

Cal_hw_1

必做题：

1. 写出命题 $p \Leftrightarrow q$ 的真值表，其中 p, q 为任意命题.

解:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	1	1	1	1

2. 利用真值表，证明德摩根律

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

解:

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	0	0

3. 用逻辑符号 (\forall, \exists 等) 严格写出下面命题，并写出其否定形式.

解: (a) $p: \forall a \in \mathbf{X}, a \geq m$

$\neg p: \exists a \in \mathbf{X}, a < m$

(b) $p: \forall x_1, x_2 \in (a, b)(x_1 < x_2), f(x_1) < f(x_2)$

$\neg p: \exists x_1, x_2 \in (a, b)(x_1 < x_2), f(x_1) \geq f(x_2)$

$$(c) p: [\forall x_1, x_2 \in (a, b)(x_1 < x_2), f(x_1) < f(x_2)] \vee [\forall x_1, x_2 \in (a, b)(x_1 < x_2), f(x_1) > f(x_2)]$$

$$\neg p: [\exists x_1, x_2 \in (a, b)(x_1 < x_2), f(x_1) \geq f(x_2)] \wedge [\exists x_1, x_2 \in (a, b)(x_1 < x_2), f(x_1) \leq f(x_2)]$$

(d)

$$\textcircled{1} p: \forall X \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } a_n > X$$

$$\neg p: \exists X \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } a_n \leq X$$

$$\textcircled{2} p: \forall X \in \mathbb{R}^-, \exists n \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } a_n < X$$

$$\neg p: \exists X \in \mathbb{R}^-, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{s.t. } a_n \geq X$$

4. 利用数学归纳法证明 $(1+x)^n > 1+nx$, 其中 $x > -1, x \neq 0, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

解: 当 $n=2$ 时, 有 $(1+x)^2 = x^2 + 2x + 1 > 2x + 1$

设命题对 $n=k$ ($k \geq 2$) 成立,

则当 $n=k+1$ 时, 根据归纳假设, 有

$$(1+x)^k > 1+kx$$

$$(1+x)^{k+1} > (1+kx)(1+x) = kx^2 + 1 + (k+1)x > 1 + (k+1)x$$

即命题对 $n=k+1$ 亦成立, 从而由数学归纳法原理知命题对所有 $n \geq 2$ 成立。

5. 利用欧拉公式证明三角函数的加法公式.

$$\text{解: } e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{i(x+y)} = \cos x \cos y + i \cos x \sin y + i \sin x \cos y - \sin x \sin y$$

$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i (\cos x \sin y + \sin x \cos y)$$

$$\text{所以 } e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

$$\therefore \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

6. 验证 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 和

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

$$\text{解: (1) } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 右边} &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
 &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^y + e^{-y}}{2} \pm \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
 &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \pm \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} \\
 &= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \cosh(x \pm y) = \text{左边}
 \end{aligned}$$

7. 写出尖点曲线 $y^2 = x^3$ 的一个参数方程描述.

解: $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$

8. 将下列隐函数方程曲线转化为参数方程曲线, 并指出参数的变化范围.

解: a)

$$\begin{aligned}
 4(x^2 - x + \frac{1}{4}) + (y + 1)^2 &= 2 \\
 2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(y + 1)^2 &= 1
 \end{aligned}$$

所以 参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \\ y = \sqrt{2} \sin \theta - 1 \end{cases} \\
 \theta \in [0, 2\pi]$$

b)

$$\begin{cases} x = \frac{1 - e^t - t^3}{2} \\ y = t \end{cases} \\
 t \in \mathbb{R}$$

9. 将下列曲线方程转化为极坐标方程, 并指出 θ 的变化范围.

a) $r^2 = \frac{1}{\cos 2\theta}$

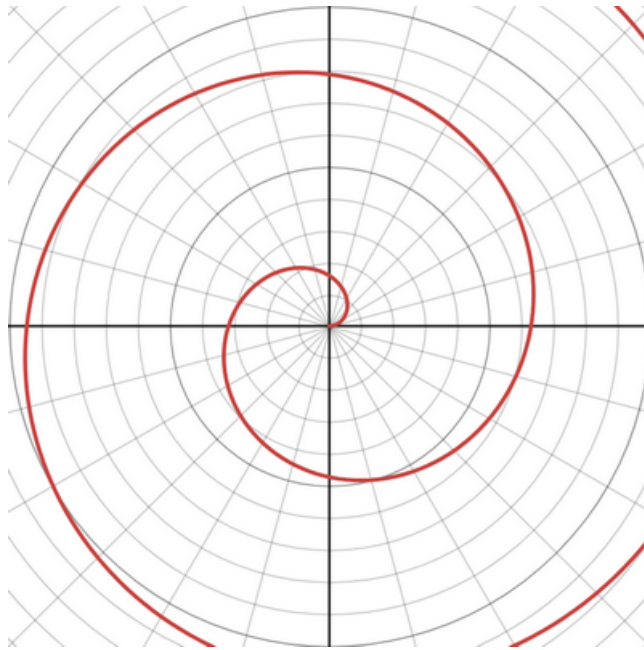
$$\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$$

