期末复习题

目录

1 重积分

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=(\quad)$

   $A.\ \int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy.$ $\qquad B.\ \int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy.$

   $C.\ \int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy.$ $\qquad D.\ \int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy.$

2. 记 $I_1=\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma,\ I_2=\iint_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$,$I_3=\iint_D \cos(x^2+y^2)^2d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$,则 ( )

   $A.\, I_3>I_2>I_1.\quad B.\, I_1>I_2>I_3.\quad C.\, I_2>I_1>I_3.\quad D.\, I_3>I_1>I_2.$

3. 记 $I_i=\iint_{D_i}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma\ (i=1,2,3)$,其中 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$,$D_2=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\le 1\}$,$D_3=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\le 1\}$,则 I_1,I_2,I_3 的大小满足 ( )

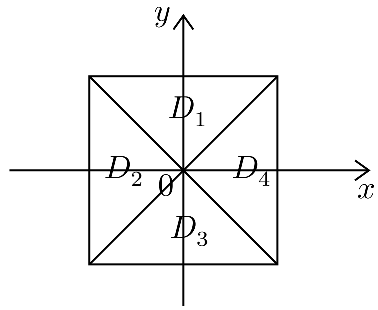
   $A.\, I_1<I_2=I_3.\quad B.\, I_2=I_3<I_1.\quad C.\, I_2<I_3=I_1.\quad D.\, I_3<I_2=I_1.$

4. 设 D_k 是 $D=\{(x,y)\mid x^2+4y^2\le 1\}$ 位于第 k 象限的部分,则对 $I_k=\iint_{D_k}(y^2-x^2)dxdy$,有 ( )

   $A.\ I_1>0.\qquad B.\ I_2=0.\qquad C.\ I_3<0.\qquad D.\ I_4>0.$

5. 如下图,正方形 $\{(x,y)\mid |x|\le 1,|y\le 1|\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k\,(k=1,2,3,4)$,$I_k=\iint_{D_k}y\cos x\,dxdy$,则 ( ) $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\}=$

   $A.\, I_1\qquad B.\, I_2.\qquad C.\, I_3.\qquad D.\, I_4.$



6. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dy =$

A. $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

B. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy.$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr.$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$

7. 设 D 是第一象限中的曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint_D f(x,y)dxdy = (\quad)$

A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$ B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr.$ D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr.$

8. 设 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于 (   )

$A.\ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$　　　$B.\ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

$C.\ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$　　　$D.\ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

9. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)$ 等于 (   )

$A.\ 2f(2).$　　　$B.\ f(2).$　　　$C.\ -f(2).$　　　$D.\ 0.$

10. 设空间区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ z \ge 0\}$（其中 $R>0$）和 $\Omega_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$，则下列四式中正确的是 (   )

$A.\ \iiint_\Omega x dV = 4 \iiint_{\Omega_1} x dV.$　　　$B.\ \iiint_\Omega y dV = 4 \iiint_{\Omega_1} y dV.$

$C.\ \iiint_\Omega z dV = 4 \iiint_{\Omega_1} z dV.$　　　$D.\ \iiint_\Omega xyz dV = 4 \iiint_{\Omega_1} xyz dV.$

11. 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的连续偶函数,积分区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$，则 $\iiint_\Omega f(x)dV$ 在 $[0,1]$ 上的定积分表示为 (   )

$A.\ \int_0^1 2\pi(1+x^2)f(x)dx.$　　　$B.\ \int_0^1 2\pi(1-x)f(x)dx$

$C.\ \int_0^1 2\pi(1+x)f(x)dx.$　　　$D.\ \int_0^1 2\pi(1-x^2)f(x)dx$

12. 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$，则以下各式正确的是 (   )

$A.\ \iiint_\Omega \tan(x+y+z) dV = 1.$

$B.\ \iiint_{\Omega} \tan(x+y+z)dV = 0.$

$C.\ \iiint_{\Omega} \tan(x+y+z)dV = 8\iiint_{\Omega_1} \tan(x+y+z)dV$ (Ω_1是 Ω 的第一卦限部分).

