第三章：导数、微分、泰勒多项式逼近

目录

第三章：导数、微分、泰勒多项式逼近

1 导例

例 1.1 GPS 导航是利用卫星发射信号, 到达地球表明后又反馈回卫星进行加工、处理. 为精准导航, 须使地面时间和卫星上时钟的时间尽量校准同步. 记地面时间为 T_m, 卫星上时钟时间为 T，根据狭义相对论，我们有

$$T_m = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

其中 v 是卫星的绕行速度，c 是真空中的光速. 直接利用上式计算不便，我们希望找到上面关系的好的近似. 令 $x = \dfrac{v^2}{c^2}$ 则 $T_m/T = f(x)$，其中 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. 由于卫星速度比之光速小得多，所以 x 是个很小的量. 我们希望用一个更简单的函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 附近来近似 $f(x)$，且使近似的误差是 x 的高阶无穷小（$x \to 0$ 时），即要求

$$f(x) - g(x) = o(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x} = 0$$

对 $g(x)$ 基本的要求是 $g(0) = f(0) = 1$，则上极限可写成如下形式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-(g(x)-g(0))}{x-0} = 0 \quad \xRightarrow{\text{假设 } f(x) \text{ 在 } 0 \text{ 的变化率有意义}}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{=:f'(0)\,\exists} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

即 $g'(0) := \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ 是存在的且等于 $f'(0)$. 又注意到（$x \to 0$ 时）:

$$f(x) = f(0) + \frac{f(x)-f(0)}{x}x$$

我们预期, 当 x 较小时, $f'(0)$ 是 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 的一个好的近似, 但如果直接用 $f'(0)$ 将它替代，则将产生一误差，即有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + error$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{error}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-(f(0)+f'(0)x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-f'(0)=f'(0)-f'(0)=0$$

也就是说 $error=o(x)$，故我们得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的"一阶近似"

$$g(x)=f(0)+f'(0)\,x$$

$$\text{即有}\quad f(x)\approx g(x)\ (x\to 0)\quad\Longleftrightarrow\quad f(x)=g(x)+o(x)$$

称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的线性逼近. 特别地，我们看出，$\Delta g:=g(x)-g(0)=g(x)-f(0)$ 是 $\Delta f=f(x)-f(0)$ 在 x 处的一个近似，常称 $\Delta g=f'(0)x$ 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 的线性主部，也称 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的微分，记作

$$df|_{x=0}:=f'(0)\,x=f'(0)\Delta x$$

也就是说，为了得到一阶近似，我们须计算下极限

$$f'(0):=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x\sqrt{1-x}}$$

$$\overset{\sqrt{1-x}\sim 1-\frac{1}{2}x}{=\!=\!=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2}$$

由此得到一阶近似

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\approx 1+\frac{1}{2}x$$

故

$$T_m=\frac{T}{\sqrt{1-x}}\approx T\left(1+\frac{1}{2}x\right)=T\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right)$$

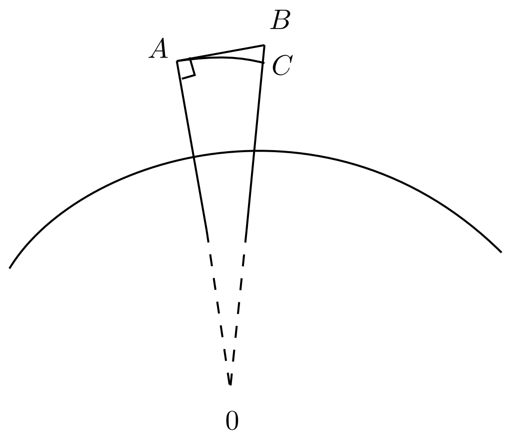
$$\overset{v=4km/s,\,c=3\times 10^5 km/s}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}T\times(1.00000000005)$$

问题: 如何得到 $f(x)$ 的更高阶近似? 比如希望有 $g(x)$ 使得 $f(x)-g(x)=o(x^2)\ (x\to 0)$? 显然，我们考虑对一阶近似 $f(0)+f'(0)x$ 的一个二阶微扰（*perturbation*），即

$$g(x):=f(0)+f'(0)x+Ax^2\ (\text{其中}\,A\ \text{是常数})$$

然后利用 $f(x)-g(x)=o(x^2)$ 来决定 A 的值.

例 1.2 第一宇宙速度 $7.9km/s$ 的推导. 第一宇宙速度是维持物体围绕地球不着地飞行所需要的最低速度. 设卫星当前时刻在地表附近 A 点沿水平方向飞行，设没有任何外力影响，则它一秒钟后应到 B 点，但由于地心引力的影响，卫星实际到达的点是 C 点，且 BC 的长度是重力加速度下的自由落体距离，即 $\overline{BC} = 4.9m$.



卫星绕地球飞行当且仅当 $\overline{OA} = \overline{OC} \approx 6371km$（地球半径），且卫星的速度是 AB 的距离 $\overline{AB}$. 用勾股定理，得

$$\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OA}^2 = (\overline{OC} + \overline{BC})^2 - \overline{OA}^2$$

$$= (6271000 + 4.9)^2 - (6371000)^2 \xlongequal{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$

$$= (6371000 + 4.9 + 6371000)(637100 + 4.9 - 6371000) =$$

$$= 2 \times 6371000 \times 4.9 + 4.9^2 \approx 2 \times 6371000 \times 4.9 \quad \Longrightarrow \quad \overline{AB} \approx 7.9km$$

注记 1.1 上近似的实质：对函数 $y = x^2$ 在 $x_0 = 6371000$ 处进行线性逼近，即

$$\Delta y = x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) \approx$$

$$\approx 2x_0(x - x_0) = \underbrace{2x_0\Delta x}_{dy|_{x=x_0}}$$

逼近的误差是关于 Δx 的高阶无穷小，即

$$\Delta y = dy|_{x=x_0}\Delta x + o(\Delta x)$$

2 微分、导数、泰勒多项式的概念导引

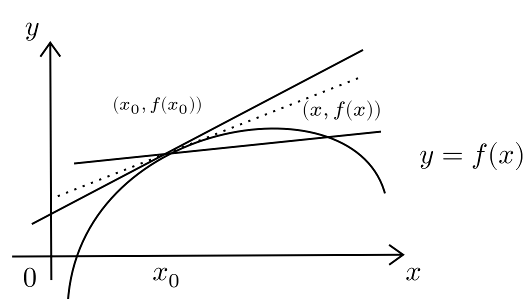
设 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续. 常需考虑两类问题.

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的变化率, 即它在 x_0 处附近平均变化率的极限. 记 $\Delta x = x - x_0$ 是自变量 x 在 x_0 处的一个增量(增量本身可大可小), 则 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率是
$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
常需考虑当 Δx 越来越小时函数的平均变换率. 当 $\Delta x \to 0$, 上面表达式的极限 (若存在) 就是 $f(x)$ 在 x_0 处的瞬时变化率, 这引出 $f(x)$ 在 x_0 处导数的概念.

定义 2.1 (导数) 对 $f(x)$, 如下面的极限存在, 则说 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 并将其极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 (*derivative*), 记之为 $f'(x_0)$, 即有
$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}} \quad (2.1)$$
记 $\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 附近的一个微小增量, 则上式可写成
$$\boxed{f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \quad (2.1')$$
即写成了两个 (微小) 增量的商的极限的形式, 故称之为微商.

定义 2.2 如果 $f(x)$ 在其定义域内每一点都可导, 则我们便由 $f(x)$ "导出" 了一个新的函数 $f'(x)$, 它在 $x_0 \in D(f)$ 上的取值即 $f(x)$ 在 x_0 处的导数值. 称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 常也简称为 $f(x)$ 的导数.

注记 2.1 定义 (2.1′) 的形式启发我们给导数赋以几何含义: 它是过曲线 $y=f(x)$ 上的固定点 $(x_0, f(x_0))$ 与它近旁的点 $(x, f(x))$ 的 "割线" 的斜率 (当 $x \to x_0$ 时) 的极限, 即曲线在 $(x_0, f(x_0)$ 处切线的斜率.



2. 如果 $f(x_0)$ 已知，对与 x_0 靠近的另一点 x，如何近似（估计）$f(x)$ 的值，并使近似的误差足够小且可控？具体而言，

   (a) 当 $\Delta x = x - x_0 \to 0$ 时，若有近似 $g(x) \approx f(x)$. 基本的要求是：$g(x_0) = f(x_0)$，即近似的误差 $f(x) - g(x)$ 也趋于零. 进一步希望找到好的近似手段，使得

$$f(x) - g(x) = o(\Delta x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0$$

   即误差 $f(x) - g(x)$ 相对于 $\Delta x = x - x_0$ 是（在 $x \to x_0$ 时）高阶无穷小.

      i. 我们要求 $f(x)$ 和它（在 x_0 处）的逼近函数 $g(x)$ 在 x_0 处连续，故由 $f(x_0) = g(x_0)$ 知 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x) - g(x)] = 0$，从而上面的极限是有意义的.

      ii. 当然，如果我们要求近似的"精度（*precision*）"更高，只需选择更好的逼近函数 $g(x)$ 使得近似的误差 $f(x) - g(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的更高阶无穷小，也就是说，有

$$f(x) - g(x) = o((\Delta x)^n) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

   (b) 我们希望在 x_0 处逼近 $f(x)$ 的函数 $g(x)$ 的形式简单、易算. 而最基本（但又非平凡）的函数是多项式函数，其最简单形式是一次多项式，即线性函数.

      i. 如用线性函数逼近 $f(x)$ 在 x_0 处的表现，可设 $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$ (其中 A 为常数)，则 $f(x) - g(x) = o(\Delta x)$ 的要求将引至

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

      为使上面的极限成立，需要 $f(x) - g(x) = f(x) - [f(x_0) + A(x - x_0)]$ 至少是当 $x \to x_0$ 时的二阶无穷小，即它至少与 $(x - x_0)^2$ 同阶. 我们看出，若下面的极限成立，则该要求可被满足

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

      上面的讨论表明：如要使 x_0 处附近的逼近误差是一阶无穷小，则可用线性函数来逼近 $f(x)$ 在 x_0 处的表现，即用曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的**切线方程**

$$\boxed{y = L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \qquad (2.2)$$

来近似 $f(x)$ 在 x_0 附近的表现

$$f(x) \approx L(x),\ x \in U(x_0)$$

且当 $x \to x_0$ 时，逼近的误差是高于 $x - x_0$ 的无穷小，即

$$f(x) - L(x) = o(x - x_0)$$

故也称线性近似 $L(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的一阶近似（*1st order approximation*）.

注记 2.2 通常而言，当 $\Delta x = x - x_0$ 越小，则用线性函数 $L(x)$（在 x_0 附近）逼近 $f(x)$ 的效果也越佳，故一般仅限于当增量 $\Delta x = x - x_0$ 较小时，才用 $L(x)$ 来逼近 $f(x)$（如 x 与 x_0 相距较大，则可选另一与 x 更靠近的点作为逼近的基点）.

将上近似换一种表达方式，则有

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x \text{ 或 } \boxed{\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)} \quad (2.3)$$

定义 2.3（微分）常将 $f'(x_0)\Delta x$ 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处增量 $\Delta f(x)$ 的线性主部称做 $y = f(x)$ 在 x_0 处的微分（*differential*），用符号 $df|_{x=x_0}$ 或 $dy|_{x=x_0}$ 来表示，即

$$\boxed{dy|_{x=x_0} = df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x} \quad (2.4)$$

即微分 $dy|_{x=x_0}$ 是 x_0 附近关于自变量增量 Δx 的一个线性函数，该线性函数由 $f(x)$ 在 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 确定.

当给自变量 x 在 x_0 处一个增量 Δx 时，可籍微分 $df|_{x=x_0}$ 计算出对应于自变量增量 Δx 实际增量 $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 的一个线性近似（一阶近似），即线性主部 $f'(x_0)\Delta x$ 来.

换言之，我们利用微分来一**阶近似**实际增量 Δf，且近似的误差是 $\Delta x = x - x_0$ 当 $x \to x_0$ 时的高阶无穷小，即

$$\Delta f \approx df|_{x_0} \text{ 或 } \boxed{\Delta f = df|_{x_0} + o(\Delta x)} \quad (2.3')$$

对函数 $y = f(x) = x$, 由于它本身是线性函数, 故它在 x_0 处的微分（一阶近似）就是增量 Δx 自身，即 $dx|_{x=x_0} = \Delta x$. 故定义微分的表达式 (2.4)

亦可写作

$$\boxed{dy|_{x=x_0} = df|_{x=x_0} = f'(x_0)\,dx} \quad (2.4')$$

并常将其简写为

$$\boxed{df = f'(x_0)\,dx} \quad (2.4'')$$

即函数 f 在 x_0 的微分 df 是自变量增量 $\Delta x = dx$ 的线性函数，它是对应函数实际增量 Δf 的一阶逼近，或线性近似.

定义 2.4 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的领域内有定义，当自变量在 x_0 处获得增量 $\Delta x = x - x_0$ 时，若相应的函数的增量 $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为如下形式

$$\Delta f = \underbrace{A\Delta x}_{\text{线性主部}} + o(\Delta x)$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称函数在 x_0 处可微（*differentiable*）. 并记 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分.

先前的讨论表明，若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则必在 x_0 处可微，且微分就是 $df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$，进一步，我们有下面的定理

定理 2.1 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且成立

$$df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$$

证明： 一方面，如 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ 存在，则存在（$\Delta x \to 0$ 时的）无穷小量 $\alpha(x)$（即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$），使得

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \underbrace{\alpha(x)\,\Delta(x)}_{o(\Delta x)}$$

故 $f(x)$ 在 x_0 可微，且 $df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$.

另一方面，若 $f(x)$ 在 x_0 可微，则存在常数 A，使得

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$$

则有 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A \quad \square$$

上面“另一方面”部分的证明过程中的思想可总结如下：

用线性近似计算导数： 虽然 df 和 Δf 是不同的，但注意到，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta f = df + o(\Delta x)$，故在计算导数 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 时，如将 Δf 用其一阶近似——即微分 df 取代，则计算结果不会有任何不同！

$$\text{一方面：}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{df + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{df}{dx} + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}_{=0}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)dx}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$\text{另一方面：}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x = dx\to 0}\frac{f'(x_0)\,dx}{dx} = f'(x_0)$$

注意到，在用近似 $\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}$ 计算极限（微商，导数）时，在极限 $dx = \Delta x \to 0$ 的过程中，分子、分母上的 $dx = \Delta x$ 可被约去而不影响极限值，故常将导数也用下符号记之（即导数作为微分之商——微商是也！）

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} \quad \left(\text{实际 } = \lim_{dx=\Delta x\to 0}\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)$$

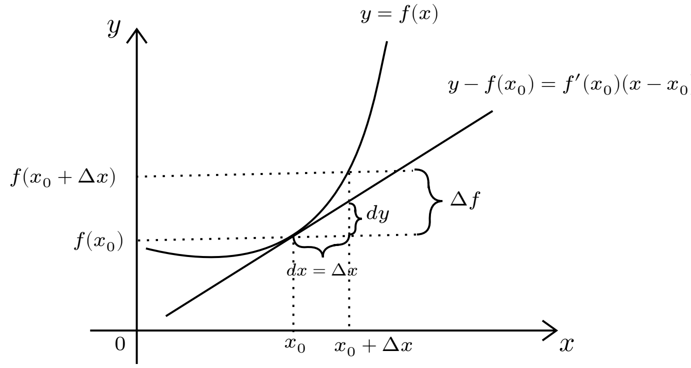
注记 2.3 上面的导数记法是莱布尼茨发明的，而牛顿用的记号是 $\dot{f}$. 莱布尼茨的记号之所以胜出，是因为它凸显了导数作为“微商”这一理念，即微分 dx 和 df 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小量，当我将这两个无穷小量写成商 $\frac{df}{dx}$，并标注 x_0 点，即 $\frac{df}{dx}\big|_{x_0}$ 时，我们默认它表示当 $x \to x_0$ 时两无穷小量比值的极限，即导数 $f'(x_0)$. 既然可将极限理解为微商，即形式上的无穷小量（极限为零，但其本身不为零！）之比，则一些导数运算的法则，在莱布尼茨的计号之下便显得特别顺理成章，比如 $df = \frac{df}{dx}dx$，以及后面将说明的如下规则等

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}\text{（复合函数求导）} \qquad \frac{dx}{df} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}\text{（反函数求导）}$$

即符号本身就暗示了其背后的运算法则，形式与实质统一，这自然是很美妙的！

然而，有利必有其弊，莱布尼茨记号的一大流弊就是让很多人以为微分 df 就是 $\Delta x \to 0$ 时的 Δf. 固然在实践中为得到好近似，常将 $\Delta x = dx$ 取得比较小，此时对应的函数增量 Δf 也比较小，从而用 df 近似 Δf 是有效的，且用这个近似计算时不影响比值 $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 的（当 $\Delta x \to 0$ 时的）极

限. 但从概念上来说，Δf 和 df 的含义“泾渭分明”：Δf 是在在给定增量 Δx 下函数实际增量，它当 $\Delta x \to 0$ 时为零；而微分 $df = f'(x_0)\Delta x$ 是一个独立的函数，它给出在增量 $\Delta x = dx = x - x_0$（可大可小）下，函数 $f(x)$ 在 x_0 处的一阶线性逼近（图像上表现为用 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线来取代 $f(x)$ 在 x_0 点附近的曲线）之增量，即在 $(x_0, f(x_0))$ 处切线上计算出的增量——作为实际增量 Δf 的近似！



注记 2.4 对常数值函数 $y = c$，由于自变量改变时，函数值的改变量为零，故其微分为零.

ii. 如希望用 $g(x)$ 在 x_0 处逼近 $f(x)$ 的误差是比 $(\Delta x)^2 = (x - x_0)^2$ 更高阶的无穷小（当 $x \to x_0$ 时），则线性的 $g(x)$ 显然是不够的，我们不妨试试二次多项式，故设 $g(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2$（其中 A, B 为待定常数），则 $f(x) - g(x) = o\left((x - x_0)^2\right)$ 要求下极限成立

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) - B(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0$$

特别地，下面的极限也须成立

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) - B(x - x_0)^2}{x - x_0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = f'(x_0)$$

为确定常数 B 的值，须让下极限成立

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - B(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0$$

我们不妨设

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - B(x - x_0)^2 = h(x)(x - x_0)^2 \quad (2.5)$$

其中 $h(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量. 计算 B 的策略是将上式两边对 x 逐次求导，从而析出 B 来. 为此，我们先证明基本的求导及微分法则.

* * *

引理 2.1 对线性函数 $f(x) = ax + b$，$f'(x) = a$；对二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$，$f'(x) = 2ax + b$.

证明: 对任意 x_0，给定增量 $\Delta x = x - x_0$，有

$$\Delta f = (a(x_0 + \Delta x) + b) - (ax_0 + b) = a\Delta x$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= (a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c) - (ax_0^2 + bx_0 + c) \\ &= 2ax_0\Delta x + b\Delta x + (\Delta x)^2 = (2ax_0 + b)\,\Delta x + \underbrace{(\Delta x)^2}_{o(\Delta x)} \quad \square\end{aligned}$$

注记 2.5 上引理的证明中，先给自变量一个微小增量 Δx，然后计算函数增量 Δf，并将其整理为线性主部 $f'(x_0)\Delta x$ 加上一个高阶无穷小的形式. 这也是牛顿当年计算导数的方法，只是他将 Δx 在计算时解释为无穷小量，即可以任意小但不为零的变量，但最后又令高阶的 $(\Delta x)^2$ 直接为零，以便得到微分 df 及导数. 这种不严格论述引发伯克利主教的诘难，称其为“无穷小幽灵”. 当然，我们知道，只要得到关系：$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$，则常数 A 就是导数，故对我们而言，在上计算中，即便不令 $(\Delta x)^2 = 0$，也明了由此途径求得导数的合理性. 且在日常实践中，由上途径获得无穷小关系是很自然方便的，不可“因噎废食”，弃之不用.

定理 2.2 （导数的四则运算法则）设 $u(x), v(x)$ 都在某一区间 I 上可导，则它们的和、差、积、商（分母为零的点除外）也在 I 商可导，且有

A. $(u(x) \pm v(x))' = u(x)' \pm v(x)'$;

B. **莱布尼茨法则:** $(u(x)v(x))' = u(x)'v(x) + u(x)v(x)'$;

C. 在 $v(x) \neq 0$ 的点处，我们有

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

特别地，有一下常用公式

$$(cu(x))' = cu(x)' \ (c\text{ 为常数}) \qquad \left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$$

证明： A 部分由导数的定义和极限的运算法则直接可得，下证 B 和 C. 对 B，我们有两种视角. 记 $f(x) := u(x)v(x)$

I. 对 x 给一增量 Δx，有

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$= v(x+\Delta x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

令 $\Delta x \to 0$，得 $f'(x) = [u(x)v(x)]' = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$.

II. 利用导数与微分的关系：(2.3)，可设

$$\Delta u = u'(x)\Delta x + o(\Delta x); \qquad \Delta v = v'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

则 $\Delta f = \Delta(u(x)v(x)) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) =$

$$= [u(x)+u'(x)\Delta x + o(\Delta x)][v(x)+v'(x)\Delta x + o(\Delta x)] - u(x)v(x)$$

$$= u(x)v'(x)\Delta x + u(x)o(\Delta x) + u'(x)v(x)\Delta x + u'(x)v'(x)(\Delta x)^2 + u'(x)\Delta x o(\Delta x)$$

$$+ v(x)o(\Delta x) + v'(x)\Delta x o(\Delta x) + [o(\Delta x)]^2$$

$$= [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]\Delta x + \underbrace{[u(x)+v(x)]o(\Delta x) + u'(x)v'(x)(\Delta x)^2}_{o(\Delta x)}$$

$$+ \underbrace{u'(x)\Delta x o(\Delta x) + v'(x)\Delta x o(\Delta x) + [o(\Delta x)]^2}_{o((\Delta x)^2)}$$

求导的莱布尼茨法则由此自明. 为证 C，我们只需证明 $\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$，然后运用莱布尼茨法则即可.

$$\Delta\left(\frac{1}{v(x)}\right) = \frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = -\frac{\Delta v}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$= -\frac{v'(x)\Delta x + o(\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)} = -\frac{v'(x)\Delta x + o(\Delta x)}{v(x)^2 + v(x)v'(x)\Delta x + v(x)o(\Delta x)}$$

显然，此时不易将其直接整理成：导数 $\times \Delta x + o(\Delta x)$ 的形式，我们不钻

牛角尖，转为利用导数的原始定义来计算，即

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{1}{v(x)}\right)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v'(x)\Delta x + o(\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v'(x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)} = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} \qquad \square$$

注记 2.6 不难归纳证明下公式

$$(u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x))' = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x) + \cdots$$

$$+\cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

由导数和微分的关系，可直接写出微分的四则运算法则，即得下推论

推论 2.1 设 $u(x), v(x)$ 都在某一区间 I 上可微，则它们的和、差、积、商（分母为零的点除外）也在 I 商可微，且有

A. $d(u(x)\pm v(x)) = du(x)\pm dv(x)$;

B. **莱布尼茨法则：** $d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + du(x)v(x)$;

C. 在 $v(x)\neq 0$ 的点处，我们有

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}$$

例 2.1 利用求导的四则运算法则，可大大简化一些导数的计算. 比如对多项式函数 $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$，为求其导函数，我们只需知道 x^k 的导数，而它的计算是简易的，即

$$(x+\Delta x)^k - x^k = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^l(\Delta x)^{k-l} - x^k =$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k}{l}x^k(\Delta x)^{k-l} = (\Delta x)^k + kx(\Delta x)^{k-1} + \cdots + kx^{k-1}(\Delta x)$$

$$= kx^{k-1}\Delta x + o(\Delta x)$$

故 $(x^k)' = kx^{k-1}$，从而

$$p(x)' = na_nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$$

定义 2.5（高阶导数）设函数 $f(x)$ 具有导函数 $f'(x)$，给定定义域内一点 x_0，如下极限存在，则称 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，其值称为 $f(x)$ 在 x_0 处的二阶导数，记之为 $f''(x_0)$ 或 $\frac{d^2f}{dx^2}\big|_{x=x_0}$

$$f''(x_0) := \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

如对所有定义域内 x_0，其处的二阶导数存在，则得到二阶导函数 $f''(x)$. 同理，可有三阶导数，及三阶导函数的概念. 一般地，设 $y=f(x)$ 在 x_0 附近存在 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$，若它在 x_0 处的导数 $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'\big|_{x=x_0}$ 存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶导数，记之

$$y^{(n)}|_{x=x_0},\quad f^{(n)}(x_0),\quad \left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=x_0},\quad \left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

此时称 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导. 二阶或二阶以上的导数称为高阶导数，为方便起见，也将 $f(x)$ 称为其自身的零阶导数，记为 $f^{(0)}(x)$.

定义 2.5 若 $f^{(n)}(x)$ 在区间 I 上连续，则称 $f(x)$ 在 I 上n 阶连续可导，记为 $f(x)\in C^n(I)$；如果对所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $f(x)\in C^n(I)$，则称 $f(x)$ 在 I 上无限阶可导，记为 $f(x)\in C^\infty(I)$.

定理 2.3（高阶导数的运算法则和莱布尼茨公式）设 $u(x),v(x)$ 在区间 I 上 n 阶可导，则它们的线性组合 $ku(x)+lv(x)$ $(\forall k,l\in\mathbb{R})$，乘积 $u(x)v(x)$ 都是 n 阶可导的，且有

$$(ku(x)+lv(x)\ ^{(n)} = k(u(x))^{(n)}+l(v(x))^{(n)}$$

$$\text{莱布尼茨公式：}(u(x)v(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

证明: 只证莱布尼茨公式，用数学归纳法. 由求导的莱布尼茨法则知公式对 $n=1$ 成立，假设公式对 $n=m$ 成立，则对 $n=m+1$

$$(uv)^{(m+1)}=((uv)^m)'\xlongequal{\text{归纳假设}}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k)}\right)'\xlongequal{\text{求导是线性运算}}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(u^{(k)}v^{(m-k)}\right)'\xlongequal{\text{莱布尼茨法则}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(u^{(k+1)}v^{(m-k)}+u^{(k)}v^{(m-k+1)}\right)$$

$$= u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}u^{(k+1)}v^{(m-k)}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k+1)}+u^{(0)}v^{(m+1)}$$

$$\xlongequal{\text{重整求和指标}} u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}u^{(k)}v^{(m-k+1)}+$$

$$+\quad \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}u^{(k)}v^{(m-k+1)}+u^{(0)}v^{(m+1)}$$

$$= u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}\left(\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right)u^{(k)}v^{(m-k+1)}+u^{(0)}v^{(m+1)} =$$

$$u^{(m+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}u^{(k)}v^{(m-k+1)}+u^{(0)}v^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}u^{(k)}v^{(m+1-k)}$$

莱布尼茨公式由此得证. □

定理 2.4（复合函数的求导法则，或链式法则）设函数 $u=u(x)$ 在 x_0 处可导，函数 $y=f(u)$ 在对应 x_0 的点 u_0 处可导，则复合函数 $y=f(u(x))$ 在点 x_0 处可导，且有

$$\left(f(u(x))\right)'\Big|_{x=x_0} = f'(u_0)u'(x_0) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{du}\Big|_{u=u_0}\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

证明: 由于 $y=f(u)$ 在 u_0 处可导（即可微），故对 u_0 处一非零增量 Δu，有

$$\Delta y = \Delta f = f'(u_0)\Delta u + o(\Delta u)$$

特别地，上式对 $\Delta u = 0$ 时也成立. 由于 $\Delta u = u(x_0+\Delta x)-u(x_0)$，在上式两边除上一个 x_0 处的非零增量 Δx，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f'(u_0)\Delta u + o(\Delta u)}{\Delta x} = f'(u(x_0))\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{o(\Delta u)}{\Delta x} \quad (*)$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，由于 u 在 x 处可导，故 $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0)$，且有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta u)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta u)}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = 0$$

由此，在 $(*)$ 两边令 $\Delta x \to 0$，即得

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} = f'(u(x_0))u'(x_0) \qquad \square$$

推论 2.2 由导数和微分的关系，即得微分的链式法则（*chain rule*）

$$d\left(f(u(x))\right)|_{x=x_0} = f'(u(x_0))u'(x_0)dx$$

一阶微分的形式不变性： 对上面的复合函数 $f(u(x))$，由于外层函数 $f(u)$ 在 u_0 处可微，故有微分关系

$$df = f'(u_0)du$$

内层函数 $u(x)$ 在 x_0（其中 $u(x_0) = u_0$）处亦可微，故得关系

$$du = u'(x_0)dx$$

将上两个微分关系合并之，得

$$df = f'(u_0)du = f'(u(x_0))u'(x_0)dx$$

此即复合函数微分的链式法则! 换言之，一阶微分 df 的表达形式具有**不变性**：将 f 看成是中间变量 u 的函数，有 $df = f'(u)du$，又将其看成 x 的函数，有 $df = f'(x)dx$. 质言之，求导的链式法则

$$f'(x) = f'(u(x))u'(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

导致了df 无论是以变量 u 来表达，抑或是由变量 x 来表达，其形式都是一致的，此即一阶微分的形式不变性.

