作业　三　解答

必做题：

1. $\forall \alpha > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = ?$ 证明你的论断.

   解答： 所求极限是 0，下面严格证明之. $\forall \epsilon > 0$（不妨设 $0 < \epsilon < 1$），需找到 $N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N$，成立 $\dfrac{1}{n^\alpha} < \epsilon$，即 $n^\alpha > 1/\epsilon$. 两边取对数，得 $\alpha \ln n > \ln(1/\epsilon)$，即 $\ln n > \dfrac{\ln(1/\epsilon)}{\alpha}$. 故取 $N = \left[e^{\frac{\ln(1/\epsilon)}{\alpha}}\right]$，则当 $n > N$ 时，由上讨论，必由 $\frac{1}{n^\alpha} < \epsilon$. $\quad\square$.

   注： 更简单的证法是在 $n^\alpha > 1/\epsilon$ 两边同时取 α 次根，得到 $n > \sqrt[\alpha]{1/\epsilon}$，故取 $N = \left[\sqrt[\alpha]{1/\epsilon}\right]$ 即可.

2. 利用夹逼定理计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ （其中 $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$；$(2n)!! = (2n)(2(n-1))\cdots 4\cdot 2$）

   解： $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \dfrac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2n)\cdot(2(n-1))\cdots 4\cdot 2} = \dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}$

$$= \left(1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

   由于 $\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{4n^2} > \dfrac{n-1}{n}$，故 $1 - \dfrac{1}{2n} > \sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$；另一方面

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{(2n-1)^2}{4n^2} < \frac{(2n-1)^2}{4n^2-1} = \frac{2n-1}{2n+1} \quad\Longrightarrow\quad 1-\frac{1}{2n} < \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$$

   由此可知，$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!} = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) <$

$$< \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

另一方面，$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!} = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2n}\right) >$

$$> \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}}$$

综合即知

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{2n+1}} = 0$，故由夹逼定理知所求极限为 0.

3. 设 $A = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}(a_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, m)$，证明（提示：讲义例 *5.3* 的自然推广）

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = A$$

证明： 不妨设 $a_m = A$，则一方面

$$\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \le \sqrt[n]{a_m^n + a_m^n + \cdots + a_m^n} = \sqrt[n]{m a_m^n} = A\sqrt[n]{m}$$

另一方面 $\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \ge \sqrt[n]{a_m^n} = a_m = A$，故

$$A \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \le A\sqrt[n]{m}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m} = 1$，故由“夹逼定理”知所求极限为 A.

注： 下面各计算题（即无需用 $\epsilon - N$ 语言证明）用到的理论基础是一些基本极限（如第 *7* 题中），以及极限的四则运算法则，我们课上已对极限运算法则给与了严格的证明，但因课时所限，例题没来得及细讲. 大家如想提前做这些作业，可参考讲义第 *5* 节的例子和第 *8* 节中例 *8.1*—例 *8.8*. 如能提前消化解决，甚好，也非常鼓励，是保持稳中争进的正确姿态！而如遇忙或力不逮，国庆回来后第一节课会就典型例题讲解.

4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3n^3+2n^2+1} + \dfrac{2^2}{3n^3+2n^2+1} + \cdots + \dfrac{n^2}{3n^3+2n^2+1}\right)$

解： $\dfrac{1}{3n^3+2n^2+1}+\dfrac{2^2}{3n^3+2n^2+1}+\cdots+\dfrac{n^2}{3n^3+2n^2+1}=\dfrac{1+2^2+\cdots+n^2}{3n^3+2n^2+1}$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(3n^3+2n^2+1)}=\frac{2n^3+3n^2+n}{18n^3+12n^2+6}=\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{18+\frac{12}{n}+\frac{6}{n^3}}$$

从而所求极限为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n^2+n}{18n^3+12n^2+6}=\dfrac{2}{18}=\dfrac{1}{9}.$

5. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$

解： $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \xlongequal{\text{有理化}} \sqrt{n}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，故由极限运算的四则法则可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n+1}{n}}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

6. 利用结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$

(a) 计算下列个极限（提示：本质上是凑出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 这种结构，一般地，只要凑出 $\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}$ 就可以了，其中 $\square$ 是任意（正负）无穷大量）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3};\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}$$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{2n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right)^2 \xlongequal{n^3:=m} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m\right)^2$

$$\xlongequal{\text{括号内式子有极限时}}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2=e^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{(-1)^n\sin n}{n}}$$

括号内数列极限为 e,指数项数列极限为 0（因其是有界量 $(-1)^n\sin n$ 与无穷小量 $\dfrac{1}{n}$ 的乘积，故是无穷小量）. 然后应用下结论

> 如果 $f(n)>0$，$g(n)$ 都有极限，极限分别为 $A>0$, B，
> 则 $f(n)^{g(n)}$ 也有极限，且极限为 A^B.