$D.\ \iiint_{\Omega} \tan(x+y+z)dV = \iiint_{\Omega} \tan(3x)dV.$

13. 设 $f(x,y)$ 是连续二元函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$ 在直角坐标系中先 x 后 y 的二次积分为 ＿＿＿＿＿＿.

14. 设 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$，则 $\iiint_{\Omega} z^2 dxdydz =$ ＿＿.

15. 设 Ω 由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz =$ ＿＿＿＿.

16. 已知平面区域 $D = \left\{(r,\theta) \mid 2 \le r \le 2(1+\cos\theta),\ -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint_D xdxdy$.

17. 已知平面区域 $D = \left\{(x,y) \mid y-2 \le x \le \sqrt{4-y^2},\ 0 \le y \le 2\right\}$,计算 $I = \iint_D \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy.$

18. 设区域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1, x \ge 0\}$,计算二重积分 $I = \iint_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy.$

19. 计算极坐标下的二重积分 $\iint_D r^2 \sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta$,其中 $D = \left\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sec\theta,\ 0 \le\right.$

20. 设 $f(x,y)$ 为二元连续函数，将 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$ 化为在直角坐标系下的二次积分（先 y 后 x）.

21. 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0,$ $\iint_D f(x,y)dxdy = a,$ 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$，计算二重积分 $I = \iint_D xyf_{xy}(x,y)dxdy.$

22. 椭球面 S_1 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成，圆锥面 S_1 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(a) 求 S_1, S_2 的方程;

(b) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

23. 设 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq\sqrt{2},x\geq 0,y\geq 0\right\}$, $[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\displaystyle\iint_D xy\,[1+x^2+y^2]\,dxdy$.

24. 设 Ω 是由 yOz 平面上直线 $z=0,z=2$ 以及曲线 $y^2-(z-1)^2=1$ 围成的平面图形绕 z 轴旋转一周而成的立体, 求三重积分 $\displaystyle\iiint_\Omega(x^2+y^2)dxdydz$.

25. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，有

$$F(t)=\frac{\displaystyle\iiint_{\Omega(t)}f(x^2+y^2+z^2)dV}{\displaystyle\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma},\quad G(t)=\frac{\displaystyle\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)d\sigma}{\displaystyle\int_{-t}^{t}f(x^2)dx}$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq t^2\}$,$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq t^2\}$.

(a) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(b) 证明：当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

26. 设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $u(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C.

(a) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程;

(b) 求 S 的质量 M.

27. 设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2\,(0\leq z\leq 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

28. 设直线 L 过 $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ, Σ 与平面 $z=0$, $z=2$ 所围成的立体为 Ω.

    (a) 求曲面 Σ 的方程;

    (b) 求 Ω 的形心坐标.

2 第一型曲线积分

1. 已知曲线 $L: y=x^2$ $(0 \le x \le \sqrt{2})$, 则 $\int_L xds =$ ____.

2. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 则 $\oint_L xyds =$ ________.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \ge 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$ 求曲线积分 $\int_C f(x)g(y-x)ds$，其中 C 为正方形 $|x|+|y|=1$.

4. 计算曲线积分 $\oint_C x^2 ds$,其中 C 是曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线.

3 第二型曲线积分

1. 质点在变力 $\mathbf{F}=-yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 作用下沿螺旋线 $C: x=\cos t, y=\sin t, z=t$ 从点 $M_1(1,0,0)$ 运动到点 $M_2(-2,0,\pi)$，则变力 $\mathbf{F}$ 所做的功为 ( )

    $A.\ \pi.$ $B.\ \pi^2.$ $C.\ \dfrac{\pi^2}{2}.$ $D.\ \dfrac{\pi^2}{3}.$

2. 设 $L_1: x^2+y^2=1$，$L_2: x^2+y^2=2$, $L_3: x^2+2y^2=2$, $L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记 $I_i = \oint_{L_i}\left(y+\dfrac{y^3}{6}\right)dx +$