*　　　*　　　*

我们回到“主题”，接着计算待定常数 B. 在 (2.5) 式两边同时对 x 求导，利用引理 *2.1*，得到关系

$$f'(x) - f'(x_0) - 2B(x - x_0) = 2(x - x_0)h(x) + (x - x_0)^2 h'(x)$$

两边再对 x 求导，得到关系

$$f''(x) - 2B = 2h(x)(x - x_0)h'(x) + 2(x - x_0)h'(x) + (x - x_0)^2 h''(x)$$

令 $x \to x_0$，得（假设 $f''(x)$ 在 x_0 处连续）$B = \frac{f''(x_0)}{2}$. 由此得到 $f(x)$ 在 x_0 处的二阶泰勒展开（*Taylor expansion*）

命题 2.1 若 $f(x)$ 在 x_0 附近二阶可导，且导函数在 x_0 连续，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

下面接着演示如何从二阶迭代至三阶，以便看出更一般的模式.

注记 2.7 有了“洛必达法则”之后，相关计算可大幅简化，但此处这种略显“原始粗糙”的计算模式仍有其价值——浑然天成的高楼大厦固然可观，但不应废弃其建筑之初的“脚手架”，当再建高楼时或许还用得到它！

iii. 如希望用 $g(x)$ 在 x_0 附件逼近 $f(x)$ 的误差是比 $(\Delta x)^3=(x-x_0)^3$ 更高阶的无穷小（当 $x\to x_0$ 时），则二次的 $g(x)$ 显然是不够的，不妨试试三次多项式，设 $g(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+B(x-x_0)^2+C(x-x_0)^3$（其中 A,B,C 为待定常数），则 $f(x)-g(x)=o\left((x-x_0)^3\right)$ 要求下极限成立

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)-B(x-x_0)^2-C(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3}=0$$

特别地，下面的极限也须成立

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=0 \quad\Longrightarrow\quad A=f'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad B=f''(x_0)$$

为确定常数 C 的值，须让下极限成立

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-f''(x_0)(x-x_0)^2-C(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3}=0$$

我们不妨设 $f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-f''(x_0)(x-x_0)^2-$

$$-C(x-x_0)^3=h(x)(x-x_0)^3 \qquad (2.6)$$

其中 $h(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量. 计算 C 的策略同前，即将上式两边对 x 逐次求导，从而析出 C 来. (2.6) 式两边对 x 求导一次，得

$$f'(x)-f'(x_0)-2f''(x_0)(x-x_0)-3C(x-x_0)^2=h'(x)(x-x_0)^3+3h(x)(x-x_0)^2$$

上式两边对 x 再求导一次，得

$$f''(x)-2f''(x_0)-3\cdot 2\,C(x-x_0)=h''(x)(x-x_0)^3+3h'(x)(x-x_0)^2+$$

$$+3h'(x)(x-x_0)^2+6h(x)(x-x_0)^2$$

尚不明朗，那就再操作一次，得

$$f'''(x)-3!C=h'''(x)(x-x_0)^3+3h''(x)(x-x_0)^2+$$

$$+6h''(x)(x-x_0)^2+12h'(x)(x-x_0)+6h'(x)(x-x_0)^2+12h(x)(x-x_0)$$

令 $x\to x_0$，得到（假设 $f'''(x)$ 在 x_0 处连续）$C=\frac{f'''(x_0)}{3!}$. 由此得到 $f(x)$ 在 x_0 处的三阶泰勒展开（*Taylor expansion*）

命题 2.2 若 $f(x)$ 在 x_0 附近三阶可导，且 $f'''(x)$ 在 x_0 处连续，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\ +$$

$$+\ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$$

一般不难归纳出（虽按上面计算较显繁琐）

定理 2.5（泰勒定理 I）若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义、n 阶可导，且其导函数 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处连续，则在 x_0 附近，可用如下 n 次多项式 $P_n(x)$ 对 $f(x)$ 在 x_0 附近进行 n 阶近似，即 $f(x)=P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)$

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

记 $R_n(x):=f(x)-P_n(x)$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

定义 2.6 $P_n(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 的n 阶泰勒多项式；其系数 $\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 的泰勒系数；$x_0=0$ 时的泰勒多项式也称为马克劳林多项式；称 $P_n(x)+o(x-x_0)^n$ 为带有皮亚诺（*Peano*）余项的 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶泰勒公式.

例 2.2 多项式函数 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的 k $(k\le n)$ 阶马克劳林多项式是 $P_k(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$；其在 x_0 处的 n 阶泰勒多项式也可通过将 $f(x)$ 写成 $f((x-x_0)+x_0)$，然后利用二项展开为关于 $x-x_0$ 的多项式来计算.

3 导数、微分、泰勒多项式的性质和计算

计算导数（微分）时，首先得确保其存在. 我们已知可导和可微是等价的（*c.f.* 定理 *2.1*），而在一点处的导数无非是一个极限，而我们知道一点处的极限存在当且仅当其左、右极限存在且相等. 该考虑引向如下定义及定理.

定义 3.1 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的左领域内有定义，若左极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称此极限值为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的*左导数*（*left derivative*），记作 $f'_-(x_0)$. 类似地，可定义 $y=f(x)$ 在 x_0 处的*右导数*（*right derivative*）

$$f'_+(x_0):=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

定理 3.1 函数在一点可导当且仅当它在该点的左、右极限存在且相等.

注记 3.1 *函数在一点处的导数衡量的是函数图像在该点处切线的斜率. 结合上定理，若函数在某点不可导，则要么切线不存在（斜率为无穷也算不存在）；要么只在从点的某一侧靠近点时切线才存在；要么从点的两侧靠近点时切线都存在但不相同.*

例 3.1 若 x_0 是 $f(x)$ 的可去间断点，则在 x_0 处显然不可导. 不止可去间断点处不可导，在所有间断点处都不可导. 也就是说，可导是比连续更强的条件，即有

定理 3.2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

证明: 由于 $f'(x_0)$ 存在，即极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 存在，记

$$\alpha(\Delta x):=\frac{\Delta f}{\Delta x}-f'(x_0)$$

则 x_0 处的可导性意味着：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. 从而有

$$\Delta f=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x\quad\Longrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\alpha(x-x_0)(x-x_0)$$

则当 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时，$f(x)-f(x_0)\to 0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. □

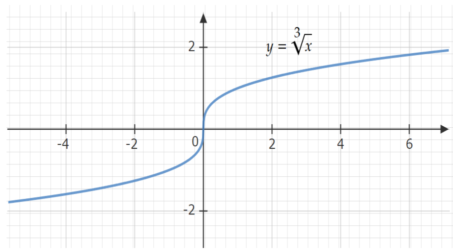
注记 3.2 *类似可证明：若函数在一点处左（右）可导，则函数在该点左（右）连续.*

可导必连续，但连续未必可导，下面就是一个典型例子.

例 3.2 考虑函数 $y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$. 我们考察它在 $x=0$ 处是否可导

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$$

该极限显然是不存在的，故 $x^{\frac{1}{3}}$ 在 0 处不可导，但它在 0 处是连续的.



下面也是一个连续但不可导的典型例子，其不可导的原因是左导数不等于右导数.

例 3.3 考虑函数 $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性. 显然有

$$f'_+(0)=1\neq -1=f'_-(0)$$

故 $f'(0)$ 不存在，即不可导. 但 $f(x)$ 显然在 $x=0$ 处连续.

例 3.4 考虑函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性. 首先，当 $\Delta x\leq 0$ 时，由于 $f(\Delta)=0$，故

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$$

而当 $\Delta x>0$ 时，有

$$\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}$$

当 $\Delta x\to 0^+$ 时，上式无极限，故右导数 $f'_+(0)$ 不存在. 所以 $f(x)$ 在 0 处不可导.

例 3.4′ 考虑函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性. 左导数仍是

0，但此时，当 $\Delta x > 0$ 时，有

$$\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\xrightarrow{\Delta x\to 0} 0$$

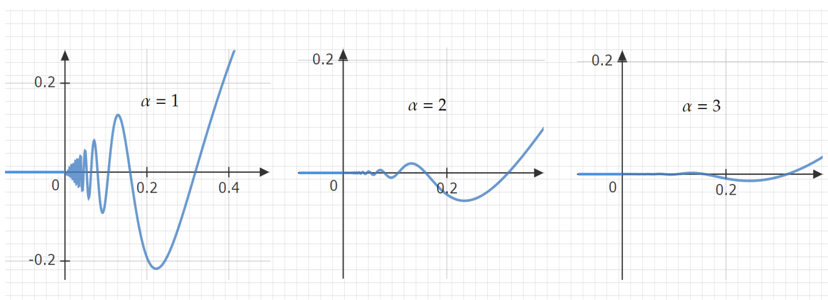
从而右导数 $f'_+(0)=f'_-(0)=0$，故函数在 $x=0$ 处可导.

例 3.4″ 更一般地，考虑 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性. 显然，若 $\alpha<0$ 时，函数在 0 处不连续，故不可导. $\alpha>0$ 时函数连续，此时，若 $\alpha\le 1$，右导数 $f'_+(0)$ 不存在，故不可导；若 $\alpha>1$，右导数

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x)^{\alpha-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0$$

故函数在 $x=0$ 处可导.

注记 3.3 从图形上来看，当 $\alpha\le 1$ 时，曲线在 $x=0$ 的右侧振荡剧烈，导致不可导；但当 $\alpha>1$ 时，因子 x^α 有效抵消了 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0^+$ 时产生的振荡，从而导致函数可导. 且 $\alpha>1$ 越大，抵消振荡的效果越好.



例 3.5 试确定 a,b 的值，使 $f(x)=\begin{cases}\sin 2x+1, & x\le 0\\ ae^x+b, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

解： 首先 $f(x)$ 须在 $x=0$ 处连续. 因 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\sin 2x+1)=1$；又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ae^x+b)=a+b$，且 $f(0)=1$. 故 $a+b=1$. 另一方面

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sin(2\Delta x)}{\Delta x}=2$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{ae^{\Delta x}+b-1}{\Delta x}\overset{a+b=1}{=\!=\!=}\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a$$

可导要求：$f'_+(0)=f'_-(0)$，从而 $a=2, b=-1$.

初等函数的导数——基本导数公式

我们知道初等函数在其定义域内都是连续的, 下面将表明初等函数在其定义域内也是可导的.

例 3.6 在上节中（*c.f.* 例 *2.1*）已表明对自然数 $n>0$，$(x^n)'=nx^{n-1}$. 而当 $n=0$ 时，$x^n=1$ 是常数，故其导数为 0. 由此，根据导数的四则运算法则（*c.f.* 定理 *2.2*），我们知道多项式函数及有理函数的导数计算. 特别地，对 $\frac{1}{x}$，有

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$$

即上面的公式对 $n=-1$ 也成立. 更一般地，当 $n>1$ 时

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)'\overset{\text{求导除法规则}}{=\!=\!=\!=}\frac{0-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\frac{n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$$

即对所有的自然数 n，都成立 $(x^n)'=nx^{n-1}$. 下证 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$，公式 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ 成立，此即幂函数的求导公式.

证明： 设 $\alpha\neq 0$（$\alpha=0$ 时结论显然）. 当 $x\neq 0$ 时，给定增量 $\Delta x\to 0$，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1\right]}{x\frac{\Delta x}{x}}=$$

$$\overset{\text{利用 }(1+t)^\alpha-1\sim\alpha t\,(t\to 0)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}\alpha x^{\alpha-1}$$

当 $x=0$ 时,如 $\alpha>0$, 则有 $(x^\alpha)'|_{x=0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}=\begin{cases}0, & \alpha>1\\ 1, & \alpha=1\\ \text{不存在}, & 0<\alpha<1\end{cases}$

故公式对 $x=0$ 时也成立.

当 $x<0$ 时，令 $u=-x>0$ 则 $x^\alpha=(-1)^\alpha u^\alpha$. 从而

$$(x^\alpha)'=\frac{dx^\alpha}{dx}=\frac{dx^\alpha}{du}\frac{du}{dx}=(-1)^\alpha\frac{du^\alpha}{du}(-1)=(-1)^{\alpha+1}\alpha u^{\alpha-1}=$$

$$=(-1)^{\alpha+1}\alpha(-1)^{\alpha-1}x^{\alpha-1}=(-1)^{2\alpha}\alpha x^{\alpha-1}=\alpha x^{\alpha-1}\quad\square$$

例 3.7 对指数函数 $a^x\,(a>0)$，我们用定义来计算其导函数.

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\ln a$$

特别地，有 $(e^x)' = e^x$（e^x 是唯一的其导数等于其自身的函数）.

例 3.8 对指数函数的反函数 $\log_a x\,(x>0)$，为计算其导数，利用换底公式

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

只需计算 $\ln x$ 的导数，即计算极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x}\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

从而得到公式

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a} \quad \text{特别地 } (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

注记 3.4 函数 $\ln|x|\,(x\neq 0)$ 是分段函数，$x>0$ 时为 $\ln x$，其导数已知；$x<0$ 时，$\ln|x| = \ln(-x)$，利用复合函数求导法则，有

$$\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{d\ln(-x)}{dx} = \frac{d\ln(-x)}{d(-x)}\frac{d(-x)}{dx} = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$$

故更一般地，我们有

$$\left(\log_a|x|\right)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad x\neq 0$$

有必要探讨一般的反函数的求导法则. 将导数理解为微商 $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$，则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导数即是变量 x 对变量 y 之导数，写成微商的形式便是

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} \xlongequal{\text{以 } y \text{ 表达}} \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

定理 3.3（反函数求导公式）设函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 上连续、严格单调（故反函数存在），且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 α,β 上可导（其中 $\alpha = \min\{f(a+), f(b-)\}$, $\beta = \max\{f(a+), f(b-)\}$）且有

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

证明: 对任意点 $x \in (a, b)$，由于 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上可导且 $f'(x) \neq 0$，有

$$\Delta y \sim f'(x)\Delta x \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

故作为 Δx 时的无穷小，下面的等价关系也成立

$$\Delta x \sim \frac{1}{f'(x)}\Delta y$$

而这意味着 $x = f^{-1}(y)$ 在 y 处可导且其导数

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \xlongequal{\text{作为 } y \text{ 的函数}} \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \square$$

注记 3.5（上定理的另证） 利用复合函数求导法则（*c.f.* 定理 *2.4*），将关系 $x = f^{-1}(f(x))$ 的两边对 x 求导，得到

$$1 = \left(f^{-1}(f(x))\right)' = \left(f^{-1}(y)\right)' f'(x) \quad \Longrightarrow \quad \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \qquad \square$$

我们利用上定理重新推导 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. 为此，记 $y = a^x$，则 $x = \log_a y$，由反函数求导公式，得

$$(\log_a y)' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$$

例 3.9 对 $y = \sin x$ 我们有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + (\cos x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$\xlongequal{\cos \Delta x - 1 \sim -\frac{(\Delta x)^2}{2};\, \sin \Delta x \sim \Delta x} \cos x$$

即 $(\sin x)' = \cos x$. 对 $y = \cos x$，由于 $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$，记 $u = \frac{\pi}{2} - x$，然后利用复合函数的求导规则，得

$$\frac{d \cos x}{dx} = \frac{d \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = \frac{d \sin u}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \times (-1) =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

即得 $(\cos x)' = -\sin x$. 对 $y=\tan x$，用求导四则运算法则，可得

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

即 $(\tan x)' = \sec^2 x$，同理：$(\cot x)' = -\csc^2 x$；$(\sec x)' = \sec x\tan x$；$(\csc x)' = \csc x\cot x$.

例 3.10 对反三角函数 $y=\arcsin x$，我们利用定理 *3.3* 求其导数.

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \xlongequal{x=\sin y} \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

为化简计算 $\cos(\arcsin x)$，注意到，由于 $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$，故 $\cos(\arcsin x) \ge 0$，从而

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

由此得到

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

同理可证 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 此外，对 $y=\arctan x$，有

$$(\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \xlongequal{x=\tan y} \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

同理可证 $(arccot\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

例 3.11 由于双曲函数由 $e^{\pm x}$ 的四则运算定义，故利用求导的四则运算法则，非常容易计算其导数如下

$$(\sinh x)' = \cosh x; \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

记 $y = arcsinh\,x$ 是 $y=\sinh x$ 的反函数，其导数的计算如下

$$(arcsinh\,x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \xlongequal{x=\sinh y} \frac{1}{\cosh y} \xlongequal[\cosh y>0]{\cosh^2 y-\sinh^2 y=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 arcsinh\,x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

当然，我们也可以先从 $y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ 中反解出 x，得到

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$$

即 $y = arcsinh\, x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 从而

$$(arcsinh\, x)' = \frac{d\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{d(x+\sqrt{1+x^2})}{dx}$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

同理可证 $y = \cosh x$ 的导数公式 $(arccosh\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

由此可看出初等函数在其定义域内是可导的，从而也是可微的. 对上面基本的初等函数类，它们的导数公式是计算一般初等函数导数的基础，故需记忆.

基本导数（微分）公式表

$$\begin{array}{c|c}
(C)' = 0 & dC = 0dx = 0 \\
(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} & dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}dx \\
(a^x)' = (\ln a)a^x & da^x = (\ln a)a^x dx \\
\text{特别地 } (e^x)' = e^x & \text{特别地 } de^x = e^x dx \\
(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} & d\log_a x = \frac{dx}{x\ln a} \\
\text{特别地 } (\ln x)' = \frac{1}{x} & \text{特别地 } d\ln x = \frac{dx}{x} \\
(\sin x)' = \cos x & d\sin x = \cos x dx \\
(\cos x)' = -\sin x & d\cos x = -\sin x dx \\
(\tan x)' = \sec^2 x & d\tan x = \sec^2 x dx \\
(\cot x)' = -\csc^2 x & d\cot x = -\csc^2 x dx \\
(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & d\arccos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} & d\arctan x = \frac{dx}{1+x^2} \\
(arccot\, x)' = -\frac{1}{1+x^2} & darccot\, x = \frac{-dx}{1+x^2} \\
(\sinh x)' = \cosh x & d\sinh x = \cosh x dx \\
(\cosh x)' = \sinh x & d\cosh x = \sinh x dx \\
(arcsinh\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & darcsinh\, x = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\
(arccosh\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & darccosh\, x = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}
\end{array}$$

对数求导法： 对某些形式的函数，比如幂指形函数：$y=f(x)=u(x)^{v(x)}$，为求其导数，先对其两边取对数：$\ln f(x)=v(x)\ln u(x)$. 然后两边对 x 求导，并利用复合函数求导法则，可得

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\\ \Longrightarrow\quad f'(x)&=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)\end{aligned}$$

注记 3.6 上计算等价于先将 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 写成如下形式

$$f(x)=e^{\ln\left(u(x)^{v(x)}\right)}=e^{v(x)\ln u(x)}$$

然后利用复合函数的求导法则，得

$$f'(x)=e^{v(x)\ln u(x)}\left(v(x)\ln u(x)\right)'=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

注记 3.7 也可对 $\ln f(x)=v(x)\ln u(x)$ 两边求微分，得

$$d\ln f(x)=d\left(v(x)\ln u(x)\right)$$

并利用**一阶微分的形式不变性**，将 $f(x),v(x),\ln u(x)$ 视为中间变量，得

$$\frac{df(x)}{f(x)}=v(x)d\ln u(x)+\ln u(x)dv(x)$$

$$=v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}dx+\left(v'(x)\ln u(x)\right)dx$$

即有

$$df(x)=\underbrace{u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)}_{f'(x)}dx$$

实践中，不必套用上公式，领会其精神，自可灵活处理.

例 3.12 求函数 $y=(\sin x)^{\cos x}$ 的导函数.

解： 两边取对数，得 $\ln y=\cos x\ln(\sin x)$，然后两边对 x 求导，得

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}&=-\sin x\ln(\sin x)+\cos x\frac{\cos x}{\sin x}\\ \Longrightarrow\quad y'(x)&=(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln(\sin x)\right)\end{aligned}$$

例 3.13 计算 $y = \dfrac{e^{2x}\sin^3 x}{\sqrt[3]{2x-1}(4x+3)^2}$ 的导函数.

解: 对该函数，直接利用求导运算法则计算是繁琐，且易出错的. 虽然函数的形式并非 $u(x)^{v(x)}$，但对数求导的精髓在于利用对数将函数结构转换为较易处理的形式. 而对数可以将乘除转变为加减，故此处也可用该方法来简化计算. 两边取对数，得

$$\ln y = \ln e^{2x} + \ln\sin^3 x - \ln\sqrt[3]{2x-1} - \ln(4x+3)^2$$

$$= 2x + 3\ln(\sin x) - \frac{1}{3}\ln(2x-1) - 2\ln(4x+3)$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = 2 + 3\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2}{3(2x-1)} - \frac{8}{4x+3} \quad \Longrightarrow$$

$$y' = \frac{e^{2x}\sin^3 x}{\sqrt[3]{2x-1}(4x+3)^2}\left(2 + 3\cot x - \frac{2}{3(2x-1)} - \frac{8}{4x+3}\right)$$

例 3.14 对函数 $y = \ln\sin\sqrt{x}$，计算其微分.

解: 可以先计算 y'，从而 $dy = y'dx$. 或利用一阶微分的形式不变性，直接计算

$$dy = d\ln\sin\sqrt{x} = \frac{d\sin\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}} = \frac{\cos\sqrt{x}d\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

例 3.15 求 $y = \arctan\dfrac{\sin x}{e^x-1}$ 的微分.

解: 利用一阶微分的形式不变性，有

$$dy = d\arctan\frac{\sin x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{e^x-1}\right)^2}d\left(\frac{\sin x}{e^x-1}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{e^x-1}\right)^2}\frac{(e^x-1)d\sin x - \sin x d(e^x-1)}{(e^x-1)^2} =$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\sin x}{e^x-1}\right)^2}\frac{(e^x-1)\cos x - \sin x e^x}{(e^x-1)^2}dx$$

$$= \frac{(e^x-1)\cos x - e^x\sin x}{(e^x-1)^2 + \sin^2 x}dx$$

例 3.16 设 $x = a\arccos\dfrac{a-y}{a}\,(0<y<2a)$，求 $\dfrac{dy}{dx}|_{x=\frac{a\pi}{3}}$.

解： 当 $x=\frac{a\pi}{3}$ 时，$y=\frac{a}{2}$，因为

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a}{\sqrt{1-(\frac{a-y}{a})^2}}\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

由反函数求导法则，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{a\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}\Big|_{y=\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 3.17 求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的导函数，并判断导函数的连续性.

解： 当 $x\neq 0$ 时，函数是初等函数，故可导，且其导函数为

$$f'(x) = \left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

当 $x=0$ 时，*例 3.4′* 表明 $f'(0)=0$，故导函数为

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)$ 是初等函数，故连续；但当 $x=0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在，故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

上例表明，一连续函数的导函数未必连续.

高阶导数的计算： 对一些简单函数，计算 $y^{(n)}$ 导数时，常计算其前几阶导函数，然后归纳得到一般情形. 有时，若函数可看成是两个函数的乘积，则可利用高阶导数的莱布尼茨公式来求其高阶导数.

例 3.18 对 $y=x^\alpha$，有

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

$$\cdots y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

特别地，对 $y=x^n$，$y^{(n)}=n!$，$y^{(k)}=0\,(k>n)$.

例 3.19 对 $y=e^x$，有 $(e^x)'=(e^x)''=(e^x)'''=\cdots=(e^x)^{(n)}=e^x \quad \forall n\in\mathbb{N}$

例 3.20 对函数 $y=\sin x$，因为 $(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \implies$

$$(\sin x)''=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)$$

利用数学归纳法，易证下等式 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

同理，对 $y=\cos x$，有

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

例 3.21 对函数 $y=\ln(1+x)$，有

$$y'=\frac{1}{1+x},\quad y''=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad y'''=\frac{2!}{(1+x)^3}$$

$$y^{(4)}=-\frac{3!}{(1+x)^4},\quad \cdots\cdots\quad ,\ y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

例 3.22 对函数 $y=\frac{1}{x^2+x-2}$，将其写作

$$y=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)$$

为求 $y^{(n)}$，只需求 $\frac{1}{x-1}$ 和 $\frac{1}{x+2}$ 的 n 次导函数. 而 $\frac{1}{x-1}=(x-1)^{-1}$，故可在例 *3.18* 中令 $\alpha=-1$，得到

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=-1(-2)(-3)\cdots(-n)(x-1)^{-1-n}=(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$$

同理，可得 $\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+2)^{n+1}}$. 由此可得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{3}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$$

例 3.23 设 $y=x^2\cos x$，计算 $y^{(200)}$.

解: 利用莱布尼茨公式（*c.f.* 定理 *2.3*），可得

$$y^{(200)}=\sum_{k=0}^{200}\binom{200}{k}(x^2)^{(k)}(\cos x)^{(200-k)}=\sum_{k=0}^{2}\binom{200}{k}(x^2)^{(k)}(\cos x)^{(200-k)}$$

$$= x^2(\cos x)^{(200)} + 400x(\cos x)^{199} + 2\binom{200}{2}(\cos x)^{(198)}$$

$$= x^2 \cos\left(x + \frac{200\pi}{2}\right) + 400x\cos\left(x + \frac{199\pi}{2}\right) + 200 \times 199\cos\left(x + \frac{198\pi}{2}\right)$$

$$= x^2\cos x + 400x\sin x - 39800\cos x$$

例 3.24 设 $y = \arcsin x$，计算 $y^{(n)}(0)$.

