leq y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

证明： $\forall \epsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，知 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N_1$，有 $|y_n - A| < \epsilon$，即 $A - \epsilon < y_n < A + \epsilon$. 同理，$\exists N_2 \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N_2$，有 $A - \epsilon < z_n < A + \epsilon$. 故，若取 $\bar{N} = \max\{N, N_1, N_2\}$，则 $\forall n > \bar{N}$，有

$$A - \epsilon < z_n \leq x_n \leq y_n < A + \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \square$$

夹逼定理体现出的本质上也是一种放缩思想，它可用来计算极限，也可用来证明极限的存在.

例 5.1 在例 *3.5* 中，我们用定义证明了 $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ 是无穷小，下面我们用夹逼定理计算其极限. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$

$$\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

取 $x_n = 0$，$y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$，$z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$，则 $x_n < y_n < z_n$. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$，从而有夹逼定理知 $\lim y_n = 0$.

例 5.2 $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n}$，求其极限.

解： 易知 $3 = \sqrt[n]{3^n} < x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{3}$. 例 *4.2* 表明 $\lim\limits_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{3} = 3$，故由夹逼定理知所求极限是 3.

例 5.3 设 $a > 0, b > 0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$

解： 不妨设 $a \leq b$，则有如下放缩

$$b = (b^n)^{\frac{1}{n}} < (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} < (2b^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}b$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}b = b$，由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = b = \max\{a, b\}$.

定理 5.1（数列极限的四则运算法则）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (kx_n + ly_n) = kA + lB$，其中 $k, l \in \mathbb{R}$；
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = AB$；
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}\,(B \neq 0)$.

证明: 记 $\alpha_n = x_n - A$; $\beta_n = y_n - B$, 则 α_n 和 β_n 都是无穷小. 由于

$$(kx_n + ly_n) - (kA + lB) = \underbrace{k\alpha_n + l\beta_n}_{\text{无穷小}}$$

$$x_n y_n - AB = (\alpha_n + A)(\beta_n + B) - AB = \underbrace{\alpha_n\beta_n}_{\text{无穷小}} + \underbrace{A\beta_n}_{\text{无穷小}} + \underbrace{B\alpha_n}_{\text{无穷小}}$$

$1, 2$ 得证. 下证 3. 考虑

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B} = \frac{Bx_n - Ay_n}{y_n B} = \frac{B(\alpha_n + A) - A(\beta_n + B)}{y_n B}$$

$$= \frac{B\alpha_n - A\beta_n}{y_n B}$$

由于 $B \neq 0$, 由保号性知, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|y_n| > \frac{|B|}{2}$, 故知

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{B\alpha_n - A\beta_n}{y_n B}\right| < \frac{|B||\alpha_n| + |A||\beta_n|}{|y_n||B|} < \frac{2(|B||\alpha_n| + |A||\beta_n|)}{|B|^2}$$

$\forall \epsilon > 0$, $\exists N_2$, 使得 $\forall n > N_2$, 有 $|\alpha_n| < \frac{1}{4|B|}\epsilon$; $\exists N_3$, 使得 $\forall n > N_3$, 有 $|\beta_n| < \frac{1}{4|A|}\epsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B}\right| < 2(|B||\alpha_n| + |A||\beta_n|) < 2\left(|B|\frac{1}{4|B|} + |A|\frac{1}{4|A|}\right)\epsilon = \epsilon \quad \square$$

推论 5.1 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $k \in \mathbb{N}_+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = A^k$.

例 5.4 在例 *4.2* 中, 我们证明了: 对 $a > 1$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. 对 $a = 1$, 显然极限为 1. 再考虑 $0 < a < 1$ 时的情形, 此时 $\frac{1}{a} > 1$, 故利用上面的结论, 有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \xlongequal{\text{定理 } 5.1} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1$$

由此可得: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $\forall a > 0$.

例 5.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - n^2 + 3}{n^2 + 2}$

解:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - n^2 + 3}{n^2 + 2} = \lim \frac{2n - 1 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n - 1 + 0}{1 + 0} = \infty$$

例 5.6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+100}{n^5+n^4+4n^3}$

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+100}{n^5+n^4+4n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\frac{100}{n^5}}{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{0+0+0}{1+0+0}=0$$

例 5.6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+4n^2+16}{4n^3+2n+7}$

解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+4n^2+16}{4n^3+2n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}+\frac{16}{n^3}}{4+\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+0+0}{4+0+0}=\frac{3}{4}$$

一般地，有结论：若 $a_0,b_0\neq 0$，下极限成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^l+a_1n^{l-1}+\cdots+a_l}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } l=m;\\ 0, & \text{若 } l<m;\\ \infty, & \text{若 } l>m.\end{cases}$$

例 5.7 推论 *5.1* 表明：当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^k=A^k$ 对 $k\in\mathbb{N}_+$ 成立. 我们希望将结果能推广到 k 是正有理数的情形.

引理 5.1 若 $x_n\geq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\geq 0$，$m$ 为正整数，则成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n}=\sqrt[m]{A}$

证明： 1. $A=0$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 知，$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n>N$，有 $x_n=|x_n-0|<\epsilon^m$，则有

$$\left|\sqrt[m]{x_n}\right|=\sqrt[m]{x_n}<\epsilon\quad\Longrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n}=0=\sqrt[m]{A}$$

2. $A>0$ 时，我们需要估计 $|\sqrt[m]{x_n}-\sqrt[m]{A}|$ 为此，在下公式中令 $a=\sqrt[m]{x_n}, b=\sqrt[n]{A}$

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+b^{m-1})$$

得到

$$\left|\sqrt[n]{x_n}-\sqrt[n]{A}\right|=\left|\frac{x_n-A}{\sqrt[m]{x_n^{m-1}}+\sqrt[m]{x_n^{m-2}}A+\cdots+\sqrt[m]{A^{m-1}}}\right|<\frac{|x_n-A|}{\sqrt[m]{A^{m-1}}}\xrightarrow{n\to\infty}0\quad\square$$

由上引理,知,若 $x_n\geq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\geq 0$,则对任何正有理数 α,有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{\alpha}=A^{\alpha}$.

6　单调有界数列极限存在准则

定理 6.1 若 $\{x_n\}$ 单调增加（减少）且有上界（下界），则 $\{x_n\}$ 收敛.

