作业　三

必做题:

1. 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 且 $\{y_n\}$ 满足: $\exists\delta>0, \exists N\in\mathbb{N}$, 使得 $\forall n\geq N$, 有 $|y_n|\geq\delta$, 则 $\{x_ny_n\}$ 是无穷大量.
2. $\forall\alpha>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=?$ 证明你的论断.
3. 利用夹逼定理计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ （其中 $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots5\cdot3\cdot1$；$(2n)!!=(2n)(2(n-1))\cdots4\cdot2$）
4. 设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}(a_i>0,\ i=1,2,\cdots,m)$, 证明（提示：讲义例 *5.3* 的自然推广）

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$$

注: 下面各计算题（即无需用 $\epsilon-N$ 语言证明）用到的理论基础是一些基本极限（如第 *7* 题中），以及极限的四则运算法则，我们课上已对极限运算法则给与了严格的证明，但因课时所限，例题没来得及细讲. 大家如想提前做这些作业，可参考讲义第 *5* 节的例子和第 *8* 节中例 *8.1*—例 *8.8.* 如能提前消化解决，甚好，也非常鼓励，是保持稳中争进的正确姿态！而如遇忙或力不逮，国庆回来后第一节课会就典型例题讲解.

5. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3n^3+2n^2+1}+\dfrac{2^2}{3n^3+2n^2+1}+\cdots+\dfrac{n^2}{3n^3+2n^2+1}\right)$
6. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.
7. 利用结论 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$
   (a) 计算下列个极限（提示：本质上是凑出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 这种结构，一般地，只要凑出 $\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}$ 就可以了，其中 $\square$ 是任意（正负）无穷大量）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3};\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}$$

(b) 以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}=e$ 为例说明上面提示中说明的合理性. （类比于课上我们处理的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}=1$，由它知 $\lim_{n\to\infty}(1/n)^{1/n}=1$，进一步能否得出对函数 x^x，当 $x\to 0^+$（即从 0 的右侧趋于 *0*）是函数取值的极限也为 1. 如回答是肯定的，则“$0^0=1$”的规定就有合理性了. 对这类问题的思考会让我们打通本章内容和下一章函数极限之间的壁垒.)

8. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-n+2)^{\frac{1}{n}}$（提示如上题中的，关键还是“凑结构”）

9. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)$

10. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}\right]$

11. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$

12. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{1+2}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+2+3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}\right)$

选做题:

1. 给定数列 $\{a_n\}$，$\forall m\in\mathbb{N}$，记 $S_m:=\sum\limits_{k=1}^{m}a_k$，即 $S_1=a_1$，$S_2=a_1+a_2$，$S_3=a_1+a_2+a_3\quad\cdots$

   证明：如果 $\{S_m\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 是无穷小量. 并举例说明，$\{a_n\}$ 是无穷小并不能保证 $\{S_n\}$ 的收敛. （这题结论在讲无穷级数是会用到）

2. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}=A$.（讲义 *16* 页例 *4.4* 的完整证明需此结论.）