作业　四

必做题：

1. 利用单调有界数列极限存在定理，证明下列数列极限的存在性.

   (a) $a_n = \dfrac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

   (b) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^n}$

2. 证明下列递归数列收敛，并求其极限.

   (a) $a_1 > 0$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)(n = 1, 2, \cdots)$

   (b) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n}{1 + a_n}$，$n = 1, 2, \cdots$

   (c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{a_n}$, $n = 1, 2, \cdots$

3. 请写出 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 不存在的严格定义.

4. 用定义严格证明 $f(x) = \dfrac{x(x+3)}{(x-1)(x+2)}$ 在 $x = 1$ 处的左极限是 $-\infty$.

5. 用定义严格证明：$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 3} = 2$.

6. 证明函数 $f(x) = \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x}$ 在点 $x = 0$ 的领域内无界，但当 $x \to 0$ 时，并非无穷大.

7. 求下列函数在指定点的左、右极限，并判断函数在该点处是否存在极限.

   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ 在 $x_0 = 1$ 处.

   (b) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$ 在 $x_0 = 0$ 处.

8. 对函数 $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$，证明 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. 并指出下面的计算错误在什么地方？

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = 0$$

9. 计算下面极限

$$a)\ \lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4};\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$$

$$c)\ \lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}};\qquad d)\ \lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$$

10. 计算下面极限

$$a)\ \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a};\qquad b)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}};\qquad d)\ \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$$

11. 计算下列极限

$$a)\ \lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x};\qquad b)\ \lim_{x\to \infty}\left(\frac{2}{x^2}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$c)\ \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x};\qquad d)\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$$

选做题：

1. 求 $\{a_n\}$ 的极限，其中 $a_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$，$n=1,2,\cdots$.
2. 给定两个正数 a 和 b，且有 $0<b<a$. 令 $a_0=a$, $b_0=b$，并按递推公式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},\quad n=1,2,\cdots$$

   定义数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$. 证明这两个数列收敛于同一个极限（但不需求出极限值）.

3. 证明：$\lim\limits_{x\to -\infty}a^x=0\,(a>1)$.
4. 用定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.
5. 考虑数列 $x_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

(a) 证明: $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\sin x}{x}$ （提示：利用 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$）

(b) 证明 *Vieta* 公式: $\dfrac{2}{\pi} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}\cdots$ (提示：利用 $\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\theta}$ 及 $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$)