证明思路： $f(n)^{g(n)}=e^{g(n)\ln f(n)}$，则 $g(n)\ln f(n)\to B\ln A$；故 $e^{g(n)\ln f(n)}\to e^{B\ln A}=A^B$（相信大家在直观上能理解这里的推理，当然严谨说来，这里隐藏地使用了函数极限和数列极限的“互动”——将在函数极限的篇章中展开细讲）. $\square$.

应用上结论，知所求极限为 $e^0=1$.

(b) 以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}=e$ 为例说明上面提示中说明的合理性.（类比于课上我们处理的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，由它知 $\lim_{n\to\infty}(1/n)^{1/n}=1$，进一步能否得出对函数 x^x，当 $x\to0^+$（即从 0 的右侧趋于 0）是函数取值的极限也为 1. 如回答是肯定的，则“$0^0=1$”的规定就有合理性了. 对这类问题的思考会让我们打通本章内容和下一章函数极限之间的壁垒.)

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\xlongequal{m=-n}\lim\limits_{m\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m\xlongequal[\text{极限}]{\text{转化为函数}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

$$=\lim_{x\to-\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

而 $\lim\limits_{x\to-\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

7. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}$（提示如上题中的，关键还是"凑结构"）

解： $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{2}{n}}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{2}{n}}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2-n}}\right)^{\frac{n^2}{2-n}\frac{2-n}{n^3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{2}{n}}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{2-n}}\right)^{\frac{n^2}{2-n}}\right)^{\frac{2-n}{n^3}}=1\cdot e^0=1$$

注： 若按 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+(1-n+n^2)\right)^{\frac{1}{1-n+n^2}}\right)^{\frac{1-n+n^2}{n}}$ 而得到极限为 $e^\infty=\infty$，则是错误的解法，这是因为若要用上页方框内的结果的前提条件是 $f(n),g(n)$ 的极限都存在，此时才有 $f(n)^{g(n)}\to A^B$，否则禁止使用该结论.

8. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}\right)$

解： 所求极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+\cdots+2n-1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1.$

9. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}\right)$

解： 所求极限为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

10. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

解： $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\cdots=2\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)$$

故所求极限为 $\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)=2.$

11. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$

解： 记 $a_n=1-\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=1-\frac{2}{n(n+1)}=\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$

$$故\quad b_n:=a_2a_3\cdots a_n=\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}$$

由此可见，所求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=\frac{1}{3}.$

选做题：

1. 给定数列 $\{a_n\}$，$\forall m\in\mathbb{N}$，记 $S_m:=\sum\limits_{k=1}^{m}a_k$，即 $S_1=a_1$，$S_2=a_1+a_2$，$S_3=a_1+a_2+a_3\quad\cdots$

   证明：如果 $\{S_m\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 是无穷小量. 并举例说明，$\{a_n\}$ 是无穷小并不能保证 $\{S_n\}$ 的收敛. （这题结论在讲无穷级数是会用到）

   证明: 注意到 $a_n=S_n-S_{n-1}$，设 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0\quad\square.$$

   取 $a_n=1/n$，则 $\{a_n\}$ 是无穷小，但 $\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 不收敛.

2. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} = A$. (讲义 *16* 页例 *4.4* 的完整证明需此结论.)

证明: 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,故 $\forall \epsilon > 0, \exists\, N_1 \in \mathbb{N}$,使得 $\forall n > N_1$,有 $|x_n - A| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

$$\text{故} \quad \left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} - A\right| \le \frac{|x_1-A|+\cdots+|x_n-A|}{n}$$

$$\le \frac{|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n} + \frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2}$$

由于 $|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|$ 是个定数, 故对上面的 $\epsilon > 0$, 可取 $N_2 \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 成立

$$\frac{|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n} < \frac{\epsilon}{2}$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 综上, 则当 $n > N$ 时, 我们有

$$\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} - A\right| \le \frac{|x_1-A|+\cdots+|x_{N_1}-A|}{n} + \frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2}$$

$$\le \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \square$$