解： 首先，直接计算可得

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ y''(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

直接计算更高阶导函数的计算量比较大，但注意到 y, y', y'' 之间有如下关系（即 y 满足的二阶微分方程）

$$(1-x^2)y'' = xy'$$

为得到更高阶导数之间的递归关系，上式两边同时对 x 求 n 阶导，并利用莱布尼茨公式，得到

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x^2)^{(k)}y^{(n-k+2)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^{(k)}y^{(n-k+1)} \quad \Longrightarrow$$

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} = xy^{(n+1)} + ny^{(n)}$$

$$\Longrightarrow \quad (1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$$

令 $x = 0$，得如下关系

$$y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0)$$

由于 $y^{(0)}(0) = y(0) = 0, y'(0) = 1$，结合上递归关系，可知当 $n = 2k$ 时，有 $y^{(2k)}(0) = y^{(0)}(0) = 0$；当 $n = 2k+1$ 时，有

$$y^{(2k+1)}(0) = (2k-1)^2y^{(2k-1)}(0) = (2k-1)^2(2k-3)^2y^{(2k-3)}(0) = \cdots =$$

$$= (2k-1)^2(2k-3)^2\cdots3^2\cdot1^2y'(0) = \underbrace{((2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1)^2}_{((2k-1)!!)^2}$$

常用函数的泰勒多项式逼近

先回忆定理 *2.5* 的内容：若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义、n 阶可导，且其导函数 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处连续，则在 x_0 附近，可用如下 n 次多项式 $P_n(x)$ 对 $f(x)$ 在 x_0 附近

进行 n 阶近似，即 $f(x)=P_n(x)+o\left(x-x_0\right)^n$

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

例 3.25 对 $f(x)=e^x$，我们已知 $f^{(n)}(x)=e^x$，故 $f^{(n)}(0)=e^0=1$. 所以，e^x 的 n-阶带皮亚诺余项的马克劳林多项式公式为

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)}$$

例 3.26 对 $f(x)=\sin x$，我们已知 $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k=0,1,2,\cdots$，由此可得

$$f^{(2k)}(0)=0,\quad f^{(2k-1)}(0)=\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos k\pi=(-1)^{k-1},\ k=1,2,\cdots$$

从而可得 $\sin x$ 的 n-阶马克劳林多项式逼近为

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right)}$$

同理可知 $\cos x$ 的 n-阶马克劳林多项式逼近为

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)}$$

例 3.27 对 $f(x)=\ln(1+x)$，已知（*c.f.* 例 *3.21*）$y^{(k)}=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$，从而 $f^{(k)}(0)=(-1)^{(k-1)}(k-1)!$, $k=1,2,\cdots$ 由此可知 $\ln(1+x)$ 的 n-阶马克劳林多项式逼近为

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)}$$

例 3.28 对 $f(x)=(1+x)^\alpha$，由例 *3.18* 可知其 n-阶马克劳林多项式逼近为

$$\boxed{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)}$$

特别地，对 $\alpha=-1$，有

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)}$$

利用变量替换 $x \to -x$，得

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)}$$

注记 3.7 利用等比数列求合公式，有

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

故 $\dfrac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) =$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} \sim x^{n+1} = o(x^n)$$

对 $\alpha = \frac{1}{2}$，有

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n)}$$

对 $\alpha = -\frac{1}{2}$，有

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n)}$$

例 3.29 对 $y = \arcsin x$，例 *3.24* 表明 $y^{(n)}(0) = \begin{cases} ((2k-1)!!)^2 & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}$ 故

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})}$$

例 3.30 对 $y = \arctan x$，由于 $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y'' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，即 $y'' = -2x(y')^2$. 两边同时求 n 阶导数，得

$$y^{(n+2)} = -2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}(y'^2)^{(n-k)} = -2x\left(y'^2\right)^{(n)} - 2n\left(y'^2\right)^{(n-1)}$$

令 $x = 0$，得到如下关系

$$y^{(n+2)}(0) = -2n\left((y')^2\right)^{(n-1)}(0)$$

由此可得 $y'(0)=1$，$y''(0)=0$，$y'''(0)=-2\cdot 2y'^2(0)=-2!$

$$y^{(4)}(0)=-4((y')^2)'(0)=-4\left(2y'y''\right)(0)=0$$

$$y^{(5)}(0)=-6((y')^2)''(0)=-6\left(2y'y''\right)'=-6\left(2y''^2+2y'y'''\right)(0)$$

$$=-12y'(0)y'''(0)=24=4!$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{2k}(0)=0,\ y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)! \qquad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})}$$

若计算一函数的泰勒多项式较易，则可利用它来计算函数的高阶导数.

例 3.31 若 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$，计算 $f^{(n)}(0)$.

解: 在 $\dfrac{1}{1-x}$ 的马克劳林多项式中做变量替换 $x\to x^4$，得

$$\frac{1}{1+x^4}=1+(-x^4)+(-x^4)^2+\cdots+(-x^4)^k+o\left((x^4)^k\right)=$$

$$=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l x^{4l}+o(x^{4l}) \quad\Longrightarrow\quad \frac{x}{1+x^4}=\sum_{l=0}^{k}(-1)^l x^{4l+1}+o(x^{4k+1})$$

$$=\quad \sum_{l=0}^{k}\frac{f^{(l)}(0)}{l!}x^l+o(x^{4k+1})$$

对比系数，可知

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^k(4k+1)! & n=4k+1\\ 0, & n\neq 4k+1\end{cases}$$

唯一性定理: 上面几例中计算的合理性是由于一个函数的泰勒多项式是**唯一的**，也就是说，不论采用何种方式，只要能写出下关系

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)\ \ (x\to x_0)$$

则它不是别的，一定是函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒多项式近似. 换言之，其系数 c_i 是由函数 $f(x)$ 唯一决定的.

证明： 显然，若 $f(x)$ 给出如下，则有

$$c_0 = \lim_{x\to x_0} f(x), \quad c_1 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-c_0}{x-x_0}, \quad \cdots$$

$$c_n = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_{n-1}(x-x_0)^{n-1})}{(x-x_0)^n} \quad \square$$

例 3.32 利用唯一性定理，可更便捷地计算 $f(x)=\arcsin x$ 的马克劳林多项式如下，对 f 求导，然后利用 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的展开公式，得

$$f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+o(x^{2n})$$

若 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{2k}x^{2k}+\cdots+c_{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$

则必有 $f'(x)=c_1+2c_2x+\cdots+kc_kx^{k-1}+\cdots+(2n+1)c_{2n+1}x^{2n}+o(x^{2n})$

又根据唯一性定理，知 $f'(x)$ 中非零的系数为 $c_{2k+1}\,(k=0,1,\cdots,n)$

$$(2k+1)c_{2k+1}x^{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k} \quad\Longrightarrow\quad c_{2k+1}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}$$

从而相对比较轻易地得到了之前用比较复杂的方法得到的

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

例 3.33 类似于上例中的做法，我们可以比较轻松地计算例 *3.30* 中计算出的 $y=\arctan x$ 的马克劳林多项式. 注意到 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$，但

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n})$$

设 $y=\arctan x=c_0+c_1x+c_2x^2+c_kx^k+\cdots+c_{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$

则 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}=c_1+2c_2x+\cdots+(2k+1)c_{2k+1}x^{2k}+\cdots+(2n+1)c_{2n+1}x^{2n}+o(x^{2n})$

故非零的系数为 $c_{2k+1}\,(k=0,1,\cdots,n)$

$$(2k+1)c_{2k+1}x^{2k}=(-1)^k x^{2k} \quad\Longrightarrow\quad c_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

从而重新推出

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

例 3.34 计算 $f(x) = \sqrt[3]{2-\cos x}$ 的马克劳林公式直到 x^5 项.

解法 I: $f(x) = \sqrt[3]{1+(1-\cos x)} =$

$$1 + \frac{1-\cos x}{3} - \frac{(1-\cos x)^2}{9} + o((1-\cos x)^3) \xlongequal{1-\cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} - \frac{x^4}{36} + o(x^5)\right) = 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

解法 II: 由于 f 是偶函数，故所求公式的形式为

$$f(x) = 1 + ax^2 + bx^4 + o(x^5)$$

为确定 a, b，注意到 f 满足 $f(x)^3 = 2 - \cos x$，得到

$$(1 + ax^2 + bx^4 + o(x^5))^3 = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\Longrightarrow \quad 3a = \frac{1}{2}, \quad 2b + 3a^2 = -\frac{1}{24} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{6}, \quad b = -\frac{1}{24}.$$

例 3.34 计算 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ e, & x = 0 \end{cases}$ 的马克劳林公式直到 x^4 项.

解: $x \neq 0$ 时，$f(x) = e^{\ln f(x)}$，且 $\ln f(x) =$

$$= \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \underbrace{- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)}_{=:y}$$

$$\Longrightarrow \quad f = e^{1+y} = ee^y = e\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!}\right) + o(x^4)$$

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + o(x^4) \quad y^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{36}x^4 + o(x^4)$$

$$y^3 = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \quad y^4 = \frac{1}{16}x^4 + o(x^4)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4\right) + o(x^4)$$

4 洛必达法则，利用泰勒多项式求极限

有了导数“意象”，我们可以重审下面两个基本极限的计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=(\sin 0)'=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x^2-0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x-\cos 0}{x-0}}{\frac{x^2-0^2}{x-0}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x-0}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-0^2}{x-0}}\overset{???}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

有意思，我们将该模式应用于极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x}$ 试试（注意，一阶无穷小等价替换 $\sin x\sim x$ 是不解决问题的）

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)-(0-\sin 0)}{x-0}=(x-\sin x)'(0)=1-\cos 0=0$$

再试一下稍微复杂一些的 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)-(0-\sin 0)}{x^3-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(x-\sin x)-(0-\sin 0)}{x-0}}{\frac{x^3-0^3}{x-0}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)-(0-\sin 0)}{x-0}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-0^3}{x-0}}\overset{???}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

$$\left(=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\frac{1}{6}\right)$$

注记 4.1 如用无穷小替换来计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$，则须将分子 $x-\sin x$ 替换成一个三阶无穷小 + 更高阶的无穷小才可以，为此，我们利用 $\sin x$ 的三阶泰勒多项式，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}$$

启发： 对 $\frac{0}{0}$（即 $\frac{\text{无穷小}}{\text{无穷小}}$）（不定）型极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，由于 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,

故如有必要，可通过补充定义：$f(0)=g(0)=0$，使得 $f(x),g(x)$ 在 0 处连续. 则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}\xlongequal{\text{如 } f'(a),g'(a)\text{ 存在，且 } g'(a)\neq 0}\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

但若 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\lim\limits_{x\to a}g'(x)=0$，则按上计算出的结果仍是 $\frac{0}{0}$ 型，但直觉和上面具体例子又似告诉我们按如下操作也会得到正确结果

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}\xlongequal[\text{只是直觉上可行！}]{f',g'\text{ 连续}}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\xlongequal[\text{模式重复}]{\text{补充定义：}f'(a)=g'(a)=0}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{g'(x)-g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}}{\dfrac{g'(x)-g'(a)}{x-a}}=$$

$$\xlongequal{\text{如 } f''(a),g''(a)\text{ 存在，且 } g''(a)\neq 0}\frac{f''(a)}{g''(a)}$$

但若 $\lim\limits_{x\to a}f''(x)=\lim\limits_{x\to a}g''(x)=0$，可继续操作，利用三阶导数求极限，等等.

定理 4.1（洛必达法则（*L'Hospital rule*））设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 再 x_0 的某去心领域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，且满足

1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$;
2. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在该去心领域内可导，且 $g'(x)\neq 0$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为常数，或为 ∞）.

则有 $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

证明： 若 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\lim\limits_{x\to a}g'(x)=0$ 时，我们发现根本的问题是：若用

$$\Delta f=f(x)-f(a)=f'(a)\Delta x+o(\Delta x);\quad \Delta g=g(x)-g(a)=g'(a)\Delta x+o(\Delta x)$$

来做近似稍显“粗糙”，以至导出 $\frac{0}{0}$ 的结论，所以，为了能够证明洛必达法则，我

们须对 Δf 和 Δg 做更精确可控（$o(\Delta x)$ 还是太不确定了!）的估计. 后面的柯西中值定理表明，此时 $\exists \xi \in (a,x)$，使得

$$\frac{\Delta f}{\Delta g}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{(这是更可控的估计，没有余项，但 } \xi \text{ 不确定)}$$

$$\text{由此}\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\xlongequal{x\to a\Leftrightarrow \xi\to a}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \square$$

注记 4.1 对 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，当 $f'(a)=g'(b)=0$，如 f,g 在 a 附近具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ 存在，则极限值应是 $\dfrac{f''(a)}{g''(a)}$. 从泰勒公式的角度而言，这是显然的，因为

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(a)(x-a)^2+o((x-a)^2)}{g''(a)(x-a)^2+o((x-a)^2)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f''(a)+\dfrac{o((x-a)^2)}{(x-a)^2}}{g''(a)+\dfrac{o((x-a)^2)}{(x-a)^2}}=\frac{f''(a)}{g''(a)}$$

命题 4.1 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 处的导数满足:

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0;\quad g(a)=g'(a)=g''(a)=\cdots=g^{(n-1)}(a)=0$$

但 $f^{(n)}(a)\neq 0$, $g^{(n)}(a)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

证明: f 和 g 的泰勒多项式逼近为

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n);\quad g(x)=\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)$$

$$\Longrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)}{\dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} \quad \square$$

注记 4.2 定理 *4.1* 中将 $x\to a$ 改成 $x\to a^-$，$x\to a^+$，或 $x\to\infty$ 等都不影响定理成立. 定理 *4.1* 也适用于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限. 即若函数 $f(x),g(x)$ 在 x_0 的某去心领域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，且满足:

1. $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$;

2. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

3. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为常数，或为 ∞）

$$\text{则}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

同样地，将 $x\to a$ 改成 $x\to a^-$，$x\to a^+$，或 $x\to\infty$ 等不影响上结论成立.

注记 4.3 利用洛必达法则可证泰勒公式：设 f 在 x_0 处存在 $f^{(n)}(x_0)$，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\cdots+\quad\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\ \ (x\to x_0)$$

证明： 记 $R_n=f(x)-P_n(x)=$

$$f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right)$$

它满足下面 $n+1$ 个条件

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

$$\Longrightarrow\quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}\ \overset{\text{导数定义}}{=\!=\!=}\ \frac{1}{n!}R_n^{(n)}(x_0)=0.\quad\square$$

例 4.1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\ \overset{\frac{0}{0}\text{型，用洛必达法则}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)(-\dfrac{1}{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x(1+x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+1)}{x^2+1}=1$$

例 4.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{\tan^3 x}\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型，用洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\tan x}\sec^2 x}{2\tan^2 x\sec^2 x}\ (\text{更复杂了，得先整理原式})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{\tan^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}(e^{x-\tan x}-1)}{\tan^3 x}=\lim_{x\to 0}e^{\tan x}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\tan x}-1}{\tan^3 x}$$

如果选择此时用洛必达法则，计算还是比较复杂，所以我们不要拘泥于这一种方法，而是结合之前所学，各种方法灵活使用，“组合出拳”，以最高效解决问题为本.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\tan x}-1}{\tan^3 x}\xlongequal[e^t-1\sim t\ (t\to 0)]{\text{用 }\tan x\sim x;}\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}$$

对初学者来说，这其实是一步“险棋”，因不能确定等价替换是否恰当，因为不能确定等价替换是否恰当，只能通过继续求极限，如能求出来就说明是恰当的. 而此时的极限形式已被大大简化，故可直接使用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos^2 x}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

$$\text{从而}\quad\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{\tan^3 x}=\lim_{x\to 0}e^{\tan x}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\tan x}-1}{\tan^3 x}=-\frac{1}{3}$$

当然，有了泰勒多项式，我们可用下方法计算上面最后一个极限，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}\xlongequal{\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\lim_{x\to 0}\frac{x+\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x^3}=-\frac{1}{3}$$

“事后诸葛亮”，我们知道上面那步“险棋”是走对了，下面用泰勒多项式来分析其合理性之根由. 对 $\dfrac{e^{x-\tan x}-1}{\tan^3 x}$，如果将分母上的 $\tan^3 x$ 用 x^3 给替换掉，那为了保证极限值不改变，分子上的无穷小须能写成：“关于 x 的三阶无穷小 + 更高阶无穷小的形式”. 事实上，即便利用一阶的近似：$e^{x-\tan x}-1\sim x-\tan x$，也能满足我们的要求：

$$\begin{aligned}&e^{x-\tan x}-1\sim x-\tan x+o(x-\tan x)\\&=x-\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+o\left(x-\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\right)\\&=-\frac{x^3}{3}+o(x^3)+o\left(-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=\underbrace{-\frac{x^3}{3}}_{\text{三阶无穷小}}+\underbrace{o(x^3)}_{\text{更高阶无穷小}}\end{aligned}$$

例 4.3 下面这个 $\frac{0}{0}$ 型极限，得用洛必达法则四次才能解决

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+xe^{-\frac{x^2}{2}}}{4x^3}\xlongequal{\text{洛必达}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}}{12x^3}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-3xe^{-\frac{x^2}{2}}+x^3e^{-\frac{x^2}{2}}}{24x}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-3e^{-\frac{x^2}{2}}+6x^2e^{-\frac{x^2}{2}}-x^4e^{-\frac{x^2}{2}}}{24}=-\frac{1}{12}$$

如用无穷小量的等价替换方法，由于分母 x^4 是 4 阶，故分子得写成“4 阶 + 更高阶”. 如没有泰勒多项式这个工具，则操作如下

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=(\cos x-1)-\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-1\right)$$

$$\sim\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\left(-\frac{x^2}{2}+o\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)=o(x^2)-o\left(-\frac{x^2}{2}\right)=o(x^2)$$

遗憾没能得到有效结果，但莫悻悻然，有泰勒公式这一“利器”，自能泰然应对.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4);\quad e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)$$

$$\Longrightarrow\quad \cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

例 4.4 对下面的例子，先恒等变换将极限简化，然后再使用洛必达法则或其它. 虽然“招数”多了，但一定得配合基本功，否则反会被招数束缚，变成“花拳绣腿”.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}\xlongequal{\text{有理化}}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\left(\ln(1+x)-x\right)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x\left(\ln(1+x)-x\right)}\xlongequal[\tan x\sim x;\,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}]{\ln(1+x)-x\sim-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}}{x\left(-\frac{x^2}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$

例 4.5 下面这个极限，如果直解用洛必达法则，得用三次，计算量较大，然若一开始就合理使用无穷小量等价替换，可是计算简化.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{2}}{x^4}=\frac{1}{2}$$

例 4.6 下面是个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限，可用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\arctan x-\ln(1+x^2)}{x+\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\arctan x=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

对一些 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，∞^0，1^∞，0^0 不定型极限，可转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型计算.

例 4.7 该例中，将 $0\cdot\infty$ 型转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

例 4.8 该例中，将 $\infty-\infty$ 型转化为 $\frac{0}{0}$ 型，然后利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to0^+}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\overset{\frac{0}{0}\text{型，用洛必达法则}}{=\!=\!=}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{1+\frac{x}{\sin x}\cos x}=0$$

例 4.9 该例中，将 ∞^0 型转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\sin\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\cdot\ln x}\overset{\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}}{=\!=\!=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1$$

例 4.10 该例中，将 1^∞ 型转化为 $\frac{0}{0}$ 型，然后利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x\cdot2x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

例 4.11 该例中，将 0^0 型转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后利用洛必达法则求解.

$$\lim_{x\to0^+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}\overset{\text{例 4.7}}{=\!=\!=}e^0=1$$

再次强调，使用洛必达法则之前必须验证使用条件，否则很容易导致错误的发生，比如下面几例.

例 4.12 对极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$，它是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的. 利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1}$$

如果由此认为极限不存在便错了，因为显然极限为零.

例 4.13 对极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$，它不是 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的. 它的极限显然是 2，但若忽视条件贸然使用洛必达法则，那么会得到如下错误

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}=0$$

例 4.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\sin\dfrac{1}{x}=1\cdot 0=0$. 但如用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\ (\text{极限不存在})$$

最后，我们再算几则例子，给大家演示下如何利用泰勒展开这一利器来破解一些棘手的求极限问题.

例 4.15 对极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$，用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos x+\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)\cos^2 x+\sin(\sin x)\sin x+\cos x}{12x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos^3 x+\cos(\sin x)\sin 2x+\cos(\sin x)\sin x\cos x+\sin(\sin x)\cos x-\sin x}{24x}$$

分子上的函数的导数是：$\cos(\sin x)\cos^4 x-3\sin(\sin x)\cos^3 x\sin x-$

$$-\sin(\sin x)\cos x\sin 2x+2\cos(\sin x)\cos 2x-\sin(\cos x)\sin x\cos^2 x+$$

$$+\cos(\sin x)\cos 2x+\cos(\sin x)\cos^2 x-\sin(\sin x)\sin x-\cos x$$

它在 $x=0$ 处的取值是 $1-3\times 0-0+2-0+1+1-0-1=4$，故原极限等于 $\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$. 该解法实繁琐，但用泰勒展开就能化繁为简，只需将分子展开到 x^4 的项.

$$\cos(\sin x)-\cos x=1-\frac{(\sin x)^2}{2!}+\frac{(\sin x)^4}{4!}-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)+o(x^5)$$

$$
=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)^2+\frac{x^4}{24}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)
$$

$$
=-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{x^2}{2}+o(x^5)=\frac{x^4}{6}+o(x^5)
$$

从而

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{6}+o(x^5)}{x^4}=\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^5)}{x^4}=\frac{1}{6}
$$

注记 4.4 为保证计算正确，必须将 $\cos(\sin x)$ 展开为至少 x 的四阶才可以，为此在上面 $(\sin x)^2$ 中至少需用 $x-\frac{x^3}{3!}$ 代替 $\sin x$ 才可以，这是因为在 $\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2$ 的展开中有交叉相乘 $-2x\times\frac{x^3}{3!}$ 而产生 4 阶项. 当然在 $(\sin x)^4$ 中我们直接用 x 代替 $\sin x$ 是可以的，因为代入更高阶项后，经四次方后，产生的除 x 之外的项都是高于 4 阶的.

注记 4.5 在计算诸如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x}$ 这样的极限时，我们往往用 x 代替 $\sin x$，从而得到极限 $-1/2$. 但问题是，如何保证这种替换是靠谱的? 根本上来说，$\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x}$ 当 $x\to 0$ 时的态势应为

$$
\frac{\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}-\cdots}{\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots\right)^2}=\frac{\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}-\cdots}{x^2-2\times\dfrac{x^4}{3!}+\cdots}=\frac{\dfrac{1}{2!}-\dfrac{x^2}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}-\cdots}{1-2\times\dfrac{x^2}{3!}+\cdots}
$$

当 $x\to 0$ 时，分母上只有 x^2 的项有贡献，故分母用 x^3 替换是可行的.

例 4.16 对极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}$.

直接利用洛必达法则求解将是十分繁琐的. 我们尝试将分子展开到 x^4 的项为止.

$$
\ln(1+\sin^2 x)=\sin^2 x-\frac{(\sin^2 x)^2}{2}+o(\sin^4 x)
$$

如贸然用 $\sin x\sim x$ 代入将得不到 4 阶无穷小，至少得用下替换才行

$$
\sin^2 x=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2
$$

从而 $\ln(1+\sin^2 x)=$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^4+o\left(\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^4\right)$$

$$=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)-\frac{1}{2}\binom{4}{4}x^4+o(x^4)+o(x^4)$$

$$=x^2-\frac{x^4}{3}-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=\underline{x^2-\frac{5x^4}{6}+o(x^4)}$$

$$\sqrt[3]{2-\cos x}=\sqrt[3]{1+(1-\cos x)}=1+\frac{1-\cos x}{3}-\frac{(1-\cos x)^2}{9}+o((1-\cos x)^2)$$

$$=1+\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+o\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)$$

$$=1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{72}+o(x^4)-\frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)+o(x^4)=\underline{1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2-\frac{5x^4}{6}\right)-6\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}\right)+o(x^4)}{x^4}=\frac{-7}{12}$$

注记 4.6 有了求极限的洛必达法则，我们先前推导二阶和三阶泰勒多项式的计算可大幅化简. 设 $g(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+B(x-x_0)^2$（其中 A,B 为待定常数），则 $f(x)-g(x)=o\left((x-x_0)^2\right)$ 要求下极限成立

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)-B(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}=0$$

特别地，下面的极限也须成立

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)-B(x-x_0)^2}{x-x_0}=0 \quad\Longrightarrow\quad A=f'(x_0)$$

为确定常数 B 的值，须让下极限成立

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-B(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}=0$$

用洛必达法则计算极限，有

$$
\text{上极限} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2B(x - x_0)}{2(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - 2B}{2}
$$

$$
= \frac{f''(x_0) - 2B}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{f''(x_0)}{2}
$$

为得到三阶近似，我们对近似

$$
g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2
$$

添加一 3 阶“微扰项” $C(x - x_0)^3$，然后要求

$$
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - C(x - x_0)^3}{(x - x_0)^3} = 0
$$

用洛必达法则计算极限，有

$$
\text{上极限} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - 3C(x - x_0)^2}{3(x - x_0)^2}
$$

$$
= \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - 3 \cdot 2\, C(x - x_0)}{3 \cdot 2(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'''(x) - 3!C}{3!}
$$

$$
= \frac{f'''(x_0) - 3!C}{3!} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{f'''(x_0)}{3!}
$$

不难推广到一般 n 阶近似的情形.

5 隐函数和参数方程的求导

我们先考察一个简单的例子. 设变量 x 和 y 由下方程关联（$a, b > 0$）.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.1)$$

通过选取平方根的一个分支（正或负的），可将 y 表示成 x 的函数. 比如

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

其导数可直接计算如下

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{2x}{a^2}\right)$$

另一方面，如果在方程 (5.1) 两边同时对 x 求导，则得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{2y}\left(-\frac{2x}{a^2}\right)$$

跟直接计算所得结果完全一样. 这种计算方法当然不是新的知识，我们先前就屡有使用. 这里强调的是：函数 $y = y(x)$ 可看成是由关系（方程）(5.1) 给出的，也就是说它其实是由方程决定的一个隐函数，所以这里用到的这种求导方式也叫*隐函数求导法*. 尤其是当没法从关系方程直接解出明确的表达式 $y = y(x)$ 时，这种方法就成必要了.

隐函数求导法： *设函数 $y = y(x)$ 是由关系（方程）$F(x, y) = 0$ 所界定的，即 $y = y(x)$ 满足 $F(x, y(x)) \equiv 0$ 为求 $\frac{dy}{dx}$，在该方程两边同时对 x 求导，然后由之解出 $\frac{dy}{dx}$ 即可.*

例 5.1 我们知道*开普勒（Kepler）方程* $y = x + \epsilon \sin y \,(\epsilon \in (0, 1))$ 确定了 y 和 x 之间的函数关系 $y = y(x)$，为计算其导函数，我们将方程两边对 x 求导，得

$$y' = 1 + \epsilon \cos y \cdot y' \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{1}{1 - \epsilon \cos y}$$

例 5.2 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} + \cos(xy) - y^2 = 0$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解： 方程两边对 x 求导，得

$$e^{xy}\frac{d(xy)}{dx} - \sin(xy)\frac{d(xy)}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)-\sin(xy)\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Longrightarrow\quad (xe^{xy}-x\sin(xy)-2y)\frac{dy}{dx}=y\sin(xy)-ye^{xy}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y(\sin(xy)-e^{xy})}{xe^{xy}-x\sin(xy)-2y}$$

也可利用一阶微分的形式不变性，在方程两边同时求微分，最后解出微商 $\frac{dy}{dx}$. 比如对上例，按此思路，有

$$de^{xy}+d\cos(xy)-2ydy \quad\Longrightarrow\quad e^{xy}d(xy)-\sin(xy)d(xy)-2ydy=0$$

$$\Longrightarrow\quad e^{xy}(xdy+ydx)-\sin(xy)(xdy+ydx)-2ydy=0$$

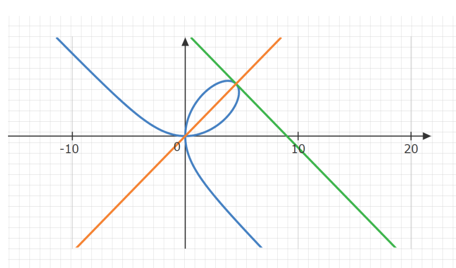
$$\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y(\sin(xy)-e^{xy})}{xe^{xy}-x\sin(xy)-2y}$$

例 5.3 设 $y=y(x)$ 由方程 $\sin y^2=\cos\sqrt{x}$ 确定，为计算 y'，对该方程进行微分，得

$$d\sin y^2=d\cos\sqrt{x}\quad\Longrightarrow\quad \cos y^2d(y^2)=-\sin\sqrt{x}d\sqrt{x}$$

$$\Longrightarrow\quad 2y\cos y^2dy=-\sin\sqrt{x}\frac{dx}{2\sqrt{x}}\quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}y\cos y^2}$$

例 5.4 求笛卡尔（*Descartes*）叶形线 $x^3+y^3=3axy$ 在点 $\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$ 处的切线和法线方程.