证明: 设 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界, 由*确界存在定理*知上确界 $sup_n\{x_n\}$ 存在, 并记为 A, 下证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 由上确界的定义, 知 $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_N \in \{x_n\}$, 使得 $x_N > A - \epsilon$.

依单调性，知 $\forall n \geq N$，都有 $x_n \geq x_N > A - \epsilon$. 但另一方面，$x_n \leq A < A + \epsilon$. 结合上面的论述，知 $\forall \epsilon > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \epsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. □

注记 6.1 *由于极限的存在不依赖于其任意有限项的取值情况，而只依赖于当* n *足够大后的取值情况，故如果以数列当* $n > N$ *后才开始单调有界，上结论仍然成立，此时* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup_{n>N}\{x_n\}$*，或* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf_{n>N}\{x_n\}$.

例 6.1 *例 2.1* 表明 $\{\sqrt[n]{a}\}\,(a > 1)$ 单调减少有下界，故由上定理知其极限存在. *例 4.2* 又说明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \inf_{n\geq 1}\{\sqrt[n]{a}\} = 1$.

例 6.2 *例 2.2* 表明 $\{\sqrt[n]{n}\}$（当 $n > 4$）时是严格减少，且有下界，故其极限存在，且等于其下确界. *例 4.3* 又说明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \inf_{n\geq 1}\{\sqrt[n]{n}\} = 1$.

例 6.3 *例 2.3* 表明 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 是单调增加有上界的，故它有极限，等于其上确界，我们将其定义为数 e（它是自然界比较重要的一个无理数）

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828\cdots$$

上面这个极限是非常重要、非常基本的，需要记忆. 很多极限问题都可以转化为利用上面极限求解. 比如

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-1} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-1} = e^{-1}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{3}{2}} = \left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$

例 6.4 *例 2.4* 表明 $x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n\text{重}}$ 严格单调增加且有上界，故知其极限存在且等于其上确界. 为求其值，我们知道 x_n 满足下面的*递归方程*（*recursive equation*）：$x_n^2 = 2 + x_n$. 在该式两边同时取极限，即令 $n \to \infty$，并令 $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，得到 $x^2 = 2 + x$，由此解出极限值为（取掉负值）2.

例 6.5 设数列 $\{x_n\}$ 由递归公式 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{1 + x_n}$, $x_1 > 0$ 给出. *例 2.5* 表明 x_n

是单调的且有界，故极限存在，设为 x，则在递推式两边同时令 $n\to\infty$，得

$$x=1+\frac{x}{1+x}\quad\xRightarrow{\text{负值去掉}}\quad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

下面的例子说明，在递归式两边求极限的方法有时也会失败.

例 6.6 设 $x_0=0$, $x_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解： 假设我们知道极限为 x，在递归式两边同时取极限，得到 $x=\frac{x+x}{2}=x$，无法得到解. 我们转向直接求解该递归方程.

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n=-\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\quad\Longrightarrow$$

$$x_{n+1}-x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)(x_n-x_{n-1})=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(x_{n-1}-x_{n-2})=$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3(x_{n-2}-x_{n-3})=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x_1-x_0)=\frac{(-1)^n}{2^n}$$

故得

$$x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)+(x_1-x_0)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{3}$$

注记 6.1 注意，在递归式两边同时令 $n\to\infty$ 以求极限的方法在应用时，必须确保数列的极限本身是存在的，否则就会得出错误的结论，比如 x_n 以下面的递归式给出

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,\ x_1=x_2=1$$

此数列是无穷大，但若令 $n\to\infty$，则得到 $x=x+x$，从而 $x=0$ 的错误结论.

例 6.7 由 $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$，$x_1=x_2=1$ 定义的数列称为是斐波拉切（*Fibonacci*）数列，记 $y_n:=\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 为数列 $\{x_n\}$ 的增长率数列，则可证明 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在. 在此假设下，记极限为 y，则可按如下方式求解出 y.

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n\quad\Longrightarrow\quad\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=1+\frac{1}{\frac{x_{n+1}}{x_n}},\ \text{即}\ y_{n+1}=1+\frac{1}{y_n},\ y_1=1$$

两边取极限，得 $y=1+\frac{1}{y}\implies y^2-y-1=0$，其正解为 $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$（即黄金分割数）. 我们尚需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 的存在性，才能确保上面计算的正确性.

为看出 y_n 的变化趋势, 我们计算其前几项: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1.5$, $y_4 \approx 1.6666$, $y_5 \approx 1.6$, $y_6 \approx 1.625$ $\cdots$ 由此猜测

$$y_1 < y_3 < y_5 < \cdots \qquad y_2 > y_4 > y_6 > \cdots$$

即其奇数项数列单调增加，其偶数项数列单调减少. 下证之: $y_{2k+2} - y_{2k} =$

$$1 + \frac{1}{y_{2k+1}} - y_{2k} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y_{2k}}} - y_{2k} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - y_{2k}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + y_{2k}\right)}{1 + y_{2k}}$$

断言: $y_{2k} > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. **证明:** 用归纳法, $y_2 = 2 > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 设 $y_{2k} > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 则对 $2(k+1)$, 有

$$y_{2(k+1)} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{y_{2k}}} > 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \square$$

故 $y_{2k+2} - y_{2k} < 0$, 即 $\{y_{2k}\}$ 单调减少. $\{y_{2k+1}\}$ 单调增加的证明是类似的, 请大家自行完成. 特别地, 由这些证明可知 $y_{2k+1} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 且 $y_{2k} > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

由此可知: $\{y_{2k}\}$ 单调减少有下界, 而 $\{y_{2k+1}\}$ 单调增加有上界, 故它们都有极限, 且极限是相同的, 即 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 下面的命题保证数列 $\{y_n\}$ 本身的极限存在且为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

命题 6.1 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

证明: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N_1$, 有 $|x_{2n-1} - A| < \epsilon$; 同理 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N_2$, 有 $|x_{2n} - A| < \epsilon$. 取 $N = \max\{2N_1, 2N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 若 n 是奇数, 则 $n > 2N_1 - 1$; 若 n 是偶数, 则 $n > 2N_2$. 从而无论 n 是奇数还是偶数, 都有 $|x_n - A| < \epsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ $\square$

在上例中, 所有偶数项构成的数列和所有奇数项构成的数列是所谓子数列的特例.

定义 6.1 设 $\{n_1, n_2, \cdots\}$ 是正整数集的一个无穷子集, 且 $n_{k+1} > n_k, k = 1, 2, \cdots$ 则数列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个子数列 (*sub-sequence*), 简称子列.

