

# hw\_12

## 1. 利用级数收敛的必要条件, 证明:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 0);$

解:

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$  收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

解:

对正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$  收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

2. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  中有一个收敛, 另一个发散, 证明级数必发散。若所给的两个级数都发散, 那么级数 是否必发散?

解:

(1) 令  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散

若  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  收敛

$$S_{n(a+b)} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_a + S_b$$

$$S_b = S_{n(a+b)} - S_{n(a)}$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  收敛

故与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  矛盾, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  发散

(2)

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0 \quad \text{收敛}$$

**3. 若数列  $\{na_n\}$  收敛, 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$  收敛 ( $a_0 = 0$ ) , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛。 (提示: “移形换位”)**

---

解:

$$\text{令 } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{n=1}^n n(a_n - a_{n-1}) \\ &= -a_0 + a_1 - 2a_1 + 2a_2 + \cdots - (n-1)a_{n-2} + (n-1)a_{n-1} - na_{n-1} + na_n \\ &= -a_0 - a_1 - \cdots - a_{n-1} + na_n \\ &= na_n - S_{n-1} \\ S_{n-1} &= na_n - T_n \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  均存在, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

#### 4. 判断

$\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \cdots$   
的敛散性。 (提示: 不要忘记最基本的收敛必要性条件)

---

解:

令该级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = b_n, \quad b_{n+1}^2 - 2 = b_n$$

对于  $\{b_n\}$ ,  $b_1 < 2$ ,  $b_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$

若  $b_n < 2$ , 则  $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$

故  $b_n < 2$

又  $b_1 < b_2$

若  $b_{n-1} < b_n$ , 则

$$b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n} > \sqrt{2 + b_{n-1}} = b_n$$

故  $\{b_n\}$  单调增加, 且  $b_n < 2$

故令  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$

$$B^2 - 2 = B \Rightarrow (B-2)(B+1) = 0 \Rightarrow B = 2$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2 - b_{n+1}}{2 - b_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2 - b_{n+1}}{2 + 2 - b_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2 + b_{n+1}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} < 1 \quad \text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

## 5. 判别下列级数的敛散性，并求出其中收敛级数的和。

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{6^n}$$

解：

$$\text{原式} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} + \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

解：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{n+3} \right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{2^n}$$

解：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{故发散}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$$

解：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = +\infty \quad \text{故发散}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} \neq 0 \quad \text{故发散}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right)$$

解:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \sqrt{2} + 1 \right) \\ &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

## 6. 用积分判别法判别下列级数的敛散性。 (须验证判别法适用条件)

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

解:

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_3^{+\infty} \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_3^{+\infty} = +\infty$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$$

解:

$$\begin{aligned} f(x) &= x e^{-x^2} \\ f'(x) &= e^{-x^2} + x e^{-x^2} (-2x) = (-2x^2 + 1)e^{-x^2} \\ \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} e^{-x^2} d(x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2e} \quad \text{收敛} \end{aligned}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 + 1}$$

解:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\arctan x}{x^2 + 1} = \frac{1 - 2x \arctan x}{(x^2 + 1)^2} \\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx &= \int_1^{+\infty} \arctan x d(\arctan x) = \frac{1}{2} \arctan^2 x \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{\pi^2}{32} \quad \text{收敛} \end{aligned}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n \ln n}$$

解：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} \\ f'(x) &= \frac{1 - (\ln x + 1) \ln(\ln x)}{x^2 \ln^2 x} \\ \int_5^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx &= \int_{\ln(\ln 5)}^{+\infty} \ln(\ln x) d(\ln(\ln x)) = \frac{1}{2} [\ln(\ln x)]^2 \Big|_5^{+\infty} = +\infty \quad \text{发散} \end{aligned}$$

## 7. 用比较判别法或比较判别法的极限形式判别下列级数的敛散性。

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$$

解：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(n+1)} &> \frac{1}{n} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \text{ 发散} \end{aligned}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

解：

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2^n} &< \frac{\pi}{2^n} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n} \text{ 收敛} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n} \text{ 收敛} \end{aligned}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$$

解：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} &< \frac{1}{n^{3/2}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ 收敛} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \text{ 收敛} \end{aligned}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\arctan n}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$  发散

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$  发散

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 \left( 1 + \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \right)$$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln^2(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}})}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \ln \left( 1 + \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \right) \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^2 = 0$$