b) $r = \cos 2\theta$

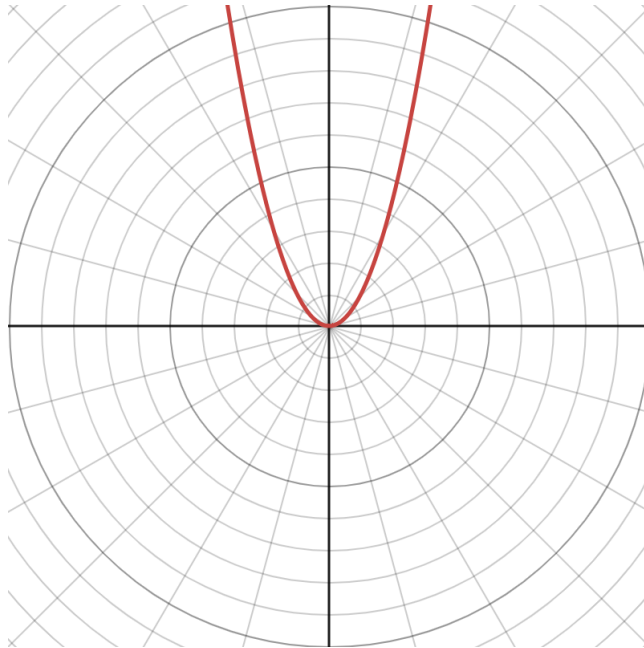
$$\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$$

10. 绘制下列极坐标方程表示的曲线的图形.

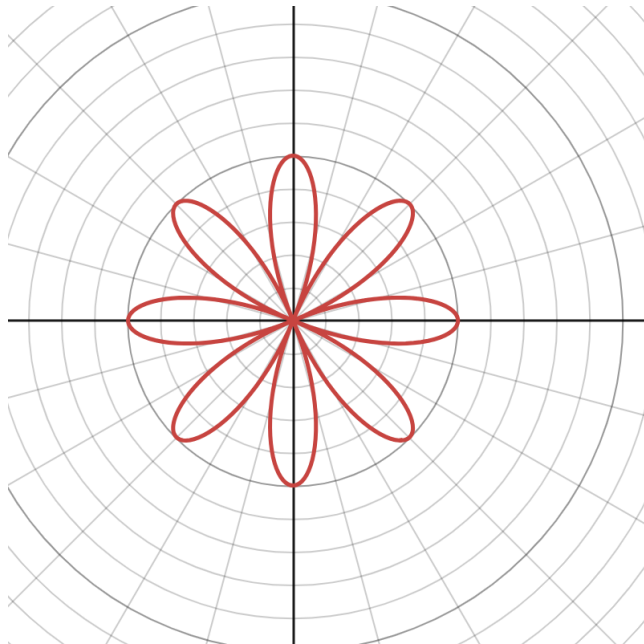
解: a) $r = a\theta \ (a > 0)$



b) $r = \tan \theta \sec \theta$



c) $r = a \cos 4\theta$



选做题

1. 迪利克雷 (Dirichlet) 函数定义为: $D(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ **迪利克雷函数是否为周期函数? 如果是, 其最小正周期是否存在?**