$\left(2x-\dfrac{x^3}{3}\right)dy\ (i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

A. I_1.　　*B*. I_2.　　*C*. I_3.　　*D*. I_4.

3. 设曲线 $L: f(x,y)=1$ ($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数) 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N，Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是

   A. $\int_\Gamma f(x,y,z)dx$.　*B*. $\int_\Gamma f(x,y)dy$.　*C*. $\int_\Gamma f(x,y)ds$.　*D*. $\int_\Gamma f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$

4. 设曲线 C 是 xOy 平面上圆周 $x^2+y^2=1$，则 $I_1=\oint_C(2x^3+y^2)ds$ 与 $I_2=\oint_C(x^4+3y)ds$ 的大小关系是

   A. $I_1=I_2$;　*B*. $I_1<I_2$;　*C*. $I_1>I_2$;　*D*. 无法判断.

5. 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|,(x\in[-1,1])$，起点为 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分 $\int_L xydx+x^2dy=$____.

6. 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 的第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为 ____.

7. 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L zdx+ydz=$________.

8. 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $I=\oint_L xzdx+xdy+\dfrac{y^2}{2}dz=$____.

9. 设 C 是正向椭圆 $4x^2+y^2=8x$，则曲线积分 $\oint_C e^{y^2}dx+xdy=$____.

10. 计算曲线积分 $\int_C(y+3x)^2dx+(3x^2-y^2\sin\sqrt{y})dy$, 其中 C 为曲线 $y=x^2$ 上由点 $A(-1,1)$ 到点 $B(1,1)$ 的弧段.

11. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x \end{cases}$，起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$. 计算曲线积分

$$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+x^2y^2dz$$

12. 计算曲线积分 $\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)ydy$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

13. 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$.

14. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个领域内有定义，且 $f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=-1$. 记曲面 $z=f(x,f(x,y))$ 在点 $(0,0)$ 处的切平面为 π，求曲线积分 $\oint_C xydx+dy-z^2dz$，其中 C 是 π 与曲面 $S: z=\dfrac{3}{4}-x^2-y^2$ 的交线，且从 z 轴正向看去，C 是逆时针的.

15. 计算 $\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$,其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界，从球外看它是顺时针方向.

16. 计算 $\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$，其中曲线 C 由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 上 $z\geq 0$ 的部分（$a>0$），且从 x 轴正向看 C 是逆时针方向.

4 第一型曲面积分

1. 已知曲面 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=4\,(z\geq 0)$，S_1 为 S 在第一卦限中的部分则 $\iint_S (xy+z)dS$ 等于（ ）

   $A.\ 4\iint_{S_1}(xy+z)dS$;　　　　$B.\ 4\iint_{S_1}xydS$.

$C.\ 4\iint_{S_1} zdS.$ $D.\ 0.$

2. 已知曲面 $S: x^2+2y^2+3z^2=1\,(y\geq 0, z\geq 0)$，平面区域 $D:\ x^2+2y^2\leq 1\,(x\geq 0)$，则

$A.\ \iint_S xdS=\iint_D xdxdy.$ $B.\ \iint_S ydS=\iint_D ydxdy.$

$C.\ \iint_S xdS=\iint_D ydxdy.$ $D.\ \iint_S ydS=\iint_D xdxdy.$

3. 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$，则 $\iint_\Sigma y^2dS=$ ____.

4. 设曲面 $\Sigma: |x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint_\Sigma (x+|y|)dS=$ ____.

5. 设环面由方程 $\begin{cases} x=(b+a\cos\theta)\cos\varphi \\ y=(b+a\cos\theta)\sin\varphi \\ z=a\sin\theta \end{cases}$ $,0\leq\theta\leq 2\pi; 0\leq\varphi\leq 2\pi$. 计算环面的表面积.

6. 在球坐标下计算球的表面积和体积.

7. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma zdS$，其中 Σ 是锥面 $S_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $S_2: x^2+y^2=ax\,(a>0)$ 所截下的有限部分.

