

第二章：函数的极限与连续性

目录

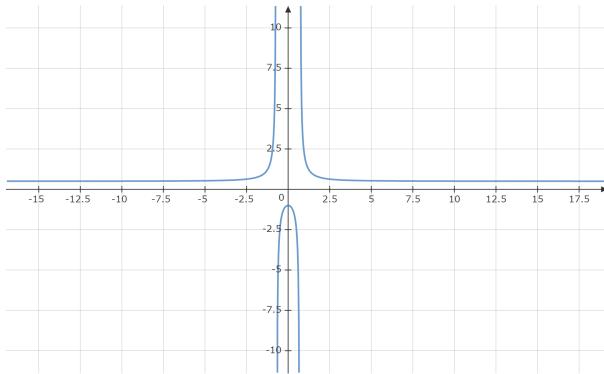
1 函数的极限	2
2 海涅定理, 函数极限的性质及运算法则	7
3 两个基本极限及极限计算举例 I	13
4 无穷小量与无穷大量的阶及其比较	17
5 无穷小(大)等价代换与极限计算举例 II	23
6 函数的连续性	28
7 不连续点(间断点)的类型	32
8 闭区间上连续函数的性质	33
9 附录一：极限与渐近线	39
10 附录二：无穷小的阶的运算	41
11 附录三：反函数连续性定理的证明	43

第二章：函数的极限与连续性

1 函数的极限

数列是特殊的函数，即定义域是 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ 的函数。特别地，如果数列 $\{x_n\}$ 可写成 $x_n = f(n)$ 的形式，则求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的问题相当于探讨函数 $f(x)$ 当 x 趋向正无穷 $+\infty$ 时的性状。

比如，我们知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 1} = \frac{1}{2}$ 。它对应为函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的取值可无限逼近于 $\frac{1}{2}$ ，即 $y = \frac{1}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的图像（曲线）的一条渐近线（asymptotic line）。见下图所示。



我们可以仿照数列极限的定义逻辑而给出 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 的极限的定义。

定义 1.1 设函数 $f(x)$ 在 $|x| > a$ (其中 a 为固定正常数) 时有定义，若存在实数 $A, \forall \epsilon > 0, \exists X > 0 (X > a)$ ，使得当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称当 x 趋向无穷时，函数 $f(x)$ 有极限 A ，或 $f(x)$ 在 x 趋于无穷时收敛于 A 。记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 。

设函数 $f(x)$ 在 $x > a$ (a 为固定常数) 时有定义，若存在实数 $A, \forall \epsilon > 0, \exists X > a$ ，使得当 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称当 x 趋于正无穷时，函数 $f(x)$ 有极限 A ，记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ；同理，设函数 $f(x)$ 在 $x < a$ (a 为固定常数) 时有定义，若存在实数 $A, \forall \epsilon > 0, \exists X < a$ ，使得当 $x < X$ 时，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称当 x 趋于负无穷时，函数 $f(x)$ 有极限 A ，记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 。

注记 1.1 在上定义的背景下，如果 $\forall A > 0, \exists X > 0 (X > a)$ ，使得当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x)| > A$ ，则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时是无穷大，记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 。

注记 1.2 由定义 1.1 可见: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 当且仅当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

例 1.1 我们用定义 1.1 严格证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2}$.

证明: 由于

$$\frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2(2x^2 - 1)} < \frac{3}{2x^2} \quad (x > 1)$$

故 $\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{3}{2\epsilon}} \right\}$, 则当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - \frac{1}{2}| =$

$$= \left| \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2x^2} < \frac{3}{2X^2} < \epsilon \quad \square$$

例 1.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 极限不存在, 这是因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

证明: $\forall \epsilon > 0$, 要使

$$-\frac{\pi}{2} - \epsilon < \arctan x < -\frac{\pi}{2} + \epsilon$$

只须 $x < \tan(-\frac{\pi}{2} + \epsilon)$. 故取 $X = \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon) > 0$, 则当 $x < -X$ 时, 有 $|\arctan x + \frac{\pi}{2}| < \epsilon$, 即证得 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$. 同理可证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. \square

例 1.3 如果 k 是正整数, 则不难推测 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$, 下面是其严格证明.

证明: $\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \epsilon^{-\frac{1}{k}}$, 则当 $|x| > X$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{x^k} - 0 \right| = \frac{1}{|x|^k} < \frac{1}{X^k} = \frac{1}{\epsilon^{-1}} = \epsilon \quad \square$$

例 1.4 不难看出 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. 下严格证之.

证明: $\forall \epsilon \in (0, 1)$, 取 $X = \ln \frac{1}{\epsilon} > 0$, 则 $\forall x < -X$, 有

$$0 < e^x < e^{-X} < \epsilon \quad \square$$

例 1.5 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 (0 < a < 1)$

证明: $\forall \epsilon > 0$, 取 $X = \log_a \epsilon$ (不妨设 $\epsilon < 1$, 则 $X > 0$), 则当 $x > X$ 时有

$$|a^x - 0| = a^x < a^X = \epsilon \quad \square$$

一般地, 对函数 $f(x)$, 若关注它当 $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 取值的极限情形, 则需引入

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 的概念.

注意, 这里 $x = a$ 不必在 $f(x)$ 的定义域之中, 因为我们关注的是 $f(x)$ 当 x 可以无限接近 $x = a$ 的变化, 而不在乎其是否在 $f(x)$ 处有定义.

记 $U(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为 x_0 的 δ 领域;

记 $\dot{U}(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 为 x_0 的去心 δ 领域.

定义 1.2 设 $f(x)$ 在点 a 的一个去心领域 $\dot{U}(a)$ 内有定义, 若存在实数 A , $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$. 则称当 x 趋向于点 a 时, 函数 $f(x)$ 的极限为 A , 或 $f(x)$ 收敛于 A , 记为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow a)$.

注记 1.3 上定义表明, 对任意小的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 x 落入任意半径小于 δ 的 a 的去心领域中时, 便可使 $f(x)$ 落入 $f(a)$ 的半径为 ϵ 的领域之内. 即 $\forall 0 < \delta' < \delta$, 若 $x \in \dot{U}(a, \delta')$, 则 $|f(x) - A| < \epsilon$.

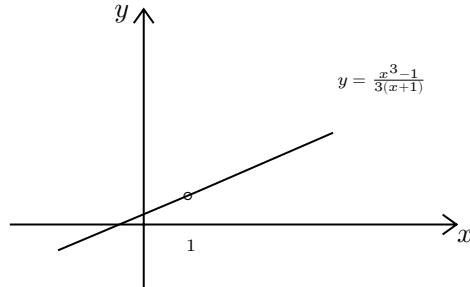
例 1.6 设 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3(x - 1)} = \frac{(x+1)(x-1)}{3(x-1)}$.

分析: 当 $x \rightarrow 1$ 时, 由于 x 只要求与 1 可无限接近 ($\forall \epsilon > 0$, 即要多接近就多接近), 但不要求 $x = 1$, 故在这一极限过程中, 函数的表达式可化简为 $f(x) = \frac{x+1}{3}$. 也就是说, 虽然函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处没有定义, 但这不影响我们考察当 $x \rightarrow 1$ 时函数的极限, 且在 x 无限接近 1 时, 函数的取值与 $\frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$ 可无限接近, 故我们期待 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{3}$. 下严格证之.

证明: 当 $x \neq 1$ 时, 有

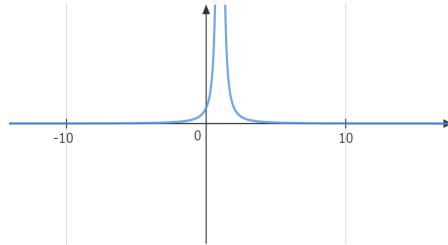
$$\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{x^2 - 1}{3(x - 1)} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{x+1}{3} - \frac{2}{3} \right| = \frac{|x - 1|}{3}$$

故 $\forall \epsilon > 0$, 要使 $\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| = \frac{|x-1|}{3} < \epsilon$, 只需 $|x - 1| < 3\epsilon$. 故取 $\delta = 3\epsilon$, 则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有 $\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| < \epsilon$. \square .



如果 $\forall A > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta_0$ 时, 有 $|f(x)| > A$, 则称 $f(x)$ 在 a 处为无穷大 (*infinitely large*), 记为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

例 1.7 对 $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, 我们证明 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, 由此知 $x = 1$ 是其图像的一条 (铅直) 漐进线 (*asymptote*) (见下图).



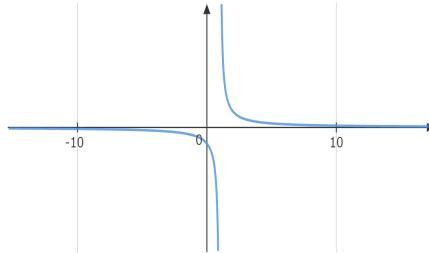
证明: $\forall A > 0$, 取 $\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{A}}$, 则当 $x \in \dot{U}(1, \delta_0)$ 时, 有 $|f(x)| = \frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{\delta_0^2} > A$ \square .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 反映了当 x 从 a 的两侧趋向于 a 时, 函数取值的极限情形. 有时我们只关注当 x 从 a 的右边 ($x > a$) 或从 a 的左边 ($x < a$) 趋向于 a 是函数取值的极限情形. 故需下定义

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在点 a 的一个右领域 $(a, a + \delta_0)$ 内有定义, 若存在实数 A , $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ($\delta < \delta_0$), 使得当 $a < x < a + \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 $f(x)$ 在 a 点的右极限 (*right limit*) 为 A , 记为 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, 或 $f(a + 0) = A$. 类似地可定义左极限 (*left limit*) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, 或 $f(a - 0)$ 的概念.

显然, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 都存在, 且其值都等于 A .

例 1.8 设 $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 则由其图像可见, 当 x 从 1 的右边无限接近 $x = 1$ 时, $f(x)$ 变为正无穷大, 而从 1 的左边无限接近 $x = 1$ 时, $f(x)$ 为负无穷, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.



证明: $\forall A > 1$, 取 $\delta = \frac{1}{A}$, 则当 $x \in (1, 1 + \delta)$, 即 $1 < x < 1 + \delta$ 时, 有

$$f(x) = \frac{1}{x-1} > \frac{1}{\delta} = A \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

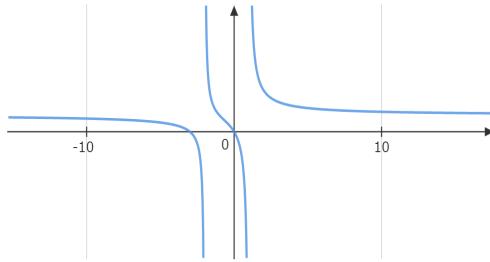
又 $\forall A > 1$, 取 $\delta = \frac{1}{A}$, 则当 $x \in (1 - \delta, 1)$, 即 $1 - \delta < x < 1$ 时, 有

$$f(x) = \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{\delta} = -A \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \square$$

例 1.9 对 $f(x) = \frac{x(x+3)}{(x-1)(x+2)}$, 显然 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. 下证

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

即 $x = 1$ 和 $x = -2$ 是函数图像的两条铅直渐近线 (*vertical asymptote*) .



