作业　七

必做题:

1. 利用微分计算下列近似值:

$$a)\ \sqrt[3]{9};\qquad b)\ \arctan 1.04;\qquad c)\ \lg 11$$

解: a) 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，由于 $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. 由于 $f(8)=2$，$f'(8)=\frac{1}{3}\times 8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{12}$. 从而 $f(9)\approx f(8)(9-8)=\frac{25}{12}\approx 2.0833$.

b) $f(x)=\arctan x$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f(1.04)=f(1+0.04)\approx$

$$f(1)+f'(1)\times 0.04=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{50}\approx 0.9054$$

c) $f(x)=\lg x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln 10}$. 故 $\lg 11=f(11)=f(10+1)$

$$\approx f(10)+f'(10)\times 1=\lg 10+\frac{1}{10\ln 10}\approx 1.0434$$

2. 已知单摆的的周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 $g=980cm/s^2$，l 为摆长（单位: cm)，且原摆长为 20cm，为使周期 T 增大 $0.05s$，摆长约需增长多少?

解: $\frac{dT}{dl}=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{2\sqrt{l}}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}$，故 $\frac{dl}{dT}=\frac{\sqrt{gl}}{\pi}$. 则对 $l=20$，$\Delta T=0.05$，$g=980$，有

$$\Delta l\approx \left.\frac{dl}{dT}\right|_{l=20}\Delta T=\frac{\sqrt{980\times 20}}{\pi}\Delta T=\frac{140}{\pi}\times 0.05=\frac{7}{\pi}\approx 2.228\,(cm)$$

3. 利用一阶微分的形式不变性，计算下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$，其中 u,v 都是 x 的函数.

$$a)\ y=\ln\sqrt{u^2+v^2};\qquad b)\ y=\arctan\frac{v}{u}$$

解: a) $dy=\frac{d\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{d(u^2+v^2)}{2\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{2udu+2vdv}{2(u^2+v^2)}=\frac{uu'+vv'}{u^2+v^2}dx$

b) $dy = \dfrac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{1+\frac{v^2}{u^2}} = \dfrac{\frac{udv-vdu}{u^2}}{\frac{u^2+v^2}{u^2}} = \dfrac{udv-vdu}{u^2+v^2} = \dfrac{uv'-vu'}{u^2+v^2}dx.$

4. 计算下面的微商，并用复合函数求导的链式法则加以解释:

$$a)\ \frac{d(x^3-2x^6-x^9)}{d(x^3)};\qquad b)\ \frac{d\arcsin x}{d\arccos x}$$

解: a) 令 $t=x^3$，则 $x^3-2x^6-x^9=t-2t^2-t^3$，则有

$$\frac{d(t-2t^2-t^3)}{dt}=1-4t-3t^2$$

从而 $\dfrac{d(x^3-2x^6-x^9)}{d(x^3)}=1-4x^3-3x^6$，或 $\dfrac{d(x^3-2x^6-x^9)}{d(x^3)}=$

$$\frac{d(x^3-2x^6-x^9)}{dx}\frac{dx}{dx^3}=(3x^2-12x^5-9x^8)\frac{1}{3x^2}$$
$$=1-4x^3-3x^6$$

5. 求下列极限（可用洛必达法则，无穷小替换或泰勒展开. ）

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x-1};\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{\tan x-x};\qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right);\qquad f)\ \lim_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$$

$$g)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x};\qquad h)\ \lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$$

解: a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\frac{1}{x}}{2x-1}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x}=-\frac{1}{3}.$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{\tan x - x} \xlongequal{洛必达} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{\sec^2 x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sec^2 x - 1} \xlongequal{洛必达}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sec^2 x\tan x} \xlongequal{\tan x\sim x} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x} = 1$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x - \cos x} \xlongequal{洛必达} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+2x}{1+x+x^2}+\frac{-1+2x}{1-x+x^2}}{\sec x\tan x + \sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sin x(\sec^2 x+1)(1+x+x^2)(1-x+x^2)}$$

$$\xlongequal{\sin x\sim x} \lim_{x\to 0}\frac{2+4x^2}{(\sec^2 x+1)(1+x+x^2)(1-x+x^2)} = \frac{2}{2} = 1$$

e) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x\left(x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+o(x)\right)}{x^2\left(1+\frac{x}{2!}+o(x)\right)} = \frac{1}{2}$$

