

# 第四章：积分及其应用

## 目录

1 概念回顾及概念导引	3
2 定积分作为极限之计算实例	8
3 可积性条件 (*)	10
4 可积函数的性质	16
5 积分中值定理	23
6 微积分基本定理	27
7 定积分的换元公式	30
8 积分技术盘点	40
8.1 换元法 . . . . .	40
8.2 分部积分 . . . . .	45
8.3 有理函数积分的部分分式展开法及几类可积类型 . . . . .	51
9 瑕（反常）积分及其计算	63
10 一些重要积分的特殊计算方法 (*)	74
11 积分综合应用	82
11.1 总论：以直代曲，见微知著 . . . . .	82
11.2 平面图形的面积 . . . . .	83
11.3 曲线弧长计算 . . . . .	90
11.4 体积计算之截面堆叠法，祖暅原理 . . . . .	97
11.5 旋转体的体积及侧面积计算 . . . . .	100

11.6 物理中的一些应用 . . . . .	106
11.7 可分离变量型微分方程的求解 . . . . .	108
11.8 一阶线性微分方程的求解公式 . . . . .	115
<b>12 二阶常系数线性微分方程的求解——线性代数的应用</b>	<b>120</b>
12.1 一般线性微分方程（组）的理论导引 . . . . .	126
12.2 二阶常系数常微分方程 . . . . .	131
12.3 二阶常系数线性微分方程的应用——振动现象 . . . . .	142
12.4 一般 $n$ 阶常系数线性微分方程 . . . . .	146
12.5 一般 $n$ 阶常系数线性微分方程组 . . . . .	154
<b>13 附录 I：一致连续及闭区间上连续函数的一致连续性</b>	<b>170</b>
<b>14 附录 II：分部求和，第二积分中值定理，欧拉求和</b>	<b>171</b>
<b>15 附录 III：单摆、算术几何平均，水星进动与椭圆积分</b>	<b>185</b>

## 第四章：积分及其应用

### 1 概念回顾及概念导引

通过上一章节的学习，我们已初步掌握了无穷小计算的基本原理，其核心要点是导数和微分的概念。导数衡量函数一点处的变化率，而微分是将一点附近自变量增量  $\Delta x$  转化为函数实际增量  $\Delta f$  的一阶近似  $df = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$  的一个（线性）**映射机制**，即  $\Delta x \mapsto df \approx \Delta f$ ，且项  $R(x) = \Delta f - df = o((\Delta x))$ , i.e.,

$$\frac{\Delta f - df}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

上极限要求：一点处的微分若存在，则它唯一地由该点处的导数所确定。可导即可微，可微即可导。从几何上看，利用微分  $df$  近似  $\Delta f$  相当于在一点切线上计算相应于  $\Delta x$  的线性改变量，即

$$\underbrace{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{切线方程}} \implies \underbrace{df|_{x=x_0}(\Delta x)}_{\text{微分作为映射}} = \underbrace{\Delta y}_{\text{切线改变量}} = f'(x_0)\Delta x$$

为了得到更好的近似效果，我们利用二阶微分  $d^2 f := f''(x)dx^2 = f''(x)(\Delta x)^2$  对一阶近似  $df$  给一 2 阶微扰，得到如下二阶近似

$$\Delta f \approx df + \frac{1}{2!}d^2 f = f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2$$

$$f(x + \Delta x) = \underbrace{f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2}_{\text{二阶泰勒多项式: } P_2(x+\Delta x)} \implies$$

$$R_2(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) - P_2(x + \Delta x) \stackrel{\exists 0 < \theta < 1}{=} \underbrace{\frac{f'''(x + \theta\Delta x)}{3!}(\Delta x)^3}_{o((\Delta x)^2)}$$

一般地，若  $f(x)$  在  $x$  附近至少  $n + 1$  阶可导，逐渐添加高阶微扰项，得到函数  $f$  在  $x$  附近的如下  $n$  阶近似

$$\Delta f \approx \frac{1}{1!}df + \frac{1}{2!}d^2 f + \frac{1}{3!}d^3 f + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f$$

其中高阶微分记作

$$d^k f := f^{(k)}(x)dx^k = f^{(k)}(x)(\Delta x)^k$$

故上近似可写成如下泰勒展开模式

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \underbrace{\frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n}_{n \text{ 阶泰勒多项式: } P_n(x+\Delta x)} \implies$$

$$R_n(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) - P_n(x + \Delta x) \stackrel{\exists 0 < \theta < 1}{=} \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x + \theta \Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}}_{o((\Delta x)^n)}$$

下面看看无穷小方法应用的另一个重要场景.

微分从函数提取无穷小量, 以便聚焦函数局部的变化特征. 另一方面, 现实中很多应用场景是希望将局部的无穷小累加成整体的有界量——便是积分概念之发凡.

先看两个可体现出本章知识内核的概念图景.

**图景 I:** 设函数  $F(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 且  $F'(x) = f(x)$ , 则任取区间  $[a, b]$  的一个分划:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ , 并记  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n$ , 我们都有

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = \\ &= \underbrace{F(x_n) - F(x_{n-1})}_{[x_{n-1}, x_n] \text{ 上的局部变差}} + \underbrace{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})}_{[x_{n-2}, x_{n-1}] \text{ 上的局部变差}} + \cdots + \underbrace{F(x_2) - F(x_1)}_{[x_1, x_2] \text{ 上的局部变差}} + \underbrace{F(x_1) - F(x_0)}_{[x_0, x_1] \text{ 上的局部变差}} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}))}_{\text{小区间段上的局部变差之和}} \stackrel{\substack{\text{在区间 } [x_i, x_{i-1}], i=1, 2, \cdots, n \text{ 上} \\ \text{分别运用拉格朗日中值定理}}}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i}_{\text{小区间段上的局部变差之和}} \end{aligned}$$

当  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , 或等价地  $n \rightarrow \infty$  时, 局部变差是无穷小量. 如上式右端的极限存在, 我们便将函数  $F(x)$  的整体变差  $F(b) - F(a)$  表示为无限多个无穷小变差之累加了.

**注记 1.1** 将图景一中的和式  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  单独拿来看, 可视其为一函数  $f(x)$  的值对自变量  $x$  的累积, 该形式在日常应用中十分常见, 比如路程作为速度对时间之累积; 功作为力对位移之累积; 电量作为电流密度对时间之累积; 三维体积作为截面积对高之累积等等. 由图景 I 知: 函数  $f(x)$  对自变量  $x$  在一区间上的累积可由其原函数 (即任意使得  $F'(x) = f(x)$  的  $F(x)$ ) 在区间上的整体变差计算而得.

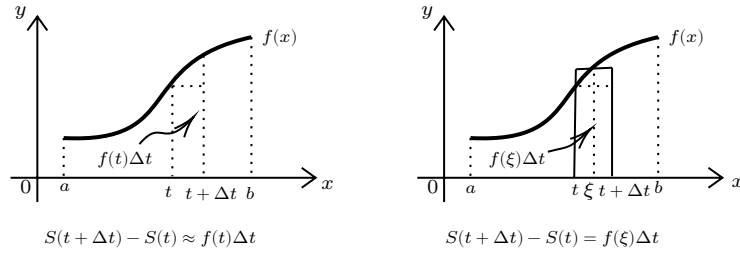
**定义 1.1** 设函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 若存在函数  $F(x)$  使得  $F'(x) = f(x), \forall x \in I$ , 则称  $F(x)$  为  $f(x)$  在  $I$  上的一个原函数.

我们已知不是所有的函数都具有原函数 (c.f. 见导函数的介值定理), 且由拉格朗

日中值定理知函数  $f(x)$  的原函数是不唯一的, 但任意两个原函数只差一个常数, 即若  $f(x)$  具有原函数  $F(x)$ , 则  $F(x) + C$  (对任意常数) 是  $f(x)$  的所有原函数.  $f(x)$  的全体原函数称为是  $f(x)$  的不定积分 (*indefinite integral*), 并将其记作

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (\text{其中 } C \text{ 为任意常数})$$

**图景 II:** 设  $y = f(x) \in C[a, b]$ , 且设  $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$ . 记  $S(t)$  为曲线  $y = f(x)$ , 直线  $x = a, x = t$  和  $x$  轴围成的曲边梯形的面积. 下面我们证明:  $S(t)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $S'(t) = f(t)$ .



直观上, 当  $\Delta t$  很小时, 可用矩形面积  $f(t)\Delta t$  来近似  $S(t + \Delta t) - S(t)$  的值, 且  $\Delta t$  越小, 则近似的误差越小. 特别地, 我们期待: 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 有

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} f(t) = S'(t)$$

则  $S(t)$  在  $[a, b]$  上可导, 且其导数  $S'(t) = f(t)$ . 然后在  $[t, t + \Delta t]$  上应用拉格朗日中值定理, 知  $\exists \xi \in (t, t + \Delta t)$ , 使得

$$S(t + \Delta t) - S(t) = S'(\xi)\Delta t = f(\xi)\Delta t$$

**严格论证:** (调用基层逻辑) 由于  $f(x) \in C[t, t + \Delta t]$ , 故  $f(x)$  在  $[t, t + \Delta t]$  上具有极大值  $M$  和极小值  $m$ , 即  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [t, t + \Delta t]$ . 从而

$$m\Delta t \leq S(t + \Delta t) - S(t) \leq M\Delta t \implies m \leq \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \leq M$$

由闭区间上连续函数的介值定理知:  $\exists \xi \in (t, t + \Delta t)$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \xi \rightarrow t} f(t) = S'(t) \quad \square$$

**图景 II  $\Rightarrow$  图景 I:** 图景 II 中展示了面积函数的可微性, 即若曲线由函数  $f(x)$  描述, 则  $f(x)$  具有原函数  $S(x)$ , 即  $\int f(x)dx = S(x) + C$  (不同的计算面积的起

点  $a$  的选取, 对应于不定积分中不同常数  $C$  的选取). 反之, 我们可以将局部面积元累加为整体面积 (或让  $f(x)$  对  $x$  进行累积). 为此, 任取区间  $[a, b]$  的一个分划:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ , 并记  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n$ , 则易见

$$\begin{aligned} S(b) - S(a) &= \\ &= [S(x_n) - S(x_{n-1})] + [S(x_{n-1}) - S(x_{n-2})] + \cdots + [S(x_2) - S(x_1)] + [S(x_1) - S(x_0)] \\ &\quad \underline{\underline{\text{利用拉格朗日中值定理}}} S'(\xi_n)\Delta x_n + S'(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + \cdots + S'(\xi_2)\Delta x_2 + S'(\xi_1)\Delta x_1 \\ &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

但如果中值点的选取是任意的  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ , 则上面和式  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$  不再是  $S(b) - S(a)$  的精确值, 而是其一个近似, 即有

$$S(b) - S(a) \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad \begin{array}{l} \text{对任意分划 } \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \\ \text{以及 } \forall \xi_i \in (x_{i-1}, x_i) \end{array}$$

直观上, 如果分划取得越来越“精细”, 即  $n \rightarrow \infty$  (等价地,  $\Delta x_i \rightarrow 0, \forall i$ ) 时, 则有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \rightarrow S(b) - S(a)$$

而由于在图景 II 中, 不论分划如何, 上述和的极限如存在, 都是计算同一个面积值  $S(b) - S(a)$ , 故上极限的存在性及其值应不依赖于具体划分的选取以及诸点  $\xi_i$  的选取. 这启发我们下面定积分的一般定义 (放宽  $f$  连续这一条件, 而只关心它对  $x$  累积的极限):

**定义 1.2** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有定义且有界. 对  $[a, b]$  做任意分划:

$$\pi: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

又  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ), 作和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ , (其中  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ) 为小区间的长度. 若当  $\lambda(\pi) := \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ , 上述和式总有极限  $I$ , 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = I$$

则称函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上黎曼 (Riemann) 可积 (简称可积), 记为  $f \in R[a, b]$ ; 极限值  $I$  称为  $f(x)$  在  $[a, b]$  的定积分 (definite integral), 记为  $\int_a^b f(x)dx$ , 即

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

其中  $a, b$  分别称为积分的下限和上限,  $[a, b]$  称为积分区间,  $f$  称为被积函数 (integrand),  $x$  称为积分变量. 积分与积分变量的选取无关, 因其只是标记加项的符号.

用  $\epsilon - \delta$  语言叙述,  $f \in R[a, b]$  意味着: 存在实数  $I$ , 使得  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 只要对  $[a, b]$  的划分对应的  $\lambda < \delta$ , 则无论  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  如何选择, 都成立

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| < \epsilon$$

图景  $I$  导致下面著名结果:

**牛顿-莱布尼茨公式 (Newton-Leibniz formula)** 设函数  $f(x) \in R[a, b]$ , 且在  $(a, b)$  上有原函数  $F(x)$ , 即  $\forall x \in (a, b)$ , 有  $F'(x) = f(x)$ , 则必有

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

**证明:** 任选  $[a, b]$  的一个划分:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 有

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = \\ &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \dots + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &\stackrel{\substack{\text{拉格朗日中值定理} \\ \exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)}}{=} F'(\xi_n) \Delta x_n + F'(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1} + \dots + F'(\xi_1) \Delta x_1 \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \quad (\text{当 } \lambda := \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0) \quad \square \end{aligned}$$

**记号:** 通常记  $F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a)$ , 所以  $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = \int_a^b f(x)dx \Big|_a^b$ .

又由于  $dF(x) = f(x)dx$ , 故也有

$$\int_a^b dF(x) = F(x) \Big|_a^b \quad \text{特别地} \quad \int_a^b dx = x \Big|_a^b = b - a$$

## 2 定积分作为极限之计算实例

**连续是比可积更强的条件.** 事实上, 如果  $f(x) \in C[a, b]$ , 则必有  $f(x) \in R[a, b]$ . 此外, 函数可积的充分条件还有 (证明见第三节)

- $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界且只有有限个间断点;
- $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调.

由此可知: 改变函数在有限个点处的值不改变其可积性, 若其可积, 则其积分不变.

**例 2.1** 为计算  $\int_0^1 x^2 dx$ , 即计算抛物  $y = x^2$ ,  $x = 0, x = 1$  及  $x$  轴围成的曲边梯形的面积. 由于面积值不依赖与分划及  $\xi_i$  的选取. 所以, 为了便于计算, 不妨将  $[0, 1]$   $n$  等分, 即分划的分点为  $x_i = \frac{i}{n}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 每个小区间的长度为  $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ , 从而  $\lambda = \frac{1}{n}$ . 取  $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 则有

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

当然我们知道  $\frac{x^3}{3}$  是  $x^2$  的一个原函数, 故根据牛顿-莱布尼茨公式, 得

$$\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1^3 - 0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

**例 2.2** 在计算  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$  时, 如将  $[1, 2]$  等分后计算反而不易处理. 但注意到, 如果分点取成  $x_i = q^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 其中  $q$  是待定公比. 要求:  $1 = x_0 = q^0$ ,  $2 = x_n = q^n$ , 从而可取  $q = 2^{\frac{1}{n}}$ , 则有  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = q^{i-1}(q-1)$ . 由  $q > 1$  知  $\lambda = q^{n-1}(q-1) = 2 - 2^{\frac{n-1}{n}}$ . 再取  $\xi_i = x_{i-1} = q^{i-1}$ . 注意到  $\lambda \rightarrow 0$  (即  $n \rightarrow \infty$ ), 有

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{\xi_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{q^{i-1}(q-1)}{q^{i-1}} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n(q-1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1/n} - 1}{1/n} = \ln 2 \end{aligned}$$

不难看出,  $\ln x$  是  $\frac{1}{x}$  的一个原函数, 从而

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

**例 2.3** 狄利克雷 (Dirichlet) 函数:  $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  不是 (黎曼) 可积的. 任给  $[0, 1]$  的分划  $\{x_i\}$ , 在每个区间  $[x_i, x_{i+1}]$  中一定是既有有理数又有无理数. 故将  $\xi_i$  全部取为有理数时  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = 1$ ; 但如将  $\xi_i$  全部取为无理数时, 则有  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0$

**注记 2.1** 上例表明: 闭区间上的有界函数未必可积, 下节会证明: 闭区间上的可积函数必有界.

**例 2.4** 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1}{n-1}, & 1 - \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n+1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

它虽然有无穷多个间断点, 但是由于它是单调的, 故它也在  $[0, 1]$  上是可积的, 且

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n-1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

**例 2.5** 为计算  $\int_0^1 x^p dx$  ( $p > 0$ ), 将  $[0, 1]$   $n$  等分, 得分点  $x_i = \frac{i}{n}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), 故  $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ , 并取  $\xi_i = \frac{i}{n}$ , 则当  $\lambda = \max\{\Delta x_i\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  时, 有

$$\int_0^1 x^p dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^p \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$$

不难看出,  $x^p$  的一个原函数是  $\frac{x^{p+1}}{p+1}$ , 从而

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

**例 2.6** 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1/n}{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1/n}{1 + \frac{n}{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

### 3 可积性条件 (\*)

例 2.3 表明：闭区间上的有界函数未必可积，但下面的定理表明：闭区间上的可积函数必有界。

**定理 3.1** 设  $f(x) \in R[a, b]$ ，则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必有界。

**证明：** 设  $\int_a^b f(x) dx = I$ ，则对  $\epsilon = 1$ ，存在  $[a, b]$  的一个划分  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ，使得对任意  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ，都成立

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < 1$$

下面证明函数  $f(x)$  在任意子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上都有界，从而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界。我们从上面的不等式中提取  $f(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上的信息：

$$I - 1 < f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{j \neq i} f(\xi_j) \Delta x_j < I + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta x_i} \left( I - 1 - \sum_{j \neq i} f(\xi_j) \Delta x_j \right) < f(\xi_i) < \frac{1}{\Delta x_i} \left( I + 1 - \sum_{j \neq i} f(\xi_j) \Delta x_j \right)$$

由于  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  的选取是任意的，故知  $f(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上有界。  $\square$

例 2.3 也表明：并非所有函数都可积。我们希望有简单易行的可积性判别准则。

由上定理知，可积函数必有界，故对  $f(x) \in R[a, b]$ ，可设其在  $[a, b]$  上的上确界和下确界分别是  $M$  和  $m$ ，即有  $m \leq f(x) \leq M$ 。另外，对  $[a, b]$  的任一划分  $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ，记  $M_i$  和  $m_i$  分别为  $f(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上的上确界和下确界，即  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ ； $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ ， $i = 1, 2, \cdots, n$ 。那么，给定任意的

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 则对黎曼和, 我们有如下估计

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i}_{\underline{S}(\pi)} \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i}_{\overline{S}(\pi)}$$

上面的  $\underline{S}(\pi)$  和  $\overline{S}(\pi)$  分别称为分划  $\pi$  对应的达布下和及达布上和, 简称下和及上和. 它们给出了积分值  $\int_a^b f(x)dx$  的一个下界和一个上界.

我们期望: 如果  $f(x)$  可积, 则当划分越来越精细 (密), 即  $\lambda(\pi) = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta x_i| \rightarrow 0$  时, 下和  $\underline{S}(\pi)$  和上和  $\overline{S}(\pi)$  都将趋向于积分值  $\int_a^b f(x)dx$ . 但问题是:  $\underline{S}(\pi)$  和  $\overline{S}(\pi)$  究竟是如何收敛的? 对该问题的回答将导致可积的充分必要条件, 由此可进一步推出判断可积的简单易行的准则, 即第 2 节开头罗列的三个可积的充分条件.

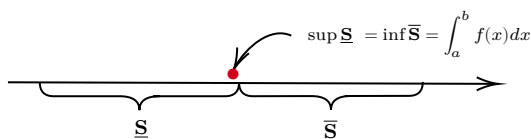
若函数  $f(x) \in R[a, b]$ , 按定义, 其积分  $\int_a^b f(x)dx$  是不依赖于计算它所采用的具体划分的. 为考察积分定义的精细结构, 我们考察  $[a, b]$  不同划分之间的关系.

如果划分  $\pi$  的分点的集合包含于划分  $\pi'$  的分点, 则称划分  $\pi'$  比  $\pi$  更精细 (*finer*), 记为  $\pi' \succeq \pi$ . 显然, 对两个划分  $\pi$  和  $\pi'$ , 将它们的分点合并所得到的划分  $\pi \cup \pi'$  是比  $\pi$  和  $\pi'$  都精细的划分, 即  $\pi \cup \pi' \succeq \pi$ ; 同理, 由它们公共分点所形成的划分  $\pi \cap \pi'$  的精细程度不超过  $\pi$  和  $\pi'$  的精细程度, 即  $\pi, \pi' \succeq \pi \cap \pi'$ .

显然对区间的分划可无限精细: 对给点划分不断添加分点便可得到越来越精确的划分. 记  $\underline{\mathbf{S}}$  为所有划分对应的 (达布) 下和的集合; 记  $\overline{\mathbf{S}}$  为所有分划对应的 (达布) 上和的集合, 即  $\underline{\mathbf{S}} := \{\underline{S}(\pi) : \forall \text{ 划分 } \pi\}$ ;  $\overline{\mathbf{S}} := \{\overline{S}(\pi) : \forall \text{ 划分 } \pi\}$ . 对任意划分  $\pi$ , 显然有

$$m(b-a) \leq \underline{S}(\pi) \leq \overline{S}(\pi) \leq M(b-a)$$

故  $\underline{\mathbf{S}}$  和  $\overline{\mathbf{S}}$  都是有界集合. 下引理表明:  $\overline{\mathbf{S}}$  中的任何数都是  $\underline{\mathbf{S}}$  的上界.



**引理 3.1** 如果  $\pi' \succeq \pi$ , 则有  $\underline{S}(\pi') \geq \underline{S}(\pi)$ ,  $\overline{S}(\pi') \leq \overline{S}(\pi)$ . 即当分划加细时, 大和不增, 下和不减.

**注记 3.1** 对任意两种分划  $\pi, \pi'$ , 都有:  $\underline{S}(\pi') \leq \overline{S}(\pi)$ , 也即, 下和永不超上和. 见上图所示. 这是因为, 根据上引理, 得  $\underline{S}(\pi') \leq \underline{S}(\pi \cup \pi') \leq \overline{S}(\pi \cup \pi') \leq \overline{S}(\pi)$ .

**证明：** 设  $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . 不失一般性, 设  $\pi'$  只比  $\pi$  多一个新分点  $x' \in (x_{i-1}, x_i)$ . 记  $M'_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x']} f(x)$ ,  $M''_i := \sup_{x \in [x', x_i]} f(x)$ , 则显然有  $M'_i \leq M_i$ ,  $M''_i \leq M_i$ , 从而

$$M'_i(x' - x_{i-1}) + M''_i(x_i - x') \leq M_i(x_i - x_{i-1})$$

由于  $\bar{S}(\pi')$  和  $\bar{S}(\pi)$  中的其它项都相同, 故  $\bar{S}(\pi') \leq \bar{S}(\pi)$ . 同理  $\underline{S}(\pi') \geq \underline{S}(\pi)$ .  $\square$

即上和的全体  $\bar{\mathbf{S}}$  中的数在分划加细后是单调减少且有下界的, 故它有下确界, 记为  $L := \inf \bar{\mathbf{S}}$ ; 下和的全体  $\underline{\mathbf{S}}$  中的数在分划加细后是单调增加且有上界的, 故它有上确界, 记为  $l := \sup \underline{\mathbf{S}}$ . 显然, 对任意划分  $\pi, \pi'$ , 都有  $\underline{S}(\pi') \leq l \leq L \leq \bar{S}(\pi)$ .

**定理 3.2** 只要函数  $f(x)$  有界 (注意这里尚不要求其可积), 则对任意分划  $\pi'$ , 当  $\lambda' := \max_{1 \leq i \leq k} \Delta x'_i \rightarrow 0$  时, 必有  $\lim_{\lambda' \rightarrow 0} \bar{S}(\pi) = L$ ,  $\lim_{\lambda' \rightarrow 0} \underline{S}(\pi) = l$ .

**证明：**  $\forall \epsilon > 0$ , 由下确界的性质知  $\exists \pi' : a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_k = b$ , 使得

$$0 \leq \bar{S}(\pi') - L < \frac{\epsilon}{2}$$

需证  $\forall \pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 当  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ , 都有  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{S}(\pi) = L$ , 即证  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 只要  $\lambda < \delta$ , 有  $0 \leq \bar{S}(\pi) - L \leq \epsilon$ . 为此, 考虑加细分划:  $\pi \cup \pi' = \{x_i\}_{i=1}^n \cup \{x'_j\}_{j=1}^p$ . 由引理 3.1 知:  $\bar{S}(\pi \cup \pi') \leq \bar{S}(\pi')$ . 下面分析  $\bar{S}(\pi)$  和  $\bar{S}(\pi \cup \pi')$  的关系. 我们将证明: 当  $\lambda < \delta$  时, 有

$$0 \leq \bar{S}(\pi) - \bar{S}(\pi \cup \pi') \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (*)$$

$$\text{从而 } 0 \leq \bar{S}(\pi) - L = \underbrace{[\bar{S}(\pi) - \bar{S}(\pi \cup \pi')]}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{[\bar{S}(\pi \cup \pi') - \bar{S}(\pi')]}_{\leq 0} + \underbrace{[\bar{S}(\pi') - L]}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} = \epsilon.$$

现证明 (\*). 如  $(x_{i-1}, x_i)$  中不含  $\pi'$  的分点, 则此时  $\bar{S}(\pi)$  和  $\bar{S}(\pi \cup \pi')$  中的相应项同为  $M_i \Delta x_i$ ; 如  $(x_{i-1}, x_i)$  中含有  $\pi'$  的分点, 由于两种分法的端点相同, 故这样的区间最多有  $k-1$  个. 取  $\delta := \min \left\{ \Delta x'_1, \dots, \Delta x'_k, \frac{\epsilon}{2(k-1)(M-m)} \right\}$ , 则当  $\lambda < \delta$  时, 有  $\Delta x_i \leq \delta \leq \Delta x'_j$ ,  $\forall i, j$ . 从而在  $(x_{i-1}, x_i)$  中只有一个新插入的分点  $x'_j$ . 此时,  $\bar{S}(\pi)$  和  $\bar{S}(\pi \cup \pi')$  中相应项的差为 (记号同上引理证明中的记号)

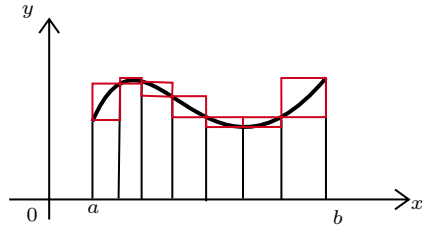
$$M_i(x_i - x_{i-1}) - [M'_i(x'_j - x_{i-1}) + M''_i(x_i - x'_j)] \leq (M-m)(x_i - x_{i-1}) < (M-m)\delta$$

$$\Rightarrow 0 \leq \bar{S}(\pi) - \bar{S}(\pi \cup \pi') \leq (p-1)(M-m)\delta \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \square$$

**定理 3.3** (可积的充要条件) 有界函数  $f(x) \in R[a, b]$  当且仅当: 对于任意分划  $\pi$ , 当  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$  时, 其上和与下和的极限相同, 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{S}(\pi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{S}(\pi) \xLeftrightarrow{\text{定理 3.2}} L = l$$

换言之, 若记  $\omega_i := M_i - m_i$  为函数  $f(x)$  在区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的振幅, 则上条件也等价于: 当  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$  时, 有  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$ . 即下图中红框框住部分的面积之和当划分无限加细时趋于零.



**证明:** (充分性) 对任意分划  $\pi$ , 有  $\underline{S}(\pi) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \bar{S}(\pi)$ . 故若  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{S}(\pi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{S}(\pi) = I$ , 那么两边求极限, 可知  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I$ . 即  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

(必要性) 设  $\int_a^b f(x) dx = I$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得对任意分划  $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  和任意点  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 只要  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} < \delta$ , 便有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

由于  $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ , 故一定可取到  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 使得

$$0 \leq M_i - f(\xi_i) < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \implies$$

$$\left| \bar{S}(\pi) - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| = \sum_{i=1}^n (M_i - f(\xi_i)) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\implies |\bar{S}(\pi) - I| = \left| \bar{S}(\pi) - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| + \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

即  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{S}(\pi) = I$ ; 同理可证  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{S}(\pi) = I$ . 从而  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{S}(\pi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{S}(\pi)$ .  $\square$

事实上, 定理 3.2 的证明过程表明:  $\forall \epsilon > 0$ , 只要有分划  $\pi'$ , 使得  $0 \leq \overline{S}(\pi') - L < \frac{\epsilon}{2}$  (或  $0 \leq l - \underline{S}(\pi') < \frac{\epsilon}{2}$ ), 则一定存在  $\delta > 0$ , 使得对任意满足  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} < \delta$  的分划  $\pi$ , 必有  $0 \leq \overline{S}(\pi) - L < \frac{\epsilon}{2}$  (或  $0 \leq l - \underline{S}(\pi) < \frac{\epsilon}{2}$ ), 结合定理 3.3, 可知

**定理 3.3'** (可积的充要条件) 有界函数  $f(x) \in R[a, b]$  当且仅当:  $\forall \epsilon > 0$ , 存在分划  $\pi$ , 使得相应的振幅满足  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon$ .

反之, 如  $\exists \epsilon_0 > 0$ , 使得对任意的分划  $\pi$ , 都有  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \geq \epsilon_0$ , 则  $f(x)$  不可积. 比如对例 2.3 中的狄利克雷函数, 对  $[0, 1]$  的任意分划, 都有  $\omega_i \equiv 1, \forall i$ , 从而  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 1$ , 故它不可积.

有了定理 3.3 和定理 3.3' 给出的可积性充要条件, 我们可推出下面比较方便的判断一函数是否 (黎曼) 可积的判别条件, 即可积的充分条件.

**推论 3.1** 闭区间上的单调函数必可积.

**证明:** 不妨设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加, 其在  $[x_{i-1}, x_i]$  上的振幅为  $\omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ .  $\forall \epsilon > 0$ , 需找  $\delta > 0$ , 使得当  $\lambda := \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} < \delta$ , 便有  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon$ . 即

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i < \delta \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \delta (f(b) - f(a))$$

由此可见, 取  $\delta = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$  即可.  $\square$

**推论 3.2** 闭区间上的连续函数必可积, 即  $f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$ .

**证明:** 见后.

**推论 3.3** 闭区间上只有有限个不连续点的有界函数必可积.

**证明:** 我们只证有一个不连续点的情形, 一般情形可类似处理. 假设  $p \in [a, b]$  是函数  $f(x)$  的一个不连续点. 如  $p$  是端点, 不妨设  $p = a$ , 此时  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\epsilon}{2(M - m)}$ , 其中  $M, m$  分别为  $f$  在  $[a, b]$  上的上界和下界. 则由于函数  $f$  在  $[a - \delta, b]$  上是连续的, 则由推论 3.2 知  $f \in R[a - \delta, b]$ , 故存在  $[a - \delta, b]$  的分划:  $a - \delta = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 使得  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2}$ . 现考虑加了左端点的加细分划:  $a < a - \delta = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ . 由于函数  $f(x)$  有界, 故虽然它在  $a$  处不连续, 但其在  $[a, a - \delta]$  上的振幅  $\omega_a \leq M - m$ .

从而对该加细分划, 对应振幅的加权和有如下估计:

$$\omega_a \delta + \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq (M-m)\delta + \frac{\epsilon}{2} < (M-m) \frac{\epsilon}{2(M-m)} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

即  $f \in R[a, b]$ ; 如果不连续点  $p$  在  $[a, b]$  内部, 证明方法完全类似, 只需选  $\delta$  足够小, 使得  $[p-\delta, p+\delta] \subsetneq [a, b]$ , 则  $f \in R[a, p-\delta] \cap R[p+\delta, b]$ , 分别取  $[a, p-\delta]$  和  $[p+\delta, b]$  的可用的相应振幅加权和和足够小的分划  $\pi, \pi'$ , 然后考虑加细分划  $\pi \cup \pi' \cup \{p-\delta, p+\delta\}$ . 其余完全类似与上情形的处理; 如果不连续点多于一个, 则对每个不连续点做如上处理, 需注意不连续点的  $\delta$  领域须选得互不相交才便于技术性处理.  $\square$

下面转向推论 3.2 的证明. 这里需要用到闭区间上连续函数的一个重要性质 (其证明放到《附录 I》中), 即如果  $f(x) \in C[a, b]$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x', x'' \in [a, b]$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 则有  $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ . 即函数具有比在每点处都连续更强的性质: 它在  $[a, b]$  上每点的连续的程度都是一致的, 此时我们称函数在  $[a, b]$  上是一致连续 (*uniform continuous*) 的.

**释意:**  $f(x)$  在一点  $x_0$  连续的“程度”可由与  $\forall \epsilon > 0$  所对应的最小的使得  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  的  $\delta_{inf} > 0$  来决定. 这个  $\delta_{inf}$  通常既是  $\epsilon$ , 又是  $x_0$  的函数, 且不同点  $x_0$  对应的  $\delta_{inf}$  往往相差很大, 反映出函数在不同点连续“程度”的不同. 比如对  $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x, x_0 \in (0, 1)$ , 为使  $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \epsilon$ , 即  $\frac{1}{x_0} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} + \epsilon$ , 反解出  $\frac{-x_0^2}{1+x_0\epsilon} < x - x_0 < \frac{x_0^2\epsilon}{1-x_0\epsilon}$ . 由此可得

$$\delta_{inf}(x_0, \epsilon) = \min \left\{ \frac{x_0^2\epsilon}{1+x_0\epsilon}, \frac{x_0^2\epsilon}{1-x_0\epsilon} \right\} = \frac{x_0^2\epsilon}{1+x_0\epsilon}$$

显然, 当  $\epsilon$  给定是,  $\delta_{inf}(x_0, \epsilon)$  对  $x_0 \in (0, 1)$  的取值的依赖是相当敏感的, 特别地, 当  $x_0 \rightarrow 0$  时,  $\delta_{inf}(x_0, \epsilon) \rightarrow 0$ . 因此不存在一个对所有  $x_0 \in (0, 1)$  都统一的  $\delta$ , 使得只要  $|x - x_0| < \delta$ , 便有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . 即知  $\frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  上不是一致连续的.

**推论 3.2 的证明:** 由于  $f(x) \in C[a, b]$ , 故它在  $[a, b]$  上一致连续, 即  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x', x'' \in [a, b]$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 就有  $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$ . 从而对任意分划, 只要  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} < \delta$ , 函数在区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的振幅  $\omega_i < \frac{\epsilon}{b-a}$ , 于是

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon \quad \square$$

## 4 可积函数的性质

在  $\int_a^b f(x)dx$  中, 当积分下限  $a$  大于积分上限  $b$  时, 我们规定:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

这个规定是合理的, 可以理解为划分中  $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i < 0$ , 然后累加求极限. 显然, 规定  $\int_a^a f(x)dx = 0$  也是合理的. 在此规定下, 不论  $a, b$  的相对大小关系如何, 只要函数  $f(x) \in R[a, b]$ , 表达式  $\int_a^b f(x)dx$  总有意义. 这也方便叙述定积分的运算性质:

**性质 4.1** (线性性) 设  $f, g \in R[a, b]$ , 又  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 则  $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ , 且

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

**证明:** 由于  $f, g \in R[a, b]$ , 给出  $[a, b]$  的任一划分  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 及  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 都有

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \Delta x_i &= \alpha \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \beta \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \quad \square \end{aligned}$$

特别地  $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ , 取  $\alpha = -1$ , 有  $\int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$ .

由此可定义减法如下:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx := \int_a^b f(x)dx + \left( -\int_a^b g(x)dx \right)$$

如此, 线性性可拓广为

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$$

从而, 求定积分  $\int_a^b$  运算实现了从线性空间  $R[a, b]$  到  $\mathbb{R}$  的一个线性变换:

$$\int_a^b : R[a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) \longmapsto \int_a^b f(x)dx$$

**性质 4.2 (区间可加性)** 设函数  $f \in R[a, b]$ ,  $\forall c \in (a, b)$ , 则  $f \in R[a, c]$ ,  $f \in R[c, b]$ , 且有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

**证明:** 如  $f \in R[a, b]$ , 则  $\forall \epsilon > 0$ , 存在分划  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  使得  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon$ , 令  $c$  是其中一个分点, 即  $x_k = c$ . 则  $[a, c]$  和  $[c, b]$  分别有如下分划

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c; \quad c = x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$$

则显然有  $\sum_{i=1}^k \omega_i \Delta x_i < \epsilon$  和  $\sum_{i=k+1}^n \omega_i \Delta x_i < \epsilon$ . 由此可知  $f \in R[a, c]$  且  $f \in R[c, b]$ .

反之, 如果  $f \in R[a, c]$  且  $f \in R[c, b]$ , 则  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists [a, c]$  和  $[c, b]$  的如下分划

$$a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_{n_1} = c; \quad c = x''_0 < x''_1 < \cdots < x''_{n_2} = b$$

使得  $\sum_{i=1}^{n_1} \omega'_i \Delta x'_i < \frac{\epsilon}{2}$ , 且  $\sum_{i=1}^{n_2} \omega''_i \Delta x''_i < \frac{\epsilon}{2}$ . 将这两个分划合并起来称为  $[a, b]$  的一个分划  $\{x_i\}_{i=1}^n$ , 其中  $n = n_1 + n_2$ . 从而

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n_1} \omega'_i \Delta x'_i + \sum_{i=1}^{n_2} \omega''_i \Delta x''_i < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

故  $f \in R[a, b]$ , 下证此时  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ . 记  $I = \int_a^b f(x)dx$ ,  $I' = \int_a^c f(x)dx$ ,  $I'' = \int_c^b f(x)dx$ . 则  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $[a, c]$  的分划  $\pi'$  和  $[c, b]$  的分划  $\pi''$ , 并存在  $\delta > 0$ , 使得当  $\lambda(\pi'), \lambda(\pi'') < \delta$  时, 成立

$$\left| \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi'_i) \Delta x'_i - I' \right| < \frac{\epsilon}{2}; \quad \left| \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi''_i) \Delta x''_i - I'' \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

那么  $\pi := \pi' \cup \pi''$  是  $[a, b]$  的一个分划, 且对此分划, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi'_i) \Delta x'_i + \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi''_i) \Delta x''_i \right| \implies \\ \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I' - I'' \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi'_i) \Delta x'_i - I' + \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi''_i) \Delta x''_i - I'' \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^{n_1} f(\xi'_i) \Delta x'_i - I' \right| + \left| \sum_{i=1}^{n_2} f(\xi''_i) \Delta x''_i - I'' \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

即证得  $\int_a^b f(x) dx = I' + I'' \quad \square$ .

**注记 4.1** 由于我们规定了  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ , 所以即便  $c$  不在  $[a, b]$  内部, 仍然成立  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ . 比如  $c < a$ , 此时, 按上定理, 有

$$\begin{aligned} \int_c^b f(x) dx &= \int_c^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \implies \int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx - \int_c^a f(x) dx = \\ &= \int_c^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

**性质 4.3** (乘积可积性) 设  $f, g \in R[a, b]$ , 则  $fg \in R[a, b]$ .

**证明:** 存在  $M > 0$ , 使得  $\forall x \in [a, b]$ , 都有  $|f(x)| \leq M, |g(x)| \leq M$ . 则由于  $f$  和  $g$  的可积性,  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的任意分划  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 使得  $\sum_{i=1}^n \omega'_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2M}, \sum_{i=1}^n \omega''_i \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2M}$ , 其中  $\omega'_i$  和  $\omega''_i$  分别是  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上的振幅. 下面估计  $f(x)g(x)$  的振幅, 对  $[x_{i-1}, x_i]$  中的任意两点  $x', x''$ , 有

$$\begin{aligned} |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| &= |f(x')g(x') - f(x'')g(x') + f(x'')g(x') - f(x'')g(x'')| \\ &= |g(x')(f(x') - f(x'')) + f(x'')(g(x') - g(x''))| \leq M(|f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')|) \\ \implies \omega_i &\leq M(\omega'_i + \omega''_i) \implies \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq M \left( \sum_{i=1}^n \omega'_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \omega''_i \Delta x_i \right) < \\ &< M \left( \frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M} \right) = \epsilon \quad \square \end{aligned}$$

**注记 4.2** 一般而言  $\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \left(\int_a^b f(x)dx\right) \left(\int_a^b g(x)dx\right)$ . 比如当  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $f(x) = x, g(x) = x^2$  时, 有

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{但 } \left(\int_0^1 f(x)dx\right) \left(\int_0^1 g(x)dx\right) &= \\ &= \left(\int_0^1 x dx\right) \left(\int_0^1 x^2 dx\right) = \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^1\right) \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

**性质 4.4** (保序性) 设  $f, g \in R[a, b]$ , 且在  $[a, b]$  上恒成立  $f(x) \leq g(x)$ , 则必有

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

**证明:** 只需证明若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上非负, 则  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ . 而这是极限保序性的自然结果: 任给  $[a, b]$  的一个分划:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  和任意点  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 由于  $f(x) \geq 0$ , 都有  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$ , 则由极限的保号性, 其在  $\lambda \rightarrow 0$  的极限也是非负的, 即积分  $\int_a^b f(x)dx$  非负.  $\square$

**性质 4.4'** (估值不等式) 设  $f(x) \in R[a, b]$ , 且在  $[a, b]$  上有  $m \leq f(x) \leq M$ , 则有  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ .

**证明:** 由与在  $[a, b]$  上有,  $m \leq f(x) \leq M$ , 则由积分的保序性知,

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

即  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ .  $\square$ .

**性质 4.5** (绝对可积性) 设  $f \in R[a, b]$ , 则  $|f| \in R[a, b]$ , 且  $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ .

**证明:** 由于对任意  $x', x''$ , 都有估计  $||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$ , 估值对

任意分划, 函数的振幅满足  $\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$ , 从而  $|f|$  的可积性可由  $f$  的可积性推出. 又因为  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ , 则由保序性得

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \iff \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad \square$$

**注记 4.3** 一般不能由  $|f|$  的可积性推出  $f$  的可积性. 比如对函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

则  $|f(x)| \equiv 1$ , 显然在  $[0, 1]$  上可积, 但  $f(x)$  在  $[0, 1]$  内任意子区间上的振幅为 2, 故  $f(x)$  是不可积的.

**例 4.1** 由于函数  $f(x) = \sqrt{1-x^2+x^3}$  在  $[\frac{1}{2}, 1]$  上的取值范围是:  $\frac{\sqrt{69}}{9} \leq f(x) \leq 1$ , 从而有估计:

$$\frac{\sqrt{69}}{18} \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2+x^3} dx \leq \frac{1}{2}$$

**例 4.2** 设  $f \in C[a, b]$ , 且在  $[a, b]$  上有  $f(x) \geq 0$ . 若  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , 证明:  $f(x) \equiv 0$ .

**证明:** 假设  $f$  在  $[a, b]$  上不恒为零, 则存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) > 0$ , 由于  $f(x) \in C[a, b]$ , 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则由极限的局部保号性, 知存在  $x_0$  的一个领域  $U(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 使得当  $x \in U(x_0, \delta)$  时, 成立  $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$ . 从而由积分的可加性、保序性, 知

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx > \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx = \frac{f(x_0)}{2}(2\delta) = f(x_0)\delta > 0 \end{aligned}$$

这于已知条件  $\int_a^b f(x)dx$  相矛盾了, 从而  $f(x) \equiv 0, \forall x \in [a, b]$ .  $\square$

**例 4.3** 先回忆著名的柯西-施瓦茨不等式及其经典证明. 对任意  $a_i, b_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 有

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

**证明:** 记  $\mathbb{R}^n$  中的向量  $\mathbf{u} := (a_1, \dots, a_n)$ ;  $\mathbf{v} := (b_1, \dots, b_n)$ , 则在欧几里得空间的标准内积及范数下, 柯西-施瓦兹不等式等价于  $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2$ . 为证明它, 我们考虑函数  $f(t) = \|t\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$  (假设  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  时不等式显然成立). 显然  $f(t) \geq 0, \forall t$ , 即

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle t\mathbf{u} + \mathbf{v}, t\mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = t^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 t^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \|\mathbf{v}\|^2 \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

由于  $f(t)$  的图像是开口朝上的抛物线, 故  $f(t)$  非负当且仅当判别式  $\Delta \leq 0$ , 即

$$\Delta = 4 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4 \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \leq 0$$

即得柯西-施瓦兹不等式, 且 " $=$ " 成立当且仅当  $\Delta = 0$ , 当且仅当  $f(t)$  的图像与  $x$ -轴相交于一点, 即存在  $t_0$ , 使得  $f(t_0) = \|t_0\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 0$ , 即  $t_0\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . 也就是说,  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$  线性相关 (平行).  $\square$

由于积分可看成是连续求和, 即求和的极限 (无限求和), 上面离散的柯西-施瓦兹不等式自然可推广到连续的柯西-施瓦兹不等式.

**柯西-施瓦茨不等式:** 设  $f(x), g(x) \in C[a, b]$ , 则有

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left( \int_a^b g^2(x)dx \right)$$

**证明 I:** 将区间  $[a, b]$   $n$  等分, 即令  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 且  $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . 则由离散形式的柯西-施瓦茨不等式得

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i) \right)^2 \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f^2(x_i) \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g^2(x_i) \right)$$

由于  $f, g$  可积, 故  $fg, f^2$  和  $g^2$  都可积, 故令  $n \rightarrow \infty$ , 便得所需.  $\square$

**证明 II:** 当  $\int_a^b f^2(x)dx = 0$  (或  $\int_a^b g^2(x)dx = 0$ ) 时, 由例 4.2 中的结论知:  $f(x) \equiv 0$  (或  $g(x) \equiv 0$ ), 结论显然成立. 下设两积分都不为零.

1. 当  $\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b g^2(x)dx = 1$ , 由于  $f(x)g(x) \leq \frac{1}{2} [f^2(x) + g^2(x)]$ , 则根据定

积分的保序性和线性性, 可得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2} \left[ \int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \right] = 1$$

结论成立.

2. 一般地, 令  $\varphi(x) := \frac{f(x)}{\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}}$ ,  $\psi(x) := \frac{g(x)}{\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}}$ , 则  $\varphi(x), \psi(x) \in C[a, b]$ ,

且  $\int_a^b \varphi^2(x)dx = 1 = \int_a^b \psi^2(x)dx$ , 则由情形 1 知  $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx \leq 1$ , 即

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}} \cdot \frac{g(x)}{\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}} &\leq 1 \implies \\ \int_a^b f(x)g(x)dx &\leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \quad \square \end{aligned}$$

**例 4.4** 设  $f(x) \in C[0, 1]$ , 且  $f(x) > 0$ , 则  $e^{\int_0^1 \ln f(x)dx} \leq \int_0^1 f(x)dx$ .

**证明:** 将  $[0, 1]$   $n$  等分, 则  $\int_0^1 \ln f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}$

$$\implies e^{\int_0^1 \ln f(x)dx} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \left( \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

由算术-平均值不等式  $\left( \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$ , 两边求极限, 结合极限的保序性, 得

$$e^{\int_0^1 \ln f(x)dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx \quad \square$$

## 5 积分中值定理

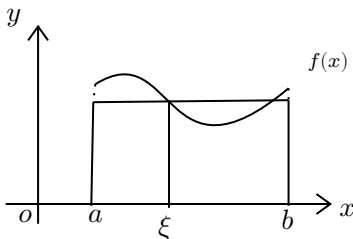
设函数  $f \in C[a, b]$ , 则由闭区间连续函数的性质知它在区间  $[a, b]$  上有最小值  $m$  和最大值  $M$ , 即  $\forall x \in [a, b]$ , 有  $m \leq f(x) \leq M$ , 那么由积分的保序性, 可得

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \iff m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

则由闭区间上连续函数的介值性知,  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ , 即

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (5.1)$$

该公式的几何含义是, 如果曲线是连续的, 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 是的它与  $x = a, x = b$ ,  $x$  轴围成区域的面积等于以  $f(\xi)$  为长, 以  $b-a$  为宽的长方形的面积.



公式 5.1 常被称为是积分中值公式, 它也可写作  $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ , 右边称为是函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的平均 (average). 即连续函数在一区间上的平均可被函数取到.

**关于平均概念的释疑:** 我们知道, 一组数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的平均是  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ . 为得到合理的关于一连续函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的平均概念, 我们将区间  $[a, b]$  分划为  $n$  等分:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 并任取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . 当  $n \rightarrow \infty$  时, 可近似认为  $f(x)$  在  $[x_{i-1}, x_i]$  上为恒定值  $f(\xi_i)$ , 从而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上平均的近似为

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \frac{b-a}{n} (f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n))$$

则函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的平均应为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n} =$

$$= \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

更一般地, 对一组数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 我们给每个数分别赋予权重 (weight)  $w_i$  (其中  $w_i \geq 0$ , 且  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ), 则这组数在该权重下的加权平均 (weighted average) 为  $\sum_{i=1}^n w_i a_i$ . 为便于推广, 我们将权重写成  $w_i = \frac{\lambda_i}{n}$  (其中  $\lambda_i \geq 0$ , 且  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$ ), 则加权平均为  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ .

**问题:** 对于  $f(x) \in C[a, b]$ , 有没有连续形式的加权平均概念呢?

首先, 离散情形下的权重概念应推广为权重函数 (weight function) 的概念, 即  $[a, b]$  上的非负函数  $w(x) \geq 0$ , 且满足  $\int_a^b w(x)dx = 1$ . 接下来, 仿效从前, 将区间  $[a, b]$  划分为  $n$  等分  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 并任取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 则

$$\sum_{i=1}^n w(\xi_i) \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n w(\xi_i) \approx 1$$

而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上对权函数  $w(x)$  的加权平均可近似于

$$\sum_{i=1}^n w(\xi_i) f(\xi_i) \Delta x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b w(x) f(x) dx$$

由此知**连续形式的加权平均**: 给定  $f \in C[a, b]$ , 设权函数为  $w(x) \in R[a, b]$ , 即  $w(x) \geq 0$ ,  $\int_a^b w(x)dx = 1$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上相对于权函数  $w(x)$  的加权平均定义为  $\int_a^b w(x) f(x) dx$ .

自然地, 我们要问: 对连续函数  $f(x)$  及任意的权函数  $w(x)$ , 函数  $f(x)$  是否可取到其相对于  $w(x)$  的加权平均?

