二阶线性微分方程

不难将一阶线性方程的理论推广到二阶，乃至更高阶。一般 n 阶线性微分方程可写成如下形式

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$$

$f(x)\equiv 0$ 时，方程称为是对应的齐次方程

令 $D=\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+p_n(x)$，它是将 y 变为 $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y$ 的线性算子，故下面结论是一阶情形的直接~~同构~~推广。

定理（叠加原理）：设 $y_1,\cdots,y_n$ 是齐次方程 $Dy=0$ 的 n 个解，则其任意线性组合 $C_1y_1+\cdots+C_ny_n$ 也是 $Dy=0$ 的解。（换言之齐次方程的通解形成一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间）

定理（存在唯一）：设 $p_1(x),\cdots,p_n(x)$，$f(x)$ 在 I 上连续，则对任意初值问题 $\begin{cases}Dy=f\\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_n\end{cases}$ 有唯一解

定理(解的结构)：对 $Dy=f$，$\exists\, n$ 个 ②

独立(线性无关)的解 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，使

对应齐次方程 $Dy=0$ 的

得 $Dy=f$ 的通解可写为

$$y(x)=y_*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

$Dy=f$ 的任一特解

$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 称为 $Dy=0$ 的一个基本解组(即解空间的一组基)

证明：由"解的存在唯一定理"知下初值问题
$$\begin{cases} Dy=0 \\ y(x_0)=1,\ y'(x_0)=\cdots=y^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$
有唯一解 $y_1(x)$，同理
$$\begin{cases} Dy=0 \\ y^{(k)}(x_0)=1,\ y^{(j)}(x_0)=0,\ j\neq k \end{cases}$$
有唯一解 $y_k(x)$，$k=0,1,\cdots,n-1$。下证这 n 个解 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 线性无关

设 $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$，两边求导

得 $k_1y_1'(x)+k_2y_2'(x)+\cdots+k_ny_n'(x)=0$、继续求导

$\cdots\cdots$

$k_1y_1^{(n-1)}(x)+k_2y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+k_ny_n^{(n-1)}(x)=0$。代入 x_0 得

③

$$\begin{cases} k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) + \cdots + k_n y_n(x_0) = 0 \\ k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) + \cdots + k_n y_n'(x_0) = 0 \\ \cdots\cdots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + k_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + k_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$ 即

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ \cdots \\ k_n = 0 \end{cases}$$ 故知 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 线性独立，即为基本解组.

给定 $Dy=f$ 的任一特解 y_* 则对它的任一解 y，都有 $D(y-y_*)=0$，即 $\exists\, C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$，使得 $y-y_* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$.

即 $y = y_* + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$. □

下面以 $\overbrace{n=2}^{\text{为例}}$ 详细讨论.

$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x)$. 对应齐次方程为 $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$. 由上定理知它有两个独立解，记为 $y_1(x), y_2(x)$，则齐次方程的通解为 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. 那么，非齐次方程的通解为 $y(x) = y_*(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

任一特解.

例: $y''+y=0$, 不难验证 $y_1(x)=\sin x$ 和 $y_2(x)=\cos x$ 都是解. 且相互独立. 故其通解为 $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

又考虑 $y''+y=\tan x$, 设其特解具有形式 $y_*(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$ (常数变易)

则 $$y_*'(x)=C_1'(x)\cos x-C_1(x)\sin x+C_2'(x)\sin x+C_2(x)\cos x$$

不妨设 $C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0$, 则

$$y_*'(x)=-C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x,$$ 从而

$$y_*''(x)=-C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x-C_1(x)\cos x-C_2(x)\sin x$$

代入方程, 得 $-C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\tan x$

联立 $C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0$ 解得

$$C_1'(x)=-\tan x\sin x,\quad C_2'(x)=\sin x.$$

故 $$C_1(x)=\sin x+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}+C_1$$

$$C_2(x)=-\cos x+C_2$$

故通解为: $$y=\overbrace{\left(\sin x+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\cos x-\cos x\sin x}^{\text{特解}\ (C_1=C_2=0)}+\underbrace{C_1\cos x+C_2\sin x}_{\text{齐次方程通解}}$$

若已知齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个非零解 $y_1(x)$，则利用"常数变易法"可求一与之独立的解：

定理（刘维尔 Liouville 公式）：设 $y_1(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的非零解，则下~~解~~是与之独立的第二解。

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

证明：设 $y_2(x)=C(x)y_1(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的第二解，则 $y_2'=Cy_1'+C'y_1$

$y_2''=Cy_1''+2C'y_1'+C''y_1$，代入

得 $y_1C''+(2y_1'+py_1)C'+\underbrace{(y_1''+py_1'+qy_1)}_{\equiv 0}C=0$

即 $\dfrac{dC'}{dx}=-\dfrac{2y_1'+py_1}{y_1}C'$ （分离变量）

$$C'=e^{-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+p\right)dx+C}=e^{-2\ln|y_1|-\int pdx+C}$$

$$=C_1y_1^{-2}e^{-\int pdx}$$ 令 $C_1=1$，积分之，

得 $C(x)=\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx$，从而

$$y_2(x)=C(x)y_1(x)=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int pdx}dx$$ □

例: $x^2y''+xy'-y=0$. 即 $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$

解: $y_1(x)=x$ 是一解. 由 Liouville 公式.

$$y_2(x)=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p\,dx}=x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx$$

$$=x\int x^{-2}e^{-\ln x}dx=x\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)=-\frac{1}{2x}$$

是与 $y_1(x)$ 独立的另一解. 则通解为

$$y=C_1x+\frac{C_2}{x}.$$