作业　七

必做题：

1. 利用微分计算下列近似值：

$$a)\ \sqrt[3]{9};\qquad b)\ \arctan 1.04;\qquad c)\ \lg 11$$

2. 已知单摆的的周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 $g = 980cm/s^2$，l 为摆长（单位: cm），且原摆长为 20cm，为使周期 T 增大 $0.05s$，摆长约需增长多少？

3. 利用一阶微分的形式不变性，计算下列函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$，其中 u, v 都是 x 的函数.

$$a)\ y = \ln\sqrt{u^2+v^2};\qquad b)\ y = \arctan\frac{v}{u}$$

4. 计算下面的微商，并用复合函数求导的链式法则加以解释：

$$a)\ \frac{d(x^3-2x^6-x^9)}{d(x^3)};\qquad b)\ \frac{d\arcsin x}{d\arccos x}$$

5. 求下列极限（可用洛必达法则，无穷小替换或泰勒展开.）

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x-1};\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{\tan x - x};\qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right);\qquad f)\ \lim_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$$

$$g)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x};\qquad h)\ \lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$$

6. 确定常数 a, b 使得 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x>0 \\ ax^2+bx+1, & x\le 0 \end{cases}$ 二阶可导，并求 $f''(x)$.

7. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ e^{-\frac{1}{2}}, & x \le 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处的连续性.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某领域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + xf(x)}{x^3} = 0$，求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

9. 求下列方程所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

$$a)\, e^{2x+y} - \cos{(xy)} = e - 1; \qquad b)\, y\sin x - \cos{(x-y)} = 0$$

10. 求曲线 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 在点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ 处的切线方程和法线方程.

11. 求下列方程所确定隐函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$a)\ e^{x+y} = xy; \qquad b)\ \arctan\frac{x}{y} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

12. 求下列参数方程所确定函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$a)\ \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}; \quad b)\ \begin{cases} x = t - \ln{(1+t^2)} \\ y = \arctan t \end{cases}; \quad c)\ \begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$$

13. 求下列参数方程表示的曲线在给定处的切线方程和法线方程:

$$a)\ \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{4}; \qquad \begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases} \quad t = 0.$$

14. 验证 $y = e^t\cos t,\, x = e^t\sin t$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 满足下微分方程

$$y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$$

15. 设 $y = y(x)$ 是由 $\begin{cases} x = t^2 - 2t - 3 \\ e^y\sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

16. 求下列极坐标方程表示的曲线在指定点处的切线和法线方程:

$$a)\, r=\cos\theta+\sin\theta,\ \theta=\frac{\pi}{4}; \qquad b)\, r=a\sin 2\theta\,(a>0),\ \theta=\frac{\pi}{4}.$$

17. 写出下列函数在指定点的泰勒公式

(a) $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$ 在点 $x_0=-2$ 处;(可不用求导计算)

(b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x_0=-1$ 处的 n 阶泰勒公式;

(c) $f(x)=x^2\ln x$ 在点 $x_0=1$ 处的 n 阶泰勒公式;

(d) $f(x)=\sqrt{x}$ 在点 $x_0=4$ 处的 n 阶泰勒公式.

18. 利用泰勒公式求 $\sqrt[3]{30}$ 和 $\ln 1.2$ 的近似值(精确到 0.001).

19. 利用泰勒公式求下列极限:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right)$

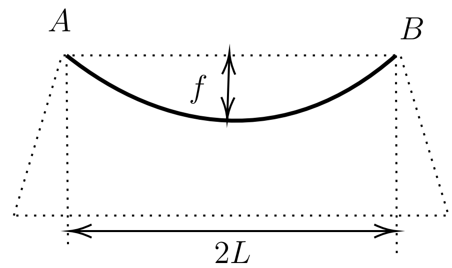
20. 求极限:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+2^x\right)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]; \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3^{x+1}-2^{x+1}}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

选做题:

1. 如下图所示的电缆 AOB 的长度为 s,跨度为 $2L$. 电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f,则电缆长可按下列公式计算

$$s=2L\left(1+\frac{2f^2}{3L^2}\right)$$



当 f 变化了 Δf 时，电缆长的变化约为多少?

2. 求证：星型线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 在两坐标轴间的切线长度为常数.

3. 当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$ 和 $\dfrac{1}{x}$ 是否为等价无穷小? 证明你的结论.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=Ce^{y}$ 确定（其中 C 为非零常数），设 f 具有二阶导数，且 $f'(y)\neq 1$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5. 设 $f(x)=(a+b\cos x)\sin x-x$ 在 $x\to 0$ 时是 x 的五阶无穷小，求常数 a 和 b.

6. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}=1$.

7. 计算下面极限

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(e^{x}-1\right)-\left(e^{\sin x}-1\right)}{\sin^4 3x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\sqrt[x^3]{1-x+\sin x}$$

8. 设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处连续，证明：当 $x\to 0$ 时，成立

$$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$$

并计算 A,B 的值.

9. (a) 证明：对 $n=0,1,2,\cdots$ 方程 $e^{x}+x^{2n+1}=0$ 有唯一实根 x_n.
   (b) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的极限存在.
   (c) 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，证明：$x_n-A$ 和 $\dfrac{1}{n}$ 是同阶无穷小.