f) $$\lim_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x) \xlongequal{1-x=t} \lim_{x\to 0^+}\ln(1-t)\ln t \xlongequal{\ln 1-t\sim -}$$

$$\lim_{t\to 0^+} -t\ln t = -\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}} \xlongequal{洛必达} -\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$$

g) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\tan 2x\cdot\ln\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\tan 2x\cdot\ln(1+\tan x-1)}$$

$$\xlongequal{\ln(1+\tan x-1)\sim\tan x-1} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\tan 2x\cdot(\tan x-1)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{2\tan x\cdot(\tan x-1)}{(1-\tan^2 x)}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-2\tan x}{\tan x+1}} = e^{\frac{-2}{2}} = e^{-1} \quad \square.$$

h) $$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}} \xlongequal{洛必达} e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}} = e$$

6. 确定常数 a,b 使得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0\\ ax^2+bx+1, & x\le 0\end{cases}$ 二阶可导，并求 $f''(x)$.

解： 因 $f(0)=1=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 首先 f 在 0 处可导，即 $f'_-(0)=f'_+(0)$. 由定义

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^2+bx+1-1}{x}=b$$

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{2x}=0\end{aligned}$$

从而 $b=0$. $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x>0\\ 2ax, & x\le 0\end{cases}$. 若 f 而阶可导，则 $f''_-(0)=f''_+(0)$，由定义

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax}{x}=2a$$

$$\begin{aligned}f''_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}\right)=-\frac{1}{3}\quad\Longrightarrow\quad 2a=-\frac{1}{3}\quad\Longrightarrow\quad a=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解： $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-1}{x^2}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}$. 故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^{-\frac{1}{2}} = f(0)$. $\square$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + xf(x)}{x^3} = 0$，求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + xf(x)}{x^3} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)+x\left(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+f(0))x+f'(0)x^2+\left(\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)}{x^3} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1+f(0)=0 \\ f'(0)=0 \\ \frac{f''(0)}{2}=\frac{1}{6} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(0)=-1 \\ f'(0)=0 \\ f''(0)=\frac{1}{3} \end{cases}$$

9. 求下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

$$a)\, e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1; \qquad b)\ y\sin x-\cos(x-y)=0$$

解： a) 方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 两边对 x 求导.

$$e^{2x+y}\left(2+\frac{dy}{dx}\right)+\sin(xy)\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-2e^{2x+y}-y\sin xy}{e^{2x+y}+x\sin xy}$$

b) 方程 $y\sin x-\cos(x-y)=0$ 两边同时对 x 求导，得

$$\sin x\frac{dy}{dx}+y\cos x+\sin(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-y\cos x-\sin(x-y)}{\sin x-\sin(x-y)}$$

10. 求曲线 $x^3+y^3-3xy=0$ 在点 $(\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4})$ 处的切线方程和法线方程.

解： $x^3+y^3-3xy=0$ 两边微分，得 $3x^2dx+3y^2dy-3xdy-3ydx=0$，即 $(x^2-y)dx+(y^2-x)dy=0$. 代入 $x=2^{1/3}$, $y=2^{2/3}$，并将 dx，dy 分别写为 $x-2^{1/3}$，$y-2^{2/3}$，则得到法线方程如下

$$0(x-\sqrt[3]{2})+\left(\sqrt[3]{2^4}-\sqrt[3]{2}\right)(y-\sqrt[3]{4})=0\quad\Longrightarrow\quad y=\sqrt[3]{4}$$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y}{y^2-x}$. 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt[3]{2}}=\dfrac{2^{2/3}-2^{2/3}}{2^{4/3}-2^{1/3}}=0$，从而所求切线方程为

$$y-\sqrt[3]{4}=0(x-\sqrt[3]{2})\quad\Longrightarrow\quad y=\sqrt[3]{4}$$

11. 求下列方程所确定隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$$a)\ e^{x+y}=xy;\qquad b)\ \arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

解： $e^{x+y}=xy$ 两边对 x 求导，得 $e^{x+y}(dx+dy)=xdy+ydx$，解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-e^{x+y}}{e^{x+y}-y}$. 从而

