作业　八

必做题:

1. 设 $f(x) = (a + b\cos x)\sin x - x$ 当 $x \to 0$ 时是 x 的五阶无穷小，求 a, b.

   解: 即需找到 a, b，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^4} = 0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^4} \neq 0$. 对 $f(x)$ 马克劳林展开，得

   $$f(x) = \left(a + b - \frac{b}{2}x^2 + \frac{b}{4!}x^4 + o(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) - x$$

   $$\xlongequal{\text{整理}} (a+b-1)x - \left(\frac{a+b}{3!} + \frac{b}{2}\right)x^3 + \left(\frac{a+b}{5!} + \frac{b}{2\cdot 3!} + \frac{b}{4!}\right)x^5 + o(x^5)$$

   故只需 $a + b - 1 = 0$，$\dfrac{a+4b}{6} = 0$. 解得 $a = \dfrac{4}{3}$，$b = -\dfrac{1}{3}$.

2. 利用极值判别法 I 求下列函数的极值:

   $$a)\ y = \frac{\ln^2 x}{x}, \qquad b)\ y = x^2(a-x)^2\ (a > 0)$$

   解: a) $y' = \dfrac{2x\frac{1}{x}\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \dfrac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$. 令 $y' = 0$，解得 $x = e^2$.

   令 $g(x) = 2\ln x - \ln^2 x$. 则 g 与 y' 同号. 又 $g' = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x}\ln x = \dfrac{2}{x}(1 - \ln x)$，其零点为 $x = e$，此时 $g(e) = 1$，且当 $x > e$ 时，$g' < 0$. 这说明当 $x > e$ 时，g 从极大值 1 开始单调减少，期间在 $x = e^2$ 处穿过 x-轴. 也就是说，y' 在 $x = e^2$ 的左（右）侧是正（负）的，故而它是极大值点.

   b) $y' = 2x(a-x)(a-2x)$. 其零点分别为 $0, a, \dfrac{a}{2}$. 其 y' 符号改变如下

$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{a}{2})$	$(\frac{a}{2}, a)$	$(a, +\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$

   故 0 为极小值点；$\frac{a}{2}$ 为极大值点；$x = a$ 为极小值点.

3. 利用极值判别法 II 求下列函数的极值:

$$a)\ y = xe^{-x}, \qquad b)\ y = \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

解: a) $y' = e^{-x} - xe^{-x}$, $y'' = -2e^{-x} + xe^{-x}$. 令 $y' = 0$, 得驻点 $x = 1$. 由于 $y''(1) = -2e^{-1} + e^{-1} = -e^{-1} < 0$, 故 $x = 1$ 是 f 的极大值点.

b) $y' = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{x}{(1+x^2)} = \dfrac{1-x}{1+x^2}$, 令其为零, 得驻点 $x = 1$, 又

$$y'' = \frac{-1(1+x^2) - 2x(1-x)}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2} \quad \Longrightarrow \quad y''(1) = \frac{1-2-1}{4} = -\frac{1}{2}$$

故 $x = 1$ 是极大值点.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2y^2 + y = 1$ $(y > 0)$ 给出, 求其极值.

解: 方程 $x^2y^2 + y = 1$ 两边对 x 求导, 得 $2xy^2 + 2x^2yy' + y' = 0$, 解得

$$y' = -\frac{2xy^2}{1+2x^2y} \quad y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad xy^2 = 0 \quad \stackrel{y>0}{\Longrightarrow} \quad x = 0$$

故 $x = 0$ 是极值点, 且当 $x = 0$ 时, $y = 1$. 显然, 当 x 从 $x < 0$ 转为 $x > 0$ 时, y' 从正转负, 这说明 $x = 1$ 是极大值点.

5. 设 $f(x) \in C[0, +\infty]$, $f(0) = 0$, 且 $f'(x)$ 单调增加, 证明: $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上也是单调增加的.

证明: $\varphi'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, 又由有限增量公式, 知

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x = f'(\xi)x$$

其中 ξ 介于 0 和 x 之间, 故

$$\varphi'(x) = \frac{xf'(x) - f'(\xi)x}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x}$$

由于 f' 当 $x > 0$ 时是单调增加的, 故当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > 0$ $\square$.

6. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值:

$$y = |4x^3 - 18x + 27| \text{ 在 } [0, 2] \text{ 上.}$$

解： 令 $f(x) = 4x^3 - 18x + 27$, $x \in [0, 2]$. $f'(x) = 12x^2 - 18$. 令 $f' = 0$, 解得驻点 $x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$（负值舍去）

x	$\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 2\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调减少	极小	单调增加

从而 $f(x)_{max} = \max\{f(0),\ f(2)\} = \max\{27, 20\} = 27$；$f(x)_{min} = f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = 27 - 6\sqrt{6} > 0$. 故也知 f 在 $[0, 2]$ 上恒正，从而 $y = |f(x)| = f(x)$. 由此知 $y_{max}(0) = 27$，$y_{min}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = 27 - 6\sqrt{6}$.

7. 写出 $y = \arcsin x$ 和 $y = \tan x$ 的带拉格朗日余项的三阶马克劳林公式（须有计算过程）.

解： $y' = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \dbinom{-\frac{1}{2}}{1}(-x^2) + o(x^2)$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

设 $\arcsin x = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + a_3 x^3 + o(x^3)$，则 $a_0 = \arcsin 0 = 0$，且

$$(\arcsin x)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + o(x^3)$$

由泰勒展开的唯一性, 知 $a_1 = 1, 2a_2 = 0, 3a_3 = -\dfrac{1}{2}$, 即 $a_2 = 0, a_3 = -\dfrac{1}{6}$, 从而知

$$\arcsin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

对函数 $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$，由于 y 是奇函数，故设 $\tan x = a_1 x + a_3 x^3 +$

$o(x^3)$. 结合 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的泰勒展开，得

$$\frac{x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)}=a_1x+a_3x^3+o(x^3)$$

即 $(a_1x+a_3x^3+o(x^3))\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$

- x 的系数：$a_1=1$;
- x^3 的系数：$-\frac{1}{2}a_1+a_3=-\frac{1}{3!}. \implies a_3=\frac{1}{3}.$

故 $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

8. 由代数基本定理知：n 次多项式至多有 n 个实根. 利用此结论及罗尔定理，不求函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出根所在的区间.

   解： 显然 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，由于 f 是多项式，故连续可导. 分别在 $[1,2]$，$[2,3]$，$[3,4]$ 上用罗尔定理，知 $f'(x)$ 在 $(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$ 上各有一根. 由于 f 是三次多项式，由代数基本定理知它最多只有三个实根，由此可知罗尔定理所求的上述三根就是 $f'=0$ 的所有根.

9. 设 $a_0,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$ 都是实数，证明：若下条件满足

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$$

   则 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

   证明： 令 $f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx$，则 $f(1)=f(0)=0$. 显然 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$，则由罗尔定理知 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 $a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\xi+a_n=0$ $\square$.

10. 设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $f(a)f(b)>0$，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证明: 由条件知 $f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$，$f(b)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$，则由零点定理知 $\exists\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$，$\exists\xi_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$. 构造函数 $F(x)=f(x)e^{-x}$，则 $F\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$，故由罗尔定理，知 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=e^{-\xi}\left(f(\xi)-f'(\xi)\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad f(\xi)=f'(\xi)\quad\square.$$

11. 利用拉格朗日中值定理，证明下面的不等式:

$$a)\ 0<a<b,\, n>1\text{ 时}:\ na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$$

$$b)\ |\sin x-\sin y|\le|x-y|$$

证明: a) 考虑函数 $f(x)=x^n$,则 $f'(x)=nx^{n-1}$,它是个增函数(因 $n>1$). 由于 $C[a,b]\cap D(a,b)$,则在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理,知 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{b^n-a^n}{b-a}$. 又由于 f' 单调增加，故 $f'(a)<f'(\xi)<f'(b)$，两边乘 $b-a>0$，得到 $f'(a)(b-a)<f'(\xi)(b-a)<f'(b)(b-a)$. 即得 $na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$. $\square$.

b) 不妨设 $x<y$，考虑 $f(t)=\sin t\in C[x,y]\cap D(x,y)$，应用拉格朗日中值定理知 $\exists\xi\in(x,y)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. 即

$$\cos\xi=\frac{\sin y-\sin x}{y-x}\quad\Longrightarrow\quad|\sin y-\sin x|=|\cos\xi||y-x|\le|y-x|\quad\square.$$

12. 设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$ $(0<a<b)$，证明: $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