8. 计算 $I=\iint_\Sigma (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 割下的有限部分.

9. 计算曲面 $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截下部分的面积.

10. 计算曲面 $z=y^2-x^2$ 夹在圆柱面 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=9$ 之间的面积.

11. 已知 Σ 为曲面 $4x^2+y^2+z^2=1\,(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ 的上侧，L 是 Σ

的边界曲线，其正向与 Σ 的正法向量满足右手法则，计算曲线积分

$$I=\int_L (yz^2-\cos z)dx+2xz^2dy+(2xyz+x\sin z)dz$$

12. 设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

5 第二型曲面积分

1. 设 Σ 是半球面 $x^2+y^2+z^2=4\,(z\geq 0)$ 的上侧，则曲面积分 $\iint_\Sigma (x+2)dydz+zdxdy$ 等于

   $A.\ 2\iint_{D_{yz}} \sqrt{4-y^2-z^2}dydz$

   $B.\ 2\iint_{D_{yz}} \left(\sqrt{4-y^2-z^2}+2\right)dydz+\iint_{D_{xy}} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy.$

   $C.\ 2\iint_{D_{yz}} \sqrt{4-y^2-z^2}dydz+\iint_{D_{xy}} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy.$

   $D.\ \iint_{D_{xy}} \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy.$

2. 记 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2\,(z\leq 1)$ 的下侧，则曲面积分 $\iint_\Sigma xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$ ____.

3. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4\,(z\geq 0)$ 的上侧,则 $\iint_\Sigma \sqrt{4-x^2-4z^2}dxdy=$ ________.

4. 设 Σ 为空间区域 $\{(x,y,z)\mid x^2+4y^2\leq 4, 0\leq z\leq 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分 $\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$ ________.

5. 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint_{\Sigma} xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$ ____.

6. 设 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$ 的下侧, 则 $\iint_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=$ ____.

7. 设 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=$ ____.

8. 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则曲面积分 $\oiint_{\Sigma}(|x|+y)dS=$ ____.

9. 设曲面 $\Sigma: z=1-(x^2+y^2)\,(-3\le z\le 1)$, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma(\text{上侧})} x^2dydz+xydzdx+zdxdy=$ ____.

10. 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\dfrac{(x-3)dydz+(2-y)dzdx+(z-1)^2dxdy}{z-x^2-y^2}$, 其中 Σ 是旋转抛物面 $z=1+x^2+y^2\,(1\le z\le 3)$ 的下侧.

11. 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}\,(0\le z\le 1)$ 的上侧.

12. 设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2\,(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

13. 设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)dydz-2ydzdx+3zdxdy$$

14. 设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xdydz+(y^3+2)dzdx+z^3dxdy.$$

15. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2\,(z \geq 0)$ 的上侧.

16. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx - (6z - 1)dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2 - 1\,(-1 \leq z \leq 0)$ 的下侧.

17. 设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 0$ 和 $x + z = 1$ 围成，Σ 为 Ω 边界面的外侧，计算曲面积分

$$I = \oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma} 2xzdydz + xz\cos ydydx + 3yz\sin xdxdy$$

18. 计算曲面积分 $I = \oint\!\!\!\!\oint \dfrac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

19. 设 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}\,(1 \leq x^2 + y^2 \leq 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数.计算

$$I = \iint_{\Sigma} [xf(xy) + 2x - y]\,dydz + [yf(xy) + 2y + x]\,dzdx + [zf(xy) + z]\,dxdy$$

6 Green, Gauss, Stokes 及综合应用

1. 设函数 $Q(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$，如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$，那么函数 $P(x, y)$ 可取为

   $A.\, y = \dfrac{x^2}{y^3}$. $\qquad B.\, \dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{y^3}$.

   $C.\, \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$. $\qquad D.\, x - \dfrac{1}{y}$.

2. 全微分方程 $(2x + y)dx + (x + e^y)dy = 0$ 的通解为 ____.