答案是肯定的. 由于  $w(x)$  非负, 故  $mw(x) \leq w(x)f(x) \leq Mw(x)$ , 从而

$$\underbrace{\int_a^b mw(x)dx}_m \leq \int_a^b w(x)f(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b Mw(x)dx}_M$$

从而由连续函数的介值性, 知  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = \int_a^b w(x)f(x)dx$   $\square$ .

显然, 当权函数  $w(x) \equiv 1$  时, 我们便得到了连续平均的概念.  $w(x)$  也称为是概率密度 (probability density), 而  $\int_a^b w(x)f(x)dx$  也称为随机变量  $f(x)$  相对于由  $w(x)$  描述的概率分布下的期望 (expectation).

更一般地, 积分中值公式可推广

**定理 5.1** (积分中值定理) 设函数  $f \in C[a, b]$ ,  $g \in R[a, b]$ , 且  $g(x)$  在  $[a, b]$  上不  
变号, 则  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$

**证明:** 不妨设  $g(x) \geq 0$ , 如果  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , 则对  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$  积  
分, 然后利用保序性, 可知  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , 从而结论显然成立. 故设  $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ ,  
则下面函数是一个权函数

$$w(x) := \frac{g(x)}{\int_a^b g(x)dx}$$

则连续函数可取到其加权平均值, 即  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = \int_a^b w(x)f(x)dx$ , 即

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b g(x)f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \implies \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad \square$$

**例 5.1** 为求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$  的值, 令  $f(x) = x^n$ ,  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ ,

则由定积分中值定理, 知  $\exists \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , 使得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \xi^n \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

当由于  $0 \leq \xi^n \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ , 故由夹逼定理知所求极限为 0.

**注记 5.1** 对上题, 如果按下面的操作, 即将求极限和求积分顺序替换, 则结果虽然  
碰巧正确, 但这种操作通常会导致错误.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 0dx = 0$$

比如, 对函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1, \text{ 或 } x = 0 \end{cases}$$

显然, 对一切  $x \in [0, 1]$ , 成立  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ , 即  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$ , 但另一方面, 有

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n dx = n \frac{1}{n} = 1$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

**例 5.2** 设  $f \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ , 又  $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx$ . 证明:  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得  $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ .

**证明:** 令  $F(x) = xf(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$ ,  $F(1) = f(1)$ ,  $F(0) = 0$ . 由积分中值公式 (5.1), 知  $\exists \eta \in [0, 1]$ , 使得

$$f(1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \eta f(\eta) = \eta f(\eta) = F(\eta)$$

即  $F(\eta) = F(1)$ . 由罗尔定理,  $\exists \xi \in (\eta, 1)$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ .  $\square$

**例 5.3** 设对任意  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  有函数列  $f_n(x) \in C[0, 1]$ , 满足  $\int_0^1 f_n^2 dx = 1$ . 证明: 存在  $N$  和常数  $c_i, i = 1, 2, \dots, N$ , 使得

$$\sum_{n=1}^N c_n^2 = 1, \quad \max_{x \in [0, 1]} \left| \sum_{i=1}^N c_n f_n(x) \right| > 100$$

**证明:** 由题设可得  $\int_0^1 (f_1^2(x) + f_2^2(x) + \dots + f_N^2(x)) dx = N$ , 根据积分中值公式, 知  $\exists \xi$ , 使得

$$f_1^2(\xi) + f_2^2(\xi) + \dots + f_N^2(\xi) = N$$

即  $\mathbb{R}^N$  中向量  $\mathbf{u} := (f_1(\xi), f_2(\xi), \dots, f_N(\xi))$  的长度是  $\sqrt{N}$ . 则问题转化为: 寻找  $\mathbb{R}^N$  中的单位向量  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$  使得

$$|\mathbf{c} \bullet \mathbf{u}| = |c_1 f_1(\xi) + c_2 f_2(\xi) + \dots + c_N f_N(\xi)| > 100$$

但这是容易取到的, 只需然  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{u}$  同向, 则  $|\mathbf{c} \bullet \mathbf{u}| = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{N}$ , 为使它大于 100, 只需  $\sqrt{N} > 100$ , 即  $N = 10001$  便可. 也就是说, 可取

$$c_i = \frac{f_i(\xi)}{\sqrt{N}}, \quad i = 1, 2, \dots, N = 10001. \quad \square$$

## 6 微积分基本定理

设  $f(x) \in R[a, b]$ , 仿照“图景 II”中面积函数  $S(t)$  的定义, 我们考虑变上限积分函数, 简称变上限积分, 即

$$\Phi(x) := \int_a^x f(t)dt \quad (x \in [a, b])$$

虽然现在只要求  $f(x)$  可积 (不假设更强的连续性), 但下面定理表明, 此时  $\Phi(x)$  必是连续的!

**定理 6.1** 设函数  $f \in R[a, b]$ , 则  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \in C[a, b]$ .

**证明:** 由定理 3.1 知,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 即  $\exists M > 0$ , 使得  $\forall t \in [a, b]$ , 有  $|f(t)| \leq M$ . 则对任意  $x \in [a, b]$ , 取  $\Delta x$  使得  $x + \Delta x \in [a, b]$ , 都有

$$\begin{aligned} |\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)| &= \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \\ &= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \leq M|\Delta x| \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0) \quad \square \end{aligned}$$

**定理 6.2 (微积分基本定理)** 设函数  $f \in C[a, b]$ , 则  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \in D[a, b]$ , 且有

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

**证明:** 对任意  $\xi \in [a, b]$ , 取  $\Delta x$  使得  $x + \Delta x \in [a, b]$ , 我们估计

$$\Delta\Phi := \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

由假设  $f(t) \in C[a, b]$ , 根据积分中值定理, 可知  $\exists \xi$  介于  $x$  与  $x + \Delta x$  之间, 使得

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x \implies \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi) \\ \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) \stackrel{f \in C[a, b]}{=} f(x), \text{ i.e., } \frac{d\Phi}{dx} = f(x) \quad \square \end{aligned}$$

**总结：**可积函数的变上限积分连续，连续函数的变上限积分可导，且其导函数回到其自身。即闭区间上的连续函数必有由其变上限积分给出的原函数。

利用微积分基本定理，可给出牛顿-莱布尼茨公式的另证：

**证明：**我们知道当  $f \in C[a, b]$  时，变上限积分  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  是  $f(x)$  的一个原函数，且  $\Phi(a) = 0$ 。对  $f(x)$  的任意原函数  $F(x)$ ，它与  $\Phi(x)$  只差一个常数  $C$ ，即

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

在上式中令  $x = a$ ，得常数  $C = -F(a)$ ，从而有  $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ 。特别地，令  $x = b$ ，即得牛顿-莱布尼茨公式  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ 。  $\square$

**推论 6.1** 设函数  $F(x)$  在  $[a, b]$  上有连续导函数，则

$$\int_a^x F'(t)dt = \int_a^x dF(t) = F(x) - F(a), \quad \forall x \in [a, b]$$

即（变上限）积分一个函数的导函数回到这个函数本身（加一个常数）。

**注 6.1** 给定  $[a, x]$  的任一分划  $\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x$ ，及  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ，有  $\int_a^b F'(t)dt \approx \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)\Delta x_i \approx$

$$\approx \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i) - F(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a)$$

注意：在  $[x_{i-1}, x_i]$  上我们利用割线斜率  $\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$  近似切线斜率，但  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$  时，“ $\approx$ ”变为“ $=$ ”。

换言之，一函数之微分  $dF$  在一区间上的累积  $\int_a^b dF$  即为函数在该区间两 endpoints 取值之差。上公式还是一种有启发性的写法，即

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$$

特别地，这表明：在点  $x = a$  附近， $F(x)$  的值，相对于  $F(a)$  而言，其净增长是由其增长速率（由导数衡量）对“时间”变量  $t$  在  $[a, x]$  上的积累给出的。比如，当  $F = s(t)$  是位移函数时表示：位移的改变由速度  $v(t) := s'(t)$  对时间的累积给出，这当然是我们非常熟悉的情景。

将上式与拉格朗日中值定理说给出的下估计相对比

$$F(x) = F(a) + F'(a + \theta(x-a))(x-a) \quad 0 < \theta < 1$$

即  $\exists \xi$  介于  $a$  和  $x$  之间, 使得  $\int_a^x F'(t)dt = F'(\xi)(x-a)$ . 当然, 这无非是积分的中值公式.

类似地, 也可考虑变下限积分  $\Psi(x) = \int_x^b f(t)dt$ ,  $x \in [a, b]$ , 它与变上限积分有关系  $\int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt$ .

**例 6.1** 求函数  $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$  的导数.

**解:** 令  $u(x) = \sqrt{x}$ ,  $\Phi(u) := \int_0^u \cos t^2 dt$ , 则函数  $F(x) = \Phi(u(x))$ . 有复合函数求导的链式法则, 得

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{dx} = \sin u^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$$

**例 6.2**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \arctan \sqrt{t} dt}{\ln(1+x^3)} \stackrel{\ln(1+x^3) \sim x^3}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \arctan \sqrt{t} dt}{x^3} =$

$$\stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \arctan x}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

**例 6.3** 设  $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$ , 且  $f'(t) \geq 0$  ( $t \in (a, b)$ ), 记  $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt$ .

证明:  $\forall x \in (a, b)$ , 成立  $F'(x) \geq 0$ .

**证明:**  $F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$ . 又由积分中值公式, 知  $\exists \xi \in [a, x]$ , 使得  $\int_a^x f(t)dt = f(\xi)(x-a)$ , 从而有

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x-a} \geq 0 \quad (\text{因 } f'(x) \geq 0) \quad \square$$

**例 6.4** 证明  $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ .

**证明:** 记  $F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$ , 则  $F'(x) =$

$$-\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} - \frac{d}{dx} \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \equiv 0$$

从而  $F(x) = C$  (常数), 令  $x = 1$ , 得  $C = 0$ , 从而等式得证.  $\square$

**注记 6.2** 不难看出,  $\arctan x$  是  $\frac{1}{1+x^2}$  的一个原函数, 从而所证等式等价于  $\arctan t \Big|_x^1 = \arctan t \Big|_1^{\frac{1}{x}}$ , 即  $\frac{\pi}{4} - \arctan x = \arctan \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}$ , 也即  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ , 而这是显然成立.

## 7 定积分的换元公式

回顾例 2.2 中关于积分  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$  的计算. 如不用牛顿-莱布尼茨公式, 则需划分区间、取点、然后求对应黎曼和的极限. 还记得当时是将分点取为  $x_i = q^i$  ( $q = 2^{1/n}$ ),  $\xi_i = x_i$ , 然后可方便求出黎曼和的极限是  $\ln 2$ . 但既然函数可积, 则其积分值是不依赖于分划方式及取点方式的, 那么如果将  $[1, 2]$  等分为  $n$  份, 即取分点  $x_i = 1 + \frac{i}{n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , 并令  $\xi_i = x_i$ , 则该分划对应的黎曼和为  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$ . 也就是说, 一定有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \ln 2$$

左边的极限直接算是比较困难的, 但当识别出它是某个积分则计算就简单多了. 当然, 如果直接从上面极限的形式出发, 我们也可按如下方式将它转变为一个积分:

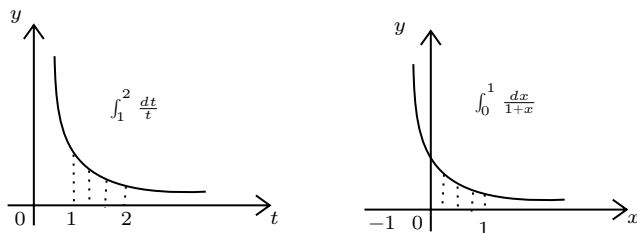
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \frac{1}{n}$$

这可以看做是  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  在区间  $[0, 1]$  上的积分  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2$ . 既然两个积分都表示的是相同的极限, 我们自然有如下等式

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

这个积分等式也可以看成是做了“变量替换”:  $t = 1+x$  而得的. 在该变量替换下,

被积函数从  $\frac{1}{1+x}$  变为  $\frac{1}{t}$ ; 微分  $dx$  变为  $d(t-1) = dt$ ; 而积分下限从变量  $x$  的取值 0 变为  $t$  的取值 1, 同理上限从 1 变为 2. 当然, 从求面积的角度来说, 上面的变量替换相当于对同一面积的平移, 所以对应积分不变是显而易见的! 见下图:



用积分的极限定义, 从根由解释起, 也是不难的. 任给区间  $[0, 1]$  的一个分划:  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  及选点  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 则  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\xi_i} \Delta x_i$ . 但在新变量  $t = 1 + x$  下, 上面对  $x$ -轴上区间  $[0, 1]$  的分划转变为对  $t$  轴上  $[1, 2]$  的如下分划

$$1 = \underbrace{1+x_0}_{t_0} < \underbrace{1+x_1}_{t_1} < \dots < \underbrace{1+x_n}_{t_n} = 2$$

且  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  则转化为  $\eta_i := 1 + \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . 注意到:

$$\Delta t_i = (1 + x_i) - (1 + x_{i-1}) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

从而对应黎曼和之极限有如下转化

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\xi_i} \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} \Delta t_i = \int_1^2 \frac{dt}{t}$$

上例中的变量替换原则及其解释具有一般性, 我们需将其中的要点萃取, 并加以条件限制, 便得一般定积分的变量替换规则及其证明.

**定理 7.1** (定积分换元公式) 设函数  $f(x) \in C[a, b]$ . 如果可导函数  $x = \varphi(t)$  满足条件  $\varphi'(t) \in R[\alpha, \beta]$ , 且  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ,  $\varphi$  的值域  $R(\varphi) \subseteq [a, b]$ , 则有

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt} \quad (7.1)$$

**注记 7.1** 上面引导例子中,  $x = t - 1$ , 即  $\varphi(t) = t - 1$ , 故  $\varphi(1) = 0$ ,  $\varphi(2) = 1$ , 且

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f[\varphi(t)] = \frac{1}{1+(t-1)} = \frac{1}{t}.$$

**注记 7.2** 如果加限制条件:  $\varphi'(t)$  连续, 且  $\varphi(t)$  从  $a = \varphi(\alpha)$  单调地变到  $b = \varphi(\beta)$ , 则我们延续上例中的讨论, 可从原始定义出发对换元公式加以论证, 现勾勒如下: 不妨假设  $\varphi$  单调增加. 取  $[\alpha, \beta]$  的任一分划  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ , 它对应于  $[a, b]$  的如下分划:

$$a = \underbrace{\varphi(t_0)}_{x_0} < \underbrace{\varphi(t_1)}_{x_1} < \dots < \underbrace{\varphi(t_n)}_{x_n} = b$$

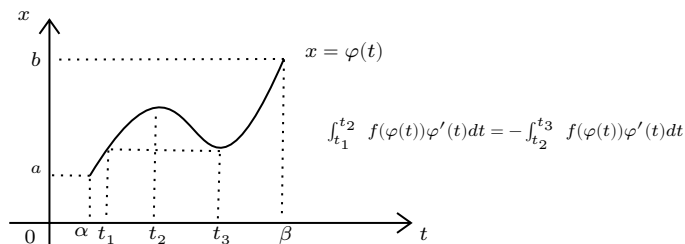
由于  $x = \varphi(t)$  一致连续, 当  $\lambda := \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$  时, 有

$$\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \max_{1 \leq i \leq n} \{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\} \rightarrow 0$$

任取  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , 它对应于  $\eta_i := \varphi(\xi_i) \in [x_{i-1}, x_i]$ , 则  $\int_a^b f(x)dx$  对应于该分划及取点  $\eta_i$  的黎曼和有如下变换

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i)) (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) \stackrel{\substack{\text{由拉格朗日中值定理} \\ \exists \mu_i \in (t_{i-1}, t_i)}}{=} \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i)) \varphi'(\mu_i) \Delta t_i \\ &\xrightarrow[\varphi(t) \text{ 连续}]{\lambda \rightarrow 0} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i)) \varphi'(\xi_i) \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \square \end{aligned}$$

在定理 7.1 的假设:  $\varphi'(t) \in R[\alpha, \beta]$  下, 两可积函数的乘积  $f(t)\varphi'(t)$  也是可积的. 此时由于  $\varphi(t)$  没有整体的单调性, 故不易通过原始定义按上面的模式直接加以处理 (虽然理论上可将  $[\alpha, \beta]$  划分成小区间, 使得  $\varphi(t)$  在每一小区间上都单调, 然后在每一小区间上按注记中处理, 这些积分中有些相互抵消掉后会得到  $\int_a^b f(x)dx$ , 相互抵消的情形见下图所示).



这样证明起来显然过于繁琐, 但我们发现如果利用牛顿-莱布尼茨公式从整体出发思考, 则可绕过上面的技术麻烦.

**定理 7.1 的证明:** 由于  $f(x) \in C[a, b]$ , 故其变上限积分是一原函数, 即  $f(x)$  存在原函

数, 所以计算  $\int_a^b f(x)dx$  时可利用牛顿莱布尼茨公式进行. 设  $F(x)$  是  $f(x)$  的任一原函数, 考虑复合函数  $\Phi(t) := F(\varphi(t))$ , 则其导函数为  $\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ , 从而由牛顿莱布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \quad \square\end{aligned}$$

注意到, 利用微分的定义, 公式 (7.1) 也可写作:  $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))d\varphi(t)$ .

换个视角来看, 也就是说, 我们将  $f(x)dx$  看成个整体, 则换元法的精髓在于想法子凑微分, 即将  $f(x)dx$  重新整理为  $g(h(x))h'(x)dx = g(h(x))dh(x)$ , 从而凑出个微分  $dh$ , 然后令  $u = h(x)$  为新的变元, 若  $a \leq x \leq b$  对应为  $\alpha \leq u \leq \beta$ , 则

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(u)du} \quad (7.2)$$

而凑微分的目的是使得以  $u$  变量来看积分是更容易积的, 即更容易找到  $g(u)$  的原函数; 或将积分划归为熟知积分类型及其变形. 对某些积分, 可能需要多次换元才能将其简化到直接可积分的类型.

**例 7.1** 对积分  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$ , 几何上, 它代表四分之一圆:  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,  $y \geq 0$  的面积, 即  $\frac{\pi a^2}{4}$ . 下面我们用两种方法进行换元求解.

**方法 I:** 令  $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ , 则  $x = \sqrt{a^2 - u^2}$ , 且  $dx = \frac{-u du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ , 并注意到当  $x$  从 0 变到  $a$  时,  $u$  从  $a$  变到 0, 从而以变元  $u$  来看, 所求积分为

$$\begin{aligned}-\int_a^0 \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} &= -\int_0^a \frac{-u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\int_0^a \frac{(a^2 - u^2 - a^2)}{\sqrt{a^2 - u^2}} du \\ &= -\int_0^a \sqrt{a^2 - u^2} du + a^2 \int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}\end{aligned}$$

即得到了积分等式

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\int_0^a \sqrt{a^2 - u^2} du + a^2 \int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

$$\text{即 } \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}.$$

对最后这个积分, 其被积函数让人想到公式  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . 我们再进行一次变量替换 (或凑微分), 以便将积分转换为可用上求导公式直接处理的形式. 令  $u = at$ , 则  $du = a dt$ , 上面  $u$ -积分变为下面的  $t$ -积分

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} \int_0^a \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} &= \frac{a^2}{2} \int_0^1 \frac{adt}{a\sqrt{1-t^2}} = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{a^2}{2} \arcsin t \Big|_0^1 = \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4} \end{aligned}$$

**方法 II:** 更简洁的处理方法是, 注意到  $x^2 + y^2 = a^2$  有自然的参数化  $x = a \cos t$ ,  $y = \sin t$ . 故可令  $x = a \cos t$ , 此时  $dx = -a \sin t dt$ , 当  $x$  从 0 变到  $a$  时,  $t$  从  $\frac{\pi}{2}$  变到 0. 从而有

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 t} (-a \sin t) dt = \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \\ &\quad - \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) = \frac{a^2 \pi}{4} - \frac{a^2}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4} \end{aligned}$$

**例 7.2** 求  $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx \quad (a > 0)$ .

**方法 I:** 根号部分难直接处理, 想办法把根号给替换掉. 回忆起三角恒等式  $\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$ , 可考虑变元替换:  $x = a \sec t$ , 则  $dx = a \sec t \tan t dt$ , 积分下限  $x = a$  变为  $t = 0$ , 积分上限  $x = 2a$  变为  $t = \frac{\pi}{3}$ , 故积分可写成

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{a \tan t}{a^4 \sec^4 t} a \sec t \tan t dt = \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 t}{\sec^3 t} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \underbrace{\cos t dt}_{\text{可凑微分}} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t d \sin t = \frac{1}{a^2} \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2} \end{aligned}$$

**方法 II:** 分母上有高次项也是导致积分难直接处理的原因, 为此我们采用变元替

换:  $x = \frac{a}{t}$ , 则积分转化为

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx &\stackrel{x=\frac{a}{t}}{=} \int_1^{1/2} \frac{\sqrt{\frac{a^2}{t^2} - a^2}}{\frac{a^4}{t^4}} \left( -\frac{adt}{t^2} \right) = \frac{1}{a^2} \int_{1/2}^1 t \sqrt{1 - t^2} dt \\ &= \frac{-1}{a^2} \int_{1/2}^1 \sqrt{1 - t^2} \underbrace{(-tdt)}_{\text{可凑微分}} = \frac{-1}{2a^2} \int_{1/2}^1 \sqrt{1 - t^2} d(1 - t^2) \\ &= \frac{-1}{2a^2} \int_{1/2}^1 \frac{2}{3} d(1 - t^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3a^2} (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{1/2}^1 = \frac{\sqrt{3}}{8a^2} \end{aligned}$$

**例 7.3 (\*)** 求  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ . 一个巧妙的换元:  $x = \frac{1-t}{1+t}$  可破解此积分. 当  $x=0$  时,  $t=1$ ; 当  $x=1$  时  $t=0$ , 且  $dx = \frac{-2dt}{(1+t)^2}$ , 从而

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx &= \int_1^0 \frac{\ln(1+\frac{1-t}{1+t})}{1+(\frac{1-t}{1+t})^2} \left( \frac{-2dt}{(1+t)^2} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{2 \ln(\frac{2}{1+t}) dt}{(1+t)^2 + (1-t)^2} = \int_0^1 \frac{\ln 2 - \ln(1+t)}{1+t^2} dt \\ &= \ln 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt \quad \Rightarrow \\ \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx &= \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\ln 2}{2} \arctan t \Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{2} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi \ln 2}{8} \end{aligned}$$

如果被积函数是偶(奇)函数, 且被积区间具有原点对称性(或能划分出具有对称性的部分), 则可依据对称性来简化计算, 提高求解效率.

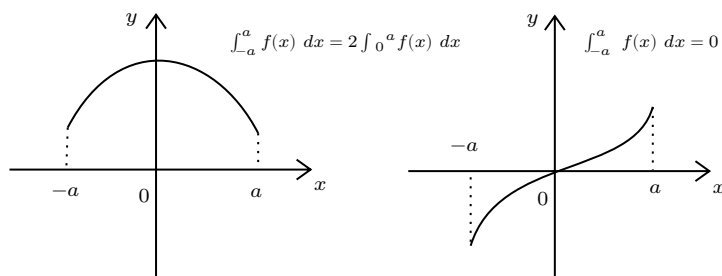
**例 7.4** 设  $f(x) \in R[-a, a]$ , 则有

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

**证明:**  $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$ , 但

$$\int_{-a}^0 f(x) dx \stackrel{x=-t}{=} - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \\ &= \int_0^a (f(-x) + f(x)) dx = \begin{cases} 0, & f \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f \text{ 为偶函数} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$



**例 7.5** 由对称性, 轻易可知  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = 0$ .

对称原则需灵活运用. 比如当  $f(x) = f(a-x)$  时, 有  $\int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx$ ;  
当  $f(x) = -f(a-x)$  时, 有  $\int_0^a f(x) dx = 0$ .

这是因为, 令  $x = \frac{a}{2} - x$ , 则  $f(x) = \pm f(a-x)$  表明:  $f\left(\frac{a}{2} - x\right) = \pm f\left(\frac{a}{2} + x\right)$ .  
故条件  $f(x) = f(a-x)$  说明函数关于直线  $x = \frac{a}{2}$  是偶函数; 而  $f(x) = -f(a-x)$  说明函数关于直线  $x = \frac{a}{2}$  是奇函数.

**例 7.6** 对积分  $\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$ , 其中  $a, b$  不同时为零. 注意到在变量替换  $x \rightarrow \pi - x$  下, 由于  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ;  $\sin(\pi - x) = \sin x$ , 即被积函数  $f(x)$  在变替换下变为  $-f(x)$ , 所以  $f(x)$  关于  $[0, \pi]$  的中点  $\frac{\pi}{2}$  是奇函数, 从而积分为零. 另一种看法是, 直接做变量替换  $t = x - \frac{\pi}{2}$ , 则原积分变为  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} dt = 0$ .

**例 7.7** 对积分  $\int_{-2}^2 x \ln(1 + e^x) dx$ , 做变量替换  $x = -t$ , 则

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x \ln(1 + e^x) dx &\stackrel{x=-t}{=} \int_2^{-2} (-t) \ln(1 + e^{-t}) d(-t) = - \int_{-2}^2 t(\ln(1 + e^t) - t) dt \\ &= - \int_{-2}^2 x \ln(1 + e^x) dx + \int_{-2}^2 x^2 dx \implies \int_{-2}^2 x \ln(1 + e^x) dx = 0 \end{aligned}$$

**例 7.7'** 对任意实数  $a$ , 恒成立  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^a x} = \frac{\pi}{4}$ . 类似与上题思路, 虽然被积函数对于积分区间不具有奇偶性, 但又很接近于具有奇偶性的情形.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^a x} \stackrel{t=\frac{\pi}{2}-x}{=} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-dt}{1 + \tan^a (\frac{\pi}{2} - t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \cot^a t} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^a t dt}{\sin^a t + \cos^a t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^a t}{1 + \tan^a t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \tan^a t} \\ &\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^a x} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

具有周期性函数的积分结果不依赖于被积区间的周期平移, 即有

**命题 7.1** 设函数  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上以  $T$  为周期的连续函数, 则有  $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ , 更进一步有  $\int_a^{a+nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx$ .

**证明:** 由区间可加性, 得  $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$ , 对第二个积分用变元替换  $x = t + T$ , 得

$$\begin{aligned} & \int_T^{a+T} f(x)dx \stackrel{x=t+T}{=} \int_0^a f(t+T)dt \stackrel{f(t+T)=f(t)}{=} \int_0^a f(t)dt \\ &\Rightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad \square \end{aligned}$$

注意到例 7.7 中的计算过程中, 我们实际上得到了  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^a x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cot^a x}$  的结果, 即将被积函数看成是  $f(\sin x)$ , 则结论相当于是说  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ . 事实上, 这是一个一般结论, 即有下命题:

**命题 7.2** 设函数  $f \in C[0, 1]$ . 则成立下列公式

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx; \quad 2) \quad \int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \\ 3) \quad & \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx \end{aligned}$$

**证明：**对 1) 中的积分，令  $x = \frac{\pi}{2} - t$ ，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \stackrel{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt$$

对 2) 中的积分， $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x) dx$

$$\stackrel{x=\pi-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\pi - t)) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt$$

对 3) 中的积分，令  $x = \pi - t$ ，有  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx =$

$$= \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) (-dt) = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt \quad \square$$

**例 7.7''** 对例 7.7 中的积分  $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^a x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^a t}{\sin^a t + \cos^a t} dt$ ，利用上面公式 1)，可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^a t}{\sin^a t + \cos^a t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a t}{\sin^a t + \cos^a t} dt \implies 2I = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^a t}{\sin^a t + \cos^a t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a t}{\sin^a t + \cos^a t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} \implies I = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

**例 7.8** 对积分  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ ，利用 3) 中的结论，直接可得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \stackrel{\text{凑微分}}{=} -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d \cos x}{1 + \cos^2 x} \\ &\stackrel{u=\cos x}{=} \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2} \arctan u \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

**例 7.3'(\*)** 对例 7.3' 中的积分  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ 。我们之前用了一个相当巧妙的变

量替换  $x = \frac{1-t}{1+t}$  而将其破解. 这里我们注意到分母  $1+x^2$  可用三角恒等式  $1+\tan^2 t = \sec^2 t$  来转化, 即令  $x = \tan t$ , 则  $dx = \sec^2 t dt$ , 从而

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\tan t)}{\sec^2 t} \sec^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt$$

这仍是一个不简单的积分, 但它里面包含三角函数, 故可从探测其结构的对称性入手. 通常为了探测函数  $f(x)$  在  $[0, a]$  上是否具有某种对称性, 需观察  $f(a-x)$  和  $f(x)$  的关系. 在我们的例子中, 考虑

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) &= \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right) = \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right) \\ &= \ln 2 - \ln(1+\tan t) \implies \\ \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) - \frac{\ln 2}{2} &= -\left(\ln(1+\tan t) - \frac{\ln 2}{2}\right) \end{aligned}$$

也就是说: 函数  $h(t) := \ln(1+\tan t) - \frac{\ln 2}{2}$  关于  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  的中点是奇函数, 也即其图形在  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  上关于点  $\frac{\pi}{8}$  是中心对称的, 从而有

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(t) dx = 0 \implies \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt = \frac{\ln 2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

**另解:** (本质同上, 只是省却了几何直观奇偶性的过程) 直接利用变量替换  $x = \frac{\pi}{4} - t$ , 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x) dx &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{2}{1+\tan t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1+\tan t)) dt = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt \\ &\implies \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt = \frac{\pi}{8} \ln 2 \end{aligned}$$

## 8 积分技术盘点

### 8.1 换元法

首先, 基本积分表中的积分要记住, 然后就是利用变元替换这一关键技术将未知积分变换位已知积分或可直接积出来的积分类型.

类似与定积分换元公式(当牛顿-莱布尼茨公式可用时)的证明, 我们可证明不定积分的换元公式.

**定理 8.1.1** (第一换元法) 设函数  $F(u)$  是  $f(u)$  在区间  $I$  上的一个原函数, 即  $\int f(u)du = F(u) + C$ , 又  $u = \varphi(x)$  在区间  $I$  上可导且其值域  $R(\varphi) \subseteq I$ , 则有

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(x)) \underbrace{\varphi'(x)dx}_{\text{凑微分}} &= \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \\ &\stackrel{u=\varphi(x)}{=} \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C \end{aligned}$$

**证明:** 由复合函数求导的链式法则, 得

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) \quad \square$$

**定理 8.1.2** (第二换元法) 设函数  $x = \varphi(t)$  在区间  $I$  上可导且  $\varphi'(t) \neq 0$ , 且  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C$ , 则  $\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C$ , 其中  $t = \varphi^{-1}(x)$  是  $x = \varphi(t)$  的反函数. 即

$$\int f(x)dx \stackrel{x=\varphi(t)}{=} \int \underbrace{f(\varphi(t))\varphi'(t)}_{\text{有原函数 } F(t)} dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

**证明:** 由复合函数求导的链式法则, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(F(\varphi^{-1}(x))) &= \frac{dF}{dt} \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \\ &= f(\varphi(t))\varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x) \quad \square \end{aligned}$$

先就基本积分表中的几个积分做一点解释.

**例 8.1.1**

- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$  ( $a > 0$ ). 如果按第一换元的模式, 即想办法凑微分, 可按如下处理

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a d\left(\frac{x}{a}\right)}{a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \left(\frac{x}{a}\right) + C$$

如果按第二换元的模式, 即直接用变量替换化成容易的积分, 则可按如下处理

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \stackrel{x=a \sin t}{dx=a \cos t dt} \int \frac{a \cos t dt}{a \cos t} = \int dt = t + C = \arcsin \left(\frac{x}{a}\right) + C$$

- 同理, 令  $x = a \tan t$ , 可求得  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$  ( $a \neq 0$ ).
- 对积分  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ . 一种方法是注意到

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right)$$

从而有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{dx}{x - a} + \int \frac{dx}{x + a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln |x - a| + \ln |x + a|) + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \end{aligned}$$

也可考虑用换元  $x = a \sec t$ , 则  $dx = a \sec t \tan t dt$ , 从而有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \int \frac{a \sec t \tan t dt}{a^2 \tan^2 t} = \frac{1}{a} \int \frac{\sec t}{\tan t} dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sin t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int \csc t dt = \frac{1}{a} \ln |\csc t - \cot t| + C \end{aligned}$$

我们还需换回用原变量  $x$  的表达式. 一种方法是利用三角恒等式: 已知  $\sec t = \frac{x}{a}$ , 求  $\cot t$  和  $\csc t$ ? 即已知  $\cos t = \frac{a}{x}$ , 那么

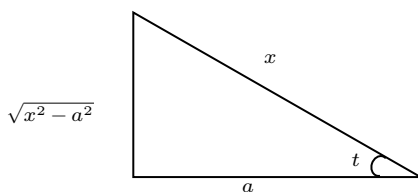
$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{a/x}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}; \quad \csc t = \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

从而

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} - \frac{a/x}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \right| + C \\&= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right| + C = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x - a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right| + C \\&= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{(x - a)^2}{x^2 - a^2} \right| + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C\end{aligned}$$

上面的求解过程稍显繁琐，比较简介的求法是利用图示，即我构造一个直角三角形，使得  $\sec t = \frac{x}{a}$  在其中成立，然后求解该直角三角形以得到我们所需的信息。

**注意：**在解直角三角形时，我们不需要考虑角度取值带来的多种可能性，对求不定积分而言，我们只需找到一个原函数就可以了，而其它的原函数与它差任意常数。



在上三角形中，轻易可知  $\csc t = \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$ ； $\cot t = \frac{a/x}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$ ，剩下的过程同上。

- 在上个积分的求解中，我们用到了  $\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$ ；类似地，还有  $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$ 。可证明如下：

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} \\&\stackrel{u=\sin x}{=} \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) dx \\&= \frac{1}{2} (\ln |u+1| - \ln |u-1|) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| + C \\&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C = \ln \sqrt{\left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|} + C = \\&= \ln \sqrt{\frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x}} + C = \ln |\sec x + \tan x| + C \quad \square\end{aligned}$$

- 对积分  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$  ( $a > 0$ ) 用换元  $x = a \tan t$ , 积分可转化为

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \sec^2 t}{a \sec t} dt = \int \sec t dt = \ln |\sec t + \tan t| + C \\&= \ln \left| \sqrt{1 + \tan^2 t} + \tan t \right| + C = \ln \left| \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{x}{a} \right| + C \\&= \ln \left( \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a} \right) + C = \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \underbrace{- \ln a + C}_{\text{仍是任意常数}} \\&= \ln \left( x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C\end{aligned}$$

- 利用代换  $x = a \sec t$ , 同理可证:  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$  ( $a > 0$ )

**例 8.1.2**  $\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} dx = - \int (\sin x + \cos x) dx$

$$= - \int \sin x dx - \int \cos x dx = \cos x - \sin x + C$$

**例 8.1.3**  $\int \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)} = \int \frac{(x^2 + 1) - x^2}{x^2(x^2 + 1)} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

例 8.1.2, 例 8.1.3 是化简后直接积的类型.

**例 8.1.4**  $\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C$

**例 8.1.5**  $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \sin \sqrt{x} d(\sqrt{x}) = -2 \cos \sqrt{x} + C$

**例 8.1.6**  $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \xrightarrow{\text{凑微分}} - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$

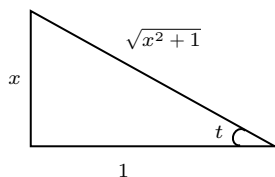
**例 8.1.7**  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \int \frac{d \ln x}{\ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln(\ln x))}{\ln \ln x} = \ln |\ln(\ln x)| + C$

上面几例都是凑微分后直接积的类型.

**例 8.1.8** 对积分  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$ , 一种方法是直接用三角代换  $x = \tan t$ , 则有

**解法一:**  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}} \xrightarrow{x=\tan t} \int \frac{\sec^2 t dt}{\tan t \sec t} = \int \frac{\sec t dt}{\tan t} = \int \csc t dt =$

$$= \ln |\csc t - \cot t| + C$$



由上图, 知  $\csc t = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ;  $\cot t = \frac{1}{x}$ . 故

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \ln |\csc t - \cot t| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \right| + C$$

分母上关于  $x$  的次数大也是造成积分困难的原因, 所以考虑  $t = \frac{1}{x}$  将积分变换, 希望得到易处理的形式.

$$\text{解法 II: } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \xrightarrow[x=-\frac{dt}{t^2}]{x=\frac{1}{t}} \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= -\ln(t + \sqrt{t^2+1}) + C = \ln\left(\frac{1}{t + \sqrt{t^2+1}}\right) = \ln(\sqrt{t^2+1} - t) =$$

$$\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} - \frac{1}{x}\right) + C = \begin{cases} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right) & x > 0 \\ \ln\left(\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}\right) & x < 0 \end{cases} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + C$$

解法 III: 令  $\sqrt{x^2+1} = x+t$ , 则  $x = \frac{1-t^2}{2t}$ ,  $dx = -\frac{t^2+1}{2t^2}dt$ , 所以有

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \xrightarrow[\frac{1-t^2}{2t} \frac{1+t^2}{2t}]{\sqrt{x^2+1}=x+t} \int \frac{-\frac{t^2+1}{2t^2}}{\frac{1-t^2}{2t} \frac{1+t^2}{2t}} dt = 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \left( \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} \right) = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

$$\xrightarrow[t=\sqrt{x^2+1}-x]{} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1} \right| + C$$

$$\text{例 8.1.9 } \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \xrightarrow{\text{凑微分}} \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (x-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin(2x-1) + C.$$

或者, 令  $x = \sin^2 t$ ,  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 则  $dx = 2 \sin t \cos t dt$ ,  $\sqrt{x(1-x)} = \sin t \cos t$ , 则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int 2 dt = 2t + C = 2 \arcsin \sqrt{x} + C$$

$$\text{例 8.1.10} \quad \int \frac{3x+5}{x^2+x-1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$\stackrel{\text{凑微分}}{=} \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+x-1)}{\sqrt{x^2+x-1}} + \frac{7}{2} \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{2})^2}}$$

$$= 3\sqrt{x^2+x-1} + \frac{7}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x-1} \right| + C$$

$$\text{例 8.1.11} \quad \int x^2 \sqrt{x^2+1} dx \stackrel{\text{凑微分}}{=} \frac{1}{2} \int \sqrt{x^4+x^2} dx^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} d\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{x^4+x^2} - \frac{1}{16} \ln \left(x^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{x^4+x^2}\right) + C_1$$

$$= \frac{1}{8} x(2x^2+1) \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{16} \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2 + C \quad \left(C = C_1 + \frac{\ln 2}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{8} x(2x^2+1) \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{8} \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\text{例 8.1.12} \quad \int \frac{x \tan \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx \stackrel{\sqrt{1+x^2}=u}{=} \int \frac{\sqrt{u^2-1} \tan u}{u} \frac{2udu}{2\sqrt{u^2-1}} = \int \tan u du$$

$$\stackrel{\text{例 8.6}}{=} -\ln |\cos u| + C = -\ln |\cos \sqrt{1+x^2}| + C$$

## 8.2 分部积分

由莱布尼茨法则:  $d(uv) = u dv + v du$ . 两边同时求不定积分, 得

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int u dv}_{\text{难}} = uv - \underbrace{\int v du}_{\text{易}}$$

如果  $u = f(x), v = g(x)$ , 上面分部积分公式也可写成

$$\underbrace{\int f(x)g'(x)dx}_{\text{难}} = f(x)g(x) - \underbrace{\int g(x)f'(x)dx}_{\text{易}}$$

对定积分也有相应的分部积分公式

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

**证明：**由分部积分知： $f(x)g'(x)$  有原函数  $f(x)g(x) - \underbrace{\int g(x)f'(x)dx}_{=:F(x)+C}$ . 从而

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g'(x)dx &= (f(x)g(x) - F(x) + C) \Big|_a^b \\ &= (f(b)g(b) - F(b) + C) - (f(a)g(a) - F(a) + C) = \\ &= (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - (F(b) - F(a)) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx \quad \square \end{aligned}$$

**例 8.2.1**  $\int xe^{-x}dx$ . 按之前换元思路, 可令  $t = e^{-x}$ , 则积分变为

$$\int xe^{-x}dx \xrightarrow{t=e^{-x}} - \int t \ln t \left(-\frac{1}{t}\right)dt = \int \ln t dt$$

仍不易看出. 故我们考虑用分部积分公式, 将积分结构做一根本调整.

$$\begin{aligned} \int xe^{-x}dx &= - \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{de^{-x}}_{dv} = - \left( \underbrace{xe^{-x}}_{uv} - \int \underbrace{e^{-x}}_{v} \underbrace{dx}_{du} \right) \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C \end{aligned}$$

当然, 对  $\int \ln t dt$ , 我们也可用分部积分求解. 将  $u$  看成  $\ln t$ , 将  $v$  看成  $t$  本身, 则有

$$\int \ln t dt = t \ln t - \int t \frac{dt}{t} = t \ln t - t + C \xrightarrow{t=e^{-x}} -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

更一般地,  $\int \log_a x dx = x \log_a x - \int x \frac{dx}{x \ln a} = x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$

**例 8.2.2** 类似地, 将变量本身看成  $v$  利用分部积分求解的还有  $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$$\begin{aligned}
\text{例 8.2.3 } \int x^2 \sin x dx &= - \int x^2 d \cos x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \\
&= -x^2 \cos x + 2 \int x d \sin x = -x^2 \cos x + 2 \left( x \sin x - \int \sin x dx \right) \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C
\end{aligned}$$

这是用了两次分部积分求解的例子.

例 8.2.4 求  $I = \int e^{ax} \sin bx dx$  ( $a \neq 0$ ).

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a} \int \sin bx d(e^{ax}) = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{1}{a} \int e^{ax} d(\sin bx) \\
&= \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a^2} \int \cos bx d(e^{ax}) = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx dx \\
&\Rightarrow \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2} + C_1 \\
&\Rightarrow I = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C \quad \text{其中 } C = \frac{a^2 C_1}{a^2 + b^2} \text{ 仍为任意常数.}
\end{aligned}$$

$$\text{同理可求 } \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

$$\begin{aligned}
\text{例 8.2.5 } \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \\
&= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\
&\Rightarrow \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\
&= \frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C
\end{aligned}$$

$$\text{同理可求 } \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|) + C.$$

$$\text{如果用换元 } x = a \sec t, \text{ 则 } \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = a^2 \int \sec t \tan^2 t dt =$$

$$= a^2 \int \frac{\tan^2 t \sec^2 t dt}{\sec t} = a^2 \int \frac{\tan^2 t d \tan t}{\sqrt{1 + \tan^2 t}} \stackrel{u = \tan t}{=} a^2 \int \frac{u^2 du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \int \sqrt{1+u^2} du - a^2 \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = a^2 u \sqrt{1+u^2} - a^2 \int \frac{u^2 du}{\sqrt{1+u^2}} - a^2 \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \\
&\Rightarrow a^2 \int \frac{u^2 du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{a^2}{2} u \sqrt{1+u^2} - \frac{a^2}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \\
&= \frac{a^2}{2} u \sqrt{1+u^2} - \frac{a^2}{4} \left( u \sqrt{u^2+1} + \ln |u + \sqrt{u^2+1}| \right) + C
\end{aligned}$$

考虑到还要换回变量  $x$  的表达, 该方法显然太繁琐, 不及一开始就用分部积分法求解来得简易. 当然, 这种“试验”, 乃至“试错”还是有必要的, 多加总结, 便成宝贵经验, 遂可无心而直道自通.

反复利用分部积分公式还能得出求积分的递推公式, 在应用中也是方便的.

**例 8.2.6** 求  $I_n = \int \sin^n x dx$ .

$$I_0 = \int \sin^0 x dx = \int dx = x + C; \quad I_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$n \geq 2 \text{ 时, 有 } I_n = \int \sin^n x dx = -\int \sin^{n-1} x d \cos x = -\sin^{n-1} x \cos x +$$

$$+(n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \Rightarrow I_n = \frac{1}{n} [(n-1)I_{n-2} - \sin^{n-1} x \cos x]$$

**例 8.2.7** 计算  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ . (两积分相等可由换元  $t = \frac{\pi}{2} - x$  看出), 利用上例中的计算可得, 当  $n \geq 2$  时, 有

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= 0 + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}; \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

$$\text{从而可知 } I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad \text{其中当 } n \text{ 为偶数时, } n!! = n(n-2)(n-4) \cdots 2; \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } n!! = n(n-2) \cdots 3 \cdot 1.$$

$$\begin{aligned}
8.2.8 \quad I_n &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right) = \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1} \quad \Rightarrow \quad I_{n+1} = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{x}{2n(x^2+a^2)^n} \right]
\end{aligned}$$

**例 8.2.9** 求  $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin^n x dx$  的递推公式.

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int \cos^{m-1} x \sin^n x d \sin x = \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x - \int \sin x d(\cos^{m-1} x \sin^n x) \\
\int \sin x d(\cos^{m-1} x \sin^n x) &= \int \sin x [-(m-1) \cos^{m-2} x \sin^{n+1} x + n \cos^m x \sin^{n-1} x] dx \\
&= -(m-1) \int \cos^{m-2} x (1 - \cos^2 x) \sin^n x dx + n \int \cos^m x \sin^n x dx \\
&= -(m-1) I_{m-2,n} + (m+n-1) I_{m,n}
\end{aligned}$$

代入, 整理可得  $I_{m,n} = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$

**例 8.2.10** 已知  $\frac{\sin x}{x}$  是  $f(x)$  的一个原函数, 求  $\int x^3 f'(x) dx$ .

$$\begin{aligned}
\int x^3 f'(x) dx &= \int x^3 df(x) = x^3 f(x) - 3 \int x^2 f(x) dx \stackrel{f(x) = (\frac{\sin x}{x})'}{=} \\
&= x^3 f(x) - 2 \int x^2 d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = x^3 f(x) - 2 \int x^2 \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx \\
&= x^3 \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - 2 \int x \cos x dx + 2 \int \sin x dx = x(x \cos x - \sin x) - \\
&\quad - 2 \int x \sin x - 2 \cos x = x^2 \cos x - 4x \sin x - 6 \cos x + C
\end{aligned}$$

**例 8.2.11** ( $\beta$  函数) 设  $m, n$  是自然数,  $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$  是一个著名的积分, 其计算如下:  $B(m, n) = \frac{1}{m} \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx^m =$

$$\frac{x^m (1-x)^{n-1}}{m} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^m (1-x)^{n-2} dx = \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
B(m, n) &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{m(m+1)\cdots(m+n-2)} B(m+n-1, 1) = \\
&= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\cdots(m+n-2)} \int_0^1 x^{m+n-2} dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}
\end{aligned}$$

**例 8.2.12** (*Taylor* 公式的积分型余项) 设  $f(x)$  在  $x_0$  的一个领域内有  $n+1$  阶连续导函数, 则对  $x_0$  近旁的  $x$ , 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x)$$

其中  $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$  (积分型余项)

**证明:** 我们知道  $R_n^{(k)}(x_0) = 0, k = 1, 2, \dots, n, R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ . 从而有

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \int_{x_0}^x R_n'(t) dt = \int_{x_0}^x R_n'(t) d(t-x) = (t-x)R_n'(t) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x R_n''(t)(x-t) dt \\
&= \int_{x_0}^x R_n''(t)(x-t) dt \stackrel{\text{分部积分}}{=} \frac{1}{2} \int_{x_0}^x R_n'''(t)(x-t)^2 dt = \dots \\
&\dots = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x R_n^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \quad \square
\end{aligned}$$

**注记 8.2.1** 对上面的余项用积分的第一中值定理 (被积函数看成是  $f^{(n+1)}(t)$  和  $(x-t)^n$  的乘积), 知  $\exists$  介于  $x_0$  和  $x$  之间的  $\xi$ , 使得

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ (拉格朗日余项)}
\end{aligned}$$

将被积函数看成是  $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$  和 1 的乘积, 然后利用第一中值定理, 知  $\exists$  介于  $x_0$  和  $x$  之间的  $\xi$ , 使得

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \int_{x_0}^x dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n (x-x_0)$$

$$\stackrel{\xi=x_0+\eta(x-x_0), 0 \leq \eta \leq 1}{=} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x_0+\eta(x-x_0))(1-\eta)^n (x-x_0)^{n+1} \text{ (柯西余项)}$$

### 8.3 有理函数积分的部分分式展开法及几类可积类型

有理函数是指形如  $R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$  的函数, 其中  $p_n(x)$ ,  $q_m(x)$  分别是  $n, m$  次实系数多项式. 一般地, 总可假定  $p_n(x)$  和  $q_m(x)$  没有公因子 (将公因子约掉即可).

如  $n < m$ , 则称  $R(x)$  是真分式, 否则称为是假分式. 通过多项式的带余除法, 总可将假分式化为一个多项式和一个真分式之和, 即有

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = p_{n-m}(x) + \frac{r(x)}{q_m(x)}$$

其中  $p_{n-m}$  是  $n-m$  次多项式, 而  $r(x)$  是次数不超过  $m-1$  的多项式, 从而

$$\int \frac{p_n(x)}{q_m(x)} dx = \int p_{n-m}(x) dx + \int \frac{r(x)}{q_m(x)} dx$$

故对有理函数的积分就转化为多项式函数的积分和对真分式的积分, 下面讨论如何对真分式进行积分, 方法是部分分式展开. 其基本模式如下例所示:

在计算  $\int \frac{dx}{x^2-1}$  时, 我们用到过下面的部分分式展开:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

也就是说分母上两个一次因子各贡献来形如  $\frac{A}{x-a}$  的展开项.

有如, 计算  $\int \frac{x dx}{(x-1)^2}$  时, 除了直接凑微分方法之外, 还可以考虑部分分式展开

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

也可以方便求解出来. 在实数域上, 多项式可能有二次不可约因子 (对应于它在复数域上有一对共轭复根的情形)  $x^2 + px + q$  ( $\Delta = p^2 - 4q < 0$ ). 如果分母上有二次不可约因子, 该如何分解呢? 我们考察下面的例子

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} \text{ (已是最简形式, 可直接积分)}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2+x+1| + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 + x + 1| + \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right| + C$$

如果分母有多重二次不可约因子, 该如何处理? 比如  $\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2} dx$ , 很显然也是可直接积的, 且一般地, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+D}{(x^2+px+1)^k} dx &\stackrel{\text{凑微分}}{=} \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2+px+1)}{(x^2+px+q)^k} + \\ &+ \frac{2D-Bp}{2} \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{\left[ \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2 \right]^k} \quad (\text{其中 } \Delta = p^2 - 4q < 0) \end{aligned}$$

在给出一般操作流程之前, 我们先分析两个典型例子, 由此一般情形自明.