我们有 $n_k \geq k$. 特别地, 若 $n_k = 2k$, 则称 $\{x_{n_k}\}$ 为偶子列; 若 $n_k = 2k+1$, 则称 $\{x_{n_k}\}$ 为奇子列.

定理 6.2 (归并性) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 当且仅当 $\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛到 A, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$.

证明: " $\Longrightarrow$ " 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 知, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$, 有 $|x_n - A| < \epsilon$. 取 $K = N$, 则当 $k > K$ 时, 由于 $n_k \geq k > K = N$, 故有 $|x_{n_k} - A| < \epsilon$

" $\Longleftarrow$ " 由于 $\{x_n\}$ 可看成是其自身的 (平凡) 子列, 即 $n_k = k$, 故充分性成立. $\square$

推论 6.1 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = A$.

证明: 充分性即命题 *6.1*，必要性由上定理直接得到. □

注记 6.2 定理 *6.2* 对 $A = \infty, +\infty, -\infty$ 也是成立的. 只需对上述证明做适当改动，请读者自行完成.

归并性常用来证明数列极限不存在，由定理 *6.2* 知，若能找到极限不同的两收敛子列，则数列必发散. 比如 $\{(-1)^n\}$，其偶子列是常数数列 $\{1\}$，其奇子列是常数数列 $\{-1\}$，他们收敛于不同值，故原数列发散.

我们在例 *3.7* 中考察了数列 $x_n = n\sin\frac{n\pi}{2}$. 它的偶子列是 $x_{2k} = 0$，奇子列是 $x_{2k+1} = (-1)^{k-1}(2k-1)$. 它是无界的但不是无穷大量，虽然它有一个无穷大的（奇）子列. 事实上，一般地，我们有

定理 6.3 数列 $\{x_n\}$ 无界当且仅当其有无穷大子列.

证明: 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\forall M > 0$，$\exists n \in \mathbb{N}_+$，使得 $|x_n| > M$. 特别地，对 $M_1 = 1$，则 $\exists n_1$，使得 $|x_{n_1}| > 1$. 对 $M_2 = \max\{|x_1|, \cdots, |x_{n_1}|\} + 1$，$\exists n_2$，使得 $|x_{n_2}| > M_2 > 2$，且有 $n_2 > n_2$；对 $M_3 = \max\{|x_1|, \cdots, |x_{n_2}|\} + 1$，$\exists n_3$，使得 $|x_{n_3}| > M_3 > 3$，且有 $n_3 > n_2$. 如此操作下去，可得一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $|x_{n_k}| > k$，故 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$.

反之，若数列存在无穷大子列，则显然它必无界. □

单调有界数列极限存在准则表明若数列单调增加有上界, 则其极限存在且等于其上确界（无穷大的情形也成立）. 又根据归并性，知：数列收敛当且仅当其任意子列都收敛于相同的极限值. 所以，一个自然的问题是：对一收敛数列，是否总能找到其中的单调子列? 如果答案是肯定的，则极限的计算即该单调子列对应数集的上（下）确界了. 下定理表明事实的确如此.

定理 6.4 每个数列都有单调子列.

(*) **证明:** 定理 6.3 的证明表明该定理对无界数列成立. 下设 $\{x_n\}$ 有界. 我们称其项 x_n 具有性质 (M): $\forall i > n$，有 $x_n \geq x_i$. 即 $x_n = \max\{x_i \mid i \geq n\}$.

1. 如 $\{x_n\}$ 有无穷多项具有性质 (M). 将它们按顺序排列，$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$ 满足 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 即得到一单调减少的子列 $\{x_{n_k}\}$
2. 如 $\{x_n\}$ 中只有有限多项具有性质 (M). 则 $\exists N$，使得 $\forall n > N$，x_n 都不具有性质 (M). 任取这样的一项 x_{n_1}，由于它不具有性质 (M)，故能找到 $n_2 > n_1$，使得 $x_{n_1} < x_{n_2}$. 又因 x_{n_2} 也不具性质 (M)，故又存在 $n_3 > n_2$，使得 $x_{n_2} < x_{n_3}$，如此操作下去便得到一单调增加的子列 $\{x_{n_k}\}$ □

7 区间套定理与凝聚定理

定义 7.1 一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 称为是一个闭区间套，如果

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

定理 7.1（闭区间套定理）如果 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一闭区间套，则存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$，即 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ 且 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$（$a_n$ 单调增加，b_n 单调减少.）

证明: 由条件知, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足: $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_+$. 由此可知 $\{a_n\}$ 单调增加且有上界 b_1，故由单调有界数列极限存在定理可知：$\exists \xi = \sup\{a_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，且 $a_n \leq \xi$；同理，$\exists \eta = \inf\{b_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \eta, b_n \geq \eta$. 又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，故

$$\eta = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}[(b_n - a_n) + a_n] = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \xi$$

这样便得到 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. 下证 ξ 的唯一性. 反之，如果另有 $\bar{\xi}$，它也满足 $\forall n \in \mathbb{N}$，$a_n \leq \bar{\xi} \leq b_n$. 由此可知

$$0 \leq |\xi - \bar{\xi}| \leq b_n - a_n$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，根据夹逼定理，得到 $\bar{\xi} = \xi$. □

注记 7.1 闭区间套定理中的“闭”条件很重要，如将闭区间换成开区间，则结论不成立. 比如，$(0, \frac{1}{n})$ 是“开”区间套，显然 $\xi = 0$ 是两端数列的极限，但它不在区间内.

上面的证明中本质运用了确界存在性定理，下面证明：闭区间套定理也能推到出确界存在性定理.