证明: 只证明 $f(1+0) = +\infty$. 限制 $x \in (1, 2]$, 则 $\frac{x(x+3)}{x+2} \geq \frac{4}{3}$. 故当 $x \in (1, 2]$ 时

$$\frac{x(x+3)}{(x+2)(x-1)} > \frac{4}{3} \frac{1}{x-1}$$

则 $\forall A > 0$, 为使 $f(x) > A$, 只需 $x-1 < \frac{4}{3A}$, 即取 $\delta = \min\{\frac{4}{3A}, 1\}$, 则当 $x-1 < \delta$ 时, 有 $f(x) > A$. \square

定义: 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 是 x 趋于 a 时的无穷小量, 简称无穷小, 记为 $f(x) = 0(1)$ ($x \rightarrow a$).

显然, 若在 a 的去心领域 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 当且仅当 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

例 1.10 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5)$.

不难猜测极限为 6. 下证明之. 为方便分析当 $x \rightarrow 1$ 时的表现, 我们用变量 $u = x - 1$ 将函数在 $x = 1$ 附近重新整理为下面的形式 (相当于, 为更好地聚焦 $x = 1$ 附近函数的表现, 我们采用更恰当的坐标 u)

$$x^2 + 5 = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 6$$

则易见当 $x \rightarrow 1$ 时, 由于 $(x - 1)^2$ 和 $x - 1$ 皆是无穷小, 故 $x^2 + 5 \rightarrow 0 + 0 + 6 = 6$. 故 $\forall \epsilon > 0$, 我们希望找到 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - 1| < \delta$ (即 $x \in \dot{U}(1, \delta)$) 时, 有

$$|x^2 + 5 - 6| = |x^2 - 1| = (x + 1)|x - 1| < \epsilon$$

显然, 当 x 在 1 的一个去心领域内变动时, $x + 1$ 总是有界量, 而 $x - 1$ 当 $x \rightarrow 1$ 时是无穷小. 则为方便估值, 不妨将 δ 一开始就定于一个范围内, 比如 $\delta \leq 1$ (这不影响我们的证明, 因为我们只关心当 x 无限趋于 1 时函数的变动情况). 在此限定之下, $x \leq 1 + \delta \leq 2$, 即 $|x + 1| \leq 3$. 从而 $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{3}\}$, 则当 $x \in \dot{U}(1, \delta)$ 时, 有

$$|x^2 + 5 - 6| = |x^2 - 1| = (x + 1)|x - 1| < 3|x - 1| < 3\delta < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \square$$

例 1.11 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sqrt{\frac{1}{1-x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{1-x} - 1} \right)$

分析: 函数表达式较复杂, 不易化简, 为此我们利用新变量 $y := \frac{1}{1-x}$, 将函数表达为

$$\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} = \frac{2}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}}$$

显然, 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, $y \rightarrow +\infty$, 则不难看出所求极限为 0. 严格证明如下:

$\forall \epsilon > 0$, 取 $M = 1 + \frac{4}{\epsilon^2}$, 则当 $y > M$ 时, 成立

$$0 < \sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} = \frac{2}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}} < \frac{2}{\sqrt{y-1}} < \epsilon \quad \square$$

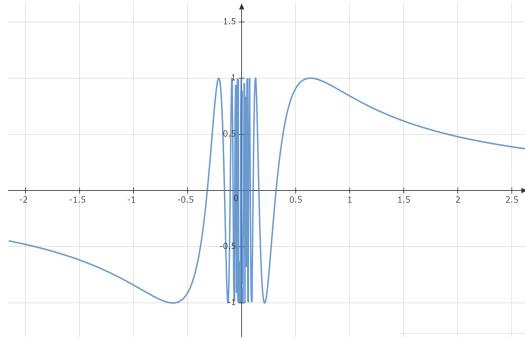
2 海涅定理, 函数极限的性质及运算法则

上节例 1.11 中的极限 $\lim_{y \rightarrow +\infty} (\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1})$ 与第一讲的例 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ 的结构和结果都是一致的. 这不是巧合, 其关联机理凸显于下定理之中.

定理 2.1 (海涅 (Heine)) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的充分必要条件是对任意满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $x_n \neq a$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 的数列 $\{x_n\}$ 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

海涅定理建立了函数极限同数列极限之间的关联，通过该定理，可利用数列极限求函数极限，也可利用函数极限求数列极限。常利用海涅定理来证明函数极限不存在。

例 2.1 对函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ，它当 $x \rightarrow 0$ 时振荡频率越来越高，以致于不能让它



利用海涅定理，假若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在，则对任意 $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在且都相等。但可取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ ， $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ，显然它们的极限都是 0，但 $f(x_n) = \sin 2n\pi = 0 \rightarrow 0$ ； $f(y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \rightarrow 1$ 。从而与假设矛盾，故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在。

例 2.2 对迪利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 我们利用海涅定理证明它在任

何一点都不存在极限。给定 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，由于 \mathbb{Q} 的稠密性，可找 \mathbb{Q} 中数列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ ，则 $D(x_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ；同理，可取一无理数数列 $\{y_n\}$ 收敛于 x_0 ，但 $D(y_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ 。故函数 $D(x)$ 在任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ 都不存在极限。□

海涅定理的证明：“ \Rightarrow ”设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ，则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得 $\forall x \in \dot{U}(a, \delta)$ ，有 $|f(x) - A| < \epsilon$ 。又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，且 $x_n \neq a (n = 1, 2, \dots)$ ，故对上述 $\delta > 0$ ， $\exists N \in \mathbb{N}$ ，使得 $\forall n > N$ ，成立 $0 < |x_n - a| < \delta$ 。故 $\forall n > N$ ，成立 $|f(x_n) - A| < \epsilon$ 。

“ \Leftarrow ”用反证法，假设 $f(x)$ 在 a 处的极限不存在或存在但 $\neq A$ ，则 $\exists \epsilon_0 > 0$ ， $\forall \delta > 0$ ， $\exists x \in \dot{U}(a, \delta)$ ，有 $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$ 。故取一列 $\delta_n = \frac{1}{n}$ ，从而有

对 $\delta_1 = 1$ ， $\exists x_1 \in \dot{U}(a, \delta_1)$ ，使得 $|f(x_1) - A| > \epsilon_0$ ；

... ...

对 $\delta_k = \frac{1}{k}$ ， $\exists x_k \in \dot{U}(a, \delta_k)$ ，使得 $|f(x_k) - A| > \epsilon_0$ ；

... ...

即找到趋向于 a 的数列 $\{x_n\}$, 但 $f(x_n)$ 不以 A 为极限, 矛盾. \square

利用定义证明极限常常是繁琐的, 在实践中常利用极限的性质及其运算法则来计算极限. 函数极限的基本性质和运算法则和数列的情形是相似的, 其证明的思路和方法也是一致的.

命题 2.1 (唯一性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 又 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, 则 $A = B$.

证明: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2$, 当 $0 < |x - a| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon/2$; 当 $0 < |x - a| < \delta_2$ 时, 有 $|f(x) - B| < \epsilon/2$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \square$$

另证: 利用海涅归结定理: 由于 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, 根据海涅归结定理, 对任意满足 $x_n \neq a$, 且 $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ 的数列, 皆有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$, 问题则转为数列极限的唯一性了. \square

命题 2.2 (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 则 $\exists \delta > 0$, 使得函数在 $\mathring{U}(a, \delta)$ 内有界.

证明: 由于 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 故对 $\epsilon = 1, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$, 即当 $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ 时, 有 $A - 1 < f(x) < A + 1$. 取 $M = \max\{|A - 1|, |A + 1|\}$, 则当 $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ 时, 成立 $|f(x)| < M$, 即有界. \square

命题 2.3 (局部保序性) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 且 $A > B$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ 时, 成立 $f(x) > g(x)$.

证明: 取 $\epsilon = \frac{A-B}{2}$, 由 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 知 $\exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 即有 $f(x) > A - \epsilon = \frac{A+B}{2}$. 同理, 由 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 知 $\exists \delta_2 > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - B| < \epsilon$, 即有 $g(x) < B + \epsilon = \frac{A+B}{2}$. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $f(x) > \frac{A+B}{2} > g(x)$ \square

推论 2.1 (局部保号性) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 且 $A > 0 (A < 0)$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ 时, 成立 $f(x) > \frac{A}{2} > 0 (f(x) < \frac{A}{2} < 0)$.

证明: 在命题 2.2 的证明中, 令 $B = 0$. \square

推论 2.2 若 $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ 时, 有 $f(x) \geq 0 (f(x) \leq 0)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 则必有 $A \geq 0 (A \leq 0)$.

证明: 假设 $A < 0$, 由局部保号性知, 在 a 的某一某去心领域内有 $f(x) < 0$, 这与 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(a, \delta)$ 内不小于零相矛盾 (总可让“某个去心领域”包含于 $\mathring{U}(a, \delta)$ 之中) \square

定理 2.2 (函数极限的运算法则) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, $h(x)$ 在 a 的某个去心领域内有界, 则有

1. $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x) + lg(x)] = kA + lB$, 其中 $k, l \in \mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = AB$;
3. 若 $A = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)h(x) = 0$;
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$);
5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{k}{m}} = A^{\frac{k}{m}}$, 其中 k, m 为正整数, m 为偶数时 $f(x) \geq 0$ (当 $k < 0$ 时, 通过 $[f(x)]^{\frac{k}{m}} = \frac{1}{[f(x)]^{-\frac{k}{m}}}$ 解决, 故结论对有理数幂指数都成立).

证明: 完全类似于对数列极限情形的证明. 记 $\alpha := f(x) - A$, $\beta := g(x) - B$. 则 α 和 β 都是当 $x \rightarrow a$ 时的无穷小量. 有

对 1. $kf(x) + lg(x) = k(A + \alpha) + l(B + \beta) = kA + lB + k\alpha + l\beta \xrightarrow{x \rightarrow a} kA + lB$

对 2. $f(x)g(x) = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta \xrightarrow{x \rightarrow a} AB$

对 3. 当 $f(x)$ 是无穷小量, $h(x)$ 为有界量时, 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\exists M > 0$, 使得当 $x \in \dot{U}(a, \delta)$ 时, 有 $|h(x)| \leq M$, 且 $|f(x)| < \frac{\epsilon}{M}$, 故有 $|f(x)h(x)| < \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon$

对 4. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A + \alpha}{B + \beta} = \frac{\frac{A}{B} + \frac{\alpha}{B}}{1 + \frac{\beta}{B}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{\frac{A}{B} + 0}{1 + 0} = \frac{A}{B}$

对 5. 当 $m = 1$ 时, 对正整数 k , $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^k \stackrel{2}{=} A^k$; $k = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^0 = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1 = A^0$; 对负整数 k , $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{[f(x)]^{-k}} \stackrel{\text{由 } 4}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{-k}} \stackrel{\text{由正整数情形}}{=} \frac{1}{A^{-k}} = A^k$.

当 $k = 1$ 时, 对正整数 m , 我们证明 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{1}{m}} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{A}$.