**例 8.3.1** 我们知道  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ , 试问:  $\int \frac{dx}{1+x^3}$  该如何计算?

**解:** 在实数域上,  $1+x^3$  可分解为  $1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$ . 即  $x^3+1=0$  的所有根是  $-1, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ , 也就是说, 在复数域  $\mathbb{C}$  上, 有如下因式分解

$$x^3+1 = (x+1) \left( x - \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right) \left( x - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right) = (x+1)(x^2-x+1)$$

如果要将被积函数  $\frac{1}{1+x^3}$  部分分式展开, 也就是说展开中的每一项的分母子乘积要等于  $1+x^3$ , 则表明, 展开中必须有形如  $\frac{A}{x+1}$  及  $\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$  的项存在, 即有

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

其中  $A, B, C$  为待定常数. 先通分, 得  $1 = A(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C)$ , 然后比对两边多项式的系数, 知  $A, B, C$  满足如下线性约束:

$$\begin{cases} x^2: 0 = A+B \\ x: 0 = -A+B+C \\ 1: 1 = A+C \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{2}{3} \end{cases} \implies$$

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln|x+1|}{3} - \frac{1}{6} \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{\ln|x+1|}{3} - \frac{\ln|x^2-x+1|}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{d\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}{1 + \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2} \\
&= \frac{\ln|x+1|}{3} - \frac{\ln|x^2-x+1|}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

**例 8.3.2** 对积分  $\int \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2(x - 1)} dx$ , 先对被积函数做分式展开, 被积函数是个真分式, 且分母有一个一次因子  $x - 1$  及一个 2 重不可约二次因子  $(x^2 + 1)^2$ , 所以, 它的展开里必包含  $\frac{A}{x - 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$ .

但这里有个问题: 被积有理函数的分子是个四次多项式, 它由 5 个系数决定, 而如果展开只有这两项的话, 则只有  $A, D, E$  三个自由变量, 显然是不够的. 故完整的展开应添加  $\frac{Bx + C}{(x^2 + 1)}$  这一项, 即

$$\frac{x^4 + x^3 + 3x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2(x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

刚刚好, 有  $A, B, C, D, E$  五个未知常数需确定, 它们满足约束:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 - 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x - 1)(x^2 + 1) + (Dx + E)(x - 1)$$

可以通过对比左右两端的系数而得到未知常数间的线性方程组, 求解可得.

但注意到, 如果令  $x = 1$ , 我们有  $4 = 4A$ , 即知  $A = 1$ ; 又令  $x = i = \sqrt{-1}$ , 则有  $-3 - i = (Di + E)(i - 1) = -D - E + (E - D)i$ , 即  $-D - E = -3$ ,  $D - E = 1$ , 从而解得  $D = 2, E = 1$ . 为求  $B, C$ , 我们比较两边  $x^4$  的系数, 得  $1 = A + B$ , 从而得  $B = 1 - A = 0$ ; 然后比较两边  $x^3$  的系数, 得  $1 = C$ . 故

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2(x - 1)} dx &= \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx \\
&= \ln|x - 1| + \arctan x + \int \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \ln|x - 1| + \frac{3}{2} \arctan x - \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C
\end{aligned}$$

这种利用带入特殊值再结合对比系数的方法, 比之直接对比系数求解线性方程组,

往往来得更快捷高效.

由上面例子中的讨论, 对真分式  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  的积分规则可总结如下:

1. 将分母  $Q(x)$  在实数范围内因式分解, 则分解结果中只包含两种类型的因子: 一种是  $(x-a)^k$ , 另一种是  $(x^2+px+q)^k$ , 其中  $k$  是正整数, 且  $\Delta = p^2 - 4q < 0$ .
2. 当  $Q(x)$  中包含  $(x-a)^k$  时,  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  的展开中包含如下形式的部分分式:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

但  $Q(x)$  中包含  $(x^2+px+q)^k$  时, 则  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  的展开中包含如下形式的部分分式:

$$\frac{B_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_kx+D_k}{(x^2+px+q)^k}$$

其中  $A_i, B_i, D_i$  都是待定常数.

**例 8.3.2** 计算  $\int \frac{x^5 - x^3 - 2x^2 + 27x}{x^4 - x^2 - 2x + 2} dx$ . 其中的有理函数不是真分式, 故先用带余除法将它写成多项式加真分式的形式.

$$\begin{array}{r} x \\ x^4 - x^2 - 2x + 2 \overline{) x^5 - x^3 - 2x^2 + 27x} \\ - x^5 - x^3 - 2x^2 + 2x \\ \hline 25x \end{array}$$

即  $x^5 - x^3 - 2x^2 + 27x = x(x^4 - x^2 - 2x + 2) + 25x$ , 故

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - x^3 - 2x^2 + 27x}{x^4 - x^2 - 2x + 2} dx &= \int x dx + \int \frac{25x}{x^4 - x^2 - 2x + 2} \\ \frac{25x}{x^4 - x^2 - 2x + 2} &= \frac{25x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+D}{x^2+2x+2} \\ \Rightarrow 25x &= A_1(x-1)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Bx+D)(x-1)^2 \end{aligned}$$

令  $x=1$ , 得  $25=5A_2$ , 即  $A_2=5$ . 对比式子  $x^3$  两边的系数, 得  $0=A_1+B$ ; 再对比  $x^2$  的系数, 得  $0=A_1+A_2-2B+D$ ; 再对比  $x$  的系数, 得  $25=2A_2+B-2D$ ; 最后对比两边的常数项, 得  $0=-2A_1+2A_2+D$ . 不难求出:  $A_1=1, B=-1, D=-8$ .

从而可得

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5 - x^3 - 2x^2 + 27x}{x^4 - x^2 - 2x + 2} dx &= \int \left( x + \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} - \frac{x+8}{x^2+2x+2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} - \frac{\ln x^2 + 2x + 2}{2} - 7 \arctan(x+1) + C\end{aligned}$$

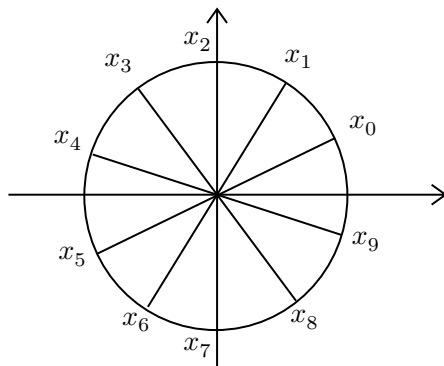
要熟练掌握积分技术, 关键在其“灵活性”, 所以不要抱着“一招鲜吃遍天”的想法. 固执于一种方式而不知变通, 反会陷入困境. 比如对下面的例子, 如尝试部分分式展开, 将十分不易, 但如能巧用凑微分, 则可迅速破解.

$$\begin{aligned}\text{例 8.3.3 } \int \frac{dx}{x(x^{10}+1)} &= \int \frac{(x^{10}+1) - x^{10}}{x(x^{10}+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^9 dx}{x^{10}+1} = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{10} \int \frac{d(x^{10}+1)}{x^{10}+1} = \ln|x| - \frac{\ln(x^{10}+1)}{10} + C\end{aligned}$$

**注记 8.3.1** 如果非要用部分分式展开求解上积分, 则首先须要对  $x^{10}+1$  经行因式分解, 为此, 须求得  $x^{10}+1=0$  的所有根. 设  $x=re^{i\theta}=r\cos\theta+ir\sin\theta$  是方程的根, 则  $x^{10}=r^{10}e^{i10\theta}=r^{10}(\cos 10\theta+i\sin 10\theta)=-1$ , 从而有

$$\begin{aligned}r^{10}=1, \cos 10\theta=-1, \sin 10\theta=0 &\implies r=1, 10\theta=\pi+2k\pi, \forall k\in\mathbb{Z} \\ \implies \theta &= \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{10}, k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

由此看出,  $x^{10}+1=0$  的全部  $n$  个根为:  $x_k=e^{(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{10})i}$ ,  $k=0,1,\dots,9$ . 其中,  $x_k$  和  $x_{9-k}$  ( $k=0,1,2,3,4$ ) 是互为共轭的复根, 即  $\overline{x_k}=x_{9-k}$ . 这 10 个根将单位圆 10 等份, 见下图.



$$\begin{aligned}
\text{故有 } x^{10} + 1 &= \prod_{k=0}^9 (x - x_k) = \prod_{k=0}^4 (x - x_k)(x - x_{9-k}) = \prod_{k=0}^4 (x - x_k)(x - \overline{x_k}) = \\
&= \prod_{k=0}^4 (x^2 - 2(\operatorname{Re} x_k)x + |x_k|^2) = \left(x^2 - 2\cos\frac{\pi}{10}x + 1\right) \left(x^2 - 2\cos\frac{3\pi}{10}x + 1\right) \\
&\quad \left(x^2 - 2\cos\frac{5\pi}{10}x + 1\right) \left(x^2 - 2\cos\frac{7\pi}{10}x + 1\right) \left(x^2 - 2\cos\frac{9\pi}{10}x + 1\right)
\end{aligned}$$

从而存在唯一常数  $A, B_k, C_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) 使得

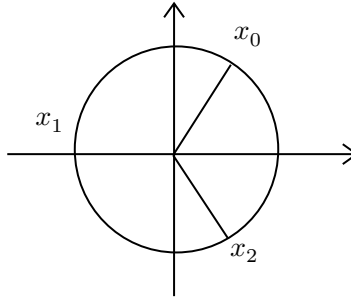
$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x^{10} + 1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 - 2\cos\frac{\pi}{10}x + 1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 - 2\cos\frac{3\pi}{10}x + 1} + \\
&+ \frac{B_3x + C_3}{x^2 - 2\cos\frac{5\pi}{10}x + 1} + \frac{B_4x + C_4}{x^2 - 2\cos\frac{7\pi}{10}x + 1} + \frac{B_5x + C_5}{x^2 - 2\cos\frac{9\pi}{10}x + 1}
\end{aligned}$$

虽然繁琐, 但理论上是可行的. 下面我们按这一思路对  $x^3 + 1$  进行因式分解. 设  $x = e^{i\theta}$  是  $x^3 + 1 = 0$  的根, 则  $e^{3i\theta} = -1$ , 即

$$\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

从而  $x^3 + 1 = 0$  的全部根是  $x_0 = e^{(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ,  $k = 0, 1, 2$ . 其中  $x_0 = e^{\frac{\pi i}{3}}$  和  $x_2 = e^{\frac{5\pi i}{3}}$  互为共轭, 且  $x_1 = e^{\pi i} = -1$ . 故有分解

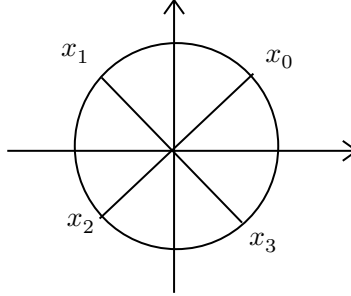
$$\begin{aligned}
x^3 + 1 &= (x + 1) \left(x - e^{\frac{\pi i}{3}}\right) \left(x - e^{\frac{5\pi i}{3}}\right) = \\
&= (x + 1) \left(x^2 - 2\cos\frac{\pi}{3}x + 1\right) = (x + 1)(x^2 - x + 1)
\end{aligned}$$



再考虑  $\int \frac{dx}{1 + x^4}$ . 如果要用部分分式展开来计算, 需先考虑  $x^4 + 1$  的分解. 首先,

注意到:  $x^4 + 1 = 0$  有根  $x_k = e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})i}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . 且

$$\begin{aligned} x_0 &= e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; & x_3 &= \overline{x_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ x_1 &= e^{\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; & x_2 &= \overline{x_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{故 } x^4 + 1 &= (x - x_0)(x - x_3)(x - x_1)(x - x_2) = (x - x_0)(x - \overline{x_0})(x - x_1)(x - \overline{x_1}) = \\ &= (x^2 - 2\operatorname{Re}(x_0)x + 1)(x^2 - 2\operatorname{Re}(x_1)x + 1) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{从而 } \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}, \text{ 即}$$

$$1 = (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

对比两边多项式的系数, 得

- $x^3: 0 = A + C$
- $x^2: 0 = \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D$
- $x: 0 = A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D$
- $1: 1 = B + D$

$$\text{解得 } A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, D = \frac{1}{2}. \text{ 从而 } \int \frac{dx}{1 + x^4} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{xdx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{xdx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \\
& - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln|x^2 - \sqrt{2}x + 1| + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln|x^2 + \sqrt{2}x + 1| + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\
& = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left( \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}x - 1)}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}x + 1)}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} \\
& = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left( \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}x - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}x + 1 + C
\end{aligned}$$

如不想陷入上面的繁琐，则下面的巧思值得借鉴。令  $M(x) = \int \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $N(x) = \int \frac{x^2 dx}{1+x^4}$ , 则  $M(x) + N(x) = \int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} + x^2} dx = \int \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} + C$$

$$\begin{aligned}
M(x) - N(x) &= \int \frac{1-x^2}{1+x^4} dx = - \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx \\
&= - \int \frac{d(x + \frac{1}{x})}{(x + \frac{1}{x})^2 - 2} = - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + C
\end{aligned}$$

从而  $\int \frac{dx}{1+x^4} = M(x) = \frac{1}{2} [M(x) + N(x) + M(x) - N(x)] =$

$$= - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} + C$$

**可化为有理函数积分的无理函数积分：**有些含有根式的无理函数的积分通过变量替换可转化为有理函数的积分。

**例 8.3.4** 对  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ , 如想将其中的根式全部替换掉, 可令  $x = t^6$ , 则

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 - t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t-1} = 6 \int \frac{(t-1)(t^2 + t + 1) + 1}{t-1} dt \\
&= 6 \int (t^2 + t + 1) dt + 6 \int \frac{dt}{t-1} = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6 \ln|t-1| + C \\
&= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例 8.3.5 } \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} &\stackrel{t=\sqrt{\sqrt{x}-1}}{x=(t^2+1)^2} \int \frac{4t(t^2+1)dt}{t} = 4 \int (t^2+1)dt \\ &= \frac{4}{3}t^3 + 4t + C = \frac{4}{3}(\sqrt{x}-1)^{\frac{3}{2}} + 4(\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

$$\text{例 8.3.6 } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}} = \int \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}} dx.$$

$$\text{令 } t^2 = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}}, \text{ 则 } x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \frac{1}{x+1} = \frac{t^3-1}{2t^3}, dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2}, \text{ 从而}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{3}{2t} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

**三角函数有理式的积分：**所谓三角函数有理式指的是形如  $R(\sin x, \cos x)$  的函数，其中  $R(u, v)$  是将  $u, v$  经有理运算（即加、减、乘、除）而得的表达式。我们将说明这种类型的积分是一定可以通过变量替换转化为有理函数的积分的，故属于可积类型。

在介绍处理一般的  $R(\sin x, \cos x)$  的积分的统法（我们会看到，它本质起源于单位圆的有理参数化）之前，我们先看些它的特殊形式，比如对形如  $\int R(\sin x) \cos x dx$  和  $\int R(\cos x) \sin x dx$ （其中  $R(u)$  是有理函数），可直接通过变量替换  $u = \sin x$  和  $u = \cos x$  将其直接化为有理函数的积分。

$$\begin{aligned}\text{例 8.3.7 } \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{-\sin^2 x}{2 + \cos x} d \cos x \stackrel{u=\cos x}{=} \int \frac{u^2 - 1}{u + 2} du = \\ &= \int \frac{u^2 - 2^2 + 3}{u + 2} du = \int \frac{(u-2)(u+2) + 3}{u + 2} du = \int (u-2) du + \int \frac{3 du}{u + 2} \\ &= \frac{u^2}{2} - 2u + 3 \ln |u + 2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln (\cos x + 2) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例 8.3.8 } \text{对积分 } \int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}, \text{ 为了凑出微分, 我们进行变形 } \int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} &= \\ \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)} &= \int \frac{d \cos x}{(\cos^2 x - 1)(2 \cos^2 x - 1)} \stackrel{u=\cos x}{=} \int \frac{du}{(u^2 - 1)(2u^2 - 1)} \\ &= \int \left( \frac{1}{u^2 - 1} - \frac{2}{2u^2 - 1} \right) du = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1} \right| + C\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C$$

**例 8.3.9**  $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$ . 对这个积分, 由于  $\sin x$  和  $\cos x$  的幂次都是偶数, 所以按上例那样凑微分是不方便的, 但注意到  $d \tan x = \sec^2 x dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$ , 且

$$\frac{1}{\sin^4 x} = \csc^4 x = \left( 1 + \frac{1}{\tan^2 x} \right)^2$$

故有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} &\stackrel{u=\tan x}{=} \int \left( 1 + \frac{1}{u^2} \right)^2 du = \int \frac{(1+u^2)^2}{u^4} du = \\ &\int \left( \frac{1}{u^4} + \frac{2}{u^3} + 1 \right) du = -\frac{1}{3u^3} - \frac{2}{u} + u + C = \frac{-1}{3 \tan^3 x} - \frac{2}{\tan x} + \tan x + C \end{aligned}$$

一般地, 不难看出对  $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$  型积分, 做变换  $u = \tan x$  即可将其变换为有理函数的积分类型.

对最一般的情形  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , 令  $t = \tan \frac{x}{2}$  (万能代换), 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

从而  $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$  就转化为有理函数的积分了, 便可用部分分式展开直接求解.

比如对上例中的积分, 利用万能代换, 可得

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} \stackrel{t=\tan \frac{x}{2}}{=} \int \frac{(1+t^2)^4 (1+t^2)^2}{(2t)^4 (1-t^2)^2} \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{8} \int \frac{(1+t^2)^5 dt}{t^4 (1-t^2)^2}$$

不难看出, 虽然万能代换法是直接可行的, 但有时却不是最高效的求解途径, 所以还是要灵活运用各种方法.

**例 8.3.10** 对  $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$ , 微分的方法用起来不方便, 此时可考虑万能替换: 令  $t = \tan \frac{x}{2}$ , 则  $\int \frac{dx}{5+3\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{8+2t^2} = \int \frac{dt}{t^2+4}$

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} \right) + C$$

对于形如  $\int \cos mx \cos nx dx$ ,  $\int \sin mx \sin nx dx$  和  $\int \cos mx \sin nx dx$  型的积分, 通常利用积化和差公式直接化简后积分.

$$\begin{aligned} \text{例 8.3.11 } \int \frac{\cot x dx}{1 + \sin x} & \xrightarrow{t=\tan \frac{x}{2}} \int \frac{\frac{1-t^2}{2t} \frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{1-t^2}{t^3 + 2t^2 + t} dt \\ & = \int \frac{1-t^2}{t(t+1)^2} dt \xrightarrow{\text{部分分式展开}} \int \left( \frac{1}{t} - \frac{2}{1+t} \right) dt = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{(1 + \tan \frac{x}{2})^2} \right| + C \end{aligned}$$

对本例, 如一开始直接凑微分, 则可更迅捷地加以求解.

$$\int \frac{\cot x dx}{1 + \sin x} = \frac{\cos x dx}{\sin x(1 + \sin x)} = \int \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{1 + \sin x} \right) d(\sin x) = \ln \left| \frac{\sin x}{1 + \sin x} \right| + C$$

**注记 8.3.2** 利用欧拉公式:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , 可统一简洁地推导出和差化积公式. 注意到  $e^{ix} e^{iy} = e^{i(x+y)}$ , 按欧拉公式将两边展开, 得

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)}_{(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos y \sin x + \cos x \sin y)i} = \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ \Rightarrow & \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \Rightarrow & \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y; \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \Rightarrow & \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \\ \sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} \\ \cos x \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 8.3.12 } \int \cos 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 5x + \cos x) dx = \\ &= \frac{1}{10} \int \cos 5x d(5x) + \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{\sin 5x}{10} + \frac{\sin x}{2} + C \end{aligned}$$

**注记 8.3.3** 对  $\int R(\cos x, \sin x) dx$  之所以可用“万能替换”求解, 其本质在于单位圆的“有理参数化”, 见《第一讲第 5 节例 5.6'》. 为进一步凸显其实质, 并便于推广, 我们将该积分换一种表达方式. 令  $u = \cos x$ ,  $v = \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ , 则

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R(u, v) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int R(u, v) \frac{du}{v} = \int \tilde{R}(u, v) du$$

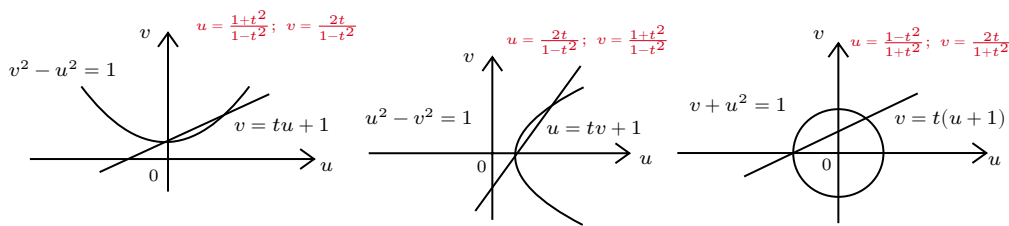
其中  $\widetilde{R}$  仍是有理函数. 由此可见, 上积分本质上是形如  $\int R(x, y)dx$  这样的积分, 其中  $R(x, y)$  是  $x, y$  的有理函数, 且  $x, y$  满足关系:  $x^2 + y^2 = 1$ . 因为这一形式特点, 故  $x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  可将积分  $\int R(x, y)dx$  化为有理函数积分. 一个自然的问题是, 如果  $x$  和  $y$  间的约束不是  $x^2 + y^2 = 1$  (即点  $(x, y)$  不是位于单位圆上), 而是位于一般的曲线之上时,  $\int R(x, y)dx$  是否有特别的积分方法? 特别地, 当  $(x, y)$  位于一般圆锥曲线上时, 是否有类似上面“万能代换”的换元法呢?

首先, 当  $(x, y)$  位于一般圆锥曲线时, 类似的“万能代换”是存在的, 几何上, 它根植于圆锥曲线可有理参数化这一事实; 在求积分时, 它表现为如下变量替换.

即我们考虑形如  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$  的积分, 通过配方  $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}$  加变元替换, 我们只需处理  $b = 0$  的情形. 令  $x = \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}u$ , 则有

$$\sqrt{a^2 + c} = \begin{cases} \sqrt{c}\sqrt{u^2 + 1}; & a > 0, c > 0 \\ \sqrt{|c|}\sqrt{u^2 - 1}; & a > 0, c < 0 \\ \sqrt{c}\sqrt{1 - u^2}; & a < 0, c > 0 \end{cases}$$

则问题转化为对曲线  $v = \sqrt{u^2 + 1}$ ,  $v = \sqrt{u^2 - 1}$ ,  $v = \sqrt{1 - u^2}$  的有理参数化为题了, 而这是简单的, 见下图所示:



即在如下变量替换 (有理参数化) 下, 积分转化为有理积分了:

$$\begin{cases} u = \frac{2t}{1-t^2}, \sqrt{u^2 + 1} = \frac{1+t^2}{1-t^2}; & a > 0, c > 0 \\ u = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \sqrt{u^2 + 1} = \frac{2t}{1-t^2}; & a > 0, c < 0 \\ u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sqrt{u^2 + 1} = \frac{2t}{1+t^2}; & a < 0, c > 0 \end{cases}$$

当  $x, y$  之间的关系是一般的二元三次约束时:  $y^2 = x^3 + ax^2 + b$  (假设右边多项式

无重根), 该曲线称为椭圆曲线, 它没有有理参数化, 故与之相关的积分 (称为椭圆积分) 无法转化成为有理函数积分. 另外, 我们知道, 当  $x, y$  之间的约束是二次时,  $(x, y)$  所位于的圆锥曲线可被单周期的三角函数可 (超越) 参数化, 而对于椭圆曲线, 我们则需要双周期的椭圆函数来 (超越) 参数它. 关于椭圆积分的起源及其应用可参考附录 II.

## 9 瑕 (反常) 积分及其计算

瑕积分 (或广义积分、反常积分) 相比与通常定积分是 “反常的”. 通常积分要求被积区间有限, 但瑕积分考虑在无限区间上的积分 (第一类反常积分); 通常积分要求被积函数在被积区间上有界, 而瑕积分会考虑对无界函数的积分 (第二类反常积分).

第一类反常积分有以下几种形式:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx; \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

其中  $f(x)$  在积分区域内的任意有限区间上都是可积的.

第二类反常积分有以下几种形式:

$$\int_a^b f(x)dx \quad (f(x) \text{ 在 } a \text{ 处无界}) \quad \int_a^b f(x)dx \quad (f(x) \text{ 在 } b \text{ 处无界})$$

如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  内  $c$  处无界, 则  $\int_a^b f(x)dx$  一定要理解为:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

而右边积分是属于上面两种形式. 如果函数在区间内多个点处是无界的 (称为函数的奇异点, 或简称为奇点), 则在每个奇点处对区间切割处理即可.

回忆通常积分的定义: 若  $f(x) \in R[a, b]$ , 则对区间  $[a, b]$  的任一分割:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , 及对任意的  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 都有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

其中  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$  ( $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ). 由此可知, 第一类反常积分的反常在于对其被积区域无法划分为有限份; 而第二类反常积分的反常在于当点  $\xi_i$  取为函数的奇点时, 定义右边的和式无意义. 所以, 对瑕积分而言, 定积分的原始定义不适于它 (或

它对原始定义是反常的), 故须瑕积分重新定义才行.

关键在于我们可以将瑕积分定义为通常积分的某种极限, 只要该极限存在, 则认为称瑕积分有意义, 并按极限计算即可. 由此搭建了反常和常态之间的“极限”桥梁. 下面对不同反常类型一一处理, 但万变不离其宗, 其要旨是: 先避开“反常”或“奇异处”, 从而使积分有意义, 然后极限逼近即可.

**第一类反常积分的处理:** 定义  $\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$

若该极限存在, 则称反常积分收敛 (convergent), 反之, 则称其发散 (divergent). 同理, 可定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

而对  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  型反常积分, 我们任选一点  $c$ , 则由积分的区间可加性, 得

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

然后分别令  $a \rightarrow -\infty$ ,  $b \rightarrow +\infty$ , 若极限存在, 则说明该反常积分收敛, 且将其值定义为极限值, 否则称其发散. 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$$

**第二类反常积分的处理:** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b)$  上有定义,  $b$  是  $f(x)$  的奇点 (即函数在该点任意邻域内无界), 且  $\forall \epsilon > 0 (\epsilon < b - a)$ ,  $f(x)$  在  $[a, b - \epsilon)$  上可积, 则将反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  定义为:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \left( = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(x)dx \right)$$

如该极限存在, 则称反常积分收敛, 其值即为极限值; 反之则称反常积分发散. 同理, 若  $x = a$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  内的唯一奇点, 且  $\forall \epsilon > 0$ ,  $f(x) \in R[a + \epsilon, b]$ , 则可定义

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx \left( = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(x)dx \right)$$

又若  $c \in (a, b)$  是函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  内的唯一奇点, 则可定义

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\stackrel{\text{区间可加性}}{=} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{c+\eta}^b f(x)dx\end{aligned}$$

**例 9.1** 具有基本重要性的是所谓 第一类  $p$ -积分  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ). 当  $p = 1$  时, 我们有

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_a^b = +\infty$$

故当  $p = 1$  时, 积分发散; 当  $p \neq 1$  时, 有

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_a^b = \begin{cases} +\infty, & p < 1, \\ \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p > 1 \end{cases}$$

**总结:** 对第一类反常积分  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ), 当  $p \leq 1$  时发散; 当  $p > 1$  时收敛. 同样的结果对  $\int_{-\infty}^b \frac{dx}{x^p}$  也成立.

**例 9.2** 具有基本重要性的还有 第二类  $p$ -积分  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ . 当  $p = 1$  时, 我们有

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_{\epsilon}^1 = -\infty$$

故当  $p = 1$  时, 积分发散; 当  $p \neq 1$  时, 有

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{\epsilon}^1 = \begin{cases} -\infty, & p > 1, \\ \frac{1}{1-p}, & p < 1 \end{cases}$$

**总结:** 对第二类反常积分 ( $p$ -积分)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ , 当  $p \geq 1$  时发散; 当  $p < 1$  时收敛.

同样的结果对一般的  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$  也成立 (只需做个变量替换:  $x-a=u$ , 则可将其化为基本类型).

如果能记住上两例中的结论, 则有时不用计算积分便可判断反常积分是否收敛或发

散. 其基本原理是最简单的比较法, 即当  $x > M$  ( $M$  为任一正数) 时, 如有  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^p}$  ( $p > 1$ ), 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^M f(x)dx + \int_M^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^M f(x)dx + \int_M^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < \infty$$

故此时反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛. 反之, 如过要证明  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散, 则需对  $f(x)$  做如下放缩:

$$f(x) > \frac{1}{x^p} \quad (p \leq 1), \quad x \geq M > 0$$

同理, 对第二类反常积分  $\int_a^b f(x)dx$  (设  $a$  是  $f(x)$  的一奇点), 如有放缩:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{(x-a)^p} \quad (p < 1), \quad 0 < x-a < \delta$$

则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\delta} f(x)dx + \int_{a+\delta}^b f(x)dx \leq \int_a^{a+\delta} \frac{dx}{(x-a)^p} + \int_{a+\delta}^b f(x)dx < \infty$$

从而可知  $\int_a^b f(x)dx$  收敛; 如有放缩  $f(x) > \frac{1}{x^p}$  ( $p \geq 1$ ),  $0 < x < x+\delta$ , 则  $\int_a^b f(x)dx$  发散.

**注记 9.1** 比较原则的运用需灵活, 比如你已知道  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛, 且知道当  $x > M > a$  时, 有  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , 则可断定  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  亦收敛.

对  $\int_a^b f(x)dx$  (其中  $a$  是奇点), 则可先通过变量替换  $u = x-a$  将积分转为 0 是奇点的类型, 然后尝试将  $f(x)dx = f(u+a)du$  同  $\frac{du}{u^p}$  在  $u=0$  附近作比较.

当试图与  $p$  积分做比较时, 基本思路类似于之前对函数在一点处做泰勒展开, 看出当  $x \rightarrow \infty$  或  $x \rightarrow$  “奇点” 时对积分的主要贡献项. 本质仍是线性近似或其延升.

**例 9.3** 求  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ . 这是个第一类反常积分, 它可以看成是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

被积函数是非负的, 且在两区间上都小于  $\frac{1}{x^2}$ , 故由比较发知积分收敛, 为计算它, 我们只需将其按极限处理, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \Big|_{-\infty}^0 + \arctan x \Big|_0^{+\infty} \\ &= \arctan 0 - \underbrace{\arctan(-\infty)}_{\text{理解为 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x} + \underbrace{\arctan(+\infty)}_{\text{理解为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x} - \arctan 0 \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \pi \end{aligned}$$

**注记 9.2** 一般地, 如  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上具有原函数  $F(x)$ , 则可记

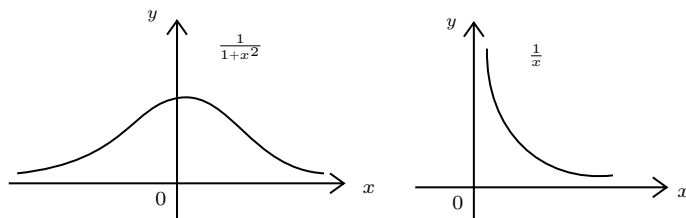
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a)$$

其它情形可类似处理.

**注记 9.3** 对上例, 如果注意到被积函数在积分区间上是偶函数, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \pi$$

**注记 9.4** 积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$  计算的是函数  $\frac{1}{1+x^2}$  与  $x$  轴所围的图形的面积, 虽然该图形无界, 但它的面积确是有限的. 考虑到该图形是有界图形的极限图形, 它的面积也是有限面积的极限, 该结果也就无甚惊奇了. 当然一般无界图形的 1 面积往往是无限的 (即便它). 比如  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$  计算的也是无界图形的面积, 但该面积是无穷大.



**注记 9.5** 对第二类反常积分  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ , 如果忽视了函数在  $x=0$  处的奇异性, 而套用牛顿-莱布尼茨公式则显然会得到错误的结果, 正确的处理是:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{\epsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x} = -\infty - \infty$$

故积分发散. 它发散的原因是两个极限  $\epsilon \rightarrow 0^-$  和  $\eta \rightarrow 0^+$  是两个独立的极限过程. 但如果我们令  $\epsilon$  和  $\eta$  **同步**趋于零, 即令  $\epsilon = -\eta$ , 则此时有

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\eta} \frac{dx}{x} + \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x} \right) &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (\ln |\eta| - \ln |-1| + \ln 1 - \ln \eta) = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (\ln \eta - \ln \eta) = 0 \end{aligned}$$

将上极限定义为反常积分  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  的**柯西主值**, 记作  $(cpv) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ . 上面的计算表明: 虽然反常积分本身发散, 但其柯西主值却收敛. 当然, 几何上来看, 这一结果也是有意义的, 由于  $\frac{1}{x}$  在对称区间上  $[-1, 1]$  上是奇函数, 故从面积来看, 当极限过程同步化后, 正负面积可相互抵消, 导致柯西主值为 0.

**注记 9.6** 一般地, 若  $c \in (a, b)$  是函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  内的唯一奇点, 则可定义反常积分的柯西主值  $(cpv)$  为:

$$(cpv) \int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx$$

同理对第一类反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ , 也可定义其柯西主值:

$$(cpv) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

显然, 如果上面的反常积分本身是收敛的, 则其柯西主值必存在且等于反常积分的值, 这为我们计算反常积分提供了便利性, 因为柯西主值明显易算些. 但上条注记中的例子说明: 也有积分本身发散但其柯西主值存在的情形. 再如  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$  显然发散, 但其

柯西主值为  $(cpv) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \sin x dx = - \lim_{R \rightarrow +\infty} (\cos A - \cos(-A)) = 0$ .

**注记 9.7** 当然, 无穷区间的反常积分和无界函数的反常积分是可以转换的, 比如

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} - \int_{\frac{1}{a}}^0 \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt \stackrel{g(t):=\frac{1}{t^2} f(\frac{1}{t})}{=} \int_0^{\frac{1}{a}} g(t)dt$$

比如对  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ , 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则积分转换为  $-\int_{+\infty}^1 t^p \frac{dt}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-p}}$ . 由此可知, 当  $2-p > 1$ , 即  $p < 1$  时, 积分收敛, 与之前结果相同.

**例 9.4** 对第二类反常积分  $\int_0^1 \ln x dx$ , 可直接用分部积分计算

$$\int_0^1 \ln x dx = x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx = 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - 1 = -1$$

或做变量替换  $\ln x = t$ , 则  $\int_0^1 \ln x dx = \int_{+\infty}^0 t e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$

$$= -te^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 0 + \int_0^{+\infty} de^{-t} = -1$$

**例 9.5** 更一般地, 记  $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx$  ( $n$  是非负整数). 易知  $I_0 = 1$ , 且由上例知  $I_1 = 1$ ; 当  $n \geq 1$  时, 利用分部积分, 得

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = -e^{-x} x^n \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \\ &= n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = n I_{n-1} \end{aligned}$$

从而, 当  $n \geq 2$  时有,  $I_n = n I_{n-1} = n(n-1) I_{n-2} \cdots = n! I_0 = n!$ . 综合可知, 对任意  $n \geq 0$ , 有  $I_n = n!$ .

**例 9.6** 上例中的反常积分可推广到  $n$  不是非负整数的情形, 即考虑反常积分

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad s > 0$$

下面将证明: 上反常积分当  $s \in (0, +\infty)$  时是收敛的, 从而上定义了  $(0, +\infty)$  上的函数  $\Gamma(s)$ , 即伽马函数 (Gamma function), 它是数学物理中一个十分重要的函数. 结合上例, 可知  $\Gamma(n+1) = n!$ , 从而可知伽马函数推广了非负整数阶乘这一概念, 也就是

说, 对任意正数  $s$ , 可定义 “阶乘”  $(s-1)! := \Gamma(s)$ .

首先积分  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$  的反常性既表现为积分区间的无限性, 也表现为 0 是奇点, 故先利用积分的区间可加性将积分写成如下形式, 然后分而治之.

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = \underbrace{\int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx}_{I_1(s)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx}_{I_2(s)}$$

- 先考虑  $I_2(s)$ , 我们知道对任意  $s$ , 都有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x} = 0$ , 那么

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0$$

也就是说, 存在  $M > 0$ , 使得当  $x > M$  时, 恒成立  $0 < x^{s-1} e^{-x} < \frac{1}{x^2}$ , 故由比较法知:  $\forall s$ ,  $I_2(s)$  是收敛的.

- 对  $I_1(s)$ , 我们注意到: 当  $s-1 \geq 0$ , 即  $s \geq 1$  时, 它无反常性, 故收敛. 下面考虑当  $s < 1$  是的情形. 不难看出, 当  $x \in (0, 1)$  时恒成立

$$0 < x^{s-1} e^{-x} = \frac{1}{x^{1-s} e^x} < \frac{1}{x^{1-s}}$$

由例 9.2 中关于第二类  $p$ -积分的结论可知, 当  $1-s < 1$ , 即  $s > 0$  时,  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-s}}$  收敛, 从而由比较法知  $I_1(s)$  亦收敛.

综合上面的讨论, 可知当  $s > 0$  时  $I_1(s)$  和  $I_2(s)$  同时收敛, 从而  $\Gamma(s)$  收敛.

**注记 9.8** 回忆我们在例 8.2.11 中介绍过欧拉贝塔 (beta) 函数的特殊情形: 设  $m, n$  是自然数,  $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ , 并利用分部积分导出的递推式得到:

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

事实上, 可证明  $B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  当  $p, q > 0$  时收敛, 从而定义了一般的贝塔函数, 且贝塔函数和伽马函数的上关系对任意  $p > 0, q > 0$  也是成立的.

**注记 9.10** 我们看出  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  不足以保证  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛; 反之,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

收敛也不能保证  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 甚至不能保证  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上的有界性! 比如对定义于  $[1, +\infty)$  上的如下函数:

$$f(x) = \begin{cases} n+1, & x \in \left[n, n + \frac{1}{n(n+1)^2}\right], \\ 0, & x \in \left(n + \frac{1}{n(n+1)^2}, n+1\right), \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

$f(x)$  显然是无界的. 但我们将表明  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  是收敛的.  $\forall A > 1$ , 可找到  $n$  使得  $A \in [n, n+1)$ , 由于  $f(x)$  非负, 从而

$$\int_1^n f(x)dx \leq \int_1^A f(x)dx \leq \int_1^{n+1} f(x)dx$$

由积分的区域可加性, 可知

$$\begin{aligned} \int_1^n f(x)dx &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)dx = \\ &= 2 \frac{1}{1 \cdot 2^2} + 3 \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots + n \frac{1}{(n-1)n^2} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx$ , 故由夹逼定理, 知积分收敛.

**例 9.7** 对积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7 + 101x^5 + 3x^4 + x^2 + 2}}$ , 用直接积分判定其是否收敛显然不现实, 为此我们分析当  $x \rightarrow +\infty$  时被积函数的表现, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[5]{x^7 + 101x^5 + 3x^4 + x^2 + 2}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}} = 1$$

故知  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists M > 0$ , 使得当  $x > M$  时, 有

$$\left| \frac{\frac{1}{\sqrt[5]{x^7 + 101x^5 + 3x^4 + x^2 + 2}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}} - 1 \right| < \epsilon \implies \frac{1}{\sqrt[5]{x^7 + 101x^5 + 3x^4 + x^2 + 2}} < \frac{1 + \epsilon}{x^{\frac{7}{5}}} < \frac{2}{x^{\frac{7}{5}}}$$

由于  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{7}{5}}}$  收敛, 从而由比较法知给定积分亦收敛.

**例 9.8** 讨论反常积分  $\int_0^1 |\ln x|^p dx$  的敛散性. 当  $p = 0$  时, 积分正常. 当  $p > 0$  时, 积分在  $x = 0$  处无意义, 但  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\ln x|^p}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} |\ln x|^p = 0$ , 即存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < x < \delta$  时, 成立  $0 < |\ln x|^p < \frac{1}{x^{1/2}}$ , 则由比较法知当  $p > 0$  时积分收敛. 下面讨论  $p < 0$  时的情形, 此时, 虽然  $\ln 0$  无意义, 但由于  $p < 0$ , 可知  $\lim_{x \rightarrow 0} |\ln x|^p = 0$ , 故 0 其实不是被积函数的奇点. 但  $x = 1$  是奇点, 我们需要探讨  $|\ln x|^p$  当  $x \rightarrow 1^-$  时的表现, 从而判断积分的敛散性.

$$|\ln x|^p = |\ln(1 - (1 - x))|^p \sim (1 - x)^p = \frac{1}{(1 - x)^{-p}} \quad (x \rightarrow 1^-)$$

由比较法知当  $-p \geq 1$  时积分发散, 而当  $-p < 1 < 0$  时积分收敛.

**例 9.9** 讨论  $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x^p \ln x}$  的敛散性. 当  $p \leq 0$  时, 由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^p \ln x} = 0$ , 故被积函数此时无奇性, 从而积分收敛, 下讨论  $p > 0$  时的情形, 此时  $x = 0$  是被积函数的唯一奇点. 我们需将其与  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  相比较. 注意  $\frac{-1}{x^p \ln x}$  在  $(0, 1/e]$  上恒正, 且  $\frac{-1}{\ln x} \in (0, 1]$ , 故  $\frac{-1}{x^p \ln x} < \frac{1}{x^p}$ , 从而当  $0 < p < 1$  时积分收敛; 而  $p > 1$  时, 总存在  $q > 1$ , 使得  $p - q > 0$ , 从而由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\forall \alpha > 0)$  知  $\frac{\frac{-1}{x^p \ln x}}{\frac{1}{x^q}} = \frac{-1}{x^{p-q} \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ , 即存在  $\delta > 0$ , 使得  $0 < x < \delta$  时成立  $\frac{-1}{x^p \ln x} > \frac{1}{x^q} \quad (q > 1)$ , 故由比较判别法知此时积分发散. 最后, 当  $p = 1$  时, 计算知

$$\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln |\ln x| \Big|_{\epsilon}^{1/e} = -\infty$$

综上所述可知  $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x^p \ln x}$  当  $0 < p < 1$  时收敛, 当  $p \geq 1$  时发散.

**例 9.10** 讨论反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)}$  ( $p > 0$ ) 的敛散性. 将积分写成

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^p(1+x^2)}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)}}_{I_2}$$

其中  $I_1$  的反常是由奇点  $x = 0$  导致的, 但当  $0 < x < 1$  时, 有  $\frac{1}{x^p(1+x^2)} < \frac{1}{x^p}$ , 故知当  $0 < p < 1$  时  $I_1$  收敛, 而当  $p > 1$  时,  $I_1$  发散; 其中  $I_2$  的反常是由积分区间

无限导致的, 当  $x \rightarrow +\infty$  时  $\frac{1}{x^p(1+x^2)} \approx \frac{1}{x^{p+2}}$ , 即知当  $p+2 > 1$ , 即  $p > 1$  时收敛. 综上所述, 可知当  $0 < p < 1$  时积分收敛, 当  $p \geq 1$  时发散.

**例 9.11** 计算积分  $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x(1-x)}} (n \in \mathbb{N})$ . 由于  $n$  是自然数, 故  $x = 1$  唯一奇点, 在  $x = 1$  附近:  $\frac{x^n}{\sqrt{x(1-x)}} \approx \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ , 故积分收敛. 为计算它, 可用变量替换  $x = \sin^2 t$  消除根号来处理, 即有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x(1-x)}} &\stackrel{x=\sin^2 t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} t}{\sin^2 t(1-\sin^2 t)} \cdot 2 \sin t \cos t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \pi \end{aligned}$$

**例 9.12**  $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ , 计算  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ . 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 被积函数  $\approx \frac{1}{x^{2+\alpha}}$ , 故积分收敛. 为计算其值, 考虑三角换元  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \stackrel{x=\tan t}{=}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t dt}{(1+\tan^2 t)(1+\tan^\alpha t)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} dt \stackrel{t=\frac{\pi}{2}-u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha t}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} dt \\ \Rightarrow \quad I + I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha t}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^\alpha t}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t}{\sin^\alpha t + \cos^\alpha t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

注意计算结果与  $\alpha$  的具体取值无关 (当然  $\alpha$  的取值也不影响积分的收敛性), 既然如此, 令  $\alpha \rightarrow 0$ , 则我们期望

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \stackrel{\alpha \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\arctan x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

**注记 9.11** 显然  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$  是发散的, 但其柯西主值 (cpv)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2} =$

$$= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = 0$$

即概率论中柯西分布的期望值在柯西主值意义下为零.

## 10 一些重要积分的特殊计算方法 (\*)

**例 10.1** (迪利克雷 (Dirichlet) 积分)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{N})$ .

**解:** 由三角恒等式  $\frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x} = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{m-1} \cos 2lx$ , 对其两边积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{m-1} \cos 2lx \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\sin 2lx}{2l} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

又由于  $\sum_{m=1}^n \sin(2m-1)x = \frac{1 - \cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$ , 从而  $\left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 =$

$$\sum_{m=1}^n \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx \xrightarrow{\text{迪利克雷积分}} \frac{n\pi}{2} \quad (\text{费歇尔积分})$$

**注记 10.1** 积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  也称为迪利克雷积分. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \dots$ , 故积分在  $x=0$  处收敛 (事实上,  $x=0$  不是奇点); 可证明该积分在  $+\infty$  处也是收敛的 (见附录 II), 下面我们想办法计算它的值.

首先注意到对任意常数  $\lambda$ , 有  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \lambda x}{x} dx \xrightarrow{t=\lambda x} \int_0^{\frac{\pi}{2}\lambda} \frac{\sin t}{t} dt$ , 从而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}\lambda} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \lambda x}{x} dx$$

而对后面这个极限, 我们可以尝试利用下面的黎曼引理来计算:

**黎曼引理:** 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 则  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = 0$ .

问题是  $\frac{1}{x}$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上并不连续, 故不能直接利用上面的引理. 但这问题可以通过“修正”该函数而得以解决. 构造函数  $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ , 则当  $t \rightarrow 0$  时:

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} = \frac{\sin t - t}{t \sin t} \sim \frac{t - \left(t - \frac{t^3}{3!} + \dots\right)}{t^2} = \frac{t}{6} + o((t))$$

从而  $f(t)$  在  $t=0$  时是连续的. 则由黎曼引理, 知

$$0 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin \lambda t dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin \lambda t}{t} - \frac{\sin \lambda t}{\sin t} \right) dt$$

由于已知  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2m-1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}$  与  $m$  的具体值无关, 故  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \lambda t}{\sin t} = \frac{\pi}{2}$ . 由此可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \lambda t}{\sin t} = \frac{\pi}{2}$$

**注记 10.2** 黎曼引理的证明: 将区间  $[a, b]$   $n$  等分:  $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ , 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \sin \lambda t dt = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t) - f(t_i)] \sin \lambda t dt + \sum_{i=1}^n f(t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin \lambda t dt \end{aligned}$$

由于  $f \in C[a, b]$ , 故  $f \in R[a, b]$ , 且  $f$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 即  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得对任意  $x, y \in [a, b]$ , 只要  $|x - y| < \delta$ , 便有  $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ . 则当  $n > \frac{b-a}{\delta}$  时,  $|t - t_i| \leq |t_i - t_{i-1}| = \frac{b-a}{n} < \delta$ , 故  $|f(t) - f(t_i)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ , 从而

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t) - f(t_i)] \sin \lambda t dt \right| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t) - f(t_i)| |\sin \lambda t| dt \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t) - f(t_i)| dt < \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\text{另一方面 } \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin \lambda t dt \right| = \left| -\frac{1}{\lambda} (\cos \lambda t_i - \cos \lambda t_{i-1}) \right| \leq \frac{|\cos \lambda t_i| + |\cos \lambda t_{i-1}|}{\lambda} \leq \frac{2}{\lambda}.$$

由于  $f \in C[a, b]$ , 故  $f$  在  $[a, b]$  上有界, 即  $\exists M > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ , 从而

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin \lambda t dt \right| \leq M \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin \lambda t dt \right| \leq M \sum_{i=1}^n \frac{2}{\lambda} = \frac{2Mn}{\lambda}$$

综合上面的估计, 可得

$$\left| \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t) - f(t_i)] \sin \lambda t dt \right| + \\ + \left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin \lambda t dt \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2Mn}{\lambda} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (\text{当 } \lambda > \frac{4Mn}{\epsilon}) \quad \square$$

**注记 10.3** 用“费曼技巧”计算积分. 上面计算迪利克雷积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$  的方法用了十分严格的结果, 且由此带出的黎曼引理及其推广在实践中的应用也很多, 但计算不够简洁直观, 无疑是很绕的. 下面将采取更直观的技巧计算它: 记

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

直观上来看, 所求积分位  $\lim_{t \rightarrow 0} I(t)$ . 积分的形式貌似更复杂了, 但其实由于多了一个参数  $t$ , 反而操作空间更大了. 下面是技巧的关键: 虽然  $I(t)$  仍然不好直接计算, 但被积函数对  $t$  求导后的形式可以直接积出来!

$$I'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{\text{关键}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \right) dt \\ = - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx = - \frac{1}{1+t^2}$$

(一般来说, 不能随便交换积分和求导的顺序, 但可证明在我们的例子中, 上面的“关键”操作步骤是没问题的.)

$$I(t) = -\arctan t + C$$

为确定常数  $C$  的值, 注意导  $I(+\infty) = 0$ , 从而得到  $C = \frac{\pi}{2}$ . 从而

$$I(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t, \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}$$

**例 10.2** (利用费曼技巧计算伽马函数:) 先有  $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}$

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = - \int_0^{+\infty} x e^{-tx} dx = - \frac{1}{t^2}$$

$$F''(t) = -\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} x e^{-tx} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-tx} dx = \frac{2}{t^3}$$

不停地求导下去, 归纳可得:  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx = \frac{n!}{t^{n+1}}$ . 特别地, 令  $t = 1$ , 则得左边积分是之前讨论过的伽马函数 (见例 9.6) 的值  $\Gamma(n+1)$ .