证明: $$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}\ \overset{\text{柯西中值}}{\underset{\exists\xi\in(a,b)}{=\!=\!=\!=}}\ \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}\quad\Longrightarrow\quad f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}\quad\square.$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

证明： 为利用 $f'(a)=f'(b)=0$，考虑 a，b 处的二阶泰勒展开

$$f(x)=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,\quad \xi\text{ 介于 }x\text{ 和 }a\text{ 之间}$$

$$f(x)=f(b)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-b)^2,\quad \eta\text{ 介于 }x\text{ 和 }b\text{ 之间}$$

为出现 $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$，在上两式中令 $x=\dfrac{a+b}{2}$，得到

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\ \xi_1\text{ 介于 }\frac{a+b}{2}\text{ 和 }a\text{ 之间}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\ \xi_2\text{ 介于 }\frac{a+b}{2}\text{ 和 }b\text{ 之间}$$

两式相减，得 $f(b)-f(a)=\dfrac{1}{2}\left(f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right)\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

$$\Longrightarrow\quad |f(b)-f(a)|=\frac{1}{8}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|(b-a)^2\leq$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\right)\leq\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$$

其中 $f''(\xi)=\max\{|f'(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$, 从而 $|f''(\xi)|\geq\dfrac{4|(f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\quad\square$.

注： 本题的证明方法与选做题 *6* 的证明方法类同.

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$

证明： 在 $[0,1]$ 上对 f 利用拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi_1\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=0$. 令 $F(x)=x^2f'(x)$，显然 $F(0)=F(\xi_1)=0$，且 $F\in C[0,\xi_1]\cap D(0,\xi_1)$, 则在 $[0,\xi_1]$ 上利用拉格朗日中值定理, 知 $\exists\xi\in$

$(0,\xi_1)\subseteq(0,1)$，使得 $\dfrac{\xi_1^2 f'(\xi_1)-0}{\xi_1-0}=F'(\xi)=2\xi f'(\xi)+\xi^2 f''(\xi)=0 \quad \square.$

15. 设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $f(a)=f(b)=1$，求证：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$

分析： $e^{\eta-\xi}\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=1$ 等价于 $(e^\eta f(\eta))'=(e^\xi)'$，故

解： 令 $F(x)=e^x f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，应用拉格朗日中值定理，知 $\exists\eta\in(a,b)$，使得 $(e^\eta f(\eta))'=\dfrac{e^a f(a)-e^b f(b)}{a-b}=\dfrac{e^a-e^b}{a-b}$. 另一方面，对 e^x 在 $[a,b]$ 上运用拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{e^a-e^b}{a-b}=(e^\xi)'=e^\xi$. 两相比较知 $e^\xi=(e^\eta f(\eta))'=e^\eta f(\eta)+e^\eta f'(\eta) \qquad \square.$

16. 求下列函数图形的凹（下凸）凸区间及拐点:

$a)\ y=x^4-12x^3+48x^2-50; \qquad b)\ y=a^2-\sqrt[3]{x-b}$

解： a) $y'=4x^3-36x^2+96x$，$y''=12x^2-72x+96$. 令 $y''=0$，得到 $x=2,4$.

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下凸	拐点	上凸	拐点	下凸

b) $y'=-\dfrac{1}{3}(x-b)^{-\frac{2}{3}}$，$y''=\dfrac{2}{9}(x-b)^{-\frac{5}{3}}$. 令 $y''=0$，得 $x=b$.

x	$(-\infty,b)$	b	$(b,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	上凸	拐点	下凸

17. 证明：曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有三个拐点且位于同一条直线上.

证明： $y'=\dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$，$y''=\dfrac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$，令 $y''=0$，得到 $x=1$，$-1\pm\sqrt{2}$. 为判别这三个点是否为拐点，需验证在这些点附近

函数的凸性是否发生了改变. 为此

	$(-\infty,-2-\sqrt{3})$	$-2-\sqrt{3}$	$(-2-\sqrt{3},1)$	1	$(1,-2+\sqrt{3})$	$-2+\sqrt{3}$	$(-2+\sqrt{3},+\infty)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	严格上凸	拐点	严格下凸	拐点	严格上凸	拐点	严格下凸

拐点 $P_1\left(-2-\sqrt{3},\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$，$P_2\,(1,1)$，$P_3\left(-2+\sqrt{3},\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$. 由于

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\left(3+\sqrt{3},\ \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right),\ \overrightarrow{P_2P_3}=\left(-3+\sqrt{3},\ \frac{-3+\sqrt{3}}{4}\right)=\left(\frac{-6}{\sqrt{3}+3},\ \frac{-3}{2(\sqrt{3}+3)}\right)$$

可见 P_1,P_2,P_3 三点共线.