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1-e^{x+y}(1+\frac{dy}{dx}))(e^{x+y}-y)-(x-e^{x+y})(e^{x+y}(1+\frac{dy}{dx})-\frac{dy}{dx})}{(e^{x+y}-y)^2}$$

$$=\frac{(e^{x+y}-y)^2-e^{x+y}(x-y)(e^{x+y}-y)-(x-e^{x+y})(x-y)e^{x+y}-(x-e^{x+y})^2}{(e^{x+y}-y)^3}$$

b) 方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 两边同时对 x 求导，知

$$\frac{\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad\Longleftrightarrow\quad y-x\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}-1\right)(y+x)-(y-x)\left(\frac{dy}{dx}+1\right)}{(y+x)^2}=\frac{-2x-\frac{2y(y-x)}{x+y}}{(x+y)^2}=\frac{-2(x^2+y^2)}{(x+y)^3}$$

12. 求下列参数方程所确定函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$a)\ \begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases};\quad b)\ \begin{cases} x=t-\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases};\quad c)\ \begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$$

解： a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\dfrac{-\sin t}{\cos t}=-\tan t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}(-\tan t)=\frac{d(-\tan t)}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=$$

$$-\sec^2 t\frac{1}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=\frac{\sec^2 t}{a\sin t\cos^2 t}=\frac{1}{a\sin t\cos^4 t}$$

b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{1-2t+t^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-2t+t^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-2t+t^2}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{-2+2t}{(1-2t+t^2)^2}\frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{(t-1)(t^2+1)}{(1-2t+t^2)^2}$$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = \dfrac{tf''(t)}{f''(t)} = t.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dt}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f''(t)}$$

13. 求下列参数方程表示的曲线在给定处的切线方程和法线方程:

$$a) \begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad t = \frac{\pi}{4}; \qquad \begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases} \quad t = 0.$$

解: a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{a(\cos t + t\sin t - \cos t)}{a(-\sin t + t\cos t + \sin t)} = \dfrac{t\sin t}{t\cos t} = \tan t$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\tan t}{dx} = \frac{d\tan t}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \sec^2 t\frac{1}{at\cos t} = \frac{1}{at\cos^3 t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{a\pi}{4}\frac{1}{2^{3/2}}} = \frac{2^{\frac{7}{2}}}{a\pi}$$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \left.\dfrac{-e^{-t}}{2e^t}\right|_{t=0} = \dfrac{-1}{2}.$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{-1}{2e^{2t}} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{-1}{2e^{2t}}\right)\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}} = \left(\dfrac{-e^{-2t}}{2}\right)\dfrac{1}{2e^t} = -\dfrac{1}{4}e^{-3t}$. 从而 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = -\dfrac{1}{4}e^{-0} = -\dfrac{1}{4}.$

14. 验证 $y = e^t\cos t$, $x = e^t\sin t$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 满足下微分方程

$$y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$$

解: $y' = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{e^t\cos t - e^t\sin t}{e^t\cos t + e^t\sin t} = \dfrac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$, $y''(t) =$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}\right)\frac{1}{e^t\cos t + e^t\sin t}$$

$$= \frac{(-\sin t - \cos t)(\cos t + \sin t) - (\cos t - \sin t)(\cos t - \sin t)}{e^t(\cos t + \sin t)^3}$$

$$= \frac{-2\sin^2 t - 2\cos^2 t}{e^t(\cos t + \sin t)^3} = \frac{-2}{e^t(\sin t + \cos t)^3}$$

$$y''(x+y)^2 = \frac{-2}{e^t(\sin t + \cos t)^3} e^{2t}(\cos t + \sin t)^2 = \frac{-2e^t}{\sin t + \cos t}$$

$$2(xy' - y) = 2\left(\frac{e^t \sin t(\cos t - \sin t)}{\cos t + \sin t} - e^t \cos t\right)$$

$$= 2e^t \frac{-\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos t + \sin t} = \frac{-2e^t}{\sin t + \cos t}$$

15. 设 $y = y(x)$ 是由 $\begin{cases} x = t^2 - 2t - 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定的函数, 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解： $x'(t) = 2t - 2$，然后 $e^y \sin t - y + 1 = 0$ 两边同时对 t 求导

$$e^y \sin t y'(t) + e^y \cos t - y'(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(t) = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$$

当 $t = 0$ 时，$x = -3$，$y = 1$，故 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{e^y \cos t}{2(t-1)(1 - e^y \sin t)}$. 且 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \dfrac{e}{2(-1)(1)} = -\dfrac{e}{2}$

16. 求下列极坐标方程表示的曲线在指定点处的切线和法线方程:

$$a)\, r = \cos\theta + \sin\theta,\ \theta = \frac{\pi}{4}; \qquad b)\, r = a\sin 2\theta\, (a > 0),\ \theta = \frac{\pi}{4}.$$

