作业 一（解答）

必做题:

1. 写出命题 $p \Longleftrightarrow q$ 的真值表，其中 p, q 为任意命题.

   解: 利用 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \vee p)$，及 $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$，可写出 $p \Leftrightarrow q$ 的真值表如下

p	q	$p \Rightarrow q\,(\neg p \vee q)$	$q \Rightarrow p\,(\neg q \vee p)$	$p \Leftrightarrow q\,((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
0	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	1	1	1	1

   注: 结论的直观意义是显然的，正确的命题等价于正确的命题，或错误的陈述等价于错误的陈述，这都是天经地义，但若正确的和错误的等价，则就有些匪夷所思了.

2. 利用真值表，证明德摩根律

$$\neg(p \vee q) \quad \Longleftrightarrow \quad \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \quad \Longleftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q$$

   证明: 相关真值表给出如下

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg(p \wedge q)$
0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0

   由此易见“德摩根律”成立. $\Box$.

3. 用逻辑符号（$\forall, \exists$ 等）严格写出下面命题，并写出其否定形式.

(a) 非空数集 X 的最小值是 m.

解: $\exists m \in X$，使得 $\forall x \in X$，有 $x \leq m$. 其否定形式为: $\forall m \in X$，$\exists x \in X$，使得 $x > m$. 即 X 中无最小值.

(b) f 是区间 (a,b) 上的单调增函数.

解: $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) \leq f(x_2)$. 其否定形式为: $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < x_2$，使得 $f(x_1) > f(x_2)$.

(c) f 是区间 (a,b) 上的单调函数.

解: 记 P 为命题: $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) \leq f(x_2)$; Q 为命题: $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < x_2$，有 $f(x_1) \geq f(x_2)$. 则题中命题可写成: $P \vee Q$，其否定为 $\neg P \wedge \neq Q$，即 $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < x_2$，使得 $f(x_1) > f(x_2)$ 的同时 $\exists x_1', x_2' \in (a,b)$，且 $x_1' < x_2'$，使得 $f(x_1') < f(x_2')$.

注: 如果写成：$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < x_2$，都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 或 $f(x_1) \geq f(x_2)$. 则其否定形式：$\exists x_1, x_2 \in (a,b)$，且 $x_1 < x_2$，使得 $f(x_1) > f(x_2)$ 且 $f(x_1) < f(x_2)$. 简直令人费解。。。。。。

(d) 当 n 趋于无穷大时，数列 a_n 的值趋于无穷大.

解: $\forall A > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $\forall n > N$，都成立 $a_n > A$（即无论你给个多么大的数 A，a_n 的值最终都能超过 A）. 其否定形式为: $\exists A_0 > 0$，$\forall N \in \mathbb{N}$，都有 $n_0 > N$，使得 $a_{n_0} \leq A$.

4. 利用数学归纳法证明 $(1+x)^n > 1+nx$,其中 $x > -1, x \neq 0, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

证明: $n = 2$ 时, 由于 $x > -1$ 且 $x \neq 0$, 有 $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$. 假设命题对 $n = k\,(\geq 2)$ 成立，则当 $n = k+1$ 时，有

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x$$

由数学归纳法即知命题对 $\forall n \geq 2$ 成立. $\square$.

5. 利用欧拉公式证明三角函数的加法公式.

证明: $e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$. 另一方面 $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta} =$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) +$$

$$+\ i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \qquad \text{然后对比实虚部即得所需.} \quad \square.$$

6. 验证 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 和 $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

解: 由定义直接计算验证，甚明确，此处省略.

7. 写出尖点曲线 $y^2 = x^3$ 的一个参数方程描述.

解: $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ 即为对“尖点曲线”的一个‘参数化.

8. 将下列隐函数方程曲线转化为参数方程曲线，并指出参数的变化范围.

$$a) \quad 4x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0; \qquad b) \quad e^y + y^3 + 2x = 1$$

解: $a)$ 中方程写为 $2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{(y+1)^2}{2} = 1$，则知有如下自然参数化

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ y + 1 = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$$

对 2) 中曲线，令 $y = \ln t$，带入曲线方程，知 $t + (\ln t)^3 + 2x = 1$，解得 $x = \frac{1-t-(\ln t)^3}{2}$. 此即曲线的一种参数化，其中参数 $t > 0$.