- $A = 0$ 时, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq \epsilon^m$, 则当 $x \in \dot{U}(a, \delta)$, 有 $|f(x)^{\frac{1}{m}}| < (\epsilon^m)^{\frac{1}{m}} = \epsilon$. 即 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{1}{m}} = 0 = A^{\frac{1}{m}}$.
- $A \neq 0$ 时, 在公式 $a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + b^{m-1})$ 中取 $a = \sqrt[m]{f(x)}$, $b = \sqrt[m]{A}$, 得

$$\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[m]{A} = \frac{f(x) - A}{\sqrt[m]{[f(x)]^{m-1}} + \sqrt[m]{[f(x)]^{m-2}}A + \dots + \sqrt[m]{A^{m-1}}}$$

$$\implies |\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[m]{A}| < \frac{|f(x) - A|}{\sqrt[m]{A^{m-1}}}$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(a, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \sqrt[m]{A^{m-1}}\epsilon$, 结合上面的放缩, 便知 $\forall \epsilon > 0$, 当 $x \in \dot{U}(a, \delta)$ 时, 成立 $|\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[m]{A}| < \frac{|f(x) - A|}{\sqrt[m]{A^{m-1}}} < \epsilon$

由上面的分类讨论, 知对任意的有理数 $\frac{k}{m}$ (k 为任意整数 m 为正整数), 都有

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{k}{m}} = \left[\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{1}{m}} \right]^k = \left(A^{\frac{1}{m}} \right)^k = A^{\frac{k}{m}} \quad \square$$

问题: 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 那么对任意实数 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^\alpha = A^\alpha$ 是否成立?

例 2.3 对有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 P, Q 是多项式函数, 设 $Q(x_0) \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

设 $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$; $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$. 若 $b_0 \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0}$$

另外, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 类似与数列极限的情形, 有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ \infty & n > m \end{cases}$

定理 2.3 (夹逼定理) 若存在 a 的去心领域 $\dot{U}(a, \delta)$, 使得在其中成立 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

证明: 利用海涅归结定理知, 对任意满足 $x_n \neq a$ 且 $x_n \rightarrow a$ 的数列, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = A$. 当 n 足够大时, 可使 x_n 落入 $\dot{U}(a, \delta)$ 中, 故当 n 足够大时, 有 $g(x_n) \leq f(x_n) \leq h(x_n)$, 则由数列的夹逼定理可证函数的夹逼定理. \square

定理 2.4 (单调有界函数单侧极限存在定理) 若 $f(x)$ 在点 a 的某个右领域 $(a, a+\delta)$ 内单调有界, 则其右极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在; 若 $f(x)$ 在点 a 的某个左领域 $(a-\delta, a)$ 内单调有界, 则其左极限 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 存在.

证明: 不妨设 $f(x)$ 单调增加 (单调减少的情形类似可证), 下面证明: $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in (a, a+\delta)} \{f(x)\} := m$. $\forall \epsilon > 0$, 由于 $m+\epsilon$ 不是 $\{f(x) \mid x \in (a, a+\delta)\}$ 的下界, 故存在 $x_0 \in (a, a+\delta)$, 使得 $f(x_0) < m+\epsilon$. 由 $f(x)$ 的单调性知, 当 $x \in (a, x_0)$ 时, 有 $f(x) < f(x_0) < m+\epsilon$, 但显然有 $f(x) > m-\epsilon$. 即当 $x \in (a, x_0)$ 时成立 $m-\epsilon < f(x) < m+\epsilon$, 从而 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m$. \square

推论 2.3 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调有界, 则 $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在.

在计算极限时, 我们常引入新的变量以便简化极限表达式, 或将其转变为已知极限, 从而方便我们的计算. 且看下例

例 2.4 为计算 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right)$, 可令 $u = x+1$, 则当 $x \rightarrow -1$ 时, $u = x+1 \rightarrow 0$, 且

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} &= \frac{1}{u} - \frac{3}{(u-1)^3+1} = \frac{1}{u} - \frac{3}{u^3-3u^2+3u} \\ &= \frac{1}{u} \left[1 - \frac{3}{u^2-3u+3} \right] = \frac{1}{u} \frac{u^2-3u}{u^2-3u+3} = \frac{u-3}{u^2-3u+3} \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u-3}{u^2-3u+3} = \frac{-3}{3} = -1$$

令 $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1}$, 令 $x = u-1$, 则上计算过程相当于 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} f(x(u))$. 其合理性由上计算可直观了解, 并由下定理得到保障.

定理 2.5 (变量替换) 若 $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$, 且当 $x \in \dot{U}(a)$ 时, $\varphi(x) \neq b$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = A$.

证明: 由 $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = A$ 知, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \sigma > 0$, 当 $0 < |u-b| < \sigma$ 时, 有 $|f(u)-A| < \epsilon$. 又因 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$, 知对上面的 $\sigma > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 成立 $|\varphi(x)-b| < \sigma$. 综合可知, 当 $x \in \dot{U}(a, \delta)$ 时, 成立 $|f(\varphi(x))-A| < \epsilon$. \square

注记 2.1 定理 2.5 中的条件: 在 a 的一去心领域内, $\varphi(x) \neq b$ 是必要的, 因为函数 $f(u)$ 未必在 $u=b$ 处有定义.

例 2.5 证明: $\forall x_0 > 0$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$. 即自然对数函数在其定义域内任意一点处的极限都存在, 且等于函数在该点的值.

证明: 利用变量 $u = \frac{x}{x_0}$, $\ln x = \ln \left(\frac{x}{x_0} x_0 \right) = \ln \frac{x}{x_0} + \ln x_0 = \ln u + \ln x_0$, 故只需 $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$. 它成立是因为 $\forall \epsilon > 0$, 为使 $|\ln u| < \epsilon$, 只需 $e^{-\epsilon} < u < e^\epsilon$, 即 $-e^{-\epsilon}(e^\epsilon - 1) < u-1 < e^{-\epsilon}(e^\epsilon - 1) < e^\epsilon - 1$. 取 $\delta = e^{-\epsilon}(e^\epsilon - 1)$, 则可使 $0 < |u-1| < \delta$ 时, 成立 $|\ln u| < \epsilon$. \square .

注记 2.2 对一般对数函数 $\log_a x$, 由于 $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, 故知对任意 $x_0 > 0$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

例 2.6 证明: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ ($a > 0$)

证明: 当 $a = 1$ 时结论显然成立; 假设当 $0 < a < 1$ 时, 结论成立, 则当 $a > 1$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} (1/a)^x} = \frac{1}{(1/a)^{x_0}} = a^{x_0}$$

从而只需表明当 $0 < a < 1$ 时 $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$. 又由于 $a^x = a^{x_0} a^{x-x_0}$, 利用变量替换 $u = x - x_0$, 则问题可转化为证明: 当 $0 < a < 1$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

由于函数 a^x 在 $(0, 1)$ 内单调有界, 故由定理 2.4 知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} a^x$ 存在, 为计算它, 根据海涅归结定理, 取趋向于 0 的数列 $\{\frac{1}{n}\}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. \square

3 两个基本极限及极限计算举例 I

下面两个极限有基本的重要性, 不仅其本身重要, 且很多极限问题都能通过转化到它们而得以求解.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

第二讲, 第八节, 例 8.9 中我们证明了不等式: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 有 $\sin x < x < \tan x$. 即有

$$\begin{aligned} \cos x &< \frac{\sin x}{x} < 1 \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow 0 &< 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

则由夹逼定理知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

注记 3.1 上面用到了: $0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$, 由此得知 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

对第二个极限, 只需表明: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. 因为当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 利用变量替换 $u = -x$, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{u}{u-1}\right)^u = \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right) = e \end{aligned}$$

当 $x > 1$ 时, 因为 $[x] \leq x < [x] + 1$, 故有

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 左边

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}{1 + \frac{1}{[x]+1}} = e$$

右边

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) = e$$

由夹逼定理知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \square$$

注记 3.2 令 $t = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 故上极限的另一种常见形式是

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e}$$

例 3.1 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

例 3.2 证明: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$.

$$\text{证明: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \square$$

例 3.3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{m}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n}.$$

例 3.4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}$.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

例 3.2 表明分母有极限 $\frac{1}{2}$, 下证分子也有极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

例 3.3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{5}{x}}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + (-3x))^{\frac{1}{-3x}} \right)^{\frac{-3x}{5}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + (-3x))^{\frac{1}{-3x}} \right)^{-15} \\ &\stackrel{t=-3x}{=} \left(\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{-15} = e^{-15} \end{aligned}$$

极限计算举例 I

例 3.4 证明: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

证明: 令 $t = \frac{1}{x}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow \infty$, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t$$

令 $u = \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow e$, 又由例 2.5 知道 $\lim_{u \rightarrow e} \ln u = \ln e = 1$

例 3.4' 证明: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a (a > 0)}$

证明: 令 $a^x - 1 = y$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 由例 2.6 知 $y \rightarrow 0$, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = (\ln a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \stackrel{\text{例 3.4}}{=} \ln a$$

例 3.5 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$ ($a, b \geq 0$)

分析：当 $n \rightarrow \infty$, $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \rightarrow 1$, 所以该极限的形式是 1^∞ . 这令我们想起了基本的极限 $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$, 它也是 1^∞ 形式. 受此启发, 我们尝试将极限写成基本极限的形式, 即考虑变形如下

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) \right)^{\left(\frac{2}{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1} \right)} \right]^{n\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}\right)}$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2} \right) \right] &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x-1}{x} \xrightarrow{\text{例 3.4'}} \frac{1}{2} (\ln a + \ln b) = \ln \sqrt{ab} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

注记 3.3 上面最后一步用到了结论, 如果 $f(x) > 0, g(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时极限都存在, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = A^B$. 这是因为 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, 且 $\ln f(x) \rightarrow \ln A$, 则由极限运算法则的乘法规则可知: $f(x)^{g(x)} \rightarrow e^{B \ln A} = A^B$

例 3.6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

分析: 难处理的部分是 $\sqrt[n]{1+x}$, 不如用 $t = \sqrt[n]{1+x} - 1$ 代之, 则原式变为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{(1+t)^n - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 + \binom{n}{1} t + \binom{n}{2} t^2 + \cdots + \binom{n}{n} t^n - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\binom{n}{1} + t \left(\binom{n}{2} + \cdots \right)} = \frac{1}{\binom{n}{1}} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

例 3.7 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$. 由于当 $x \neq 0$ 时成立: $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$. 故

$$\begin{cases} 1-x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1, & x > 0 \\ 1-x > x \left[\frac{1}{x} \right] \geq 1, & x < 0 \end{cases}$$

故由夹逼定理知 $\lim_{x \rightarrow 0} x [\frac{1}{x}] = 1$.

例 3.7 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\tan x}$.

分析: 极限类型为 1^∞ , 故考虑将其写成基本极限 $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ 的形式.

解: 令 $\sin x = 1+t$, 则当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ 时, $t \rightarrow 0^-$. 则有 $\tan x = \frac{1+t}{\sqrt{1-(1+t)^2}}$. 从而

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\tan x} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} (1+t)^{\frac{1+t}{\sqrt{1-(1+t)^2}}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left((1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{t(1+t)}{\sqrt{1-(1+t)^2}}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left((1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{t(1+t)^2}{-2t}} = e^0 = 1\end{aligned}$$

例 3.8 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2+x+1}$

$$\begin{aligned}\text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2+x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1 \right) \right)^{x^2+x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \left(\frac{-2}{x^2 + 1} \right) \right)^{-\frac{x^2+1}{2}} \right]^{\frac{-2}{x^2+1}(x^2+x+1)} = e^{-2}\end{aligned}$$

例 3.9 求常数 a , 使得 $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x^2 + a, & x \leq 0 \end{cases}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限存在.

解: $g(x)$ 在 $x = a$ 处的极限存在当且仅当其在 $x = a$ 处的左、右极限都存在且相等.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + a) = a; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0$$

故当且仅当 $a = 0$ 时 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 存在, 且此时 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

例 3.10 证明: 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a \sin x + b \cos x)$ 存在, 则必有 $a = b = 0$.