解： a) $\begin{cases} x = r\cos\theta = \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta \\ y = r\sin\theta = \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{\cos 2\theta + \sin 2\theta}{\cos 2\theta - \sin 2\theta} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta = \frac{\pi}{4}} = -1$$

当 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 时，$(x, y) = (1, 1)$，故切线方程为 $x + y - 2 = 0$；法线方程为 $x - y = 0$.

b) $\begin{cases} x = ar\sin 2\theta\cos\theta \\ y = a\sin 2\theta\sin\theta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-r\cos\theta}{-r\sin\theta}$，即 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta = \frac{\pi}{4}} = -1$. 当

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$(x,y)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$. 故切线方程为 $x-y-\sqrt{2}a=0$，法线方程为 $x-y=0$.

17. 写出下列函数在指定点的泰勒公式

(a) $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$ 在点 $x_0=-2$ 处；（可不用求导计算）

解： $f(x)=(x+2-2)^3-2(x+2-2)^2+3(x+2-2)-4=$

$$(x+2)^3+12(x+2)-6(x+1)^2-8-2(x+2)^2+8(x+2)-8$$

$$+3(x+2)-10=-26+23(x+2)-8(x+2)^2+(x+2)^3$$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $x_0=-1$ 处的 n 阶泰勒公式；

解： $f(x)=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x+1-1}=$

$$-\frac{1}{1-(x+1)}=-\sum_{k=0}^{n}(x+1)^k+o((x+1)^n)$$

(c) $f(x)=x^2\ln x$ 在点 $x_0=1$ 处的 n 阶泰勒公式；

解： $f(x)=x^2\ln x=(x+1-1)^2\ln\left(1+(x-1)\right)=$

$$\left(1-2(x+1)+(x+1)^2\right)\times$$

$$\left(x+1-\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x+1)^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n}+o((x+1)^n)\right)=$$

$$(x+1)-\frac{5}{2}(x+1)^2+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n-2}\right)(x+1)^n+o((x+1)^n)$$

(d) $f(x)=\sqrt{x}$ 在点 $x_0=4$ 处的 n 阶泰勒公式.

解： $f(x)=\sqrt{x}=\sqrt{4+x-4}=2\sqrt{1+\dfrac{x-4}{4}}=2\left(1+\dfrac{x-4}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=$

$$2\left(1+\frac{1}{2}\frac{x-4}{4}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\left(\frac{x-4}{4}\right)^2+\cdots+\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{x-4}{4}\right)^n+o((x-4)^n)\right)$$

18. 利用泰勒公式求 $\sqrt[3]{30}$ 和 $\ln 1.2$ 的近似值（精确到 0.001）.

解： $\sqrt{30}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$. 令 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$，则

$$f(x)=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5}{81}x^3+\frac{1}{4!}\frac{2\times5\times8}{3^4}(1+\xi)^{-\frac{11}{3}}$$

令 $x=\frac{1}{9}$，则 $\xi\in(0,1/9)$，此时 $\frac{80}{4!3^4}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\xi)^{11}}}<0.001$，故按下近似 $\sqrt{30}$，可达要求精度

$$\sqrt{30}\approx3\left(1+\frac{1}{27}+\frac{5}{81}\frac{1}{9^3}\right)\approx3.10725$$

同理 $\ln 1.2=\ln(1+0.2)$, 考虑函数 $f(x)=\ln(1+x)=$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{-\frac{3!}{(1+\xi)^4}}{4!}x^4$$

令 $x=0.2$，则 $\xi\in(0,0.2)$，则 $\left|-\frac{3!}{4!(1+\xi)^4}(0.2)^4\right|=\frac{(0.2)^4}{4(1+\xi)^4}<0.001$，故符合要求的近似给出如下

$$\ln 1.2\approx0.2-\frac{0.2^2}{2}+\frac{0.2^3}{3}\approx0.1827$$

19. 利用泰勒公式求下列极限:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$;

解： $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x-x^2}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3-x-x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)x^3}{x^3}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{3}$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right)$

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt[5]{x^5\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}}-x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{5}}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1+\frac{1}{5x}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x\left(1-\frac{1}{5x}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)=\frac{2}{5}$$

20. 求极限:

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]$; $\qquad b)$ $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3^{x+1}-2^{x+1}}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

解： a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}\right)^2+o\left(\frac{3}{x}\right)^2\right)$