收敛

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (a > 0)$$

解:

①  $a = 1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$  发散

②  $0 < a < 1$ :

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^n}{1+a^{2n}}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \cdot a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n}}{1+a^{2n}} = 1 \quad \text{收敛}$$

③  $a > 1$ :

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^n}{1+a^{2n}}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n}}{1+a^{2n}} = 1 \quad \text{收敛}$$

8)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty \quad \text{故发散}$$

8. 设  $a_n > 0, b_n > 0$  且  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , 则当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛; 当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  也发散。

---

解:

$$\frac{a_n}{b_n} > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  存在且大于 0

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  同收敛性

9. 已知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都收敛, 且有  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  也收敛。当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  的敛散性如何?

---

解:

(1)

$$c_n - a_n \leq b_n - a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n) \text{ 收敛}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n + a_n) \text{ 收敛}$$

(2) 不一定, 发散与收敛均有可能

## 10. 证明下列命题 (提示: 利用比较法) :

(a) 若  $a_n \geq 0$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛。

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛

(b) 若  $a_n \geq 0$  且数列  $\{na_n\}$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛。

解:

$$\exists M > 0 \quad \text{s.t. } \forall n \in \mathbb{N}^+, \quad na_n < M \Rightarrow a_n^2 < \frac{M^2}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2} \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 收敛}$$

(c) 若  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  都收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$  收敛。 (提示: 利用 (a))

解:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \text{ 收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + b_n)^2 - a_n^2 - b_n^2}{2} \end{aligned}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛

## 11. 设 $a_n \geq 0$ , 则下列结论中正确的是哪一项? 给出论证。若结论不正确, 请给出反例。

(a) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛。

(b) 若存在非零常数  $\lambda$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散。

(c) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$ .

(d) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 则存在非零常数  $\lambda$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lambda$ .

解:

不正确

a)/ d)  $a_n = \frac{1}{n \ln n}$   
c)  $a_n = \frac{1}{n^2}$

正确

b)

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散

## 12. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性。

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n-1)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

发散

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = e \cdot 1 = e$$

故发散

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$

解:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

收敛

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

收敛

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{3} - 1 \right)^n$$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$$

收敛

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{3}{e} \quad \text{发散}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2n \arctan \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}}$$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2n \arctan \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad \text{发散}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{b} \right)^n, \text{ 其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a (a, b > 0), \text{ 且 } a \neq b.$$

解:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b} = \frac{a}{b}$$

$$a > b \quad \text{发散}$$

$$a < b \quad \text{收敛}$$

**13. 证明:** 若  $a_n \geq 0$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  也收敛。 (提示: 利用比值法或根值法)

解:

$$(a_n - n)^2 > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{n} < \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2n^2}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  收敛

#### 14. 用适当的方法判别下列级数的敛散性。

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$

解:

$$2^n \sin \frac{\pi}{3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

故收敛

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$

解:

$$\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

故收敛

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$

解:

$$\sqrt{n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) < \frac{\pi^2}{2n^{3/2}}$$

故收敛

4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n + \frac{1}{n})^n}$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n}}{(n + \frac{1}{n})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n + \frac{1}{n}} \right)^n \cdot \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2 + 1} \right)^n = 1$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

解：

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{2} = +\infty$$

故收敛

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{an}{n+1} \right)^n \quad (a > 0)$$

解：

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a$$

$a \in [0, 1)$  收敛

$$a = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} \quad \text{发散}$$

$a > 1$  发散

**15. 利用不等式**  $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$

**证明：** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$  发散，而级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$  收敛。

解：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!} \text{发散}$$

$$\frac{(2n-3)!}{(2n)!} < \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}} \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!}{(2n)!} \text{收敛}$$

## 16. 证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} \right) \left( 1 + \frac{1}{3 \cdot 4} \right) \cdots \left( 1 + \frac{1}{n(n+1)} \right) \text{存在。}$$

(提示：将乘积转为求和，然后判定所得级数的敛散性)

解：

$$\text{令 } a_n = \ln \left( 1 + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$a_n < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

故  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

原式  $= e^S$  存在

## 17. 判别下列 (交错) 级数的收敛性, 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}$$

解:

由 6.(1) 可知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  发散

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

当  $n \geq 3$ ,  $\frac{\ln n}{n}$  单调减少

$$\text{故 } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} \text{ 收敛}$$

故为条件收敛

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{n}{n+1}$$

解:

$$\text{令 } f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} < 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} = 0$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n} \text{ 收敛}$$

又

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} \text{ 发散}$$

故为条件收敛

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

解:

$$\text{令 } a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

故  $\{a_n\}$  单调减少

$$a_n = \sqrt{a_n^2} < \sqrt{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n-1) \cdot 2n}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (2n) \cdot (2n+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}$$

$$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{(2n)!}$  收敛

又  $a_n > \frac{1}{2n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  发散

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散

故为条件收敛

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-3n}{3+4n} \right)^n$$

解:

$$a_n = \left( \frac{3n-1}{4n+3} \right)^n$$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{4n+3} = \frac{3}{4}$$

故为绝对收敛

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{e}$$

故发散

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( 1 - \cos \frac{a}{n} \right) \quad (a > 0)$$

解:

$$\text{令 } a_n = 1 - \cos \frac{a}{n} < \frac{a^2}{2n^2}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

故为绝对收敛

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

解：

$$\text{令 } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} < \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} < 1$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$  收敛

故为条件收敛

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} \quad (\text{提示：利用 Abel 或 Dirichlet 判别法})$$

解：

$$\text{令 } a_n = (-1)^n \sin^2 n, b_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1 - \cos 2n}{2} = \frac{(-1)^n}{2} - \frac{(-1)^n \cos 2n}{2}$$

$$\sum_{n=1}^N a_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (-1)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos 2n$$

$$\sum_{n=1}^N (-1)^n \text{ 有界}$$

$$\left| \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos 2n \right| \leq N \text{ 有界}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$  收敛

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$$

对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$  :

$\frac{1}{n}$  单调减少且趋于 0,  
 $|\sum_{k=1}^n \cos 2k|$  有界

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$  收敛

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$  发散

故为条件收敛

## 18. 判断下列级数的收敛性, 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

1)  $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{\ln n}\right)$

解:

$$\text{原式} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\ln n}$$

$$\text{令 } a_n = \sin \frac{1}{\ln n}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散

又  $\{a_n\}$  单调减少,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \text{ 故原级数收敛}$$

故为条件收敛

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$

解:

$$\begin{aligned} \sin(\pi\sqrt{1+n^2}) &= \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

故发散

又  $\{a_n\}$  单调递减且趋于 0

故原级数收敛

故条件收敛

3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n}$  (提示: 利用 Abel 或 Dirichlet 判别法)

解:

$$\frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1 + \cos 2n}{2n}$$

由 17.(8) 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n} \text{ 收敛}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n} \text{ 发散}$$

19. 设常数  $\lambda > 0$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$

绝对收敛。 (提示: 先放缩简化, 然后参考第 13 题结论)

解:

由 13 知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$  收敛

$$\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} < \frac{|a_n|}{n}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}} \text{ 绝对收敛}$$

20. 设  $a_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  条件收敛。

(提示: 利用  $e^x$  的泰勒展开后比较即可)

解:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\text{令 } f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) < 0$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ 收敛}$$

又

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2n}$$

故  $\{a_n\}$  发散

故得证

21. 设  $f(x)$  在点  $x = 0$  的某一邻域内具有二阶连续导数, 且

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛。 (提示: 利用泰勒展开获得  $f(x)$  在  $x = 0$  附近的二阶信息)

解:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 = \frac{f''(\theta x)}{2}x^2$$

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| f''\left(\frac{\theta}{n}\right) \right| \cdot \frac{1}{2n^2}$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \text{ 收敛}$$

故为绝对收敛

**22. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 且  $a_{n+1} \leq a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 试证:**

**a) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  收敛;**

解:

$$S_n = a_1 - a_2 + 2a_2 - 2a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} - (n-1)a_n + na_n - na_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n - na_{n+1} < \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