证明: 设 E 是非空数集，记 $U := \{M \in \mathbb{R} \mid x \leq M, \forall x \in E\}$ 为 E 的所有上界组成的集合，我们证明：$\min U$ 是存在的. 为此，取 $a_1 \notin U$，$b_1 \in U$，则有 $a_1 < b_1$，然后按下面方式构造闭区间:

$$[a_2, b_2] = \begin{cases} \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], & 若\ \frac{a_1+b_1}{2} \in U \\ \\ \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right] & 若\ \frac{a_1+b_1}{2} \notin U \end{cases}$$

$$[a_3,b_3]=\begin{cases}\left[a_2,\,\frac{a_2+b_2}{2}\right], & 若\ \frac{a_2+b_2}{2}\in U\\ \\ \left[\frac{a_2+b_2}{2},\,b_2\right] & 若\ \frac{a_2+b_2}{2}\notin U\end{cases}$$

等等. 由此构造出一个闭区间套 $[a_n, b_n]$，它满足：$a_n \notin U, b_n \in U$；$n=1,2,3,\cdots$ 由闭区间套定理，知 $\exists\xi\in[a_n, b_n]$, $\forall n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

断言： $\xi = \sup E$. 这是因为，如果 ξ 不是最小上界，即 $\exists\eta\in U$，使得 $\eta<\xi$. 则由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$，知 $\exists N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n>N$，有 $\eta<a_n$. 但根据构造，$a_n\notin U$，故 $\exists x\in E$，使得 $\eta<a_n<x$，这又与 $\eta\in U$ 矛盾. 从而原假设不成立，故 $\xi=\sup E$ □

单调有界数列必有极限，*定理 6.4* 又表明：每个数列都有单调子列. 那么

定理（*凝聚定理，或 Bolzano-Weierstrass 定理*）有界数列必有收敛子列.

下面是利用闭区间套定理的证明.

证明： 设数列 $\{x_n\}$ 有界，即 $\exists a_1, b_1$，使得 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $a_1\le x_n\le b_1$. 将它等分成两个小区间 $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. 其中必有一个小区间里面包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项，记它为 $[a_2, b_2]$，将其等分为两小区间 $\left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$，同样，其中一个必包含数列的无穷多项. 如此一直操作下去，便得到闭区间套 $[a_k, b_k]$, $k=1,2,\cdots$ 其中每个闭区间都包含 $\{x_n\}$ 的无穷多项.

由闭区间套定理，知 $\exists!\,\xi$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \xi$. 接下来，我们选取一个收敛于 ξ 的子列. 首先，在 $[a_1,b_1]$ 中任选一项 x_{n_1}，然后，由于 $[a_2,b_2]$ 是无限集，故存在其中一项 x_{n_2}，使得 $n_2>n_1$，如此进行下去，便得子列 $\{x_{n_k}\}$ 它满足：$a_k\le x_{n_k}\le b_k$. 结论由夹逼定理可得. □

注记 6.3 对一收敛数列，它必有界，故必存在单调收敛子列，归并原理说明其极限和原数列的极限相同.

8 极限计算举例

例 8.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n^2+3}+\dfrac{2}{2n^2+3}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2+3}\right)$

解： $$\frac{1}{2n^2+3}+\frac{2}{2n^2+3}+\cdots+\frac{n}{2n^2+3}=\frac{1+2+\cdots+n}{2n^2+3}=\frac{n(n+1)}{2(2n^2+3)}$$

故原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(2n^2+3)}=\dfrac{1}{4}$

例 8.2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解: $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right\}$ 中最大的数是 $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$，最小的数是 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，故可放缩如下

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n}} = \sqrt{1} = 1$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1}} = \sqrt{1} = 1$$

故由夹逼定理，得所求极限为 1.

例 8.3 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

解:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3}+0}{1+0} = \frac{1}{3}$$

例 8.4 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}$ $(|a|,|b|<1)$.

解:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-a^n}{1-a}}{\frac{1-b^n}{1-b}} \\ &= \frac{1-b}{1-a}\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1-b^n} = \frac{1-b}{1-a}\end{aligned}$$

例 8.5 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2n]{2}$

解:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2n]{2} &= \lim_{n\to\infty} 2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{\left(\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)} = 2\end{aligned}$$

例 8.6 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

解:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \text{故原极限} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

例 8.7 证明 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$.

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right)^k = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right)^k = e^k$$

注记 8.1 上面的计算结果可推广为：$\forall x\in(-\infty,\infty)$，都成立 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$，从而将指数函数 e^x 以数列的极限形式加以实现了.

例 8.8 计算 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$

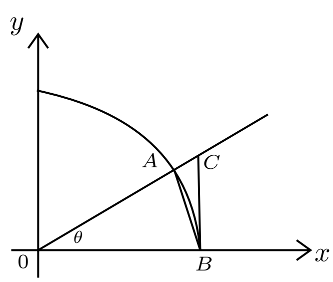
解:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+n-1}{2+n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(n+2)}\right)^{-(n+2)}\right)^{-1} = e^{-1}$$

例 8.9 设 $\{x_n\}$ 由 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n$. 证明其极限存在，并求之.

证明: 首先 $x_n>0$, 且 $x_n\in[0,1)$. 由下图易见: 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 有 $\sin x<x<\tan x$.



即三角形 $0AB$ 的面积 $<$ 扇形 OAB 的面积 $<$ 三角形 OBC 的面积. 应用于我们的情形，得 $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，即 $\{x_n\}$ 单调减少有下界，故其极限存在，记为 x，则在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边求极限，知 x 须满足：$\sin x=x$，在 $0<x<1$ 中，它的唯一解是 $x=0$. 故得 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ □.

例 8.10 设 $\{x_n\}$ 由 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 给出，证明它的极限存在并求其极限.

解: 由于 $0<x_1<3$，故 $3-x_1>0$，利用 A-G 不等式，得

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\le\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}$$

假设 $0 \leq x_k \leq \frac{3}{2}\,(k>1)$，则对 x_{k+1}，有

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \frac{3}{2}$$

由数学归纳法，$\forall n \in \mathbb{N}_+$，有 $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$. 即它有界，下证其单调性，考虑

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n} - \sqrt{x_n})$$

$$= \frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}} \geq 0$$

故 $\{x_n\}$ 单调增加. 由单调有界收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，记其为 A，在递归式两边同时取极限，得到 $A = \sqrt{A(3-A)}$，由此解出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{2}$.

例 8.11 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\,(|x|<1)$.