先计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln(1+2^x)}{x}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{1}\frac{2^x\ln 2}{1+2^x}=3\ln 2.$

$$\text{而}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2}{2x(1+2^x)}=0$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln(1+2^x)}{x}=3\ln 2.$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3^{x+1}-2^{x+1}}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=exp\left\{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3^{x+1}-2^{x+1}}{x+1}\right)\right\}$. 用洛必达法

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{3^{x+1}-2^{x+1}}{x+1}\right)=$

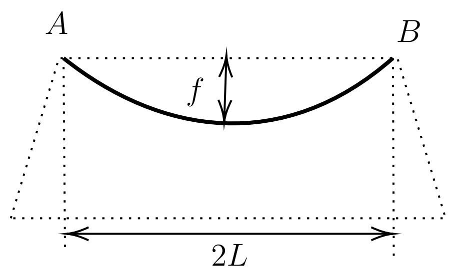
$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{3^{x+1}-2^{x+1}}\frac{(x+1)\left((\ln 3)3^{x+1}-(\ln 2)2^{x+1}\right)-(3^{x+1}-2^{x+1})}{(x+1)^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln 3)3^{x+1}-(\ln 2)2^{x+1}}{3^{x+1}-2^{x+1}}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=3\ln 3-2\ln 2-1=\ln\frac{3^3}{2^2}-1$$

选做题:

1. 如下图所示的电缆 AOB 的长度为 s，跨度为 $2L$. 电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f，则电缆长可按下列公式计算

$$s=2L\left(1+\frac{2f^2}{3L^2}\right)$$



当 f 变化了 Δf 时，电缆长的变化约为多少?

解: $\Delta s\approx ds=s'(f)\Delta f=\dfrac{8f}{3L}\Delta f.$

2. 求证：星型线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 在两坐标轴间的切线长度为常数.

证明: 对方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 两边微分，得 $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy=0.$

$$\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$

设 (x_0,y_0) 是星型线上任意一点，即 $x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. 过该点的切线方程是

$$y-y_0=-\frac{x_0^{-\frac{1}{3}}}{y_0^{-\frac{1}{3}}}(x-x_0)\quad\Longleftrightarrow\quad x_0^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)+y_0^{-\frac{1}{3}}(y-y_0)=0$$

则该直线与 x-轴和 y-轴的交点分别为 $\left(x_0+x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{\frac{2}{3}},0\right)$ $\left(0,y_0+x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}\right)$. 故两坐标轴间该切线的长度的平方为

$$\left(x_0+x_0^{\frac{1}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(y_0+x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}\right)^2=x_0^2+2x_0^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{4}{3}}+y_0^2+2x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{4}{3}}+x_0^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}$$

$$=x_0^2+y_0^2+2x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}})+x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}\left(y_0^{\frac{2}{3}}+x_0^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=x_0^2+y_0^2+3a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}$$

对 $x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 两边取三次方，得 $x_0^2+y_0^2+3x_0^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+3x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{4}{3}}=3$，即

$$x_0^2+y_0^2+3x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}\left(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}\right)=x_0^2+y_0^2+3a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}=a^2$$

3. 当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$ 和 $\dfrac{1}{x}$ 是否为等价无穷小？证明你的结论.

证明： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1$，故它们是等价无穷小.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=Ce^y$ 确定（其中 C 为非零常数），设 f 具有二阶导数，且 $f'(y)\neq 1$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： 方程 $xe^{f(y)}=Ce^y$ 两边对 x 求导，得

$$e^{f(y)}+xe^{f(y)}f'(y)y'(x)=Ce^yy'(x)\qquad(*)$$

$$\Longrightarrow\quad y'(x)=\frac{e^{f(y)}}{Ce^y-xe^{f(y)}f'(y)}$$

$(*)$ 两边再对 x 求导，得

$$e^ff'y'+e^ff'y'+x\left(e^ff'y'\right)'=Ce^yy'+Ce^yy''$$

$$2e^ff'y'+x\left(e^ff'^2y'^2+e^f(f''y'^2+f')y''\right)=Ce^yy'+Ce^yy''$$

$$y''=\frac{2e^ff'y'+xe^ff'^2y'^2-Cy'e^y}{Ce^y-xe^f(f''y'^2+f')}$$

5. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{f(x)}=1$.