18. 证明下列不等式:

(a) 设常数 $p>1$，则当 $x\in[0,1]$ 时，有 $x^p+(1-x)^p\geq\frac{1}{2^{p-1}}$.

证明: 令 $f(t)=t^p$，$t\in[0,1]$. 则 $f'(t)=pt^{p-1}$，$f''(t)=p(p-1)t^{p-2}$，由于 $p(p-1)>0$，且 $t^{p-2}\geq 0$，故 $f''(t)\geq 0$，$\forall\, t\in[0,1]$. 从而 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上下凸. 则取 $x_1=x\in[0,1]$，$x_2=1-x\in[0,1]$，有

$$\frac{f(x)+f(1-x)}{2}\geq f\left(\frac{1}{2}\right)\quad\Longrightarrow\quad\frac{x^p+(1-x)^p}{2}\geq\frac{1}{2^p}\quad\square.$$

(b) $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x\neq y)$

证明: 令 $f(t)=e^t$，其二阶导 $f''(t)=e^t$ 恒大于零，故函数严格下凸. 这说明 $\forall\, x\neq y$，都有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)\quad\Longrightarrow\quad\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\qquad\square.$$

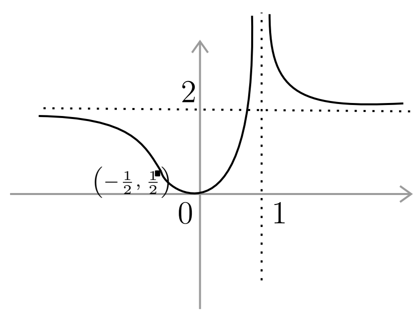
19. 全面讨论下列函数的性态，并描绘出它们的图像：

$$a)\ y=\frac{2x^2}{(1-x)^2};\qquad b)\ y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$$

解： a) 由于 $\lim\limits_{x\to1}y=+\infty$，故 $x=1$ 是铅直渐近线；又 $\lim\limits_{x\to\infty}y=2$，故 $y=2$ 是函数图像的水平渐近线. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在，故函数图像无斜渐近线. $f'=\dfrac{4x}{(1-x)^3}\quad\Longrightarrow\quad x=0$ 为驻点

$$f''=\frac{8x+4}{(1-x)^4}\quad\Longrightarrow\quad x=-\frac{1}{2}\ \text{为可能驻点}$$

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	无	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	无	$+$
$f(x)$	减，上凸	拐点	减，下凸	增，下凸	无穷间断点	减，下凸



b) $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)\cup(0,+\infty)$. 且在边界点 0 处

$$\lim_{x\to0^+}x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{洛必达}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{3+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}y=\infty\quad\Longrightarrow\quad y\ \text{的图像由铅直渐近线}\ x=-\frac{1}{e}$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty} y$ 不存在，故无水平渐近线. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)=1$，且

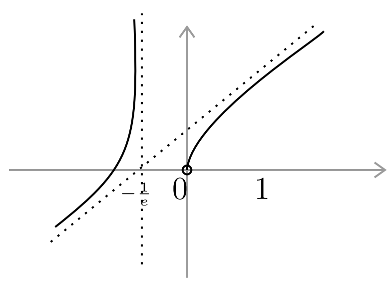
$$\lim_{x\to\infty}(y-1\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right)=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{e}$$

故有斜渐近线 $y=x+\dfrac{1}{e}$. 计算导数 $y'=\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{e^x+1}$

$$y''(x)=-\frac{1}{x(ex+1)^2}$$

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$	$(0,+\infty)$
y'	$+$	$+$
y''	$+$	$-$
y	增，下凸	增，上凸



20. 证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有唯一的实根，并用切线法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

