作业　九

1. 求下列不定积分（可考虑利用三角恒等式化简后凑微分）

$$a)\ \int \cos^2\frac{x}{2}dx; \qquad b)\ \int \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$c)\ \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx; \qquad d)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$$

2. 求下列不定积分（可化简后（利用换元）凑微分）

$$a)\ \int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}; \qquad b)\ \int \frac{2x-5}{(x^2-5x+8)^2}dx$$

$$c)\ \int \frac{x^2}{\sqrt[4]{1-2x^3}}dx; \qquad d)\ \int e^x\sin(e^x)dx$$

$$e)\ \int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx; \qquad f)\ \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$$g)\ \int \frac{dx}{x\ln x}; \qquad h)\ \int \frac{x^2}{4+x^6}dx$$

3. 求下列不定积分（最好直接变量替换后化简整理成简单积分）

$$a)\ \int e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx; \qquad b)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$c)\ \int \frac{dx}{1+e^x}; \qquad d)\ \int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$$

$$e)\ \int \frac{x^2}{(x+1)^{100}}dx; \qquad f)\ \int \frac{\sqrt{3+2x}}{x}dx$$

4. 求下列定积分

$$a)\ \int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}; \qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$$

5. 求下列不定积分（用三角替换处理比较适宜）

$$a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}; \qquad b)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$$

$$c)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}; \qquad d)\ \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$$

$$e)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\ (a>0); \qquad f)\ \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

6. 求下列不定积分（分部积分法比较适合）

$$a)\ \int xe^{2x}dx; \qquad b)\ \int \arctan x dx$$

$$c)\ \int x^2 \arctan x dx; \qquad d)\ \int x^2 \ln x dx$$

$$e)\ \int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx; \qquad f)\ \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$$

$$g)\ \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx \qquad h)\ \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$$

$$i)\ \int \sin x \ln(\tan x)dx; \qquad g)\ \int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$$

7. 求下列不定积分（有理分式展开或其它方法）

$$a)\ \int \frac{dx}{x^2-2x+2}; \qquad b)\ \int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$$

$$c)\ \int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx; \qquad d)\ \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3+x}dx$$

$$e)\ \int \frac{x^4+1}{(x-1)(x^2+1)}dx; \qquad f)\ \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}$$

8. 利用定积分的几何意义计算下列积分

$$a)\ \int_{-1}^{1} |x|dx; \qquad b)\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$$

9. 已知 $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$，计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

10. 已知 $\int_1^{2} \ln x dx = 2\ln 2 - 1$，求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n}$$

11. 设 $f, g \in C[a,b]$，证明：若 $f(x) \geq g(x)\,(x \in [a,b])$，且 $f(x)$ 不恒为 $g(x)$，则 $\int_a^b f(x) > \int_a^b g(x)dx.$

12. 比较下列各组中积分的大小.

$$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \text{ 与 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx; \quad b)\ \int_1^e \ln x dx,\ \int_1^e (\ln x)^2 dx \quad \int_1^e \ln(x^2) dx$$

13. 证明不等式 $\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 求下列极限

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1+x} dx; \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx$$

15. 求下列函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$

$$a)\ y = \int_{\cos x}^{\sin x} e^{-t^2} dt; \qquad b)\ y = \left(\int_0^{\sqrt{x}} \ln(1+t^2) dt\right)^2$$

$$c)\ \int_0^{xy} e^t dt + \int_0^y \sin t dt = 0; \qquad d)\ \begin{cases} x = \int_1^t \ln u du \\ y = \int_1^t u \ln u du \end{cases}$$

16. 求下列极限

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2};\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{\ln\frac{\sin x}{x}}$$

17. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ x-2, & 1\le x\le 2\end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 在 $[0,2]$ 上的表达式.

18. 设函数 $f\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$ （$x\in[a,b]$），记 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)}$ $(x\in[a,b])$. 证明:

$a)$ $F'(x)\ge 2$;　　$b)$ 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一根.

19. 设函数 $f\in C[a,b]$，且 $f(x)>0\,(x\in[a,b])$. 证明：至少存在一个点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^{\xi}f(x)dx=\int_{\xi}^{b}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx$$

20. 设函数 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$，且 $3\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)dx=f(1)$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

21. 设函数 $S(x)=\displaystyle\int_0^x|\cos t|dt$.

(a) 当 $n\in\mathbb{N}_+$，且 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时，证明：$2n\le S(x)<2(n+1)$.

(b) 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

22. 证明：$\displaystyle\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(x)dx\right)dt$

23. 设非负函数 $f\in R[a,b]$，证明不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)\cos x dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin x dx\right)^2\le\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$$

提示： 利用柯西-施瓦茨不等式.

24. 设 $f \in C[a,b]$，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最大值和最小值.
证明：至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi)$$

提示： 先利用积分中值公式，然后构造函数并利用零点定理之类.

25. 设 $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f'(x) \geq 0\,(x \in (a,b)$，求证

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

提示： 能否让 b 动起来，从而转变为对函数求导以判别单调性的问题？