3. 全微分方程 $(e^x \sin y + y)dx + (e^x \cos y + x)dy = 0$ 的通解为 ________.

4. 设向量场 $\mathbf{F}=(xy,yz,zx)$，则散度 $div\,\mathbf{F}\,|_{(2,1,-1)}=$ ____.

5. 设 $\mathbf{F}(x,y,z)=xy\mathbf{i}-yz\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$，则 $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(1,1,0)=$ ________.

6. 设函数 $u(x,y,z)=z+\sqrt{x^2+y^2}$，则 $div\,(grad\,u)\,|_{(1,1,1)}=$ ____.

7. 若曲线积分 $\int_L \frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$ ________.

8. 计算曲线积分 $I=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$，其中 L 为 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

9. 计算曲线积分 $I=\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,其中 C 为曲线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t)-a\pi \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段.

10. 设曲线 $L\begin{cases} x=\sin z \\ y=0 \end{cases}$

    (a) 求曲线积分 $\int_C (e^z\sin x+x-z)dz+(e^z\cos x-z)dx$，其中 C 是由原点沿曲线 L 到点 $A(0,0,\pi)$ 的有向曲线;

    (b) 记由曲线 $C\,(0\le z\le\pi)$ 绕 z 轴旋转一周而成曲面（外侧）为 Σ，计算曲面 $\oiint_\Sigma xzdydz+2xydzdx+3xydxdy$.

11. 确定常数 a，使得在又半平面 $(x>0)$ 内，曲线积分 $\int_C \frac{axy}{x^4+y^2}dx-\frac{x^2}{x^4+y^2}dy$ 与路径无关，并计算 $\int_{(1,1)}^{(\sqrt{3},\sqrt{3})} \frac{axy}{x^4+y^2}dx-\frac{x^2}{x^4+y^2}dy$

12. 设二元函数 $P(x,y)$ 在 $x0y$ 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_C P(x,y)dx+2xydy$ 与路径无关，并且对任意实数 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} P(x,y)dx+2xydy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} P(x,y)dx+2xydy$，求函数 $P(x,y)$.

13. 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$, 且 $f(0,y)=y+1$, L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t)=\displaystyle\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求 $I(t)$ 的最小值.

14. 设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 是有界单连通区域，$I(D)=\displaystyle\iint_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分域记为 D_1.

   (a) 求 $I(D_1)$ 的值;

   (b) 计算 $\displaystyle\int_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 为 D_1 的正向边界.

15. 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内, 函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数, 且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$$

16. 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\displaystyle\oint_L\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

   (a) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\displaystyle\oint_C\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$;

   (b) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

17. 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$, L 为 D 的正向边界, 试证：

   (a) $\displaystyle\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$;

   (b) $\displaystyle\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge 2\pi^2$.

18. 已知 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x,y)dx + x\cos y dy = t^2$, 其中 $f(x,y)$ 具有连续偏导数, 求 $f(x,y)$.

19. 设对半空间 $x>0$ 内任意光滑有向闭曲面 S，都有

$$\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdxdy = 0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的导数，且 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$. 求 $f(x)$.

20. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,曲面 $S(t)$ 为半球 $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq t^2, z \geq 0\}$ 的表面，它在 xOy 平面上的投影为 $D(t)$，$D(t)$ 的边界曲线为 $L(t)$，并设对 $t>0$，有

$$\oint_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}ds + \oiint_{S(t)} (x^2+y^2+z^2)dS = \iint_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma$$

求 $f(t)\,(t \geq 0)$ 的表达式.

21. 设曲面积分 $\iint_S x^2zdydz + yz^2dzdx + xz^2dxdy$ 的值为 A, 其中 S 是曲面 $z = x^2+y^2\,(z \leq 1)$ 的第一卦限部分上侧. 求满足 $f(0)=A$，$f'(0)=-A$ 的 2 阶可导函数 $f(x)$，使得 $y\left(f(x)+3e^{2x}\right)dx + f'(x)dy$ 是某个二元函数的全微分.