方程两边对 x 求导，得

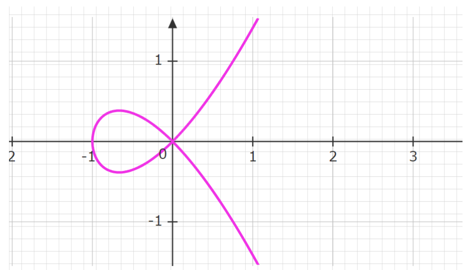
$$3x^2+3y^2y'=3ay+3axy'\quad\Longrightarrow\quad y'=\frac{ay-x^3}{y^2-ax}$$

当 $x=y=\frac{3a}{2}$ 时，$y'=-1$. 故曲线在点 $\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{1}\right)$ 的切线方程和法线方程分别是

$$\text{切线：}\quad y-\frac{3a}{2}=-1\left(x-\frac{3a}{2}\right)\quad\Longrightarrow\quad x+y=3a$$

$$\text{法线：}\quad y-\frac{3a}{2}=1\cdot\left(x-\frac{3a}{2}\right)\quad\Longrightarrow\quad x-y=0$$

例 5.5 方程 $x^3+x^2-y^2=0$ 定义的曲线常被称为节点曲线（*node curve*）

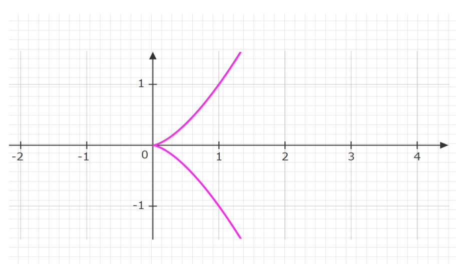


如果要求其上某点处的切线方程，我们对方程微分，然后整理出微商 $\frac{dy}{dx}$

$$3x^2dx+2xdx=2ydy\quad\Longrightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{x(3x+2)}{2y}$$

导数的表达式在 $(0,0)$ 处无意义, 故节点曲线在原点处无良好定义的曲线, 称 $(0,0)$ 是曲线的一个奇异点（*singularity*）. 奇异性表现为在曲线在该点的相交导致有两个不同的切方向，从而不可导.

例 5.6 方程 $x^3-y^2=0$ 定义的曲线常被称为尖点曲线（*cusp curve*）.



如果要求其上某点处的切线方程，方程两边对 x 求导，得

$$3x^2 - 2yy' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{3x^2}{2y}$$

可见尖点曲线在 $(0,0)$ 处不存在切线.

隐函数的高阶导数：思路同前，对定义隐函数的方程两边求导，直到产生我们需要阶数的导数，然后将其解出来（如果可能）. 以上面例 *5.6* 来说明，一方面已知 y'，故

$$y'' = \left(\frac{3x^2}{2y}\right)' = \frac{12xy - 6x^2y'}{4y^2} = \frac{12xy - \frac{9x^4}{y}}{4y^2} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$$

另一方面，在 $3x^2 - 2yy' = 0$ 两边再对 x 求导一次，得

$$6x - 2((y')^2 + yy'') = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'' = \frac{3x - (y')^2}{y}$$

$$\Longrightarrow \quad y'' = \frac{3x - \frac{9x^4}{4y^2}}{y} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$$

例 5.7 设 $y = y(x)$ 由下面方程决定

$$\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

为计算 y''，我们先把方程两边微分

$$d\arctan\frac{y}{x} = d\ln\sqrt{x^2+y^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow (x-y)dy = (x+y)dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

为求 y''，将方程 $(x-y)y' = (x+y)$ 两边对 x 求导，得

$$(1-y')y' + (x-y)y'' = 1 + y' \quad \Longrightarrow \quad y'' = \frac{(1+y') - (1-y')y'}{x-y} = \frac{1+y'^2}{x-y}$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}{x-y} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

参数方程求导： 设函数由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}\quad t\in I$. 若可消去参数 t，从而得到一个联系 x,y 的方程 $F(x,y)=0$，则计算 $\dfrac{dy}{dx}$ 可按隐函数求导方法进行，但若无法消参，该如何计算 $\dfrac{dy}{dx}$?

注记 5.1 从“导数作为微商”的角度来看，答案似乎是显然的，因为作为微商（微分之商），有

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

当然，上面是“启发性”推导，须配以严格证明才行. 下从导数的定义出发分析.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

但问题是：首先要让 y 是 x 的函数才可以，但 $y=\psi(t)$ 又该如何成为 $x=\varphi(t)$ 的函数呢? 显然，如果在某点 (x,y) 处，t 可以写成 x 的函数，即反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在，那么在这点附近，y 以如下方式依赖于 x，即 y 之作为 x 的函数的方式

$$y=\psi(t)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$$

由于反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 在 (x,y) 附近存在，所以在该点处

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\varphi'(t)}$$

是存在的，从而 $\varphi'(t)\neq 0$.（我们知道，如果 $x=\varphi(t)$ 在 t 附近严格单调，则反函数存在，且 $\varphi'(t)\neq 0$. 事实上，$\varphi'(t)\neq 0$ 是在一点附近反函数存在的必要条件）. 好，那么在此假设之下，y 对 x 的求导问题转化为复合函数的求导问题

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\psi(\varphi^{-1}(x+\Delta x))-\psi(\varphi^{-1}(x))}{\Delta x}=\frac{d\psi(\varphi^{-1}(x))}{dx}$$

根据复合函数求导的链式法则，我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\psi(\varphi^{-1}(x))}{dx}\xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)}\frac{d\psi(t)}{dt}\frac{dt}{dx}=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

由此可见我们利用“微商”概念进行的启发性“似真（plausible）推理”在严格概念框架下也是正确的.

让我们回看下本小节开头对椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的求导问题，通过方程两边对 x 求导的方式我们已得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$；另一方面，该椭圆有自然的参数方程描述

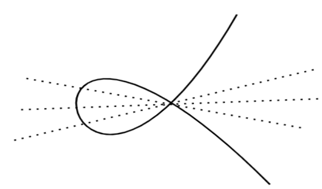
$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases} \quad 0\le\theta<2\pi$$

对 $\cos\theta\neq 0$ 的点 θ 处，利用参数方程的求导公式，可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}=-\frac{b}{a}\frac{x/a}{y/b}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

例 5.8 对例 *5.5* 中的“节点曲线” $x^3+x^2-y^2=0$，我们可利用过原点的旋转直线族给出其有理参数，即解方程组

$$\begin{cases} x^3+x^2-y^2=0 \\ y=tx \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t^3-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$



通过隐函数求导法，我们已知 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x(3x+2)}{2y}$. 而利用参数方程求导法，则有

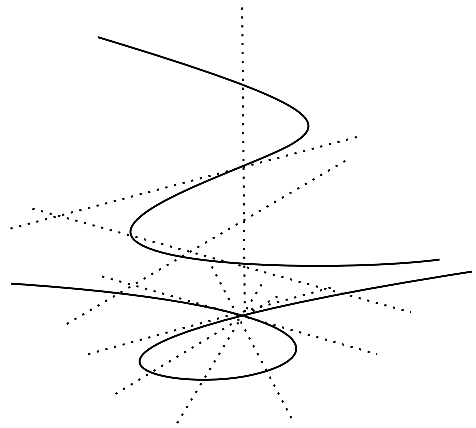
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2-1}{2t}\quad\left(=\frac{(3t^2-1)(t^2-1)}{2t(t^2-1)}=\frac{x(3x+2)}{2y}\right)$$

注记 5.2 注意到节点曲线的奇点 $(0,0)$ 对应的参数是 $t=1$. 便有一个神奇的现象：按 $y'=x(3x+2)/y$，它在 $(0,0)$ 处是没有定义的，但当用上述参数方程后，我们发现它在对应的参数 $t=1$ 处竟然有意义了，即

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0,y=0}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\Big|_{t=1}=\frac{3t^2-1}{2t}\Big|_{t=1}=\frac{2}{2}=1$$

这是什么缘故呢？我们没法在这里展开说明，只说结论：上面的参数化消解了结点

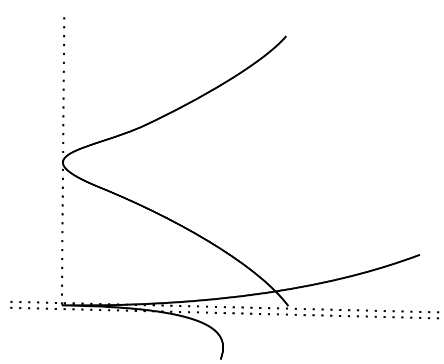
曲线在原点的奇异性——参数 t 的几何意义是对应直线方向的"斜率"，所以以上参数化的本质是让过定点的直线族与曲线相交；而消解奇点的原因是斜率（作为直线上点的坐标比）可看成是另一维度（参数化这旋转直线族的射影空间）中的点. 即本质相当于把曲线"拉扯"到高一维空间中，从而使得相重合的切线方向（导致奇异性的产生）给自然分离了.



同样地，对例 *5.6* 中由 $x^3 = y^2$ 给出的尖点曲线，其自然参数化是 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 其奇异点 $(0,0)$ 对应参数 $t = 0$. 同上例，这里的神奇之处是，明明 $y'(x) = 3x^2/2y$ 在 $(0,0)$ 处无意义，但经过上参数化，它竟然有意义了，即

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{dy/dt}{dx/dt}\Big|_{t=0} = \frac{3t^2}{2t}\Big|_{t=0} = \frac{3}{2}t\Big|_{t=0} = 0$$

本质上，这相当于将原点爆裂（*blow up*）为与 x-y 平面垂直的直线，直观上，则过原点的所有直线方向都将在其中分离，特别地，尖点曲线在原点处的两条重叠切线也将分离，从而将其奇点给消解了（*resolving the singularity*）.



例 5.9 对摆线的参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2}$$

例 5.10 对例 *5.3* 中的笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy$，已计算出 $y' = \dfrac{ay - x^3}{y^2 - ax}$. 另一方面，它的一个自然有理参数是 $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$. 则有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3at(2 - t^3)/(1 + t^3)^2}{3a(1 - 2t^3)/(1 + t^3)^2} = \frac{t(2 - t^3)}{1 - 2t^3} \quad \text{（注意与 } a \text{ 无关！）}$$

问题： 验证用参数求导得出的结论和之前得到结论是完全一致的.

极坐标方程确定函数的求导： 设曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ 给出，按照极坐标与笛卡尔坐标之间的变换规则可知该曲线有一自然的参数方程描述，即

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = r(\theta) \cos \theta \\ y = r \sin \theta = r(\theta) \sin \theta \end{cases} \qquad \theta \in [\alpha, \beta]$$

然后由参数方程求导法，可知

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta}}$$

例 5.11 已知心脏线的极坐标方程 $r = 2a(1 + \cos \theta)$，求其上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 的点处的切线方程.

解： 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时，$r(\theta) = 2a\left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) = 2a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且

$$x = 2a\left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) a; \quad y = 2a\left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$

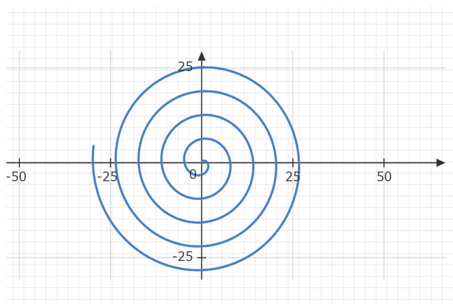
$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta} = \frac{-2a \sin \theta \sin \theta + 2a(1 + \cos \theta) \cos \theta}{-2a \sin \theta \cos \theta - 2a(1 + \cos \theta \sin \theta)}\Big|_{\theta = \frac{\pi}{6}} = -1$$

故所求切线的方程为

$$y - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a = -\left[x - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) a\right]$$

例 5.12 阿基米德螺线（*Archimedean spriral*）由极坐标方程 $r = a + b\theta$，其中 a, b 为常数，其最简单的情形是 $r = \theta$，其参数方程是

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta\cos\theta \\ y(\theta) = \theta\sin\theta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$$



注意，对 $r = b\theta$ 描述的螺线，曲线上 θ 对应点的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 不依赖于 $b \neq 0$ 的选择. 我们消去参数 θ，得 $r = \theta$ 的直角坐标描述为

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \tan\theta \\ x^2 + y^2 = \theta^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

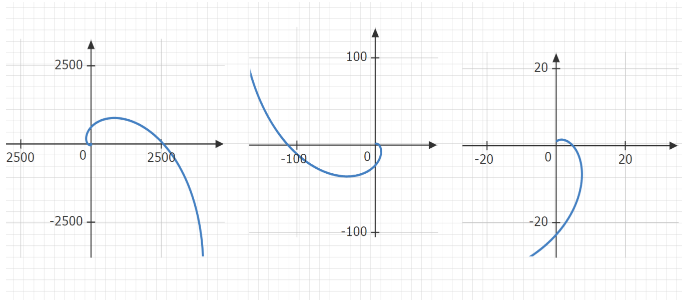
注意它与例 *5.7* 中的方程 $\arctan\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 对应的方程是类似的，我们已经知道对由它决定的隐函数 $y = y(x)$，有 $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$. 它对有的极坐标方程为

$$\theta = \ln r \quad \Longrightarrow \quad r = e^\theta$$

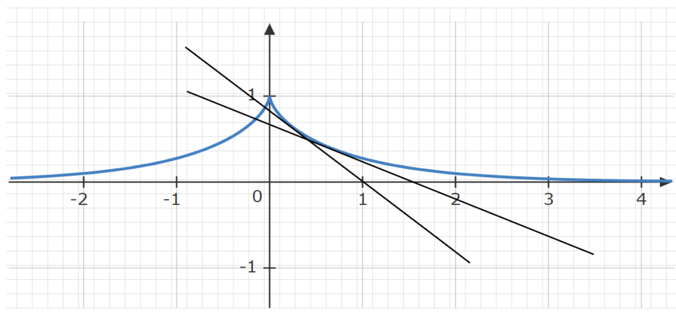
由该方程定义的曲线称为对数螺线，它是一个 “自相似”（*self similar*）曲线，其不同尺度下的图像举例如下，可看出：无论尺度如何收放，其形皆似也！

它的一个参数方程是 $\begin{cases} x(\theta) = e^\theta\cos\theta \\ y(\theta) = e^\theta\sin\theta \end{cases}$ 从而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{e^\theta\cos\theta + e^\theta\sin\theta}{-e^\theta\sin\theta + e^\theta\cos\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} \qquad \left(= \frac{x + y}{x - y}\right)$$



例 5.13 曳物线 $\begin{cases} x = a\left(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t\right) \\ y = a\sin t \end{cases}$ 上的每条切线上从切点到与它和 x 轴的交点的长度是定值.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a\cos t}{a\left(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\sec^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin t\right)} = \frac{\cos t}{\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} - \sin t}$$

$$= \frac{\cos t}{\frac{1}{\sin t} - \sin t} = \frac{\sin t\cos t}{1 - \sin^2 t} = \tan t$$

故过 $t = t_0$ 确定的点的切线方程是

$$y - a\sin t_0 = \tan t_0\left(x - a\left(\ln\tan\frac{t_0}{2} + \cos t_0\right)\right)$$

其与 x-轴的交点坐标是 $\left(a\ln\tan\frac{t_0}{2}, 0\right)$，它与切点连线的距离的平方是

$$\left(a\left(\ln\tan\frac{t_0}{2} + \cos t_0\right) - a\ln\tan\frac{t_0}{2}\right)^2 + (a\sin t_0)^2 = a^2$$

参数方程表示的函数的高阶导数计算：对参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 我们已知 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. 如要计算二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，只需

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{1}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2}\frac{1}{x'(t)}$$

$$= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$$

在实际计算中，无需特意记忆上公式，只按其推导过程计算即可.

例 5.14 计算摆线曲线（*c.f.* 例 *5.9*）所确定函数的二阶导数.

解：我们已知一阶导数为 $\dfrac{dy}{dx} = \cot\dfrac{t}{2}$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\cot\frac{t}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\cot\frac{t}{2}\right)\frac{1}{x'(t)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{t}{2}\right)\frac{1}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a}\csc^4\left(\frac{t}{2}\right)$$

例 5.15 对曳物线（*c.f.* 例 *5.13*），已得 $y'(x) = \tan t$，下计算二阶导

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(y'(x)\right) = \frac{d}{dt}\left(\tan t\right)\frac{1}{x'(t)} =$$

$$= \sec^2 t \frac{1}{a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)} = \frac{1}{\cos^2 t}\frac{\sin t}{a\cos^2 t} = \frac{1}{a}\frac{\sin t}{\cos^4(t)}$$

如需计算 $y'''(x)$，只需如法炮制，稳步计算

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\frac{\sin t}{\cos^4 t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a}\frac{\sin t}{\cos^4 t}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\cos^5 t + 4\sin^2 t\cos^3 t}{\cos^8 t}\frac{\sin t}{a\cos^2 t} = \frac{1}{a^2}\frac{\sin t\cos^3 t\left(\cos^2 t + 4\sin^2 t\right)}{\cos^{10} t}$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{(1+3\sin^2 t)\sin t}{\cos^7(t)}$$

6 核心回顾——承上启下篇

核心回顾： $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 衡量的是函数曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率. 即该点的切线方程（*tangent line*）是

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$$

由之决定的线性函数 $L_{f,(x_0)}(x)$ 称作是 $f(x)$ 在 x_0 点附近的线性近似（*linear approximation*）

$$\boxed{L_{f,x_0}(x):=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$$

当 x 在 x_0 点产生一增量Δx 时，线性近似对应的增量（即在切线上计算的增量）

$$\Delta L_{f,x_0}=L_{f,x_0}(x_0+\Delta x)-L_{f,x_0}(x)$$

是函数 $y=f(x)$实际增量$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$（即函数曲线上计算而得的）的一阶线性近似，当然，它不是别的，正是函数在这点的微分$df|_{x=x_0}$，即有

$$\boxed{df|_{x=x_0}=\Delta L_{f,x_0}=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx}$$

亦即，微分 $df|_{x=x_0}$ 可看成是“坐镇”于 $(x_0,f(x_0))$ 的一个“机器”：它将 x_0 处自变量增量 $dx=\Delta x$ 线性地变换为 $df_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$ ——作为对应函数实际增量 Δf 的一阶近似：$df|_{x=x_0}\approx\Delta f$. 一阶的含义是：误差 $\Delta f-df|_{x=x_0}=o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小.

换言之，微分 $df|_{x=x_0}$ 是一个映射（变换），且是最简单的线性映射，即

$$\boxed{\begin{array}{ccc}\{x_0\text{ 处 }x\text{ 的增量空间}\} & & \{\text{对应线性近似 }L_{f,x_0}\text{ 的增量空间}\}\\ \|\wr & \xrightarrow[\text{作为映射}]{df|_{x_0}} & \|\wr\\ \{\Delta x=x-x_0\mid x\in\mathbb{R}\} & & \left\{\Delta L_{f,x_0}=f'(x_0)\Delta x\mid\forall\Delta x\in\mathbb{R}\right\}\end{array}}$$

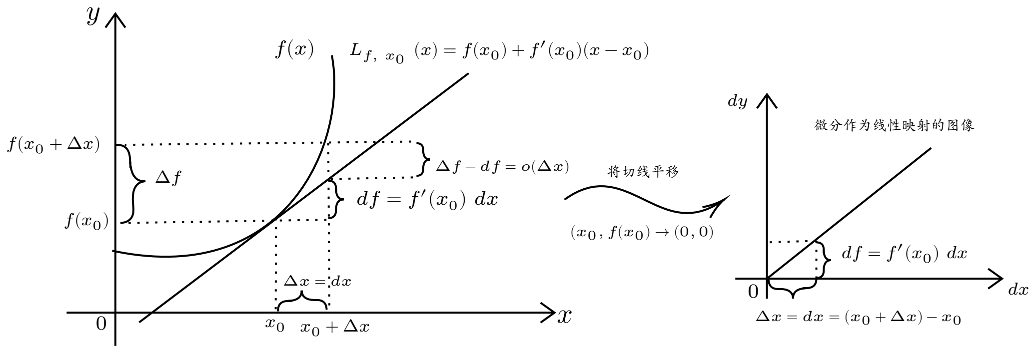
注意，这里所说的“增量空间”是指 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间（*vector space*），因增量间可加减、可数乘. 事实上

$$\{\Delta x=x-x_0\,|\,x\in\mathbb{R}\}\ \overset{\text{等同于}}{\underset{\text{即同构于}}{=\!=\!=}}\ \mathbb{R}\text{（作为 }x\text{-轴 }\mathbb{R}_x\text{ 上 }x_0\text{ 处的切线空间）}$$

$$\left\{\Delta L_{f,x_0}=f'(x_0)\Delta x\mid\forall\Delta x\in\mathbb{R}\right\}\ \overset{\text{等同于}}{\underset{\text{即同构于}}{=\!=\!=}}\ \mathbb{R}\text{（作为 }y\text{-轴 }\mathbb{R}\text{ 上 }f(x_0)\text{ 处的切线空间）}$$

故微分 $df_{x=x_0}$ 是切线空间（简称切空间）层面由导数 $f'(x_0)$ 给出的线性变换（即最简单的“数乘变换”）. 但须再三强调：**导数不是微分**！导数是一个数字，衡量函数在该点的瞬时变化率；微分是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的数乘线性变换，乘数虽是导数，但其实质是从 x_0处切空间 (等同于 x-轴 $\mathbb{R}_x$ 自身) 到 y-轴上$f(x_0)$处切空间 (等同于 y-轴 $\mathbb{R}_y$ 自身) 的一个线性变换:即将 x_0 处增量 Δx 变换为线性近似 L_{f,x_0} 的增量 $df|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$.

$$df|_{x=x_0} : \mathbb{R}_x \longrightarrow \mathbb{R}_y \qquad dx \longmapsto df|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$$



由上图不难看出：$(x_0, f(x_0))$ 处切线与微分的图像的关系为

将切线平移，使其上 $(x_0, f(x_0))$ 点与坐标原点重合

然后将 x-轴 $\mathbb{R}_x$ 解释为微分 dx 的取值空间（x_0 点切空间 $\simeq \mathbb{R}_x$）

将 y-轴 $\mathbb{R}_y$ 解释为微分 dy 的取值空间（$f(x_0)$ 点切空间 $\simeq \mathbb{R}_y$）

注记： 这里切线与微分之图形的关系非常类似与线性方程组 $Ax = b$ 的解与其对应之齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解之关系！在线性方程组理论的语境下，$Ax = b$ 的解可写成其任一特解 x_0 与 $Ax = 0$ 的全体解的和，即从图形上来说，$Ax = b$ 的解图形是 $Ax = 0$ 解图形对特解 x_0 的一个平移！而 $Ax = 0$ 的解的图形是一个线性空间.

线性近似 $L_{f,x_0}(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{df|_{x=x_0}}$ 只关涉 $f(x)$ 在 x_0 点附近（“曲”）用其微分（“直”）的近似. 自然要追问:

1. 决定线性近似的 $f'(x_0)$ 是如何影响函数在该点及在该点附近的表现的?

2. 微分近似的误差 $o(\Delta x)$ 项能否有更精细的控制?

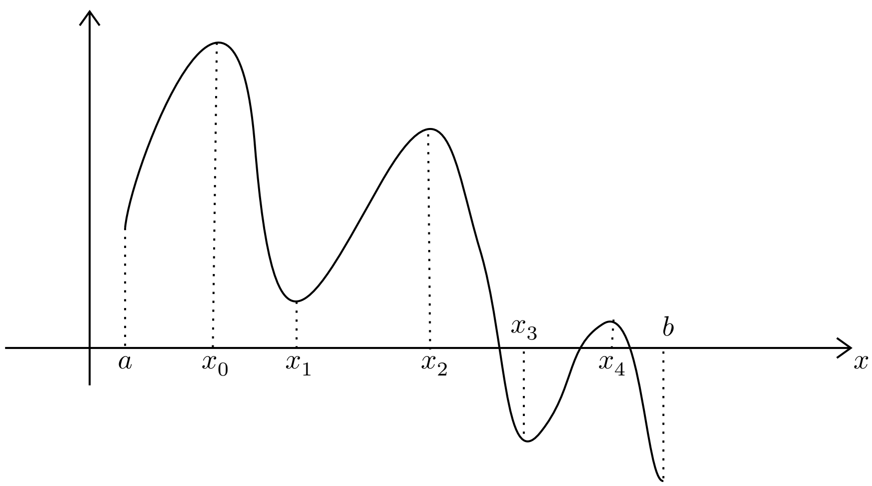
3. 如何通过导数值的变化研究一函数在一个区间上的整体性质?

这将是我们下面几小节探讨的主题.

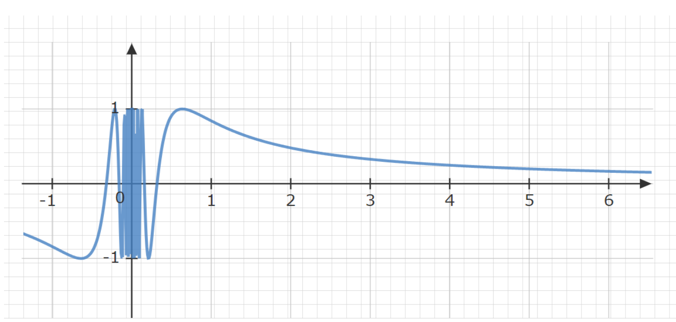
7　极值点与费马定理、单调性与极值判别法

定义 7.1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有定义，若 $\exists\,\delta>0$，使得 $\forall x\in(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$，成立 $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值（极小值），并称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的极大值点（极小值点）．极大值、极小值通称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点.

注记 7.1 上定义表明“极值”是个局部概念，它只是 x_0 点处某领域 $U(x_0,\delta)$ 内的最大或最小值，未必是全局最大或最小. 如下图中的函数图像，显然，x_0,x_2,x_4 是极大值点；同时 x_0 也是函数的最大值点；x_1,x_3 是极小值点，但函数在 $x=b$ 时取最小值；另外，虽然 x_4 是极大值点，但它对应的函数值比函数在极小点 x_1 处的取值还小.