又  $n(a_n - a_{n+1}) > 0$ , 故  $S_n$  单调增加且有上界

故原级数收敛

**b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ . (参考第 13 题)**

解:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \text{s.t. } \forall n \geq N, p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

$$na_{2n} < \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \varepsilon \Rightarrow 2na_{2n} < 2\varepsilon$$

$$(2n+1)a_{2n} \leq (2n+1)a_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \cdot 2na_{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = 1 \Rightarrow \exists N_1 \geq 1 \text{ s.t. } \forall n \geq N_1, \frac{2n+1}{2n} \leq 2$$

$$(2n+1)a_{2n+1} \leq 4na_{2n} < 4\varepsilon$$

故综上,  $na_n < 4\varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$$

**23. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  满足 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ; 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$  收敛, 证明  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛。 (提示: 回到级数收敛的原始定义, 即利用部分和  $S_n$  的收敛性来讨论, “归并原理”等)**

解:

$$S_{2N} = (u_1 + u_2) + \dots + (u_{2N-1} + u_{2N}) = \sum_{n=1}^N (u_{2n-1} + u_{2n})$$

故  $\{S_{2N}\}$  收敛

$$S_{2N+1} = S_{2N} + u_{2N+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2N+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2N}$$

故  $\{S_{2N+1}\}$  收敛

故  $\{S_n\}$  收敛

故  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛

下面是一些知识综合运用的题目，帮助大家在情景应用中进一步熟悉并整合知识线索。主线脉络要清晰，细节还需耐心磨，灵活机变莫迟疑。

## 24. 求曲线 $y = e^{-x} \sin x$ ( $x \geq 0$ ) 与 $x$ 轴之间图形的面积。

解：

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi}}{2} = \frac{e^{-\pi} + 1}{2(e^\pi - 1)} \end{aligned}$$

## 25. 设 $a_n$ 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ ( $n = 1, 2, \dots$ ) 所围成区域的面积，记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ , 求 $S_1$ 与 $S_2$ 的值。

解：

$$a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

令  $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$S_2 + \ln 2 = 1 \Rightarrow S_2 = 1 - \ln 2$$

## 26. 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

(a) 证明：数列  $\{a_n\}$  单调减少，且  $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$  ( $n = 2, 3, \dots$ )

解：

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 x^n (x-1) \sqrt{1-x^2} dx < 0$$

故  $\{a_n\}$  单调减少

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 -\frac{1}{3} x^{n-1} d((1-x^2)^{3/2}) \\
 &= -\frac{1}{3} x^{n-1} (1-x^2)^{3/2} \Big|_0^1 - \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} d\left(-\frac{1}{3} x^{n-1}\right) \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} (n-1) x^{n-2} dx = \frac{n-1}{3} \int_0^1 (1-x^2) x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \frac{n-1}{3} (a_{n-2} - a_n)
 \end{aligned}$$

故

$$a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$$

(b) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ .

解:

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \\
 \frac{n-1}{n+2} &< \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= 1
 \end{aligned}$$

**27. 设有方程  $x^n + nx - 1 = 0$ , 其中  $n$  为正整数, 证明此方程存在唯一正实根  $x_n$ , 并证明当  $\alpha > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$  收敛。**

解:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^n + nx - 1 \\
 f'(x) &= nx^{n-1} + n > 0 \\
 f(0) &= -1, \quad f(1) = n \\
 \exists x_n \in (0, 1) \text{ s.t. } f(x_n) &= 0
 \end{aligned}$$

故该方程存在唯一正实根  $x_n$

$$x_n = \frac{1-x_n^n}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n^n < \frac{1}{n^2}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^n$  收敛

**28. 设  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 证明:**

1)  $a_n$  收敛;

解:

$$a_1 > 1$$

若  $a_n > 1$ , 则

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) > 1$$

故  $\{a_n\}$  有下界 1

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2} \left( a_n - \frac{1}{a_n} \right) < 0$$

故  $a_n$  收敛

2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  收敛。 (提示: 整理表达式并利用放缩简化到可利用结论 1));

解:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 &= \frac{2a_n}{a_n + \frac{1}{a_n}} - 1 = \frac{a_n - \frac{1}{a_n}}{a_n + \frac{1}{a_n}} < \frac{1}{2} \left( a_n - \frac{1}{a_n} \right) = a_n - a_{n+1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) &= a_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  收敛

3) 给出上述级数的一个上界。

解:

由 (2), 为 1

**29. 设  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ .**

1) 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n}$  的值;

解:

$$\begin{aligned} \frac{a_n + a_{n+2}}{n} &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d(\tan x) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

2) 证明: 当  $\lambda > 0$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛。

解:

$$\frac{a_n}{n^\lambda} \leq \frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda}$$

令

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