**注记 10.4** 受上面连续求导的思路启发, 我们对注记 10.3 中得到的下面等式两边连续对  $t$  求导

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx = \frac{1}{1+t^2}$$

可归纳下面的有趣等式 (请自行完成验证)

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} \sin x \frac{dx}{x} = \frac{(n-1)!}{(1+t^2)^n} h_n(t)$$

$$\text{其中 } h_n(t) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{2k+1} t^{n-(2k+1)}.$$

**例 10.3** (用费曼技巧计算概率积分)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . 考虑函数

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2} dx, \quad t > 0 \implies \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I(+\infty)$$

$$I(t) = t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x^2}}{1 + x^2} dx \implies t^{-1} e^{-t^2} I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1 + x^2} dx$$

$$\text{两边对 } t \text{ 求导, 得 } \frac{d}{dt} \left( \frac{e^{-t^2}}{t} I(t) \right) = \int_0^{+\infty} -2te^{-t^2(1+x^2)} dx =$$

$$= -2e^{-t^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = -2e^{-t^2} I(+\infty)$$

$$\implies \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{e^{-t^2}}{t} I(t) \right) dt = -2I(+\infty) \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = -2(I(+\infty))^2$$

$$\implies -2(I(+\infty))^2 = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(t)}{t}$$

又由  $I(t) = t \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x^2}}{1+x^2} dx$  可得:  $\frac{I(t)}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x^2}}{1+x^2} dx \Rightarrow$

$$2(I(+\infty))^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x^2}}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I(+\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

**注记 10.5** 利用上面的概率积分及变量替换, 可得  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ . 由奇偶性, 可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+1} e^{-\alpha x^2} dx = 0$$

当  $x$  的幂次为偶数时, 可按下归纳计算:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{d}{d\alpha} (e^{-\alpha x^2}) \right) = -\frac{d}{d\alpha} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right)$$

$$= -\frac{d}{d\alpha} \left( \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \dots = -\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^{\frac{5}{2}}} \quad \dots \quad \dots$$

记

$$\langle x^{2k} \rangle := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx}$$

为  $x^{2k}$  相对于高斯测度的平均. 则由上计算不难归纳出:

$$\langle x^{2k} \rangle = \frac{\alpha}{\pi} (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)) \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{2k+1}{2}}} = \frac{(2k+1)!!}{\alpha^k}$$

这种类型的积分将频出现在费曼路径积分形式的量子场论里.

**例 10.4** 下面再看一种计算积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  的方法. 先证下面著名的**瓦利斯 (Wallis) 公式**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

**证明：**注意当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $n$  为自然数时, 有  $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ , 从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

记  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ , 我们之前求得其递推公式为 (见例 8.2.7):  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ,

且

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

从而上面的积分不等式可写为

$$\frac{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1} < \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{(2n)(2n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1}$$

$$\text{即} \quad \left( \frac{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1} \right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left( \frac{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1} \right)^2 \frac{1}{2n}$$

由于  $\left( \frac{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1} \right)^2 \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ , 故由夹逼原理可得瓦利士公式.  $\square$

**概率积分的另算：**注意到  $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2}$ , 故我们研究下面的积分

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \stackrel{t=\sqrt{n} \sin x}{=} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx \\ &= \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \stackrel{\text{Wallis 公式}}{\xrightarrow{n \rightarrow \infty}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

只需表明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left( e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right) dt = 0$ . 可证明:  $\forall x \in [0, a] (a \geq 1)$ , 恒成立

$$0 \leq e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^a \leq \frac{x^2}{a} e^{-x}$$

在其中令  $x = t^2, a = n$ , 得到如下估计:

$$0 \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left( e^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \right) dt \leq \frac{\int_0^{\sqrt{n}} t^4 e^{-t^2} dt}{n}$$

从而当  $n \rightarrow \infty$  时, 上极限成立, 从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**例 10.5** 欧拉常数  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx$ . 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大正整数.

首先, 由于当  $x > 2$  时  $[x] \geq x - 1$ , 故

$$\left|\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{(x-1)x} \sim \frac{1}{x^2} \quad (x \rightarrow +\infty) \quad \text{积分收敛, 则有}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^2 + \int_2^3 + \cdots + \int_{n-1}^n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1 - \ln 2) + \left(\frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \ln n + \ln(n-1)\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln(n-1)\right) \end{aligned}$$

**例 10.6** (欧拉积分)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$  在点  $x = 0$  是反常的. 但当进行分部积分时有

$$I = x \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = 1$$

故右边两项都有意义, 间接说明  $I$  收敛. 但上面的第二项积分还是不易直接求解, 故转向下面巧妙的变量替换:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx \stackrel{x=2t}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln (2 \sin t \cos t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt \\ \text{又} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt &\stackrel{t=\frac{\pi}{2}-u}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin u (-du) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{从而 } I &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t \, dt + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt \\
&= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt = \frac{\pi \ln 2}{2} + 2I \implies I = -\frac{\pi}{2} \ln 2
\end{aligned}$$

**例 10.7** 首先对任意非零常数  $\alpha$ , 有  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} d(\alpha x) = \frac{\pi}{2}$ , 然后将  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$  换种表达:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{d(1 - \cos \alpha x)}{\alpha x} = \frac{1 - \cos x}{\alpha x} \Big|_0^{+\infty} - \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx
\end{aligned}$$

进一步可证明

$$|\alpha| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx$$

用此可证明一道不等式: 对任意正整数  $n$  和任意实数  $x_1, \dots, x_n$ , 有

$$\sum_{i,j=1}^n |x_i + x_j| \geq \sum_{i,j=1}^n |x_i - x_j|$$

**证明:** 由上等式, 知

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n |x_i + x_j| - |x_i - x_j| &= \sum_{i,j=1}^n \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos((x_i - x_j)t) - \cos((x_i + x_j)t)}{t^2} dt \\
&= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n \frac{\sin(x_i t) \sin(x_j t)}{t^2} dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(\sum_{i=1}^n \sin x_i t)^2}{t^2} dt \geq 0 \quad \square
\end{aligned}$$

## 11 积分综合应用

### 11.1 总论：以直代曲，见微知著

虽然通过曲边梯形的面积引入积分，但积分其实是个很一般的概念，可应用到各种场景. 只要涉及到数量的持续累积（“积少成多”），便能看到积分的身影.

比如曲边梯形面积的计算中，我们先对区间  $[a, b]$  进行任意分割：  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ，当  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  足够小时，其上的面积可近似于  $\Delta S_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i$ ，由此我们认为面积的微分是  $dS = f(x)dx$ （“以直代曲”），最后我们通过积分即得所求面积（“见微知著”）：

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\{\Delta x_i \rightarrow 0\}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

上面分析中凸显出的一般模式是：先通过在微小局部  $[x, x + \Delta x]$  上的分析，得到所求量的有效近似表达（即一阶线性近似）： $\Delta S \approx f(x)\Delta x$ ，这一步的要求对所考虑问题中的自然科学规律有实质的把握，从而得到合理的近似；然后，我们将该近似表达为微分关系： $dS = f(x)dx$ （即在微分层面，也就是说在线性近似层面，上面的近似关系就变成等式了）；最后，为得到量  $S$  的总量，我们只需要对其微分在自变量  $x$  的范围  $[a, b]$  内积分即可，即  $S = \int_a^b f(x)dx$ .

上面的分析方法通常也叫**微元法**，其实质等同于微分的实质：即从实际增量  $\Delta S$  中“析取”线性主部，或等价地，略去极限过程  $\Delta x \rightarrow 0$  中出现的有关  $\Delta x$  的高阶无穷小，从而得到微分等式，对之积分即可得所需总量.

微积分的另一大用途就是建立微分方程并求解它. 实际应用中的很多问题都可转化为探寻自变量  $x$  与**未知函数**  $y = y(x)$  的各阶导数  $y', y'', \cdots, y^{(n)}$  之间的关系，它们之间的关系

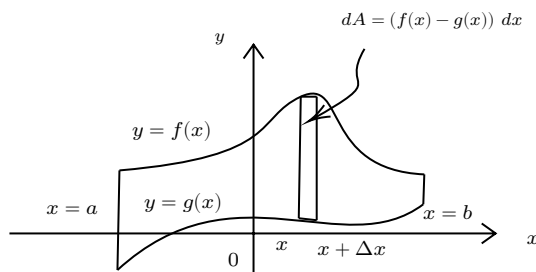
$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为是  $y = y(x)$  满足的**常微分方程**. 微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数称为方程的**阶**. 满足上方程的任一函数  $y = y(x)$  称为微分方程的解，一般来说， $n$  阶方程的所有解（**通解**）中含有  $n$  个相互独立的任意常数. 为了得到特定的解，我们需要利用**初值条件**将解确定下来，得到**定解**，所以初值条件也叫定解条件. 显然，我们需要  $n$  个独立初值条件才能确定通解中的  $n$  个独立常数. 所以，在实际问题中，常考虑如下**初值问题**：

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

## 11.2 平面图形的面积

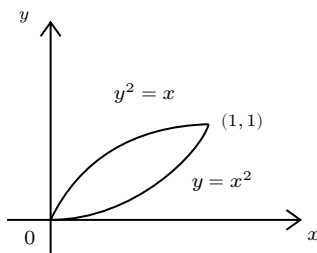
**直角坐标情形：**设平面图形由曲线  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ , 直线  $x = a$  和  $x = b$  所围成, 记其面积为  $A$ , 为计算  $A$ , 我们分析其面积微元.



由“以直代曲”近似法, 在  $[x, x + \Delta x]$  上的面积  $\Delta A$  可近似为  $\Delta A = (f(x) - g(x)) \Delta x$ , 从而得到面积微分 (微元) 为  $dA = (f(x) - g(x)) dx$ , 进而可知所求面积为

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

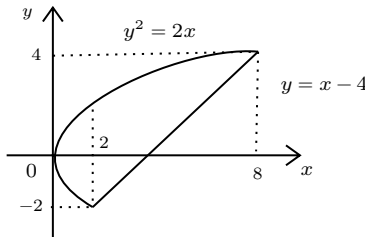
**例 11.2.1** 求抛物线  $y = x^2$  与  $y^2 = x$  所围图形的面积.



图形的上方曲线是  $y^2 = x$ , 即  $y = \sqrt{x}$ , 下方曲线是  $y = x^2$ ; 两曲线的交点是  $(0,0)$  和  $(1,1)$ . 由此可知所求面积为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left( \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

**例 11.2.2** 求抛物线  $y^2 = 2x$  和  $y = x - 4$  所围图形的面积.



可求得抛物线与直线的交点是  $(2, -2)$  和  $(8, 4)$ . 如果用  $x$ -积分来计算所围面积, 我们需要所围区域分为两部分:  $x$  从 0 到 2 的部分, 此时上方曲线是  $y = \sqrt{2x}$ , 下方曲线是  $y = -\sqrt{2x}$ ; 当  $x$  从 2 到 8 时, 上方曲线是  $y = \sqrt{2x}$ , 下方曲线是  $y = x - 4$ . 从而所求面积是:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})) dx + \int_2^8 (\sqrt{2x} - (x - 4)) dx \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^8 (\sqrt{2x} - x + 4) dx \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 + \left( \sqrt{2} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_2^8 = 18 \end{aligned}$$

**另解:** 如果以  $y$  轴的视角来看, 即将面积的计算转换为一个  $y$  积分来计算时, 情形就会简单的多. 所围图形的上方曲线为  $x = y + 4$ , 下方曲线为  $x = \frac{y^2}{2}$ , 其中  $y$  的取值范围是  $[-2, 4]$ , 从而所求面积为:

$$A = \int_{-2}^4 \left( y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left( \frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-2}^4 = 18$$

**例 11.2.3** 求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  所围图形的面积. 由对称性, 只需计算第一象限内的椭圆所围面积, 最后乘以 4 即为所求. 在第一象限内:  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ,  $0 \leq x \leq a$ . 其与  $x$ -轴,  $y$ -轴所围面积为:

$$\begin{aligned} \int_0^a y dx &= \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \stackrel{x=a \cos \theta}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin \theta (-a \sin \theta) d\theta \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi ab}{4} \end{aligned}$$

故椭圆所围的面积为  $4 \times \frac{\pi ab}{4} = \pi ab$ . 特别地, 当  $a = b$  时, 得到圆面积公式  $\pi a^2$ .

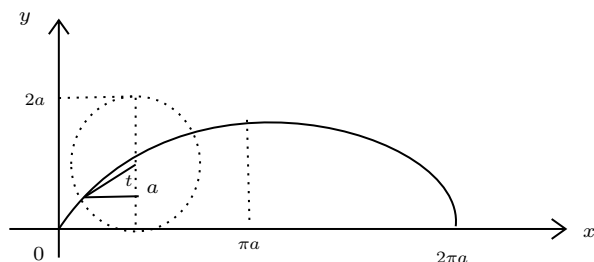
**参数方程情形:** 注意在上例计算中, 我们采用的变量替换  $x = a \cos \theta$ , 本质上就是椭圆的参数化  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$  即将  $\int_0^a y dx$  转变为  $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin t (-a \sin t) dt$ .

一般地, 若曲边梯形的曲边以参数方程  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$  给出. 其中  $x(t)$

和  $y(t)$  都是  $[\alpha, \beta]$  上的连续函数,  $y(t) \geq 0$  且  $a = x(\alpha)$ ,  $b = x(\beta)$ . 则  $\int_a^b y dx$  可转化为一个  $t$  积分来计算. 当然, 由于面积为正, 需合理选择积分的上下限:

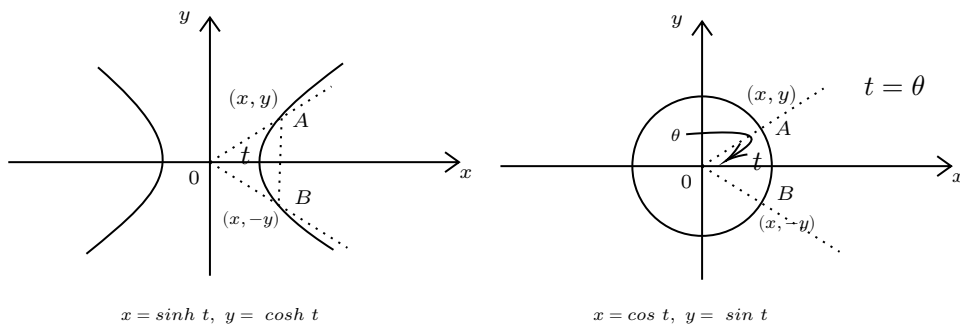
- 如果  $x(t)$  严格单调增加, 则面积  $A = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$ ;
- 如果  $x(t)$  严格单调减少, 那么  $a > b$ , 则面积  $A = \int_b^a y dx = \int_\beta^\alpha y(t)x'(t)dt$

**例子 11.2.4** 求摆线的第一拱  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$  与  $x$  轴所围图形的面积.



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) d(a(t - \sin t)) = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2} dt \stackrel{t=2u}{=} 8a^2 \int_0^\pi \sin^4 u du \stackrel{\text{对称性}}{=} 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du \\ &= 16a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

**例 11.2.5** 设  $(x, y)$  是双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  上的任意一点, 求分别由点  $(x, y)$  和  $(x, -y)$  与原点连线的线段与双曲线围成的曲边三角形的面积.



$$\begin{aligned}
\text{曲边三角形的面积 } t &= 2 \left( \frac{xy}{2} - \int_1^x \sqrt{u^2 - 1} du \right) = \\
&= xy - (x\sqrt{x^2 - 1} - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|) \\
&= xy - xy + \ln(x + y) = \ln(x + y)
\end{aligned}$$

从而  $x + y = e^t$ , 结合  $x^2 - y^2 = 1$ , 得到 
$$\begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t \end{cases}$$

对单位圆做类似讨论, 知单位圆上点  $(x, y)$  和  $(x, -y)$  对应的扇形面积为

$$\begin{aligned}
t &= 2 \left( \frac{xy}{2} + \int_x^1 \sqrt{1 - u^2} du \right) = xy + 2 \left( u\sqrt{1 - u^2} \Big|_x^1 - \int_x^1 u \frac{-2udu}{2\sqrt{1 - u^2}} \right) \\
&= xy + 2 \left( -xy + \int_x^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1 - u^2}} \right) = -xy + 2 \int_x^1 \frac{u^2 - 1 + 1}{\sqrt{1 - u^2}} du \\
&= -xy - 2 \int_x^1 \sqrt{1 - u^2} du + 2 \int_x^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\
\Rightarrow \quad xy + 2 \int_x^1 \sqrt{1 - u^2} du &= -xy - 2 \int_x^1 \sqrt{1 - u^2} du + 2 \int_x^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\
\Rightarrow \quad \int_x^1 \sqrt{1 - u^2} du &= \frac{1}{2} \left( -xy + \int_x^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \\
\Rightarrow \quad t &= -xy - 2 \frac{1}{2} \left( -xy + \int_x^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \right) + 2 \int_x^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\
&= \int_x^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u \Big|_x^1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \theta
\end{aligned}$$

而 
$$\begin{cases} x = \cos \theta = \cosh t \\ y = \sin \theta = \sinh t \end{cases}$$

因此类似性, 将  $x = \cosh t$  ( $\sinh t$ ) 称为双曲余弦函数 (双曲正弦函数)。

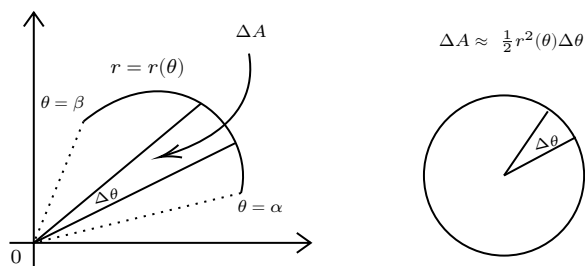
**极坐标情形:** 如果平面图形是在极坐标  $(r, \theta)$  下由  $r = r(\theta)$ ,  $\theta = \alpha$ ,  $\theta = \beta$  围成, 则其中幅角  $\Delta\theta$  所对应的面积  $\Delta A$ , 当  $\Delta\theta \rightarrow 0$  时可近似于半径为  $r(\theta)$  的圆上角度  $\Delta\theta$

对应的小扇形的面积, 即  $\Delta A \approx \frac{1}{2}r^2(\theta)\Delta\theta$ , 故得面积微元

$$dA = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

所以所求面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$



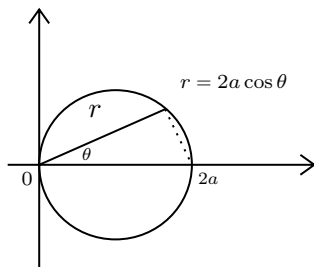
**注记 11.2.1** 上面的推导中, 对  $\Delta\theta$  对应的小面积  $\Delta A$ , 我们是将其近似于圆中扇形的面积. 这本质上仍是“以直代曲”的思路, 只是在极坐标系下的正交“直线族”是:  $r = \text{常数}$  (圆);  $\theta = \text{常数}$  (射线). 此时, 真实面积  $\Delta A$  与近似面积  $\frac{1}{2}r^2(\theta)\Delta\theta$  的差是关于  $\Delta x$  在  $\Delta x \rightarrow 0$  下的更高阶无穷小. 故面积微分 (微元) 为  $dA = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$ .

**例 11.2.6** 对圆  $x^2 + y^2 = a^2$ , 其极坐标方程是:  $r = a$ , 故其面积

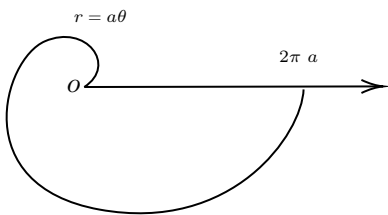
$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 d\theta = \pi a^2$$

计算显然更便捷. 另外极坐标下的曲线:  $r = 2a \cos \theta$  ( $a > 0$ ) 描述的是圆心位于  $(a, 0)$ , 半径为  $a$  的圆. 其面积显然也是  $\pi a^2$ , 下面我们利用极坐标下面积积分公式验证之 (注意: 圆上的点绕一周对应  $\theta$  从 0 到  $\pi$ )

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 4a^2 \cos^2 \theta d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \pi a^2$$

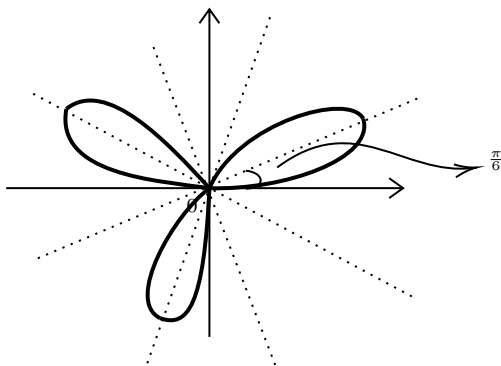


例 11.2.7 求阿基米德螺线  $r = a\theta$  ( $a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) 与极轴所围图形的面积.



$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\theta)^2 d\theta = \frac{a^2 \theta^3}{6} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3 a^2}{3}$$

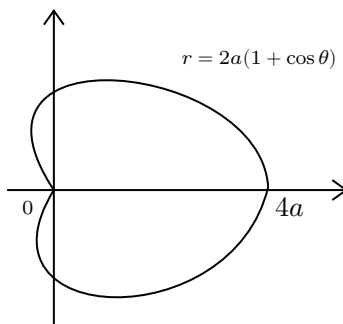
例 11.2.8 求三叶玫瑰线  $r = a \sin 3\theta$ , ( $a > 0$ ) 所围成图形的面积.



由上图, 只需求半叶的面积 ( $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$ ), 全部面积是其 6 倍.

$$A = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2 3\theta d\theta \stackrel{3\theta=\varphi}{=} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi a^2}{4}$$

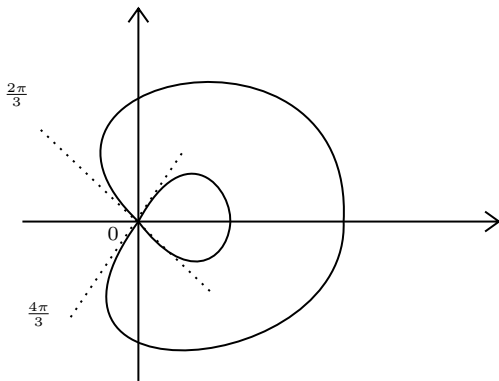
例 11.2.9 求心脏线  $r = 2a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ ) 所围图形的面积.



由对称性, 我们只计算位于极轴上方的面积, 所谓面积是其两倍.

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2(\theta) d\theta = 4a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \\
 &16a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\theta}{2} d\theta = 32a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = 32a^2 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 6\pi a^2.
 \end{aligned}$$

**例 11.2.10** 考虑极坐标下的帕斯卡蜗线:  $r = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cos\theta$ , 其图形如下:



我们先计算内部小的闭圈围绕的面积. 为此需要界定小圈对应的  $\theta$  的范围. 小圈的起始点是原点  $r = 0$  处, 即  $\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cos\theta = 0 \implies \cos\theta = -\frac{1}{2}$ , 从而  $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ . 故小圈围成的面积为

$$\begin{aligned}
 A_{\text{小圈}} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cos\theta)^2 d\theta \stackrel{\text{对称性}}{=} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cos\theta)^2 d\theta \\
 &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (3 + 12\cos\theta + 12\cos^2\theta) d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (3 + 12\cos\theta + 6(1 + \cos 2\theta)) d\theta \\
 &= 9\theta \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} + 12\sin\theta \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} + 3\sin 2\theta \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = 9\left(\frac{\pi}{6}\right) + 12\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\
 &= 3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

下面计算外围大圈和内部小圈之间的面积. 注意当  $\theta$  从 0 到  $\pi$  时, 曲线上的点沿曲线一周, 而  $\theta = \text{常数}$  将扫过内部小圈所圈的面积 2 遍, 从而所求面积为

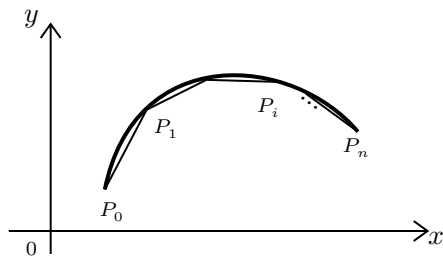
$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cos\theta)^2 d\theta - 2A_{\text{小圈}} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} + 6\cos\theta + 3(1 + \cos 2\theta) \right) d\theta -$$

$$\begin{aligned}
-6\pi + 9\sqrt{3} &= \frac{9}{2} \left[ 2\pi + 6 \sin \theta \right]_0^{2\pi} + \frac{3}{2} \left[ \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} - 6\pi + 9\sqrt{3} \\
&= \frac{9}{2}(2\pi) + 6(0) + \frac{3}{2}(0) - 6\pi + 9\sqrt{3} = 3\pi + 9\sqrt{3}
\end{aligned}$$

### 11.3 曲线弧长计算

设平面曲线的一段可用参数方程  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$ . 我们定义其弧长的概念.

首先, 将  $[\alpha, \beta]$  分划为任意  $n$  份:  $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ . 记  $P_i$  为曲线上对应于参数  $t_i$  的点.



显然, 曲线的弧长可用折线段的长度  $\overline{P_{i-1}P_i}$  之和来近似, 当划分越来越精细, 我们将期望曲线的弧长就是这些折线段长度和的极限. 即弧长  $(\lambda := \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta t_i))$

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i}$$

为了将其转换为积分计算, 我们需想办法将其写成黎曼和  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta t_i$  的形式.

注意到:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}$$

假设  $x(t), y(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  中连续, 且在  $(\alpha, \beta)$  中可导, 则由拉格朗日中值定理, 知  $\exists \xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ , 使得

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i) \Delta t_i, \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i) \Delta t_i$$

从而

$$\sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2} \Delta t_i$$

它还不是黎曼和, 但已很接近于一个黎曼和的形式了. 当  $\Delta t_i$  足够小时,  $\xi_i$  和  $\eta_i$

将足够靠近, 故我们可将上面的和近似为下面的黎曼和

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\sigma_i)]^2 + [y'(\sigma_i)]^2} \Delta t_i, \quad \sigma_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

**定理 11.3.1** 设曲线段为:  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ . 对任意划分, 若  $x'(t)$  和  $y'(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 则下极限存在, 且该极限即为曲线段的弧长. 即有

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\sigma_i)]^2 + [y'(\sigma_i)]^2} \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \end{aligned}$$

**证明:** 我们需要估计  $\left| \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} - \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\sigma_i)]^2 + [y'(\sigma_i)]^2} \Delta t_i \right|$  当  $\Delta t_i \rightarrow 0$  时的大小, 看其是否趋向零.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2} \Delta t_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\sigma_i)]^2 + [y'(\sigma_i)]^2} \Delta t_i \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2} - \sqrt{[x'(\sigma_i)]^2 + [y'(\sigma_i)]^2} \right| \Delta t_i \quad (*) \end{aligned}$$

为进一步估计 (\*), 我们需要下面的三角不等式:

$$\left| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \right| \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

按此不等式, 上面的 (\*) 式可进一步估计为

$$(*) \leq \sum_{i=1}^n |x'(\xi_i) - x'(\sigma_i)| \Delta t_i + \sum_{i=1}^n |y'(\eta_i) - y'(\sigma_i)| \Delta t_i \leq \sum_{i=1}^n \omega_i^x \Delta t_i + \sum_{i=1}^n \omega_i^y \Delta t_i$$

其中  $\omega_i^x$  和  $\omega_i^y$  分别表示  $x'(t)$  和  $y'(t)$  在  $[t_{i-1}, t_i]$  上的振幅. 由  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  的连续性知  $x'(t)$  和  $y'(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积, 则由定积分存在的充要条件知当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^x \Delta t_i \rightarrow 0; \quad \sum_{i=1}^n \omega_i^y \Delta t_i \rightarrow 0$$

从而定理得证.  $\square$

由上定理知曲线  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  的弧长微分 (微元) 是  $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ , 求弧长即对弧长微分积分.

如曲线段以  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  给出, 则它也可看成由参数方程  $\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$ ,  $a \leq x \leq b$  描述, 从而可得此时弧长微分为:  $ds = \sqrt{(x')^2 + (y'(x))^2} dx$

$$= \sqrt{1 + (y')^2} dx \implies s = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

如曲线段在极坐标下由方程  $r = r(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  给出, 则它也可看成由如下参数方程

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta \end{cases}, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$

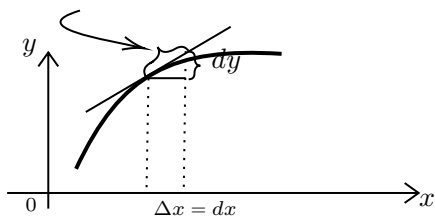
给出. 则  $x'(\theta) = r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta$ ;  $y'(\theta) = r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta$ , 从而

$$\begin{aligned} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} &= \sqrt{(r'(\theta))^2 \cos^2 \theta + (r(\theta))^2 \sin^2 \theta - 2r(\theta)r'(\theta) \sin \theta \cos \theta +} \\ &\quad + (r'(\theta))^2 \sin^2 \theta + (r(\theta))^2 \cos^2 \theta + 2r(\theta)r'(\theta) \sin \theta \cos \theta} = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} \end{aligned}$$

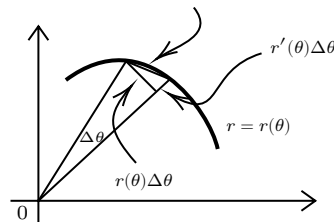
从而极坐标下的弧长微分及弧长计算公式为:

$$ds = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta \implies s = \int_{\alpha}^{\beta} dl = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (y'(x))^2 (dx)^2} = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$



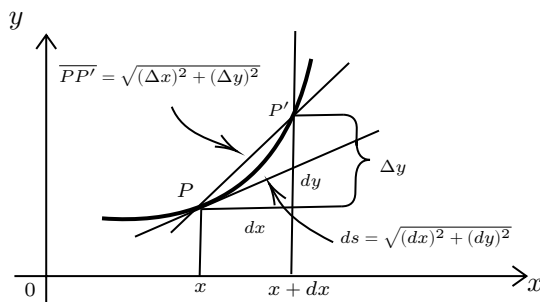
$$ds = \sqrt{r(\theta)^2 + (r'(\theta))^2} \Delta\theta$$



**注记 11.3.1** 几何上来看 (见上右图), 在极坐标下, 若我们将曲线弧长近似为以  $r(\theta)\Delta\theta$  和  $r'(\theta)\Delta\theta$  为长的两直角边的直角三角形的斜边之长, 则得到弧长微分公式, 这是真实弧长的一阶近似, 从而积分后便是弧长的实际长度. 而如果直接用以  $r(\theta)$  为半径的圆上  $\Delta\theta$  对应的圆弧来近似该曲线的话, 则其弧长的近似为  $r(\theta)\Delta\theta$ , 显然是有所欠缺的. 这是因为弧长的定义原来就是按内接折线段的长度和的极限来定义的, 而用

$r(\theta)\Delta\theta$  来近似内接折线段的长显然是不足的. 这说明, 虽然在计算极坐标下面积的微元时, 以圆弧近似曲线所得的面积微元是真实面积的一阶近似, 但对弧长而言, 这个近似就太粗糙了.

事实上, 可以证明当  $\Delta x \rightarrow 0$  时, 弧长微分  $ds$ , 真实弧长  $\Delta s$ , 及联结  $P = (x, y)$  和  $P' = (x, y(x + \Delta x))$  的折线长度  $\overline{PP'}$  三者都是等价无穷小, 这也间接说明了弧长微分的合理性.



由上图可知,  $|PP'| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , 由微分中值定理, 知  $\exists \xi \in (x, x + \Delta x)$ , 使得  $\Delta y = y'(\xi)\Delta x$ , 从而

$$\overline{PP'} = \sqrt{1 + (y'(\xi))^2} \Delta x$$

另一方面,  $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ , 而真实弧长段  $\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (y')^2} dx$ . 由积分中值定理, 知  $\exists \eta \in [x, x + \Delta x]$ , 使得

$$\Delta s = \sqrt{1 + (y'(\eta))^2} \Delta x$$

$$\text{从而 } \lim_{P' \rightarrow P} \frac{\Delta s}{\overline{PP'}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + (y'(\eta))^2} \Delta x}{\sqrt{1 + (y'(\xi))^2} \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = 1.$$

$$\text{同理 } \lim_{P' \rightarrow P} \frac{\Delta s}{ds} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + (y'(\eta))^2} \Delta x}{\sqrt{1 + (y'(x))^2} \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = 1.$$

**注记 11.3.2** 设实际要求的量  $F$  的改变量是  $F(b) - F(a)$ , 微元法的本质是求出该量的微分, 即其一阶线性近似:  $\Delta F \approx dF = f(x)dx$ , 从而由牛顿-莱布尼茨公式可知: 量  $F$  的真实改变为

$$F(b) - F(a) = \int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x)dx$$

**例 11.3.1** 求半径为  $a$  的圆的周长.

**解法一:** 在直角坐标系下  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ , 周长为

$$s = 4 \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = 4a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^a = 2\pi a$$

**解法二:** 采用参数方程  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$ , 则  $s = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2\pi a$

**解法三:** 在极坐标下,  $r = \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , 则周长可按下计算

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a$$

**例 11.3.2** 求阿基米德螺线  $r = a\theta$  ( $a > 0$ ) 在一个周期  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  下的弧长.

**解:** 由极坐标下的弧长公式得:  $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \theta^2 + a^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = a \theta \sqrt{1 + \theta^2} \Big|_0^{2\pi} \\ &\quad - a \int_0^{2\pi} \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} = 2\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} - a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta + a \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} \\ &\Rightarrow 2s = 2\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + a \ln \left( \theta + \sqrt{1 + \theta^2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &\quad = 2\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + a \ln (2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \\ &\Rightarrow s = \pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a \ln (2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})}{2} \end{aligned}$$

**例 11.3.3** 求旋轮线一拱:  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$   $0 \leq t \leq 2\pi$  的弧长.

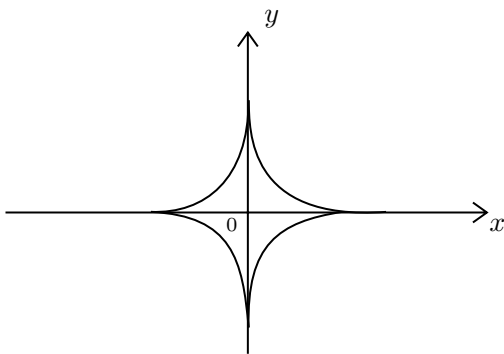
$$s = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a$$

**例 11.3.4** 求心脏线  $r = 2a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ ) 的全长 (图形见例 11.2.9). 由于心

脏线关于  $x$  轴对称, 故只计算  $x$  轴上方部分的弧长, 然后二倍之.

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^\pi \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta = 2 \int_0^\pi \sqrt{4a^2(1 + \cos \theta)^2 + 4a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi 2a\sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = 2 \int_0^\pi 4a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 8a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 16a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 16a \end{aligned}$$

**例 11.3.5** 求星形线  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  ( $a > 0$ ) 的全长. 首先描绘出其图形



由对称性知, 只需计算第一象限内的弧长, 然后四倍之.

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 6a \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \end{aligned}$$

**另解:** 消去参数  $t$ , 得曲线方程:  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ . 在第一象限内:  $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ , 则

$$y'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} \left( -\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right) = -x^{-\frac{1}{3}} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$$

故弧长微分为  $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})} dx = \sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}} dx$

$$= a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx \quad \Rightarrow \quad s = 4 \int_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx = 4a^{\frac{1}{3}} \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \Big|_0^a = 4a^{\frac{1}{3}} \frac{3}{2} a^{\frac{2}{3}} = 6a$$

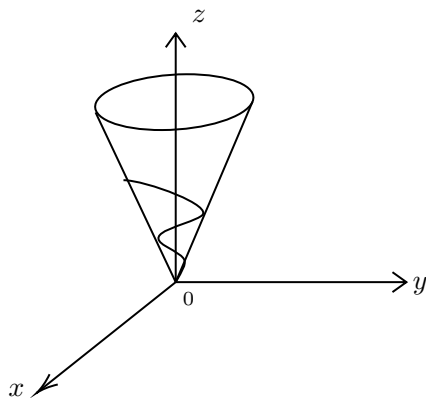
结果相同，但明显用参数法计算更简单一些.

**注记 11.3.3** 对于空间曲线段:  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$ , 其弧长公式是平面曲线弧

长公式的自然推广, 即有  $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$

**例 11.3.6** 计算圆锥螺线  $\begin{cases} x = at \cos t \\ y = -at \sin t \\ z = bt \end{cases}$  第一圈的长度. 将参数  $t$  看做是“时间”,

则曲线上的点在时刻  $t$  位于圆周  $x^2 + y^2 = a^2 t^2$  之上, 且其  $z$  坐标按线性  $z = bt$  增长, 故其图形大致如下:



其第一圈长度为  $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (\cos t - t \sin t)^2 + a^2 (-\sin t - t \cos t)^2 + b^2} dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 t^2 + a^2 + b^2} dt \stackrel{s^2 := \frac{b^2}{a^2} + 1}{=} a \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + s^2} dt$$

$$= \frac{a}{2} \left( t \sqrt{t^2 + s^2} + s^2 \ln |t + \sqrt{t^2 + s^2}| \right) \Big|_0^{2\pi} = a \left( \pi \sqrt{4\pi^2 + s^2} + \frac{s^2}{2} \ln \frac{2\pi + \sqrt{4\pi^2 + s^2}}{s} \right)$$

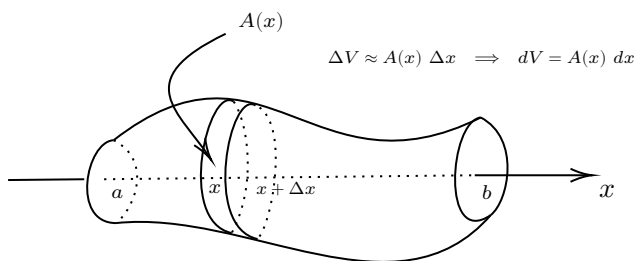
当  $b = 0$  时, 圆锥螺线退化为平面上的阿基米德螺线:  $r = a\theta$  ( $a > 0$ ) (见例 11.2.7), 其第一圈的长度为 (令  $s^2 = 1$ )

$$s = \frac{a}{2} \left( s\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln 2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1} \right)$$

与例 11.3.2 中在极坐标下计算的结果是一致的.

## 11.4 体积计算之截面堆叠法，祖暅原理

对一立体，如果知道其平面截面的面积，则可按微元法思路将其体积表达为截面面积函数的积分.

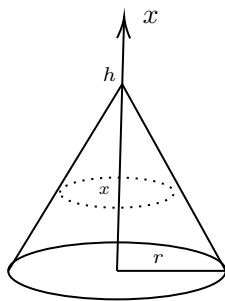


设在  $x$  点处于  $x$  轴垂直的立体截面的面积为  $A(x)$ ，则当  $\Delta x \rightarrow 0$  时，由于  $A(x + \Delta x) \approx A(x)$ ，则介于  $x$  和  $x + \Delta x$  之间的薄片的体积可近似为  $\Delta V \approx A(x)\Delta x$ ，从而体积微分为

$$dV = A(x)dx \implies V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)dx$$

上述求立体体积的方法也称薄片法或扁柱体法. 由此也可看出，如果两个立体被平行平面所截截面的面积恒相同，则它们的体积必然相同，此即祖（祖冲之之子）原理. 它是我国南北朝数学家祖暅在计算“牟合方盖”体积（用以推算球的体积）时发现的. 该原理在《九章算术》中被描述为：“夫叠基成立积，缘幂势既同则积不容异”（“幂势”就是截面积的意思）. 在国外，类似的原理由意大利数学家卡瓦列里在 17 世纪提出.

**例 11.4.1** 我们知道底面半径为  $r$ ，高为  $h$  的圆锥的体积为  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ，下用“截面堆叠法”予以验证.

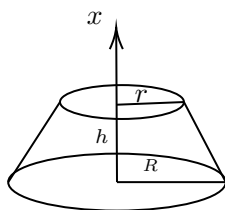


如上图建立坐标，在高  $x$  处的平行于底面的截面面的面积为： $A(x) = \pi \left( \frac{h-x}{h} r \right)^2$ ,

从而圆锥体积可计算为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x) dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} (h-x)^2 dx = -\frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (h-x)^2 d(h-x) \\ &= -\frac{\pi r^2}{h^2} \frac{(h-x)^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \text{底面积} \times \text{高} \end{aligned}$$

类似地，我们可以计算出圆台的体积公式. 如下图，圆台的顶部是半径为  $r$  的圆，底部是半径为  $R$  的面积，高为  $h$ .

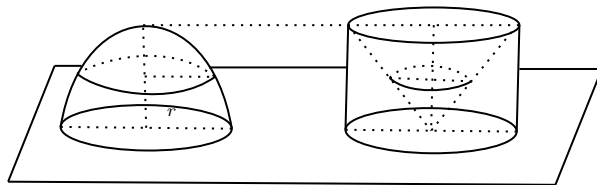


则其体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h \left[ \frac{R-r}{h} \left( \frac{Rh}{R-r} - x \right) \right]^2 dx \\ &= \pi \int_0^h \left[ R^2 - \frac{2R(R-r)}{h} x + \left( \frac{R-r}{h} \right)^2 x^2 \right] dx \\ &= \pi \left[ R^2 h - R(R-r)h + \left( \frac{R-r}{h} \right)^2 \frac{h^3}{3} \right] = \frac{\pi (r^2 + R^2 + rR) h}{3} \end{aligned}$$

下面我们用“祖暅原理”来计算球的体积.

**例 11.4.2** 半径为  $r$  的球的体积为  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ .



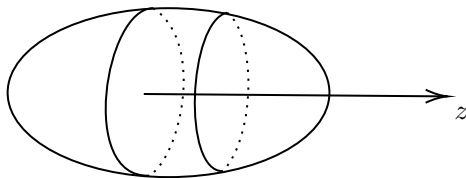
由祖暅原理知，需要构造一个和半球等高且横截面面积处处相同的立体. 在半径和高都为  $r$  的圆柱中按上图挖掉一个底面半径为  $r$ ，高为  $r$  的圆锥. 则在高  $x$  处的球体上所截截面的面积为  $\pi(r^2 - x^2)$ ；等高处在圆柱上所截截面的面积为  $\pi r^2$ ，圆锥上所截截

面的面积为  $\pi x^2$ . 从而由祖暅原理, 半球的体积为圆柱体积减去圆锥体积, 故球体积为

$$V = 2 \left( \pi r^2 r - \frac{1}{3} \pi r^2 r \right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

**例 11.4.3** 求椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的体积.

$$A(z) = \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$$



$z$  的取值范围是  $z \in [-c, c]$ , 过  $z$  且平行于  $x-y$  平面的平面与椭球所截图形是椭圆, 其方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \quad (\text{视 } z \text{ 为常数})$$

利用椭圆的面积公式  $\pi \times (\text{半长轴长}) \times (\text{半短轴长})$ , 得到上椭圆截面的面积为

$$A(z) = \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$$

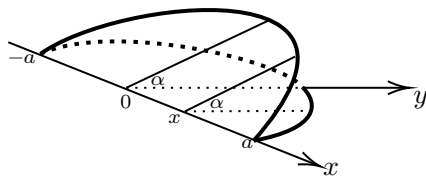
故椭球的体积为

$$V = \int_{-c}^c A(z) dz = \pi ab \int_{-c}^c \left( 1 - \left( \frac{z}{c} \right)^2 \right) dz = \pi abc \int_{-c}^c \left( 1 - \left( \frac{z}{c} \right)^2 \right) d\left( \frac{z}{c} \right)$$

$$\stackrel{\frac{z}{c}=u}{=} \pi abc \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \frac{4}{3} \pi abc$$

当  $a = b = c = r$  时, 椭球变为半径为  $r$  的球:  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , 由此亦得球的体积为  $\frac{4}{3} \pi r^3$ .

**例 11.4.4** 求由椭圆柱面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 平面  $xOy$  以及过  $x$  轴与  $xOy$  平面成  $\alpha$  角的半平面所围成的“椭圆柱楔形”的体积.



由上图可知, 用过  $x$  轴上区间  $[-a, a]$  内任意一点  $x$  且与  $x$  轴垂直的平面截“椭圆柱楔形”所得的截面是一个直角三角形, 其两直角边的边长分别为  $y$  和  $y \tan \alpha$ , 故截面积为

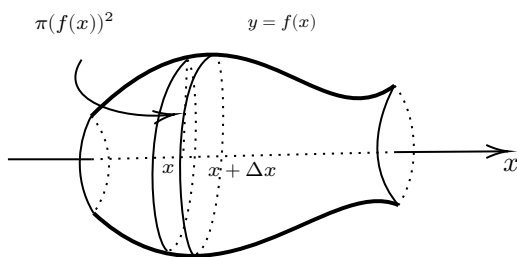
$$A(x) = \frac{1}{2} y^2 \tan \alpha = \frac{b^2}{2a^2} (a^2 - x^2) \tan \alpha$$

从而所求体积为

$$V = \int_{-a}^a A(x) dx = \frac{b^2}{2a^2} \tan \alpha \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{2ab^2}{3} \tan \alpha$$

### 11.5 旋转体的体积及侧面积计算

如果立体是平面曲线  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  (设  $y \geq 0$ ) 绕  $x$  轴旋转而得, 则其体积可按上小节的“截面堆叠”法来求解.



用垂直于  $x$  轴的平面截旋转体, 得截面为圆, 且在  $x$  处的截面面积为  $A(x) = \pi(f(x))^2$ , 从而旋转体的体积为:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

**注记 11.5.1** 介于  $x$  和  $x + \Delta x$  之间的面积可由圆台面积公式 (见上小节例 11.4.1) 计算为

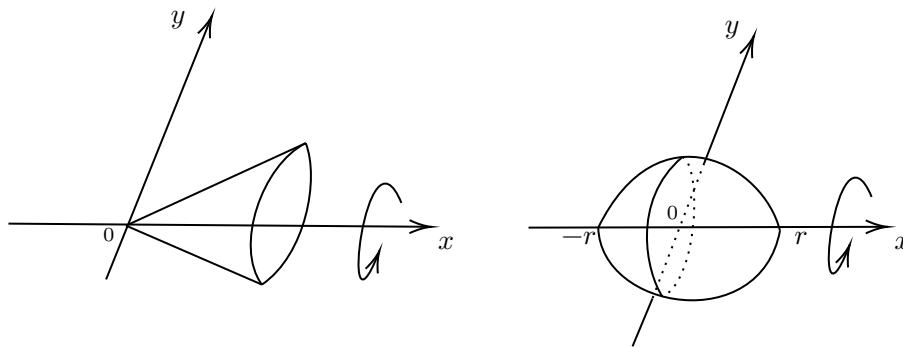
$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\pi [(f(x))^2 + (f(x + \Delta x))^2 + f(x)f(x + \Delta x)] \Delta x}{3} \\ &= \frac{\pi [(f(x))^2 + (f(x) + f'(x)\Delta x + \cdots)^2 + f(x)(f(x) + f'(x)\Delta x + \cdots)] \Delta x}{3} \\ &= \pi(f(x))^2 \Delta x + o((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

故体积的一阶线性近似为  $\Delta V \approx \pi(f(x))^2 \Delta x$ , 即体积微分 (微元) 为  $dV = \pi(f(x))^2 dx$ , 从而其积分是所求体积 (见上小节注记 11.3.2 的说明.)

**例 11.5.1** 将底面半径为  $r$ , 高为  $h$  的圆锥看成是直线  $y = \frac{r}{h}x$ ,  $0 \leq x \leq h$  绕  $x$  轴旋转所成的体积, 则其体积可按如下计算:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2}{3} h = \frac{1}{3} \times (\text{底面积}) \times (\text{高})$$

显然比例 11.4.1 中的计算简单了一些.



**例 11.5.2** 半径为  $r$  的球可看做是曲线  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $-r \leq x \leq r$  沿着  $x$  轴旋转所成的立体, 则其体积可计算如下:

$$V = \pi \int_{-r}^r y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi r^3 - 2\pi \frac{r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

相比例 11.4.2 中的计算, 简易迅捷了不少.

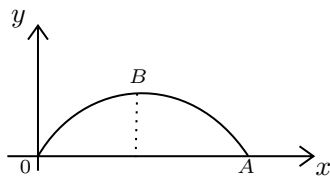
如立体是曲线  $y = f(x)$ ,  $c \leq y \leq d$  沿着  $y$  轴旋转而成, 则类似地, 若可解出  $x = f^{-1}(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ , 则其体积可按公式计算:

$$V = \pi \int_c^d (x(y))^2 dy = \pi \int_c^d (f^{-1}(y))^2 dy$$

若曲线是由参数方程  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , 则旋转体体积可按公式计算:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (y(t))^2 x'(t) dt \text{ (绕 } x \text{ 轴)}; \quad V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x(t))^2 y'(t) dt \text{ (绕 } y \text{ 轴)}$$

**例 11.5.3** 求正弦曲线弧的第一拱  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  与  $x$  轴围成的图形分别绕  $x$  轴和  $y$  轴一周所成的旋转体的体积.



绕  $x$  轴的体积可直接计算为

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi^2}{2} - \left( \frac{\pi}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

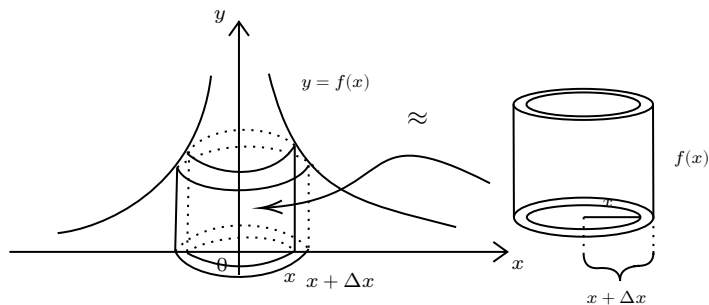
绕  $y$  轴所得体积则不能直接按照公式  $\pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy$  来计算, 这是因为绕  $y$  轴的旋转体是由曲线弧  $AB$  和弧  $BO$  分别绕  $y$  轴所成旋转体的“差”.