证明: 设 $f(x) = a \sin x + b \cos x$. 假设 a, b 不全为 0, 不妨设 $b \neq 0$. 取 $x_n = n\pi$, 有海涅归结定理知 $\{f(x_n)\}$ 亦收敛, 但此时 $f(x_n) = b \cos n\pi = b(-1)^n$. 由此可知 $b = 0$. 矛盾. 该矛盾表明 $a = b = 0$. \square

4 无穷小量与无穷大量的阶及其比较

无穷小量是动态量, 虽然最终趋向是一致的, 但其趋向于零的过程各有千秋, 比如当 $x \rightarrow 0$ 时, $x, x^2, \sin x, e^x - 1, 1 - \cos x$ 等都是无穷向量, 那么该如何区分它们 (当

x 无限接近 0 的过程中) 呢?

直观上来看, x^2 要比 x 趋向零的速度更快, 比如令 $x = \frac{1}{n}$ 的“步调”趋向零 ($n \rightarrow \infty$, 则 x^2 以 $\frac{1}{n^2}$ 的“步调”趋向零, 显然 x^2 以更快的速度趋向零, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

同理 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 表明 $\sin x$ 和 x 趋于 0 的速度也是一样的. 但由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{x}{\sin x} = (\lim_{x \rightarrow 0} x) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right) = 0$$

故 x^2 趋向于 0 的速度必 $\sin x$ 趋向于 0 的速度要快. 又由例 3.2 知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 所以 $1-\cos x$ 和 $\frac{x^2}{2}$ 趋向于 0 的速度是一致的.

定义 4.1 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是当 $x \rightarrow a$ (a 可为无穷) 时的无穷小量, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = l$

1. 若 $l = 0$, 则称 $x \rightarrow a$ 时, $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小 (*higher order infinitesimal*), 记为 $\beta(x) = o(\alpha(x))$ ($x \rightarrow a$);
2. 若 $l \neq 0$, 则称 $x \rightarrow a$ 时, $\beta(x)$ 是与 $\alpha(x)$ 同阶的无穷小, 记为 $\beta(x) = O(\alpha(x))$ ($x \rightarrow a$);
3. 特别地, 若 $l = 1$, 则称 $x \rightarrow a$ 时, $\beta(x)$ 是与 $\alpha(x)$ 等价的 (*equivalent*) 无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ($x \rightarrow a$).

注记 4.1 当 $l \neq 0$ 时, $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 是 $x \rightarrow a$ 时的有界量. $l = 1$ 时, 即 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ($x \rightarrow a$), 也称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时具有相同的渐进性态.

命题 4.1 $x \rightarrow a$ 时, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ 当且仅当 $\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$

证明: “ \Leftarrow ”: 若 $\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(\beta(x))}{\beta(x)} = 1 + 0 = 1, \text{ 即 } \alpha(x) \sim \beta(x)$$

“ \Rightarrow ”: 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ($x \rightarrow a$), 即 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则 $\alpha(x) = \beta(x) + (\alpha(x) - \beta(x))$, 且

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \square$$

例 4.1 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 = o(x)$, 一般地 $x^n = o(x^m)$ ($n > m$)

例 4.2 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\boxed{\sin x \sim x}$ $\boxed{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}}$ $\boxed{\tan x \sim x}$ $\boxed{\arcsin x \sim \arctan x \sim x}$.

例 4.3 例 3.4 及例 3.4' 表明：当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\ln(1+x) \sim x \quad a^x - 1 \sim (\ln a)x$$

$$\text{特别地, } e^x - 1 \sim x$$

例 4.4 例 3.6 表明：当 $x \rightarrow 0$ 时 $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$ 一般地，有

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (x \rightarrow 0)$$

证明（不太严格的）：首先可证当 α 是有理数时成立；当 α 是无理数时，取一收敛于 α 的有理数数列 $\alpha_n t \rightarrow \alpha$ ，在 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\alpha_n}}{x} = \alpha_n$ 两边同时令 $n \rightarrow \infty$ ，得结论对无理数 α 也成立。□

命题 4.2 等价无穷小是等价关系 (*equivalent relation*)，即

1. 反身性： $\alpha(x) \sim \alpha(x)$ ；
2. 对称性：如 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ，则 $\beta(x) \sim \alpha(x)$ ；
3. 传递性：如 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ，且 $\beta(x) \sim \gamma(x)$ ，则 $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

我们把相互等价的无穷小量看做一类，该如何对某一极限过程中所有的无穷小量进行分类呢？首先，注意到：当 $x \rightarrow a$ 时 $(x-a)^k$ ($k \geq 1$) 是标准的 (k 阶) 无穷小，常用其衡量无穷小量的阶，即有如下定义

定义 4.2 如 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ ，且 \exists 常数 $c \neq 0$ ，及整数 $k > 0$ ，使得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{(x-a)^k} = c$$

即当 $x \rightarrow a$ 时， $\alpha(x)$ 与 $(x-a)^k$ 同阶，则称 $\alpha(x)$ 是 k 阶无穷小 (k -th order infinitesimal)，并称 $c(x-a)^k$ 为其主部 (principal part)。此时，有

$$\alpha(x) = \underbrace{c(x-a)^k}_{\text{主部}} + o((x-a)^k)$$

且 $o((x-a)^k)$ 是更高阶的无穷小，即 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^k)}{(x-a)^k} = 0$

故可按无穷小的阶来对无穷小进行分类，即将有共同阶的无穷小看成是一类，其中任何一个无穷小可代表该类。我们常用 $(x-a)^k$ 来代表 $x \rightarrow a$ 时的 k 阶无穷小的类。

例 4.5 $a_k(x-a)^k + a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots + a_n(x-a)^n$ ($a_k \neq 0$) 是 $x \rightarrow 0$ 时的 k 阶无穷小, $a_k(x-a)^k$ 是其主部. 换言之

$$a_k(x-a)^k + a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots + a_n(x-a)^n \sim a_k(x-a)^k \quad (x \rightarrow 0)$$

例 4.6 $\sin x$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的一阶无穷小, x 是其主部; $1 - \cos x$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的二阶无穷小, $\frac{x^2}{2}$ 是其主部.

例 4.7 考察 $\tan x - \sin x$, 它是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量, 我们求其阶及其主部. 设其阶是 k , 则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^k \cos x} \\ &\stackrel{k=3}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

即 $\tan x - \sin x$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的三阶无穷小, 且其主部是 $\frac{x^3}{2}$, 换言之

$$\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$$

例 4.8 $\ln x - \ln a$ 是 $x \rightarrow a$ ($a > 0$) 时的几阶无穷小?

解: 假设阶是 k , 则应有 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{(x-a)^k} =$ 非零常数. 但

$$\frac{\ln x - \ln a}{(x-a)^k} = \frac{\ln(\frac{x}{a})}{(x-a)^k} = \frac{\ln[1 + (\frac{x}{a}-1)]}{(x-a)^k} \xrightarrow[t := \frac{x}{a}-1]{=} \frac{\ln(1+t)}{a^k t^k}$$

由 $\ln(1+x) \sim x$ ($x \rightarrow 0$) 知: $k = 1$. 此时

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{(x-a)^k} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{at} = \frac{1}{a}$$

故 $\ln x - \ln a$ 是 $x \rightarrow a$ ($a > 0$) 时的 1 阶无穷小, 且其主部是 $\frac{x-a}{a}$.

例 4.9 $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的几阶无穷小?

解: $\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x} = \frac{2\tan x}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x}}$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 分母为有界量, 而分子中 $\tan x \sim x$, 故知无穷小的阶是 1, 且因

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

即其主部是 x .

类似地，我们有无穷大的阶及其分类概念.

定义 4.3 如果 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是 $x \rightarrow a$ (a 可为 $\pm\infty$, 亦可只考虑左、右极限) 时的无穷大量, 即极限等于 ∞ , 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = L$, 则

1. 若 $L = \infty$, 则称 $u(x)$ 是比 $v(x)$, 在 $x \rightarrow a$ 时的高阶无穷大 (或 $v(x)$ 是比 $u(x)$ 低阶的无穷大) ;
2. 若 $L < \infty$, 即 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 在 x 的去心领域内有界, 则称 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是当 $x \rightarrow a$ 时的同阶无穷大, 记为 $u(x) = O(v(x))$;
3. 特别地, 若 $L = 1$, 则称 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是当 $x \rightarrow a$ 时的等价无穷大, 记为 $u(x) \sim v(x)$.

注记 4.2 当 $u(x)$ 是无穷大时, $\frac{1}{u(x)}$ 是 (同一个极限过程下的) 无穷小, 故关于无穷大的讨论可转换为关于无穷小的讨论, 反之亦然.

当 $x \rightarrow a$ 是, 最基本的 (k 阶) 无穷大是 $\frac{1}{(x-a)^k}$

定义 4.4 设 $u(x)$ 是 $x \rightarrow a$ 时的无穷大量, 则如果 $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^k u(x) = c$ (c 为非零常数), 则称 $u(x)$ 是 $x \rightarrow a$ 时的 k 阶无穷大, 并称 $\frac{c}{(x-a)^k}$ 是其 (当 $x \rightarrow a$ 时的, 或 $x = a$ 附近的) 主部. 显然, 此时有 $u(x) \sim \frac{c}{(x-a)^k}$.

注记 4.3 当 $x \rightarrow \infty$ 时, x^k 是基本的 k 阶无穷大. 假设 $u(x)$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大, 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x^k} = c$ (非零常数), 则称 $u(x)$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的 k 阶无穷大, 且 $\frac{x^k}{c}$ 是其主部. 显然, 此时有 $u(x) \sim \frac{x^k}{c}$.

例 4.10 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ($a_n \neq 0$) 是 n 阶无穷大, 且其主部为 $a_n x^n$, 即 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \sim a_n x^n$ ($x \rightarrow \infty$).

例 4.11 判断 $x^3 \sin \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的阶.

解: 由于当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sin \frac{1}{x}$ 是有无穷小量, 其 $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$. 故其作为无穷大量的阶应等同于 $x^3 \frac{1}{x} = x^2$ 的阶, 即阶为 2, 下面严格验证之.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

例 4.12 $\forall \alpha > 0$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, x^α 显然是无穷大量; 另外, $\ln x$ 也是 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大量, 我们比较一下它们趋于无穷的速度.