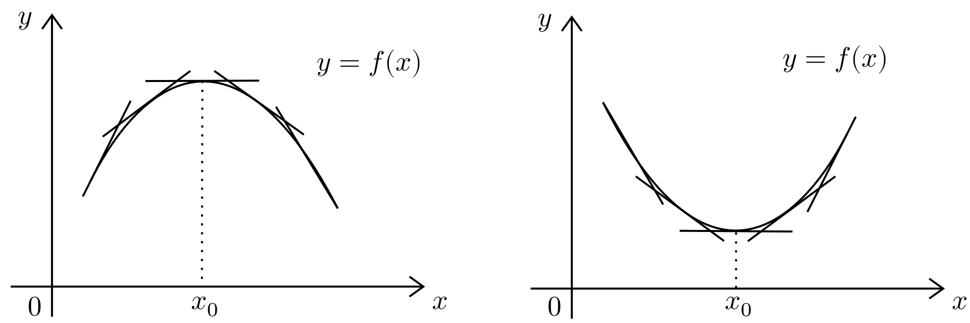


注记 7.2 函数的极值点可以是无穷多，比如 $(0,1)$ 上的函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 的极值点是 $x=\frac{2}{(2n+1)\pi}$（n 为偶数时为极大值点；n 为奇数时为极小值点）.



从图形上看，如果函数是连续且可导的（即每点处有切线），则极值点对应于具有水平切线的点.

另外，如果将 x 解释为时间变量，则 $y=f(x)$ 的图形可看成是一质点沿曲线的运动，则在极大值点附近（比如上图中的点 x_0），当从 x_1 左侧通过 x_0 时，我们看到点在曲线上先“爬坡”，且其爬坡的速度 $f'(x)$ 越来越小（即切线斜率从正值变得越来越小），到 x_0 对应的点时切线则呈水平状（即点的即时速率为零），然后又开始“加速下坡”（即切线斜率 $f'(x)$ 从 0 开始减少——虽为负，但其绝对值越来越大）.



同理，在极小点附近，函数曲线上的点先历经下坡阶段，越过极小值点后又开始爬升；切线斜率（点的运动速度）先从负值增于零，越过极值点后，又从零开始增加.

既然“爬坡”对应轨迹的上升，即函数单调增加，故可将导数非负同函数单调增加相联系；同理，既然“下坡”对应轨迹的下降，即函数单调减少，可将导数非正同函数单调减少相联系. 不难想见下定理的正确性.

定理 7.1（费马（*Fermat*））设 $f(x)$ 在 x_0 取极值, 且 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $f'(x_0)=0$.

定义 7.2 导数为零的点称为函数的驻点（*stationary point*）.

由费马定理知，可导函数在**区间内**（边界上须单独处理）的极值点是函数的驻点. 我们记 $f\in D(I)$ 表示 f 是区间 I 上的可导函数，则下定理在直观上也是显明的.

定理 7.2 设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$（即在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 上可导），则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加（减少）当且仅当 $\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)\geq 0$ (≤ 0)

（定理 7.1 的）证明 I: 不妨设 x_0 是极大值点（极小值点的情形可类似处理）. 因为 $f(x)$ 在该点可导（可微），故在该点有 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$. 由于 x_0 是极大值点，故在其某一领域 $U(x_0,\delta)$ 内，成立 $f(x)\leq f(x_0)$，由此可知

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0;\quad f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \geq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0 \qquad \square$$

（定理 7.1 的）证明 II： 利用线性近似，在 x_0 处有

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)) = (f'(x_0) + \alpha)(x - x_0)$$

其中 α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小. 若 $f'(x_0) \neq 0$, 则当 x 与 x_0 充分接近时, $f'(x_0)+\alpha$ 和 $f'(x_0)$ 同号，故当 x 经过 x_0 时 $f(x) - f(x_0)$ 变号，与 x_0 是极值点矛盾. $\square$

下面看能否用已有工具（*c.f.* 见上节“承上启下篇”）证明定理 *7.2.* 在试证洛必达法则时已发现其弊了. 下节会打造更为有效的分析工具!

定理 7.2 的证明尝试及其前瞻性证明： 必要性：不妨设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加, 即 $\forall x \in (a, b)$，在 x 处给一个小增量 $\Delta x > 0$ 时，成立 $f(x + \Delta x) \geq f(x)$；显然，该不等式当增量 $\Delta x < 0$ 时也成立. 也即，无论 Δx 是正还是负，都有

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad \xRightarrow{\text{令 } \Delta x \to 0} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0. \quad \square$$

对充分性，我们需从 (a, b) 上的 $f'(x) \geq 0$ 推出 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的单调增加性.

分析： 从 a 处开始，由于 $f'(a) \geq 0$，则对 $\Delta x > 0$，按惯常分析法，我们有

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\geq 0} + o(\Delta x)$$

感觉当 Δx 很小时，误差项 $o(\Delta x)$ 可小到无论其正负，都能使 $f'(a)\Delta x + o(\Delta x) \geq 0$，从而 $f(a + \Delta x) > f(a)$，即在 a 处局部单调，然后一点点向右移动，逐渐将局部单调性“黏合”成整体单调性. 然而这一企图并不易实现. 一方面，若 $f'(a) = 0$ 时，误差项 $o(\Delta x)$ 若为负该怎么办? 而且即便 $f'(a) > 0$，通过上公式又如何能确保选择合适的 Δx 从而使得右边是正的? 更何况 Δx 该选多小及如何选都没法明确说明.

故现有工具虽对分析函数在某点附近的表现是比较有效的, 但对函数在一区间上的整体性质却力有不逮. 比如上面的误差项 $o(\Delta x)$ 就是干扰因素，我们自然希望将它的存在转化成另一种形式，从而使我们可获得函数在一区间上整体表现的有效信息.

由下节中的朗格朗日中值定理知，此时 $\exists \xi \in (a, a + \Delta x)$，使得

$$f(a + \Delta x) - f(a) = f'(\xi)\Delta x \geq 0$$

从而有 $f(a + \Delta x) \geq f(a)$. 更一般地，$\forall a \leq x_1 < x_2 \leq b$，由朗格朗日中值定理知 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1) \quad \square$

有了定理 7.2，则不难将之前在极值点附近“上山下坡”的游戏可转述为下定理.

定理 7.3（极值第一判别法）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某领域 $U(x_0,\delta)$ 内连续，且在去心领域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导

1. 若在 x_0 处左侧 $f'(x)<0$，在 x_0 处右侧 $f'(x)>0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点；
2. 若在 x_0 处左侧 $f'(x)>0$，在 x_0 处右侧 $f'(x)<0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点；
3. 若在 x_0 两侧 $f'(x)$ 同号，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.

证明： 对 1. 有条件知，$f(x)$ 在 $(x_0-\delta,\,x_0]$ 上单调减少，在 $[x_0,\,x_0+\delta)$ 上单调增加，故 $\forall x\in U(x_0,\delta)$，有 $f(x)\geq f(x_0)$，及 x_0 是极小值点. 2, 3 可类似获证. □.

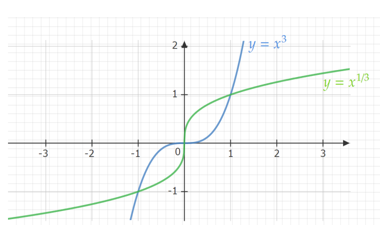
另一方面，我们也知道，在“上山下坡”游戏中，当（从左到右）经过极大（小）值点时，切线的斜率先逐渐减少（增加）为零，过极值点后，又从零开始逐渐减少（增加）. 也即导函数（衡量切线斜率的变化）在极大（小）值附近是减少（增加）函数.

定理 7.4（极值第二判别法）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$（即 x_0 是驻点），有如下判定

1. 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值；
2. 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值.

证明： 当 $f''(x_0)<0$ 时，即极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$. 由极限的“保号性”, 知在 x_0 的某去心领域内有 $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$. 即在 x_0 的某左领域内 $f'(x)>0$；在某右领域内 $f'(x)<0$，也即经过 x_0 时，函数先增后减，故 x_0 为极大值点. 同理可证 2. □

注记 7.3 逻辑上，还有一种情形：$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，此时我们无法用上方法判断函数在 x_0 处的表现. 我们看一个相关例子 $y=x^3$，显然 $y'(0)=y''(0)=0$，且 0 不是极值点. 与之比对，其反函数 $y=x^{1/3}$ 在 0 处也无极值（原因???）



那么是否所有满足 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ 的函数在 x_0 无极值呢? 对该问题，我们

断言： 如函数 $f(x)$ 在 x_0 处 3 阶可导，且满足条件: $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，但 $f'''(x_0)\neq 0$，则 x_0 一定不是 f 的极值点.

断言之证明： 在 x_0 处有泰勒展开:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o\left((x-x_0)^3\right)$$

$$\xlongequal{f'(x_0)=f''(x_0)=0} f(x_0)+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o\left((x-x_0)^3\right)$$

$$\Longrightarrow\quad f(x)-f(x_0)=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o\left((x-x_0)^3\right)$$

将 $o\left((x-x_0)^3\right)$ 写成 $\alpha(x-x_0)^3$，其中 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量，则有

$$f(x)-f(x_0)=\left(\frac{f'''(x_0)}{3!}+\alpha\right)(x-x_0)^3$$

由于 $f'''(x_0)\neq 0$，可见只要 $\Delta x=x-x_0$ 取得足够小，都能使 $\left(\frac{f'''(x_0)}{3!}+\alpha\right)$ 的符号恒定（由 $f'''(x_0)$ 的符号决定），但此时，显然 $f(x)-f(x_0)$ 在 x_0 的某小领域内可正可负，即 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. $\square$

注记 7.4 用泰勒展开，可得更一般的结论：如 f 在 x_0 处 n 阶可微，且满足

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ \text{但}\ f^{(n)}(x_0)\neq 0\quad \text{则有}$$

1. 若 n 为奇数，则 x_0 不是 f 的极值点；
2. 若 n 为偶数，则当 $f^{(n)}(x_0)>(<)\,0$ 时，x_0 是函数 f 的极小（大）值点.

极值的第二判别法其实就是上结论当 $n=2$ 是的情形. 利用泰勒展开，可对定理 *7.4* 以更简洁明快的证明.

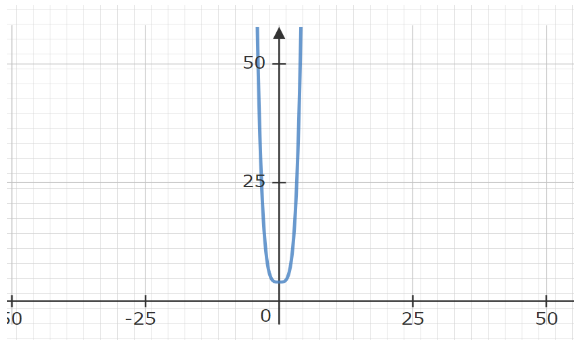
定理 7.4 的另证： 在 x_0 处，有泰勒展开

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)\quad\Longrightarrow$$

$$f(x)-f(x_0)=\left(\frac{f''(x_0)}{2!}+\alpha\right)(x-x_0)^2$$

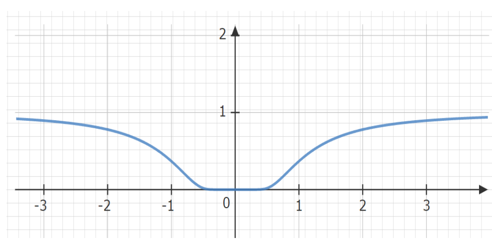
其中 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量. 故知在 x_0 的某去心领域，$f(x)-f(x_0)$ 的符号恒定，且由 $f''(x_0)$ 的符号决定. $\square$

例 7.1 对函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$，可知 $f'(0)=f''(0)=f''(0)=0$，但 $f^{(4)}(0)=4$. 由上讨论可推断 $f(x)$ 在 0 处取极小值. 由下图可见，该函数在 0 处是非常“平坦”的，但还是极小值点的形态.



当然，最简单的例子幂函数 x^n，在 $x=0$ 处，其前 $n-1$ 阶导数在 0 处为零，其 n 阶导数为 $n!$. 按上面的分析，如 n 是奇数，0 不是极值点，当 n 是偶数使 0 是极小值点，且 n 越大，其图形在 0 附近越平坦. 然而，还有更平坦的极端情形，事实上，我们可以构造出在某点其任意阶导数都为零的非常值函数！下面是个经典例子.

例 7.2 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 证明 $f^{(n)}=0$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$.



$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{y:=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim_{y\to\infty} ye^{-y^2}=0$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$，则

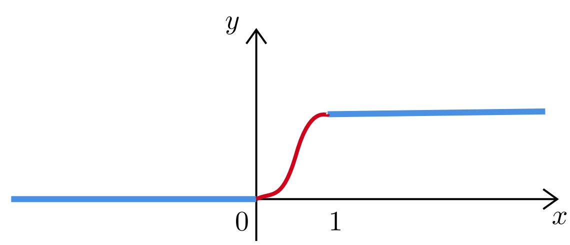
$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

当 $x \neq 0$ 时，$f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$，然后按定义可计算出

$$f'''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{4x^4 - 6x^6}{x^7} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

一般地，不难归纳证得 $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$，其中 $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的 n 次多项式，进而可归纳证明 $f^{(n)}(0) = 0$. $\square$

注记 7.5 上例在实践中也有重要作用，比如可利用它将函数“焊接”成为光滑函数（*smooth function*），即无穷次可微的函数. 比如，给出两个常值函数：$u(x) \equiv 0,\ \forall x \in (-\infty, 0]$; $v(x) \equiv 1\ \forall x \in [1, +\infty)$. 试问如何将它们延拓为 $(-\infty, +\infty)$ 上的光滑函数，且使其值域为 $[0, 1]$



事实上，记 $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ 它是光滑函数，构造 $f(x) := \dfrac{g(x)}{g(x) + g(1-x)}$. 它即满足我们需求的光滑函数.

定理 *7.2* 给出了利用导数来判定函数单调性的判则，为全备起见，我们尚需探讨用导数来判定函数**严格**单调的判则.

定理 7.2′ 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加（减少）当且仅当 $\forall x \in (a,b)$，有 $f'(x) \ge 0\,(\le 0)$，且在 (a,b) 的任何子区间上 $f'(x)$ 不恒等于零.

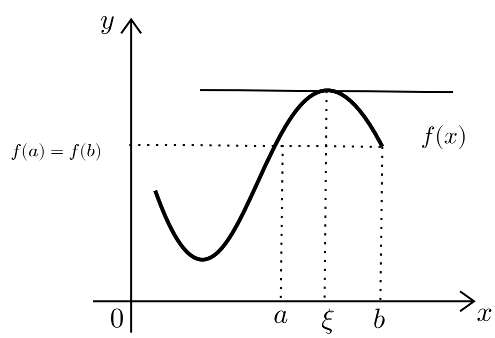
证明： 充分性. 不妨设在 (a,b) 上有 $f'(x) \ge 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，即对 $\forall x, x_1, x_2 \in [a,b]$，$x_1 < x < x_2$，有 $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$. 如 f 不是严格单调的，不妨假设 $f(x_1) = f(x_2)$，则上条件表明 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上是常数，从而 f' 在 (x_1, x_2) 上恒为零，与前提矛盾了，故 f 是严格单调的.

必要性. 首先 $f'(x) \ge 0, \forall x \in (a,b)$. 如在某区间 $I \subseteq (a,b)$ 上 $f'(x) \equiv 0$，则在其上函数为常数，这与严格单调的前提矛盾了. $\square$

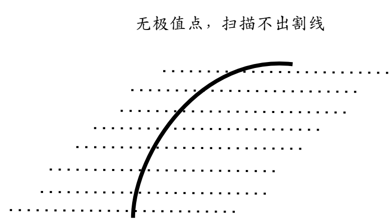
注记 7.6 上定理中证明中用到了结论：如在一区间 I 上 $f' \equiv 0$，则 f 在 I 上为常值函数. 该结论是下节“拉格朗日中值定理”的直接推论. 虽然这个结论在直观上似乎很显明（如之前的零点存在定理等），但如不用中值定理，其证明相当不易.

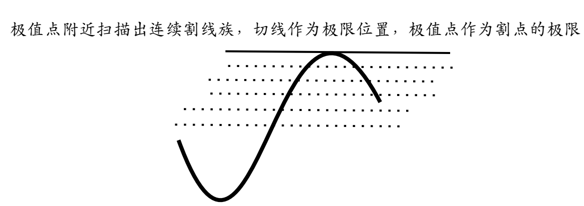
8 中值定理，导函数的介质性与导数极限定理

费马定理表明：对可导函数，其极值点就是函数的驻点，即导数为零的点. 这是关于函数的一个局部（*local*）性质，为将其全局化（*globalization*），我们变换视角，不只盯着极值点看，而是从它近旁观察起，看极值点究竟是如何产生的?



分析： 驻点的特征是驻点处有水平切线，而（局部）切线是其近旁之割线（全局特征）的极限位置. 所以，如一点附近不存在水平割线，那就不存在水平切线作为其极限位置. 受此启发，我们可用水平直线族“扫描”曲线，如“扫描线”与曲线在某些点附近交成割线，则预示着它附近有极值点——作为割线两端点的极限点！



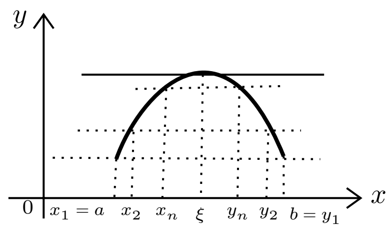


而水平割线的特征是：$\exists a, b,\ a \neq b$，使得 $f(a)=f(b)$. 那么可以预见：$\exists \xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi)=0$. 而在直观上，ξ 是作为连续水平割线族的割点的极限而存在的！由此，不仅可得下定理，且知搜寻极值点的一种算法.

定理 8.1（罗尔（*Rolle*）定理）设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，即它在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，如 $f(a) = f(b)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

证明:（存在性证明）由闭区间上连续函数的性质，知在 $[a,b]$ 上函数存在最大值 M 和最小值 m. 如 $M = m$，此时 f 在 $[a,b]$ 上取常值，结论显然；如 $M > m$，此时 M 和 m 中至少有一个与 $f(a) = f(b)$ 不相同，不妨设 $M = f(\xi) > f(a) = f(b)$，即 $\xi \in (a,b)$ 是极值点，由费马定理知 $f'(\xi) = 0$. □

证明:（构造性证明）记 $I_1 = [a_1, b_1]$，其中 $a_1 = a$, $b_1 = b$. 记区间的距离函数为 $d([\mu,\kappa]) = \kappa - \mu$，显然当 κ, μ 连续变化时，d 也是连续变化的，且区间长度可连续变为零（如不能，则 $[a,b]$ 内包含不连续点，矛盾）.



所以 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，存在 $I_n = [a_n, b_n] \subseteq I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$，使得

$$f(a_n) = f(b_n), \text{ 且 } d(I_n) < \frac{b-a}{2^n}$$

即我们沿着与水平割线垂直的方向来连续推移它，由此得到闭区间套:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

因 $d(I_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$，据闭区间套定理知，$\exists! \, \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$，即 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 我们证明在 ξ 处，必有 $f'(\xi) = 0$. 注意到下极限显然成立

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = 0$$

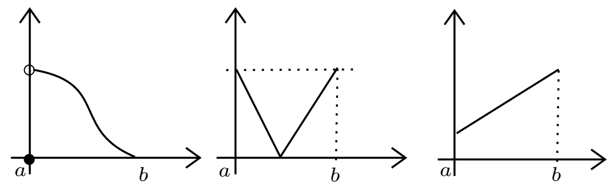
但另一方面，它可写成如下

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi + b_n - \xi) - f(\xi + a_n - \xi)}{b_n - a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[f(\xi) + f'(\xi)(b_n - \xi) + o((b_n - \xi))] - [f(\xi) + f'(\xi)(a_n - \xi) + o((a_n - \xi))]}{b_n - a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi)(b_n - a_n) + o((b_n - \xi)) + o((a_n - \xi))}{b_n - a_n} = f'(\xi) \quad \square$$

注记 8.1 罗尔定理中的三条件：*1.* 闭区间上连续；*2.* 闭区间内可导；*3.* 闭区间端点处函数值相同，对罗尔定理成立是缺一不可的. 见下图中的函数自明.

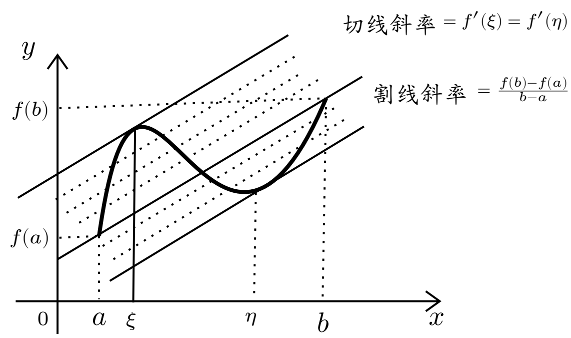


用罗尔定理可证如下闭区间上反函数存在的一个充分条件.

推论 8.1 若 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且在 (a,b) 内，$f'(x) \neq 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单射，从而必存在反函数.

证明: 设 $\exists a \leq x_1 < x_2 \leq b$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 则由 $f(x) \in C[x_1,x_2] \cap D(x_1,x_2)$, 根据罗尔定理知 $\exists \xi \in (x_1,x_2) \subseteq (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$，矛盾. □

罗尔定理中的条件 $f(a) = f(b)$ 稍显特殊，但其背后的直观，即利用趋向于某条切线的割线族去扫描曲线却是一般图景. 据此可将罗尔定理推广为**拉格朗日中值定理**（*Lagrange mean value theorem*）, 它是无穷小分析中最重要的工具之一.



定理 8.2（拉格朗日中值定理）设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Longleftrightarrow \quad f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

注记 8.2 从图形上来看，只需把坐标系旋转 θ，其中 $\theta = \arctan \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 便化归到罗尔定理的情形，所以结论是“肉眼可见”的. 当然，我们要找到化归为罗尔定理的代数方法，从而得到定理的严格证明. 为此，只需从 $f(x)$ 构造出一满足罗尔定理成立条件的函数来. 显然，曲线上的点同连接 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 之割线上对应相同 x 坐标的点的 y 坐标之差就是一个满足需求的函数，由此得下证明：

证明: 构造辅助函数如下

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

则 $F(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $F(a)=F(b)=0$. 故由罗尔定理知 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $F'=0$，即

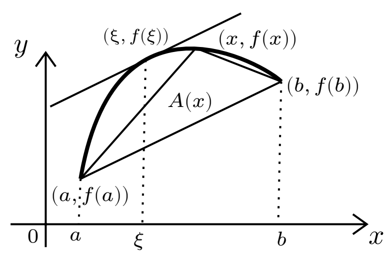
$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \qquad \square$$

类似于罗尔定理的构造性证明，也可通过构造闭区间套来证明，此处不赘述.

注记 8.3 从 $f(x)$ 构造出满足罗尔定理条件的函数的方法不唯一，除证明中的选择外，也可选择曲线上点 $(x,f(x))$ 和端点 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 连线而成三角线的（有向）面积. 记该函数为 $A(x)$，则

$$A(x) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} b-a & x-a \\ f(b)-f(a) & f(x)-f(a) \end{vmatrix}$$

显然，$A(a)=A(b)=0$，由罗尔定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $A'(\xi)=0$，即朗格朗日定理成立. $\square$



推论 8.2 设在区间 I 上有 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 是 I 上的常数值函数.

证明: 用反证法，假设 $\exists x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$，对区间 $[x_1,x_2]$ 应用朗格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$. 但 $f'(\xi)=0$，故 $f(x_1)=f(x_2)$. 矛盾. $\square$

由上推论直接可证下面的**不定积分基本定理**（含义后自明）

定理 8.3 如在区间 I 上，有 $f'(x)\equiv g'(x)$，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 上只差一个常数，即 $\exists$ 常数 C，使得 $f(x)=g(x)+C$.

证明: 由于 $f'(x)\equiv g'(x)$，故 $(f(x)-g(x))'\equiv 0$，根据推论 *8.2* 知在 I 上有 $f(x)-g(x)\equiv C$ （常数） $\square$

有限增量公式：变换一种书写方式，让朗格朗日中值定理成为强有力的分析工具. 首先回忆线性近似公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o((x-x_0))$$

或将 $o((x-x_0))$ 写成 $o((x-x_0))=\alpha(x-x_0)$，其中 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量. 故得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0)$$

但正如之前所说，上面的近似公式在实际应用中常有不便之处，我们结合朗格朗日中值定理对其做优化改进.

首先注意到 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 对 $a>b$ 也是成立的，故在 x_0 附近，

$$\boxed{\text{存在介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间的数 } \xi\text{，使得 } f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)}$$

更进一步，不妨设 $x_0<x$，可找到 $\theta\in(0,1)$，使得 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$（取 $\theta=\frac{\xi-x_0}{x-x_0}$ 即可），从而有

$$\exists\,\theta\in(0,1),\text{ 使得 } f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)$$

当 $x_0>x$ 时，同样开取 $\theta=\frac{\xi-x_0}{x-x_0}\in(0,1)$，则可使 $f(x)$ 写成上面形式. 从而不论 x 是否大于 x_0，上式都成立. 换言之，对 x_0 处的一个增量 $\Delta x=x-x_0$（可正可负）

$$\boxed{\exists\,\theta\in(0,1),\text{ 使得 } \Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'\underbrace{(x_0+\theta\Delta x)}_{\xi}\Delta x}$$

这便是函数的**有限增量公式**，它给出了函数增量 Δf 在 x_0 附近的一个易把控的估计. 有限增量公式可看成是零阶近似的误差估计，即用 $f(x_0)$ 近似 $f(x_0+\Delta x)$ 时的误差由 $|\Delta f|=|f'(\xi)||\Delta x|$ 控制。

朗格朗日中值定理虽保证了 ξ 的存在，但一般不能告诉我们 ξ 的具体值. 但在某些例子中，ξ 是可以被精确求出的.

例 8.1 设 $f(x)=x^3$，$b\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，确定 $\xi\in(-1,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(-1)}{b-(-1)}$.

解：由于 $f'(\xi)=3\xi^3$. 故问题相当于求解方程：$3\xi^2=b^2-b+1$.

$$b\in\left(\frac{1}{2},1\right)\quad\Longrightarrow\quad\xi=\pm\sqrt{\frac{b^2-b+1}{3}}\in(-1,b)$$

例 8.2 根据三角函数的性质，下面等式显然成立

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1]$$

我们用拉格朗日中值定理来证明它. 记上式坐边的函数为 $f(x)$，对它求导，得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

故由定理 *8.3* 知 $f(x) \equiv C$（其中 C 为常数）. 为确定 C 的值，令 $x = 0$，此时

$$f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\pi}{2}$$

常也用朗格朗日中值定理证明不等式，比如

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, \quad x > 0$$

证明： 两边取对数，不难发现不等式等价于

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln x < \frac{1}{x}$$

考虑 $f(x) = \ln x$，在 $[x, x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理，知 $\exists \xi \in (x, x+1)$，使得

$$\ln(1+x) - \ln x = f'(\xi)(x + 1 - x) = \frac{1}{\xi}$$

但由于 $0 < x < \xi < x + 1$，故 $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$，从而不等式得证. $\square$

启发性说明： 如函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ ，$t \in I$. 设点 $(a,\, y(a))$ 对应于参数 t_a；点 $(b,\, y(b))$ 对应于参数 t_b. 则在 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理，知 $\exists \xi \in [a, b]$，使得 $y(b) - y(a) = y'(\xi)(b - a)$. 设点 $(\xi,\, f(\xi))$ 对应的参数为 t_ξ，即有

$$f(t_b) - f(t_a) = \frac{f'(t_\xi)}{g'(t_\xi)}\left(g(t_b) - g(t_a)\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(t_b) - f(t_a)}{g(t_b) - g(t_a)} = \frac{f'(t_\xi)}{g'(t_\xi)}$$

特别地，函数 $y = f(x)$ 的“平凡”参数化 $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ $t \in I$ 给出拉格朗日中值定理. 以上讨论导致**柯西中值定理**.