弧  $\widehat{OB}$  的方程, 以  $y$  作为自变量, 是:  $x = \arcsin y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ; 弧  $\widehat{AB}$  的方程, 以  $y$  作为自变量, 则是  $x = \pi - \arcsin y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . 故所求体积如下计算:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\pi - \arcsin y)^2 dy - \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 (\pi^2 - 2\pi \arcsin y) dy = \pi^3 - 2\pi^2 \int_0^1 \arcsin y dy \\ &= \pi^3 - 2\pi^2 y \arcsin y \Big|_0^1 + 2\pi^2 \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\pi^2 \end{aligned}$$

显然, 上面计算比较繁琐, 而且有时候是无法通过  $y = f(x)$  反解出  $x$  的表达式的, 从而上面的方法是不适用的. 那么, 能否有直接用对  $x$  的积分来计算关于  $y$  轴旋转体积的方法呢? 答案是肯定的, 只需换个视角做微元.

之前是用垂直于  $y$  轴的“截面堆叠”来计算体积的, 但我们也可将体积看成是位于  $x$  和  $x + \Delta x$  之上的小曲线弧绕  $y$  轴形成的“薄壳”的堆叠所致.



由上图知, 薄壳的体积

$$\begin{aligned}\Delta V &= (\pi(x + \Delta x)^2 - \pi x^2) f(x) + (\pi(x + \Delta x)^2 - \pi x^2) (f(x + \Delta x) - f(x)) \\ &= \pi f(x) (2x\Delta x + (\Delta x)^2) + (2\pi x\Delta x + (\Delta x)^2) (f'(x)\Delta x + o((\Delta x)^2)) \\ &= 2\pi x f(x) \Delta x + o((\Delta x)^2)\end{aligned}$$

故薄壳体积的一阶线性近似为  $\Delta V \approx 2\pi x f(x) \Delta x$ , 即体积的微分为

$$dV = 2\pi x f(x) dx$$

故旋转体体积为

$$V = \int_a^b dV = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

上面计算旋转体的体积通常称为薄壳法.

**注记 11.5.2** 之前计算体积的截面堆叠法可形象第看成是将立体“切片”, 上面的薄壳法则可看成是将立体以“剥洋葱”的方式分解开来.

利用上面的公式, 对例 11.5.3 中正弦曲线绕的第一拱绕  $y$  轴所成体积, 可计算如下:

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi^2$$

**例 11.5.4** 求旋轮线一拱:  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$  分别绕  $x$  轴和绕  $y$  轴旋转一周所得的旋转体的体积.

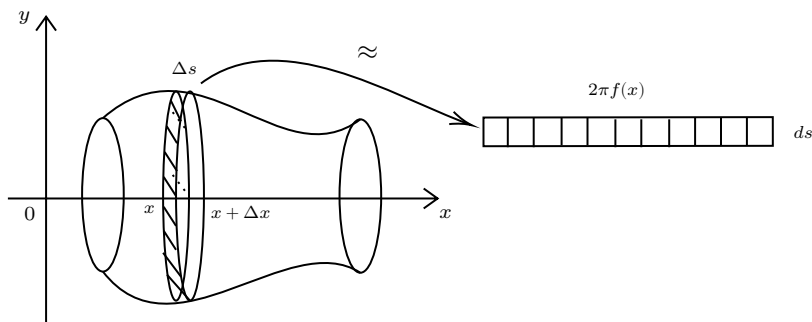
$$\begin{aligned}\text{绕 } x \text{ 轴所得体积为 } V &= \pi \int_0^{2\pi} (y(t))^2 x'(t) dt = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3\end{aligned}$$

对该问题, 绕  $y$  轴所得体积为不能直接按照公式  $V = \pi \int_0^{2\pi} (x(t))^2 y'(t) dt$  来计算. 而且, 不易反解出不同弧段  $x$  关于  $y$  的解析表达. 这时, 采用薄壳法求解是适宜的. 即

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} x(t)y(t)x'(t)dt = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t)a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt \\
&= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - 2t \cos t + t \cos^2 t - \sin t + \sin 2t - \sin t \cos^2 t) dt \\
&= 2\pi a^3 (2\pi^2 - 0 + \pi^2 - 0 - 0 - 0) = 6\pi^3 a^3
\end{aligned}$$

**旋转体侧面积的计算：** 设  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  描述了可求长的曲线，将其沿  $x$  轴旋转所成立体的侧面积可按下图所属求其微元。



微小区间  $[x, x + \Delta x]$  所对应微小旋转面的侧面积  $\Delta S$  可近似为长宽分别为  $2\pi f(x)$ ,  $\Delta s$  的长方形的面积（相当于将旋转侧面带剪开来），而曲线弧长  $\Delta x$  的一阶近似是弧长微分  $ds$ ，从而得到旋转面的面积微元为

$$dS = 2\pi f(x)ds = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

故旋转体的侧面积为

$$S = \int_a^b dS = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

在参数方程下，上公式为  $S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ . 在极坐标下的计算公式为：

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta) \sin \theta \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta$$

**例 11.5.5** 求半径为  $r$  的圆球的表面积. 将球看成是圆的上半部分  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

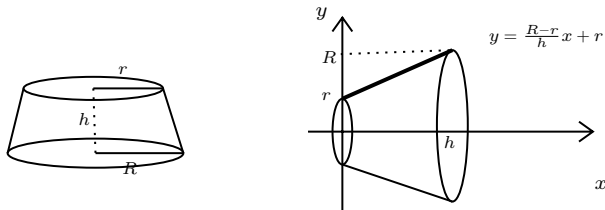
绕  $x$  轴旋转一周所成的旋转体的侧面积, 则按上公式, 得球的表面积为

$$S = 2\pi \int_{-r}^r y \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = 2\pi r \int_{-r}^r \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi r^2$$

**例 11.5.6** 求旋轮线一拱绕  $x$  轴旋转所得旋转体的侧面积.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= 16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{64\pi a^2}{3} \end{aligned}$$

**例 11.5.7** 求底面半径分别为  $r, R$ , 高为  $h$  的圆台的侧面积.



该圆台可看成是对直线  $y = \frac{R-r}{h}x + r, 0 \leq x \leq h$  绕  $x$  轴的旋转体的侧面积, 故所求面积为

$$S = 2\pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r\right) \sqrt{1 + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2} dx = \pi(R+r) \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$$

**注记 11.5.3** 微小区间  $[x, x + \Delta x]$  所对应微小旋转面的侧面积  $\Delta S$  可 (一阶) 近似为底面半径分别为  $f(x), f(x + \Delta x)$ , 高为  $\Delta x$  的圆台的侧面积, 由上例中的公式知

$$\begin{aligned} \Delta S &= \pi(f(x) + f(x + \Delta x)) \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x + \Delta x) - f(x))^2} + o((\Delta x)^2) \\ &= \pi(2f(x) + f'(x)\Delta x + o((\Delta x)^2)) \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x))^2(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2)} + o((\Delta x)^2) \\ &= 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x + o((\Delta x)) \end{aligned}$$

从而得到侧面积微分  $dS = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ . 同时也验证了先前将微小侧面积近似位长方形的合理性.

## 11.6 物理中的一些应用

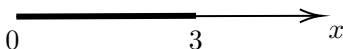
设一物理量  $Q$  分布在一维直线上 (记为  $x$  轴), 故可设该量为  $x$  的函数  $Q(x)$ , 我们将  $Q$  在  $x$  处的密度 (density)  $\rho(x)$  定义为

$$\rho(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q(x + \Delta x) - Q(x)}{\Delta x} = Q'(x)$$

即

$$\underbrace{dQ = \rho(x) dx}_{\text{量 } Q \text{ 之微元}} \Rightarrow \underbrace{Q(b) - Q(a)}_{\text{量 } Q \text{ 之变化}} = \int_a^b dQ = \underbrace{\int_a^b \rho(x) dx}_{\text{对密度之积分}}$$

**例 11.6.1** 如下图将绳子展开为, 则其质量密度函数为  $\rho(x) = xe^{-x} (g/cm)$ , 求其质量.

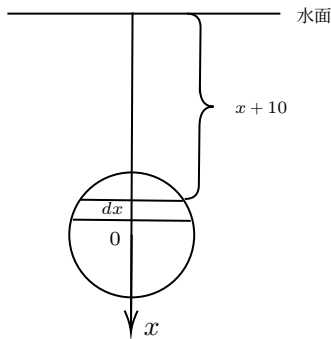


**解:** 绳子质量为  $m = \int_0^3 \rho(x) dx = \int_0^3 xe^{-x} dx = - \int_0^3 x de^{-x}$

$$= \int_0^3 e^{-x} dx - xe^{-x} \Big|_0^3 = -e^{-x} \Big|_0^3 - \frac{3}{e^3} = 1 - \frac{1}{e^3} - \frac{3}{e^3} = 1 - \frac{4}{e^3} (g)$$

万变不离其宗, 微积分应用的本质是通过科学规律, 发现局部的微元表达, 即微分表达 (一阶线性近似), 然后通过积分得到总量; 或探寻不同变量微分之间的关系, 转为求解微分方程.

**例 11.6.2** 求圆心在水上  $10m$ , 半径为  $1m$  的竖直放置的圆形铁片所受的水压力.



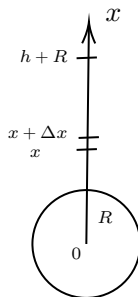
**解:** 如下图建立坐标系, 则铁片在  $x$  处 ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 所受到的水的压强为  $\rho g(10 + x) = g(10 + x)$ , 其中  $\rho = 1g/cm^3$  为水的密度,  $g$  为重力加速度. 贴片的面积

微元是  $dS = 2\sqrt{1-x^2} dx$ , 该面积微元上收到的水压为

$$dF = 2g\sqrt{1-x^2}(10+x) dx$$

从而铁片收到的水压为  $F = \int_{-1}^1 2g\sqrt{1-x^2}(10+x) dx = 196\pi (N)$ .

**例 11.6.3** 设有质量为  $m$  的火箭, 欲将其自底面垂直发射到高度为  $h$  处所需做功为多少? (不计空气阻力, 地球半径设为  $R$ ).



**解:** 按上图, 以地心为坐标原点,  $x$  沿铅直方向向下, 当火箭飞至距地心  $x$  处, 火箭受到的引力为  $F(x) = G\frac{mM}{x^2}$  (其中  $G$  为引力常数,  $M$  为地球质量).

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \implies GmM = mgR^2$$

从而  $F(x) = \frac{mgR^2}{x^2}$ . 在区间段  $[x, x + \Delta x] \subseteq [R, R + h]$  内, 火箭克服引力所做的功可 (线性) 近似为常力  $F(x)$  作用下位移为  $dx = \Delta x$  的做功, 即做功微元为

$$dW = F(x) dx = \frac{mgR^2}{x^2} dx$$

从而将火箭发射到高  $h$  处所需做功为

$$W_h = \int_R^{R+h} dW = \int_R^{R+h} \frac{mgR^2}{x^2} dx = -\frac{mgR^2}{x} \Big|_R^{R+h} = mgR^2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$$

令  $h \rightarrow \infty$ , 得  $W = \lim_{h \rightarrow +\infty} W_h = mgR$ . 此即为使火箭脱离地球引力所需做的功.

假设火箭以初速度  $v_0$  垂直向上发射, 则为了让其脱离地心引力, 须满足:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR \implies v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 6.371 \times 10^6} = 11.2 \times 10^3 m/s$$

此即第二宇宙速度.

**例 11.6.4** 接着上例，我们推到火箭的飞行的微分方程. 火箭是靠燃料燃烧成气体向后喷射获得其动力的. 假设燃料是以常速  $u$  反向喷射出去的.

设  $t$  时刻火箭的质量为  $m(t)$ ，速度为  $v(t)$ ，此时其动量为  $m(t)v(t)$ . 从时刻  $t$  到时刻  $t + \Delta t$ ，喷掉的燃料质量为  $m(t) - m(t + \Delta t)$ ，而喷掉的燃料的速度为  $v(t + \Delta t) - u$ .

从而在  $[t, t + \Delta t]$  内，火箭的动量改变量为  $\Delta p(t) =$

$$(m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) + (m(t) - m(t + \Delta t))(v(t + \Delta t) - u)) - m(t)v(t)$$

$$= m(t)(v(t + \Delta t) - v(t)) + (m(t + \Delta t) - m(t))u \approx m(t)v'(t)\Delta t + um'(t)\Delta t$$

即动量微分为  $dp(t) = m(t)v'(t)dt + um'(t)dt$ . 再由冲量定理，动量的该变量等于力与作用时间的乘积. 当火箭在地球表面垂直向上发射时，火箭所受到的冲力为  $F = -m(t)g$ ，故有

$$dp(t) = m(t)v'(t)dt + um'(t)dt = Fdt = -m(t)gdt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = -g - u \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \\ v(0) = 0, m(0) = m \end{cases}$$

上面即为火箭运动所满足的微分方程. 为求解它，对方程两边对  $t$  从 0 到  $t$  积分：

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dv}{dt} dt &= - \int_0^t g dt - u \int_0^t \frac{m'(t)}{m(t)} dt \\ \Rightarrow v(t) &= u \ln \frac{m}{m(t)} - gt \end{aligned}$$

## 11.7 可分离变量型微分方程的求解

上一小节最后关于火箭飞行的规律探讨中，我们先是得到了微分之间的关系： $dv = -gdt - \frac{u dm}{m}$ ，然后积分得到函数之间的关系. 这是具有普遍性的，即通过积分求解微分方程. 我们再回看第四讲例 11.3.5 中的人口模型，我们得到了  $t$  时刻人口满足的初值问题为：

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda p(t) \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

**之前的求解思路：** 将  $p' = \lambda p$  写成  $\frac{dp}{p} = \lambda dt$ ，并将其看成是对隐函数关系  $f(p) = g(t)$

两边微分的结果, 即  $f'(p)dp = g'(t)dt \iff \frac{dp}{p} = \lambda dt$

所以  $f(p)$  满足方程  $f'(p) = \frac{1}{p}$ ;  $g'(t) = \lambda$ , 不难看出

$$f(p) = \ln p + C_1 \quad g(t) = \lambda t + C_2$$

其中  $C_1, C_2$  是常数, 从而知函数  $p(t)$  由下面的关系确定

$$f(p) = g(t) \iff \ln p + C_1 = \lambda t + C_2$$

$$\ln p = \lambda t + C_2 - C_1 \iff p(t) = \underbrace{e^{C_2 - C_1}}_C e^{\lambda t}$$

将初值条件  $p(0) = p_0$ , 带入得  $p_0 = Ce^0$ , 故得解为  $p(t) = p_0 e^{\lambda t}$ .

但上面的方法显然过于繁琐了, 简单的解法如下:

由  $\frac{dp}{p} = \lambda dt$  得  $\frac{p'}{p} dt = \lambda dt$ , 两边同时对  $t$  求积分

$$\int \frac{dp}{p} = \lambda \int dt \implies \ln |p| = \lambda t + C_1$$

$$\implies p(t) = Ce^{\lambda t}$$

其中  $C_1, C_2$  为任意常数. **注意**, 上面说的两边同时对  $t$  积分的全过程是: 先有关系  $\frac{p'}{p} = \lambda$ , 将其两边看成是  $t$  的函数, 然后两边对  $t$  积分, 便有

$$\int \frac{p'(t)}{p(t)} dt = \int \lambda dt \xLeftrightarrow{\text{凑微分}} \int \frac{dp}{p} = \int \lambda dt$$

所以, 就形式上来看, 相当于对微分关系  $\frac{dp}{p} = \lambda dt$  两边直接积分, 也就是说直接作用以“形式符号”  $\int$  只是左边理解为对变量  $p$  的积分, 右边为对变量  $t$  的积分.

上面的微分方程中有关变量  $x$  和  $p$  的微分可以分离开来, 分别写在等式两边, 从而对两边积分即可求得微分方程的解. 其一般形式是对可分离变量型微分方程的求解.

可分离变量方程具有形式  $\frac{dy}{dx} = \phi(x)\psi(y)$ , 其中  $\phi(x), \psi(y)$  为连续函数, 由此可得

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \phi(x)dx \implies \int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \phi(x)dx + C$$

积出来便可得  $y$  与  $x$  之间的函数关系了.

**注记 11.7.1** 可以看出, 求解微分方程的思路就是对方程积分, 积分一次, 就降阶一次, 降到零次便得到所求函数关系了, 但每积分一次, 便产生一个任意常数. 从而一个  $n$  阶方程  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  的通解中有  $n$  各任意常数需确定, 即须要  $n$  个初值条件:  $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ . (当然, 这里 0 可选任意起点  $x_0$ )

**例 11.7.1** 在第三讲注记 11.3.1 中讨论了修正了的马尔萨斯人口模型, 得到如下逻辑斯蒂人口模型:

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda \left(1 - \frac{p(t)}{p_{max}}\right) p(t) \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

分离变量后两边积分, 可得

$$\int \frac{dp}{\left(1 - \frac{p}{p_{max}}\right) p} = \int \lambda dt \iff \int \frac{dp}{p} - \int \frac{d\left(1 - \frac{p}{p_{max}}\right)}{1 - \frac{p}{p_{max}}} = \lambda t + C_1$$

$$\ln |p| - \ln \left|1 - \frac{p}{p_{max}}\right| = \lambda t + C_1 \implies \frac{p}{1 - \frac{p}{p_{max}}} = C e^{\lambda t} \quad (C = e^{C_1})$$

令  $t = 0$ , 由于  $p(0) = p_0$ , 得到  $C = \frac{p_0}{1 - \frac{p_0}{p_{max}}}$ , 从而解出  $p(t)$  的表达式为

$$p(t) = \frac{p_{max}}{1 + \left(\frac{p_{max}}{p_0} - 1\right) e^{-\lambda t}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} p_{max}$$

**齐次微分方程:** 若方程可表示为  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ , 则称其是齐次的. 对齐次方程, 令  $u = \frac{y}{x}$  (将  $u$  也看成是  $x$  的函数), 则  $y = ux$ , 两边对  $x$  求导, 得  $y' = xu' + u$ . 故可将原方程转化为关于  $u$  的方程:

$$xu' + u = g(u)$$

变成可分离变量的类型, 即可写成:  $\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$ , 两边积分得到  $u$  和  $x$  之间的函数关系, 换回原变量  $y$ , 即得原方程的通解.

**例 11.7.2** 求解方程  $y' = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ . 易见这是齐次方程, 故令  $u = \frac{y}{x}$ , 则方程化为

$$xu' + u = u + \tan u \implies xu' = \tan u$$

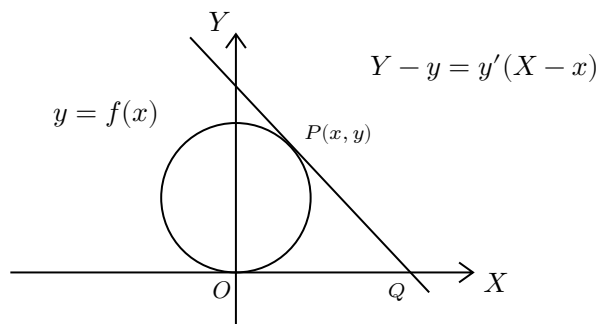
分离变量得  $\frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x}$ , 两边积分  $\int \frac{du}{\tan u} = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C_1$ , 左边的积分可按下计算

$$\int \frac{du}{\tan u} = \int \frac{\cos u du}{\sin u} = \ln |\sin u| + C_2$$

故得  $u$  和  $x$  之间的函数关系为  $\ln |\sin u| = \ln |x| + C_3 = \ln |x| + \ln C = \ln C|x|$ , 从而有

$$|\sin u| = C|x| \implies \sin u = Cx \implies \sin \frac{y}{x} = Cx$$

**例 11.7.3** 求一曲线, 使  $x$  轴上点与这曲线的切线距离等于这点到原点的距离.



**解:** 如上图, 曲线上任意一点  $P(x, y)$  处的切线方程是:  $Y - y = y'(X - x)$ . 切线与  $X$  轴交点  $Q$  的坐标为  $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$ . 根据题意, 切线距离的平方  $\overline{QP}^2 =$

$$= \left[ x - \left( x - \frac{y}{y'} \right) \right]^2 + (y - 0)^2 = \frac{y^2}{y'^2} + y^2$$

由题意  $\overline{QP}^2 = \overline{OQ}^2$ , 即

$$\frac{y^2}{y'^2} + y^2 = \left( x - \frac{y}{y'} \right)^2 \implies y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

右边分子分母都是关于  $x, y$  的二次多项式, 即**齐次**, 故它可写成

$$y' = \frac{\frac{2xy}{x^2}}{\frac{x^2 - y^2}{x^2}} = \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

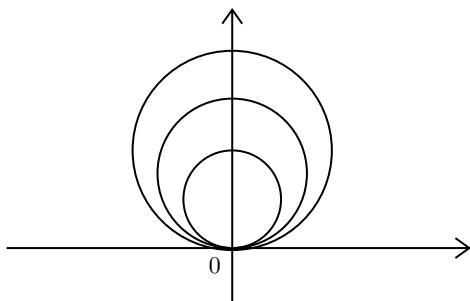
令  $u = \frac{y}{x}$ , 则方程转化为

$$u + xu' = \frac{2u}{1 - u^2} \iff \left( \frac{1}{u} - \frac{2u}{1 + u^2} \right) du = \frac{dx}{x}$$

两边积分, 得  $\ln x - \ln u + \ln(1 + u^2) = \ln C$ , 即  $\frac{x(u^2 + 1)}{u} = C$ , 代回  $u = \frac{y}{x}$ , 有

$$x^2 + y^2 - Cy = 0$$

即所求曲线是过原点与  $x$  轴相切的一族圆.



**注记 11.7.2** 一般来说, 一个二元  $n$  次多项式  $f(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x^i y^j$  称为是齐次的, 如果  $i + j = n$ . 比如  $x^2y + xy^2$  不是齐次的, 但  $x^2y + xy^2$  是齐次的. 设  $f(x, y) = \sum_{i,j}^n a_{ij}x^i y^j$  和  $g(x, y) = \sum_{i,j}^n b_{ij}x^i y^j$  是两个  $n$  次齐次多项式, 则

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\sum_{i,j=0}^n a_{ij}x^i y^j}{\sum_{i,j=0}^n b_{ij}x^i y^j}$$

是齐次函数. 即分子分母同除  $x^n$  (或  $y^n$  也可以), 则可将  $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$  写成  $h(\frac{y}{x})$  的形式, 从而对形如

$$y'(x) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

的微分方程, 可通过变量替换  $u = \frac{y}{x}$  将其化为可分离变量型方程, 从而直接积分可获其通解. 比如

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y + yx^2}{x^3 + y^3} \xrightarrow{u=\frac{y}{x}} u + x \frac{du}{dx} = \frac{2u}{1+u^3} \iff \frac{(1+u^3)du}{u(1-u^3)}$$

$$\int \frac{du}{u(1-u^3)} + \int \frac{u^2 du}{1-u^3} = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C_1 \implies$$

$$\int \frac{du}{u(1-u)(1+u+u^2)} - \frac{1}{3} \ln |1-u^3| = \ln |x| + C_1$$

设  $\frac{1}{u(1-u)(1+u+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u} + \frac{Cu+D}{1+u+u^2}$ , 即

$$1 = A(1-u)(1+u+u^2) + Bu(1+u+u^2) + (Cu+D)u(1-u)$$

令  $u = 0$ , 得  $1 = A$ ; 令  $u = 1$ , 得  $1 = 3B$ , 即  $B = \frac{1}{3}$ . 比较等式两边  $u^3$  的系数,

得  $0 = -A + B - C$ , 得  $C = -\frac{2}{3}$ ; 最后令  $u = -1$ , 得  $1 = 2A - B + 2(C - D)$ , 解得  $D = -\frac{1}{3}$ . 从而

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u(1-u)(1+u+u^2)} &= \int \frac{du}{u} - \frac{1}{3} \int \frac{d(1-u)}{1-u} - \frac{1}{3} \int \frac{d(u^2+u+1)}{u^2+u+1} \\ &= \ln |u(1-u)(1+u+u^2)|\end{aligned}$$

故方程的解为:

$$\underbrace{\ln |u(1-u)(1+u+u^2)| - \frac{1}{3} \ln |1-u^3|}_{\ln \left| \frac{u(1-u)(1+u+u^2)}{(1-u^3)^{\frac{1}{3}}} \right|} = \ln |x| + C_1$$

即  $\frac{u(1-u^3)}{(1-u^3)^{\frac{1}{3}}} = Cx$ , 亦即  $u(1-u^3)^{\frac{2}{3}} = Cx$ , 代回  $y = ux$ , 得原方程的通解为:

$$y(x^3 - y^3)^{\frac{2}{3}} = Cx^3.$$

如果上注记中的  $f, g$  都是一次齐次多项式, 即  $\frac{f}{g} = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}$ , 则

$$y' = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}$$

是齐次方程, 变量替换  $u = \frac{y}{x}$  即可解之. 更一般地, 我们考虑如下方程

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

其中  $c_1, c_2$  不全为零. 下面说明它也可转化为可分离变量型方程.

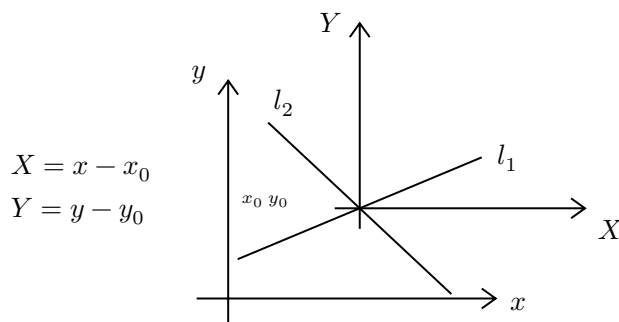
- 如  $(a_1, b_1) = \lambda(a_2, b_2)$ , 即直线  $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$  和直线  $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$  平行. 此时方程为

$$y' = \frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

考虑变量替换:  $u = a_2x + b_2y$ , 则  $du = a_2dx + b_2dy$ , 从而方程变换为

$$a_2 + \frac{du}{dx} = \frac{\lambda u + c_1}{u + c_2} \implies \frac{(u + c_2) du}{(\lambda - a_2)u + c_1 - a_2c_2} = dx$$

- 若  $l_1$  和  $l_2$  不平行, 即两直线相交于一点  $P(x_0, y_0)$ , 则我们对  $x-y$  直角坐标系做一平移, 而在新  $X-Y$  直角坐标系中,  $l_1$  和  $l_2$  将相交于原点, 从而在新坐标中方程将是齐次型的, 便可用分离变量法求解它.



坐标平移为  $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$ , 从而  $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$  和  $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$  可转化为:

$$a_1(X + x_0) + b_1(Y + y_0) + c_1 = 0 \iff a_1X + b_1Y + \underbrace{a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}_{=0} = 0$$

即  $l_1$  的方程在  $X-Y$  坐标系中变成:  $a_1X + b_1Y = 0$ ; 同理  $l_2$  的方程在  $X-Y$  坐标系中变成:  $a_2X + b_2Y = 0$ . 而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

从而原方程转换为  $\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$ . 它是齐次型, 用变量替换  $u = \frac{Y}{X}$  分离变量后直接积分求解.

**注记 11.7.3** 上面的讨论适合更一般的形如  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$  的方程.

**例 11.7.4** 求解  $(x + y - 3)dy = (x - y + 1)dx$ . 即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

作变量替换  $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$ , 则方程转化为  $\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}$ . 令  $Y = Xu$ , 则方程化

为

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{1-u}{1+u} \iff \frac{du}{dX} = \frac{1-2u-u^2}{(1+u)X}$$
$$\implies \ln|u^2 + 2u - 1| = -\ln X^2 + C_1 \iff u^2 + 2u - 1 = C_2 X^{-2}$$

代回变量, 得到原方程通解为  $y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = C$ .

## 11.8 一阶线性微分方程的求解公式

一阶线性微分方程是指如下形式的方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

其中  $P, Q$  都是连续函数; 称  $Q(x)$  为方程的非齐次项或自由项.

特别地, 当  $Q(x) \equiv 0$  时, 称方程式线性齐次微分方程. 线性齐次方程是可分离变量型的, 其求解如下

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \iff \frac{dy}{y} = -P(x)dx$$
$$\implies \int \frac{dy}{y} = \int -P(x)dx \implies \ln|y| = -\int P(x)dx + C_1$$
$$\implies y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

神奇的是, 当  $Q(x)$  不恒为零时,  $y'(x) + P(x)y = Q(x)$  的解具有如下形式

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

也就是说, 将上述解的待定形式代入原方程后  $C(x)$  可以直接积出来, 下验证之.

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

代入  $y'(x) + P(x)y = Q(x)$ , 可得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

即

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \implies \frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

从而  $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + \overline{C}$ , 由此可知原方程具有通解

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + \overline{C} \right)$$

上面的求解方法称为常数变易法, 即把齐次方程解中的任意常数看成(变易为)函数后作为非齐次方程解的待定形式.

上面的通解也可写成如下形式:

$$y = \underbrace{\overline{C}e^{-\int P(x)dx}}_{\text{齐次方程的通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx}_{\text{方程的特解 } y^*}$$

$$\text{这是因为 } y^{*'} = \left( e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right)' = \underbrace{e^{-\int P(x)dx} Q(x)e^{\int P(x)dx}}_{\equiv Q(x)} -$$

$$\underbrace{-P(x)e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx}_{P(x)y^*}$$

**注记 11.8.1** 我们解释一下为什么  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  被称为是一阶线性方程. 记  $D \equiv \frac{d}{dx} + P(x)$ , 它可以看成是一阶可导函数空间  $C^1(\mathbb{R})$  上的一个线性算子

$$D : C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C^1(\mathbb{R})$$

即它满足形式  $D(k_1y_1 + k_2y_2) = k_1D(y_1) + k_2D(y_2)$ ,  $\forall y_i \in C^1(\mathbb{R}), \forall k_i \in \mathbb{R}$ .

故原方程可写成  $Dy = Q$  的形式. 这在形式上非常类似于一个  $n$  阶实方阵  $A$  所诱导的线性算子, 即

$$T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x} \longmapsto T_A(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$$

所以, 微分方程  $Dy = Q$  类似于线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ; 齐次线性微分方程  $Dy = 0$  类似于齐次线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . 由线性方程组的理论可知,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解是它的任一特解  $\mathbf{x}_0$  加上齐次方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的所有解(也称为线性方程组的通解). 类似地, 由上面的讨论可知, 对一阶线性微分方程, 它的通解是其任一特解加上对应齐次微分方程的全体解(通解). 这种相似性不是偶然的, 事实上, 它们的形式结构是完全相同的, 所以抽象出线性空间及线性变换的形式结构是必要的, 也是有极大应用范围的.

我们不加证明地引用下面的基本定理:

**定理 11.8.1** (解的存在唯一性) 若  $P, Q$  在区间  $I$  上连续, 则  $\forall x_0 \in I, \forall y_0 \in \mathbb{R}$ , 存在方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  的满足初始条件  $y(x_0) = y_0$  的唯一解  $y(x)$ .

**定理 11.8.2** (解的结构定理 I) 齐次方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$  的全体解形成了  $\mathbb{R}$  上的一个一维线性空间, 即其线性独立解的个数为 1.

**证明:** 设  $y_1, y_2$  是齐次方程的任意两个解, 则其线性组合  $k_1 y_1 + k_2 y_2$  显然也是齐次方程的解, 由此知齐次方程的全体解是  $\mathbb{R}$  上的一个线性空间。又由上定理知, 存在唯一的满足任意初值条件  $y_0(x_0) = 1$  的解  $y_0(x)$ , 那么, 对齐次方程的任意一解  $y(x)$ , 若  $y(x_0) = C$ , 则显然  $y(x)$  和  $Cy_0(x)$  都是满足相同初值条件的两个解, 故由唯一性知  $y(x) = Cy_0(x)$  (即任意解都是  $y_0$  的线性组合, 换言之, 对齐次方程的任意两解  $y_1, y_2$ , 都  $\exists$  常数  $C$ , 使得  $y_1/y_2 = C$ )。□

**定理 11.8.3** (解的结构定理 II)  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  的全体解可写成如下形式

$$\text{任一特解} + \left\{ \begin{array}{l} \text{对应齐次方程 } \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \\ \text{的全体解} \end{array} \right\}$$

**证明:** 任取一特解  $y_*$ , 即满足  $y_*' + P(x)y_* = Q(x)$ , 另取方程的任一解  $y$ , 即  $y' + P(x)y = Q(x)$ , 两方程相减, 并利用方程的“线性性”, 得  $(y - y_*)' + P(x)(y - y_*) = 0$ , 即知  $y - y_*$  是对应齐次方程  $y' + P(x)y = 0$  的解。取其次方程的任一解  $\tilde{y}$ , 则由定理 11.8.2 知  $\exists$  常数  $C$ , 使得  $y - y_* = C\tilde{y}$ , 即  $y = y_* + C\tilde{y}$ 。□

**注记 11.8.2** 常数变易法表明, 从某种意义上来说, 解一个非齐次线性微分方程  $y' + P(x)y = Q(x)$  的解相当于同时解无穷多个齐次方程  $y' + P(x)y = 0$  的解, 即将  $C$  变动起来! 每个不同的  $C$  对应一个齐次方程的解。下面, 我们将对这种直觉做稍微严格化的说明。

对每个  $t$ , 初值问题:  $\begin{cases} y' + P(x)y = 0 \\ y(t) = Q(t) \end{cases}$  的通解是  $y(x) = Ce^{-\int P(x)dx} \frac{\Gamma(x)=\int P(x)dx}{C e^{-\Gamma(x)}}$ . 将条件  $y(t) = Q(t)$  代入, 得  $C e^{-\Gamma(t)} = Q(t)$ , 从而解得常数  $C = Q(t)e^{\Gamma(t)}$ . 由此可得上初值问题的 (特) 解为  $y_t(x) = Q(t)e^{\Gamma(t)}e^{-\Gamma(x)}$ .

我们期望原方程的解是所有这些初值问题解的“叠加”, 即  $y = \sum_t y_t(x) =$

$$\begin{aligned} &= \int y_t(x)dt = \int Q(t)e^{\Gamma(t)}e^{-\Gamma(x)}dt = e^{-\Gamma(x)} \int Q(t)e^{\Gamma(t)}dt \\ &= e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + \overline{C} \right) \end{aligned}$$

**例 11.8.1** 求解方程  $y' + \frac{y}{x} - \frac{\sin x}{x} = 0$ . 即  $P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = \frac{\sin x}{x}$ . 从而

$$\int P(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

故方程的通解为

$$y = e^{-\ln|x|} \left( \int \frac{\sin x}{x} e^{\ln|x|} dx + C_0 \right) = x^{-1} \left( \int \sin x dx + C \right) = \frac{C - \cos x}{x}$$

**例 11.8.2** 求解  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y^2}$ . 将  $x$  看成  $y$  的函数, 则有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x - y^2}{y} = \frac{2}{y}x - y \iff \frac{dx}{dt} - \frac{2}{y}x = -y$$

即  $P(y) = -\frac{2}{y}, Q(y) = -y$ . 则有  $\int P(y)dy = -\ln y^2$ , 方程的通解为

$$x = e^{\ln y^2} \left( \int (-ye^{-\ln y^2}) dy + C \right) = y^2(C - \ln|y|)$$

- 伯努利方程是可化为一阶线性方程的一类方程, 其形式为

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \alpha \neq 0, 1$$

对伯努利方程, 只要令  $z = y^{1-\alpha}$ , 则  $\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx}$ , 即  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^\alpha}{1-\alpha} \frac{dz}{dx}$  代入原方程, 得到

$$\frac{y^\alpha}{1-\alpha} \frac{dz}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha \iff \frac{y^\alpha}{1-\alpha} \frac{dz}{dx} + P(x)zy^\alpha = Q(x)y^\alpha$$

$$\text{即 } \frac{dz}{dx} + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$$

它是一阶线性方程, 按常数变易法求解即可.

**例 11.8.3** 求解  $y' - 2xy - 2x^3y^2 = 0$ . 这是伯努利方程, 对应的  $\alpha = 2$ , 故可令  $z = y^{-1}$ , 则方程化为如下一阶线性方程  $\frac{dz}{dx} + 2xz = 2x^3$ . 由  $\int 2x dx = x^2$  知方程的通解为

$$z = e^{-x^2} \left( -\int 2x^3 e^{x^2} dx + C \right) = e^{-x^2} (C - x^2 e^{x^2} + e^{x^2})$$

故原方程的通解为  $y = \frac{1}{Ce^{-x^2} - x^2 + 1}$ .

- 对  $y'' = f(x, y')$  型的方程 (不显含  $y$ ), 可令  $y' = u(x)$ , 则  $y'' = u'(x)$ , 从而原方程可转化为  $u'(x) = f(x, u)$ , 这是关于  $u$  的一阶方程, 如能解出  $u$ , 再通过对  $y' = u(x)$  积分可求出  $y(x)$ .

**例 11.8.4** 求解  $xy'' + y' = 4x$ . 令  $y' = u(x)$ , 则原方程化为  $xu' + u = 4x$ , 即

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 4 \implies u(x) = e^{-\ln x} \left( \int 4e^{\ln x} dx + C_1 \right) = \frac{2x^2 + C_1}{x}$$

从而  $y$  满足  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 + C_1}{x} \implies y = x^2 + C_1 \ln |x| + C_2$

- 对  $y'' = f(y, y')$  型方程 (不显含  $x$ ), 可令  $y' = u(y)$  (即设  $y'$  只依赖于  $y$ ), 则

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u(y) \frac{du}{dy}$$

将其代入原方程, 得  $u \frac{du}{dy} = f(y, u)$ , 这是关于  $u$  的一阶方程, 如能解得  $u$ , 再通过积分  $\frac{dy}{dx} = u(y)$  可求出  $y$  来.

**例 11.8.5** 求解  $yy'' + y'^2 = 0$ . 令  $y' = u(y)$ , 则原方程化为  $yu \frac{du}{dy} + u^2 = 0$ , 即

$$y \frac{du}{dy} + u = 0 \quad \text{或} \quad u = 0$$

由第一个方程知  $\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}$ , 两边积分, 得  $\ln |u| = -\ln |y| + C$ , 即  $u = \frac{C_1}{y}$  (注意:  $u = 0$  的情形已经包含在该通解中了). 进一步知  $y$  满足

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y} \implies y^2 = 2C_1x + C_2$$

**注记 11.8.3** 注意到  $yy'' + y'^2 = 0$  即  $(yy')' = 0$ , 故知  $yy' = C_1$ , 而这又等价于  $\frac{1}{2}(y^2)' = C_1$ , 从而知通解为  $y^2 = 2C_1x + C_2$ . 这明显是上方程的更简洁的求解法.

## 12 二阶常系数线性微分方程的求解——线性代数的应用

我们先沿着上节对一阶线性微分方程的处理方式探讨, 在 12.1 小节将以线性微分方程组的形式重新加以处理, 其好处是与线性代数的形式框架更加贴合了。

已对一阶线性微分方程  $y'(x) + P(x)y = Q(x)$  及其解的结构有了充分的了解, 我们知道对应的齐次方程  $y'(x) + P(x)y = 0$  的解的全体是  $\mathbb{R}$  上的一个维数为 1 的线性空间, 故存在解  $\tilde{y}$ , 使得方程的所有解是  $C\tilde{y}$  这样的形式. 此外, 对非齐次方程, 全部解可写成方程的任意特解  $y_*$  加上  $C\tilde{y}$  的形式.

自然地, 我们希望能够处理二阶及更高阶的情形. 首先, 一般二阶的线性微分方程应具有如下形式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

若  $f(x) \equiv 0$ , 则称它是齐次二阶线性微分方程.

同一阶情形, 对应齐次方程的解的全体是一个线性空间, 即, 若  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  都是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的解, 则其任意线性组合  $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  也是方程的解. 由此不难推得: 非齐次方程的任意两解之差都是齐次方程的解, 换言之, 非齐次方程的解都可写成非齐次方程的任一特解加上其次方程的解的全体 (解空间) 的形式, 即

$$\{\text{全体解}\} = y_*(x) + \{y \mid y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\}$$

我们猜测对二阶线性方程, 其解空间的维数为 2, 即存在线性独立的齐次方程的解  $y_1(x), y_2(x)$ , 使得全体解可写为  $y_*(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ , 其中  $y_*(x)$  为非齐次方程的任一特解,  $C_1, C_2$  为任意常数.

**定理** (一般线性方程的解的结构) 考虑  $n$ -阶线性方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

$f(x) \equiv 0$  时称为对应的齐次方程, 则完全类似地, 齐次方程的解的全体是实数域  $\mathbb{R}$  上的线性空间, 其维数为  $n$ , 非齐次方程的解的全体是任意特解加上齐次方程解的全体 (解空间), 即  $\exists$  线性独立的  $n$  个解  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , 使得

$$\{\text{全体解}\} = y_*(x) + C_1y_1(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

其中  $y_*(x)$  为方程的任一特解, 而  $C_1, \dots, C_n$  为任意常数.

**定理** (存在唯一性) 设  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), f(x)$  在区间  $I$  上连续, 则任意初值问题

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n \end{cases}$$

有解且其解唯一.

**结构定理的证明:** 由解的存在唯一性, 下  $n$  个初值问题有唯一解  $y_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \\ y^{(k)}(x_0) = 1, y^{(j)}(x_0) = 0, j \neq k. \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

下证这  $n$  个解  $\{y_0(x), y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)\}$  是线性无关的, 即若  $k_0y_0(x) + k_1y_1(x) + \dots + k_{n-1}y_{n-1}(x) = 0$ , 则必  $k_0 = k_1 = \dots = k_{n-1} = 0$ . 为证此, 对该式两边连续求导  $n-1$  次, 得到如下关于  $k_i$ 's 的方程

$$\begin{cases} k_0y_0(x) + k_1y_1(x) + \dots + k_{n-1}y_{n-1}(x) = 0 \\ k_0y_0'(x) + k_1y_1'(x) + \dots + k_{n-1}y_{n-1}'(x) = 0 \\ \dots \\ k_0y_0^{(n-1)}(x) + k_1y_1^{(n-1)}(x) + \dots + k_{n-1}y_{n-1}^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

上方程组中令  $x = x_0$ , 并代入相关初值条件, 得到  $k_i$ 's 须满足的线性方程组如下:

$$\begin{cases} k_0y_0(x_0) + k_1y_1(x_0) + \dots + k_{n-1}y_{n-1}(x_0) = 0 \\ k_0y_0'(x_0) + k_1y_1'(x_0) + \dots + k_{n-1}y_{n-1}'(x_0) = 0 \\ \dots \\ k_0y_0^{(n-1)}(x_0) + k_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + k_{n-1}y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

即  $k_0 = k_1 = \dots = k_{n-1} = 0$ . 故知  $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$  线性无关. 且若  $y(x)$  是齐次方程的任一解, 设它满足:  $y(x_0) = C_0, y'(x_0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1}$ , 则  $C_0y_0 + C_1y_1 + \dots + C_{n-1}y_{n-1}$  也是满足相同初值条件的齐次方程的解, 由解的唯一性:  $y(x) = C_0y_0(x) + C_1y_1(x) + \dots + C_{n-1}y_{n-1}(x)$ . 故齐次方程的所有解都可由  $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$  线性表示 (称其为齐次方程的一个基础解系). 设  $y_*$  是非齐次方程的任一特解, 则对非齐次方程的任一解  $y$ ,  $y - y_*$  是对应齐次方程的一个解, 故知存在常数  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ ,

使得  $y - y_* = C_0 y_0 + C_1 y_1 + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}$ . 结构定理由此得证.  $\square$

下面再详细讨论  $n = 2$  的情形. 对  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ , 由上定理知, 若  $y_1, y_2$  是对应齐次方程的两个独立解, 则非齐次方程的通解可写为

$$y(x) = y_*(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

其中  $y_*(x)$  是方程的任一特解.

**例:** 对  $y'' + y = 0$ , 不难看出  $\cos x, \sin x$  是方程的两个独立解, 故该齐次方程的通解为  $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . 又考虑非齐次方程  $y'' + y = \tan x$ , 我们只需求其一个特解. 利用常数变易法的思路, 可设特解的形式为  $y_*(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$ , 则

$$y'_*(x) = C'_1 \cos x - C_1(x) \sin x + C'_2(x) \sin x + C_2(x) \cos x$$

为简便起见, 不妨设  $C'_1(x) \cos x + C'_2(x) \sin x = 0$ , 则

$$y'_*(x) = -C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x \implies y''_*(x) = -C'_1(x) \sin x + C'_2(x) \cos x - C_1(x) \cos x - C_2(x) \sin x$$

代入原方程, 化简后得  $-C'_1(x) \sin x + C'_2(x) \cos x = \tan x$ , 联立  $C'_1(x) \cos x + C'_2(x) \sin x = 0$ , 可解得  $C'_1(x) = -\tan x \sin x$ ,  $C'_2(x) = \sin x$ , 从而

$$C_1(x) = \sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + C_1; \quad C_2(x) = -\cos x + C_2$$

令  $C_1 = C_2 = 0$ , 可得一特解为  $y_*(x) = \left( \sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right) \cos x - \cos x \sin x$ , 从而原方程的通解为

$$y(x) = y_*(x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

若已知齐次方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的一个非零解, 则可利用“常数变易法”求得与之相独立的另一解. 即有如下

**刘维尔 (Liouville) 公式:** 设  $y_1(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  的一个非零解, 则下面的  $y_2(x)$  是与  $y_1(x)$  独立的另一解.

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx$$

**证明:** 设  $y_2(x) = C(x)y_1(x)$  满足方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , 则由于  $y'_2 = Cy'_1 + C'y_1$ ,

$y_2'' = Cy_1'' + 2C'y_1' + C''y_1$ , 代入原方程, 得到

$$y_1 C'' + (2y_1' + py_1)C' + \underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{\equiv 0} = 0$$

即  $C$  满足  $\frac{dC'}{dx} = -\frac{2y_1' + py_1}{y_1}C'$ , 可分离变量, 积分得

$$C' = e^{-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+p\right)dx+C} = C_1 y_1^{-2} e^{-\int p dx}$$

令  $C_1 = 1$ , 然后积分可得  $C(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx$ , 从而

$$y_2(x) = C(x)y_1(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx \quad \square$$

**例:** 对  $x^2 y'' + xy' - y = 0$ , 即  $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ .

显然,  $y_1(x) = x$  是其一解, 则由 *Liouville* 公式, 可知下面  $y_2(x)$  是与  $y_1(x)$  独立的另一解

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p dx} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx = -\frac{1}{2x}$$

则知方程的通解为  $y(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x}$ .

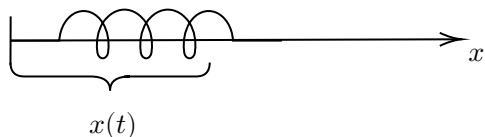
**常系数二阶方程的求解** (以物理问题为启发的探寻:)

若  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  中的  $p(x), q(x)$  分别为常数  $p, q$ , 我们可以用下例来探索其独立解的求法, 一般和全面的讨论将在第 12.2 小节中在更一般框架下进行.

考虑一维弹簧振子的运动, 如下图, 设弹簧的弹力系数为  $k$ , 质量为  $m$ , 且受到的阻力与其运动速度的大小成正比 (比例因子为  $\mu$ ), 则由牛顿第二定理, 知其运动方程为

$$mx'' = -kx - \mu x'$$

其中  $x(t)$  为弹簧偏离其平衡位置的位移.



令  $2\nu := \frac{\mu}{m}$ ,  $\omega^2 := \frac{k}{m}$ , 则上运动方程可写成  $x'' + 2\nu x' + \omega^2 x = 0$ . 下面分类讨论不同阻尼下解的情形.

1. 无阻尼 ( $\nu = 0$ ) 时: 此时方程为  $x'' + \omega^2 x = 0$ , 所描述的运动应是无能量损耗的简谐运动. 故  $x(t)$  应具有  $A \sin \omega t + \psi$  的形式. 事实上, 不难看出  $\cos \omega t$  和  $\sin \omega t$  是方程的两个独立解, 故其通解为

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \phi)$$

其中振幅  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ , 相位  $\phi = \arctan \frac{C_1}{C_2}$ .

2. 有阻尼 ( $\nu > 0$ ) 时, 有分如下两情形:

- (a) 阻尼不太大时 (即  $\nu$  不太大), 可预期运动仍然是振动模式, 只是由于阻尼导致能力有耗损, 故振幅 (衡量能力的大小) 将随时间逐渐减少. 由此, 可设此时解具有如下形式  $x(t) = A\xi(t) \sin(\omega_1 t + \psi)$ , 其中  $\xi(t)$  为振幅衰减因子, 我们须确定其形式. 将  $x(t)$  代入方程  $x'' + 2\nu x' + \omega^2 x = 0$ , 得到

$$\begin{aligned} & A\xi''(t) \sin(\omega_1 t + \psi) + A\xi'(t)\omega_1 \cos(\omega_1 t + \psi) + A\omega_1 \xi'(t) \cos(\omega_1 t + \psi) - \\ & - A\omega_1^2 \xi(t) \sin(\omega_1 t + \psi) + 2\nu A\xi'(t) \sin(\omega_1 t + \psi) + \\ & + 2\nu A\xi(t)\omega_1 \cos(\omega_1 t + \psi) + A\omega^2 \xi(t) \sin(\omega_1 t + \psi) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{即 } [A\xi''(t) + 2\nu A\xi'(t) + A(\omega^2 - \omega_1^2)\xi(t)] \sin(\omega_1 t + \psi) +$$

$$+ 2A\omega_1 (\xi'(t) + \nu\xi(t)) \cos(\omega t + \psi) = 0$$

为求解方便, 不妨令  $\xi'(t) + \nu\xi(t) = 0$ , 得  $\xi(t) = Ce^{-\nu t}$ , 然后代入  $\xi''(t) + 2\nu\xi'(t) + (\omega^2 - \omega_1^2)\xi(t) = 0$ , 得到

$$C\nu^2 e^{-\nu t} - 2\nu^2 C e^{-\nu t} + (\omega^2 - \omega_1^2) C e^{-\nu t} = 0 \implies \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \nu^2}$$

注意该解有意义当且仅当  $\nu < \omega$ , 这便是“小阻尼”的具体量化. 此时对应的振幅衰减因子为  $e^{-\nu t}$ , 即振幅按负指数衰减, 此时运动方程的通解可写成

$$x(t) = Ae^{-\nu t} \sin(\omega_1 t + \phi), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \nu^2}$$

- (b) 阻尼过大 ( $\nu \geq \omega$ ) 时, 运动方程的解又将具有何种形式? 我们预期此时振动将消失, 而成为一般衰减运动. 为确定其形式, 我们先来分析 1 和 2(a) 中解的形式特点, 看能否总结出共同特征来.