解: 对任意 $\alpha > 0$, 都有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \stackrel{y:=x^\alpha}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y} = \frac{1}{\alpha} 0 = 0$$

这说明：对任意 $\alpha > 0$, $\ln x$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 趋于正无穷的速度都小于 x^α 趋于正无穷的速度，故 x^α ($\alpha > 0$) 是比 $\ln x$ 更高阶的无穷大。也可以说 $\ln x$ 作为 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大是不存在阶的。

注记 4.4 对 $\ln \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时，它是无穷大量，下面的计算说明，它当 $x \rightarrow 0^+$ 时也不存在阶。

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^\alpha}} = 0$$

注记 4.5 上面利用到了 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$, 它可由如下考虑看出。由于 $\frac{\ln y}{y}$ 当 y 足够大时单调减少有下界，故其极限存在。从而 $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{\frac{1}{y}}$ 亦存在，且其值等于 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ (见《第二讲》例 4.3)。由此可知

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y^{\frac{1}{y}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \ln 1 = 0$$

例 4.12' 在例 4.12 中的计算中，令 $x = e^u$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^{\alpha u}} = 0$$

取 $\alpha = 1$, 则当 $u \rightarrow +\infty$ 时, e^u 相比于 u , 是更高阶的无穷大。事实上, 可证明: 当 $x \rightarrow \infty$ 时, e^x 没有阶, 即当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 对任意 $\beta > 0$, 它比 x^β 趋向无穷大的速度都要快。

证明: 由于

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^{\alpha u}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(u^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}{(e^u)^\alpha} = \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{e^u} \right)^\alpha = 0 \stackrel{\beta = \frac{1}{\alpha}}{\implies} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^\beta}{e^u} = 0 \quad \square$$

注记 4.6 无穷小(大)的阶可以不是正整数。比如对 $u(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1.$$

故 $u(x) \sim \sqrt{x}$ ($x \rightarrow +\infty$)。而当 $x \rightarrow 0^+$ 时

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \sqrt{x}} = 1$$

故 $u(x) \sim \sqrt[4]{x}$ ($x \rightarrow 0^+$)。

5 无穷小（大）等价代换与极限计算举例 II

例 5.1 我们知道：若 $a_0, b_0 \neq 0$, 下极限成立

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + \dots + a_l}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } l = m; \\ 0, & \text{若 } l < m; \\ \infty, & \text{若 } l > m. \end{cases}$$

我们也知道当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + \dots + a_l \sim a_0 x^l; \quad b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m \sim b_0 x^m$$

而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^l}{b_0 x^m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } l = m; \\ 0, & \text{若 } l < m; \\ \infty, & \text{若 } l > m. \end{cases}$$

即在计算极限时，我们用分子、分母的用其等价无穷大替换了.

例 5.2 在计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ 时，如果直接用等价替换 $\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$, 则将得到极限为 0 的错误论断. 产生这种错误的根源在于： $\sin x - \tan x$ 的无穷小阶要大于 $\sin x$ 和 $\tan x$ 的阶，所以如果贸然代替，则会产生代替后的无穷小的阶小于原无穷小的阶的情况，从而产生错误（类似于用放缩发证明极限时放缩过度的情形）. 也可从运算角度理解为： $\frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \frac{(x+o(x)) - (x+o(x))}{x^3} = \frac{o(x) - o(x)}{x^3}$, 但我们只知道分子上的两个 $o(x)$ 都是大于 1 阶的无穷小，但其差完全不能确定，即直接替换太粗糙了，不能给出有效的关于极限状态的信息.

解：

$$\frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^3} = \frac{\sin x(\cos x - 1)}{x^3 \cos x}$$

由于 $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, 故尝试用 x 替代 $\sin x$; 用 $\frac{x^2}{2}$ 替代 $1 - \cos x$, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \frac{x^2}{2}}{x^3 \cos x} = -\frac{1}{2}$$

即得到了有限的极限，故必是原极限的值. 这是因为：当 $x \rightarrow 0$ 时，分母的无穷小是三阶的 x^3 , 而分子上

$$\sin x(1 - \cos x) = (x + o(x)) \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) =$$

$$= \frac{x^3}{2} + \underbrace{x o(x^2) + \frac{x^2}{2} o(x^2) + o(x)o(x^2)}_{=o(x^3)} = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

则

$$\frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3} = \frac{x^3/2 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

注记 5.1 由上例可知, 对于无穷小相减(加)时, 往往需要用更高阶的无穷小来替代各无穷小, 才能保障计算的正确性. 比如, 之后我们会知道, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 对于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 有更精确的估计:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

从而

$$\begin{aligned} \sin x - \tan x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \\ &= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + \underbrace{o(x^3) - o(x^3)}_{=o(x^3)} = -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

例 5.2 的解采用了将和差的形式化为乘除形式, 然后利用无穷小等价替换, 使得分子上无穷小的阶不小于分母上无穷小的阶. 其合理性由下定理给出.

定理 5.1 设 $\alpha(x), \beta(x), \widetilde{\alpha(x)}, \widetilde{\beta(x)}$ 都是同一自变量变化过程中的无穷小, 并且 $\alpha(x) \sim \widetilde{\alpha(x)}$, $\beta(x) \sim \widetilde{\beta(x)}$, 若 $\lim \frac{f(x)\beta(x)}{\alpha(x)}$ 存在, 则

$$\lim \frac{f(x)\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}}$$

证明:

$$\begin{aligned} \lim \frac{f(x)\beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim \left(\frac{\beta(x)}{\widetilde{\beta(x)}} \cdot \frac{\widetilde{\alpha(x)}}{\alpha(x)} \cdot \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}} \right) = \\ &\left(\lim \frac{\beta(x)}{\widetilde{\beta(x)}} \right) \left(\lim \frac{\widetilde{\alpha(x)}}{\alpha(x)} \right) \left(\lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}} \right) = \lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}} \quad \square \end{aligned}$$

极限计算举例 II

例 5.3 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x}(1 - \cos x)}{x \ln(1 + 2x)}$.

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x}(1 - \cos x)}{x \ln(1 + 2x)} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x(2x)} = \frac{e}{4}$$

例 5.4 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc^2 x}$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc^2 x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)^{\csc^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \csc^2 x \ln(\cos x)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\cos x-1)}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

例 5.5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

分析: 已知 $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ($x \rightarrow 0$), 即 $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$. 又 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ($x \rightarrow 0$), 即 $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. 故

$$\begin{aligned} \text{解: } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x - 1} - \sqrt[3]{1 + \cos x - 1}}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 + \frac{\cos x - 1}{2} + o(\cos x - 1)] - [1 + \frac{\cos x - 1}{3} + o(\cos x - 1)]}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2) + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) + o(x^2)\right)}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + 0}{1 + 0} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

例 5.6 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}$

分析: 如果直接用替代: $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$, 将得到极限为零的错误结论. 这是因为, 分子上的无穷小是 1 阶, 小于分母的无穷小阶. 我们将分子化为乘积的形式

$$\text{解: } \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} = \frac{(1+x) - (1 + \frac{x}{2})^2}{x^2 (\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2})} = \frac{-\frac{x^2}{4}}{x^2 (\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2})} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{8}$$

注记 5.2 如果要用无穷小等价替换解上题, 需要分子上至少是 2 阶无穷小. 已知 $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ ($x \rightarrow 0$), 即 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$. 为找到更高阶的无穷小形式, 我

们需确定最小的 k , 使得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^k} = c \text{ (非零常数)}$$

$$\begin{aligned} \text{因为: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1+\frac{x}{2})^2}{x^k (\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4}}{x^k (\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2})} \\ &\stackrel{k=2}{=} -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

即当 $k = 2$ 时, 极限值 $c = -\frac{1}{8}$. 从而有

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$$

则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{8} + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{8} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1} = \frac{-\frac{1}{8} + 0}{1} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

例 5.7 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

解: 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2\left(\pi n \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \pi \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right) \\ &\stackrel{t:=\frac{1}{n}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \sin^2 \pi \left(\frac{\sqrt{1+t}}{t}\right) \stackrel{\sqrt{1+t} \sim 1 + \frac{x}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \sin^2 \pi \left(\frac{1 + \frac{t}{2}}{t}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{x}\right) \stackrel{n=\frac{1}{x}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} = 1 \end{aligned}$$

注记 5.3 如果不用等价替换, 我们可按如下方面计算. 注意到 $\sin^2 \pi n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - \pi\sqrt{n^2})$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\frac{\pi (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}) (\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1
\end{aligned}$$

例 5.8 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$ ($x > 0$)

$$\begin{aligned}
\text{解: } n(\sqrt[n]{x} - 1) &= \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{\frac{1}{n} = t} \frac{x^t - 1}{t} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^t - 1}{t} \xrightarrow{\text{由 3.4'}} \ln x
\end{aligned}$$

例 5.9 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x + o(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) + o(x + o(x))}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) + o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1
\end{aligned}$$

6 函数的连续性

函数的连续性是一个局部概念，也就是说，我们可以讨论函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处是否连续。如果一个函数在其定义域中的每个点处都连续，则说它是一个连续函数。

直观上来看，说 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续即意味着：当自变量 x 在 x_0 的一个领域内连续变化时，对应函数值的变化也应该是连续的，即无如下面中函数所表现出的“跃迁”行为。

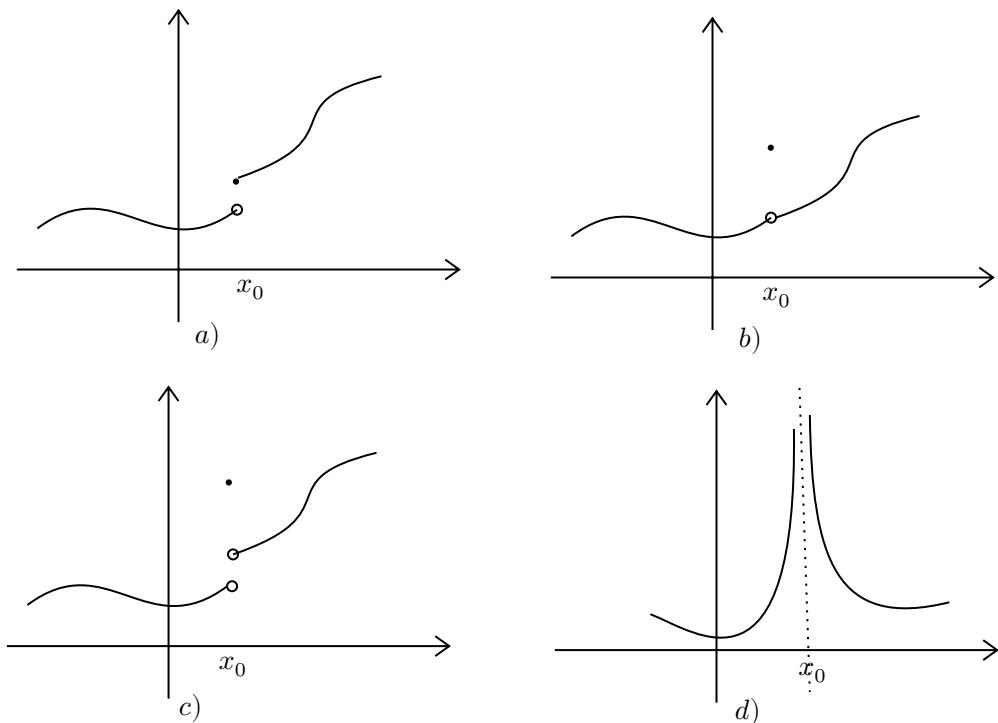


图 a) 中的函数在 x_0 处的左极限 $f(x_0 - 0)$ 不等于右极限 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ 的；图 b) 中的函数在 x_0 处虽然有极限（即左、右极限存在且相等），但它不等于该点函数的值；图 c) 中的函数在 x_0 处的左、右极限不相等，也不等于在该点函数的值；图 d) 中的函数在 x_0 处的极限不存在。

在 x_0 点处，给自变量以增量 $\Delta x := x - x_0$ ，对应函数值的增量为

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

则函数在 x_0 处连续要求：对任意的微小增量 Δx ，对应 $\Delta f(x)$ 也是微小增量。即

要求

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

定义 6.1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续 (*continuous*), 并称 x_0 是 $f(x)$ 的一个连续点; 如果 $f(x)$ 在 x_0 不连续, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, 并称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

注记 6.1: 上定义说明, 要验证函数 $f(x)$ 在 x_0 是连续的, 需要求

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 即左、右极限存在且相同.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (特别地 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且其取值有限)

定义 6.2 如果 $f(x)$ 在 x_0 的某右领域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续 (*right continuous*); 同理, 如果 $f(x)$ 在 x_0 的某左领域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续 (*left continuous*) .