解: ① D 是周期函数, 任意有理数 T 都是其周期

若 $X \in \mathbb{Q}$, $X + T \in \mathbb{Q}$, $D(X) = D(X + T) = 1$

若 $X \notin \mathbb{Q}$, $X + T \notin \mathbb{Q}$, $D(X) = D(X + T) = 0$

② 不存在最小正周期

T 可以无限接近 0, 只要 $T \in \mathbb{Q}$ 且 $T > 0$

2. 不通过求导, 计算三次曲线 $y = x^3 + 2x + 3$ 在 $x = 1$ 处 (即过点 $(1, 6)$) 的切线方程。

解: 设切线 $y - 6 = k(x - 1)$

令 $y = k(x - 1) + 6 = x^3 + 2x + 3$

$k(x - 1) = x^3 + 2x - 3$

$(x - 1)(x^2 + x + 3 - k) = 0$

因为直线在 $(1, 6)$ 处与曲线相切

所以 $x = 1$ 为方程的二重根,

所以当 $x = 1$ 时, $x^2 + x + 3 - k = 0$

所以 $k = 5$

所以 切线方程: $y = 5x + 1$

3. 用归纳法证明: 第 n 个素数 $p_n < 2^{2^n}$ 。

解: 先证: 令 $Q_k = \prod_{i=1}^k p_i + 1$

若 Q_k 为素数, $Q_k > P_k$, 则 $Q_k \geq P_{k+1}$

若 Q_k 为合数, 设 Q_k 的一个素因子为 P , 则 $P \geq P_{k+1}$, $Q_k > P_{k+1}$

若 P 为 $P_1 \dots P_k$ 中的一个

所以 $Q_k \mid P$, $\prod_{i=1}^k P_i \mid P$

所以 $Q_k - \prod_{i=1}^k P_i = 1 \mid P$, 不成立

所以 $P \geq P_{k+1}$, $Q_k > P_{k+1}$

综上, $Q_k \geq P_{k+1}$

下证原命题：当 $n = 1$ 时

$$\text{有 } p_1 = 2 < 2^2 = 4$$

设命题对 $n = k$ ($k \geq 1$) 成立

$$p_k < 2^{2^k}$$

$$\prod_{i=1}^k p_i < \prod_{i=1}^k 2^{2^i} = 2^{\sum_{i=1}^k 2^i} = 2^{2^{k+1}-2}$$

$$P_{k+1} \leq Q_k = \prod_{i=1}^k p_i + 1 < 2^{2^k-2} + 1 < 2^{2^{k+1}}$$

$$P_{k+1} < 2^{2^{k+1}}$$

即命题对 $n = k + 1$ 亦成立，从而由数学归纳法原理知命题对所有 $n \geq 1$ 成立

4. 对映射 T 及其逆映射 T^{-1} ，证明有 $T \circ T^{-1} = I|_{R(T)}$ ；

$T^{-1} \circ T = I|_{D(T)}$ ，其中 I 代表恒等映射，即满足 $I(x) = x, \forall x$ 的映射。

解： 设 $T : D(T) \rightarrow R(T)$

$$T^{-1} : R(T) \rightarrow D(T)$$

$$\textcircled{1} T \circ T^{-1}$$

$$(T \circ T^{-1})(y) = T[T^{-1}(y)]$$

$$= T(x) = y = I|_{R(T)}(y)$$

$$\text{所以 } T \circ T^{-1} = I|_{R(T)}$$

$$\textcircled{2} T^{-1} \circ T$$

$$(T^{-1} \circ T)(x) = T^{-1}[T(x)]$$

$$= T^{-1}(y) = x = I|_{D(T)}(x)$$

$$\text{所以 } T^{-1} \circ T = I|_{D(T)}$$

5. 写出命题“线性映射 $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是单射当且仅当：若 $T(x) = 0$ ，则 $x = 0$ ”的逆否命题，并证明该命题。

解： ①逆否命题：线性映射 $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 不是单射当且仅当 $\exists x \neq 0$ 使得 $T(x) = 0$ 。

②证明：另证： T 为线性映射

$$T(0) = T(2 \times 0) = 2T(0), \quad T(0) = 0$$

$$T(-x) = T(-1 \times x) = -T(x)$$

先证充分性

当线性映射 $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是单射时

$$T(x) = 0 = T(0)$$

因为 $T(x)$ 为单射

所以 $x = 0$ ，充分性成立

再证必要性：

若 $T(x) = 0$ 则 $x = 0$

假设 $T(x)$ 不是单射

$$\exists x_1, x_2 (x_1 \neq x_2) \text{ s.t. } T(x_1) = T(x_2)$$

所以 $T(x_1) - T(x_2)$

$$= T(x_1 - x_2) = 0$$

所以 $x_1 - x_2 = 0$ 即 $x_1 = x_2$ (矛盾)

所以 $T(x)$ 为单射, 必要性成立

综上, 原命题成立

6. 若 $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是线性映射, 证明 T 是单射当且仅当 T 是满射。

解: 解: 设 $a = T(1)$

$$T(x) = T(x \cdot 1) = xT(1) = ax$$

先证充分性:

当 T 为单射, 则 $a \neq 0$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \text{ 取 } x_0 = \frac{y}{a}, \text{ 则 } T(x_0) = a \cdot \frac{y}{a} = y$$

所以 T 为满射。

再证必要性:

当 T 为满射, 则 $a \neq 0$

若存在 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 使得 $T(x_1) = T(x_2)$, 即 $ax_1 = ax_2$

因为 $a \neq 0$, 所以 $x_1 = x_2$, 故 T 为单射。

综上, 命题成立。