解： $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) =$

$$= \frac{(1+x)(1-x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})}{1-x} = \frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})}{1-x}$$

$$= \frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})}{1-x} = \cdots = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2^n}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$

例 8.11 设 $a_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

分析： 当 n 充分大时，$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx a$，即 $a_n \approx a a_{n-1} \approx a^n a_1$，故猜测当 n 足够大时，$\sqrt[n]{a_n} \approx \sqrt[n]{a^n} = a$. 故猜测 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$，下证之

证明： $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N$，有 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \epsilon$，即 $a-\epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < a+\epsilon$. 则当 $n > N$ 时，有

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}\underbrace{\frac{a_N}{a_{N-1}}\frac{a_{N-1}}{a_{N-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}a_1}_{=:M>0}$$

故知，当 $n > N$ 时，有估值 $(a-\epsilon)^{n-N}M < a_n < (a+\epsilon)^{n-N}M$，即

$$(a-\epsilon)^{1-\frac{n}{N}}M^{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a_n} < (a+\epsilon)^{1-\frac{n}{N}}M^{\frac{1}{n}}$$

当 $n \to \infty$ 时，左，右两边同 a 可无限接近. 故由夹逼定理，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$.

9 附录一: $\mathbb{Q}$ 中“空隙”存在之证明

命题: $\mathbb{Q}$ 中有上界的集合未必在 $\mathbb{Q}$ 中有上确界，比如集合 $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 < 2\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中就没有上确界.

证明: 假设 E 在 $\mathbb{Q}$ 中有上确界 $\beta = \sup T$，记之为 $\beta = \frac{n}{m}$（$m, n \in \mathbb{N}_+$ 且 m,n 互素）. 则有 $1 < (\frac{n}{m})^2 < 3$. 由于有理数的平方不可能是 2，故有两种可能

1. $1 < \left(\frac{n}{m}\right)^2 < 2$. 此时，可表明 $\frac{n}{m}$ 不是 E 的最小上界，即 $\exists r \in \mathbb{Q}$，使得 $\frac{n}{m} + r \in E$，从而导出矛盾. 记 $t = 2 - \frac{n^2}{m^2}$，则 $0 < t < 1$，并令 $r = \frac{n}{6m}t$. 则 $\frac{n}{m} + t > 0$，且由 $r^2 = \frac{n^2}{36m^2}t^2 < \frac{1}{18}$，及 $\frac{2n}{m}r = \frac{n^2}{3m^2}t < \frac{2}{3}$ 得 $\left(\frac{n}{m} + r\right)^2 - 2 = r^2 + \frac{2n}{m}r = t < 0$. 故 $\frac{n}{m} + r \in E$. 矛盾.
2. $2 < \left(\frac{n}{m}\right)^2 < 3$. 此时，取相同的 t 和 r，则 $\frac{n}{m} - r$ 也大于零. 由于 $\frac{2n}{m}r = \frac{n^2}{3m^2}t < t$，得 $\left(\frac{n}{m} - r\right)^2 - 2 = r^2 - \frac{2n}{m}r + t > 0$. 即 $\frac{n}{m} - r$ 也是一个上界，这与 $\frac{n}{m}$ 是上确界的假设矛盾.

10 附录二：e 与欧拉常数

我们已经知道 $\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\}$ 单调增加有上界，故其极限存在，并将其记为 e，即

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e 是数学中除圆周率 π 外的另一个重要常数（在欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 中令 $\theta = \pi$，得关系 $e^{i\pi} + 1 = 0$），主要体现在它的“产生机理”非常普遍，且简易，这可从下两例中窥见.

问题 10.1 银行的存款利率规定如下：在一年内，存款利率不变. 若存入 $0 \le x \le 1$ 年后取出，则可增值 x 倍. 比如，存入一年后取出可增值一倍，存入半年后取出可增值一半，存入 4 个月后取出可增值 25% 等等. 在这样的规定下，为使收益最大，显然不能一次存入. 一次存入后取出，只有 100% 的回报，但如果先存入半年后取出，然后再存半年，则收益计算如下：设起始存入金额为 1，则一年后的本经加收益总额为

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1.5^2 = 2.25$$

即增值 125%. 请设计一种存款策略，使得在一年内收益最大?

分析: 假设一年内存了 n 此，每次存入时间分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$，

则一年后的本金加收益总额计算如下（设起始存入金额为 1）

$$x_1\text{ 时间后：}1+x_1$$
$$x_1+x_2\text{ 时间后：}(1+x_1)+(1+x_1)x_2=(1+x_1)(1+x_2)$$
$$x_1+x_2+x_3\text{ 时间后：}(1+x_1)(1+x_2)+(1+x_1)(1+x_2)x_3=(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$$
$$\cdots\quad\cdots$$

故一年后取出可得总金额为（本金 + 收益）：$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)$ 利用 A-G 不等式，得

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\le\left(\frac{n+x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

且 "$=$" 成立当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$.

故为使得收益最大,需以等时存取. 存取次数 n 越大,则总收益越接近于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2.71828\cdots$. 故理论上的最大收益不超过本钱的 171.83%

问题 10.2 给定正数 $a>0$，我们将其分为若干部分，即将它写为 $a=a_1+\cdots+a_n$，然后考虑乘积 $a_1\cdots a_n$，根据 A-G 不等式，得

$$a_1\cdots a_n\le\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n=\left(\frac{a}{n}\right)^n$$

由此可知，为使乘积最大，需将 a 等分. 比如等分成 n 分，即 $a=n\frac{a}{n}$，则各部分的乘积为 $\left(\frac{a}{n}\right)^n$. 试问，如何取 n 才能使该乘积最大?

解： 考虑函数 $f(x)=\left(\frac{a}{x}\right)^x$，我们研究 $x>0$ 取何值时 $f(x)$ 取最大值，对 $f(x)$ 求导:

$$f'(x)=\left(e^{x\ln\frac{a}{x}}\right)'=e^{x\ln\frac{a}{x}}\left(x\ln\frac{a}{x}\right)'=e^{x\ln\frac{a}{x}}\left(\ln\frac{a}{x}+x\frac{1}{\frac{a}{x}}\left(-\frac{a}{x^2}\right)\right)$$
$$=e^{x\ln\frac{a}{x}}\left(\ln\frac{a}{x}-1\right)$$

$f'(x)=0$ 得 $\ln\frac{a}{x}=1$，即 $\frac{a}{x}=e$. 也就是说，取等分的份数 n 使得 $\frac{a}{n}$ 最接近于 e 时，则其各相同等分的乘积可取到最大值. 下面时 $a=10$ 时的数值计算，从中可看出当 $n=4$ 时，$\frac{10}{4}$ 最接近 e，且其对应乘积最大.

