hw_4

必做题：

1. 利用单调有界数列极限存在定理，证明下列数列极限的存在性.

(a) $a_n=\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

解： $a_n-a_{n-1}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}>0$

故 $\{a_n\}$ 单调增加

又因为 $a_n=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

$=1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$

故 $\{a_n\}$ 存在上界 1，s.t. $\forall n\in\mathbb{N}^*$，$a_n<1$

故由单调有界数列极限存在定理，a_n 极限存在

(b) $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$

解： $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n^n}>0$

故 $\{a_n\}$ 单调增加

又因为 $a_n\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^n}\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1+\frac{\frac{1}{4}(1-(\frac{1}{2})^{n-1})}{1-\frac{1}{2}}<\frac{3}{2}$

故 $\{a_n\}$ 存在上界 $\frac{3}{2}$，s.t. $\forall n\in\mathbb{N}^*$，$a_n<\frac{3}{2}$

故由单调有界数列极限存在定理，a_n 极限存在

2. 证明下列递归数列收敛，并求其极限.

(a) $a_1>0, a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\,(n=1,2,\cdots)$

解： (a) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})-a_n$
$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}-a_n)$

① $a_n=1$

② 若 $a_n>1$
$a_{n+1}-a_n<0$，$\{a_n\}$ 单调减少且 $\{a_n\}$ 有下界，故 $\{a_n\}$ 收敛

③ 若 $a_n<1$
$a_{n+1}-a_n>0$，$\{a_n\}$ 单调增加且 $\{a_n\}$ 有上界，故 $\{a_n\}$ 收敛

取极限
$x=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})$，$x^2=1$，$x=1\,(x>0)$
故极限为 1

(b) $a_1=1, a_{n+1}=1+\frac{a_n}{1+a_n}, n=1,2,\cdots$

解： 由例2.5可知 $\{a_n\}$ 单调，且 $1<a_n<2$ 故 a_n 收敛

取极限
$x=1+\frac{x}{1+x}$
$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$

(c) $a_1=2, a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}, n=1,2,\cdots$

解：
$a_{n+1}-a_n=-\frac{a_n-2}{a_n}$

$a_{n+2}-a_n=-\frac{2(a_n-1-\sqrt{2})(a_n-1+\sqrt{2})}{2a_n+1}$

当 $a_n<1+\sqrt{2}$，$a_{n+2}-a_n>0$

$a_n>1+\sqrt{2}$，$a_{n+2}-a_n<0$

故奇偶子列交替围绕 $1+\sqrt{2}$ 逼近：a_{2k+1} 单调增加且有上界 $1+\sqrt{2}$，a_{2k} 单调减少且有下界 $1+\sqrt{2}$

故 $\{a_n\}$ 收敛，极限为 $1+\sqrt{2}$

3. 请写出 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 不存在的严格定义.

解： $\forall A\in\mathbb{R}, \exists\epsilon>0, \forall M>0, \exists x>M, |f(x)-A|\geq\epsilon$

4. 用定义严格证明 $f(x)=\frac{x(x+3)}{(x-1)(x+2)}$ 在 $x=1$ 处的左极限是 $-\infty$.

解： 4. $\forall M>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{6M}\right\}$
则当 $x\in(1-\delta,1)$ 时

有
$f(x)=\frac{x(x+3)}{(x-1)(x+2)}<-M$
故
$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

5. 用定义严格证明：$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+3}=2.$

解： $\forall\epsilon>0$，取 $M=\sqrt{\frac{7}{\epsilon}}$
$|f(x)-2|=\left|\frac{2x^2-1}{x^2+3}-2\right|=\frac{7}{x^2+3}<\epsilon$
故
$\forall x>M$，$|f(x)-2|<\epsilon$
$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+3}=2$

6. 证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的邻域内无界，但当 $x\to 0$ 时，并非无穷大.

解： ①无界：
令 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$，
$\lim_{n\to\infty} x_n=0$
$f(x_n)=2n\pi\cos(2n\pi)=2n\pi\to\infty$
故无界

②非无穷大
令 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，
$\lim_{n\to\infty} x_n=0$
$f(x_n)=(2n\pi+\frac{\pi}{2})\cos(2n\pi+\frac{\pi}{2})=0$
故
$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$
故非无穷大

7. 求下列函数在指定点的左、右极限，并判断函数在该点处是否存在极限.

(a) $f(x)=\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ 在 $x_0=1$ 处.