定理 8.4 (柯西（*Cauchy*）中值定理) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，并在 (a,b) 上可微，且 $\forall\, x \in (a,\, b)$，都成立 $g'(x) \neq 0$，则 $\exists\, \xi \in (a,\, b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

将上面启发性说明中的想法严格化，即本质上将 $f(x), g(x)$ 看成是一个函数关系的参数化，$y=g(t),\, x=f(t) \;\Rightarrow\; y=g(f^{-1}(x))$. 便有以下证明:

证明: 由于 $g(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $g'(x)\neq 0$，则知 $g'(x)$ 在 (a,b) 上恒正或恒负，故 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调. 下面不妨设其严格单调增加. 记 $g(a)=\alpha,\, g(b)=\beta$，则 $g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在反函数 $g^{-1}(y)\in C[\alpha,\beta]\cap D(\alpha,\beta)$，且 $\left(g^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{g'(x)}$，所以 $g^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也单调增加. 考虑函数 $F(y)=f(g^{-1}(y))$，它在 $[\alpha,\beta]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是 $\exists\, \eta\in(\alpha,\,\beta)$，使得

$$F'(\eta)=\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f(g^{-1}(\beta))-f(g^{-1}(\alpha))}{\beta-\alpha}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\text{而}\quad F'(\eta)=\left(f(g^{-1}(y))\right)'\big|_{y=\eta}=\left(f'(g^{-1}(y))\cdot\left(g^{-1}(y)\right)'\right)\big|_{y=\eta}$$
$$=\left(f'(x)\cdot\frac{1}{g'(x)}\right)\Big|_{x=g^{-1}(\eta)=:\xi}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\qquad\square$$

注记 8.4 我们也可以尝试由 f, g 构造出满足罗尔定理的条件来证明柯西中值定理. 类似于用构造辅助函数证明拉格朗日终止定理，我们也可选择函数图像上点的纵坐标与过两端点割线上相同横坐标点的纵坐标之差来做辅助函数. 即令

$$G(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)$$

则显然 $G(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $G(a)=G(b)=0$，故由罗尔定理，知 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $G'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0\quad\Longrightarrow\quad\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

也可将注记 *8.3* 中的构造思路迁移过来，即用联结两端点和曲线上点的三角形的面积为辅助函数，然后利用罗尔定理. 在此处应构造函数

$$A(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(x)-f(a)\\ g(b)-g(a) & g(x)-g(a)\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} g(x) & f(x) & 1\\ g(a) & f(a) & 1\\ g(b) & f(b) & 1\end{vmatrix}$$

例 8.3（罗尔定理的拓广）设 $f(x) \in C[a,+\infty) \cap D(a,+\infty)$（其中 a 为常数）. 若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$，则 $\exists \xi \in (a, +\infty)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

证明: 若存在 $x \in [a,+\infty)$, 使得 $f(x) = f(a)$, 则结论显然成立. 如果 $\forall\, x \in [a,+\infty)$, $f(x) \neq f(a)$, 不妨设 $\exists\, c > a$, 使得 $f(c) > f(a)$. 取 $\epsilon = \frac{f(c)-f(a)}{2} > 0$, 则由 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$ 知 $\exists X > c$，使得当 $x > X$ 时，成立 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. 特别地，对 $x = X + 1$，有

$$f(X+1) < f(a) + \epsilon = \frac{f(a)+f(c)}{2} < f(c)$$

从而 $f(x) \in C[a,\, X+1] \cap D(a,\, X+1)$，且 $\exists\, c \in (a,\, X+1)$，使得

$$f(c) > f(a),\ f(c) > f(X+1)$$

即 $f(x)$ 在 $(a,\, X+1) \subseteq (a,\, +\infty)$ 内某点 ξ 取最大值，由费马定理，$f'(\xi) = 0$. □

例 8.4 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导、有界，且 $f(1) = 0$. 证明：存在 $\xi \in (1,\, +\infty)$，使得 $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$.

分析: 即证 $\exists \xi \in (1,+\infty)$，使得 $\frac{f(\xi)}{\xi} = f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'\Big|_{x=\xi} = 0$

证明: 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 它在 $[1,+\infty)$ 上是可导的, 由于 $F(1) = \frac{f(1)}{1} = 0$, 且因 $f(x)$ 有界，故 $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0 = F(1)$. 故有例 *8.3* 中罗尔定理的拓广，知 $\exists \xi \in (a,\, +\infty)$，使得 $F'(\xi) = 0$，即 $\exists \xi \in (1,\, +\infty)$，使得 $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$. □

例 8.5（无穷远处无界的一个充分条件）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = A > 0$，则必有 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

证明: 根据极限的保号性，知 $\exists X > a$，使得当 $x > X$ 时，有 $f'(x) > \frac{A}{2} > 0$. 故对 $\forall\, x \in [X+1,\, +\infty)$，由拉格朗日中值定理知，$\exists \xi \in (X+1, x)$，使得

$$f(x) = f(X+1) + f'(\xi)(x - X - 1t) > f(X+1) + \frac{A}{2}(x - X - 1)$$

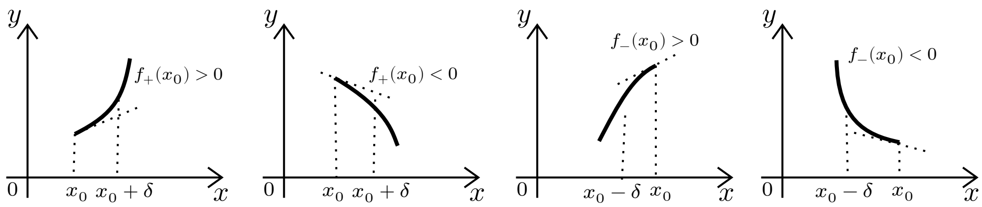
$$但\ \lim_{x \to +\infty}\left(f(X+1) + \frac{A}{2}(x - X - 1)\right) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \square$$

我们知道当 $f(x) \in C[a,b]$ 时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有介值性. 注意，这里 $f(x)$ 在**闭区间上的连续性**都必要的！但下面的定理表明，对于一个函数的导函数 $f'(x)$，则不论其连续与否，它都具有介值性！

定理 8.5（达布（*Darboux*）定理））设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a) < f'_-(b)$，则 $\forall c \in (f'_+(a),\, f'_-(b))$，都 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = c$.

先证一个引理.

引理 8.1 若 $f'_+(x_0) > (<)\, 0$，则 $\exists\, \delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，成立 $f(x) > (<)\, f(x_0)$；同理，若 $f'_-(x_0) > (<)\, 0$，则 $\exists\, \delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，成立 $f(x) < (>)\, f(x_0)$

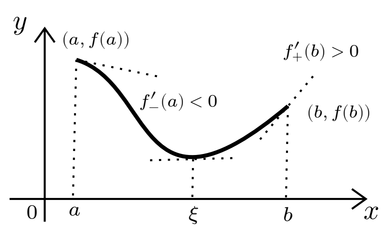


证明： 由右导数的定义 $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$，以及极限的局部保号性，知 $\exists\, \delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，成立

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(x_0)$$

其余情形可类似获证. □

（定理 8.5）的证明： 先证明 $f'_+(a) < 0$, $f'_-(b) > 0$ 的情形.



由于 $f'_-(a) < 0$，$f'_+(b) > 0$，根据上引理，知 $\exists\, \delta > 0$，使得

$$f(a + \delta) < f(a); \quad f(b - \delta) < f(b)$$

故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值点 ξ 在 $[a, b]$ 的内部，即在 (a, b) 之中. 由费马定理知 $f'(\xi) = 0$. 下证一般情形：$\forall\, c \in (f'_+(a),\, f'_-(b))$，令 $F(x) = f(x) - cx$. 则 $F(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$，且 $F'_+(a) = f'_+(a) - c < 0$，且 $F-'(b) = f'_-(b) > 0$，则问题化归为上情形. □

既然一个函数的导函数具有更强的介值性, 而一般函数的介值性须更强条件的保证（即闭区间上连续），则不难想见：不是所有的函数都能写成某函数的导函数. 有了不定积分的概念之后，这表现为，不是所有的函数有不定积分.

例 8.6 可证明不存在可导函数 $f(x)$，使得 $f'(x)=sgn(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

证明: 如存在 $f(x)$，使得 $f'(x)=sgn\,(x)$. 特别地，有 $f'(-1)=-1$, $f'(1)=1$，则由达布定理知，$\exists\xi\in(-1,1)$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{2}$，但这是不可能的. $\square$

注记 8.5 事实上，对于一些光滑的好函数，是不能将它表示为某初等函数的导数的，即后面的不具有初等不定积分的函数类. 这样的函数有很多，比如

$$\sqrt{1-x^4},\ \frac{1}{\ln x},\ e^{-x^2},\ \sin(x^2)(\cos(x^2)),\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{e^{-x}}{x},\ \ln(\ln x)$$

在第三节例 *3.4'* 中，我们讨论了 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的可导性. 由导数的定义计算出 $f'(0)=0$. 而另一方面

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

但 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 不存在，故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续（第二类间断点）.

由此可知，一般是不能用 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)$ 来计算 $f'(x_0)$ 的. 当然，上面的讨论也说明如果导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，则成立 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x_0)=f'(x_0)$. 但我们要继续问: $f'(x)$ 连续这个条件能否弱化？事实是可以的，我们有如下**导数极限定理**.

定理 8.6（导数极限定理）设 $\delta>0$，函数 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ $((x_0-\delta,x_0])$ 上连续，且在 $(x_0,x_0+\delta)$ $((x_0-\delta,x_0))$ 内可导. 如 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=A\right)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处有右（左）导数，且 $f'_+(x_0)=A$ $(f'_-(x_0)=A)$.

证明: $\forall\,x\in(x_0,x_0+\delta)$，由拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in(x_0,x)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\Longrightarrow\quad f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi)\xlongequal{\lim\limits_{x\to x_0^+}\xi=x_0}A\quad\square$$

推论 8.3 设 $\delta>0$,函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内连续,在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)=A$.

例 8.7 求 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ 的导函数.

解: 当 $x > 0$ 时，$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$；当 $x < 0$ 时，$f'(x) = 1$. 只需确定 $f'(1)$. 注意到

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1; \quad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1$$

故 $\lim\limits_{x \to 1} f'(x) = 1$. 又因为 $f'(x)$ 在 0 处本身是连续的，故由上推可知

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = 1$$

综上可得

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

注记 8.6 上面定理及推论中，函数 $f(x)$ 在 x_0 的（单侧）连续性条件是必须的，因为可导蕴含连续，如在某点函数不连续，那考虑它在该点的可导性就没意义了. 考虑

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时，$f'(x) = \cos x$，故 $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 1$；当 $x < 0$ 时，$f'(x) = 1$，从而 $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 1$. 但并不能由此得出 $f'(0) = 1$ 的错误结论. 这是因为，按定义

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x} = +\infty$$

问题当然出在 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是不连续的. 即 $0 = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

推论 8.4 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，则其导函数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 内不存在第一类间断点.

证明: 假设 $x_0 \in (a, b)$ 是 $f'(x)$ 的一个第一类间断点，则 $f'(x)$ 在 x_0 处的左、右极限都存在，根据定理 *8.6* 知，此时 f 在 x_0 处的左、右导数都存在，且

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0); \qquad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0)$$

另一方面，由于 $f(x)$ 在 x_0 点是可导的，故必有 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. 但这表明 $f'(x)$ 在 x_0 点连续，矛盾. 从而知可导函数的间断点必属第二类. □

9 带拉格朗日余项的泰勒公式

泰勒定理 I（*c.f.* 第二节定理 *2.5*）表明：若函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义、n 阶可导，且其导函数 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处连续，则在 x_0 附近，可用如下 n 次多项式 $P_n(x)$ 对 $f(x)$ 在 x_0 附近进行 n 阶近似，即 $f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$ 称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处带皮亚诺余项的 n 级泰勒公式（展开）. 当 $x_0 = 0$ 时，也叫带皮亚诺余项的 n 级马克劳林公式（展开）.

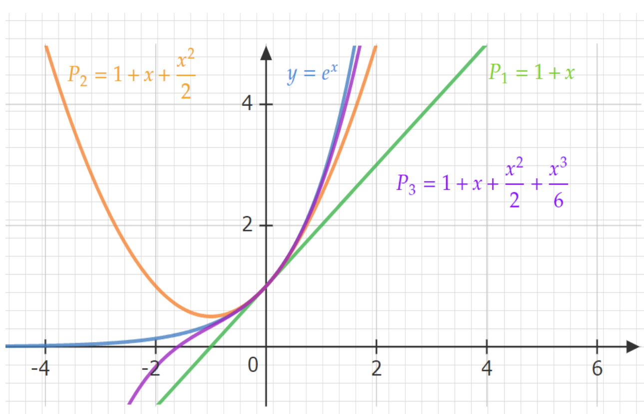
利用洛必达法则，我们证明了（*c.f.* 第四节，注记 *4.3*）逼近误差 $R_n(x) := f(x) - P_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \xlongequal{R_n(x_0)=0} \lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \cdots \xlongequal{R_n^{(n-2)}(x_0)=0} \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}$$

$$\xlongequal{R_n^{(n-1)}(x_0)=0} \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} \xlongequal{\text{按极限定义}} \frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!} \xlongequal{R_n^{(n)}=0} 0$$

也就是说，$P_n(x)$ 和 $f(x)$ 在 x_0 处的 $\leq n$ 阶导数（零阶导数理解为函数值）都是重合的，从这个意义上，我们也称 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 附近的n 阶近似.

下面是例示. 我们看到，对 $y = e^x$，其在 0 处的三阶展开 P_3 已是非常好的逼近了.



一阶泰勒展开 $P_1(x) = L_{f,x_0}(x)$ 即线性近似，如同拉格朗日定理可转化零阶近似的误差项 $o((x-x_0))$，可利用中值定理对 n-级泰勒展开 $P_n(x)$ 的误差项 $o((x-x_0)^n)$

进行转化，从而有下面的**带拉格朗日余项的泰勒公式（展开）**.

泰勒定理 II（带拉格朗日余项的泰勒公式）设函数 $f(x)$ 在包含点 x_0 的开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x\in(a,b)$，存在介于 x_0 与 x 之间的 ξ，使得

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

显然，当 $n=0$ 时，上定理即为拉格朗日中值定理. 当 $x_0=0$ 时，对于的泰勒公式也称为带拉格朗日余项的马克劳林公式. 为凸显思路，下面我们只处理 $n=1,2$ 时的情形，一般 n 的情形由是自明.

证明：当 $n=1$ 时，用 $P_1(x)=L_{f,x_0}(x)$（线性）近似 $f(x)$ 产生的误差（余项）$R_1(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$ 满足条件：$R_1(x_0)=R_1'(x_0)=0$. 则有

$$\frac{R_1(x)}{(x-x_0)^2}=\frac{R_1(x)-R_1(x_0)}{(x-x_0)^2-(x_0-x_0)^2}\xlongequal[\exists\xi_1,\text{介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}]{\text{柯西中值定理}}\frac{R_1'(\xi_1)}{2(\xi_1-x_0)}$$

$$=\frac{R_1'(\xi_1)-R_1'(x_0)}{2(\xi_1-x_0)-2(x_0-x_0)}\xlongequal[\exists\xi,\text{介于 }x_0\text{ 与 }\xi_1\text{ 之间}]{\text{柯西中值定理}}\frac{R_1''(\xi)}{2}=\frac{f''(\xi)}{2}$$

$$\text{即 }\frac{f(x)-P_1(x)}{(x-x_0)^2}=\frac{f''(\xi)}{2}\quad\Longrightarrow$$

$$f(x)=P_1(x)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

当 $n=2$ 时，用 $P_2(x)$ 近似 $f(x)$ 产生的误差（余项）$R_2(x)$ 满足条件

$$R_2(x_0)=R_2'(x_0)=R_2''(x_0)=0$$

$$\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^3}=\frac{R_2(x)-R_2(x_0)}{(x-x_0)^3-(x_0-x_0)^3}\xlongequal[\exists\xi_1,\text{介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}]{\text{柯西中值定理}}\frac{R_2'(\xi_1)}{3(\xi_1-x_0)^2}$$

$$=\frac{R_2'(\xi_1)-R_2'(x_0)}{3(\xi_1-x_0)^2-3(x_0-x_0)^2}\xlongequal[\exists\xi_2,\text{介于 }x_0\text{ 与 }\xi_1\text{ 之间}]{\text{柯西中值定理}}\frac{R_2''(\xi_2)}{3\cdot 2(\xi_2-x_0)}=$$

$$\frac{R_2''(\xi_2)-R_2''(x_0)}{3\cdot 2(\xi_1-x_0)-3\cdot 2(x_0-x_0)}\xlongequal[\exists\xi,\text{介于 }x_0\text{ 与 }\xi_2\text{ 之间}]{\text{柯西中值定理}}\frac{R_2'''(\xi)}{3!}=\frac{f'''(\xi)}{3!}$$

$$\text{即 }\frac{f(x)-P_2(x)}{(x-x_0)^3}=\frac{f'''(\xi)}{3!}\quad\Longrightarrow$$

$$f(x)=P_2(x)+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

一般情形请读者的自行归纳证明. □

令 $\theta = \dfrac{\xi - x_0}{x - x_0}$，由于 ξ 介于 x_0 和 x 之间，则知 $\theta \in (0,1)$，且 ξ 可籍 θ 表达为

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

故带拉格朗日余项的泰勒公式也可表达为

$$\boxed{f(x) = P_n(x) \quad + \quad \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}$$

如 $\exists\, M > 0$，使得 $\forall\, n \in \mathbb{N}_+$，成立 $|f^{(n)}(x)| \leq M$，那么

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - P_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

即当所有阶导数都有界时，$P_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的误差当 $n \to \infty$ 时趋于零. 事实上，可证明：$f(x)$ 在 x_0 点的泰勒多项式 $P_n(x)$ 是所有 n-次多项式中与 $f(x)$ 在该点“最接近”的. 即对和 $P_n(x)$ 不相等的每一个次数不超过 n 的多项式 $p(x)$，都存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 是，成立 $|f(x) - p_n(x)| < |f(x) - p(x)|$.

定理 9.1（误差上界估计）设 $f(x)$ 在包含点 x_0 和 x 的开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数. 如 $\exists M > 0$，使得对 x_0 和 x 之间的 t，都有 $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$，则对用 n 阶泰勒多项式 $P_n(x)$ 在 x_0 处近似 $f(x)$ 所产生的误差项 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 有如下估计

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}}$$

证明： 显然. □

例 9.1 如要估算 e 的值，我们利用 e^x 的马克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0,1)$$

令 $x = 1$，则 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$，其误差由 $\left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}\right| = \frac{e^\theta}{(n+1)!}$ 控制. 由于

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

可知

$$\text{误差} = \left|e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| = \left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}\right| < \frac{3}{(n+1)!}$$

特别地，当 $n = 3$ 时，知误差 $< \frac{3}{4!} = \frac{1}{8} = 0.125$，差强人可. 如需误差 $< 10^{-6}$，即需

$$\text{误差} = \left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}\right| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

则可从中解出 $n = 9$ 已足够，而此时

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718281$$

在实用中已经很好了.

注记 9.1 不难看出，对任意 x，e^x 的马克劳林公式的余项 $\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. 也就是说

$$\lim_{n\to\infty}\left[e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right] = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

即得公式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

此即 e^x 的无穷和（展开）表示，或无穷级数（*infinite series*）表示. 类似地，我们可得 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的无穷级数表示

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

然后我们在 e^x 的无穷展开中做替换 $x \to ix$，其中 $i = \sqrt{-1}$. 并注意到 $i^2 = -1$，$i^3 = -i$，$i^4 = 1$，如次循环，则有

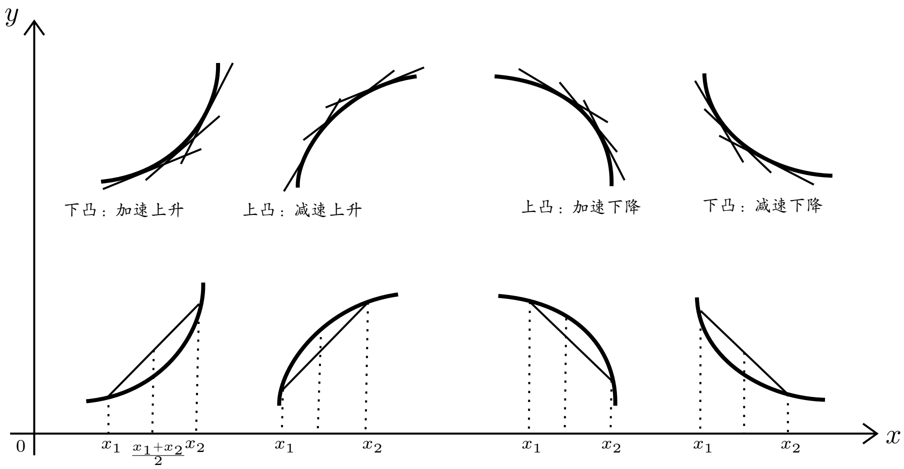
$$e^{ix} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)}_{\sin x}$$

从而得到著名的**欧拉公式：** $\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$

10 函数的凸性与拐点

函数在一点附近的形态大体可分为上升和下降两种态势，但细看，每种态势又可细分为情形："加速上升（下降）" 抑或 "减速上升（下降）".



从上图可看出:

- 加速上升和减速下降的图像特征：1. 切线斜率增加. 2. 联结任意两点的"弦"位于曲线之上；
- 减速上升和加速下降的图像特征：1. 切线斜率减少. 2. 联结任意两点的"弦"位于曲线之下.

某区间 I 上减速上升或加速下降的函数称为是上凸的；加速上升或减速下降的函数称为是下凸的. 可用弦和曲线关系的位置关系给上凸、下凸赋以严格的数学意义.

定义 10.1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，若 $\forall x_1, x_2 \in I$ 以及 $\forall \alpha \in (0,1)$，都成立

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

则称 f 在区间 I 上是下凸的. 若上面不等式严格成立（即将 " $\leq$ " 改为 " $<$ "$(x_1 \neq x_2)$ ），则称 f 在区间 I 上是严格下凸的；又若 $\forall x_1, x_2 \in I$ 以及 $\forall \alpha \in (0,1)$，都成立

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

则称 f 在区间 I 上是上凸的. 若上面不等式严格成立（即将 " $\geq$ " 改为 " $>$ "$(x_1 \neq x_2)$ ），则称 f 在区间 I 上是严格上凸的.

注记 10.1 特别地，当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时，有

$$\text{下凸：} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}; \quad \text{上凸：} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

一般地，$\forall \alpha \in (0,1)$，$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ 是 x_1, x_2 之间的所有点，而 $\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$ 是连接 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 的弦上所有点的纵坐标. 则下凸表示：用垂直于 x 轴的直线扫描曲线，则直线与弦线交点的纵坐标不小于直线与曲线交点的纵坐标，即曲线在弦线之下；同理，上凸表示：用垂直于 x 轴的直线扫描曲线，则直线与弦线交点的纵坐标不大于直线与曲线交点的纵坐标，即曲线在弦线之上.

定义 *10.1* 对于凸性的刻画虽然直观，但用来做判别往往是不适合的，需找到凸性的等价刻画，而这只需将上升、下降的加速、减速特征用精确的数学语言表达出来.

定理 10.1（凸性的第一判别法）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可导, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内是上凸（下凸）的充分必要条件是 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内单调减少（增加）. 严格上（下）凸对应 $f'(x)$ 的严格减少（增加）.

证明： 充分性: 设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内单调增加，则 $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，$x_1 < x_2$，以及 $\forall \alpha \in (0,1)$. 记 $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in (x_1, x_2)$，则为证明

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

$$\text{只需证明} \quad \alpha\left(f(x_0) - f(x_1)\right) + (1-\alpha)\left(f(x_0) - f(x_2)\right) \le 0$$

为此在区间 $[x_1, x_0]$ 和 $[x_0, x_2]$ 上对函数 $f(x)$ 用拉格朗日定理，得

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_0 - x_1) = f'(\xi_1)(1-\alpha)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_0) - f(x_2) = f'(\xi_2)(x_0 - x_2) = f'(\xi_2)(-\alpha)(x_2 - x_1)$$

其中 $\xi_1 \in (x_1, x_0)$，$\xi_2 \in (x_0, x_2)$. 由于 $\xi_2 > \xi_1$，因此有

$$\alpha\left(f(x_0 - f(x_1))\right) + (1-\alpha)(f(x_0) - f(x_2)) = \alpha(1-\alpha)(x_2 - x_1)(f'(\xi_1) - f'(\xi_2)) \le 0$$

故函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内下凸，严格下凸及上凸情形同理可证.

注记 10.2 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可微，则 $f'(x)$ 单调增加等价于 $f''(x) \ge 0$. 在 $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ 处将函数 $f(x)$ 二阶泰勒展开，得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \quad \text{其中 } \xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 和 } x \text{ 之间}$$

特别地，分别令 $x = x_i, i = 1, 2$，知 $\exists \xi_1$，ξ_2，使得

$$f(x_i) = f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0) + \frac{f''(\xi_i)}{2!}(x_i - x_0)^2 \quad \text{其中 } \xi_i \text{ 介于 } x_0 \text{ 和 } x_i \text{ 之间}$$

由此可知 $\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) =$

$$= \alpha \left[f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1 - x_0)^2 \right] +$$

$$+(1-\alpha) \left[f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2 - x_0)^2 \right]$$

$$= f(x_0) + \alpha f'(x_0)(x_1 - x_0) + (1-\alpha) f'(x_0)(x_2 - x_0) +$$

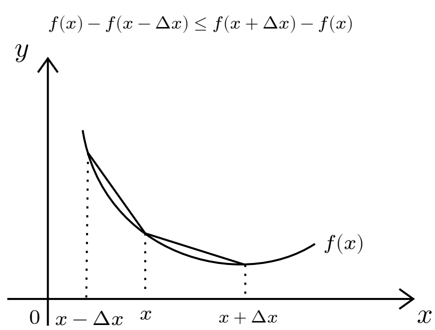
$$+ \underbrace{\frac{\alpha f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2}{2!}}_{=:\mu_1 \geq 0} + \underbrace{\frac{(1-\alpha) f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2}{2!}}_{=:\mu_2} \geq 0$$

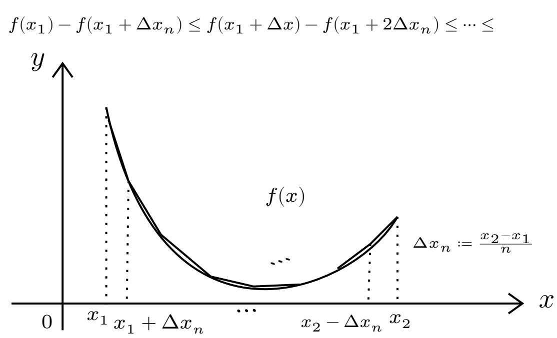
$$= f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) - (\alpha f'(x_0) + (1-\alpha) f'(x_0))x_0}_{\equiv 0} + \mu_1 + \mu_2$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\mu_1 + \mu_2}_{\geq 0} \geq f(x_0) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \qquad \square$$

必要性: 由于 $f(x)$ 在 (a, b) 内下凸, 故由定义 *10.1* 知, $\forall x \in (a, b)$ 及 $\Delta x > 0$, 若 $x + \Delta x$ 和 $x - \Delta x$ 都属于 (a, b), 则有

$$f(x + \Delta x) - f(x) \geq f(x) - f(x - \Delta x)$$





$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$，不妨设 $x_1 < x_2$，令 $\Delta x_n = \frac{x_2 - x_1}{n}$，反复利用上式，可得

$$f(x_2) - f(x_2 - \Delta x_n) \ \geq \ f(x_2 - \Delta x_n) - f(x_2 - 2\Delta x_n)$$

$$\geq \ f(x_2 - 2\Delta x_n) - f(x_2 - 3\Delta x_n) \ \geq \ \cdots$$

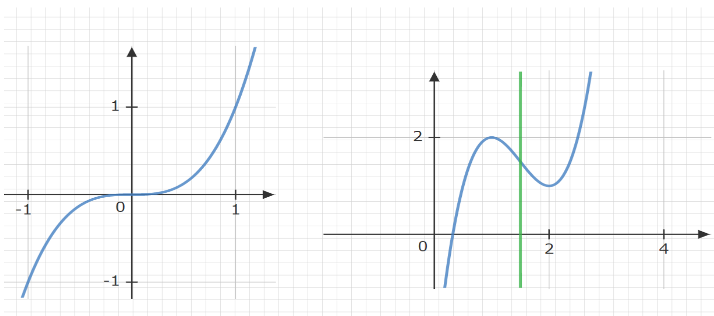
$$\cdots \geq f(x_2-(n-1)\Delta x_n)-f(x_2-n\Delta x_n)=f(x_1+\Delta x_n)-f(x_1)$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{f(x_2+(-\Delta x_n))-f(x_2)}{(-\Delta x_n)} \geq \frac{f(x_1+\Delta x_n)-f(x_1)}{\Delta x_n}$$

令 $n \to \infty$（$\Delta x_n \to 0$），则上不等式变为 $f'(x_2) \geq f'(x_1)$，即 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单调增加. □

定理 10.2（凸性的第二判别法）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内下（上）凸当且仅当 $f''(x) > (<) 0$.