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2=25,\ \left(\frac{10}{3}\right)^3\approx 37.037,\ \left(\frac{10}{4}\right)^4=39.0625,\ \left(\frac{10}{5}\right)^5=32$$

e 的无穷级数展开： 在例 *2.3* 中，我们研究了 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的单调性和有界性,

特别地，我们得到了如下不等式

$$x_n \le \underbrace{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}}_{s_n}$$

且 s_n 以 3 为上界. 显然，数列 $\{x_n\}$ 单调增加，故由单调有界收敛准则，知 $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在且小于 3. 由于 $x_n \le s_n < 3$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$，故有：$e \le s$. 下证 $e \ge s$. 固定自然数 m，并令 $n > m$，得

$$0 < x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots +$$

$$+\ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

即去掉第 m 项后的 $n-m$ 项. 在上不等式两边，令 $n\to\infty$，得到

$$e \ge 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!} = s_m$$

再令 $m\to\infty$，得到 $e \ge s$. 由此得到 $e = s$，即

$$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots}$$

e **是无理数的证明：** 记 ϵ_n 为利用 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ 逼近 e 产生的误差，即

$$\epsilon_n = e - \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

显然 $\epsilon_n > \frac{1}{(n+1)!}$，又对任意的 $m > n$，可估计如下

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{m!} < \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^k}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}\right) = \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{n!n}$$

由于上面的放缩对任意 $m > n$ 都成立，故当 $m \to \infty$ 时也成立，即得到对估计误差的估计如下

$$\boxed{\frac{1}{(n+1)!} < \epsilon_n < \frac{1}{n!n}}$$

假设 e 是有理数，即 $e = \frac{p}{q}$（p, q 为正整数，无公共素因子）. 则 e 可写成

$$e = \frac{p}{q} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) + \epsilon_q \quad \Longrightarrow$$

$$\epsilon_q = \frac{p}{q} - \left(\frac{q! + q! + \cdots + 1}{q!}\right) = \frac{p(q-1)! - q! - q! - \cdots - 1}{q!}$$

由此可见 ϵ_q 是 $\frac{1}{q!}$ 的整数倍，但又根据上面的误差估计公式，得到

$$0 < \epsilon_q < \frac{1}{q!q}$$

故不可能是 $\frac{1}{q!}$ 的整数倍，该矛盾说明假设不成立，从而知 e 是无理数. □

一个有用的不等式： 由于 $e = \sup_{n \geq 1} \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$，故 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$. 类似于对 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 单调性的证明，我们考察另一数列 $y_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. 利用 A-G 不等式

$$\frac{1}{y_n} = 1 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right) + 1}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{1}{y_{n+1}}$$

即证得 $\{y_n\}$ 是单调减少的数列，且因 $y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < x_n$，故 $\{y_n\}$ 以每个 x_n 为下界. 因此 $\{y_n\}$ 的极限也存在，且极限值也是 e. 特别地，我们证明了如下不等式：

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

两边取自然对数，得到如下形式

$$\boxed{\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \qquad (*)}$$

发散的调和级数： 记 $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$，当 $n \to \infty$ 时，称 s_n 为调和级数

（*harmonic series*），下证 s_n 发散.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\cdots\quad \frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}>\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\quad\cdots$$

即 $s_{2^n}>1+\frac{n}{2}$. 从而 $\forall G>0, \exists N_1$, 使得 $\forall n>N_1$, 有 $a_{2^n}>G$. 故若取 $N=2^{N_1+1}$, 则 $\forall n>N$，有 $a_n>a_{2^{N_1+1}}>G\quad\square$.

欧拉 γ 常数：上面表明 $s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是无穷大量，$\{\ln n\}$ 也是无穷大量，但下面将证明两者之差是个有界量，且有确定的极限，常将其记作 γ，并称之为欧拉常数（*Euler constant*）. 即有

$$\gamma:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\approx 0.5772\cdots$$

证明：记 $b_n=s_n-\ln n$，则有

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

由不等式 $(*)$ 知，上式右边恒小于零，故知 $\{b_n\}$ 单调减少，下证其有下界. 在不等式 $(*)$ 中分别令 $n=1,2,\cdots,n$，然后将它们（右边）加起来，得到

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)\quad\Longrightarrow$$

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}>0\,(\text{由 }(*))$$

注： 欧拉常数 γ 是否为无理数至今仍未解决.

例 10.1 我们可将 $\ln 2$ 表示为 $\ln 2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$. 这是因为，若记该数列为 c_n，则

$$c_n=b_{2n}-b_n+\ln 2n-\ln n=b_{2n}-b_n+\ln 2$$

两边取极限即得所求结论.

例 10.2 类似地，$\ln 2$ 也可表示为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]$. 这是因为，

记该数列为 d_n，则

$$b_{2n}-b_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}-\ln 2=d_{2n}-\ln 2$$

两边同时令 $n\to\infty$，得 $\lim\limits_{n\to\infty} d_{2n}=\ln 2$.

又注意到 $d_{2n+1}=d_{2n}+\dfrac{1}{2n+1}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} d_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} d_{2n}$. 由此可得结论成立.

11 附录三：可数与不可数

定义 11.1 给定两个集合 X，Y，若存在一个一一对应（即双射）$f: X\to Y$，则称 X 和 Y 等势，记做 $|X|=|Y|$. 其中 $|X|$ 称为集合 X 的势（*power*）.

注记 11.1 若 X，Y 均为有限集，则 $|X|=|Y|$ 表示 X 和 Y 中的元素个数相同，故集合的“势”是有限集的元素个数在无限情形的推广.

定义 11.2 如果 $|X|=\infty$，但 $|X|=|\mathbb{N}|$，即存在 X 到自然数集的一个双射（一一对应），则称无限集 X 是可数的（*countable*）. 不是可数集的集合称为不可数的（*uncountable*）.

例 11.1 记 $E=\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}$，$O=\{2n+1\mid n\in\mathbb{N}\}$. 下面的映射表明，它们都是可数的，即与自然数集等势.

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow E\quad n\longmapsto 2n;\quad g:\mathbb{N}\longrightarrow O\quad n\longmapsto 2n+1$$

即在有限的视角来看，偶数比自然数稀少，但以无限的视角来看，全体偶数和全体自然数的“个数”是相同的. 又比如，整数集 $\mathbb{Z}$ 也是可数的，它和 $\mathbb{N}$ 的一个双射构造如下

$$f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{N}\quad n\longmapsto\begin{cases}-2n & n\le 0\\ 2n-1 & n>0\end{cases}$$

更进一步，我们可证明:

定理 11.1 数轴上处处稠密的有理数集 $\mathbb{Q}$ 亦是可数的.