解：
$\lim_{x\to1^+} f(x)=1$
$\lim_{x\to1^-} f(x)=-1$
不存在极限

(b) $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 在 $x_0=0$ 处.

解： 令 $\frac{1}{x}=t$
$\lim_{t\to+\infty}\frac{2^t-1}{2^t+1}=1$
$\lim_{t\to-\infty}\frac{2^t-1}{2^t+1}=-1$
不存在极限

8. 对函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$，证明 $\lim_{x\to0} f(x)=0$.并指出下面的计算错误在什么地方？

$$\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to0} x\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}=0$$

解： $\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，无法计算

9. 计算下面极限

a) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

解： 原式 $=\lim_{x\to4}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}$

$=\lim_{x\to4}\frac{x-2}{x-1}=\frac{2}{3}$

b) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$

解： 原式 $=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2}{\sin 2x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1+x}{2\cos 2x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}$

$=\frac{1}{4}$

c) $\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

解： 原式 $=\lim_{x\to-8}\frac{1-x-9}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}$

$=\lim_{x\to-8}\frac{-x-8}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}$

$=\lim_{x\to-8}\frac{-(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt{1-x}+3}=-2$

d) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

解： 原式 $=\lim_{x\to\infty}\frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}}=\frac{a}{1+\sqrt{1+\frac{a}{x}}}=\frac{a}{2}$

10. 计算下面极限

a) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

解： 原式 $=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$
$=\cos a$

b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

解： 令 $t=\frac{\pi}{2}-x$
原式 $=\lim_{t\to0}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

c) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}}$

解： 原式 $=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x+\sin^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$
$=\lim_{x\to0}\frac{4(x\sin x+\sin^2 x)}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$
$=\lim_{x\to0}\frac{8}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}$
$=4$

d) $\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

解： 令 $t=1-x$

原式 $=\lim_{t\to0}\frac{t\tan\frac{\pi(1-t)}{2}}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t\cot\frac{\pi t}{2}}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}$

11. 计算下列极限

a) $\lim_{x\to0}\sqrt[3]{1-2x}$

解： 原式 $=1$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

解： 令 $t=\frac{1}{x}$

原式 $=\lim_{t\to0^+}(2t^2+\cos t)^{\frac{1}{t^2}}$

$=\lim_{t\to0^+}(1+2t^2+\cos t-1)^{\frac{1}{t^2}}$

$\approx\lim_{t\to0^+}(1+\frac{3t^2}{2})^{\frac{1}{t^2}}=e^{\frac{3}{2}}$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$

解： 原式 $=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x^2-1})^{x^2-1}\right]^{\frac{x}{x^2-1}}$

$=e^0=1$

d) $\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{\cos\sqrt{x}}$

解： 原式 $=1$

选做题：

1. 求 a_n 的极限，其中 $a_n=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$, $n=1,2,\cdots$.

解： $a_n=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=\frac{1}{n!}+\frac{2!}{n!}+\cdots+1$

$\lim_{n\to\infty}a_n=0+0+\cdots+1=1$

2. 给定两个正数 a 和 b，且有 $0<b<a$.令 $a_0=a, b_0=b$，并按递推公式 $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, n=1,2,\cdots$定义数列 a_n, b_n.证明这两个数列收敛于同一个极限（但不需求出极限值）.

解： $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}>\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}=b_n$

$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{a_n+b_n}{2}>0$，$\{a_n\}$ 单调减少

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}>1$，$\{b_n\}$ 单调增加

$\{a_n\}$ 有下界 b_0，$\{b_n\}$ 有上界 a_0，故 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 均收敛

令 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim_{n\to\infty}b_n=B$

$A=\frac{A+B}{2}$，$A=B$，成立

3. 证明：$\lim_{x\to-\infty}a^x=0\ (a>1)$.

解： 令 $t=-x$

$\lim_{x\to-\infty}a^x=\lim_{t\to+\infty}a^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{a^t}=0$

4. 用定义证明 $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

解： $\forall\epsilon>0$，取 $\delta=\epsilon$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|<\epsilon$

$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

5. 考虑数列 $x_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

(a) 证明：$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\sin x}{x}$ （提示：利用 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$）

解： $x_n=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{4}}\cdots\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$

$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$

(b) 证明 Vieta 公式：$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$（提示：利用 $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta}$ 及 $\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}$）

解： $\frac{2}{\pi}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots$

$\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\frac{1}{2}}\quad\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$

故 $\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$