命题: $f(x)$ 在 x_0 处连续当且仅当它在 x_0 处既左连续又右连续.

证明: 显然.

例 6.1 图 a) 中函数在 x_0 处是右连续的, 但不是连续的; 图 b) 中的函数在 x_0 处即不是左连续, 也不是右连续, 虽然它在 x_0 处的极限存在; c) 中函数处既不是左连续, 也不是右连续的; 图 d) 中的函数在 x_0 处的极限不存在 (或为无穷大), 故是不连续的.

定义 6.2 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 指它在开区间 (a, b) 内连续, 且在 a 处右连续、在 b 处左连续.

用符号 $C(I)$ 表示区间 I 上全体连续函数的集合. 所以 $f \in C(I)$ 表示 f 在 I 上连续. 无歧义时也省略其中的括弧, 比如 $C[a, b]$ 表示闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数全体.

例 6.2 证明 $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明: 利用三角函数的和差化积公式

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$0 \leq |\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$$

由夹逼定理得: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ \square .

由于 $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, 故知 $\cos x$ 在其定义域内也是连续的.

例 6.3 指数函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证明: $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (a^{x-x_0}) \stackrel{t=x-x_0}{=} a^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} a^t = a^{x_0} \quad \square$$

例 6.4 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内连续.

证明: $\forall x_0 \in (0, 1)$. $\forall \epsilon > 0$, 需要找到 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 成立 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 即

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x - x_0}{xx_0} \right| < \epsilon \quad (*)$$

为方便估计, 不妨将 x 的范围限制于 $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, 即 $x > \frac{x_0}{2}$, 故 $xx_0 > \frac{x_0^2}{2}$, 从而

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x - x_0}{xx_0} \right| < \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}$$

由此可见, 如取 $\delta = \min \left\{ \frac{x_0^2}{2}\epsilon, \frac{x_0}{2} \right\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 条件 (*) 即可满足. \square

定理 6.1 (连续函数的四则运算) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, 则有

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x) + lg(x)) = kf(x_0) + lg(x_0), \forall k, l \in \mathbb{R}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = f(x_0)g(x_0)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} (g(x_0) \neq 0).$$

证明: 根据函数极限的四则运算规则. \square

定理 6.2 (复合函数的连续性) 设函数 g 在点 x_0 处连续, 而函数 f 在点 $u_0 = g(x_0)$ 处连续, 则复合函数 $f \circ g$ 在点 x_0 处连续, 即有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = f[g(x_0)]$$

证明: 由于 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$, 故 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, 当 $|u - u_0| < \eta$ 时, 有 $|f(u) - f(u_0)| < \epsilon$. 又由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, 则对上面的 η , $\exists \delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - u_0| < \eta$. 由此可知: 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f[g(x)] - f[g(x_0)]| = |f[g(x)] - f(u_0)| = |f(u) - f(u_0)| < \epsilon \quad \square$$

注记 6.2 如果没有连续性条件, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = f[g(x_0)]$ 一般是不成立的, 比如 $f(x) = 1$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. 显然, f 连续, g 在 1 处是不连续的, 但 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$. 然而, 复合函数 $g(f(x))$ 在 $x = 1$ 处没定义.

引理 6.1 (反函数存在引理) 若函数 $y = f(x)$ 在其定义域上 $D(f)$ 严格单调, 则存在它的反函数 $x = f^{-1}(y)$, $y \in R(f)$, 且 $f^{-1}(y)$ 也是严格单调的, 并且和 $y = f(x)$ 的单调性是一致的.

证明: 不妨设 $y = f(x)$ 在 $D(f)$ 上严格单调增加. 我们说明, 对任意 $y \in R(f)$, 都有唯一 $x \in D(f)$ 与之对应, 即 $f(x) = y$, 从而表明 $f^{-1} : R(f) \rightarrow D(f)$ 存在. 假设另有 x' 与 y 对应, 即 $f(x') = y$, 且不妨设 $x < x'$, 则由 f 的严格单调性知 $f(x) < f(x')$, 这与它们都等于 y 相矛盾了. 下证 f^{-1} 也具有与 f 相同的严格单调性. 在 $R(f) = D(f^{-1})$ 中, 设 $y_1 < y_2$, 记 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. 如果 $x_1 \geq x_2$, 那么必有 $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$, 矛盾, 故 $x_1 < x_2$, 从而 f^{-1} 也是严格单调增加的. \square

定理 6.3 (反函数连续性定理) 设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且严格单调增加, 且 $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, 则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续且严格单调增加.

证明: 见附录三.

由定理 6.1 知, 多项式函数及有理函数在其定义域内都是连续的; 例 6.2 又表明 $\sin x, \cos x$ 是连续的, 结合定理 6.1 便知 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 都连续; 例 6.3 指出指数函数 a^x 在其定义域内连续, 故双曲函数 $\sinh x, \cosh x$ 等也在其定义域内连续, 又由定理 6.3 知, 指数函数的反函数对数函数也在其定义域内是连续的; 对于幂函数 x^a , 由于 $x^a = e^{a \ln x}$, 结合定理 6.2 知其也在其定义域内是连续的.

故五类基本初等函数在其定义域内都是连续的, 由此即知

定理 6.4 所有初等函数在其定义域内连续. 故对初等函数 $f(x)$, 如果 $x_0 \in D(f)$, 则必有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

例 6.5 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\text{解: } (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln \cos x}{x^2}} = e^{\frac{\ln(1-2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2}} = e^{\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \ln(1-2\sin^2 \frac{x}{2})^{\frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \ln(1-2\sin^2 \frac{x}{2})^{\frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}}} \right) \xrightarrow{e^x, \ln x \text{ 连续}} e^{\frac{1}{2} \ln e^{-1}}$$

7 不连续点（间断点）的类型

定义 7.1 如果 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个不连续点，也称为间断点 (*discontinuous point*) .

由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续意味着：

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

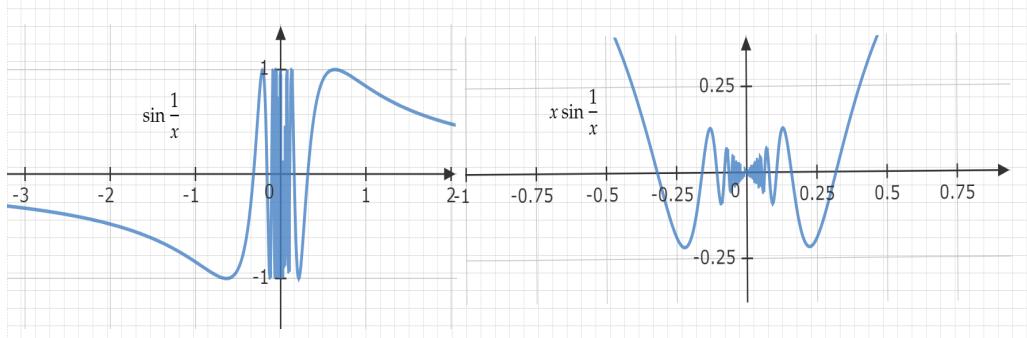
故若 x_0 是间断点，则 $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ 这三者至少有一个不存在，或它们都存在但不全相等。按此逻辑，我们对间断点可作出如下分类：

1. 第一类间断点：左、右极限均存在，但不连续

- (a) 可去间断点： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在（即 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 存在且相等），但 $f(x)$ 在 x_0 点无定义，或不等于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. (称其为“可去”，因为我们可以在该点重新定义函数的取值，令其等于极限值，便可使函数在该点连续。)
- (b) 跳跃间断点： $f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0 + 0)$ 存在但不相等。

2. 第二类间断点：左、右极限至少有一个不存在。

- (a) 无穷间断点： $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$.
- (b) 振荡间断点： $x \rightarrow x_0$ 时，函数值在两个不同数之间不断地变动无限多次。（即振荡但又不收敛，如 $\sin \frac{1}{x}$ ，以区别于类似 $x \sin \frac{1}{x}$ 这种振荡但收敛的函数。）

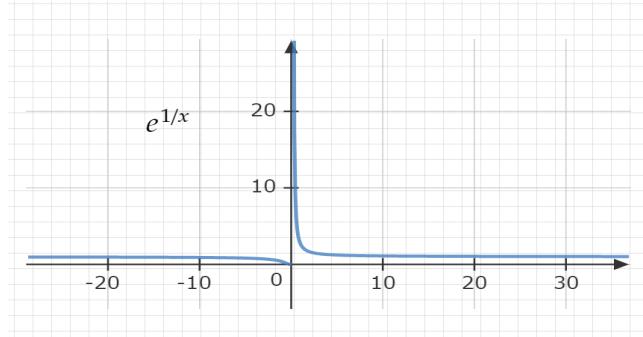


例 7.1 对 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ，我们只需规定 $f(0) = 0$ ，那么 $f(x)$ 就是 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数了，换言之，0 是其第一类间断点的可去类型。但是对 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ，由于 $x \rightarrow 0$ 时，它没有极限，故 0 是第二类间断点的振荡类型。

例 7.2 对函数 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, 它在 0 处无定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

故 0 是 $e^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点的无穷类型.



例 7.3 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^\sigma \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x^3 + b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性, 其中 σ, b 为常数.

解: 首先 $f(0) = b$, 且 $f(0 - 0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + b) = b = f(0)$.

- $\sigma > 0$ 时, $f(0 + 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$;
- $\sigma = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在 (因函数值无穷振荡);
- $\sigma < 0$ 时, $f(x)$ 当 $x \rightarrow 0^+$ 时无穷振荡且振幅 x^σ 趋于 $+\infty$, 故 $f(0 + 0)$ 不存在.

综上可知: $b = 0$ 时, 仅当 $\sigma > 0$ (此时 $f(0 - 0) = f(0 + 0) = f(0) = 0$), 函数 $f(x)$ 在 0 处连续, 否则为振荡间断点. 而当 $b \neq 0$ 时, 若 $\sigma > 0$, 则 0 是第一类跳跃间断的; 若 $\sigma \leq 0$ 时, 0 是 $f(x)$ 的第二类间振荡间断点.

8 闭区间上连续函数的性质

连续性是个局部 (*local*) 概念, 即函数在一个区间内连续是指它在区间内任意一点连续, 且在区间的端点处左连续或右连续. 通常, 如果知道一个函数在某点连续, 虽然知道在这点近旁函数有有界性等性质, 但并不能由此推断出在另一点是否也连续或局部有界等. 但是, 如果一函数在一闭区间上是连续的, 则会迫使函数具有某些“整体属性” (*global properties*), 比如整体有界性等.

定理 8.1 (有界性定理) 设 $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界.

注记 8.1 该定理对开区间显然不成立, 比如 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 但它在 $(0, 1)$ 上显然无界.

证明: (利用闭区间套) 记 $[a_1, b_1] = [a, b]$. 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界, 将 $[a_1, b_1]$ 等分为两个闭区间: $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$, 则 $f(x)$ 至少在其中一个区间上无界, 将其记为 $[a_2, b_2]$, 再将其二分, 得到 $f(x)$ 至少在其中的 $[a_3, b_3]$ 上无界. 如此进行下去, 我们便得到了如下闭区间套, 且在其上 $f(x)$ 都是无界的.