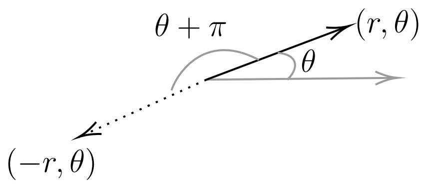
9. 将下列曲线方程转化为极坐标方程，并指出 θ 的变化范围.

$$a) \quad x^2 - y^2 = 1; \qquad b) \quad (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = x^2 - y^2$$

解: 将 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 代入，得 $a)$ 中曲线方程化为 $r^2\cos 2\theta = 1$. 为使 r 可通过 θ 求解，θ 需满足 $\cos 2\theta > 0$，在一个周期内，即得 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$；又带入，得 $b)$ 中曲线方程化为 $r^3 = r^2\cos 2\theta$. 进一

步可将其化简为 $r = \cos 2\theta$. 为使 $r \geq 0$，即 $\cos 2\theta > 0$，解得一个周期内 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

注： 但在 $r^3 = r^2 \cos 2\theta$ 中，$\cos 2\theta$ 容许取负值，只 r 也容许取负值. 事实上，容许负 r 在工程计算上是方便的，只需采取如下约定

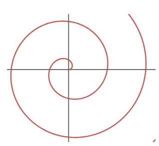


$$(-r, \theta) \sim \ (r, \theta + \pi)$$

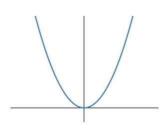
10. 绘制下列极坐标方程表示的曲线的图形.

$$a) \quad r = a\theta\,(a > 0); \qquad b) \quad r = \tan\theta \sec\theta \qquad c) \quad r = a\cos 4\theta$$

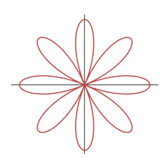
解： a) 中直接绘；b) 在直角坐标下可写为 $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{x}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$，即 $y = x^2$，描绘了一条抛物线. c) 中当 $r < 0$ 时，利用上注中提到的等同 $(-r, \theta) \sim (r, \theta + \pi)$，可绘出一个 8 瓣玫瑰花图形（如不容许 $r < 0$，则只得到 *4* 瓣玫瑰花）. 诸图见下



阿基米德螺线



抛物线



8 瓣玫瑰

选做题：

1. 迪利克雷（*Dirichlet*）函数定义为: $D(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 迪利克雷函数是否为周期函数? 如果是，其最小正周期是否存在?

解： 我们证明 $D(x)$ 是个周期函数，且任意有理数都是其周期. 这是因为 $\forall a \in \mathbb{Q}$，当 $x \in \mathbb{Q}$ 时，由于 $x + a \in \mathbb{Q}$，故 $D(x + a) = D(x) = 1$；当 $x \notin \mathbb{Q}$ 时，由于 $x + a$ 是无理数，故 $D(x + a) = D(x) = 0$. 从而 $\forall x \in \mathbb{R}$，有 $D(x + a) = D(x)$. 故 $D(x)$ 是以任意有理数为周期的周期函数. 但

由于不存在最小的正有理数（参见讲义上对有理数稠密性的讨论），故 $D(x)$ 不存在最小正周期.

2. 不通过求导，计算三次曲线 $y = x^3 + 2x + 3$ 在 $x = 1$ 处（即过点 $(1,6)$）的切线方程.

   解： 过 $(1,6)$ 点的切线方程是在该点与曲线接触最“密切”的直线，即在该点附近，函数曲线可由切线加以近似，且利用切线方程来计算函数在该点附近（当 x 相对 $x = 1$ 有所改变 $\Delta x = x - 1$）的取值变化（$\Delta y = y(x) - y(1) = y - 6$），所产生的误差应比 $\Delta x = x - 1$ 更小（或当地 $\Delta x \to 0$ 时，误差也趋于 0，且趋于 0 的速度更快）.