证明： $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故也连续，从而 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$. 则 $f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+o(x)=f'(0)x+o(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} x^{f'(0)x+o(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{(f'(0)x+o(x))\ln x}$$

只需证明 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} o(x)\ln x$ 也为零.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

6. 计算下面极限

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4 3x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \sqrt[x^3]{1-x+\sin x}$$

解： a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4 3x} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-\frac{(e^x-1)^3}{3!}+o(e^x-1)^4-\left(\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{3!}+\frac{\sin^4 x}{4!}+o(\sin^4 x)\right)}{(3x)^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^3}{3!}(1+\frac{x}{2!}+\cdots)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}(1-\frac{x^2}{3!}+\cdots)^2+\frac{x^3}{3!}(1-\frac{x^2}{3!}+\cdots)^3\right.}{3^4x^4}$$

$$\frac{\left.+\frac{x^4}{4!}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\cdots\right)^4+o(x^4)\right)}{3^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}{3^4x^4} = \frac{\frac{2}{4!}}{3^4} = \frac{2}{4!\cdot 3^4}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x^3]{1-x+\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} (1-x+\sin x)^{\frac{1}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1-x+\sin x)}{x^3}}$

$$= exp\left\{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x+\sin x)}{x^3}\right\} \xlongequal{\text{洛必达}} exp\left\{\lim_{x\to 0} \frac{-1+\cos x}{3x^2(1-x+\sin x)}\right\}$$

$$= exp\left\{\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{3x^2}\right\} = e^{-\frac{1}{6}}$$

7. 设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处连续，证明：当 $x\to 0$ 时，成立

$$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$$

并计算 A,B 的值.

证明： 首先有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，即知 $f(x)-e$ 是当 $x\to 0^+$ 时的无穷小量，我们试比较其与 x 本身的阶，即考虑下极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\xlongequal[f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=e]{\text{因 } f \text{ 在 } 0 \text{ 处连续}}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

若 $f'(0)\neq 0$，则上计算说明 $f(x)-f(0)$ 与 $f'(0)x$ 同阶，即 $f(x)-e=f'(0)x+o(x)$. 下面表明 $f(x)$ 在 0 附近可导. 首先，当 $x\neq 0$ 时，有

$$f'(x)=\frac{d}{dx}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=f(x)\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=f(x)\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

显然连续，故 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

$$\xlongequal{\ln(1+x)\sim x}\lim_{x\to 0}f(x)\frac{x-(1+x)x}{x^2(1+x)}=f(0)\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(1+x)}=-e$$

从而 $f(x)=e-ex+o(x)$. □.

8. (a) 证明：对 $n=0,1,2,\cdots$ 方程 $e^x+x^{2n+1}=0$ 有唯一实根 x_n.

(b) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的极限存在.

(c) 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，证明：$x_n-A$ 和 $\dfrac{1}{n}$ 是同阶无穷小.

证明： a) 记 $f_n(x)=e^x+x^{2n+1}$，则对任意 $n=0,1,\cdots$ 函数 f 都连续，且因 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$，而 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{2n+1}=\pm\infty$，知 $\lim\limits_{n\to\pm\infty}f_n(x)=\pm\infty$. 故一定存在 $M_n<0$（事实上取 $M_n=-1$ 即可），使得 $f_n(M_n)<0$，但 $f_n(0)=1$，从而由零点定理知 $\exists x_n\in(M_n,0)$，使得 $f_n(x_n)=0$，即 x_n 是 $e^x+x^{2n+1}=0$ 的一根. 为证其唯一性，只需表明 $f_n(x)$ 在给定区间

上的单调性，为此计算导函数 $f_n'(x) = e^x + (2n+1)x^{2n}$，它在定义域上恒正，故 $f_n(x)$ 在其定义域上单调增加.

b) $x_n \in (-1, 0)$ 满足 $e^{x_n} + x_n^{2n+1} = 0$，即 $e^{x_n} = (-x_n)^{2n+1}$. 两边取对数

$$x_n = (2n+1)\ln(-x_n) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \ln(-x_n) = \frac{x_n}{2n+1} = 0$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$. 即 $A = -1$.

c) $x_n - A = x_n + A = e^0 - e^{-\frac{x_n}{2n+1}}$, 由中值定理, 知 $\exists \xi_n \in \left(0, -\dfrac{x_n}{2n+1}\right)$, 使得

$$\frac{x_n - A}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(-e^{\xi_n} \frac{x_n}{2n+1} \cdot n\right) = -e^0(-1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \square.$$