证明: 下引理表明，只需证明 $(0,1]$ 中的有理数全体是可数的. 为此，将 $(0,1]$ 中的

有理数表示为（唯一的）$\frac{p}{q}$，其中 $p \le q$ 是互素的自然数. 按如下顺序排这些有理数:

$$
\begin{gathered}
\text{分母 } p=1 \text{ 的既约分数：} \ x_{11}=1 \\
\text{分母 } p=2 \text{ 的既约分数：} \ x_{21}=\frac{1}{2} \\
\text{分母 } p=3 \text{ 的既约分数：} \ x_{31}=\frac{1}{3}, x_{32}=\frac{2}{3} \\
\text{分母 } p=4 \text{ 的既约分数：} \ x_{41}=\frac{1}{4}, x_{42}=\frac{3}{4} \\
\cdots \quad \cdots
\end{gathered}
$$

记分母为 $p = n$ 的既约分数为 $x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nk(n)}$，其中 $k(n)$ 为其个数，显然 $k(n) \le n-1$. 由此，区间 $(0,1]$ 中的全体有理数可按顺序排列如下（可数）

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{32}, \cdots, x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nk(n)}, \cdots \qquad \square$$

引理 11.1 可数个可数集的并也是可数的. 即设 $S_n(n = 1, 2, \cdots)$ 可数，则其并 $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ 也是可数的.

证明: 设 $S_n = \{x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nk}, \cdots\}$ 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ 中的元素可按以下无穷矩阵排布:

$$
\begin{tikzcd}
x_{11} & x_{12} \arrow[dl, dashed] & x_{13} \arrow[dl, dashed] & x_{14} \arrow[dl, dashed] & \cdots \arrow[dl, dashed] \\
x_{21} & x_{22} \arrow[dl, dashed] & x_{23} \arrow[dl, dashed] & x_{24} \arrow[dl, dashed] & \cdots \arrow[dl, dashed] \\
x_{31} & x_{32} \arrow[dl, dashed] & x_{33} \arrow[dl, dashed] & x_{34} \arrow[dl, dashed] & \cdots \arrow[dl, dashed] \\
x_{41} & x_{42} \arrow[dl, dashed] & x_{43} \arrow[dl, dashed] & x_{44} \arrow[dl, dashed] & \cdots \arrow[dl, dashed] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

并按从最左边开始，沿着逐条“对角线”将元素按从右上到左下的次序排列，即

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, x_{14}, x_{23}, x_{32}, x_{41}, \cdots$$

如果某元素在不同集合的公共交里面，则只算入一次. 如此，按上规则，可将并中所有元素一一列出来，即证明并也是可数的. $\square$

并非所有的无限集合都是可数的，下面证明:

定理 11.2 实数集 $\mathbb{R}$ 就是不可数的.

证明: 如前，我们只证明 $(0,1)$ 中的全体实数不可数. $(0,1)$ 中的所有实数可表示成 $0.a_0a_1\cdots$ 的无限小数形式，为使表示方式唯一，我们约定 $0.999\cdots = 1.000\cdots$

用反证法，假设 $(0,1)$ 中的实数是可数的，即存在从 $\mathbb{N}$ 到 $(0,1)$ 的双射. 则可将实数用 $0,1,2,\cdots$ 标记如下：

$$\begin{array}{ccl}
0 & \longmapsto & 0.a_{0,0}a_{0,1}a_{0,2}a_{0,3}a_{0,4}\cdots \\
1 & \longmapsto & 0.a_{1,0}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots \\
2 & \longmapsto & 0.a_{2,0}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots \\
3 & \longmapsto & 0.a_{3,0}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\cdots \\
4 & \longmapsto & 0.a_{4,0}a_{4,1}a_{4,2}a_{4,3}a_{4,4}\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}$$

我们可按如下康托儿（*Cantor*）的对角线方法从上表中构造出一个无限小数 $b = 0.b_0b_1b_2\cdots$，但它不在上面的表中，从而反证实数集是不可数的.

取第一位小数 b_0 是与 a_{00} 不同的任意数字，比如，若 $a_{00} \neq 1$，则令 $b_0 = 1$，若 $a_{00} = 1$，则令 $b_0 = 2$；取第二位小数 b_1 是与 a_{11} 不同的任何数字；一般地，取第 $i+1$ 位小数 b_i 是与 a_{ii} 不同的任何数字，等等. 下说明如是构造的 $b = 0.b_0b_1b_2\cdots$ 不同于上表中的任何数. 这是因为如果它对应自然数 i，则其第 $i+1$ 位小数 b_i 必等于 a_{ii}，但 b 的构造表明这是不可能的. 故 b 不同于任意自然数 i 对应，即它不在上表之中. 由此证得 $(0,1)$ 不可数，进而得知 $\mathbb{R}$ 不可数. $\square$

另证（利用闭区间套）： 假设 $\mathbb{R}$ 可数，即它与 $\mathbb{N}$ 可建立一一对应，故可将全部实数列举如下

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

取一闭区间 $[a_1, b_1]$，使得 $x_1 \notin [a_1, b_1]$，再将其三等分，则在其三等分区间中至少有一个不包含 x_2，记其为 $[a_2, b_2]$. 再将其三等分，则在其三等分区间中至少有一个不包含 x_3，记其为 $[a_3, b_3]$，等等. 如此操作下去，便得到一闭区间套

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots$$

它满足：$x_n \notin [a_n, b_n]$. 但由闭区间套定理知 $\exists! \xi \in [a_n, b_n]$, $\forall n$. 即 ξ 是一个不等于任何 x_n 的实数，这与假设矛盾. 定理得证. $\square$

上定理表明：实数集是比有理数“大得多”的无穷大，即 $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. 下面的定理则表明：无穷大的范畴本身是无穷分级的，即不存在最大的无穷大.

定理 11.3 给定一集合 A，记 $\mathcal{P}(A) := \{S \mid S \subseteq A\}$ 为其幂集（*power set*），即 A 中所有子集构成的集合. 则 $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

注记 11.2 当 A 是有限集时，设 $|A| = n$，则 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. 对无限集，上定理表明其幂集的势恒大于集合本身的势，故不存在最大势，无穷的阶梯可无限上升.