证明： $f'(x)$ 单调增加（减少）当且仅当 $f''(x) > 0 \, (< 0)$. 然后由定理 *10.1* 即得结论. □

例 10.1 考虑 $y = x^3$，则由于 $y'' = 6x$. 故由上定理得，当 $x > 0$ 时 $y'' > 0$，此时函数下凸；当 $x < 0$ 时 $y'' < 0$，此时函数上凸. 注意在点 $x = 0$ 处，$y'' = 0$，而 $(0,0)$ 是下凸与上凸的分界点，称为是曲线的*拐点*，$x = 0$ 称为是函数的*拐点*.



定义 10.2 称曲线 $y = f(x)$ 上的点 $(x_0, f(x_0))$ 的*拐点*，如果在该点两侧近旁曲线的凸性不同.

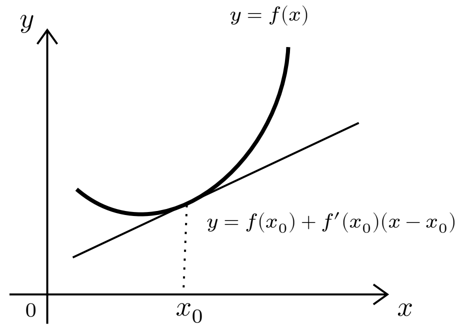
函数的拐点位于二阶导数为零或二阶导数不存在的点之中. 拐点标志着函数增长率发生了根本的变化，即函数值改变的“加速度”（二阶导数）的符号发生了改变.

例 10.2 对函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$，有 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$；$f''(x) = 12x - 18 = 6(2x-3)$. 由此解得拐点的横坐标为 $x = \frac{3}{2}$.

例 10.3 设 f 是区间 I 上的可微下凸函数，则过点 $(x_0, f(x_0))\,(x_0 \in I)$ 的切线一定在曲线 $y = f(x)$ 的下方，即

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \forall x \in I$$

若 f 严格下凸，则上不等式成立等号当且仅当 $x=x_0$.



证明： 由拉格朗日定理，知 $\exists\xi\in(x_0,x)$，使得 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$，故

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\left(f'(\xi)-f'(x_0)\right)(x-x_0)\geq 0$$

$f(x)$ 严格下凸时，$f'(\xi)=f'(x_0)$ 当且仅当 $\xi=x_0$ □

利用凸性可证明不等式.

例 10.4 证明不等式

$$a\ln a+b\ln b>(a+b)\left(\ln(a+b)-\ln 2\right),\quad \forall a,b>0$$

分析： 原不等式等价于

$$\frac{a}{a+b}\ln a+\frac{b}{a+b}\ln b>\ln\frac{a+b}{2}$$

但这行不通，不能利用 $\ln x$ 的凸性证明，为此，我们将原不等式写成另一种形式

$$\frac{a\ln a+b\ln b}{2}>\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}$$

证明： 令 $f(x)=x\ln x$，由于 $f'(x)=\ln x+1$，$f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$ $(a>0)$. 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格下凸的，从而 $\forall a,b>0$，且 $\forall\alpha\in(0,1)$，有

$$f(\alpha a+(1-\alpha)b)>\alpha f(a)+(1-\alpha)f(b)$$

令 $\alpha=\frac{1}{2}$，则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{a+b}{2}\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{a\ln a+b\ln b}{2}\quad\square$$

例 10.5 （*Young* 不等式）：设 $x, y > 0$，$p, q > 1$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则有

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \le \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$$

分析： 不等式等价于 $\frac{1}{p} \ln x + \frac{1}{q} \ln y \le \ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right)$. 由于 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，这马上让我们联想到了凸性. 显然，相关函数是 $\ln x$.

证明： 记 $f(x) = \ln x$，由于 $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$，故 $f(x)$ 是上凸函数，则知 $\forall x, y > 0$，且 $\forall \alpha \in (0, 1)$，都成立 $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$. 令 $\alpha = \frac{1}{p}$，则 $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$，上不等式便为

$$\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \ge \frac{\ln x}{p} + \frac{\ln y}{q} \quad \Longleftrightarrow \quad x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \le \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \qquad \square$$

例 10.6（下凸函数的 *Jensen* 不等式）：设 $f(x)$ 在区间 I 上是二阶可微下凸函数，则 $\forall x_1, \cdots, x_n \in I$，与满足条件 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ 的 n 个正数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，成立

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \ge f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)$$

又若 $f(x)$ 严格下凸，则上不等式成立等号的充要条件是 $x_1 = \cdots = x_n$.

证明：(思路见注记 *10.2*) 由于 $f(x)$ 是下凸的二阶可微函数，故 $f''(x) \ge 0$，$\forall x \in I$. 记 $x_0 := \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$，并将 $f(x)$ 展开为（带拉格朗日余项的）二阶泰勒多项式，即 $\exists \xi_i$，使得

$$f(x_i) = f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0) + \frac{f''(\xi_i)}{2!}(x_i - x_0)^2$$

其中 ξ_i 介于 x_0 与 x_i 之间. 则可得 $\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) =$

$$= f(x_0) \ + \ f'(x_0) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)}_{x_0} - f'(x_0) x_0 + \frac{(x_i - x_0)^2}{2!} \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f''(\xi_i)$$

$$= f(x_0) \ + \ \sum_{i=1}^{n} \ \lambda_i f''(\xi_i) \frac{(x_i - x_0)^2}{2!} \ \ge \ f(x_0) \qquad \square$$

11　综合应用

11.1　单调性、极值、凸性的应用与函数作图

利用单调性证明不等式

例 11.1.1 证明若尔当不等式：当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，成立

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

证明： 记 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$，并补充定义 $f(0) = 1$，则函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续，且当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x)$$

由于当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，$x < \tan x$，故此时 $f'(x) < 0$，故 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调减少，从而成立

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(x) < f(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \square$$

例 11.1.2 证明当 $x > 0$ 是，成立不等式

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

证明： 只需证明左边的不等式. 记 $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. 我们需要证明 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时恒大于零，为此考察其导数

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

我们期望 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒正，从而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增加，从而

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} > f(0) = 0$$

为表明我们的“期望”是正确的，即 $f'(x) > 0$ $(\forall x > 0)$，我们考虑其导数

$$f''(x) = -\sin x + x > 0$$

从而 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增加，故 $f'(x) > f'(0) = 0$. $\square$.

利用单调性和极值性解决零点存在问题

例 11.1.3 当 $a>0$ 时，证明方程 $ae^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ 只有一个实根.

证明： 记 $f(x) = ae^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. 对其求导，得 $f'(x) = ae^x - 1 - x$. 继续求导，得 $f''(x) = ae^x - 1$. 当 $x = \ln\frac{1}{a}$ 时 $f''(x) = 0$. 即当 $x < \ln\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)$ 单调减少；当 $x > \ln\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)$ 单调增加. 下面分类讨论：

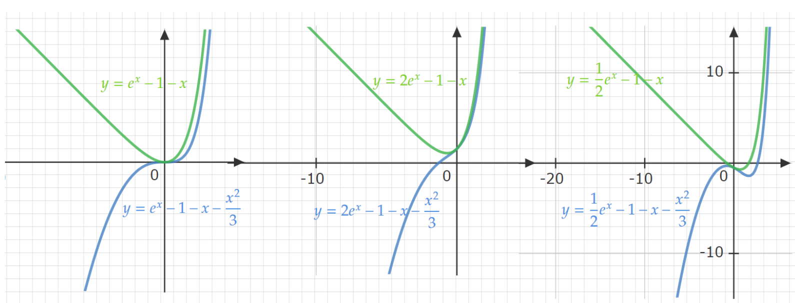
1. $a = 1$ 时，拐点为 $x = 0$，$f'(0) = 0$. 即 $x = 0$ 也是函数 $f(x)$ 的驻点. 我们知道，$f(x)$ 当 $x < 0$ 时单调减少，当 $x > 0$ 时单调增加，故 $x = 0$ 是函数的最大值点，而 $f(0) = 0$. 从而当 $a = 0$ 时，$f(x)$ 只有一个零点，即 $x = 0$.

2. $a > 1$ 时，拐点 $x = \ln\frac{1}{a} < 0$，此时 $f'\left(\ln\frac{1}{a}\right) = -\ln\frac{1}{a} = \ln a > 0$. 由于 $f'\left(\ln\frac{1}{a}\right)$ 是导函数的最小值，而最小值大于 0，故 $f'(x)$ 是恒大于零的，由此可知，$f(x)$ 是单调增加函数. 但显然可见，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$；$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 又由于 $f(x)$ 是连续的，且单调，故其图像必“穿过”x-轴一次，即方程 $f(x) = 0$ 只有一个根.

3. $0 < a < 1$ 时，拐点 $x = \ln\frac{1}{a} > 0$，此时 $f'\left(\ln\frac{1}{a}\right) = -\ln\frac{1}{a} = \ln a < 0$. 由于 $f'(x)$ 从 $+\infty$ 单调减少到 $\ln a < 0$，然后又单调增加到 $f'(+\infty) = +\infty$. 由此可见 $f'(x)$ 有两个零点 x_1, x_2，且有 $x_1 < \ln\frac{1}{a} < x_2$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调增加，在 (x_1, x_2) 上单调减少，在 $(x_2, +\infty)$ 上单调增加. 而

$$f(x_1) = \underbrace{ae^{x_1} - 1 - x_1}_{f'(x_1)=0} - \frac{x_1^2}{2} = -\frac{x_1^2}{2} < 0; \quad f(x_2) = \underbrace{ae^{x_2} - 1 - x_2}_{f'(x_2)=0} - \frac{x_2^2}{2} = -\frac{x_2^2}{2} < 0$$

   故在 $(-\infty, x_2]$ 上 $f(x)$ 恒小于零，但 $f(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调增加，且 $f(+\infty) = +\infty$. 从而 $f(x)$ 的图像在 $(x_2, +\infty)$ 上穿越 x 轴一次，即 $f(x) = 0$ 只有一个根.



例 11.1.4 设 $a > 0$，确定方程 $f(x) = ax - \ln x = 0$ 恰有两个正根的条件.

解: 由于 $f'(x)=a-\frac{1}{x}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a}]$ 上严格单调减少，在 $[\frac{1}{a},+\infty)$ 上严格单调增加. 而

$$f(0^+)=+\infty,\quad f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}x\left(a-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

从而 $f(x)=0$ 有两个正根的条件是 $f\left(\frac{1}{a}\right)=1-\ln\frac{1}{a}<0$，即 $a<\frac{1}{e}$.

例 11.1.5 设函数方程 $f_n(x)=0$ 没有实根，其中

$$f_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

证明: 注意到 $f_1(x)=1+x+\frac{x^2}{2}>0$; $f_2''(x)=f_1(x)>0$, 故 $f_2'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 是单调增加函数，而

$$\lim_{x\to-\infty}f_2'(x)=-\infty;\qquad\lim_{x\to+\infty}f_2'(x)=+\infty$$

即 $f_2'(x)$ 只有一个零点 x_0，且 $f_2(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上单调减少，而在 $[x_0,+\infty)$ 上单调增加，从而 x_0 是 $f_2(x)$ 的**最**小值点，但当 $x=x_0$ 时

$$f_2(x_0)=f_2'(x_0)+\frac{x_0^4}{4!}=\frac{x_0^4}{4!}>0$$

故 $f_2(x)>0$，它不可能有零点. 对 $f_3(x)$，同理 $f_3''(x)=f_2(x)>0$，故 $f_3(x)$ 是严格单调增加的，而 $f_3(x)$ 也是奇次数多项式，故其只有一个零点 x_0. 从而 $f_3(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上单调减少，在 $[x_0,+\infty)$ 上单调增加，即知 x_0 是 $f_3(x)$ 的**最**小值点，但

$$f_3(x_0)=f_3'(x_0)+\frac{x_0^6}{4!}=\frac{x_0^6}{4!}>0$$

一般地情形由此自明，即有结论：$f_n(x)>0$，$\forall n$. 可按数学归纳法严格论证如下. $n=1$ 时显然，设对 $n=k$ 成立，即 $f_k(x)>0$，则对 $n=k+1$，注意到 $f_{k+1}''(x)=f_k(x)>0$. 从而 $f_{k+1}'(x)$ 是单调增加函数，而它是个奇数次多项式，故只有一个零点 x_0. 从而 $f_{k+1}(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上单调减少，在 $[x_0,+\infty)$ 上单调增加，即知 x_0 是 $f_{k+1}(x)$ 的**最**小值点，但

$$f_{k+1}(x_0)=f_{k+1}'(x_0)+\frac{x_0^{2k+2}}{(2k+2)!}=\frac{x_0^{2k+2}}{(2k+2)!}>0$$

故 $f_{k+1}(x)>0$. 从而对任意 n，知有 $f_n(x)>0$. $\square$

极值和最值问题

我们知道，一函数的极大（小）值未必是函数的最大（小）值. 一般地，为求函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大（小）值，我们先求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的所有极大（小）值，然后与边界值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 作比较，选出最大（小）值即可.

例 11.1.6 求函数 $f(x)=x^2(x-1)^3$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值.

解： $f'(x)=2x(x-1)^3+3x^2(x-1)^2=x(x-1)^2(5x-2)$. 令 $f'(x)=0$，求得驻点为 $x=0, x=\frac{2}{5}, x=1$. 计算得

$$f(0)=f(1)=0;\quad f\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{108}{3125};\quad f(-1)=-8;\quad f(2)=4$$

由此可知 $\displaystyle\max_{x\in[-1,2]} f(x)=f(2)=4;\qquad \min_{x\in[-1,2]} f(x)=f(-1)=-8.$

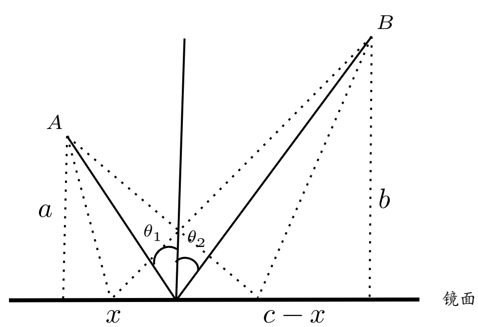
例 11.1.7 证明周长为 $2l$ 的矩形中以正方形的面积为最大.

证明： 即 x 为矩形一边之边长，则另一边之边长为 $l-x$. 那么，矩形的面积为

$$f(x)=x(l-x)\le\left(\frac{x+l-x}{2}\right)^2=\frac{l^2}{4}$$

“ $=$ ” 成立当且仅当 $x=l-x$，即 $x=\frac{l}{2}$. 或 $f'(x)=l-2x=0$，得 $x=\frac{l}{2}$. 且 $f''(x)=-2$. 故 $x=l/2$ 对应极大值点，不难验证，它也是最大值点.

例 11.1.8 一束光从 A 点发射，经过镜面反射，至 B 点，问：光束应沿何路径才能使得光程最短，即历经时间为最短?



光线经过的路程为（记光速 $c=1$，则它也是光程）

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2},\quad 0\le x\le c$$

我们需要求其最小值，求导两次，得

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}};$$

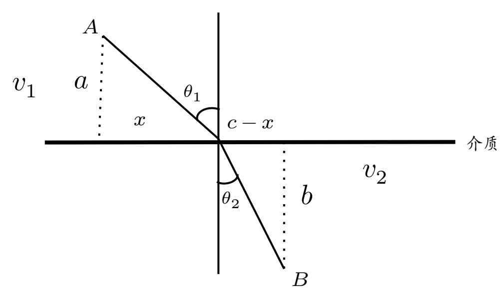
$$f''(x)=\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}+\frac{b^2}{\left(b^2+(c-x)^2\right)^{3/2}}>0$$

所以 $f'(x)=0$ 的驻点必是极小值点，它由下方程决定

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\quad\Longleftrightarrow\quad\sin\theta_1=\sin\theta_2\quad\Longleftrightarrow\quad\theta_1=\theta_2$$

此即光的反射定律. 同理，我们可以证明光的折射定律：设光线在第一种介质中的速率是 v_1，在第二种介质中的速率为 v_2，则从 A 到 B 的最快路径满足如下约束

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$$



证明： 设光的路线由上图所示，则它必是令光程最小的路径（最小作用量原理的表象）. 从 A 到 B 的光程为

$$f(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$$

为求其最小值，我们先求其驻点

$$f'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=0\quad\Longrightarrow\quad\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}\quad\square$$

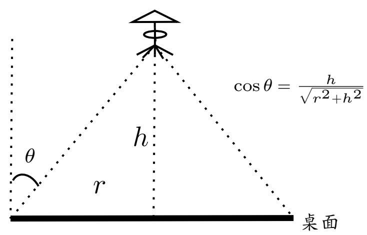
例 11.1.9 实验室中对同一量做了 n 次测量，得到观测数据：$x_1,x_2,\cdots,x_n$. 为消减测量误差的影响，我们需找到基于上数据的对该量的最优预测 x ——其与每个数据 x_i

的差的平方和为最小，即 x 是函数 $f(t)=\sum_{i=1}^{n}\ (t-x_i)^2$ 的最小值点，求导，得

$$f'(t)=2\sum_{i=1}^{n}\ (t-x_i)=0 \quad\Longrightarrow\quad t=\bar{x}:=\frac{\sum_{i=1}^{n}\ x_i}{n}; \qquad f''(t)=2n>0$$

即取观测值的平均值可有效消减误差，这符合我们的日常经验.

例 11.1.10 一灯泡悬挂在半径为 r 的圆桌的正上方，桌上任一点受到的照度与光线的入射角的余弦值成正比（入射角是光线与桌面的垂直线之间的夹角），而与光源的距离的平方成反比. 试问, 为使桌子的边缘得到最强的亮度, 灯泡应挂在桌面上方多高?



解： 设灯泡到桌面的垂直距离为 h，则桌子边缘的照度为

$$A(h)=\frac{kh}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad h>0$$

其中 $k>0$ 为比例常数. 我们需求 $A(h)$ 的最小值，求导，得

$$A'(h)=k\frac{(r^2+h^2)-3h^2}{(r^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}=0 \quad\Longrightarrow\quad h=\frac{\sqrt{2}r}{2}$$

由于当 $h\in\left(0,\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)$ 时，$A'(h)>0$；当 $h\in\left(\frac{\sqrt{2}r}{2},+\infty\right)$ 时，$A'(h)<0$. 故 $h=\frac{\sqrt{2}r}{2}$ 对应函数的最大值点，此时桌子边缘处的照度最强.

例 11.1.11 证明：$x=0$ 时 $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ 的极小值点.

证明： 计算发现 $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$，但 $f^{(4)}(0)=4$. 所以，根据马克劳林展开，知在 $x=0$ 附近，有

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)=4+\frac{1}{3!}x^4+o(x^4)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x)-f(0)=\frac{x^4}{3!}+o(x^4)$$

由此可知, 当 x 在 0 附近足够接近 0 时, $f(x)-f(0)$ 恒正, 故 $f(0)$ 是极小值. □

函数作图的步骤

1. 确定函数的定义域, 考虑函数的奇偶性和周期性, 确定曲线经过的一些特殊点 (如与坐标轴的交点);

2. 利用一阶导数和二阶导数, 确定函数的单调区间、极值点与极值、函数的凹凸区间、拐点及拐点的函数值, 并通过列表表示结果;

   (a) $f' > (<) 0$ 对应单调增加 (减少) 区间, $f' = 0$ 的点 x_0 为驻点, 如 $f''(x_0) > 0$, x_0 为极小值点; 如 $f''(x_0) < 0$, x_0 为极大值点.

   (b) $f'' > (<) 0$ 对应下(上)凸区间; $f''(x_0) = 0$ 的点称为拐点(凸性转捩点).

3. 确定函数的渐近线:

   (a) 铅直渐近线 $x = x_0$, 即 $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \infty$;

   (b) 水平渐近线 $y = y_0$, 即 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0$;

   (c) 斜渐近线 $y = ax+b$, 即 $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)-ax-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax) \end{cases}$

4. 描绘出函数的图像.

例 11.1.12 讨论函数 $y = \dfrac{(x-2)^2}{2(x-1)}$ 的形态, 并描绘其图形.

解: 定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 无奇偶性和周期性, 曲线过 $(2, 0)$ 和 $(0, -2)$. 计算导数和二阶导数, 得

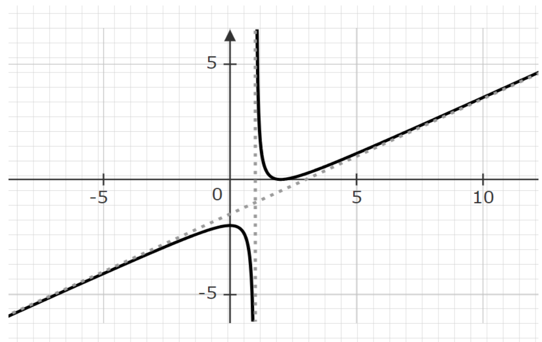
$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \text{驻点}: x = 0, x = 2$$

$$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{无拐点}$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow \frown$	极大值 -2	$\searrow \frown$	间断	$\searrow \smile$	极小值 0	$\nearrow \smile$

由于 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, 故 $x = 1$ 为曲线的铅直渐近线; 又 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$, 故函数有一条和 $y = \frac{x}{2}$ 平行的斜渐近线, 设之为 $y = \frac{x}{2} + b$, 则必有

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} - b \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x+4}{2(x-1)} = -\frac{3}{2}$$



例 11.1.13 下面的函数称为高斯函数，其图形常被称为“钟型曲线”、或“概率曲线”，因为它形似挂钟，且是概率论中最重要的正态分布（*norm distribution*）的密度函数.

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

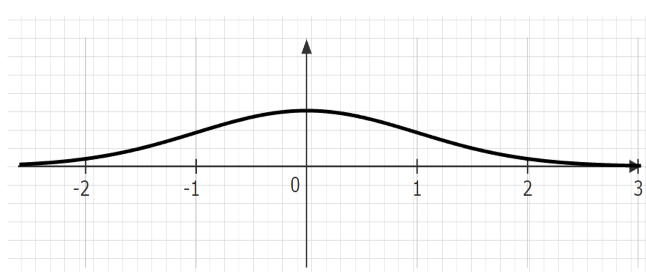
显然，它是个偶函数，故只需考虑它在 $[0, +\infty)$ 上的图形. 求导，得

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \text{驻点：} x = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1) \quad \Longrightarrow \quad \text{拐点：} x = \pm 1$$

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	极大值：$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\searrow \frown$	拐点	$\nearrow \smile$

注意到 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$，故 $y = 0$ 是一条水平渐近线. 综上知函数图形如下:



例 11.1.14 绘制函数 $y = f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$ 的图形. 注意到

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$$

故函数有零点 $x = \pm 1$. 对函数求导，得

$$f'(x) = \left((x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}} + \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right) = \frac{1}{3}\frac{2(x+1)+(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{x+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{零点：} x = -\frac{1}{3}; \quad \text{函数在 } x = \pm 1 \text{ 处不存在导数.}$$

$$f''(x) = \left(\frac{x+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)' = \frac{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^2} - \left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + 2\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}\right)}{\left(\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{-8}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}\sqrt[3]{(x+1)^5}}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{二阶导数无零点，在 } x = \pm 1 \text{ 处不存在}$$

即在点 $x = \pm 1$ 处，函数的导数和二阶导都不存在，但由下表看出，在 $x = -1$ 附近，函数的凸性翻转，故 $x = -1$ 是函数的拐点；但在 $x = 1$ 的两侧，二阶导恒正，故 $x = 1$ 不是函数的拐点.

x	$(-\infty, 1)$	-1	$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$+$
$f''(x)$	$+$	不存在	$-$	$-$	$-$	不存在	$-$
$f(x)$	$\nearrow \smile$	拐点	$\nearrow \frown$	极大值 $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	$\searrow \frown$	极小值 0	$\nearrow \frown$

下面考察函数 $f(x)$ 的渐近线. 显然，它没有铅直渐近线；又由于

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3} = \infty$$

故无水平渐近线，最后考察斜渐近线. 由于

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} - \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = 1$$

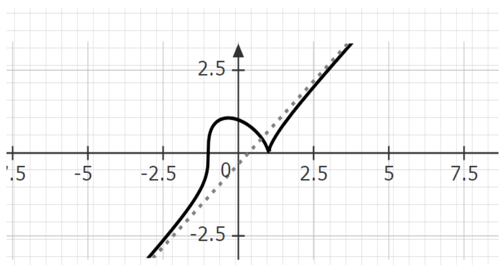
故它有形如 $y=x+b$ 的斜渐近线，且 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}-x\right)\xlongequal{t:=\frac{1}{x}}\lim_{t\to 0}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1}-\frac{1}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1-t-t^2+t^3}-1}{t}\right)\xlongequal{\sqrt[3]{1+x}\overset{x\to 0}{\sim}1+\frac{x}{3}}\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{t+t^2+t^3}{3}-1}{t}$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{t\left(1+t+t^2\right)}{3t}=-\frac{1}{3}$$

故函数具有一条斜渐近线 $y=x-\frac{1}{3}$. 综合以上分析，可做图如下:

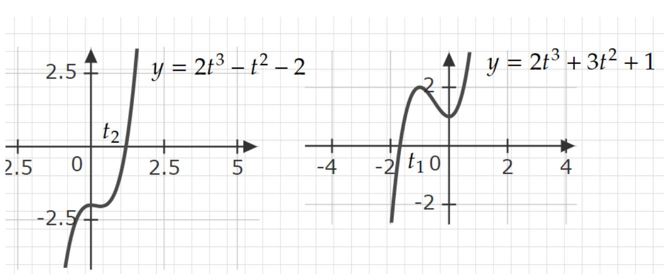


参数表示法的曲线绘图

例 11.1.15 设曲线由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{t^3-t^2+2}{t} \\ y=\frac{t^3-1}{t+1} \end{cases}$ ，描绘其图形.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t^3-t^2-2}{t^2}\quad\Longrightarrow\quad 驻点：t_2\in(0,+\infty)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2t^3+3t^2+1}{(t+1)^2}\quad\Longrightarrow\quad 驻点：t_1\in(-\infty,-1)$$



x, y, x', y' 随参数 t 变化的信息记录如下:

t	$(-\infty, t_1)$	t_1	$(t_1, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, t_2)$	t_2	$(t_2, +\infty)$
$x'(t)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	间断点	$-$	0	$+$
$y'(t)$	$-$	0	$+$	间断点	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x(t)$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	间断点	$\searrow$	极小	$\nearrow$
$y(t)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$	间断点	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

由上表可知，当 $x \to 0$ 即 $y \to -1$ 时函数有间断点，故函数曲线由铅直渐近线 $x = 0$；水平渐近线 $y = -1$. 下面探讨其是否有斜渐进线.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(t^3-1)/(t+1)}{(t^3-t^2+2)/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t(t^3-1)}{(t+1)(t^3-t^2+2)} = 1$$

即函数图形有斜渐近线：$y = x + b$，其中 $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - x) =$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^3-1}{t+1} - \frac{t^3-t^2+2}{t} \right) = \lim_{t\to\infty} \frac{t(t^3-1)-(t+1)(t^3-t^2+2)}{t(t+1)}$$

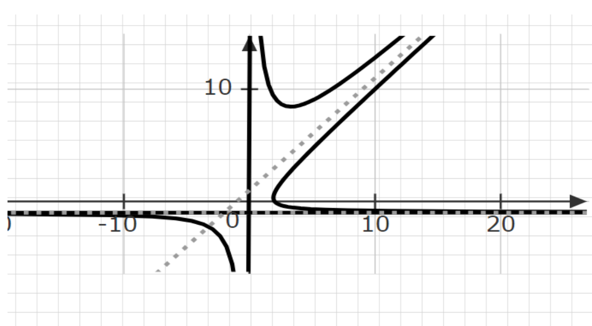
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2-3t-2}{t(t+1)} = 1$$

故有斜渐近线 $y = x + 1$. 也可这样看：$t \to \infty$ 时，x 和 y 的“渐进”态为

$$x = t^2 - t + \frac{2}{t}$$

$$y = \frac{t^3-1}{t} \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = \frac{t^3-1}{t} \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \cdots \right) = t^2 - t + 1 + \frac{2}{t} + \frac{o(t)}{t}$$

故当 $t \to \infty$ 时，x 和 y 之间有渐进关系：$y = x + 1$.