   对题目中的例子，由于 $(1,6)$ 处的切线方程必具形式 $y - 6 = k(x - 1)$，需将 $x^3 + 2x + 3$ 表达为 $\Delta x = x - 1$ 的式子，然后按上段论述来分析.

$$y = x^3 + 2x + 3 = (x - 1 + 1)^3 + 2(x - 1 + 1) + 3 =$$

$$= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 1 + 2(x-1) + 2 + 3$$

$$= 6 + \underbrace{5\,(x-1)}_{\text{线性主部}} + \underbrace{3\,(x-1)^2 + (x-1)^3}_{\text{线性近似后的误差项}}$$

   由此可见，当 x 在 $x = 1$ 附近小范围变动（即对应自变量增量 $\Delta x = x - 1$ 是个小量）时，函数值的**主要贡献**由 $6 + 5(x - 1)$ 给出. 这是因为余下的项都包含比 $\Delta x = x - 1$ 次数更高的项，而当 $x - 1$ 很小时，它们的值相比于主要贡献项是更小的（故可作为高阶误差而省去）. 所以，直线 $y = 6 + 5(x - 1) = 5x + 1$ 就是在 $(1,6)$ 点附近最“逼近”函数曲线的直线，即曲线在该点处的切线.

   微分诠释： 自变量增量 $\Delta x = x - 1$ 引起的函数的实际增量为 $\Delta y = y(x) - y(1) = y - 6 = 5(x-1) + \cdots$，其主要贡献项 $5(x-1) = 5\Delta x$ 称为 y 在 $x = 1$ 处的线性主部，也称为 y 在 $x = 1$ 处的微分，记为 $dy|_{x=1}$，即 $dy|_{x=1} = 5\Delta x$. 这是一个将 Δx 映射为实数的线性映射（因为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射只能具有 ax 这样的形式），它把 Δx 映射为函数真实

增量 Δy 的近似，即

$$\Delta x \longmapsto 5\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \quad \approx \quad df|_{x=1}: \Delta x \longmapsto 5\Delta x$$

左边可看成是研究函数在 $x=1$ 处微小变化的一个映射，即将 Δx 映射为对应函数值的真实增量，而右边是左边（一般是非线性）映射机制的一个近似，即用一个线性映射（即微分）来近似一个非线性映射. 这就是微分作为研究函数增量的（线性）映射机制的内涵.

3. 用归纳法证明：第 n 个素数 $p_n < 2^{2^n}$.

证明: 对 $n=1$，$p_1 = 2 < 2^{2^1}$，成立，假设命题对 $1 \le n \le k$ 都成立，即

$$p_1 < 2^{2^1}, p_2 < 2^{2^2}, \cdots, p_k < 2^{2^k}$$

则 $p_1p_2\cdots p_k < 2^{2^1}2^{2^2}\cdots 2^{2^k} = 2^{2^1+2^2+\cdots+2^k} = 2^{2^{k+1}-2}$，从而

$$p_1p_2\cdots p_k + 1 < 2^{2^{k+1}-2} + 1 < 2^{2^{k+1}}$$

由于 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 都不是 $p_1p_2\cdots p_k+1$ 的素因子（除后余 1），故其素因子 $p \ge p_{k+1}$，而一个数的素因子不大于数本身，故

$$p_{k+1} \le p \le p_1p_2\cdots p_k + 1 < 2^{2^{k+1}}$$

从而命题对 $n=k+1$ 也成立. 结论由数学归纳法即得. $\Box$.

注: 上面证明与素数有无穷多个的经典证明有异曲同工之妙. 假设素数只有有限多个 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，考虑数 $p_1p_2\cdots p_k+1$，它不能是一个素数，故必有素因子，但显然 p_i 中的任何一个都不能整除它，故都不是其素因子，导致矛盾. 该矛盾说明素数不可能只有有限多个，即必有无限多个.

4. 对映射 T 及其逆映射 T^{-1}，证明有 $T\circ T^{-1} = I|_{R(T)}$; $T^{-1}\circ T = I|_{D(T)}$，其中 I 代表恒等映射，即满足 $I(x)=x, \forall x$ 的映射.