解： $f\in C[-1,0]$. $f(-1)=-5<0$，$f(0)=1>0$. 则由零点定理知 $\exists\xi\in(-1,0)$，使得 $f(\xi)=0$. 由于 $f'=5x^4+5>0$. 故 f 在 $(-1,0)$ 上单调增加, 从而 ξ 是 $(-1,-0)$ 内的唯一根. 由于 $f''=20x^3$. 取 $x_0=-1$，则 $f''(x_0)<0$，$f(x_0)f''(x_0)>0$. 故由 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 知

$$x_1=-1+\frac{-5}{5+5}=-0.05;\quad x_2=-0.5-\frac{f(-0.5)}{f'(-0.5)}\approx-0.26$$

$$x_3 = -0.26 - \frac{f(-0.26)}{f'(-0.26)} \approx -0.20; \quad x_4 = -0.20 - \frac{f(-0.2)}{f'(-0.2)} \approx -0.2 \approx \xi$$

21. 求方程 $\sin 2x - x = 0$ 的正实根（精准到两位小数）.

    解: 令 $f(x) = \sin 2x - x$,则 $f(x) \in C\left[\frac{\pi}{6}, 1\right]$. 由于 $f(\pi/6) = \sin \pi/3 - \dfrac{\pi}{3} \approx 0.342470$; $f(1) = \sin 2 - 1 \approx 0.9093 - 1 = -0.0907 < 0$. 故由零点定理知, $\exists \xi \in \left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$,使得 $f(\xi) = 0$. 由于当 $x \in (0, \frac{\pi}{6})$ 时, $f'(x) = 2\cos 2x - 1 < 0$, 从而函数单调减少, 故 ξ 是该区间上的唯一解. 又 $f''(x) = -4\sin 2x$, $f''(1) = -4\sin 2 \approx -3.6372 < 0$. 令 $x_0 = 1$, 则 $f(1) < 0$, $f''(1) < 0$. 而

$$x_2 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{-0.0907}{-1.8323} \approx 0.9505$$

$$x_2 = 0.9505 - \frac{f(0.9505)}{f'(0.9505)} \approx 0.9505 - \frac{-0.0645}{-1.6485} \approx 0.9478$$

$$x_3 = 0.9478 - \frac{f(0.9478)}{f'(0.9478)} \approx 0.9478 - \frac{-0.00009}{-1.6383} \approx 0.9477 \approx \xi$$

选做题:

1. 证明广义罗尔定理：设 $f(x) \in D(a,b)$, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ (或 $-\infty$), 则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

   证明: 令 $F(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) & x = a \\ f(x) & x \in (a,b) \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) & x = b \end{cases}$ 则 $F \in C[a,b] \cap D(a,b)$. 且 $F(a) = F(b)$, 由罗尔定理知, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi) = f'(\xi) = 0$ $\square$.

2. 设 $f(x) \in D[0,+\infty)$, 且 $\forall x \in (0,+\infty)$, 成立 $0 \le f(x) \le \ln \dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$. 证明: $\exists \xi \in (0,+\infty)$, 使得 $f'(\xi) = \dfrac{2}{2\xi+1} - \dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$. 提示：利用推广的罗尔定理，见课本 *157* 页例 *4.5*.

   证明: 由于 $0 \le f(0) \le \ln 1 = 0$,且 $0 \le \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \le \lim\limits_{x\to+\infty} \ln \dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \ln 1 = 0$. 令 $F(x) = f(x) - \ln \dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$, 在 $[0,+\infty)$ 上运用推广罗尔

定理，知 $\exists \xi \in (0,+\infty)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{2}{2\xi+1}+\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}=0 \quad\Longrightarrow\quad f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad \square.$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某领域内 $n\,(\geq 3)$ 阶可导，且 $f^{(n)}(x)$ 在 $x=a$ 连续，又假设 $f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，且 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)\quad 0<\theta<1$,证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

证明: 将 f 在 $x=a$ 处泰勒展开，得 $f(a+h)=f(a)+\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n \quad \xi\in (a,a+h)$. 再将 f' 在 a 处泰勒展开，得

$$f'(a+\theta h)=\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1} \quad \eta\in(a,a+\theta h)$$

利用条件 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$，知

$$f(a)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n=f(a)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}\theta^{n-1}h^n \quad\Longrightarrow$$

$$\theta^{n-1}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{f^{(n)}(\eta)}\frac{1}{n-1} \quad\Longrightarrow\quad \theta=\sqrt[n-1]{\frac{f^{(n)}(\xi)}{f^{(n)}(\eta)}\frac{1}{n-1}}$$

当 $h\to 0$ 时，$\xi,\eta\to a$，$\theta\to\sqrt[n-1]{\dfrac{f^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)}\dfrac{1}{n-1}}=\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{n-1}}$. $\square$.