- 1 中的解  $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ , 由欧拉公式, 可将其该写为

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + C_2 \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \\ &= \left( \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2i} \right) e^{i\omega t} + \left( \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2i} \right) e^{-i\omega t} = \tilde{C}_1 e^{i\omega t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

即此时, 方程有独立解组  $\{e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}\}$  ( $\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$  为其线性组合, 给出了另一基本解组, 相当于解空间的一个基变换).

- 2 a) 中的解可写成  $x(t) = C_1 e^{-\nu t} \cos \omega_1 t + C_2 e^{-\nu t} \sin \omega_1 t =$

$$= \tilde{C}_1 e^{(-\nu+i\omega_1)t} + \tilde{C}_2 e^{(-\nu-i\omega_1)t}$$

即此时, 方程有独立解组  $\{e^{(-\nu+i\omega_1)t}, e^{(-\nu-i\omega_1)t}\}$  ( $\{e^{-\nu t} \cos \omega_1 t, e^{-\nu t} \sin \omega_1 t\}$  为其线性组合, 给出了另一基本解组, 相当于解空间的一个基变换).

由上分析, 我们发现方程的解应具有  $e^{rt}$  (其中  $r$  为一般复数) 的形式. 我们探讨  $r$  满足的条件, 将  $e^{rt}$  代入  $x'' + 2\nu x' + \omega^2 x = 0$ , 得

$$r^2 e^{rt} + 2\nu r e^{rt} + \omega^2 e^{rt} = 0 \implies \underbrace{r^2 + 2\nu r + \omega^2 = 0}_{\text{特征方程}}$$

即若  $e^{rt}$  是方程的解, 则  $r$  必须满足上特征方程. 以此为视角, 则有

- 1 中  $\nu = 0$  时, 特征方程为  $r^2 + \omega^2 = 0$ , 特征根为  $r = \pm \omega i$ , 故此时基本解组为  $\{e^{\omega i t}, e^{-\omega i t}\}$ .
- 2 中  $\nu > 0$  时的特征方程为  $r^2 + 2\nu r + \omega^2 = 0$ . 2 a) 的情形, 即  $0 < \nu < \omega$  时, 特征方程有一对共轭复根  $r = -\nu \pm i\omega_1$  ( $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \nu^2}$ ), 此时基本解组为  $\{e^{(-\nu+i\omega_1)t}, e^{(-\nu-i\omega_1)t}\}$ .

受此启发, 我们可寻找到强阻尼  $\nu \geq \omega$  时解的形式.

- $\nu > \omega$  时, 特征方程有根  $r = -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \omega^2}$ . 记  $\nu_1 = \nu - \sqrt{\nu^2 - \omega^2}$ ,  $\nu_2 = \nu + \sqrt{\nu^2 - \omega^2}$ , 显然  $\nu_1, \nu_2 > 0$ , 且此时  $\{e^{-\nu_1 t}, e^{-\nu_2 t}\}$  为基本解组, 故通解为  $x(t) = C_1 e^{-\nu_1 t} + C_2 e^{-\nu_2 t}$ . 这是指数衰减运动的叠加.
- $\nu = \omega$  (临界情形), 此时特征方程为  $r^2 + \nu^2 = 0$ , 它有 (二重) 特征根  $-\nu$ , 则方程有一独立解  $x_1(t) = e^{-\nu t}$ , 下用 Liouville 公式推出与之独立的另一解

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{1}{x_1(t)^2} e^{-\int 2\nu dt} dt = e^{-\nu t} \int \frac{e^{-2\nu t}}{e^{-2\nu t}} dt = t e^{-\nu t}$$

故此时方程有基本解组  $\{e^{-\nu t}, te^{-\nu t}\}$ , 其通解可写为

$$x(t) = C_1 e^{-\nu t} + C_2 t e^{-\nu t} = e^{-\nu t} (C_1 + C_2 t)$$

这也是衰减解, 但其衰减速度不及  $2(b-i)$  中的解的衰减速度.

**总结:** 对二阶常系数齐次线性微分方程  $y'' + py' + qy = 0$ , 其特征方程为  $r^2 + pr + q = 0$ .

1. 特征方程有相异实根  $r_1, r_2$ , 则方程的通解为  $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ ;
2. 特征方程有相同实根  $r$  (二重根), 则方程的通解为  $y(x) = e^{rx} (C_1 + C_2 x)$ ;
3. 特征方程有一对共轭复根  $r = \alpha \pm i\beta$ , 则方程的通解为  $y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

## 12.1 一般线性微分方程 (组) 的理论导引

对一般的  $n$ -阶线性方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (\Delta)$$

令  $y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)}$ , 则一般  $n$ -阶线性方程可写为如下线性微分方程组的形式.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \cdots \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\ \frac{dy_n}{dx} = -p_n(x)y_1 - p_{n-1}(x)y_2 - \cdots - p_1(x)y_n + f \end{cases} \quad (\Delta')$$

令  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ , 则上线性方程组可写为如下矩阵形式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & -p_{n-2}(x) & \cdots & -p_1(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(x)} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(x)}$$

它是下面一般 $n$  阶线性微分方程组的特例:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x) \iff \frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (*)$$

其中  $\mathbf{A}(x) = [a_{ij}(x)]_{n \times n}$  为系数函数矩阵, 且  $a_{ij}(x)$ ,  $f_i(x)$  都在定义区间  $(a, b)$  上是连续的. 若  $\mathbf{f}(x)$  在定义区间上不恒为零, 则称上方程组为非齐次线性微分方程组, 否则称为齐次线性微分方程组. 下面的定理是我们讨论的基石 (其证明省去).

**定理 12.1.1** 线性微分方程组  $(*)$  满足初值条件  $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$  的解  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$  在给定区间  $(a, b)$  上是存在且唯一的, 其初值  $\mathbf{x}_0 \in (a, b)$  和  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  是任意给定的.

**定理 12.1.2** 记  $\mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)}$  为  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$  的在  $(a, b)$  上的全体解形成的  $\mathbb{R}$  上的线性空间, 则  $\dim \mathcal{S} = n$ , 即  $\mathcal{S} \cong \mathbb{R}^n$ .

也就是说, 存在  $n$  个线性无关 (独立) 的解  $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$ , 使得

$$\mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)} = \text{span}\{\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)\}$$

即  $\mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)}$  中的所有解都能表示成  $C_1\mathbf{y}_1 + \dots + C_n\mathbf{y}_n$  的形式. 其中  $C_i$  为任意常数.

这样的一组解  $\{\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)\}$  称为方程基础解组. 称其“基础”是因为非齐次方程的解可写成任一特解  $\mathbf{y}_0$  和  $\mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)}$  的和.

**注记 12.1.1** 区间  $a < x < b$  上的函数向量  $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$  称为线性相关 (*linearly dependent*) 的, 如存在不全为零的常数  $c_1, \dots, c_n$  使得

$$c_1\mathbf{y}_1(x) + \dots + c_n\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{0}, \quad \forall x \in (a, b)$$

成立; 否则称它们是线性无关 (*linearly independent*) 的. 注意, 右边的“零”理解为区间  $a < x < b$  上的零函数.

**定理 12.1.3** 对于一般齐次方程组  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} + \mathbf{A}(x)\mathbf{y} = \mathbf{0}$  其中  $\mathbf{A}(x) = [a_{ij}(x)]_{1 \leq i, j \leq n}$  且  $a_{ij}(x)$  为区间  $a < x < b$  上的连续实函数. 对于上方程的  $n$  个不同的解

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}_2(x) = \begin{bmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{bmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{y}_n(x) = \begin{bmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

它们线性相关, 即存在不全为零的常数  $c_1, \dots, c_n$  使得  $c_1\mathbf{y}_1(x) + \dots + c_n\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{0}$ ,

当且仅当其朗斯基行列式 (*Wronsky*)

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

反之, 若在定义区间上, 朗斯基行列式不恒为零, 则相应函数是线性无关的.  $\square$

**证明:** 固定任一  $x \in (a, b)$ , 则线性关系  $c_1 \mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n \mathbf{y}_n(x) = \mathbf{0}$  就是通常  $\mathbb{R}^n$  中  $n$  个向量之间的线性关系, 它们线性相关, 当且仅当存在不全为零的数  $c_i$  使得上式成立, 而这又等价于其系数行列式为零. 故如果对任一固定  $x \in (a, b)$ , 系数行列式 (即 *Wronsky*) 为零, 则这些函数向量也是线性相关的. 反之, 若 *Wronsky* 不恒为零, 则函数向量必线性无关.

特别地, 对方程  $(\Delta')$ , 若  $y_1(x), \cdots, y_n(x)$  是原方程

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

的  $n$  个解, 则其 *Wronsky* 行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{(n-1)}(x) & y_{(n-1)}(x) & \cdots & y_{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

**定理 12.1.2 的证明:** 由定理 12.1.1, 存在唯一的满足如下初始条件的解  $\mathbf{y}(x) = [y_1(x), \cdots, y_n(x)]^T$ .

$$\mathbf{y}_1(x_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}_2(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \mathbf{y}_n(x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_0 \in (a, b)$$

而这  $n$  个解的朗斯基行列式  $W(x_0) = 1$ , 故根据定理 12.1.3, 解  $y_1(x), \cdots, y_n(x)$  是线性无关的. 从而解空间  $\mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)}$  的维度至少是  $n$ . 下面证明其维度至多是  $n$ , 从而解空间的维度是  $n$ . 为此, 我们只需表明: 任意解都可以写成上述解的线性组合, 即对满足方程的任意一个解  $\mathbf{y}(x)$ , 存在常数  $c_1, \cdots, c_n$  使得  $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n \mathbf{y}_n(x)$ . 这是因

为：如果  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ （常值向量），则显然存在唯一常数  $c_1, \dots, c_n$  满足

$$c_1 \mathbf{y}_1(x_0) + \dots + c_n \mathbf{y}_n(x_0) = \mathbf{y}_0$$

这表明， $\mathbf{y}(x)$  和  $c_1 \mathbf{y}_1(x) + \dots + c_n \mathbf{y}_n(x)$  都是满足初始条件  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$  的解，根据解的唯一性，知必有： $\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{y}_1(x) + \dots + c_n \mathbf{y}_n(x)$ . 定理得证.  $\square$

下面给出上定理的另一种证明，从中体现出代数中非常重要的**同构** (*isomorphism*) 概念. 这里的同构是指两个线性空间之间保持其线性结构的一一对应映射.

**定理 12.1.2 的另证：**固定  $x_0 \in (a, b)$ ，由常微分方程的存在唯一性定理，对任意常值向量  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ ，必存在满足  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$  的唯一解  $\mathbf{y}(x)$ . 由此，我们可构造如下映射：

$$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)} \quad \mathbf{y}_0 \longmapsto J(\mathbf{y}_0) := \mathbf{y}(x)$$

我们先证明  $J$  是一个双射 (bijection)，即既单 (injective) 又满 (surjective) 的映射. 这里的单射指的是不能存在  $\mathbb{R}^n$  中两个不同的向量在  $J$  下映为  $\mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)}$  中的同一个向量. 用反证法，假如存在  $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$  使得  $J(\mathbf{y}_1) = J(\mathbf{y}_2)$ ，则有  $J(\mathbf{y}_1)(x_0) = \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = J(\mathbf{y}_2)(x_0)$ . 这个矛盾表明  $J$  是单射.  $J$  的满射则是显然的，这是因为对任一解  $\mathbf{y}(x)$ ，若  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ ，则  $J(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}(x)$ . 我们接着说明  $J$  不单单是一个空间  $\mathbb{R}^n$  和  $\mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)}$  之间的一个一一对应，同时它还保持了两空间上的线性（空间）结构，即它将  $\mathbb{R}^n$  中的线性组合 (*linear combination*) 映为  $\mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)}$  中的线性组合. 亦即， $J$  是一个从  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)}$  的线性变换 (*linear transformation*)，结合  $J$  的双射性，我们称  $J$  是一个线性同构 (*linear isomorphism*)，简称同构. 言归正传，我们要证明下式：

$$J(c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2) = c_1 J(\mathbf{y}_1) + c_2 J(\mathbf{y}_2) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$$

翻译过来，上式就是说：满足初始条件  $\mathbf{y}(x_0) = c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2$  的唯一解等于唯一的解  $c_1 J(\mathbf{y}_1) + c_2 J(\mathbf{y}_2)$ . 这是因为，首先三个解  $J(c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2)$ ,  $J(\mathbf{y}_1)$ ,  $J(\mathbf{y}_2)$  都是存在的，再注意到

$$J(c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2)(x_0) = c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2 = [c_1 J(\mathbf{y}_1) + c_2 J(\mathbf{y}_2)](x_0)$$

从而根据解的唯一性定理得到上面等式的成立. 不难想象：相互同构的空间具有相同的维数，由此即知  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_{\mathbf{A}(x)} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$ .  $\square$

综合起来，就得到了一般  $n$  阶线性微分方程组的结构特征，进而也就知道一般  $n$  阶线性微分方程的结构特征了. 我们在下节中讨论其中最简但的类型——二阶常系数微分方程的解的结构. 常系数即  $\mathbf{A}(x)$  是个常数矩阵，或方程  $(\Delta)$  中  $p_i(x)$  都是常数. 即

考察如下形式的方程的解 (其中  $p_i, i = 1, \dots, n$  都是常数)

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \quad (\Delta'')$$

最后我们证明 *Wronsky* 行列式满足的微分方程. 利用行列式的性质, 有

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{dy_{i1}}{dx} & \frac{dy_{i2}}{dx} & \cdots & \frac{dy_{in}}{dx} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{ij} y_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{ij} y_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \cdot W = \text{tr}(\mathbf{A}(x)) \cdot W \end{aligned}$$

即得到如下著名的刘维尔 (*Liouville*) 公式

$$\frac{dW}{dx} = \text{tr}(\mathbf{A}(x)) W \quad \Rightarrow \quad W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{tr}(\mathbf{A}(x)) dx} \quad (a < x < b)$$

## 12.2 二阶常系数常微分方程

我们考虑最简单的二阶线性微分方程，即二阶常系数线性微分方程，其一般形式是

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

其对应的齐次方程为  $y'' + py' + qy = 0$ . 将上方程写成方程组形式就是

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + f(x)$$

其中  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$  ( $y_1 = y, y_2 = y'$ ), 系数矩阵为  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix}$

我们先探索对应齐次方程的解, 即  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  的解.

回忆对一阶方程  $\frac{dy}{dx} = ay$ , 其解为  $y = Ce^{ax}$ . 那么类比之下, 我们是否可猜测上面二阶线性方程 (组) 的解具有如下形式呢?

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}e^{x\mathbf{A}}$$

当然, 先得明确这里矩阵的指数函数  $e^{x\mathbf{A}}$  是如何定义的. 自然的想法是利用  $e^x$  的泰勒展开形式地加以定义, 即对于矩阵  $\mathbf{A}$  (这里可以是任意  $n$  阶方阵), 我们定义

$$e^{\mathbf{A}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \mathbb{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} + \cdots$$

其中  $\mathbb{I}$  是  $n$  阶单位矩阵. 当  $\mathbf{A}$  是一阶矩阵 (即数) 时,  $e^{\mathbf{A}}$  就是通常的指数函数.

不难验证: 若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  可交换, 即  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , 则  $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$ . 而且  $e^{\mathbf{A}}$  总是可逆的,  $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$ . 应用中比较重要的是下面的性质:

若  $\mathbf{P}$  是  $n$ -阶可逆 (非奇异) 方阵, 则成立

$$e^{\mathbf{PAP}^{-1}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1}$$

这是因为  $e^{\mathbf{PAP}^{-1}} = \mathbb{I} + \mathbf{PAP}^{-1} + \frac{1}{2!}(\mathbf{PAP}^{-1})^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(\mathbf{PAP}^{-1})^k + \cdots$

$$= \mathbf{P}\mathbb{I}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PAP}^{-1} + \frac{1}{2!}\mathbf{PA}^2\mathbf{P}^{-1} + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{PA}^k\mathbf{P}^{-1} + \cdots$$

$$= \mathbf{P} \left( \mathbb{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} + \cdots \right) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1} \quad \square$$

**定理 12.2.1**  $e^{x\mathbf{A}}$  是常系数齐次微分方程组  $\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  的一个基础解 (矩阵), 即齐次方程组的所有解是  $\mathbf{y} = \mathbf{C}e^{x\mathbf{A}}$ . 且它满足  $e^{0\mathbf{A}} = \mathbb{I}$ .

**证明:** 在自变量  $x$  的任意有限区间上,  $e^{x\mathbf{A}}$  是一致收敛的, 故可逐次微分得到

$$\begin{aligned}\frac{de^{x\mathbf{A}}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \mathbb{I} + x\mathbf{A} + \frac{x^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \cdots + \frac{x^k}{k!}\mathbf{A}^k + \cdots \right) \\ &= \mathbf{A} + x\mathbf{A}^2 + \frac{x^2}{2!}\mathbf{A}^3 + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\mathbf{A}^k + \cdots \\ &= \mathbf{A} \left( \mathbb{I} + x\mathbf{A} + \frac{x^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \cdots + \frac{x^k}{k!}\mathbf{A}^k + \cdots \right) = \mathbf{A}e^{x\mathbf{A}}\end{aligned}$$

故  $e^{x\mathbf{A}}$  满足微分方程组, 由于当  $x = 0$  时,  $e^{x\mathbf{A}} = \mathbb{I}$ , 其 *Wronsky* 行列式为  $\det(e^{0\mathbf{A}}) = \det(\mathbb{I}) = 1$ , 故知该解是个基础解.  $\square$

回到我们二阶的例子  $\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ , 其中  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix}$ , 我们知道其解为  $\mathbf{C}e^{x\mathbf{A}}$ .

下面我们对它分类.

**思路:** 只需求出  $\mathbf{A}$  的相似标准型, 即对  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  进行分类: 找到恰当的  $\mathbf{P}$ , 使得  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  的形式越简单越好 (越多的零), 从而方便对其求指数幂.

**注记 12.2.1**  $\mathbf{A}$  的相似标准型问题的几何解释是: 将  $\mathbf{A}$  看成是作用于  $\mathbb{R}^2$  上的线性算子在标准基  $\{\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^T; \mathbf{e}_2 = [0 \ 1]^T\}$  下的矩阵表示, 则需找到  $\mathbb{R}^2$  上的一组新基  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ , 使得在新基下算子  $A$  的作用可写得比较简单——比如写成对角矩阵  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  的形式. 此时, 令  $[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2]\mathbf{P}$ , 其中可逆矩阵  $\mathbf{P}$  是从基  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  到标准基  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  的基变换矩阵. 故有

$$\mathbf{A}[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2]\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2]\mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

但  $\mathbf{A}[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2] = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2]\mathbf{A}$  (即  $A$  作用在  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  上的矩阵表示就是  $A$  自身), 故

$$[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2]\mathbf{A}\mathbf{P} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2]\mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

即  $\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$ . 此时  $\lambda_1, \lambda_2$  满足特征方程  $\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2 \end{cases}$  故  $\lambda_i$  是

$A$  的特征值，它是下面特征多项式的根

$$\det(\lambda \mathbb{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ q & \lambda + p \end{vmatrix} = \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

则对可对角的矩阵  $\mathbf{A}$ ，即  $\exists \mathbf{P}$ ，使得  $\mathbf{A} = \mathbf{P} \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \mathbf{P}^{-1}$ ，那么

$$e^{x\mathbf{A}} = \mathbf{P} e^{x \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)} \mathbf{P}^{-1} \iff e^{x\mathbf{A}} \mathbf{P} = \mathbf{P} e^{x \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)}$$

此时由于  $e^{x\mathbf{A}}$  是基础解矩阵，而  $\mathbf{P}$  是可逆的，故乘积  $e^{x\mathbf{A}} \mathbf{P}$  也是基础解矩阵（因乘可逆矩阵不改变解的线性无关性）。从而  $\mathbf{P} e^{x \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)}$  是个基础解。且

$$e^{x \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)} = \mathbb{I} + x \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^2 + \cdots = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix}$$

设  $\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2]$ （其中  $\mathbf{u}_i$  为  $\lambda_i$  对应的特征向量），则知解矩阵为

$$\mathbf{P} e^{x \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix} = [e^{\lambda_1 x} \mathbf{u}_1 \ e^{\lambda_2 x} \mathbf{u}_2]$$

该矩阵的第一行就是  $y'' + py' + q = 0$  的两个线性无关的解。令

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{P} e^{x \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)} = \begin{bmatrix} u_{11} e^{\lambda_1 x} & u_{21} e^{\lambda_2 x} \\ u_{12} e^{\lambda_1 x} & u_{22} e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$$

故知  $u_{11}$  和  $u_{21}$  都非零（否则某列全为零，与基础解矛盾了）。故在这种情形下，齐次方程的解可写成

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

的形式。故在实际计算中，无需求特征值对应的特征向量。

上面是  $\mathbf{A}$  可对角化的情形，需强调，此时特征值  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  必是互异的，否则二阶矩阵  $\mathbf{A}$  不可对角化，原因何在？

我们知道一矩阵可对角化当且仅当其每个特征值的代数重数（即特征值作为特征多项式解的重数）等于其几何重数（即对应特征子空间—— $(\lambda \mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解空间）的维数（即线性无关解的个数）。

那么, 对二阶矩阵  $\mathbf{A}$ , 如果  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 即  $\lambda_1 = \lambda$  是个二重特征根, 则此时若  $\mathbf{A}$  可对角化, 则  $(\lambda \mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解空间须是 2 维的, 但若二阶方阵的解空间是二维 (即解有两个自由参数), 则其秩须是 0, 即  $\mathbf{A} = \lambda \mathbb{I}$ . 但此时, 方程  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  可写为

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} \iff \begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y''(x) = y'(x) \end{cases}$$

即方程本质上退化为一阶线性方程的, 故不符合要求. 所以, 当特征根是二重根的时候,  $\mathbf{A}$  除了相似于上对角阵外, 尚有一种相似标准型——它对应的方程是二阶方程. 那么它的形式又是如何的呢?

除了从代数角度回答该问题外, 我们从求解方程本身的思路分析起. 当  $\lambda$  为二重特征根时,  $e^{\lambda x}$  显然就是方程的一个解, 我们只需求出一个与之独立 (线性无关) 的解, 然后由此反推出  $\mathbf{A}$  此时的相似标准型即可.

我们先尝试使用常数变易法, 假设  $C(x)e^{\lambda x}$  是  $y'' + py' + qy = 0$  的解, 则有

$$(C'(x)e^{\lambda x} + \lambda C(x)e^{\lambda x})' + p(C'(x)e^{\lambda x} + \lambda C(x)e^{\lambda x}) + qC(x)e^{\lambda x} = 0$$

$$\text{即 } C''(x)e^{\lambda x} + \lambda C'(x)e^{\lambda x} + \lambda C'(x)e^{\lambda x} + \lambda^2 C(x)e^{\lambda x} +$$

$$+ pC'(x)e^{\lambda x} + p\lambda C(x)e^{\lambda x} + qC(x)e^{\lambda x} = 0 \xrightarrow{e^{\lambda x} \text{ 是解}}$$

$$C''(x) + (2\lambda + p)C'(x) = 0$$

$$\frac{dC'}{C'} = -(2\lambda + p)dx \implies C' = C_1 e^{-\int (2\lambda + p)dx} \xrightarrow{\text{取 } C_1 = 1 \text{ 后再积分}}$$

$$C(x) = \int e^{-\int (2\lambda + p)dx} dx \xrightarrow[\text{故 } \lambda = -\frac{p}{2}]{\lambda \text{ 为 } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \text{ 的重根}} C(x) = \int e^0 dx = x$$

从而知方程的另一解为  $C(x)e^{\lambda x} = xe^{\lambda x}$ , 它显然和  $e^{\lambda x}$  是线性独立的, 故知当  $\lambda$  为重根时,  $y'' + py' + qy = 0$  的两个线性无关的解为  $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ , 即它们是方程解空间的一组基, 从而齐次方程的解可写为  $C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$  的形式.

**注记 12.2.2** 得出上解  $xe^{\lambda x}$  的另一方法是利用刘维尔 (Liouville) 公式. 设另一解为  $y(x)$ , 则有

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & y \\ \lambda e^{\lambda x} & y' \end{vmatrix} = C e^{-\int p dx} \iff e^{\lambda x} y' - \lambda e^{\lambda x} y = C e^{-\int p dx}$$

两边同乘因子  $\frac{1}{(e^{\lambda x})^2}$ , 得

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{e^{\lambda x}} \right) = \frac{C}{e^{2\lambda x}} e^{-\int p dx} \stackrel{\lambda = -\frac{p}{2}}{=} C$$

即  $ye^{-\lambda x} = Cx$ , 取  $C = 1$ , 即得另一线性无关解  $y(x) = xe^{\lambda x}$ .

这种方法对一般二阶线性微分方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  也是适用的, 读者不难得到, 若  $y_1(x)$  为其一解, 则与之线性无关的另一解  $y_2(x)$  可由下方程给出

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right) = \frac{C}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x) dx}$$

由此可得该齐次方程的通解为

$$y = y_1(x) \left( C_1 + C_2 \int_{x_0}^x \frac{1}{y_1^2(s)} e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds \right)$$

其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

我们现在通过解  $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$  倒推当  $\mathbf{A}$  有重特征根时, 其相似标准型的形状. 设  $\exists \mathbf{P}$  使得  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ , 则  $e^{x\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{x\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1}$ , 即  $e^{x\mathbf{A}}\mathbf{P} = \mathbf{P}e^{x\mathbf{J}}$

不难推知, 要使一切协调, 则需  $e^{x\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} \end{bmatrix}$ , 而此时  $\mathbf{J}$  应该是之前可对角情形时对角矩阵形式  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$  的一个“扰动”(用更小秩的矩阵, 类似于泰勒展开中用更高阶量作“扰动”). 根据所需  $e^{x\mathbf{J}}$  的形式, 猜测

$$\mathbf{J} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

由于  $I$  和  $Z$  交换, 故  $e^{x\mathbf{J}} = e^{x(I+N)} = e^{xI} \cdot e^{xN}$ . 但因

$$e^{xI} = \begin{bmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda x} \end{bmatrix}; \quad e^{xN} = \mathbb{I} + xN = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而

$$e^{x\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x} \end{bmatrix}$$

完美符合预期！亦可由此得到代数结论：当二阶方阵  $\mathbf{A}$  有重特征根  $\lambda$  时，则存在可逆  $\mathbf{P}$ ，使得  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ 。

**代数解释：**考察  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  解空间的维数，若维数为 2，则  $\mathbf{A} = \lambda\mathbb{I}$ ，即  $\mathbf{A}$  本身就是对角矩阵；解空间的维数也不可能为 0，否则矩阵  $\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}$  可逆，从而  $\lambda$  不是特征值，故只剩下解空间维数为 1 的可能了。此时特征值的几何重数 1 严格小于其代数重数 2，故  $\mathbf{A}$  是不可对角化的。但可利用对角化的思路（即寻找恰当的基）来找出  $\mathbf{A}$  的相似标准型，即约当（Jordan）标准型。

上面解空间（特征子空间）可看成是线性算子  $\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}$  的“核”空间，即

$$\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

则与之互补的向量应该位于该算子“像”空间里头，像空间的定义如下

$$\text{Im}(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{y} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$$

问题是， $\mathbb{R}^2$  中必须有不属于  $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})$  中的向量才行（否则象空间为零了）。注意到（显然的）空间包含关系： $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}) \subseteq \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})^2$ ，则由于核空间的维数为 1，则  $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})^2$  的维数必为 2，即所有向量都被算子  $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})^2$  “消灭”（被作用后为零）。那么，我们任选一非零  $\mathbf{x}_0 \in \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})^2$ ，但  $\mathbf{x}_0 \notin \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})$ ，即

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})^2\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{但 } (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$$

则令  $\mathbf{x}_1 := (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x}_0 \in \text{Im}(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})$ ，它必与  $\mathbf{x}_0$  线性无关（为什么？），故  $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\}$  是  $\mathbb{R}^2$  的一组基，我们考察在该基下线性算子  $\mathbf{A}$  的矩阵表示，即与  $\mathbf{A}$  相似的矩阵。

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = (\lambda\mathbb{I} + \mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x}_0 = \lambda\mathbf{x}_0 + (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x}_0 = \lambda\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_0 + (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1 + \mathbf{0} = \lambda\mathbf{x}_1 \end{cases} \implies$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{令 } \mathbf{P}=[\mathbf{x}_0 \ \mathbf{x}_1]^T} \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

最后还要处理一种情形，即方程  $y'' + py' + qy = 0$  的特征方程有共轭复根（只要有复根，复根必以共轭复根对的形式出现）： $\alpha \pm i\beta$ ，此时，方程有两个线性无关的解

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad e^{(\alpha-i\beta)x}$$

但我们需要实函数作为解，故须从上两解的线性组合中选出独立的两个实解出来。这是不难做到的，根据著名的欧拉公式：
$$\begin{cases} e^{(\alpha+i\beta)} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ e^{(\alpha-i\beta)} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{cases}$$
 两式相加减分离出实部和虚部： $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$ 。

它们显然也是线性无关的，从而知此时，齐次方程的通解为

$$C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

总结以上讨论，我们得到二阶线性齐次常系数微分方程的分类及其通解。

对方程  $y'' + py' + qy = 0$ ，其特征方程为  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ ，则根据特征方程的根的情况，有如下分类：

特征值	通解形式
相异实根 $\lambda_1, \lambda_2$	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
二重根 $\lambda$	$C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$
共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	$C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

**非齐次方程的特解确定：**接着我们考察一般的非齐次方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

我们知道它的通解是其任一“**特解**” + 对应齐次方程的全体解（空间）。所以，关键在于如何确定出一个特解出来。

求特解的一般途径是常数变易法，即在对应齐次方程的通解  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  中，将  $y_1(x), y_2(x)$  前的常数变易为函数  $C_1(x), C_2(x)$ ，并假设特解具有这种形式，则

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)$$

为简化处理，不妨设  $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$ （请读者思考下，为什么该假设是合理的？），即假设

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

则

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x)$$

将  $y, y', y''$  的上表达式代入  $y'' + py' + qy = f(x)$ , 得

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p C_1 y_1' + p C_2 y_2' + q C_1 y_1 + q C_2 y_2 = f$$

因为  $y_1$  和  $y_2$  都是齐次方程的解, 故上式简化为

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x)$$

又根据假设, 我们有  $C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0$ , 联立这两个方程, 得方程组

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

根据克拉姆法则, 可解出  $C_1'(x)$  和  $C_2'(x)$  来. 即

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{-y_2(x)f(x)}{W(x)}; \quad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$$

由此可得  $C_1(x) = \int_{x_0}^x \frac{-y_2(s)f(s)}{W(s)} ds$ ,  $C_2(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(s)f(s)}{W(s)} ds$ , 从而得到  $y'' + py' + qy = 0$  得通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \\ &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \int_{x_0}^x \frac{y_1(s) y_2(x) - y_2(s) y_1(x)}{W(s)} f(s) ds \\ &= \boxed{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \int_{x_0}^x \frac{y_1(s) y_2(x) - y_2(s) y_1(x)}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)} f(s) ds} \quad (*) \end{aligned}$$

其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

虽然上面的方法具有一般性, 能推广到更高阶方程的情形, 但其计算无疑是繁琐的, 实践中, 若  $f(x)$  具有某些常见的形式, 则往往能事先推断出对应特解的形式, 然后采用待定系数法来确定特解.

1. 设  $f(x) = (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m) e^{\lambda x}$ , 即一个  $m$ -次多项式和一个指

数函数的乘积. 由于一个多项式和  $e^{\lambda x}$  的乘积的微分还是这种形式, 故可设此时方程的特解具有如下形式

$$y^*(x) = P(x)e^{\lambda x}$$

其中  $P(x)$  为一多项式, 且其次数得设成至少是  $m$ -次的 (见下讨论). 然后因为

$$(y^*(x))' = [P'(x) + \lambda P(x)]e^{\lambda x}; \quad (y^*(x))'' = [P''(x) + 2\lambda P'(x) + \lambda^2 P(x)]e^{\lambda x}$$

代入原方程后整理可得  $P(x)$  满足如下方程

$$P''(x) + (2\lambda + p)P'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)P(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$$

- (a) 如果  $\lambda$  不是方程的特征根, 即  $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$ , 显然此时  $P(x)$  必须是个  $m$ -次多项式才能使上式成立, 即可设

$$P(x) = B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_{m-1}x + B_m$$

- (b) 如果  $\lambda$  是方程的单根, 即  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ , 但  $2\lambda + p \neq 0$  (因若为重根, 则由根与系数的关系知  $2\lambda = -p$ ), 则  $P'(x)$  须是个  $m$ -次多项式, 故可设

$$P(x) = x(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_{m-1}x + B_m)$$

- (c) 如果  $\lambda$  是方程的重根, 即  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ , 且  $2\lambda + p = 0$ , 则  $P''(x)$  须是个  $m$ -次多项式, 故可设

$$P(x) = x^2(B_0x^m + B_1x^{m-1} + \cdots + B_{m-1}x + B_m)$$

2. 设  $f(x) = [P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$ , 其中  $P(x), Q(x)$  是实多项式, 最高次数为  $m$ ,  $\alpha, \beta$  是实数,  $\beta \neq 0$ . 利用下面的欧拉公式

$$\cos\beta x = \frac{e^{-i\beta x} + e^{i\beta x}}{2}, \quad \sin\beta x = \frac{i(e^{-i\beta x} - e^{i\beta x})}{2}$$

可将  $f(x)$  重新写成

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}e^{\alpha x - i\beta x} [P(x) + iQ(x)]}_{f_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{\alpha x + i\beta x} [P(x) - iQ(x)]}_{f_2(x)}$$

根据叠加原理, 我们分别求  $y'' + py' + qy = f_i(x)$ ,  $i = 1, 2$  的特解  $y_1^*, y_2^*$ , 然后相加便得到  $y'' + py' + qy = f(x)$  的特解.

根据先前的讨论经验, 可设  $y_1^* = x^k P_1(x) e^{\alpha x - i\beta x}$ , 这里  $P_1(x)$  是复系数多项式. 又注意到  $f_2(x)$  是  $f_1(x)$  的复共轭, 故可设  $y_2^* = x^k \overline{P_1(x)} e^{\alpha x + i\beta x}$ , 故原方程的特解为

$$\begin{aligned} y^* &= y_1^* + y_2^* = x^k P_1(x) e^{\alpha x - i\beta x} + x^k \overline{P_1(x)} e^{\alpha x + i\beta x} \\ &= x^k \left( (P_1(x) + \overline{P_1(x)}) \cos \beta x - i (P_1(x) - \overline{P_1(x)}) \sin \beta x \right) e^{\alpha x} \end{aligned}$$

由于  $P_1(x) + \overline{P_1(x)}$  和  $-i(P_1(x) - \overline{P_1(x)})$  都是实多项式, 故特解的形式可设为

$$y^* = x^k (A(x) \cos \beta x + B(x) \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

其中  $k$  是  $\alpha + i\beta$  作为特征方程  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  的根的重数 (若  $\alpha + i\beta$  不是特征根, 则重数看做是  $k = 0$ ), 其中  $A(x), B(x)$  是  $m$  次待定多项式.

**例 12.2.1** 求解微分方程  $y'' + \beta^2 y = f(x)$ , 其中  $\beta > 0$  为常数, 且  $f(x) \in C(a, b)$ .

**解:** 该方程的特征方程为  $\lambda^2 + \beta^2 = 0$ , 故特征根为  $\lambda = \pm \beta i$ , 故方程的基本解是  $y_1(x) = \cos(\beta x)$ ,  $y_2(x) = \sin(\beta x)$ . 则根据通解公式 (\*) 可得

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \int_{x_0}^x \frac{y_1(s) y_2(x) - y_2(s) y_1(x)}{y_1(s) y_2'(s) - y_2(s) y_1'(s)} f(s) ds \\ &= C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) + \int_{x_0}^x \frac{\cos(\beta s) \sin(\beta x) - \sin(\beta s) \cos(\beta x)}{\cos^2(\beta s) + \sin^2(\beta s)} f(s) ds \\ &= C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) + \int_{x_0}^x f(s) \sin(\beta(x-s)) ds \end{aligned}$$

其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

**例 12.2.2** 求解  $y'' - y' - 6y = 6x + 2$ .

**解:** 首先, 对应齐次方程的特征方程为  $r^2 - r - 6 = 0$ , 解得特征根为  $r = -2, 3$ , 由于  $f(x) = 6x + 2$ , 且 0 不是特征根, 故设特解为  $y^* = Ax + B$ , 代入方程得

$$-A - 6(Ax + B) = 6x + 2$$

比较系数得到  $\begin{cases} -A - 6B = 2 \\ -6A = 6 \end{cases}$ , 从而  $A = -1, B = -\frac{1}{6}$ , 即  $y^* = -x - \frac{1}{6}$ . 从而原方程有通解

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - x - \frac{1}{6}$$

**例 12.2.3** 求解  $y'' - 2y' + y = 3xe^x$ .

**解:** 对应齐次方程的特征方程为  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ , 特征根为  $\lambda = 1, 1$  (即双重特征根). 因  $f(x) = 3xe^x$ , 故可设特解具有如下形式

$$y^*(x) = x^2(Ax + B)e^x$$

$$(y^*)' = (3Ax^2 + 2Bx)e^x + (Ax^3 + Bx^2)e^x = [Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]e^x$$

$$\begin{aligned} (y^*)'' &= [Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx]e^x + [3Ax^2 + 2(3A + B)x + 2B]e^x \\ &= [Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B]e^x \end{aligned}$$

代入之后化简得  $6Ax + 2B = 3x$ , 比较系数  $2B = 0, 6A = 3$ . 故  $A = \frac{1}{2}, B = 0$ .

从而特解为  $y^* = \frac{1}{2}x^3e^x$ . 由此可得原方程的通解为

$$y = \left(\frac{1}{2}x^3 + C_1x + C_2\right)e^x$$

**例 12.2.4** 求解方程  $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x + e^{2x}$ .

**解:** 对应齐次方程的特征方程为  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ , 特征根为  $\lambda = 1 \pm i$ . 我们对两非齐次项  $e^x \cos x$  和  $e^{2x}$  分别得到对应特解, 然后利用“叠加原理”相加得到原方程的特解. 对非齐次项  $e^x \cos x$ , 其对应的  $\alpha + i\beta = 1 + i$ , 是特征根在, 故对应特解的形式可设为

$$y_1^* = x(A \cos x + B \sin x)e^x$$

求导带入后化简, 然后对比系数可知  $A = 0, B = \frac{1}{2}$ . 故  $y_1^* = \frac{1}{2}xe^x \sin x$ .

对非齐次项  $e^{2x}$ , 其对应的  $\alpha + i\beta$  为 2, 不是特征根, 故设其对应的特解为  $y_2^* = Ce^{2x}$ , 代入后解得  $C = \frac{1}{2}$ , 从而  $y_2^* = \frac{1}{2}e^{2x}$ . 于是原方程的特解为

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{1}{2}xe^x \sin x + \frac{1}{2}e^{2x}$$

进而原方程的通解为

$$y = \frac{1}{2}xe^x \sin x + \frac{1}{2}e^{2x} + e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

**例 12.2.5** 求解方程  $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$ .

**解:** 对应齐次方程的特征根为  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ , 特征根为  $r = -2$  (二重), 非齐次项  $\cos 2x = \frac{e^{2xi} - ie^{-2xi}}{2i}$  对应的  $\lambda$  为  $2i$ , 它不是特征根, 故可设特解为

$$y^* = A \cos 2x + B \sin 2x$$

代入原方程得  $8B \cos 2x - 8A \sin 2x = \cos 2x$ , 比较系数后有  $A = 0, B = \frac{1}{8}$ , 故得原方程的通解为

$$y = \frac{1}{8} \sin 2x + e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$$

## 12.3 二阶常系数线性微分方程的应用——振动现象

**简谐振动:** 如果指点在力的作用下沿一条直线运动, 力的数值与质点同某固定点  $O$  之间的长度成正比, 且其方向指向  $O$  点, 这样的运动称为简谐振动. 运动直线本身是描述简谐运动的标准坐标系.

以  $O$  为原点, 以  $x$  为坐标,  $m$  为质点坐标, 则简写运动的方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x \quad (k \text{ 为正常数}) \quad (12.3.1)$$

方程的特征方程为  $m\lambda^2 + k^2 = 0$ , 故方程有单充共轭特征复根  $\lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{\frac{k^2}{m}}$ . 从而方程的通解为

$$x(t) = C_1 \sin \frac{k}{\sqrt{m}}t + C_2 \cos \frac{k}{\sqrt{m}}t = A \sin \left( \frac{k}{\sqrt{m}}t + \varphi \right)$$

其中  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  为质点距离平衡点的最大长度, 称之为“振幅”(amplitude); 而  $\varphi = \arctan \frac{C_2}{C_1}$  称为简谐振动的“相位”(phase), 简称“相”. 且运动的周期(period)为

$$T = \frac{2\pi}{k} \sqrt{m} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{其中 } \omega_0 = \frac{k}{\sqrt{m}}$$

其倒数  $\omega := \frac{1}{T}$  为单位时间的振动次数, 称为运动的频率(frequency).

方程 (12.3.1) 两边同乘  $\frac{dx}{dt}$ , 然后两边积分, 得

$$\begin{aligned}\int m x'' x' dt &= - \int k^2 x x' dt \iff m \int x' dx' = -k^2 \int x dx \\ \implies \underbrace{\frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}_{\text{动能}} + \underbrace{\frac{1}{2} k^2 x^2}_{\text{势能}} &= C\end{aligned}$$

此即为简谐振动的能量守恒定律, 获得守恒律的上述方法称为初次积分方法 (*first integral*). 记  $E = C$  为运动总能量. 代入  $x(t) = A \sin\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t + \varphi\right)$ , 得到

$$E = \frac{1}{2} k^2 A^2$$

**受阻简谐振动:** 考虑收到阻力  $f$  的简谐振动, 其运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x + f \quad (12.3.2)$$

通常, 若振动的速度不高, 可假定  $f$  与速度  $x'(t)$  成正比, 故上方程可写为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x - 2ml \frac{dx}{dt} \quad (12.3.3)$$

其中  $l$  为一正常数, 称为阻尼常数, 因为  $f$  的作用是使得振动的速率减小.

方程的特征方程为  $m\lambda^2 + 2ml\lambda + k^2 = 0$ .

1. 当  $\Delta = 4m^2 l^2 - 4mk^2 = 4m(ml^2 - k^2) \neq 0$ , 此时方程有两个不同的特征根

$$\lambda_1 = -l + \sqrt{l^2 - \frac{k^2}{m}}; \quad \lambda_2 = -l - \sqrt{l^2 - \frac{k^2}{m}}$$

此时方程的通解是

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

(a) 当  $l^2 > \frac{k^2}{m}$ , 此时  $x(t)$  是实指数函数, 即无振动现象. 当指点到达最远点后 (此时  $x' = 0$ ) 返向原点运动, 并当  $t \rightarrow \infty$  时渐进到达.

(b) 当  $l^2 < \frac{k^2}{m}$ , 此时  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  为共轭复根. 记  $\omega_0^2 := \frac{k^2}{m}$ , 则

$$n := \sqrt{l^2 - \frac{k^2}{m}} = i \sqrt{\omega_0^2 - l^2}$$

从而  $\lambda_1 = -l + in$ ,  $\lambda_2 = -l - in$ . 此时方程的通解为

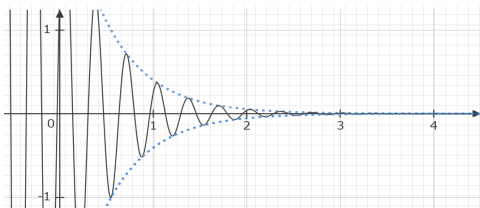
$$x(t) = e^{-lt} (C_1 e^{int} + C_2 e^{-int})$$

提取其实（虚）部，则通解亦可写为

$$x(t) = e^{-lt} (C_3 \cos nt + C_4 \sin nt) = Ae^{-lt} \sin(nt + \varphi)$$

与无阻尼振动相比，有阻尼时，由于振幅  $Ae^{-lt}$  是减少的，故振动的总能量是衰减的. 此外，有阻尼时振动的周期更长，即

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k^2}{m} - l^2}}$$



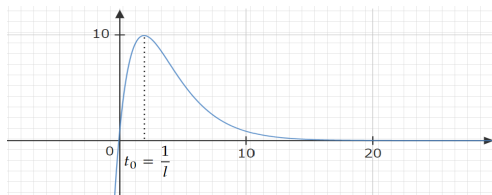
2. 当  $\Delta = 4m(ml^2 - k^2)$ , 即  $l^2 = \frac{k^2}{m}$ , 此时特征根  $-l$  是二重的. 故方程的通解为

$$x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-lt}$$

若  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = v_0$  (初始速度), 则

$$x(t) = v_0 t e^{-lt}, \quad v(t) = x'(t) = v_0 e^{-lt} (1 - lt)$$

故当  $t = t_0 = \frac{1}{l}$  时, 质点距原点最远, 且最远距离为  $x(t_0) = \frac{v_0}{le}$ . 随着  $t \rightarrow \infty$ , 振幅逐渐衰减为 0.



**强迫简谐振动：**设质点受周期力的作用，则可设其运动方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x + A' \sin \omega' t \quad (12.3.4)$$

1. 若  $\omega'^2 \neq \frac{k^2}{m} = \omega_0^2$ ，此时特解具有形式  $x_0(t) = B \sin \omega' t$ ，将其代入原方程后解得

$$B = \frac{A'}{k^2 - m\omega'^2}$$

从而通解为

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{A' \sin \omega' t}{m(\omega_0^2 - \omega'^2)}$$

2. 若  $\omega'^2 = \omega_0^2$ ，此时特解具有形式

$$x_0(t) = t[(B_1 t + C_1) \cos \omega' t + (B_2 t + C_2) \sin \omega' t]$$

代入后解得  $x_0(t) = -\frac{A'}{2m\omega'} t \cos \omega' t$ ，从而方程的通解为

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) - \frac{A'}{2m\omega'} t \cos \omega' t$$

由此可见，当  $t \rightarrow \infty$  时，强迫振动部分的振幅  $\frac{A'}{2m\omega'} t \rightarrow \infty$ ，从而造成破坏性的效果，这便是共振现象。

**注记 12.3.1** 上面情形 2. 中的特解  $x_0(t)$  也可这么获得，利用常数变易法，假设特解具有  $x_0(t) = B(t) \sin \omega' t$  的形式，将其代入原方程，得到如下关于  $B$  的方程

$$B'' + 2B'\omega' \cot \omega' t = \frac{A'}{m} \implies \frac{1}{\sin^2 \omega' t} \frac{d}{dt} (B' \sin^2 \omega' t) = \frac{A'}{m}$$

解得  $B(t) = -\frac{A'}{2m\omega'} t \cos \omega' t$ .

## 12.4 一般 $n$ 阶常系数线性微分方程

对二阶常系数线性微分方程  $y'' + py' + q = f(x)$  可推广为对如下一般  $n$  阶常系数线性微分方程的处理

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \quad (12.4.1)$$

其中  $p_i$  为实常数, 而  $f(x)$  是  $(a, b)$  上的实值连续函数.

为方便处理, 我们引入变量:  $y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)}$ , 将上方程写成线性微分方程组的形式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

其中  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} f & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ , 且

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (12.4.2)$$

思路同前, 需找到  $\mathbb{C}^n$  中的一组新基:  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n\}$ , 使得在该基下  $\mathbf{A}$  作为  $\mathbb{R}^n$  上的线性算子 (通过矩阵左乘列向量) 的表示矩阵  $\mathbf{J}$  足够简单和规范, 即

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \mathbf{J} \iff \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{J}$$

则对齐次方程组  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ , 操作如下

$$\mathbf{P}^{-1} \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y} \iff \frac{d(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y})}{dx} = \mathbf{J}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{y})$$

令  $\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}$ , 则  $\mathbf{z}$  满足更简单的微分方程  $\frac{d\mathbf{z}}{dx} = \mathbf{J}\mathbf{z}$ . 求出  $\mathbf{z}$  的通解之后, 比如说  $\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_n$  是其基础解系, 则  $\mathbf{z}$  的通解是

$$\mathbf{z} = C_1 \mathbf{z}_1 + \cdots + C_n \mathbf{z}_n = \mathbf{C}\mathbf{Z} \quad \text{其中 } \mathbf{C} = [C_1 \cdots C_n] \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

继而可知  $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{Z}$ . 令  $\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{C}_1$ , 由于  $\mathbf{P}$  是可逆矩阵, 故  $\mathbf{C}_1$  仍可取到任意常数. 故在实际中, 我们就没必要引入变量  $\mathbf{z}$  了, 只需得到  $\mathbf{A}$  的相似标准型, 然后

求解出  $\frac{dy}{dx} = \mathbf{J}\mathbf{y}$  的通解即可.

我们先前已对  $\mathbf{A}$  是二阶方阵的情形给出了其相似标准型, 除了对角矩阵为, 还有形如  $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$  的上三角型矩阵, 它们称为是矩阵  $\mathbf{A}$  的约当标准型 (*Jordan Canonical form*), 这是在复数域上矩阵能相似于的最简单类型矩阵 (其中零足够多). 当然对一般  $n$  阶方阵也有类似的结果.