证明: 由于 $\forall y \in R(T)$，$\exists x \in D(T)$，使得 $T(x)=y$，即 $T^{-1}(y)=x$，

从而 $T\circ T^{-1}(y)=T(T^{-1}(y))=T(x)=y$. 即 $T\circ T^{-1}=I|_{R(T)}$；反之，$\forall x\in D(T)$，设 $y=T(x)$，则由于 T 可逆，即知 $T^{-1}(y)=x$，从而 $T^{-1}\circ T(x)=T^{-1}(T(x))=T^{-1}(y)=x$. 即 $T^{-1}\circ T=I|_{D(T)}$. $\square$

5. 写出命题“线性映射 $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是单射当且仅当：若 $T(x)=0$，则 $x=0$.”的逆否命题，并证明该命题.（提示：先证明对线性映射 T，必有 $T(0)=0$，$T(-x)=-T(x)$）

   证明: “$\Longrightarrow$”首先证明 $T(0)=0$，在线性条件 $T(x+y)=T(x)+T(y)$ 中，令 $x=y=0$，知 $T(0)=T(0)+T(0)$，故 $T(0)=0$.

   假设 T 单，即若 $T(x)=T(y)$，必 $x=y$. 用反证法，若 $\exists x\neq 0$，使得 $T(x)=0$，则相当于 $\exists x,0$，使得 $T(x)=T(0)=0$，与 T 的单性矛盾.

   “$\Longleftarrow$”先证 $T(-x)=-T(x)$. 在 $T(x+y)=T(x)+T(y)$ 中令 $y=-x$，得 $T(x)+T(-x)=T(0)=0$. 得证.

   若 T 非单, 即 $\exists x\neq y$, 使得 $T(x)=T(y)$, 则 $T(x-y)=T(x+(-y))=T(x)+T(-y)=T(x)-T(y)=0$，故 $x-y=0$，即 $x=y$，矛盾. $\square$

6. 若 $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是线性映射，证明 T 是单射当且仅当 T 是满射.

   证明: “$\Longrightarrow$”即从 T 单推出 T 满. 设 T 为单射，令 $T(1)=a$，则 $a\neq 0$（否则有悖于上面第 5 题中对单性的等价刻画）. 则 $\forall y\in\mathbb{R}$，令 $x=y/a$，则由 T 的线性性，知 $T(x)=T(y/a)=T(\frac{y}{a}\cdot 1)=\frac{y}{a}T(1)=\frac{y}{a}\cdot a=y$. 即知任意 y 都存在原象，故 T 满.

   “$\Longleftarrow$”即从 T 满推出 T 单. 我们转化为证明与它等价的逆否命题，即证明：若 T 不是单的，则它也必不是满的. 分情形讨论

   (a) 若 $T(1)=0$，则 $\forall x\in\mathbb{R}$，有 $T(x)=T(x\cdot 1)=xT(1)=0$，即 T 是零映射，自然也非满.

   (b) 若 $T(1)\neq 0$. 由于 T 非单，则根据 5 题中结论，必 $\exists 0\neq x\in\mathbb{R}$，使得 $T(x)=0$. 下面用反证法证明此时 T 必也非满.

       假若 T 满，则对上面选出的非零 x，必 $\exists y\in\mathbb{R}$ 作为其原象，即 $T(y)=x$. 由此

- 一方面，有 $T(T(y)) = T(x) = 0$;
- 另一方面，$T(T(y)) = T(T(y) \cdot 1) = T(y)T(1)$.

故知 $T(y)T(1) = 0$，又由假设 $T(1) \neq 0$，知 $T(y) = x = 0$，但这与 $x \neq 0$ 的条件相互矛盾了，说明 T 满的假设不成立，即 T 非满． $\square$.

注： 一种比较“投机取巧”的做法是：由于 T 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射，故它完全取决于 $T(1) = a$，这是因为，$\forall x \in \mathbb{R}$，$T(x) = T(x \cdot 1) = xT(1) = ax$. 即线性映射 $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 必具 $T(x) = ax$ 的形式. 则 $a = 0$ 时，$T \equiv 0$，非单又非满；$a \neq 0$ 时，T 既单且满. 一切近乎显然. 当然，我们这里强调推理能力的训练及严格论证的写作，故并不建议这一“取巧”的证明策略——相当于用“牛刀宰鸡”了.