证明： （证明本质也是 *Cantor* 对角线）假设存在双射 $f: A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. 即每个元素 $a \in A$ 都有一子集 $S_a \subseteq A$ 与之对应，且对应是一对一的. 下面用明确的规则构造一子集 $S \subseteq A$，但它不与任何 $a \in A$ 对应，从而导出矛盾.

$\forall a \in A$，$S_a \subseteq A$ 是与之对应的子集，则 $a \in S_a$ 或 $a \notin S_a$. 现在按如下规则确定元素 a 是否在 S 中:

$$\begin{array}{ll} a \in S & \text{如果 } a \notin S_a \\ a \notin S & \text{如果 } a \in S_a \end{array}$$

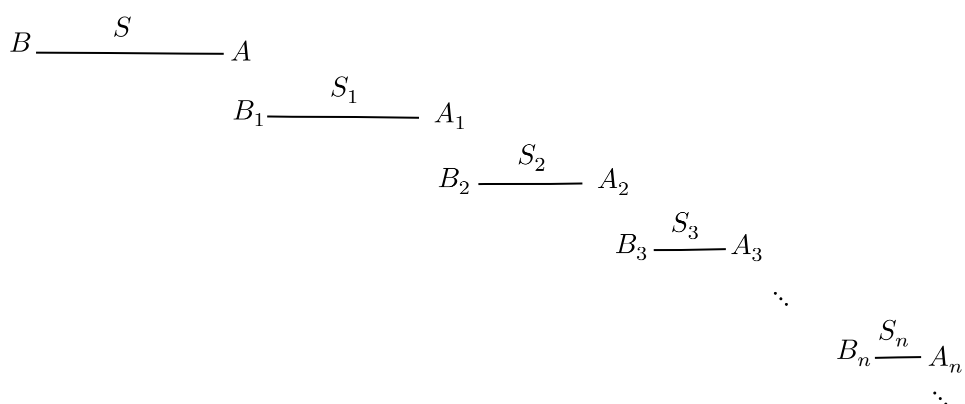
按上规则生成的集合 S 显然是 A 的一个子集. 如果它对应于某个 $a \in A$，即 $S = S_a$. 那么，如果 $a \in S$，则按规则，有 $a \notin S_a$；反之，如果 $a \notin S$，则按规则，有 $a \in S_a$，无论那种情况都导致矛盾. □

12 附录四：阿基里斯悖论

阿基里斯悖论（*paradox*）是古希腊的芝诺悖论中的一个，其一种陈述如下:

悖论: *若慢跑者在快跑者前一段，则快跑者永远赶不上慢跑者，因为追赶者必须首先跑到被追者的出发点，而当他到达被追者的出发点，慢跑者又向前了一段，又有新的出发点在等着它，有无限个这样的出发点.*

悖论的解决： 如下图所示：假设 B（快跑者）的速度是 A（慢跑者）的两倍，即：若 $v_A = v$，则 $v_B = 2v$. 再假设，在时间 $t = 0$ 时，B 在下图中 B 处，A 在下图中 A 处，且相距为 $\overline{AB} = S$.



设经时间 t_1，B 行至 $B_1 = A$ 处，同时 A 行至 A_1 处，设此时两者相距 $S_1 = \overline{B_1A_1}$；经时间 t_2，B 行至 $B_2 = A_1$ 处，同时 A 行至 A_2 处，设此时两者相距 $S_2 = \overline{B_2A_2}$；继续，经时间 t_n，B 从 B_{n-1} 行至 $B_n = A_{n-1}$ 处，同时 A 从 A_{n-1} 行至 A_n 处，设此时两者相距 $S_n = \overline{B_nA_n}$.

继续下去，就像数数一样：$1, 2, 3, \cdots$ 而**上悖论之所以会产生，就在于将这种数数记时的日常经验误认为是真实的时间流逝**，如同睡前数羊，或如听钟表嘀嗒嘀嗒. 虽然这种记时的离散模型在日常中很实用，但从根本上讲，对时间的这种印象其实是种错觉，或是我们日常模块化记时（按小时、按分、按秒等）的权宜之计.

那么，真实的时间流逝又如何呢？答：**真实的时间流逝类似连续统（continuum），即近乎实数轴那样的连续体.**

由此，我们也获知消解上悖论的方法. 此方法应类似于如何从整数（嘀嗒嘀嗒的离散时间）构造出实数（连续的时间——“抽刀断水水更流”），即如何利用极限的观念，从有理数集中逼出无理数（或填充有理数集中的无穷多空隙），以形成完备的实数集. 而这，也恰是微积分建立的基础哲学问题.

对我们的例子，我们计算如下：

$$t_1 = \frac{S}{v_B} = \frac{S}{2v} \quad \Longrightarrow \quad S_1 = v_A t_1 = v\frac{S}{2v} = \frac{S}{2}$$

$$\begin{aligned}
t_2 = \frac{S_1}{v_B} = \frac{S/2v}{2v} = \frac{S}{v}\frac{1}{2^2} \quad &\Longrightarrow \quad S_2 = v_A t_2 = v\frac{S}{2^2 v} = \frac{S}{2^2} \\
t_3 = \frac{S_2}{v_B} = \frac{S/2^2 v}{2v} = \frac{S}{v}\frac{1}{2^3} \quad &\Longrightarrow \quad S_3 = v_A t_3 = v\frac{S}{2^3 v} = \frac{S}{2^3} \\
&\vdots \\
t_n = \frac{S}{v}\frac{1}{2^n} \qquad\qquad & \qquad S_n = \frac{S}{2^n}
\end{aligned}$$

B 追上 A 意味着两者之间的距离为零，而

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S}{2^n} = 0$$

这表明：若以“嘀嗒嘀嗒”的离散时间为记时基准的话，则需听到无穷多次“滴滴答答”后才能看见 B 追上 A，由此便得到悖论：B 明明快于 A，且越来越咫尺相近的感觉，却无“有限”的追赶时间（**指有限的自然数** n）！

但若以连续的时间为衡量，则该悖论自行消解. 将时间看成是实数，且时间的流逝如实数在数轴上那样连绵不绝，则 B 追上 A 的时间为：

$$t = t_1 + \cdots + t_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S}{V}\frac{1}{2^n} = \frac{S}{v}\frac{1/2}{1-1/2} = \frac{S}{v} < \infty$$

即追赶的连续时间是有限的. 而在有限的时间 $t = \frac{S}{v}$ 之内，B 追上 A 跑的距离是 $v_B t = 2v\frac{S}{v} = 2S$.