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$. 若 $f(0)>0$，$f'(0)<0$，证明：$f(x)=0$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有解.

证明: 将 $f(x)$ 在 0 处泰勒展开, 得 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2,\quad 0<\xi<x$. 由于 $f''(x)<0$, 故 $f''(\xi)x^2/2<0$, 从而可得 $f(x)<f(0)+f'(0)x$.

记 $g(x)=f'(0)x+f(0)$，则 $g(x)=0$ 时 $x_0=-\dfrac{f(0)}{f'(0)}>0$. 即 $g(x_0)=0$，从而 $f(x_0)<0$，但 $f(x)>0$，而 $f(x)\in[0,x_0]$，故由零点定理知 $\exists\eta\in(0,x_0)\subseteq[0,+\infty)$，使得 $f(\eta)=0$. $\square$.

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足 $f(0) = f(1) = 0$，$\max_{0\le x\le 1} f(x) = 2$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi) \le -16$.

证明： 由题意 $\exists c \in (0,1)$，使得 $f(c) = 2$，且 $f'(c) = 0$. 在 c 处泰勒展开，得 $f(x) = f(c) + \dfrac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$ $\quad\xi$ 介于 x 与 c 之间，则有

$$f(0) = f(c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0-c)^2 = 2 + \frac{f''(\xi_1)}{2}c^2 = 0 \quad \xi_1 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } c \text{ 之间}$$

$$f(1) = f(c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2 = 2 + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2 = 0 \quad \xi_2 \text{ 介于 } c \text{ 与 } 1 \text{ 之间}$$

解得 $\begin{cases} f''(\xi_1) = -\dfrac{4}{c^2} \\ f''(\xi_2) = -\dfrac{4}{(1-c)^2} \end{cases}$ 令 $-\dfrac{4}{c^2} = -\dfrac{4}{(1-c)^2}$，解得 $c = \dfrac{1}{2}$.

(a) 若 $c \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$，则 $-\dfrac{4}{c^2} \le -\dfrac{4}{(1-c)^2}$，且 $-\dfrac{4}{c^2} \le -\dfrac{4}{(1/2)^2} = -16$.

(b) 若 $c \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, 则 $-\dfrac{4}{(1-c)^2} < -\dfrac{4}{c^2}$, 且 $-\dfrac{4}{(1-c)^2} \le -\dfrac{4}{(1-1/2)^2} = -16$. 结论由此得证. $\square$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) = f(a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f'''(\xi)$$

证明：（*方法上可参考讲义第三章例 11.6.27*）将 $f(x)$ 在 $\dfrac{a+b}{2}$ 处二阶泰勒展开，得 $\forall x \in [a,b]$，有

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3!}f'''(\eta)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3, \quad \text{其中 } \eta \text{ 介于 } x \text{ 与 } \frac{a+b}{2} \text{ 之间.}$$

特别地，当 $x=a$，b 时，得

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3,\quad \text{其中}\ \xi_1\in\left(\frac{a+b}{2},b\right).$$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\left(\frac{a-b}{2}\right)^3,\quad \text{其中}\ \xi_2\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right).$$

两式相减，得到

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{48}(b-a)^3\left(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right)$$

由于 $f'''(x)\in C[a,b]$,故它有最值,即 $\exists m,M$,使得 $m\le f'''(\xi_1),\ f'''(\xi_2)\le M$，从而 $2m\le f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\le 2M$，即 $m\le\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\le M$. 又由闭区间上连续函数的介质定理，知 $\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f'''(\xi)=\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$，代入前式后即得所证. □.

7. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，利用柯西中值定理，证明

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\qquad 0<\theta<1$$

证明: 令 $g(x)=x^n$, 在 0 的使 f 可导的某个领域内用柯西中值定理, 得

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}\xlongequal{\exists\xi_1\text{ 介于 }0,x\text{ 间}}\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{n-1}-n0^{n-1}}$$

$$\xlongequal{\exists\xi_2\text{ 介于 }0,\xi_1\text{ 间}}\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-1}}=\cdots\xlongequal{\exists\xi_n\text{ 介于 }0,\xi_{n-1}\text{ 间}}\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$$

其中 $\theta:=\dfrac{\xi_n}{x}\in(0,1)$. □.