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots$$

且其长度

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

根据闭区间套定理: $\exists! \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. 由于 $\xi \in [a, b]$, 它是函数的连续点, 则必存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $U(\xi, \delta)$ 内有界 (如 $\xi = a$ 或 b , 则在 a 的一个右领域, b 的一个左领域内有界); 但 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, 故 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $[a_N, b_N] \subseteq U(\xi, \delta)$, 但根据构造, $f(x)$ 在 $[a_N, b_N]$ 上是无界的, 这与 $f(x)$ 在 $U(\xi, \delta)$ 上有界相矛盾了. 由此知假设 f 在 $[a, b]$ 上无界不成立, 故它在 $[a, b]$ 上有界. \square

定理 8.2 (最值存在定理) 若 $f \in C[a, b]$, 则它在 $[a, b]$ 上必能取到其最大(小)值, 即 $\exists \xi, \eta \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, $f(\eta) = m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$

证明: 由定理 8.1 知, 函数 f 在 $[a, b]$ 上有界, 故其取值的集合 $R_f := \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ 具有上、下确界, 记之为 $\alpha = \inf R_f$; $\beta = \sup R_f$. 如能证明 $\exists \xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \alpha$, 则说明 α 可被 f 在 $[a, b]$ 上取到, 从而 α 就是函数在 $[a, b]$ 上的最小值, 即 $\alpha = m$; 同理可说明 $\beta = M$. 下证 α 可被取到.

由于 α 是下确界, 故 $\forall x \in [a, b]$, 都有 $f(x) \geq \alpha$, 且 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $x \in [a, b]$, 使得 $f(x) < \alpha + \epsilon$. 那么对 $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, 存在 $x_n \in [a, b]$, 使得 $\alpha \leq f(x_n) < \alpha + \frac{1}{n}$. 由于数列 $\{x_n\}$ 是有界的, 故由凝聚定理知它必有收敛子列 $\{x_{n_k}\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi \in [a, b]$, 且有

$$\alpha \leq f(x_{n_k}) < \alpha + \frac{1}{n_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

令 $k \rightarrow \infty$, 结合 $f(x)$ 在 ξ 处的连续性及夹逼定理, 可知: $f(\xi) = \alpha$. \square

注记 8.2 上述定理只对闭区间成立, 对开区间显然不成立, 比如 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上; 即便函数在开区间上有界, 也不能保证其最值存在, 比如 x 在 $(0, 1)$ 上, 其上确界是 1, 但不能被取到.

定理 8.3 (零点存在定理) 设 $f \in C[a, b]$, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$ (ξ 称为是 $f(x)$ 的一个零点 (zero), 也称为方程 $f(x) = 0$ 的一个根 (root)).

注记 8.3 零点存在定理本质关涉实数系的完备性的, 即收敛实数列的极限是实数. 如对函数 $f(x) = x^2 - 2$, 它在 $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ 中虽满足定理的条件, 但不存在根.

下面证明的思路是用“二分法”搜索 $f(x)$ 根的具体位置, 在技术上则转换为用闭区间套来“套”出零点.

证明: 记 $[a_1, b_1] = [a, b]$, 将其二等分, 得到 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ 和 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. 如果 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, 则零点被找到; 如不为零, 则 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ 的符号必与 $f(a_1)$ 和 $f(b_1)$ 符号中的一个相反. 故在两个二分闭区间中心必有一个, f 在其两端点的符号相反. 记该区间为 $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$, 对其继续二等分, 然后经由同样的判断得出 $[a_3, b_3]$, 使得 f 在其两端点的符号相反. 继续操作下去, 便得到一个闭区间套

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

函数 f 在其中每个闭区间两端的符号相反, 且 $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. 从而由闭区间套定理, 知

$$\exists! \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

我们断言: $f(\xi) = 0$. 因为假如 $f(\xi) \neq 0$, 不妨设 $f(\xi) > 0$, 由于 f 是连续函数, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(\xi)$$

则由局部保号性, 知在 ξ 的某个领域内, 将由无穷多项 a_n 和 b_n 使得 $f(\xi)$ 与 $f(a_n)$ 和 $f(b_n)$ 同号, 但这与 $f(a_n)$ 和 $f(b_n)$ 异号相矛盾. 从而由反证法知 $f(\xi) = 0$ \square

注记 8.4 以确界存在定理的视角来看, 集合 $E = \{x \mid f(x) < 0, x \in [a, b]\}$ 非空且有界, 不妨设 $f(a) < 0, f(b) > 0$, 故 E 必有上确界 $\xi = \sup E$, 读者可尝试证明 ξ 就是 $f(x)$ 的一个零点.

定理 8.4 (介值定理) 若 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意 c , 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = c$.

证明: 令 $F(x) = f(x) - c$, 显然 $F(x) \in C[a, b]$, 由于 c 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间, 故

$$F(a)F(b) = (f(a) - c)(f(b) - c) < 0$$

从而由零点存在定理知 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = c$ \square .

下面是上定理的两个自然推论，证明从略.

推论 8.1 $f \in C[a, b]$, 则它能取到最大值 $M = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ 和最小值 $m = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ 之间的任何值.

推论 8.2 $f \in C[a, b]$, 设 $M = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$, $m = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$, 则 f 的值域是 $R(f) = [m, M]$.

例 8.1 证明任何实系数奇次多项式方程必有一个实根.

分析：记 $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1}$ (不妨设 $a_0 > 0$). 直观上, 由于 $f(x)$ 各项中增长最快的项是 a_0x^{2n+1} , 从而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 同理当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$. 由于 $f(x)$ 连续, 故由介值定理知 $\exists \xi \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $f(\xi) = 0$, 即 ξ 是多项式方程 $f(x) = 0$ 之根. 但上面所说的“增长最快的项”等字眼稍显模糊, 我们需要找到一个策略, 将直观的论述严格地写出. 策略是除以最高次数项, 从而将无穷大的增长问题转化为对无穷小的控制.

证明：将 $f(x)$ 写成 $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1} =$

$$= x^{2n+1} \underbrace{\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}} \right)}_{g(x)}$$

由此看出, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 由于 x^{2n+1} 可以任意大, 而 $g(x)$ 可无限接近 a_0 , 又 $a_0 > 0$, 从而 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$; 同理 $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$. 从而可利用零点存在定理. \square

例 8.2 证明方程 $3x^5 - 4x^2 = 3$ 在区间 $[0, 2]$ 上有根.

证明：记 $f(x) = 3x^5 - 4x^2 - 3$, 它在 $[0, 2]$ 上连续, 且 $f(0) = -3$, $f(2) = 80$, 从而由零点存在定理知 $\exists \xi \in (0, 2)$ 使得 $f(\xi) = 0$ \square .

注记 8.5 为探测 ξ 的具体位置, 我们采用二分法. 由于 $f(1) = -4$, 故 $\xi \in (1, 2)$, 又 $f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$; 故 $\xi \in (1, \frac{3}{2})$; 又 $f(1.25) = -0.0947265625$, 故 $\xi \in (1.25, 1.5)$; 又 $f(1.375) = 4.18215942383$, 故 $\xi \in (1.25, 1.375)$; 又 $f(1.3125) = 1.79408168793$, 故 $\xi \in (1.25, 1.3125)$; 又 $f(1.28125) = 0.79194530845$, 故 $\xi \in (1.25, 1.28125)$; 又 $f(1.265625) = 0.33473651391$, 故 $\xi \in (1.25, 1.265625)$ 继续下去, 会得到关于零点误差越来越小的近似, 其实在第二步时得到的 1.25 就已经是方程根的一个很好的近似了.

例 8.3 设 $f(x) = xe^x$, 找出 $f^{-1}(2)$ 的一个近似值.

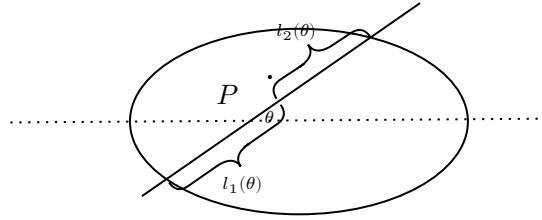
解：我们需要找到 $f(x) = 2$, 即 $xe^x = 2$ 的一个根, 亦即 $g(x) = xe^x - 2$ 的一个零点. 由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. 故由零点存在定理知方程存在根.

下面用二分法探测根的位置. 首先 $g(0) = -2$, $g(1) = e - 2 > 0$, 故 $\exists \xi \in (0, 1)$

使得 $g(\xi) = 0$; 又 $g(0.5) = 0.5e^{0.5} - 2 = -1.175639$, 故 $\xi \in (0.5, 1)$; 又 $g(0.75) = -0.41224998754$, 故 $\xi \in (0.75, 1)$ 且 0.75 已经是一个好的近似了.

例 8.4 证明: 对椭圆内的任意一点 P , 存在椭圆过 P 的一条弦, 使得 P 是该弦的中点.

证明: 过 P 点做弦, 设弦与 x -轴的夹角为 θ , 则 P 点将弦分成长为 $l_1(\theta)$ 和 $l_2(\theta)$ 的两线段, 则 $f(\theta) = l_1(\theta) - l_2(\theta)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且满足 $f(0) = -f(\pi)$



故 $\exists \theta_0 \in (0, \pi)$ 使得 $f(\theta_0) = 0$, 即 $l_1(\theta_0) = l_2(\theta_0)$. \square

例 8.5 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f([a, b]) \subseteq [a, b]$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$, 阶 ξ 是函数 $f(x)$ 的一个不动点 (fixed point).

证明: 令 $g(x) = f(x) - x$, 它在 $[a, b]$ 上也是连续的, 且 $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$.

1. 如果 $g(a) = 0$ 或 $g(b) = 0$, 则 $\xi = a$ 或 b ;
2. 如果 $g(a) > 0$ 且 $g(b) < 0$, 则由零点存在定理知 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$. \square

例 8.6 设函数 f, g 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 且在所有有理点上成立 $f(x) = g(x)$, 证明 $f \equiv g$ (f 恒等于 g)

证明: 给定任意无理数 x_0 , 由于有理数集合 \mathbb{Q} 在 \mathbb{R} 中稠密, 故必存在 $\{x_n\}$ (其中 $x_n \in \mathbb{Q}$) 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

由假设知: $f(x_n) = g(x_n)$, 则由 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处连续, 结合海涅定理, 在上等式中令 $n \rightarrow \infty$, 知

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0) \quad \square$$

例 8.7 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 成立 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明 f 在 \mathbb{R} 上连续, 且 $f(x) = f(1)x$.

证明：在方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中令 $x = y = 0$, 得到 $f(0) = f(0) + f(0)$, 故 $f(0) = 0$, 而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性表明: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 我们证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 记 $\Delta x = x - x_0$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0) + f(\Delta x)] \\ &= f(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = f(x_0)\end{aligned}$$

故 f 处处连续. 在方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中令 $x = -y$, 得

$$0 = f(0) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x)$$

故只需探讨当 $x > 0$ 时函数的表达. 在方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 中令 $x = y = 1$, 得 $f(2) = 2f(1)$, 一般地 $f(n1) = nf(1)$, 故结论对自然数成立, 下证它对任意有理数也成立. 由于

$$f(1) = f\left(n \frac{1}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_n\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \implies f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$$

故对一般有理数 $\frac{m}{n}$, 我们有

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \frac{1}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_m\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$$

从而 $f(x) = f(1)x$ 对所有有理数都成立, 而函数是处处连续的, 故由例 8.6 的结论知结论对任意无理数也成立. \square

例 8.8 设 $f \in C[a, b]$, $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$. 证明: 存在 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

证明：设 $m = \min_{x \in [x_1, x_n]} f(x)$, $M = \max_{x \in [x_1, x_n]} f(x)$ (它们的存在性由闭区间上连续函数的最值存在定理保证.) 从而

$$m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M$$

故有介值定理知 $\exists \xi \in [x_1, x_n]$ 使得 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$ \square

9 附录一：极限与渐近线

记函数 $y = f(x)$ 表示的曲线是 C , 若动点沿曲线无限远离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线的一条渐近线 (*asymptote*) .