**定义 12.4.1** 方程 (12.4.1) 的特征方程定义为方程的系数矩阵  $\mathbf{A}$  的特征方程

$$p_{\mathbf{A}(\lambda)} = \det(\lambda \mathbb{I} - \mathbf{A}) = 0$$

它的根, 即矩阵  $\mathbf{A}$  的特征根也称为方程的特征根. 对应齐次方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \quad (12.4.3)$$

的解空间 (即由其  $n$  个线性独立的解张成的  $n$ -维空间) 与不同特征根的个数和根的重数是息息相关的, 其本质原因是  $\mathbf{A}$  的约当标准型的形状与不同特征根的个数及其重数信息是能够相互“转译”的. 下面就给出“转译规则”, 进而可据此分类方程并得到对应的通解. 在我们的情形, 特征方程的计算结果如下

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$$

假设上特征方程在复数域  $\mathbb{C}$  (因为在复数域中方阵有最简单的相似标准型) 中  $s$  个不同的特征根  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , 且相应的重数分别为  $n_1, \dots, n_s$  ( $n_1 + \cdots + n_s = n$ ). 则对形如 (12.4.2) 的矩阵  $\mathbf{A}$  应用约当标准型的理论, 可知此时  $\mathbf{A}$  相似于如下形式的矩阵, 即存在可逆方阵  $\mathbf{P}$ , 使得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_s \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i} \quad \text{是 } \lambda_i \text{ 对应的约当块 (Jordan block)}$$

**注记 12.4.1** 由于  $\mathbf{A}$  的特殊形状, 此时特征根  $\lambda_i$  只对应一个  $n_i$  阶约当块, 一般情况下, 每个特征根可能对应多个约当块, 但它们的阶数之和等于该特征根的重数.

特别地, 如果  $n_i = 1$ , 则它对应的约当块  $\mathbf{J}_i = [\lambda_i]$ ; 如果所有特征根都是单根, 即  $n_i = 1, \forall i$ , 则  $\mathbf{A}$  相似于对角矩阵  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

即存在  $\mathbb{C}^n$  的基  $\mathcal{B} := \{\mathbf{p}_{11}, \dots, \mathbf{p}_{1n_1}; \mathbf{p}_{21}, \dots, \mathbf{p}_{2n_2}; \dots; \mathbf{p}_{s1}, \dots, \mathbf{p}_{sn_s}\}$ , 使得在该组基下  $\mathbf{A}$  在  $\mathbb{C}^n$  上的 (左乘) 作用可表示为矩阵  $\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_s)$  (分块对角阵). 即

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{12} & \cdots & \mathbf{p}_{1n_1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_1} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{12} & \cdots & \mathbf{p}_{1n_1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_1} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{21} & \mathbf{p}_{22} & \cdots & \mathbf{p}_{2n_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_2} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{21} & \mathbf{p}_{22} & \cdots & \mathbf{p}_{2n_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_2} \mathbf{J}_2 \\ &\dots \quad \dots \\ \mathbf{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{s1} & \mathbf{p}_{s2} & \cdots & \mathbf{p}_{sn_s} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_s} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{s1} & \mathbf{p}_{s2} & \cdots & \mathbf{p}_{sn_s} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_s} \mathbf{J}_s \end{aligned}$$

则从  $\mathbb{C}^n$  中的标准基  $\mathcal{S} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  到  $\mathcal{B}$  的过渡矩阵 (*transition matrix*) 为  $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \cdots \ \mathbf{P}_s]$ , 即有  $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$ . 利用  $\mathbf{J}_i$  的形式, 可得

$$\begin{cases} \mathbf{Ap}_{11} = \lambda_1 \mathbf{p}_{11}; & \mathbf{Ap}_{12} = \mathbf{p}_{11} + \lambda_1 \mathbf{p}_{12}; & \cdots & ; \mathbf{Ap}_{1n_1} = \mathbf{p}_{1n_1-1} + \lambda_1 \mathbf{p}_{1n_1} \\ \mathbf{Ap}_{21} = \lambda_2 \mathbf{p}_{21}; & \mathbf{Ap}_{22} = \mathbf{p}_{21} + \lambda_2 \mathbf{p}_{22}; & \cdots & ; \mathbf{Ap}_{2n_2} = \mathbf{p}_{2n_2-1} + \lambda_2 \mathbf{p}_{2n_2} \\ & & \vdots & \\ \mathbf{Ap}_{s1} = \lambda_s \mathbf{p}_{s1}; & \mathbf{Ap}_{s2} = \mathbf{p}_{s1} + \lambda_s \mathbf{p}_{s2}; & \cdots & ; \mathbf{Ap}_{sn_s} = \mathbf{p}_{sn_s-1} + \lambda_s \mathbf{p}_{sn_s} \end{cases}$$

记  $\mathcal{N}_i := \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , 然后对上面的每一行, 按从行尾向行首的推进顺序整理, 可知  $\mathbf{p}_{in_i}$  满足方程  $\mathcal{N}_i^{n_i} \mathbf{p}_{in_i} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{n_i} \mathbf{p}_{in_i} = \mathbf{0}$ .  $i = 1, \dots, s$ , 且有

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{1n_1}, \mathbf{p}_{1n_1-1} = \mathcal{N}_1 \mathbf{p}_{1n_1}, \mathbf{p}_{1n_1-2} = \mathcal{N}_1^2 \mathbf{p}_{1n_1}, \cdots, \mathbf{p}_{11} = \mathcal{N}_1^{n_1-1} \mathbf{p}_{1n_1} \\ \mathbf{p}_{2n_2}, \mathbf{p}_{2n_2-1} = \mathcal{N}_2 \mathbf{p}_{2n_2}, \mathbf{p}_{2n_2-2} = \mathcal{N}_2^2 \mathbf{p}_{2n_2}, \cdots, \mathbf{p}_{21} = \mathcal{N}_2^{n_2-1} \mathbf{p}_{2n_2} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{sn_s}, \mathbf{p}_{sn_s-1} = \mathcal{N}_s \mathbf{p}_{sn_s}, \mathbf{p}_{sn_s-2} = \mathcal{N}_s^2 \mathbf{p}_{sn_s}, \cdots, \mathbf{p}_{s1} = \mathcal{N}_s^{n_s-1} \mathbf{p}_{sn_s} \end{cases}$$

其中每一行都构成了一条约当链 (*Jordan chain*), 故我们在  $\mathbb{R}^n$  中找到了由  $s$  条约当链构成的基, 在其基下矩阵  $\mathbf{A}$  相似于分块对角阵  $\text{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_s)$ . 显然, 每条约当链张成了一个  $\mathbf{A}$ -不变子空间 (即在  $\mathbf{A}$  的 (左乘) 作用下封闭). 记

$$\mathbb{V}_i = \text{span}\{\mathbf{p}_{in_i}, \mathbf{p}_{in_i-1}, \dots, \mathbf{p}_{i1}\}, \quad i = 1, \dots, s$$

则  $\mathbb{C}^n = \mathbb{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_s$ . 将  $\mathbf{A}$  限制于不变子空间  $\mathbb{V}_i$  上的作用  $\mathbf{A}|_i$  在约当链上的矩阵表示是约当块  $\mathbf{J}_i$ , 而  $\mathbf{A}$  的约当标准型就是按空间的直和分解, 在将这些约当链合并起来的基下  $\mathbf{A}$  的矩阵表示.

则求解  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  可转为求解  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{J}\mathbf{y}$ , 即

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{J}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

按照  $\mathbf{J}_i$  的形状, 将上方程展开后分组写就是

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = \lambda_1 y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \lambda_1 y_2 + y_3 \\ \vdots \\ \frac{dy_{n_1-1}}{dx} = \lambda_1 y_{n_1-1} + y_{n_1} \\ \frac{dy_{n_1}}{dx} = \lambda_1 y_{n_1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_{n_1+1}}{dx} = \lambda_2 y_{n_1+1} + y_{n_1+2} \\ \frac{dy_{n_1+2}}{dx} = \lambda_2 y_{n_1+2} + y_{n_1+3} \\ \vdots \\ \frac{dy_{n_1+n_2-1}}{dx} = \lambda_2 y_{n_1+n_2-1} + y_{n_1+n_2} \\ \frac{dy_{n_1+n_2}}{dx} = \lambda_2 y_{n_1+n_2} \end{array} \right\} \dots$$

$$\dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_{n_1+\dots+n_{s-1}+1}}{dx} = \lambda_s y_{n_1+\dots+n_{s-1}+1} + y_{n_1+\dots+n_{s-1}+2} \\ \frac{dy_{n_1+\dots+n_{s-1}+2}}{dx} = \lambda_s y_{n_1+\dots+n_{s-1}+2} + y_{n_1+\dots+n_{s-1}+3} \\ \vdots \\ \frac{dy_{n_1+\dots+n_{s-1}+n_s-1}}{dx} = \lambda_s y_{n_1+\dots+n_{s-1}+n_s-1} + y_{n_1+\dots+n_{s-1}+n_s} \\ \frac{dy_{n_1+\dots+n_{s-1}+n_s}}{dx} = \lambda_s y_{n_1+\dots+n_{s-1}+n_s} \end{array} \right.$$

看似复杂, 但注意到

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_k = y^{(k-1)}, \dots, y_n = y^{(n-1)}$$

所以上面第二组方程相当于将第一组方程中的  $\lambda_1$  改为  $\lambda_2$ , 然后每个方程两边同时

对  $x$  求导  $n_1$  次; 同理, 最后一组方程相当于将第一组方程中的  $\lambda_1$  改为  $\lambda_s$ , 然后每个方程两边同时对  $x$  求导  $n_1 + \dots + n_{s-1}$  次. 故上面的  $s$  个方程组相当于 (等价于) 下面的  $s$  个方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = \lambda_1 y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \lambda_1 y_2 + y_3 \\ \vdots \\ \frac{dy_{n_1-1}}{dx} = \lambda_1 y_{n_1-1} + y_{n_1} \\ \frac{dy_{n_1}}{dx} = \lambda_1 y_{n_1} \end{array} \right. \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = \lambda_s y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \lambda_s y_2 + y_3 \\ \vdots \\ \frac{dy_{n_s-1}}{dx} = \lambda_s y_{n_s-1} + y_{n_s} \\ \frac{dy_{n_s}}{dx} = \lambda_s y_{n_s} \end{array} \right.$$

对上面的每个方程, 从最后一个解起, 然后代入前一个求解, 逐次进行, 直到解出  $y_1 = y$ . 比如对上面第一个方程组, 我们有

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \left( \frac{C_{n_1}}{(n_1-1)!} x^{n_1-1} + \dots + \frac{C_3}{2!} x^2 + C_2 x + C_1 \right) e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = \left( \frac{C_{n_1}}{(n_1-2)!} x^{n_1-2} + \dots + \frac{C_4}{2!} x^2 + C_3 x + C_2 \right) e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ y_{n_1-1} = (C_{n_1} x + C_{n_1-1}) e^{\lambda_1 x} \\ y_{n_1} = C_{n_1} e^{\lambda_1 x} \end{array} \right.$$

我们只需提取第一行信息, 知齐次线性方程 (12.4.3) 有如下通解

$$y = y_1 = \left( \frac{C_{n_1}}{(n_1-1)!} x^{n_1-1} + \dots + \frac{C_3}{2!} x^2 + C_2 x + C_1 \right) e^{\lambda_1 x}$$

即齐次方程有  $n_1$  个 (关于特征根  $\lambda_1$ ) 独立解

$$y_{11} = e^{\lambda_1 x}, \quad y_{12} = x e^{\lambda_1 x}, \quad \dots \quad y_{1n_1} = x^{n_1-1} e^{\lambda_1 x}$$

一般地, 关于特征值  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), 齐次方程有  $n_i$  个独立解

$$y_{i1} = e^{\lambda_i x}, y_{i2} = x e^{\lambda_i x}, \dots y_{in_i} = x^{n_i-1} e^{\lambda_i x}$$

将它们合起来, 便得到齐次方程的  $n = n_1 + \dots + n_s$  个独立的解, 即一组基础解系.

**注记 12.4.2** 这些解的独立性 (线性无关性) 来自两方面, 一方面  $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_s x}\}$  是线性无关 (因  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  互异, 写出其 *Wronski* 行列式, 则问题归结为 *Vandermond* 行列式的性质) 的; 另一方面, 对每个特征根  $\{e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, \dots, x^{n_i-1} e^{\lambda_i x}\}$  也是线性无关的 (本质是由于  $\{1, x, \dots, x^{n_i-1}\}$  是线性无关的).

若某个特征根  $\lambda_i$  是复数  $\lambda_i = \alpha + i\beta$  (其中  $\alpha, \beta \neq 0$  为实数), 且其重数为  $n_i$  重, 则按上, 它对应下面  $n_i$  个独立解

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, x e^{(\alpha+i\beta)x}, \dots x^{n_i-1} e^{(\alpha+i\beta)x}$$

由欧拉公式, 它即为

$$e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x), x e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x), \dots x^{n_i-1}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

通过提取每个解的实部和虚部, 可从上面  $n_i$  个独立复解中获得  $2n_i$  个独立实解

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x; x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x; \dots x^{n_i-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{n_i-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

但这是否和  $\lambda_i$  只对应  $n_i$  个独立解相矛盾了呢? 其实是不矛盾的, 因为考虑的方程是实系数的, 故其特征方程为实系数多项式. 而对于实系数多项式, 其复根是成对出现的, 即如果  $\lambda_i = \alpha + i\beta$  是其特征根, 则其共轭  $\bar{\lambda}_i = \alpha - i\beta$  必也是特征根, 且重数相同. 由此可知, 提取出的上面  $2n_i$  个独立实解是共属于特征值  $\lambda_i$  和  $\bar{\lambda}_i$  的.

总结先前讨论, 可得

### $n$ 阶线性齐次常微分方程基本解的构成

特征根情况	基本解组中对于的函数
单实根 $\lambda$	$e^{\lambda x}$
$k$ 重实根 $\lambda$	$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$
单重共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$
$k$ 重共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots$ $\dots x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

接着考虑一般的  $n$  阶线性常系数微分方程 (12.4.1) 的解

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$$

只需确定一个特解  $y^*$ , 则方程的通解是改特解  $y^*$  加上对应齐次方程的基本解系.

当阶数较大时, 利用常数变易法求解特解是不容易的, 但对某些特殊形式 (也是常见) 的非齐次项  $f(x)$ , 我们易于猜测对应特解的形式, 然后利用待定系数法求解.

1. 若  $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$ , 其中  $P_m(x)$  是  $m$  次实或复系数多项式, 则

(a) 当  $\alpha$  不是特征根, 方程有如下形式的特解

$$y^* = e^{\alpha x} Q_m(x)$$

其中  $Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \cdots + q_{m-1} x + q_m$  是  $m$  次实或复系数多项式.

(b) 当  $\alpha$  是  $k$  ( $k \geq 1$ ) 重特征根, 方程有如下形式的特解

$$y^* = x^k e^{\alpha x} Q_m(x)$$

其中  $Q_m(x)$  同上, 为一待定的  $m$  次实或复系数多项式.

2. 若  $f(x) = e^{\alpha x} (P_m^{(1)}(x) \cos \beta x + P_m^{(2)}(x) \sin \beta x)$ , 其中  $P_m^{(1)}(x)$  和  $P_m^{(2)}(x)$  是  $x$  的次数不高于  $m$  的多项式, 但二者至少有一个的次数为  $m$ .

(a) 当  $\alpha \pm i\beta$  不是特征根, 方程有如下形式的特解

$$y^* = e^{\alpha x} (Q_m^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_m^{(2)}(x) \sin \beta x)$$

其中  $Q_m^{(1)}(x), Q_m^{(2)}(x)$  是系数待定的  $m$  次多项式.

(b) 当  $\alpha \pm i\beta$  是  $k$  重特征根, 方程有如下形式的特解

$$y^* = x^k e^{\alpha x} (Q_m^{(1)}(x) \cos \beta x + P_m^{(2)}(x) \sin \beta x)$$

其中  $Q_m^{(1)}(x), Q_m^{(2)}(x)$  是系数待定的  $m$  次多项式.

需要注意的是, 即便  $P_m^{(1)}(x), P_m^{(2)}(x)$  中有一个恒为零, 但在设特解形式时仍需将  $Q_m^{(1)}(x)$  和  $Q_m^{(2)}(x)$  同时考虑在内 (请读者思考什么?)

**例 12.4.1** 求解方程  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ .

**解：**方程的特征方程为  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ ，它有一个三重特征根  $\lambda = 1$ ，故其基本解组是  $e^x, xe^x, x^2e^x$ ，从而方程的通解为  $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$

**例 12.4.2** 求解方程  $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 3y' - y = 0$ .

**解：**特征方程是  $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 1) = 0$ . 故  $\lambda = 1$  是三重特征根，而  $\lambda = \pm i$  是一对共轭复根，从而可知方程的基本解组为

$$e^x, xe^x, x^2e^x; \cos x, \sin x$$

从而原方程的通解为  $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x + C_4\cos x + C_5\sin x$ .

**例 12.4.3** 求解微分方程  $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x - 5)$

**解：**特征方程为  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$ ，故有三重特征根  $\lambda = -1$ ，由于非齐次项  $e^{-x}(x - 5)$  的指数幂次的  $\alpha = -1$  就是特征根，故特解具有如下形式

$$y^* = x^3(a + bx)e^{-x} = (ax^3 + bx^4)e^{-x}$$

代入原方程后比较系数可得  $a = -\frac{5}{6}, b = \frac{1}{24}$ . 故得原方程的通解为

$$y = \left( C_1 + C_2x + C_3x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \right) e^{-x}$$

**例 12.4.4** 求解初值问题  $y^{(4)} + y = 2e^x, y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1$ .

**解：**特征方程为  $\lambda^4 + 1 = 0$ ，故方程有两对共轭复特征根  $e^{\frac{\pi}{4}i}, -e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{-\frac{\pi}{4}i}, -e^{-\frac{\pi}{4}i}$ . 故齐次方程有基本解系

$$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x; e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x; e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x; e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

又因为非齐次项  $2e^x$  的指数幂对应的  $\alpha = 1$  不是特征根，故特解具有形式  $y^* = ae^x$ ，代入原方程，得  $ae^x + ae^x = 2e^x$ ，从而  $a = 1$ ，故原方程的通解为

$$y = C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_3e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}x + e^x$$

$$\text{代入初值条件, 得到} \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_2 - C_4 = 0 \\ C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0 \\ C_1 - C_2 - C_3 - C_4 = 0 \end{cases} \quad \text{从而 } C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0.$$

故初值问题的解为  $y = e^x$ .

## 12.5 一般 $n$ 阶常系数线性微分方程组

上小节中讨论方程  $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$  时, 我们将其写成了线性微分方程组的形式, 即引入变量:  $y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)}$ , 则上方程可写成

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

其中  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ ,  $\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} f & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ , 且

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

它是下面一般常系数线性微分方程组的特例.

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

其中  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]$ ,  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$  为  $n$  阶常系数矩阵,  $\mathbf{f}(x)$  为  $(a, b)$  上连续的向量函数.

虽然形式更一般了, 但处理的思路同前, 只是由于  $\mathbf{A}$  的形状不具特殊性, 需考虑最一般形式的约当标准型 (回忆对上节的一般  $n$  阶常系数线性微分方程, 其矩阵对它的每个不同特征根只有一个约当块, 这无疑是比较特殊的, 一般情况下, 同一个特征值可能有多不同的约当块与之对应) .

同前, 需先求解对应齐次方程  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  的一个基础解系 (即任意线性无关的  $n$  个解, 通解是它们的任意线性组合), 那么, 原方程的通解就是齐次方程的同解加上原方程的任一特解. 形式上, 矩阵指数函数  $e^{x\mathbf{A}}$  就是其实方程的解 (见定理 12.2.1) . 将它写成

$$e^{x\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) & \cdots & y_{n1}(x) \\ y_{12}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{n2}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(x) & y_{2n}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_n \end{bmatrix}$$

则  $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_n\}$  就是方程  $n$  个线性无关的解. 这是因为

$$\frac{d}{dx}[\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_n] = \mathbf{A}[\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_n] \implies \frac{d\mathbf{y}_i}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}_i, \ \forall i$$

而衡量  $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$  是否线性无关就在于其 *Wronsky* 行列式

$$W(x) = \det(e^{x\mathbf{A}})$$

是否恒不为零. 但根据刘维尔定理, 我们有

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^x \text{tr}(e^{x\mathbf{A}})dx}$$

故只要  $W(x)$  在某点  $x_0$  不为零, 则它恒不为零. 但  $W(0) = \det(e^{\mathbf{0}}) = \det(\mathbb{I}) = 1$ . 从而  $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$  构成了方程的基础解系. 记矩阵  $e^{x\mathbf{A}}$  为  $\Phi(x)$ , 并称其为基础解矩阵, 则齐次方程的通解为

$$\mathbf{y} = \Phi(x)\mathbf{C} \quad \text{其中 } \mathbf{C} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n]^T \text{ 为常数列矩阵}$$

显然, 对任意可逆  $n$  阶常数矩阵  $\mathbf{P}$ , 则  $\Psi(x) := \Phi(x)\mathbf{P}$  也是一个基础解矩阵, 即其  $n$  个列也是齐次方程的  $n$  个线性无关的解.

如已求得一个基础解矩阵  $\Phi(x)$ , 则可利用常数变易法求出原方程的一个特解, 即假设特解具有如下形式

$$\mathbf{y}^* = \Phi(x)\mathbf{C}(x)$$

代入  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$ , 得

$$\Phi'(x)\mathbf{C}(x) + \Phi(x)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{A}\Phi(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{f}(x)$$

利用  $\Phi'(x) = \mathbf{A}\Phi(x)$ , 得到  $\Phi(x)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{f}(x)$ , 由于  $\det(\Phi(x)) \neq 0$ , 故

$$\mathbf{C}'(x) = \Phi^{-1}(x)\mathbf{f}(x) \implies \mathbf{C}(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds$$

从而原方程的一个特解是  $\mathbf{y}^*(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds$ , 故原方程的通解为

$$\mathbf{y}(x) = \Phi(x)\mathbf{C} + \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds = \Phi(x) \left( \mathbf{C} + \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds \right)$$

若初值条件为  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ , 则常数 (矩阵)  $\mathbf{C} = \Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0$ , 故满足初值条件的特解为

$$\mathbf{y}(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0 + \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds$$

根据约当标准型的一般理论, 对矩阵  $\mathbf{A}$ , 存在可逆矩阵  $\mathbf{P}$ , 使得  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}$ . 其中

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{J}_m \end{bmatrix}$$

为矩阵  $\mathbf{A}$  的约当标准型, 其中  $\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{t_i \times t_i}$  为某特征根  $\lambda_i$  对应的

的约当块. 约当块的阶数之和  $t_1 + \cdots + t_m = n$  为矩阵的阶数. 每个特征根对应的约当块的个数可能不止一个, 但其阶数之和为该特征根的重数.

接下来, 即可以按照上节那样对每个约当块求解对应方程, 整理出解的形式来, 也可按照 12.2 节中那样, 直接求解矩阵指数函数  $e^{x\mathbf{A}}$  出来. 下面我们将依据后者来处理, 读者可以按第一种方式处理, 作为练习, 并与下面得到的结果做比对.

注意到

$$e^{x\mathbf{A}} = e^{x(\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1})} = \mathbf{P}e^{x\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{x\mathbf{J}_1} & & \\ & e^{x\mathbf{J}_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{x\mathbf{J}_m} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

由于  $\mathbf{P}$  可逆, 故  $e^{x\mathbf{A}}\mathbf{P}$  也是基础解矩阵, 从而只需计算出

$$e^{x\mathbf{A}}\mathbf{P} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{x\mathbf{J}_1} & & \\ & e^{x\mathbf{J}_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{x\mathbf{J}_m} \end{bmatrix}$$

故须计算  $e^{x\mathbf{J}_i}$ . 由于  $\mathbf{J}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}}_{D_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{N_i}$ , 且  $D_i$  和  $N_i$  是

交换的, 即  $D_i N_i = N_i D_i$ , 故由

$$e^{x\mathbf{J}_i} = e^{x(D_i + N_i)} = e^{x D_i} e^{x N_i}$$

从而

$$\begin{aligned} e^{x D_i} &= \mathbb{I} + x D_i + \frac{x^2}{2!} D_i^2 + \cdots + \frac{x^k}{k!} D_i^k + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & & & \\ & \lambda_i^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix} + \cdots \\ &\cdots + \frac{x^k}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_i^k & & & \\ & \lambda_i^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i x} & & & \\ & e^{\lambda_i x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_i x} \end{bmatrix}_{t_i \times t_i} = e^{\lambda_i x \mathbb{I}_{t_i}} \end{aligned}$$

注意到  $N_i$  是个幂零矩阵, 即它的某个幂次等于零. 事实上  $N_i^{t_i} = \mathbf{0}$ , 所以  $e^{x N_i}$  的展开实际是个有限和, 即

$$\begin{aligned} e^{x N_i} &= \mathbb{I} + x N_i + \frac{x^2}{2!} N_i^2 + \cdots + \frac{x^k}{k!} N_i^k + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} + \cdots \\ &\cdots + \frac{x^{t_i-1}}{(t_i-1)!} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{故 } e^{x\mathbf{J}_i} = e^{x\mathbf{D}_i} e^{x\mathbf{N}_i} = e^{\lambda_i x} \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{x^{t_i-1}}{(t_i-1)!} \\ & 1 & x & \cdots & \cdots & \frac{x^{t_i-2}}{(t_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & x \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

有关基础解矩阵的讨论:

1. 当  $\mathbf{A}$  的所有特征根都是单根 (即重数是一) 时,  $\mathbf{A}$  的约当标准型  $\mathbf{J}$  是对角矩阵  $\text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$  (其中  $\lambda_i$  各不相同). 此时, 对应齐次方程组的一个基础解矩阵是

$$\Phi(x) = e^{x\mathbf{A}}\mathbf{P} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & & & \\ & e^{\lambda_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

记  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]$ , 其中  $\mathbf{p}_i$  是对应特征根  $\lambda_i$  的矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量. 则由

$$\Phi(x) = [e^{\lambda_1 x} \mathbf{p}_1 \ e^{\lambda_2 x} \mathbf{p}_2 \ \cdots \ e^{\lambda_n x} \mathbf{p}_n]$$

**注记 12.5.1**  $\mathbf{p}_i$  是对应特征根  $\lambda_i$  的矩阵  $\mathbf{A}$  的特征向量这一代数事实也可这么看出: 因为  $e^{\lambda_i x} \mathbf{p}_i$  是方程  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  的解, 将其代入, 得到

$$\lambda_i e^{\lambda_i x} \mathbf{p}_i = \mathbf{A} e^{\lambda_i x} \mathbf{p}_i \iff e^{\lambda_i x} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{p}_i = \mathbf{0} \iff (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$$

由于  $\Phi(0) = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]$ , 它们构成了空间的一组完全由特征向量构成的基 (故此时矩阵可对角化), 从而必线性无关, 故根据刘维尔公式知  $\Phi(x)$  是一组线性无关的解, 即  $\Phi(x)$  是方程的基础解矩阵.

2.  $\mathbf{A}$  有重特征根. 设  $\mathbf{A}$  有  $s$  个互异特征根  $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ , 其重数分别为  $n_1, \cdots, n_s$ , 则  $n_1 + \cdots + n_s = n$ . 与上节常系数线性微分方程对应的矩阵  $\mathbf{A}$  有所不同, 一般情况下,  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_i$  在其约当标准型  $\mathbf{J}$  中可能有不止一个约当块, 但这些约当块的阶数之和为  $n_i$ , 且由上面的讨论不难看出, 其基础解矩阵  $e^{x\mathbf{A}}\mathbf{P}$  中有关  $\lambda_i$  的  $n_i$  个列向量 (解向量) 都具有如下形式

$$e^{\lambda_i x} \left( \mathbf{r}_0 + \frac{x}{1!} \mathbf{r}_1 + \frac{x^2}{2!} \mathbf{r}_2 + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{n_i-1} \right)$$

其中  $\mathbf{r}_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n_i - 1$ ) 是  $n$  维常数列向量.

即假设  $\lambda_i$  对应着  $t_i$  个约当块, 设其阶分别为  $n_{i1}, \dots, n_{it_i}$ , 则  $n_{i1} + \dots + n_{it_i} = n_i$ . 那么  $\mathbf{A}$  的约当标准型  $\mathbf{J}$  中与  $\lambda_i$  有关的部分具有如下形状 (即  $\mathbf{J}_i$  部分,  $\mathbf{J}_i$  也是按  $\mathbf{J}_{ij}$  对角分块的)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{J}_s \end{bmatrix}_{n \times n} \rightsquigarrow \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_{ij} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{J}_{it_i} \end{bmatrix}_{n_i \times n_i} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{J}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_{ij} \times n_{ij}} \quad j = 1, \dots, t_i; \quad i = 1, \dots, s.$$

$$\text{记 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{p}_{11} \cdots \mathbf{p}_{1n_1}}_{\mathbf{P}_1} & \cdots & \underbrace{\mathbf{p}_{i1} \cdots \mathbf{p}_{in_i}}_{\mathbf{P}_i} & \cdots & \underbrace{\mathbf{p}_{s1} \cdots \mathbf{p}_{sn_s}}_{\mathbf{P}_s} \end{bmatrix}, \text{ 则 } e^{x\mathbf{A}}\mathbf{P} = \mathbf{P}e^{x\mathbf{J}} =$$

$$[\mathbf{P}_1 \cdots \mathbf{P}_i \cdots \mathbf{P}_s] \begin{bmatrix} e^{x\mathbf{J}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{x\mathbf{J}_i} & \\ & & & \ddots \\ & & & & e^{x\mathbf{J}_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 e^{x\mathbf{J}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{P}_i e^{x\mathbf{J}_i} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{P}_s e^{x\mathbf{J}_s} \end{bmatrix}$$

从而有关  $\lambda_i$  的部分为

$$\mathbf{P}_i e^{x\mathbf{J}_i} = [\mathbf{p}_{i1} \cdots \mathbf{p}_{in_i}] \begin{bmatrix} e^{x\mathbf{J}_{i1}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{x\mathbf{J}_{ij}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & e^{x\mathbf{J}_{it_i}} \end{bmatrix}$$

将  $\mathbf{p}_{ij}$  按顺序分组, 分为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i1} &= [\mathbf{p}_{i1} \cdots \mathbf{p}_{in_{i1}}]; \quad \mathbf{P}_{i2} = [\mathbf{p}_{i(n_{i1}+1)} \cdots \mathbf{p}_{i(n_{i1}+n_{i2})}]; \cdots \\ &\cdots; \mathbf{P}_{it_i} = [\mathbf{p}_{i(n_{i1}+\cdots+n_{it_{i-1}}+1)} \cdots \mathbf{p}_{in_{i1}+\cdots+n_{it_i}}] \end{aligned}$$

即  $\mathbf{P}_i = [\mathbf{P}_{i1} \mathbf{P}_{i2} \cdots \mathbf{P}_{it_i}]$ , 其中  $\mathbf{P}_{ij} (j=1, \cdots, t_i)$  为  $n_{ij}$  维 (行) 向量, 且

$$n_{i1} + \cdots + n_{it_i} = n_i$$

从而有关  $\lambda_i$  的部分可细写为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i e^{x\mathbf{J}_i} &= [\mathbf{P}_{i1} \cdots \mathbf{P}_{ij} \cdots \mathbf{P}_{it_i}] \begin{bmatrix} e^{x\mathbf{J}_{i1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{x\mathbf{J}_{ij}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & e^{x\mathbf{J}_{it_i}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i1} e^{x\mathbf{J}_{i1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{P}_{ij} e^{x\mathbf{J}_{ij}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{P}_{it_i} e^{x\mathbf{J}_{it_i}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

而

$$\mathbf{P}_{ij} e^{x\mathbf{J}_{ij}} = [\mathbf{p}_{i(n_{i1}+\cdots+n_{i(j-1)}+1)} \cdots \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\cdots+n_{i(j-1)}+n_{ij})}] e^{x\mathbf{J}_{ij}}$$

$$\text{其中 } e^{x\mathbf{J}_{ij}} = e^{\lambda_i x} \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!} \\ & 1 & x & \cdots & \frac{x^{n_{ij}-2}}{(n_{ij}-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & x \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n_{ij} \times n_{ij}} \quad j=1, \cdots, t_i$$

则不难看出：上面乘积矩阵中的含由  $x$  的最高次的列向量具有如下形式

$$e^{\lambda_i x} \left( \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij})} + \frac{x}{1!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-1)} + \frac{x^2}{2!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-2)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{x^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+1)} \right)$$

它是齐次方程  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  的一个解，代入后得到

$$\lambda_i e^{\lambda_i x} \left( \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij})} + \frac{x}{1!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-1)} + \frac{x^2}{2!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-2)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{x^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+1)} \right) \\ + e^{\lambda_i x} \left( \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-1)} + \frac{x}{1!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-2)} + \frac{x^2}{2!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-2)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{x^{n_{ij}-2}}{(n_{ij}-2)!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+1)} \right) \\ = \mathbf{A} e^{\lambda_i x} \left( \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij})} + \frac{x}{1!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-1)} + \frac{x^2}{2!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-2)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{x^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+1)} \right)$$

消去  $e^{\lambda_i x}$ ，得到

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \left( \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij})} + \frac{x}{1!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-1)} + \frac{x^2}{2!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-2)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{x^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+1)} \right) = \\ = \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-1)} + \frac{x}{1!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-2)} + \frac{x^2}{2!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-2)} + \dots \\ \dots + \frac{x^{n_{ij}-2}}{(n_{ij}-2)!} \mathbf{P}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+1)}$$

然后比较  $x$  的同次幂系数可得

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij})} = \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-1)} \\ (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-1)} = \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-2)} \\ \dots \\ (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+2)} = \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+1)} \\ (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+1)} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

即  $n_{ij}$  阶约当小块对应的基向量（构成一条约当链）由下确定

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I})^{n_{ij}} \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij})} = \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-1)} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij})} \\ \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-2)} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+n_{ij}-1)} \\ \dots \\ \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+1)} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{p}_{i(n_{i1}+\dots+n_{i(j-1)}+2)} \end{array} \right.$$

将所有  $t_i$  个  $n_{ij}$  ( $j = 1, \dots, t_i$ ) 阶小约当块  $\mathbf{J}_{ij}$  的如上情形综合起来考虑，便得到了与  $\lambda_i$  相关的  $n_i$  阶约当块  $\mathbf{J}_i$  所对应的齐次方程的解的情况，即有如下定理.

**定理 12.5.1** 设  $\lambda_i$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的  $n_i$  重特征根，则齐次方程有形如（其中  $\mathbf{r}_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n_i - 1$ ) 是  $n$  维常数列向量）

$$e^{\lambda_i x} \left( \mathbf{r}_0 + \frac{x}{1!} \mathbf{r}_1 + \frac{x^2}{2!} \mathbf{r}_2 + \dots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{n_i-1} \right)$$

的非零解的充要条件是： $\mathbf{r}_0$  是下面齐次线性方程的一个非零解

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I})^{n_i} \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

$$\text{且 } \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_i-1} \text{ 由 } \begin{cases} \mathbf{r}_1 = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_2 = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{r}_1 \\ \dots \\ \mathbf{r}_{n_i-1} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{r}_{n_i-2} \end{cases} \text{ 逐次确定.}$$

**定理 12.5.2** 设  $n$  阶实矩阵  $\mathbf{A}$  在复数域中的互异特征根为  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , 其重数分别为  $n_1, \dots, n_s$  ( $n_1 + \dots + n_s = n$ ), 则方程  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$  有如下基础解矩阵  $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \left[ e^{\lambda_1 x} \mathbf{P}_1^{(1)}(x), \dots, e^{\lambda_1 x} \mathbf{P}_{n_1}^{(1)}(x); \dots; e^{\lambda_s x} \mathbf{P}_1^{(s)}(x), \dots, e^{\lambda_s x} \mathbf{P}_{n_s}^{(s)}(x) \right]$$

其中

$$\mathbf{P}_j^{(i)}(x) = \mathbf{r}_{j0}^{(i)} + \frac{x}{1!} \mathbf{r}_{j1}^{(i)} + \frac{x^2}{2!} \mathbf{r}_{j2}^{(i)} + \dots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{jn_i-1}^{(i)}$$

是与  $\lambda_i$  相关的第  $j$  ( $j = 1, \dots, n_i$ ) 个向量多项式. 而  $\{\mathbf{r}_{j0}^{(i)}, \dots, \mathbf{r}_{jn_i-1}^{(i)}\}$  是齐次线性方程组  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I})^{n_i} \mathbf{r} = \mathbf{0}$  的  $n_i$  个线性无关的解. 且  $\mathbf{r}_{jk}^{(i)}$  的确定方法同前所述, 即

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{j1}^{(i)} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{r}_{j0}^{(i)} \\ \mathbf{r}_{j2}^{(i)} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{r}_{j1}^{(i)} \\ \dots \\ \mathbf{r}_{jn_i-1}^{(i)} = (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I}) \mathbf{r}_{jn_i-2}^{(i)} \end{cases}$$

**证明:** 由约当标准形的理论可知  $\mathbb{V}_i := \{\mathbf{r} \mid (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{I})^{n_i} \mathbf{r} = \mathbf{0}\}$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的  $n_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) 维不变子空间, 且它们的基可合并为  $\mathbb{C}^n$  的一组基, 即有如下直和分解

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_s$$

由定理 12.5.1 知  $\Phi(x)$  中的每列都是方程的解. 又注意到

$$\Phi(0) = \left[ \mathbf{r}_{10}^{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{n_1 0}^{(1)}; \mathbf{r}_{10}^{(2)}, \dots, \mathbf{r}_{n_2 0}^{(2)}; \dots; \mathbf{r}_{10}^{(s)}, \dots, \mathbf{r}_{n_s 0}^{(s)} \right]$$

由于上面的直和分解, 知  $\Phi(0)$  恰好构成空间  $\mathbb{R}^n$  的一组基, 从而线性无关. 根据刘维尔公式, 知  $\Phi(x)$  是基础解矩阵.  $\square$

**例 12.5.1** 求解方程组 
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + y_2 - y_3 \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + 2y_2 + y_3 \\ \frac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

**解：**该齐次方程的系数矩阵为  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，其特征方程为  $(\lambda - 2)^3 = 0$ ，故方程有三重特征根 2，则方程的通解具有如下形式

$$\mathbf{y}(x) = e^x(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 x + \mathbf{r}_2 x^2)$$

且  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  满足如下方程

$$\begin{cases} (\mathbf{A} - 2\mathbb{I})\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 \\ (\mathbf{A} - 2\mathbb{I})\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \\ (\mathbf{A} - 2\mathbb{I})^3\mathbf{r}_0 = \mathbf{0} \end{cases}$$

因为  $(\mathbf{A} - 2\mathbb{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ;  $(\mathbf{A} - 2\mathbb{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $(\mathbf{A} - 2\mathbb{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . 故  $\mathbf{r}_0$  可取  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . 代入上方程可知相应  $\mathbf{r}_1$  和  $\mathbf{r}_2$  分别为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

从而可知原方程有三个线性无关的独立解，分别为

$$\mathbf{y}_1(x) = e^{2x} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x^2 \right)$$

$$\mathbf{y}_2(x) = e^{2x} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \right)$$

$$\mathbf{y}_3(x) = e^{2x} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} x^2 \right)$$

故原方程的通解为

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{bmatrix} = \underbrace{[\mathbf{y}_1(x) \ \mathbf{y}_2(x) \ \mathbf{y}_3(x)]}_{\Phi(\mathbf{x})} \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

$$= e^{2x} \begin{bmatrix} 1+x-\frac{1}{2}x^2 & x & -x+\frac{1}{2}x^2 \\ -x & 1 & x \\ x-\frac{1}{2}x^2 & x & 1-x+\frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

注记 12.5.2 由上例中的计算, 也可看出  $\mathbf{A}$  的约当标准型为  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 即在

基  $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$  下, 其中  $\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ , 由于

$$\mathbf{A} = 2\mathbb{I} + \underbrace{(\mathbf{A} - 2\mathbb{I})}_{\mathbf{N}}$$

且  $\mathbf{N}\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1$ ;  $\mathbf{N}\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ ;  $\mathbf{N}\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ , 故

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{r}_2 \end{cases} \implies \mathbf{A}[\mathbf{r}_0 \ \mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2] = [\mathbf{r}_0 \ \mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}}$$

令  $\mathbf{P} = [\mathbf{r}_0 \ \mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$ , 则  $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ}$ , 又令  $\mathbf{y} = \mathbf{Pz}$ , 则以  $\mathbf{z}$  为

变量的方程为

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{P} \frac{d\mathbf{z}}{dx} = \mathbf{Ay} = \mathbf{APz} \implies \frac{d\mathbf{z}}{dx} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} = \mathbf{Jz}$$

即

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = 2z_1 + z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = 2z_2 + z_3 \\ \frac{dz_3}{dx} = 2z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \left( \frac{C_3}{2!}x^2 + C_2x + C_1 \right) e^{2x} \\ z_2 = (C_3x + C_2) e^{2x} \\ z_3 = C_3 e^{2x} \end{cases}$$

其中  $C_1, C_2, C_3$  是任意常数. 分别令  $(C_1, C_2, C_3)$  为  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  和  $(0, 0, 1)$ , 则得到如下三个独立 (线性无关) 解

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} xe^{2x} \\ e^{2x} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2!}e^{2x} \\ xe^{2x} \\ e^{2x} \end{bmatrix}$$

即基础解矩阵为  $\Phi(x) = [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2 \ \mathbf{z}_3]$ , 通解为  $C_1\mathbf{z}_1 + C_2\mathbf{z}_2 + C_3\mathbf{z}_3 = \Phi(x)\mathbf{C}$ .

最后得到关于  $\mathbf{y}$  的通解为  $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{z} = \mathbf{P}\Phi(x)\mathbf{C}$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & \frac{x^2}{2!}e^{2x} \\ 0 & e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \\ &= e^{2x} \begin{bmatrix} 1 & 1+x & -\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2} \\ 0 & -1 & -x \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**例 12.5.2** 求解方程组  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & -20 \\ 5 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

**解:** 其系数矩阵  $\mathbf{A}$  的特征多项式为  $-(\lambda - 5)(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$ , 故方程有单实根 5 和单共轭复根  $2 \pm i$ , 分别求出特征值对应的特征向量

$$\lambda = 5 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 2 \pm i \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{p}_{\pm} = \begin{bmatrix} 3 \pm i \\ 2 \mp i \\ -2 \end{bmatrix}$$

则方程有基础解矩阵为  $\Phi(x) = e^{5x}\mathbf{p}_1 + e^{2+i}\mathbf{p}_+ + e^{2-i}\mathbf{p}_- =$

$$= \begin{bmatrix} -2e^{5x} & (3+i)e^{(2+i)x} & (3-i)e^{(2-i)x} \\ 0 & (2-i)e^{(2+i)x} & (2+i)e^{(2-i)x} \\ e^{5x} & -2e^{(2+i)x} & -2e^{(2-i)x} \end{bmatrix}$$

对第二列和第三列的解, 我们可以提取相应共轭复解的实部和虚部, 从而得到如下独立实基础解矩阵

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} -2e^{5x} & (3\cos x - \sin x)e^{2x} & (\cos x + 3\sin x)e^{2x} \\ 0 & (2\cos x + \sin x)e^{2x} & (-\cos x + 2\sin x)e^{2x} \\ e^{5x} & -2\cos xe^{2x} & -2\sin xe^{2x} \end{bmatrix}$$

则所求通解为  $\mathbf{y} = \tilde{\Phi}(x)\mathbf{C}$ .

**例 12.5.3** 求解方程组  $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$ .

**解:** 系数矩阵的特征多项式为  $(\lambda-2)(\lambda+1)^2 = 0$ , 故方程有特征根  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1$  (二重). 对特征根  $\lambda_1 = 2$ , 求得相应特征向量为  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 其对应独立解为  $\mathbf{y}_1(x) = e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

尚需求出二重特征根  $\lambda_2 = -1$  对应的两个独立解, 假设其形式为

$$\mathbf{y}(x) = e^{-x}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 x)$$

其中  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$  满足方程  $\begin{cases} (\mathbf{A} + \mathbb{I})\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 \\ (\mathbf{A} + \mathbb{I})^2 \mathbf{r}_0 = \mathbf{0} \end{cases}$  由于

$$(\mathbf{A} + \mathbb{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{A} + \mathbb{I})^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

由此解得  $\mathbf{r}_0$  的两个线性无关解为  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . 将两者代入第一个方程, 皆

得  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ . 从而二重特征根  $-1$  对应的两个独立的解是

$$\mathbf{y}_2(x) = e^{-x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}_3(x) = e^{-x} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故方程的通解为  $\mathbf{y}(x) = \Phi(x)\mathbf{C} = C_1\mathbf{y}_1(x) + C_2\mathbf{y}_2(x) + C_3\mathbf{y}_3(x)$

$$= C_1 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{-x} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**注记 12.5.3** 上例中的解表明系数矩阵  $\mathbf{A}$  的约当标准型是对角矩阵  $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ .

从代数上来看, 这是因为二重根  $-1$  的几何重数等于 2, 即  $(\mathbf{A} + \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解空间是 2 维的, 从而矩阵  $A$  可对角化.

**例 12.5.4** 求解非齐次方程组 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y + 5t \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y + 8e^t \end{cases}$$

**解:** 对应齐次方程的矩阵  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  有特征根  $-1, 5$ , 故齐次方程的通解为

$$C_1 \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

利用常数变易法, 可设特解具有

$$C_1(t) \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} + C_2(t) \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

的形式, 将其代入原方程组后化简整理可得

$$\begin{cases} C_1' = \frac{5}{2}te^{-5t} + 4e^{-4t} \\ C_2'(t) = \frac{5}{2}te^t - 4e^{2t} \end{cases}$$

故得 
$$\begin{cases} C_1(t) = \left(-\frac{1}{2}t - \frac{1}{10}\right) e^{-5t} - e^{-4t} \\ C_2(t) = \left(\frac{5}{2}t - \frac{5}{2}\right) e^t - 2e^{2t} \end{cases}$$

得到原方程的特解为 
$$\begin{bmatrix} 2t - \frac{13}{5} - 3e^t \\ -3t + \frac{12}{5} + e^t \end{bmatrix},$$
 从而得到非齐次方程组的通解

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t - \frac{13}{5} - 3e^t \\ -3t + \frac{12}{5} + e^t \end{bmatrix}$$

### 13 附录 I: 一致连续及闭区间上连续函数的一致连续性

**定义:** 如果  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x', x'' \in [a, b]$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 有  $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ , 则称函数在  $[a, b]$  上是一致连续 (uniform continuous) 的.

下引理提供了比直接利用定义更为便捷的关于一致连续性的判别准则.

**引理:** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 则  $f(x)$  在  $I$  上一致连续当且仅当: 对任意  $I$  中的点列  $\{x'_n\}$  和  $\{x''_n\}$ , 只要  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$ , 就有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x'_n) - f(x''_n)) = 0$ .

**证明:** (必要性)  $f(x)$  在  $I$  上一致连续, 故  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x', x'' \in I$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 便有  $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ . 对上面的  $\delta > 0$ , 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$ , 知  $\exists N \in \mathbb{N}_{>0}$ , 使得  $\forall n > N$ , 有  $|x'_n - x''_n| < \delta$ , 从而  $|f(x'_n) - f(x''_n)| < \epsilon$ .

(充分性) 用反证法, 假设  $f$  在  $I$  上不是一致连续的, 那么  $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in I$ , 满足:  $|x' - x''| < \delta$ , 但  $|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon_0$ . 特别地, 取  $\delta_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ , 则得点列  $\{x'_n\}, \{x''_n\}$ , 满足:  $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ , 但  $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \epsilon_0$ . 也就是说此时  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0$ , 但  $\{f(x'_n) - f(x''_n)\}$  不可能收敛于 0, 这与假设矛盾, 从而可知反证的假设不成立, 即  $f(x)$  在  $I$  上是一致连续的.  $\square$

**例:** 有了上面的判别条件, 对  $(0, 1)$  上的函数  $\frac{1}{x}$ , 取  $x'_n = \frac{1}{2n}, x''_n = \frac{1}{n}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0, \text{ 但 } \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x'_n) - f(x''_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n) = \infty$$

故它在  $(0, 1)$  上不是一致连续的. 但可用类似方法验证它在  $[x_0, 1] (\forall x_0 > 0)$  上是一致连续的.

**定理** (康托 (Cantor, 1945-1918)) 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则它在  $[a, b]$  上一致连续.

**证明:** 假设  $f$  不一致连续, 则  $\exists \epsilon_0 > 0$  及点列  $\{x'_n\}, \{x''_n\}$  满足:  $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ , 但  $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \epsilon_0$ . 由于  $\{x'_n\} \subseteq [a, b]$  有界, 故由凝聚定理知它有收敛子列  $\{x'_{n_k}\}$ , 设其极限为  $\xi$ . 然后在  $\{x''_n\}$  取下标与  $\{x'_{n_k}\}$  相同的子列  $\{x''_{n_k}\}$ , 则由于  $|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n_k}, k = 1, 2, \dots$ . 得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x''_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [x'_{n_k} + (x''_{n_k} - x'_{n_k})] = \lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = \xi$$

由于  $\xi \in [a, b]$  是函数  $f(x)$  的连续点, 从而有  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_{n_k}) = f(\xi)$ . 但这与  $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \epsilon_0$  发生了矛盾. 从而假设不成立, 即  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是一致连续的.  $\square$

## 14 附录 II：分部求和，第二积分中值定理，欧拉求和

我们先介绍阿贝尔 (Abel) 变换的求和技术，它可以看成是分部积分的离散形式，故也称其为分部求和。

**Abel 变换：** 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是两数列，记  $B_k := \sum_{i=1}^k b_i (k = 1, 2, \dots)$ ，则有

$$\sum_{k=1}^p a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$$

**证明：** 注意到  $b_k = B_k - B_{k-1} (k \geq 2)$ ，可知

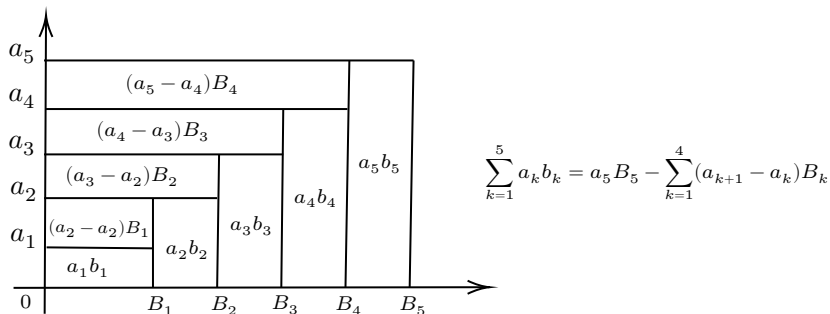
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p a_k b_k &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^p a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^p a_k B_k - \sum_{k=2}^p a_k B_{k-1} = \sum_{k=1}^{p-1} a_k B_k + a_p B_p - \sum_{k=2}^p a_k B_{k-1} \\ &= a_p B_p + \sum_{k=1}^{p-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_{k+1} B_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k \quad \square \end{aligned}$$

**注记：** 将  $\{a_n\}, \{b_n\}$  类比于函数  $f(x), g(x)$ ，则  $B_k$  可类比为  $G(x) := \int_a^x g(t) dt$ ，那么上面的分部求和公式类比于分部积分公式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - \int_a^b G(x)df(x)$$

其中，差 “ $a_{k+1} - a_k$ ” 类比为微分  $d(x)$ 。

下面是分部求和公式的图示：



下面的引理是分部求和的自然推论，它在以后学习级数收敛性时会有重要应用.