1. 铅直 (*vertical*) 渐近线: 垂直于 x 轴的直线 $x = x_0$ 为曲线的渐近线当且仅当

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$$

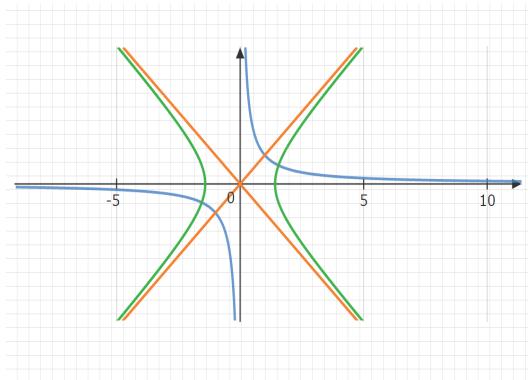
2. 水平 (*horizontal*) 渐近线: 平行于 x 轴的直线 $y = y_0$ 为曲线的渐近线当且仅当

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

3. 斜 (*oblique*) 渐近线: $y = ax + b (a \neq 0)$ 是曲线的渐近线当且仅当

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

例 1 双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 显然有水平渐近线 $y = 0$ (因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$) ; 有垂直渐近线 $x = 0$ (因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, 准确说是 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$)



引入变量替换

$$\begin{cases} x = \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}}_{\text{旋转矩阵}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

则在 $v - u$ 坐标系里 ($x - y$ 坐标系顺时旋转 45°), 原双曲线的方程变为

$$v^2 - u^2 = 2$$

它有一对斜渐近线 $v \pm u = 0$. 我们下面用计算来验证. 设 $u = av + b$ 是其渐近线, 则对曲线的一支 $u = \sqrt{v^2 - 2}$, 有

$$\lim_{v \rightarrow \infty} [\sqrt{v^2 - 2} - (av + b)] = 0$$

即, 确定常数 a, b 的值, 使得上极限成立, 当 $v \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt{v^2 - 2} \sim v$, 故 $a = 1$, 尚需确定常数 b 的值, 使得

$$0 = \lim_{v \rightarrow \infty} [\sqrt{v^2 - 2} - (v + b)] \xrightarrow{t:=\frac{1}{v}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2t^2} - (1 + bt)}{t} \implies b = 0$$

即 $u = v$ 是双曲线右半支的一条斜渐近线.

同理, 对另一支 $u = -\sqrt{v^2 - 2}$, 有

$$\lim_{v \rightarrow \infty} [-\sqrt{v^2 - 2} - (av + b)] = 0 \implies a = -1, b = 0$$

即 $u = -v$ 的左半支的一条斜渐近线.

注: 求曲线 $v^2 - u^2 = 2$ 的渐近线相对于将曲线族 $v^2 - u^2 = \epsilon (\epsilon > 0)$ 退化为 $\epsilon = 0$ 的情形.

例 2 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ 的渐近线.

分析: 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, 故不存在水平渐近线; 又对任意有限的 x_0 , 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 故也不存在铅直渐近线. 下面讨论其是否存在斜渐近线. 首先当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 渐进于 $y = x$, 即作为无穷大量, 有 $f(x) \sim x (x \rightarrow \infty)$. 即渐近线的方向同于 $y = x$ 的方向, 我们只需要确定一常数 c , 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x + c)] = 0$. 即

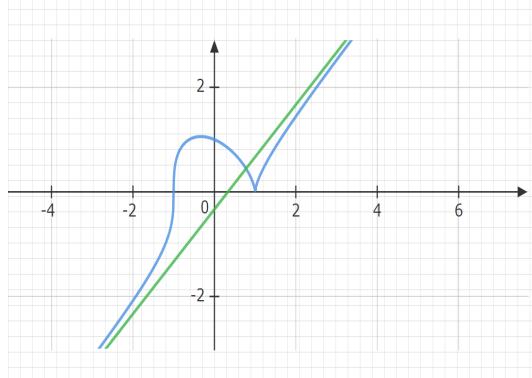
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} - (x + c)] = 0$$

用变量替换 $t = \frac{1}{x}$, 则上极限变为

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1} - \frac{1}{t} - c \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt[3]{1 - t - t^2 + t^3} - (1 + ct)}{t} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \frac{t}{3}(1+t-t^2) + o(t) - (1+ct)}{t} \right] = 0 \implies c = -\frac{1}{3}$$

故 $y = x - \frac{1}{3}$ 是曲线 $f(x) = 0$ 的一条斜渐近线.



10 附录二：无穷小的阶的运算

问题：如果当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = o(x^m)$, 但 $\alpha(x) \neq o(x^{m+1})$; 且 $\beta(x) = o(x^n)$, 但 $\beta(x) \neq o(x^{n+1})$, 即 $\alpha(x)$ 是 $m+1$ 阶无穷小, $\beta(x)$ 是 $n+1$ 阶无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x^m} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x^{m+1}} \neq 0; \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{x^n} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{x^{n+1}} \neq 0$$

试问: $\alpha(x) + \beta(x)$ (设不为零) 和 $\alpha(x)\beta(x)$ 的阶分别时多少?

解: 假设 $\alpha(x) + \beta(x) = o(x^k)$, 则须满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{x^k} = 0, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{x^{k+1}} \neq 0$$

为使上条件成立, 不难看出: $k = \max\{m, n\}$. 或者, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 可设 $\alpha(x) = Ax^{m+1}$, $\beta(x) = Bx^{n+1}$, 其中 A, B 为非零常数. 不妨设 $k = n$, 则有

$$\alpha(x) + \beta(x) = Ax^{m+1} + Bx^{n+1} = x^{m+1}(A + Bx^{n-m})$$

即知 $\alpha(x) + \beta(x)$ 是 $m+1 = \min\{m+1, n+1\}$ 阶无穷小, 即

两无穷小之和的阶是两者无穷小阶的最小值.

我们用符号 $ord(\alpha(x))$ 记 $\alpha(x)$ 的阶, 则有

$$ord(\alpha(x) + \beta(x)) = \min\{ord(\alpha), ord(\beta(x))\}$$

对于无穷小的乘积, 我们显然有

$$ord(\alpha(x)\beta(x)) = ord(\alpha(x)) + ord(\beta(x))$$

即

两无穷小的乘积的阶是两者无穷小阶的和.

直观上来说, $\alpha(x)$ 趋于零的速度快过 x^m , $\beta(x)$ 趋于零的速度快过 x^n , 而 $\alpha(x) + \beta(x)$ (假设不为零) 趋于零时, 是要同时顾及 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 的速度的, 相当于将两者“绑定”在一起奔向零, 那么, $\alpha(x) + \beta(x)$ 趋于零的速度就不能超过两者中“最慢”(阶最小者) 的, 否则“最慢”的会“掉队”; 而 $\alpha(x)\beta(x)$ 趋于零的过程, 相当于两者“强强联合, 互相加速”, 故以两者阶之和为阶.

这样一来, 我们就有了一种对无穷小的阶的运算的代数结构, 它与我们熟悉的数运算的代数不同, 即两者的和定义为其中最小者, 积定义为两者的和. 也就是说, 在阶的层面, 我们有

$$\alpha(x)'' + \beta(x)'' = \min\{\alpha(x), \beta(x)\} \quad \alpha(x)'' \times \beta(x)'' = \alpha(x) + \beta(x)$$

在数学中, 复合上面规则的奇异的代数结构称为“极小热带半环 (*minimal tropical semi-ring*)”结构, 该代数结构在“镜像对称”(*mirror symmetry*), 计数几何(*enumerative geometry*) 等领域有重要的应用.

另外, 上面的讨论给我们的启示是: 虽然无穷量本身千变万化, 复杂难控, 但如只考虑其阶, 则会给出了关于无穷量的一个可结构化的特征轮廓, 表现于上面 tropical 代数的结构里头.

注记: 如果上面结构中的 \min 以 \max 取代, 则它对应于关于无穷大量阶的运算. 或者, 如果将 $x \rightarrow \infty$ 时无穷大量的阶定义为负, 比如 $ord(x^m) = -m$.

则变换 $x \mapsto \frac{1}{x}$ (无穷小 \rightarrow 无穷大) 在阶的层面对应为 $x \mapsto -x$, 从而将 \min 变为 \max , 即

$$\min\{m, n\} = -\max\{-m, -n\}$$

11 附录三：反函数连续性定理的证明

反函数连续性定理：设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且严格单调增加，且 $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ ，则它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续且严格单调增加.

证明：由于 $f(x) \in C[a, b]$ ，且 $f(x)$ 严格单调增加，则由介值定理的推论知 f 可取到 $\alpha = f(a)$ 和 $\beta = f(b)$ 之间的任何值，即 f 的值域 $R(f) = [\alpha, \beta]$. 则根据反函数存在性定理知在 $[\alpha, \beta]$ 上的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 存在，且也是严格单调增加函数. 下证其在 $[\alpha, \beta]$ 上时连续的.

对任意 $y_0 \in (\alpha, \beta)$, $f^{-1}(y_0) = x_0 \in (a, b)$. 则 $\forall \epsilon > 0$, 须找到 $\delta > 0$, 使得当 $|y - y_0| < \delta$ 时，有

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon \iff x_0 - \epsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon$$

令 $y_- = f(x_0 - \epsilon), y_+ = f(x_0 + \epsilon)$, 可取 $\delta = \min\{y_0 - y_-, y_+ - y_0\} > 0$, 则当 $|y - y_0| < \delta$ 时，成立

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$$

如 $y_0 = \alpha$ 或 β , 需验证函数的右连续性或左连续性，证明思路时类似的，此处省略. \square

注记：区间 (a, b) 上单调函数的不连续点必为第一类不连续点. 其证明如下

证明：不妨设 f 单调增加. 对任意 $x_0 \in (a, b)$, 集合 $\{f(x) \mid x \in (a, x_0)\}$ 有上界，由确界存在定理知 $\alpha = \sup\{f(x) \mid x \in (a, x_0)\}$ 存在. 也就是说， $\forall x \in (a, x_0)$, 必有 $f(x) \leq \alpha$, 且 $\forall \epsilon > 0$, 必 $\exists x' \in (a, x_0)$, 使得 $f(x') > \alpha - \epsilon$. 取 $\delta = x_0 - x' > 0$, 则当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时，有 $x' < x < x_0$, 则由单调性得

$$-\epsilon < f(x') - \alpha \leq f(x) - \alpha \leq 0$$

即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$. 同理可证 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \beta$, 其中 $\beta = \inf\{f(x) \mid x \in (x_0, b)\}$. 也就是说，函数在 x_0 处的左、右极限都时存在的. 换言之，单调函数的不连续点必定时跳跃点. \square