**阿贝尔引理：**符号同前，设  $\{a_k\}$  单调，且  $\{B_k\}$  有界，即  $\exists M > 0$ ，使得  $\forall k$ ，有  $|B_k| \leq M$ ，则成立

$$\left| \sum_{k=1}^p a_k b_k \right| \leq M (|a_1| + 2|a_p|)$$

**证明：**由阿贝尔变换，得

$$\left| \sum_{k=1}^p a_k b_k \right| \leq |a_p B_p| + \sum_{k=1}^{p-1} |a_{k+1} - a_k| |B_k| \leq M \left( |a_p| + \sum_{k=1}^{p-1} |a_{k+1} - a_k| \right)$$

因  $\{a_k\}$  单调，故  $\sum_{k=1}^{p-1} |a_{k+1} - a_k| = \left| \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) \right| = |a_p - a_1|$ ，从而

$$\left| \sum_{k=1}^p a_k b_k \right| \leq M (|a_1| + 2|a_p|) \quad \square$$

阿贝尔变换的下面推论有助于我们得到另一种形式的积分中值定理.

**推论：**设  $\{a_n\}$  是单调减少的正数列， $\{b_n\}$  是任一数列，记  $B_k = \sum_{i=1}^k b_i$  ( $k = 1, 2, \dots$ )，则若对任意  $k = 1, 2, \dots$ ， $B_k$  的值都介于  $A$  和  $B$  之间，那么  $S := \sum_{k=1}^p a_k b_k$  的值介于  $Aa_1$  和  $Ba_1$  之间.

**证明：**由分部求和： $S = \sum_{k=1}^p a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k =$

$$= a_p B_p + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{(a_k - a_{k+1})}_{>0 \text{ (单调性)}} B_k > A(a_p + a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \dots + a_{p-1} - a_p) = Aa_1$$

同理可证  $S < Ba_1$ .

**第二中值定理：**如果  $f(x)$  是区间  $[a, b]$  上的非负单调减少函数， $g(x)$  在  $[a, b]$  上可积，则  $\exists \xi$ ，( $a \leq \xi \leq b$ )，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)dx$$

**证明：**根据积分的定义，任取  $[a, b]$  的一划分： $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ，积分的值

为下和当  $\lambda := \max\{\Delta x_k\} \rightarrow 0$  时的极限:

$$S = \sum_{k=0}^n f(x_k)g(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

记  $M_k$  和  $m_k$  分别为  $g(x)$  在  $[x_{k-1}, x_k]$  上的上界和下界, 并记

$$S' = \sum_{k=0}^n M_k f(x_k)(x_{k+1} - x_k); \quad S'' = \sum_{k=0}^n m_k f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

显然,  $S$  介于  $S'$  和  $S''$  之间, 且由于  $f(x)$  非负、单调减少, 知

$$S' - S'' < f(a) \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

由此,  $\forall \mu_i \in [m_i, M_i]$ ,  $S_1 = \sum_{k=1}^n \mu_k f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$  的极限都是  $\int_a^b f(x)g(x)dx$ .

特别地, 由积分的第一中值定理, 知  $\exists \mu_i$ , 使得

$$\mu_k(x_k - x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx$$

故  $\exists \mu_i \in [m_i, M_i]$ , 使得

$$S_1 = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

结合上推论, 可知  $S_1$  的值介于  $Af(a)$  和  $Bf(a)$  之间, 其中

$$A = \min_{a \leq c \leq b} \int_a^c g(x)dx; \quad B = \min_{a \leq c \leq b} \int_a^c g(x)dx$$

故  $S_1$  的极限  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  也介于  $Af(a)$  和  $Bf(a)$  之间. 因为  $\int_a^c g(x)dx$  关于  $c$  连续, 可知  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx \quad \square$$

同理可证：如果  $f(x)$  是非负单调增加函数，则  $\exists \xi \in [a, b]$ ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \int_a^b g(x)dx$$

一般地，如果只假设  $f(x)$  是单调的，则有

**第二中值定理（一般形式）：** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  非负单调， $g(x) \in R[a, b]$ ，则  $\exists \xi \in [a, b]$ ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx$$

**证明：** 不妨设  $f(x)$  单调减少，对非负单调减少函数  $f(x) - f(b)$  应用上定理，直到  $\exists \xi \in [a, b]$ ，使得

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) - f(b))g(x)dx &= (f(a) - f(b)) \int_a^\xi g(x)dx \\ \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx &= f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx \end{aligned}$$

若  $f(x)$  单调增加，类似的考虑可致结论。  $\square$

**应用：** 我们证明狄利克雷积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  在  $+\infty$  处收敛。

$\forall x, x' \in (0, +\infty)$ ，对积分  $\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t} dt$  应用第二中值定理，知  $\exists \xi \in (x, x')$ ，使得

$$\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{x} \int_x^\xi \sin t dt = \frac{-1}{x} (\cos \xi - \cos x)$$

$$\Rightarrow \left| \int_x^{x'} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{2}{x} < \infty \quad \square$$

第二中值定理的上述证明本质依赖于分部求和（阿贝尔变换），其连续形式即为分部积分，故我们期待，如放宽条件，可利用分部积分直接证明之。下面假设  $f(x)$  连续，且  $g(x)$  可导，则第二中值定理可按下证明：

**证明：** 记  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，它是  $f(x)$  的一个原函数，且  $F(x)$  连续、满足  $F(a) = 0$ ，

利用分部积分, 得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)dx = g(b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

对上面的第二项积分, 由于  $g(x)$  单调, 故  $g'(x)$  保号, 由积分的第一中值定理, 知  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi) \int_a^b g'(x)dx = (g(b) - g(a)) \int_a^\xi f(x)dx$$

$$\begin{aligned}\text{综合可得 } \int_a^b f(x)g(x)dx &= g(b) \int_a^b f(x)dx - (g(b) - g(a)) \int_a^\xi f(x)dx \\ &= g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx \quad \square\end{aligned}$$

利用积分的第二中值定理, 可证下结论:

**定理 (A-D 判别法):** 当下面条件中任一条件成立时, 反常积分  $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$  收敛.

1.  $\forall A, \exists M > 0$ ,  $\int_a^A f(x)dx$  存在, 且  $\left| \int_a^A f(x)dx \right| < M$ , 又  $g(x)$  关于  $x$  单调减少, 且当  $x \rightarrow \infty$  时  $g(x) \rightarrow 0$ .
2.  $\int_a^\infty f(x)dx$  收敛, 且  $g(x)$  单调有界.

**证明:** 条件 1 (狄利克雷条件) 成立时,  $\forall A, A' \geq a$ , 有  $\left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < 2M$ ; 因  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , 故  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists A_0 \geq a$ , 使得当  $x > A_0$  时, 有  $|g(x)| < \frac{\epsilon}{4M}$ . 从而, 对任意  $A, A' \geq A_0$  时, 由第二积分中值定理, 知  $\exists \xi \in (A, A')$ , 使得

$$\begin{aligned}\left| \int_A^{A'} f(x)g(x)dx \right| &\leq |g(A)| \cdot \left| \int_A^\xi f(x)dx \right| + |g(A')| \cdot \left| \int_\xi^{A'} f(x)dx \right| \\ &\leq 2M|g(A)| + 2M|g(A')| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

由此不难推出积分收敛 (请读者自行推证) .

当条件 2(阿贝尔条件)成立时, 设  $G > 0$  是  $|g(x)|$  是其中一个上界, 由于  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 故  $\exists A_0 \geq a$ , 使得  $\forall A, A' \geq A_0$  时, 有 (请读者自行推证)

$$\left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2G}$$

则由积分第二中值定理, 知  $\exists \xi \in (A, A')$ , 使得

$$\begin{aligned} \left| \int_A^{A'} f(x)g(x)dx \right| &\leq |g(A)| \cdot \left| \int_A^{\xi} f(x)dx \right| + |g(A')| \cdot \left| \int_{\xi}^{A'} f(x)dx \right| \\ &\leq G \left| \int_A^{\xi} f(x)dx \right| + G \left| \int_{\xi}^{A'} f(x)dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \square \end{aligned}$$

**注记:** 上面证明中留给读者自行的推证的部分本质上是柯西收敛准则, 即

1. **对数列:** 数列  $\{x_n\}$  收敛的充分必要条件是:  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , 使得  $\forall m, n > N$ , 有

$$|x_m - x_n| < \epsilon$$

2. **对函数:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在当且仅当  $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$ , 使得  $\forall x', x'' > X$ , 有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

**证明:** 对数列, 必要性: 设  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , 使得  $\forall m, n > N$ , 有

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}; \quad |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

从而  $|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .

充分性: 取  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\exists N_0$ , 使得  $\forall n > N_0$ , 有  $|x_n - x_{N_0+1}| < 1$ , 则  $|x_n| \leq M$  ( $\forall n$ ), 其中

$$M := \max\{|x_1|, \dots, |x_{N_0}|, |x_{N_0+1}| + 1\}$$

由聚点原理知  $\{x_n\}$  中有收敛子列  $\{x_{n_k}\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi$ , 下证  $x_n \rightarrow \xi$ .

因为  $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ , 使得  $\forall m, n > N$ , 有  $|x_n - x_m| < \epsilon$ , 又  $\exists K$ , 使得  $k > K$  时  $n_k > N$ . 令  $x_m = x_{n_k}$ , 并令  $k \rightarrow \infty$  得  $|x_n - \xi| < \epsilon$ .

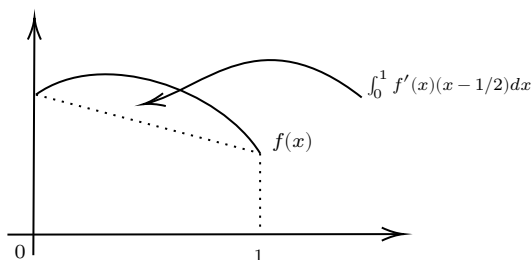
对函数情形的证明, 请读着自行完成.  $\square$

**例:** 对反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \arctan x}{x} dx$ , 已知  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛, 而  $\arctan x$  在  $[1, +\infty)$  上单调有界, 则由 A-D 判别法, 知反常积分收敛.

除先前计算积分时有用到, 相信上面的内容已让大家进一步体会到“分部积分”这一技术的强大威力, 其实它的威力远不止此, 下面的讨论或能让大家大受震撼, 为微积分的应用打开新的格局!

**梯形求积公式 (trapezoidal rule):** 设  $f(x) \in C[0, 1]$ , 利用分部积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) d\left(x - \frac{1}{2}\right) = \left[ f(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \underbrace{\frac{f(1) + f(0)}{2}}_{\text{作为积分的近似}} - \underbrace{\int_0^1 f'(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx}_{\text{近似之误差}} \end{aligned}$$



误差项可利用分部积分进一步变形:  $\int_0^1 f'(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 f'(x) d\left(\frac{x^2 - x}{2}\right)$

$$= \left[ f'(x) \left(\frac{x^2 - x}{2}\right) \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 f''(x) \left(\frac{x^2 - x}{2}\right) dx = - \int_0^1 f''(x) \left(\frac{x^2 - x}{2}\right) dx$$

$$\stackrel{\text{积分中值定理}}{=} -f''(\xi) \int_0^1 \frac{x^2 - x}{2} dx = -\frac{f''(\xi)}{12}, \quad \exists \xi \in [0, 1]$$

考虑积分  $\int_a^b g(x) dx$ , 为得到它的一个好的近似计算, 将区间  $[a, b]$  划分为  $n$  等分:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad x_j = a + jh, \quad h := \frac{b-a}{n}, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1$$

则

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)dx &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} g(x)dx \\
&\stackrel{x:=a+jh+th}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 \underbrace{g(a+jh+th)}_{=:f_j(t)} hdt \stackrel{\text{利用上计算}}{=} \\
&= h \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{f_j(0) + f_j(1)}{2} - \int_0^1 f_j''(t) \left( \frac{t^2-t}{2} \right) dt \right) = \\
&= h \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g(a+jh) + g(a+(j+1)h)}{2} + \\
&+ h^2 \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} g''(x) \left( \frac{((x-a-jh)/h)^2}{2} - \frac{((x-a-jh)/h)}{2} \right) dx \\
&= h \left( \frac{g(a)}{2} + g(a+h) + \cdots + g(a+(n-1)h) + \frac{g(b)}{2} \right) + \\
&+ h^2 \sum_{j=1}^{n-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} g''(x) \left( \frac{(\{(x-a)/h\})^2}{2} - \frac{(\{(x-a)/h\})}{2} \right) dx \\
&= h \left( \frac{g(a)}{2} + g(a+h) + \cdots + g(a+(n-1)h) + \frac{g(b)}{2} \right) + \\
&+ h^2 \int_a^b g''(x) \left( \frac{(\{(x-a)/h\})^2}{2} - \frac{(\{(x-a)/h\})}{2} \right) dx
\end{aligned}$$

其中  $\{x\} := x - [x]$  表示  $x$  的小数部分. 上面的公式即为积分近似计算的梯形公式. 当被积函数有更高阶导数时, 可通过如下修正得到更精确的近似计算公式.

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 f'(x) \left( x - \frac{1}{2} \right) dx \text{ 的误差下可按以下方式估计:}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f'(x) \left( x - \frac{1}{2} \right) dx &= \int_0^1 f'(x) d \underbrace{\left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right)}_v dx \quad \left( \int_0^1 v dx = 0 \right) \\
&= f'(x) \left( \frac{x^2}{12} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 f''(x) \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \right) dx \\
&= \frac{f'(1) - f'(0)}{12} - \int_0^1 f''(x) d \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f'(1) - f'(0)}{12} - f''(x) \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'''(x) \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} \right) dx \\
&= \frac{f'(1) - f'(0)}{12} + \int_0^1 f'''(x) d \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} \right) \\
&= \frac{f'(1) - f'(0)}{12} + f'''(x) \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 f^{(4)}(x) \frac{x^2(x-1)^2}{24} dx
\end{aligned}$$

由此可得如下近似

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{f'(1) - f'(0)}{12} + \int_0^1 f^{(4)}(x) \frac{x^2(x-1)^2}{24} dx$$

一般地, 利用上公式, 可得积分计算的**厄尔米特公式**:  $\int_a^b g(x) dx =$

$$= h \left( \frac{g(a)}{2} + g(a+h) + \cdots + g(a+(n-1)h) + \frac{g(b)}{2} \right) - \frac{h^2(g'(b)) - g'(a)}{12} + R_4$$

其中

$$R^4 = \frac{h^4}{24} \int_a^b g^{(4)}(x) \left\{ \frac{x-a}{h} \right\}^2 \left( \left\{ \frac{x-a}{h} \right\} - 1 \right)^2 dx \stackrel{\exists \xi \in [a,b]}{=} \frac{g^{(4)}(\xi)}{24} \frac{nh^5}{30}$$

**斯特林 (Stirling) 公式**: 利用上面的厄尔米特公式, 我们可以给出当  $n$  足够大时, 对阶乘  $n!$  的著名估计, 即斯特林公式:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta(n)}{12n}} \quad 0 < \theta(n) < 1$$

故  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n} = 1$ .

**证明**: 对  $g(x) = \ln x$ ,  $a = 1, b = n, h = 1$  利用上面的厄尔米特公式, 得

$$\begin{aligned}
\int_1^n \ln x dx &= x \ln x \Big|_1^n - \int_1^n dx = n \ln n - n + 1 = \\
&= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n-1) + \frac{\ln n}{2} - \frac{\frac{1}{n} - 1}{12} + R(n)
\end{aligned}$$

其中

$$R(n) = \int_1^n \left( -\frac{1}{x^2} \right) \left( \frac{\{x\}^2}{2} - \frac{\{x\}}{2} + \frac{1}{12} \right) dx$$

$$= \int_1^n \left( \frac{-1}{4x^4} \right) (\{x-1\}^2 (\{x-1\}-1)^2) dx < 0$$

显然  $R(n) < R(n+1)$ , 即单调减少, 将  $R(n)$  按如下拆分:  $R(n) =$

$$\int_1^{+\infty} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \left( \frac{\{x\}^2}{2} - \frac{\{x\}}{2} + \frac{1}{12} \right) dx - \int_n^{+\infty} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \left( \frac{\{x\}^2}{2} - \frac{\{x\}}{2} + \frac{1}{12} \right) dx$$

令常数

$$C := 1 - \frac{1}{12} + \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x^2} \right) \left( \frac{\{x\}^2}{2} - \frac{\{x\}}{2} + \frac{1}{12} \right) dx$$

则上面的计算表明:

$$\ln n! = \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + 1 + C + \underbrace{\int_n^{+\infty} \left( \frac{\{x\}^2}{2} - \frac{\{x\}}{2} + \frac{1}{12} \right) dx}_{\substack{\leq \frac{1}{12n} \\ \frac{\theta(n)}{12n}, 0 < \theta(n) < 1}}$$

$$\Rightarrow n! = e^C e^{(n+\frac{1}{2}) \ln n - n + \frac{\theta(n)}{12n}} = e^C \left( \frac{n}{e} \right)^n \sqrt{n} e^{\frac{\theta(n)}{12n}}$$

其中  $C$  由下极限确定:

$$C_1 := e^C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^{-n} n^{n+1/2}} \quad (1)$$

回忆瓦里斯 (Wallis) 公式:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot (2n)}{(1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1))} = \frac{\pi}{2}$ , 即

$$\pi/2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n n!)^4}{(2n)!^2 (2n+1)} \quad (2)$$

结合 (1), (2) 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_1^4 (2^n n^{n+1/2} e^{-n})^4}{C_1^2 ((2n)^{2n+1/2} e^{-2n})^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_1^2 n}{2(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow C_1 = \sqrt{2\pi} \Rightarrow C = \ln \sqrt{2\pi} \quad \square$$

**欧拉求和:** 在厄尔米特公式中, 如果  $g(x)$  具有更高阶导数, 我们可以继续利用分部积分对误差项进行估计, 从而得到更高阶的近似积分公式. 其一般形式就是所谓欧拉求和

公式——将作为连接离散和  $\sum_{k=m}^{k=n} f(k)$  和“连续和”  $\int_m^n f(x)dx$  之间的桥梁.

记  $B_0(x) = 1$ ;  $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ , 满足  $\int_0^1 B_1(x)dx = 0$ , 且

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \frac{f(1)+f(0)}{2} - \int_0^1 f'(x) \frac{B_1(x)}{1!} dx = \\ &= \frac{\overbrace{B_2'(x)=2B_1(x)}^{\int_0^1 B_2(x)=0}}{2} \frac{f(1)+f(0)}{2} - \frac{f(x)B_2(x)}{2} \Big|_0^1 + \int_0^1 f''(x) \frac{B_2(x)}{2!} dx \end{aligned}$$

继续, 三次多项式  $B_3$  由关系  $B_3'(x) = 3B_2(x)$ ,  $\int_0^1 B_3(x)dx = 0$  确定; 更一般地, 我们递归地定义  $k$  此多项式, 它满足

$$B_k'(x) = kB_{k-1}(x), \quad \int_0^1 B_k(x)dx = 0$$

由此可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \frac{f(1)+f(0)}{2} - \frac{f(x)B_2(x)}{2} \Big|_0^1 - \frac{f(x)B_3(x)}{3!} \Big|_0^1 - \int_0^1 f'''(x) \frac{B_3(x)}{3!} dx \\ &= \dots \dots \dots \\ &= \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=2}^m \left( f^{(k-1)}(x) \frac{B_k(x)}{k!} \right) \Big|_0^1 + (-1)^m \int_0^1 f^{(m)}(x) \frac{B_m(x)}{m!} dx \end{aligned}$$

上面定义的多项式  $B_k(x)$  称为第  $k$  个伯努利多项式,  $B_k := B_k(0)$  称为第  $k$  个伯努利数. 它满足

$$B_k(1) - B_k(0) = B_k(1) - B_k = \int_0^1 dB_k(x) = 0 \implies B_k(1) = B_k$$

从而上面的公式可写作  $\int_0^1 f(x)dx =$

$$= \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=2}^m \left( f^{(k-1)}(x) \frac{B_k}{k!} \right) \Big|_0^1 + (-1)^m \int_0^1 f^{(m)}(x) \frac{B_m(x)}{m!} dx \quad (*)$$

现假设  $f(x) \in C^m[M, N]$ , 其中  $M, N$  为整数, 即  $f(x)$  在区间  $[M, N]$  上具有  $m$

阶连续导数. 对  $f(x+j)$ ,  $j = M, \dots, N-1$ , 分别应用上面的公式 (\*), 得

$$\begin{aligned}
 \int_M^{M+1} f(x)dx &= \int_0^1 f(x+M)dx = \frac{f(M+1) + f(M)}{2} - \\
 &- \sum_{k=2}^m (f^{(k-1)}(x)) \Big|_M^{M+1} \frac{B_k}{k!} + (-1)^m \int_M^{M+1} f^{(m)}(x) \frac{B_m(x)}{m} dx \\
 \int_{M+1}^{M+2} f(x)dx &= \int_0^1 f(x+M+1)dx = \frac{f(M+2) + f(M+1)}{2} - \\
 &- \sum_{k=2}^m (f^{(k-1)}(x)) \Big|_{M+1}^{M+2} \frac{B_k}{k!} + (-1)^m \int_{M+1}^{M+2} f^{(m)}(x) \frac{B_m(x)}{m} dx \\
 &\dots \dots \\
 \int_{N-1}^N f(x)dx &= \int_0^1 f(x+N-1)dx = \frac{f(N) + f(N-1)}{2} - \\
 &- \sum_{k=2}^m (f^{(k-1)}(x)) \Big|_{N-1}^N \frac{B_k}{k!} + (-1)^m \int_{N-1}^N f^{(m)}(x) \frac{B_m(x)}{m} dx
 \end{aligned}$$

将上面这些式子相加, 得

$$\int_M^N f(x)dx = \frac{f(M) + f(N)}{2} + \sum_{k=M+1}^{N-1} f(k) - \sum_{k=2}^m (f^{(k-1)}(x)) \Big|_M^N \frac{B_k}{k!} + R_m$$

其中

$$R_m = (-1)^m \int_M^N f^{(m)}(x) \frac{B_m(\{x\})}{m!} dx$$

根据  $B_1(x) = x - 1/2$ ,  $B_1 = -1/2$ , 上式可写为

$$\boxed{\sum_{j=M}^{N-1} f(j) = \int_M^N f(x)dx + \sum_{k=1}^m (f^{(k-1)}(x)) \Big|_M^N \frac{B_k}{k!} - R_m}$$

上式即为欧拉求和公式.

**例 (自然数的幂和)** 设  $l$  是一正整数, 对  $f(x) = x^l$ ,  $M = 0$ ,  $m = l+1$  应用上欧拉公式, 得

$$\sum_{j=0}^{N-1} j^l = \int_0^N x^l dx + \frac{1}{l+1} \sum_{k=1}^m B_k \binom{l+1}{k} N^{l+1-k} - \underbrace{R_m}_{\equiv 0} =$$

$$= \frac{N^{l+1}}{l+1} + \frac{1}{l+1} \sum_{k=1}^m B_k \binom{l+1}{k} N^{l+1-k} = \frac{1}{l+1} \sum_{k=0}^m \binom{l+1}{k} B_k N^{l+1-k}$$

由此得到著名的雅克比-伯努利公式：

$$\sum_{j=0}^{N-1} j^l = \frac{1}{l+1} \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} B_k N^{l+1-k} \quad (*)$$

特别地

$$\sum_{j=0}^{N-1} j^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{1}{3} \left( B_1 \binom{3}{1} N^2 + B_2 \binom{3}{2} N \right) = \frac{N^3}{3} - \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$$

**例（自然数的交错整数幂和）** 接着我们考虑  $\sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{j-1} j^l = ?$  我们将其转为可利用上公式 (\*) 来求解. 首先, 当  $N$  为偶数时, 我们有

$$\begin{aligned} & 1^l - 2^l + 3^l - 4^l + \cdots + (N-1)^l - N^l \\ &= 1^l + 3^l + \cdots + (N-1)^l - (2^l + 4^l + \cdots + N^l) \\ &= 1^l + 2^l + 3^l + \cdots + N^l - 2(2^l + 4^l + \cdots + N^l) \\ &= 1^l + 2^l + 3^l + \cdots + N^l - 2^{l+1} \left( 1^l + 2^l + 3^l + \cdots + \left(\frac{N}{2}\right)^l \right) \end{aligned}$$

即得到

$$\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} j^l = \sum_{r=1}^N r^l - 2^{l+1} \sum_{r=1}^{\frac{N}{2}} r^l$$

当  $N$  为奇数时, 可得

$$\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} j^l = \sum_{r=1}^N r^l - 2^{l+1} \sum_{r=1}^{\frac{N+1}{2}} r^l = \sum_{r=1}^N r^l - 2^{l+1} \sum_{r=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} r^l$$

从而

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{j-1} j^l = \sum_{r=0}^{N-1} r^l - 2^{l+1} \sum_{r=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} r^l \xlongequal{\text{利用公式 } (*)} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^{j-1} j^l = \frac{1}{l+1} \sum_{r=0}^l \binom{l+1}{r} B_r N^{l+1-r} - \frac{1}{l+1} \sum_{r=0}^l \binom{l+1}{r} B_r \left( \left[ \frac{N-1}{2} \right] + 1 \right)^{l+1-r} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{l+1} \sum_{r=0}^l \sum_{r=0}^l \binom{l+1}{r} B_r \left( N^{l+1-r} - \left( \left[ \frac{N-1}{2} \right] + 1 \right)^{l+1-r} \right)$$

**例（调和序列求和）** 计算  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = ?$  该和与欧拉常数有关，下面用欧拉求和公式来计算.

**解：** 令  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $\int_n^h f(x) dx = \ln h - \ln n$  且有

$$f^{(2r-1)}(x) = (-1)^{2r-1} \frac{(2r-1)!}{x^{2r}} \quad f^{(2m)}(x) = -\frac{(2m)!}{x^{2m+1}}$$

代入欧拉求和公式，得

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^h \frac{1}{k} &= \int_n^h \frac{dx}{x} + \sum_{k=1}^{2m} (f^{(k-1)}(x)) \bigg|_1^n \frac{B_k}{k!} - R_{2m} \\ &= \ln h - \ln n - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{n} \right) - \sum_{r=1}^m \frac{B_{2r}}{2r} \left( \frac{1}{h^{2r}} - \frac{1}{n^{2r}} \right) + R_{2m} \end{aligned}$$

其中  $R_{2m} = - \int_n^h \frac{B_{2m}(\{x\})}{x^{2m+1}} dx$ . 由此可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{h-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{h-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{h-1} \frac{1}{k} - \ln h + \ln n + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{r=1}^m \frac{B_{2r}}{2r} \left( \frac{1}{h^{2r}} - \frac{1}{n^{2r}} \right) - R_{2m} \end{aligned}$$

令  $h \rightarrow \infty$ , 显然  $\frac{1}{h^{2r}} \rightarrow 0$ , 并记  $\gamma := \lim_{h \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{h-1} \frac{1}{k} - \ln h \right)$ . 从而

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \gamma + \ln n - \frac{1}{2n} - \sum_{r=1}^m \frac{B_{2r}}{2r \cdot n^{2r}} - R_{2m},$$

其中  $R_{2m} = - \int_n^\infty \frac{B_{2m}(\{x\})}{x^{2m+1}} dx$ . 上面的常数  $\gamma$  称为是欧拉常数.

## 15 附录 III：单摆、算术几何平均，水星进动与椭圆积分

我们已知，通过参数化  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$  ( $a > 0$ )，求得半径为  $a$  的单位圆的弧长为

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta = 2\pi a$$

对于椭圆： $x = a \sin \theta, y = b \cos \theta$  ( $a, b > 0, a \neq b$ )，求其弧长时会遇到

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \theta} d\theta \\ &\stackrel{k := \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}}{=} a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

其中  $k$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的离心率. 如同积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ，上面积分的被积函数不存在初等函数作为其原函数，上积分被称为椭圆积分 (*elliptic integral*)，更具体地，由变上限积分定义的如下原函数称为（第二类不完全）椭圆积分.

$$E(k, \theta) := \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

由椭圆积分定义的函数（变上限积分）统称为椭圆函数 (*elliptic function*)。椭圆积分具有广泛的现实应用，在近代数学发展中的作用至关重要.

**注记 15.1** 积分  $E(k) := E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$  被称为第二类完全椭圆积分.

**注记 15.2** 利用椭圆的参数化  $(x, y(x)) = \left(x, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)$   $x \in [0, a \cos \theta]$ ，求得对应的椭圆弧长为

$$\begin{aligned} aE(k, \theta) &= \int_0^{a \sin \theta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{a \sin \theta} \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{(x/a)^2}{1 - (x/a)^2}} dx \\ &= a \int_0^{a \sin \theta} \frac{\sqrt{1 - k^2 z^2}}{1 - z^2} dz \quad \left(z = \frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

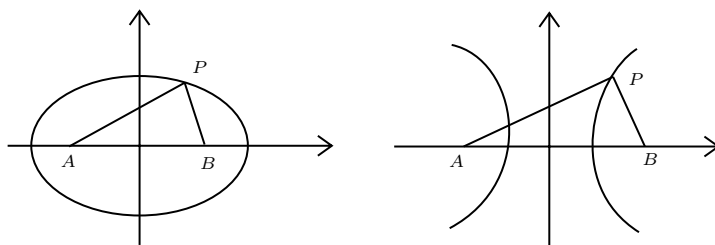
从而得到第二类椭圆积分的另一种表达方式：

$$E(k, \theta) = \int_0^{\sin \theta} \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}} dz; \quad E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}} dz$$

**卡西尼卵形线、伯努利双纽线：**在初等几何里，我们将椭圆和双曲线按如下定义：

$$\text{椭圆} : = \{P \mid PA + PB = l\}; \quad \text{双曲线} : = \{P \mid PA - PB = \pm l\}$$

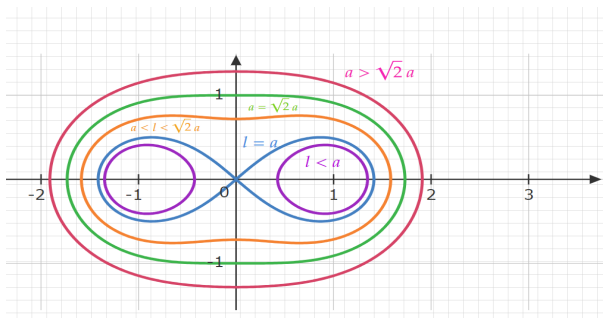
其中  $A, B$  是平面上两不同定点， $l$  为一正数.



下面考虑由关系  $\{P \mid PA \cdot PB = l^2\}$  定义的平面曲线，它称为是卡西尼卵形线 (Cassini Oval). 设  $P = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $A = (-a, 0)$ ,  $B = (a, 0)$ , 有

$$\begin{aligned} l^2 &= PA \cdot PB = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2ax + a^2} \sqrt{x^2 + y^2 - 2ax + a^2} \\ &= \sqrt{r^2 + 2ar \cos \theta + a^2} \sqrt{r^2 - 2ar \cos \theta + a^2} \\ &= \sqrt{(r^2 + a^2)^2 - 4a^2 r^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{r^4 + a^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\theta} \end{aligned}$$

由此得到卡西尼卵形线的方程为： $r^4 + a^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\theta = l^4$ . 特别地，当  $l = a$  时，对应的曲线为著名的伯努利双纽线 (lemniscate)，其极坐标方程为： $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ .



双纽线的直角坐标方程为:  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ . 我们找寻它的另一种方便的参数化, 令  $r = \sqrt{2}a \cos \psi$ , 有

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2 \cos^2 \psi \\ x^2 - y^2 = 2a^2 \cos^4 \psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \cos^2 \psi (1 + \cos^2 \psi) \\ y^2 = a^2 \cos^2 \psi (1 - \cos^2 \psi) \end{cases}$$

特别地, 在第一象限内 ( $x \geq 0, y \geq 0; 0 \leq \psi \leq \pi/2$ ), 双纽线有如下参数方程

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}a \cos \psi \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi} \\ y = a \cos \psi \sin \psi = \frac{a}{2} \sin 2\psi \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\psi} = \sqrt{2}a \frac{\sin \psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} \left(-\frac{3}{2} + \sin^2 \psi\right) \\ \frac{dy}{d\psi} = a(1 - 2 \sin^2 \psi) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2 = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}$$

故双纽线的弧长可通过下面的积分计算, 称为第一类不完全椭圆积分

$$F(k, \varphi) := \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad 0 < k < 1$$

且  $K(k) := F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$  称为是第一类完全椭圆积分.

做变量替换  $z = \sin \psi$ , 得  $dz = \cos \psi d\psi = \sqrt{1 - z^2} d\psi$ , 从而得上积分的另一种表达

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}; \quad K(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}$$

**雅克比椭圆函数** (Jacobi's elliptic function): 记  $u(\varphi) := F(k, \varphi)$ , 将其反函数记为  $\varphi = am(k, u)$ , 称为椭圆积分  $F(k, \varphi)$  的振幅. 也即,  $am(k, u)$  由下关系定义

$$u = \int_0^{am(k, u)} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad 0 < k < 1$$

定义  $sn(u, k) := \sin(am(k, u))$  为雅克比椭圆函数. 为简单起见, 在  $k$  值明确的情

况下, 下面省略诸记号中的  $k$ , 比如将  $K(k)$  简记为  $K$ ; 将  $sn(u, k)$  简记为  $sn(u)$  等.

由  $F(k, \varphi)$  的另一种表达  $\int_0^{\sin \varphi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$  知, 雅克比椭圆函数也可看成是由下关系定义

$$u = \int_0^{sn(u)} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

即  $sn(u)$  是 (由变上限积分定义的) 函数  $u(x) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$  的反函数.

雅克比椭圆函数  $sn(u)$  是三角函数  $\sin u$  的类比, 事实上, 它可看成是三角函数的推广, 这是因为: 当  $k = 0$  时, 上椭圆积分变为

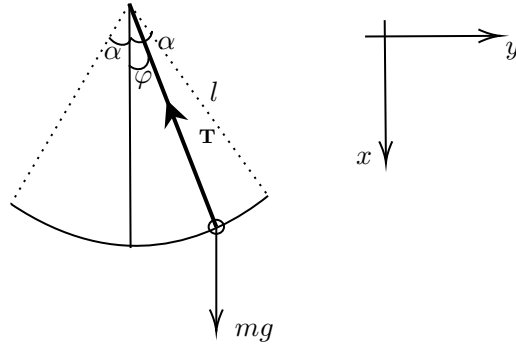
$$u(x) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin u \quad \Rightarrow \quad x = \sin u$$

但与三角函数不同的是, 椭圆函数具有两个不同的周期, 这不同于三角函数只有一个最小正周期, 所以椭圆函数也称为双周期函数 (*doubly periodic function*).

$sn(u)$  的一个周期是  $4K \equiv 4K(k)$ , 另一周期是复数  $2iK'$ , 其中  $K'$  由下面的椭圆积分定义

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \psi}} \quad \text{其中 } k' := \sqrt{1-k^2}$$

**单摆周期与椭圆积分:** 考虑一单摆 (*simple pendulum*), 其摆长为  $l$ , 摆幅为  $\alpha$ , 下面建立其运动方程.



设摆绳所受张力为  $T$ , 摆球质量为  $m$ , 则摆球在运动过程中所受力为

$$\mathbf{F} = (-T \cos \varphi + mg, -T \sin \varphi)$$

其中  $\varphi$ , 作为时间  $t$  的函数, 描述摆线相对垂直 ( $x$ -轴) 方向的偏角.

摆点的位移坐标为  $\mathbf{s} = (x(t), y(t)) = (l \cos \varphi(t), l \sin \varphi(t))$ ；摆点运动的加速度为

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \left( \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right) = \frac{d}{dt} (-l\dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t), l\dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t)) \\ &= \left( -l\ddot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) - l\dot{\varphi}(t)^2 \cos \varphi(t), l\ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) - l\dot{\varphi}(t)^2 \sin \varphi(t) \right)\end{aligned}$$

上面，我们采用了对依赖时间变量函数求导的牛顿计法，函数上加一个“点”，表示对时间求导一次；两个“点”表示对时间求导两次，等等.

由牛顿第二定律  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  得

$$ml \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \ddot{\varphi} - ml \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} \dot{\varphi}^2 = \begin{bmatrix} -T \cos \varphi + mg \\ -T \sin \varphi \end{bmatrix}$$

对上面的方程，做操作： $x$  分量  $\times (-\sin \varphi) + y$  分量  $\times (\cos \varphi)$  得到

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \quad \xLeftrightarrow{\omega := \sqrt{\frac{g}{l}}} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\omega^2 \sin \varphi$$

当  $\varphi$  很小时，我们有线性近似  $\sin \varphi \approx \varphi$ ，从而运动方程近似于下面的二阶常系数微分方程

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\omega^2 \varphi$$

其通解为  $\varphi(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ . 即理想情形（线性近似）下的单摆做简谐振动 (*harmonic oscillation*) .

下面我们寻求方程  $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0$  的精确解 (*exact solution*) . 方程两边乘  $\frac{d\varphi}{dt}$ , 得

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \frac{d\varphi}{dt} = -\omega^2 \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} (\omega^2 \cos \varphi)$$

两边对  $t$  积分，得  $\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \omega^2 \cos \varphi = \text{常数}$ ，也即总能量是守恒的，即

$$E := \underbrace{\frac{ml^2}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2}_{\text{动能}} - \underbrace{mgl \cos \varphi}_{\text{势能}} = \text{常数}$$

由于  $\alpha$  是单摆的最大振幅，即  $\varphi(t_0) = \alpha$ ,  $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ ，代入上式，得

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \omega^2 \cos \varphi = -\omega^2 \cos \alpha$$

即

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \omega^2 (\cos \varphi - \cos \alpha) = 2\omega^2 \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$

由于  $|\varphi| \leq \alpha < \pi$ , 故  $|\sin \frac{\varphi}{2}| < \sin \frac{\alpha}{2}$ , 从而上(能量守恒)方程可简化为

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\omega \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

为进一步化简, 令  $k := \sin \frac{\alpha}{2}$ , 且变量  $\theta$  由关系  $\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \theta$  确定, 即  $\theta = \arcsin \left( k^{-1} \sin \frac{\varphi}{2} \right)$ . 则上方程可写为

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 2\omega \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 \theta} = 2k\omega \cos \theta$$

对关系  $\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \theta$  两边对  $\theta$  求导, 得

$$k \cos \theta = \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}{2} \frac{d\varphi}{d\theta}$$

从而  $\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{2k \cos \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$ , 代入前面的方程, 得到  $\theta(t)$  满足下微分方程

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \omega dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \omega t$$

设  $\theta(0) = 0$ , 即  $\varphi(0) = 0$ , 也即在初始时刻, 摆线处铅直状态. 从而

$$t(\theta) = \frac{1}{\omega} \int_0^\theta \frac{d\psi}{1 - k^2 \sin^2 \psi} = \frac{1}{\omega} F(k, \theta) = \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \theta\right)$$

当  $\varphi = \alpha$  时,  $\sin \theta = 1$ , 即  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 由此可得单摆周期为

$$\begin{aligned} 4 \times \theta \text{ 从 } 0 \text{ 到 } \frac{\pi}{2} \text{ 的时间} &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(k) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \end{aligned}$$

取第一项, 即得通常的(线性近似)  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , 对应于当  $\alpha$  很小时(相应地

$k = \sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \approx 0$ ), 有

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

上例中看到椭圆积分是如何出现在物理问题中的, 下面在看它在一初等数学背景中的神奇“显现”!

**算术-几何平均与椭圆积分:** 给点  $a, b > 0$ , 由算术-几何平均不等式 ( $G \leq A$ ) 知

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

令  $a_0 = a, b_0 = b$ , 递归地, 我们定义如下序列

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}; \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

首先由“ $G \leq A$ ”及数学归纳法可证:  $a_n \geq b_n$ , 此外

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leq 0 \implies a_{n+1} \leq a_n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \geq 1 \implies b_{n+1} \geq b_n$$

即  $\{a_n\}$  是单调减少有界序列;  $\{b_n\}$  是单调增加有界序列, 且满足

$$b = b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq a_1 \leq a_0 = a$$

故两序列都有极限  $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n; \beta := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 且  $\alpha = \beta$ . 这是因为

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n - b_n &\leq a_n - b_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - b_{n-1} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \\ &\leq \frac{a_{n-2} - b_{n-2}}{2^2} \leq \dots \leq \frac{a_0 - b_0}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

记

$$M(a, b) := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

称之为  $a, b$  的算术-几何平均 (arithmetic-geometric mean). 不难看出它满足一下几个基本性质:

1.  $M(a, b) = M(b, a)$

$$2. M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b) \quad (\text{齐次性})$$

$$3. M(a, a) = a$$

$$4. M(a, b) = M(a_n, b_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

由上面性质 2 知, 只需研究  $M(a, 1)$  或  $M(1, b)$  (其中  $a > 1 > b$ ) . 下面的结论令人称奇, 它给出了算术-几何平均与椭圆积分之间的关系.

**定理:** 当  $0 < k < 1$  时,  $M(1, k) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{K(k')}$ , 其中  $k' := \sqrt{1 - k^2}$ , 且

$$K(k') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k'^2 z^2)}}$$

上定理是下基本引理的直接推论.

**引理:** 设  $a \geq b > 0$ , 则有

$$I(a, b) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{M(a, b)}$$

**定理之证明:** 有上引理, 可知

$$M(1, k) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{I(1, k)}$$

$$\text{但 } I(1, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 \theta}} = K(k'). \quad \square$$

**引理之证明:** 先证明等式  $I(a, b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ .

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \theta}} \\ &\stackrel{\substack{t = b \tan \theta \\ \frac{dt}{d\theta} = \frac{b}{\cos^2 \theta}; b^2 + t^2 = \frac{b^2}{\cos^2 \theta}}}{=} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} \stackrel{\substack{u := \frac{1}{2}(t - \frac{ab}{t}) \\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{2}(1 + \frac{ab}{t^2}) = \frac{ab + u^2}{t}}}{=} \\ &\stackrel{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2) = t^2((a+b)^2 + 4u^2)}{=} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{((a+b)^2 + 4u^2)(ab + u^2)}} \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{((a+b)^2 + 4u^2)(ab + u^2)}} = \int_0^\infty \frac{du}{\underbrace{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2\right)\left((\sqrt{ab})^2 + u^2\right)}}_{=I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)}}$$

由上等式，我们得到

$$I(a, b) = I(a_0, b_0) = I(a_1, b_1) = \cdots = I(a_n, b_n) = \cdots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(M(a, b), M(a, b))$$

$$\text{又对常数 } c, \text{ 有 } I(c, c) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{c} = \frac{\pi}{2c}.$$

$$\text{由此可知 } I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)} \quad \square$$

**注记：**类似地，可证：当  $k > 1$  时， $M(k, 1) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{K(k')}$ ，其中  $k' := \sqrt{1 - k^2}$

**例：**当  $k = \sqrt{2}$  时， $k' = \sqrt{-1}$ ，此时  $K(\sqrt{-1}) = \frac{\pi}{2M(\sqrt{2}, 1)}$ ，即

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\pi}{2M(\sqrt{2}, 1)} = \frac{\pi}{2 \times 1.981402347 \cdots}$$

**水星进动：**牛顿的引力理论说明：太阳系中运行的行星的单位质量所受太阳引力为  $\frac{\mu}{r^2}$ ，其中  $r$  为该单位质量距太阳的距离， $\mu$  为引力常数和太阳质量的乘积。爱因斯坦的广义相对论对此做了“相对论修正”。广义相对论认为：太阳质量导致的时空弯曲会对单位质量所受的引力作出如下（4 阶）修正：

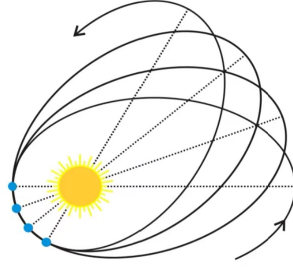
$$\mu \left( \frac{1}{r^2} + \frac{3h^2}{c^2 r^4} \right)$$

其中  $h$  为行星单位质量绕太阳运动时的角动量大小， $c$  是真空中光速。

在牛顿理论中，如果不考虑其它行星的影响，行星运行的轨迹是闭合的椭圆形状，但当考虑上面的相对论修正，椭圆轨迹将不再闭合：即行星运行一周后，轨迹将产生微进动（也叫旋进 *advance*），导致轨迹不再闭合。也就是说，椭圆轨迹的长轴将在行星运行中产生旋转。

太阳系中，水星的进动最明显。水星轨道的周期是  $T = 88$  天，其轨道半长轴为  $a = 57909050 \text{ km}$ ，偏心率为  $e = 0.205630$ 。早在 1859 年，法国的勒威耶（Leverrier of France）用微扰法计算出其它行星运动对水星近日点（the perihelion of Mercury）的进动造成的偏移为  $574''/\text{世纪}$ ，但实际观测结果是  $531''/\text{世纪}$ 。

由此，水星近日点的进动有一  $42.98''$ /世纪 的反常进动. 为解释这一反常，勒威耶猜测这可能是一个比水星更靠近太阳的水内行星吸引所致，但这一猜测一直未经正式. 直到 1915 年，爱因斯坦考虑广义相对论的修正后，计算出了反常进动的存在，从而也间接验证了广义相对论的合理性.



考虑到广义相对论效应，水星运动的方程在极坐标  $(r, \theta)$  下为

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \mu \left( \frac{1}{r} + \frac{h^2}{c^2 r^3} \right) = E$$

其中  $E$  为能量. 令  $u = \frac{1}{r}$ ，则上方程可化为

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{2\mu}{h^2}u - u^2 + \frac{2\mu}{c^2}u^3 + \frac{2E}{h^2}$$

上式右边第三项是个很小的量. 引入由下式确定的无量纲变量  $\nu$ :

$$u = \frac{\mu\nu}{h^2}$$

则轨道方程可写成

$$\left( \frac{d\nu}{d\theta} \right)^2 = 2\nu - \nu^2 + \alpha\nu^3 - \beta = f(\nu)$$

其中  $\alpha = 2 \left( \frac{\mu}{ch} \right)^2$ ， $\beta = -\frac{2Eh^2}{\mu^2}$ . 轨道的稳定性 (*stability*) 要求:  $0 < \beta \leq 1$ . 且  $\alpha$  比较小，对水星而言，其最大取值为  $\alpha = 5.09 \times 10^{-8}$ . 此外， $f(\nu)$  是个三次多项式，其三个根为实数，且满足  $0 < \nu_1 < 1 < \nu_2 < 2 < \nu_3$ .

$$f(\nu) = \alpha(\nu - \nu_1)(\nu - \nu_2)(\nu - \nu_3)$$

由于  $f(\nu) \geq 0$ , 故  $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$  ( $\nu \geq \nu_3$  将导致  $\nu \xrightarrow{\theta \rightarrow \infty} \infty$ , 即轨道脱离太阳系, 与实际不符, 故排除之). 将  $f(\nu)$  按  $\alpha$  做泰勒展开, 有

$$\nu_1 = 1 - e - \frac{\alpha}{2e}(1 - e)^3 + O(\alpha^2)$$

$$\nu_2 = 1 + e + \frac{\alpha}{2e}(1 + e)^3 + O(\alpha^2)$$

$$\nu_3 = \frac{1}{\alpha} - 2 + O(\alpha)$$

其中  $e^2 = 1 - \beta + \frac{2Eh^2}{\mu^2}$ . 对轨道方程两边积分, 可得轨道由下描述

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\theta = \int \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu - \nu_1)(\nu - \nu_2)(\nu - \nu_3)}}$$

为将其转变为标准椭圆积分, 令  $\nu = \nu_1 + \frac{1}{t^2}$ , 则上方程可写成

$$\alpha^{1/2}\theta = -\frac{2}{\sqrt{(\nu_2 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_1)}} \int \frac{dt}{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}$$

其中  $a^2 = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$ ,  $b^2 = \frac{1}{\nu_3 - \nu_1}$ . 定义  $k^2 = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_3 - \nu_1}$ , 则上积分可转为椭圆积分

$$\alpha^{1/2}\theta = \frac{1}{\sqrt{\nu_3 - \nu_1}} sn^{-1}(t\sqrt{\nu_2 - \nu_1})$$

即

$$\nu = \nu_1 + (\nu_2 - \nu_1) sn^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha(\nu_3 - \nu_1)}\theta\right)$$

在极坐标下为

$$\frac{1}{e} = \frac{\mu}{h^2} (A + B sn^2\eta\theta)$$

其中  $A = 1 - e - \frac{\alpha}{2e}(1 - e)^3 + O(\alpha^2)$ ,  $B = 2e + \alpha\left(3e + \frac{1}{e}\right) + O(\alpha^2)$ .

$$\eta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha(3 - e) + O(\alpha^2); \quad k^2 = 2e\alpha + O(\alpha^2)$$

当  $\alpha = 0$  时,  $A = 1 - e$ ,  $B = 2e$ ,  $\eta = 1/2$ ,  $k = 0$ , 此时轨道为经典椭圆轨道:

$$\frac{1}{r} = 1 - e \cos \theta$$

近日点位于  $\theta = \frac{K}{\eta}$  和  $\theta = \frac{3K}{\eta}$  之间，其变差为  $\Delta\theta = \frac{2K}{\eta}$ ，其中

$$K = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

则一个周期内水星近日点的进动为

$$\epsilon = \frac{2K}{\eta} - 2\pi = \frac{\pi \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \dots\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha(3 - e) + \dots} \stackrel{\alpha=5.09 \times 10^{-8}}{\approx} 43''/\text{世纪}$$

与观测结果吻合.