11.2 切线、法线、弧长、曲率

切线、法线的求法及其应用

例 11.2.1 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点 (x_0,y_0) 处的切线.

解: 运用隐函数求导的思路，对方程两边同时微分，得

$$\frac{2xdx}{a^2}+\frac{2ydy}{b^2}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad b^2xdx+a^2ydy=0 \qquad (A)$$

到这一步，通常的方法是，求解出

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0,y_0)}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\ (y_0\neq 0);\qquad \frac{dx}{dy}\Big|_{(x_0,y_0)}=-\frac{a^2y_0}{b^2x_0}\quad (x_0\neq 0)$$

$$\text{然后由}\quad y-y_0=\frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0);\quad \text{或}\ x-x_0=\frac{dx}{dy}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

求切线方程，即

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0);\quad \text{或}\ x-x_0=-\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(y-y_0)$$

$$\Longleftrightarrow\quad b^2x_0(x-x_0)+a^2y_0(y-y_0)=0 \qquad (B)$$

此即直线的“点-法”式方程（直线作为平面中的“超平面”），即曲线在 (x_0,y_0) 处的一个法向量是 $\mathbf{n}=(b^2x_0,\,a^2y_0)$，故该点处的法线方程为:

$$\begin{cases} x=x_0+b^2x_0t\\ y=y_0+a^2y_0t\end{cases} \quad\overset{\text{消参}}{\Longleftrightarrow}\quad a^2y_0(x-x_0)-b^2x_0(y-y_0)=0$$

但注意到，如果在微分关系 (A) 中，如令 $x=x_0, y=y_0$，并令 $dx=x-x_0$，$dy=y-y_0$，则 (A) 就转化为切线方程 (B). 我们对此不应感到意外，因为微分 $dy|_{x=x_0}$ 就是当 x 在点 x_0 产生增量 $\Delta x=x-x_0$ 时，用切线（$y=y_0+y'(x_0)(x-x_0)$）方程计算出的相应增量.

一般地，如果平面曲线由方程 $F(x,y)=0$ 给出，那么两边同时求微分，得

$$F_xdx+F_ydy=0$$

其中 F_x, F_y 分别表示（二元）函数 $F(x,y)$ 对 x 和 y 的（偏）导数. 则曲线在

(x_0, y_0) 处的切线方程为

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

法线方程为

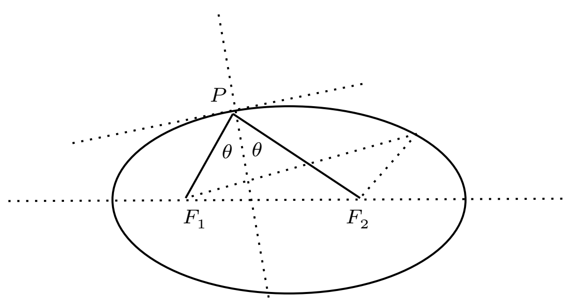
$$F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

特别地，$y = f(x)$ 对应 $F(x, y) = f(x) - y$，则按上面的方法，得

$$f'(x)dx - 1dy = 0 \quad \xRightarrow{x_0 \text{ 处附近}} \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

同用常法之所得.

例 11.2.2 椭圆的光学性质：从椭圆的一个焦点发出的任一束光线，经椭圆反射后，反射光必经过它的另一个焦点.



证明: 不妨设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$. 则焦点坐标为 $F_1 = (-c, 0)$; $F_2 = (c, 0)$，其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. 给点椭圆上任意一点 $P\,(x_0, y_0)$，考察从 F_1 发射经由 P 反射后的情形. 首先，P 点出的单位法向量为

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||} = \frac{(b^2 x_0,\, a^2 y_0)}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}$$

而 $\overrightarrow{PF_1}$ 方向上的单位向量为

$$\mathbf{u} := \frac{\overrightarrow{PF_1}}{||\overrightarrow{PF_1}||} = \frac{(-c - x_0, -y_0)}{\sqrt{(-c - x_0)^2 + y_0^2}} = -\frac{(c + x_0,\, y_0)}{\sqrt{(c + x_0)^2 + y_0^2}}$$

设 $\overrightarrow{PF_2}$ 方向上的单位向量为

$$\mathbf{v} := \frac{\overrightarrow{PF_2}}{||\overrightarrow{PF_2}||} = \frac{(c - x_0, -y_0)}{\sqrt{(c - x_0)^2 + y_0^2}} = \frac{(c - x_0,\, -y_0)}{\sqrt{(c - x_0)^2 + y_0^2}}$$

为证 $\overrightarrow{PF_2}$ 是反射光方向，只需验证：$\mathbf{u}\bullet\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{v}\bullet\hat{\mathbf{n}}$. 因为

$$\mathbf{u}\bullet\hat{\mathbf{n}}=-\frac{b^2x_0(c+x_0)+a^2y_0^2}{\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}\sqrt{(c+x_0)^2+y_0^2}};\quad \mathbf{v}\bullet\hat{\mathbf{n}}=\frac{b^2x_0(c-x_0)-a^2y_0^2}{\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}\sqrt{(c+x_0)^2+y_0^2}}$$

$$\text{故需验证}\quad \frac{a^2y_0^2+b^2x_0(c+x_0)}{\sqrt{(c+x_0)^2+y_0^2}}=\frac{a^2y_0^2-b^2x_0(c-x_0)}{\sqrt{(c-x_0)^2+y_0^2}}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\left((c-x_0)^2+y_0^2\right)\left(a^2y_0^2+b^2x_0(c+x_0)\right)^2=\left((c+x_0)^2+y_0^2\right)\left(a^2y_0^2-b^2x_0(c-x_0)\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow\quad a^4y_0^4(c-x_0)^2+2a^2b^2x_0y_0^2(c^2-x_0^2)(c-x_0)+2a^2b^2x_0y_0^4(c+x_0)+b^4x_0^2y_0^2(c+x_0)^2=$$

$$a^4y_0^4(c+x_0)^2-2a^2b^2x_0y_0^2(c^2-x_0^2)(c+x_0)-2a^2b^2x_0y_0^4(c-x_0)+b^4x_0^2y_0^2(c-x_0)^2$$

$$\Longleftrightarrow\quad \text{左边}-\text{右边}=-4ca^4x_0y_0^4+4ca^2b^2x_0y_0^2(c^2-x_0^2)+4ca^2b^2x_0y_0^4+4cb^4x_0^3y_0^2=0$$

$$\text{即}\quad -a^4y_0^2+a^2b^2(c^2-x_0^2)+a^2b^2y_0^2+b^4x_0^2=0$$

由于 $y_0^2=b^2+\frac{c^2}{a^2}x_0^2-x_0^2$，上式左边可转化为

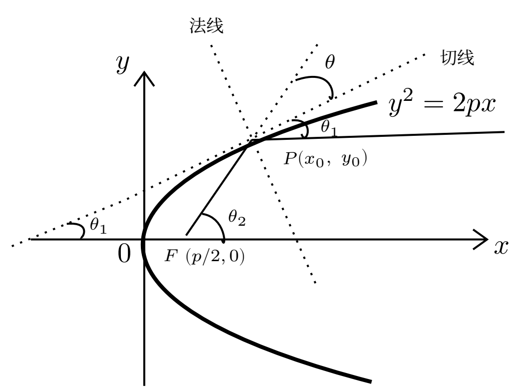
$$-a^4\left(b^2+\frac{c^2}{a^2}x_0^2-x_0^2\right)+a^2b^2c^2-a^2b^2x_0^2+a^2b^2\left(b^2+\frac{c^2}{a^2}x_0^2-x_0^2\right)+b^4x_0^2$$

$$=-a^4b^2-a^2c^2x_0^2+a^4x_0^2+a^2b^2c^2-a^2b^2x_0^2+a^2b^4+b^2c^2x_0^2-a^2b^2x_0^2+b^4x_0^2$$

$$\xlongequal{c^2=a^2-b^2}-a^4b^2-a^4x_0^2+a^2b^2x_0^2+a^4x_0^2+a^4b^2-a^2b^4-a^2b^2x_0^2+$$

$$+\ a^2b^4+a^2b^2x_0^2-b^4x_0^2-a^2b^2x_0^2+b^4x_0^2\ \equiv 0\qquad\square$$

例 11.2.3 抛物线的光学性质：从焦点处发射的光线经过抛物线（严格来讲应是抛物面）反射后成为一束平行光.



解：设抛物线方程是 $y^2=2px$，从焦点 $F(p/2,0)$ 处发射的光线与抛物线交于点 $P(x_0,y_0)$. 对方程两边微分，得 $2ydy=2pdx$. 代入 $x=x_0,y=y_0$；$dx=x-x_0,dy=$

$y-y_0$，得在 P 处的切线方程

$$2y_0(y-y_0)=2p(x-x_0)$$

记 θ_1 是切线与 x-轴的夹角，则 $\tan\theta_1=\frac{p}{y_0}$. 记 θ_2 是向量 $\overrightarrow{FP}$ 与 x-轴的夹角，则

$$\tan\theta_2=\frac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}$$

那么，切线与 $\overrightarrow{FP}$ 之间的夹角 $\theta=\theta_2-\theta_1$. 我们只需表明 $\theta_1=\theta$，便可说明：反射光线平行于 x-轴（即入射光线和反射光线关于法线对称）.

$$\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}=$$

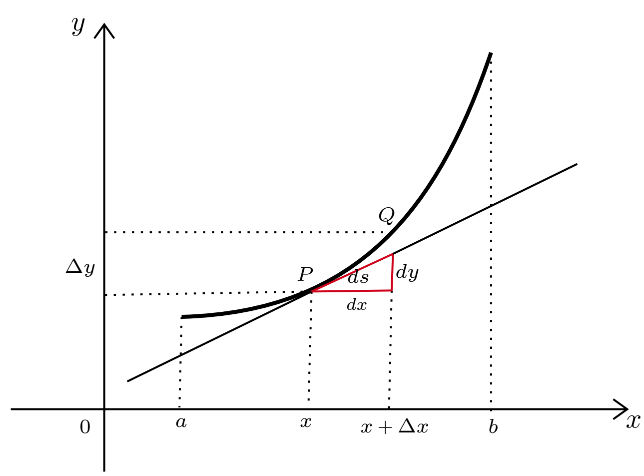
$$\frac{\frac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}-\frac{p}{y0}}{1+\frac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}\frac{p}{y_0}}=\frac{p}{y_0}\frac{\frac{y_0^2}{p}-\left(x_0-\frac{p}{2}\right)}{(x_0-\frac{p}{2})+p}\xlongequal{y_0^2=2px_0}\frac{p}{y_0}=\tan\theta_1 \qquad \square$$

弧长的微分

曲线由 $y=f(x)$, $a\le x\le b$ 给出，记 $s(x)$ 是从 a 到 x 对应的弧长函数，假设它是可微的. 我们考察其微分 ds，设 $P=(x,f(x))$，$Q=(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$. 则

$$\Delta s=|\overset{\frown}{PQ}|=s(x+\Delta x)-s(x)\approx ds=s'(x)dx$$

问题： 如何求弧长的微分 ds?



如取 $dx=\Delta x$ 充分小，可用 P 点的切线上从 x 到 $x+\Delta x$ 对应的线段来逼近弧 $\overset{\frown}{PQ}$. 自然地，我们期望切线上的对应线段的长度是真实弧长 Δs 的一个好的逼近. 事实

上，它就是弧长微分 ds！对图中红色标注的直角三角形运用勾股定理，得到

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2 \quad \Longrightarrow \quad ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

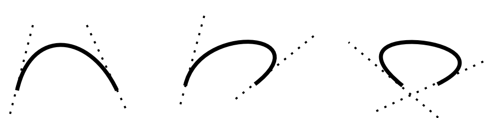
$$\xLongrightarrow{dy=f'(x)dx} \quad ds=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx \quad \Longrightarrow \quad s'(x)=\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}$$

特别地，如果曲线由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 给出，则弧长微分为

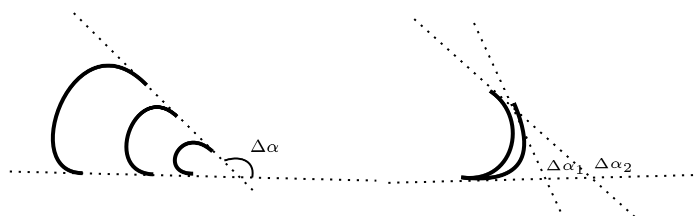
$$ds=\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt$$

曲率和曲率公式

问题：如何衡量曲线在局部的弯曲程度？

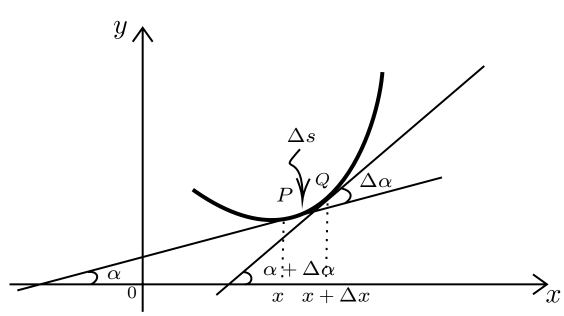


弧长相同的曲线，曲线转角越大（即切线倾角的总变化），弯曲程度也越大



转角相同的曲线，弧长越小，弯曲程度越大

由上图可知，曲线的弯曲程度与其转角（即曲线切线倾斜角的总变化）成正比，与曲线弧长成反比.



定义 11.2.1 在 $P=(x,f(x))$ 点附近取点 $Q=(x+\Delta x,\, f(x+\Delta x))$，则弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的平均曲率（*average curvature*）定义为 $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. 若下极限存在，则称极限为曲线 $y=f(x)$

在 P 点的曲率（*curvature*），记为 $K(P)$，即

$$K(P) := \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

注记 11.2.1 根据这个定义，对于直线，由于 $\Delta\alpha\equiv 0$，故对其上任意一点 P，都有 $K(P)=0$；对于半径为 R 的原，其上 Δs 弧长对应的弧角变化为 $\Delta\alpha=\frac{\Delta s}{R}$，故其上任意一点 P 的曲率都是 $\frac{1}{R}$. 即半径越大，曲率越小，当 $R\to\infty$ 时，圆周上任意一段弧都无限接近于直线段，故极限曲率为 0.

曲率计算公式: 设曲线由 $y = f(x)$ 的图形给出，且函数 f 二阶可导，则由于 $\alpha=\arctan y'$，则

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\left|\frac{d\alpha}{dx}\frac{dx}{ds}\right|=\left|\frac{d\alpha/dx}{ds/dx}\right|=\left|\frac{\frac{y''}{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}}\right|=\boxed{\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|}$$

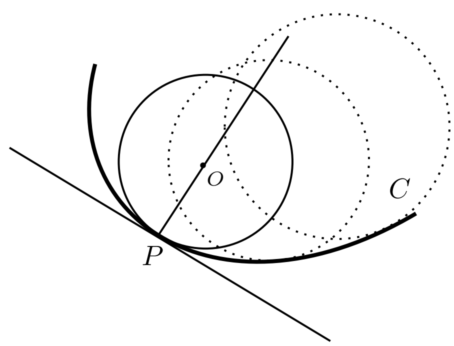
例 11.2.4 计算抛物线 $y=x^2$ 上任意一点的曲率.

解: 由上公式得

$$K=\left|\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

显然，当 $x=0$ 时，曲率取最大值 2.

定义 11.2.2 设曲线 C 在其上的点 P 处的曲率为 K，则称 $R=\frac{1}{K}$ 为曲线在点 P 的曲率半径. 设在曲线 C 过点 P 指向凹侧的法线上的点 O 到 P 的距离为 R，则以 O 为圆心、R 为半径的圆称为 C 在点 P 的曲率圆，点 O 称为 C 在点 P 的曲率中心.



设曲线 C 由方程 $y=f(x)$ 的图形给出，则点 $P=(x_0,y_0)$ 处的法线方程是

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

设曲率中心 O 的坐标为 (ξ,η)，由于 $\overline{OP}=R=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$. 即 ξ,η 满足

$$\eta-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(\xi-x_0);\quad (\xi-x_0)^2+(\eta-f(x_0))^2=\frac{(1+y'^2)^3}{(y'')^2}$$

$$\Longrightarrow\quad (\xi-x_0)^2=\frac{(1+y'^2)^3}{(y'')^2}-\frac{(\xi-x_0)^2}{y'^2}\quad\Longrightarrow$$

$$\boxed{(\xi-x_0)^2=\frac{(y')^2(1+y'^2)^2}{(y'')^2}\Big|_{x=x_0};\quad (\eta-f(x_0))^2=\frac{(1+y'^2)^2}{(y'')^2}\Big|_{x=x_0}}$$

例 11.2.5 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上点 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处的曲率和曲率圆.

解: 利用隐函数求导法，可得

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},\qquad y''=-\frac{b^2}{a^2}\frac{y-xy'}{y^2}$$

故在点 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处，有 $y'=-\frac{b}{a}$，$y''=-\frac{2\sqrt{2}b}{a^2}$. 从而在 P 点处的曲率 K 和曲率半径分别为

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\frac{2\sqrt{2}ab}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right|,\quad R=\left|\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}ab}\right|$$

相应的曲率中心 (ξ,η) 为

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{b}{a}\right)\frac{a^2+b^2}{a^2}\left(-\frac{a^2}{2\sqrt{2}b}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2}a}$$

$$\eta=\frac{b}{\sqrt{2}}+\frac{a^2+b^2}{a^2}\left(-\frac{a^2}{2\sqrt{2}b}\right)=\frac{b}{\sqrt{2}}-\frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2}b}$$

故曲率圆方程为

$$\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2}a}\right)^2+\left(y-\frac{b}{\sqrt{2}}+\frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2}b}\right)^2=\frac{(a^2+b^2)^3}{8a^2b^2}$$

容易看出，当 $a=b$ 时，曲率为 $\frac{1}{a}$，曲率圆是曲线本身.

参数方程下的计算: 当曲线由参数方程 $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ 给出，计算曲率

时，只需在曲率计算公式中以下式代入

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{\left(x'(t)\right)^3}$$

例 11.2.6 求摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ ，$0<t<2\pi$ 上任意一点的曲率.

解:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}\quad\Longrightarrow\quad 1+y'^2=1+\frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}=\frac{2}{1-\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^2\cos t(1-\cos t)-a^2\sin^2 t}{a^3(1-\cos t)^3}=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\frac{1}{a(1-\cos t)^2}\frac{(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}a\sqrt{1-\cos t}}\right|=\frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$$

例 11.2.7 求阿基米德螺线 $r=a\theta\,(a>0)$ 上任一点的曲率.

解: 视 θ 为参数，则曲线有参数方程描述 $\begin{cases} x=a\theta\cos\theta \\ y=a\theta\sin\theta \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\quad\Longrightarrow\quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1+\theta^2}{(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=$$

$$\frac{a^2(2\cos\theta-\theta\sin\theta)(\cos\theta-\theta\sin\theta)-a^2(-2\sin\theta-\theta\cos\theta)(\sin\theta+\theta\cos\theta)}{a^3(\cos\theta-\theta\sin\theta)^3}$$

$$=\frac{2+\theta^2}{a(\cos\theta-\theta\sin\theta)^3}$$

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\frac{2+\theta^2}{a(\cos\theta-\theta\sin\theta)^3}\frac{(\cos\theta-\theta\sin\theta)^3}{(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\frac{\theta^2+2}{a(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

当 $\theta\to\infty$ 时

$$K\sim\frac{\theta^2}{a\theta^3}=\frac{1}{a\theta}$$

即当 θ 足够大时，阿基米德的曲率充分接近 $\frac{1}{a\theta}$，也就是说逐渐趋于零. 这也说明，当 θ 足够大, 即螺线越长的旋臂处越“平坦”.

11.3　导数概念在实际问题中的应用，相关变化率问题

凡虑及瞬时变化率，便是导数之运用时；而复合函数求导之链式法则，可用来解析多个变量间的依存关系.

例 11.3.1 设一质点在力 $F(t)$ 的作用下的轨迹为 $s(t)$，则在时间增量 $\Delta t = t_2 - t_1$ 下的速度该变量为 $\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$. 经由实验发现：$\Delta v$ 与 F 和 Δt 成正比例，而与其质量 m 成反比. 在定义了合适的单位之后，其比例系数可取为 1，故有

$$F\Delta t = m\Delta v \quad \Longrightarrow \quad F = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$，则得到牛顿第二定理 $F = ma$，其中加速度为导数的一阶导数

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$$

又因速度 $v(t)$ 是距离的一阶导，即 $v(t) = s'(t)$，故得 $\boxed{F = m\dfrac{d^2 s}{ds^2}}$

特别地，如果 $F \equiv 0$，即 $s''(t) \equiv 0$，显然 $s(t) = 0$ 满足此条件，另外不难看出，$s(t) = at + b$（a, b 为常数）也满足此条件. 故不受外力作用的质点（相对某一惯性参考系）或静止、或做匀速直线运动.

如果质点在重力 $F = mg$ 作用下运动,则其轨迹满足方程 $-mg = ms''$,即 $s'' = -g$. 即质点速度 $v(t)$ 满足 $v'(t) = -g$. 显然，$v(t) = -gt$ 满足此方程，而根据拉格朗日中值定理，任何满足 $v'(t) = g$ 的函数必与 gt 差一个常数，故

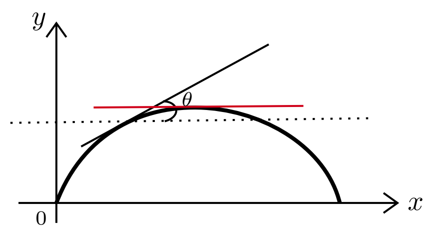
$$v(t) = -gt + C_1 \text{ (常数 } C_1 = v_0 = v(0) \text{ 为初始速度)}$$

$$s'(t) = v(t) = -gt + v_0 \quad \Longrightarrow \quad s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + C \text{ (常数 } C = s(0) \text{ 为初始位置)}$$

例 11.3.2 抛出一球，设在初始时刻 $t = 0$ 的水平速度和垂直速度分别为 v_1 和 v_2，试问在何时刻该球的飞行倾角恰与地面平行？

解： 设水平和垂直方向的距离函数分别为 $x(t)$ 和 $y(t)$，则有

$$\begin{aligned} x &= v_1 t \\ y &= v_2 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad 0 \le t \le \tfrac{2v_2}{g}$$



飞行方向（即轨迹切线方向）与水平（地面）之间的倾斜角 θ 可计算如下

$$\theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big|_{x=v_1 t} = \arctan\frac{\left(v_2 t - \frac{1}{2}gt^2\right)'}{(v_1 t)'} = \arctan\frac{v_2 - gt}{v_1}$$

则为使飞行方向与地面平行，知需 $\theta = 0$，故需

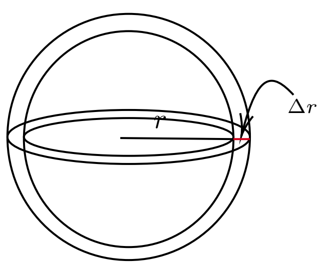
$$\frac{v_2 - gt}{v_1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{v_2}{g}$$

例 11.3.3 半径为 r 的球的体积为 $\boxed{V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3}$ 其变化率为

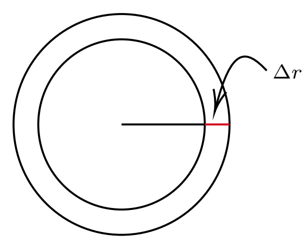
$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 = \text{半径为 } r \text{ 的球的球面面积}$$

半径为 r 的圆盘的面积为 $\boxed{A(r) = \pi r^2}$ 其变化率为

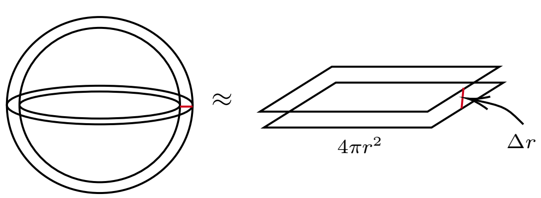
$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r = \text{半径为 } r \text{ 的圆的周长}$$

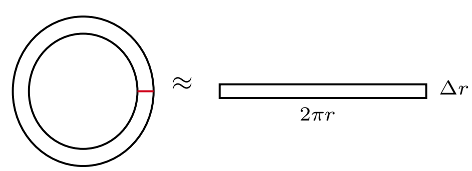


$V(r+\Delta r) \approx V(r) + V'(r)\ \Delta r$



$A(r+\Delta r) \approx\ A(r) + A'(r)\Delta r$





例 11.3.4 生产和销售过程中的基本变量是：成本、收益和利润. 设产量为 Q，则生产总成本 $C(Q)$ 一般可分为两部分

$$C(Q) = f + v(Q)Q$$

其中 $f > 0$ 为固定成本（如厂房和设备折旧、工人工资、保险等），一般认为与产

量 Q 无关. 而 $v(Q)>0$ 表示在总生产 Q 件产品时，每生产一件产品的可变成本，故 $v(Q)Q$ 表示生产过程中的可变成本.

$C(Q)$ 的导数 $C'(Q)$ 称为*边际成本*，即在生产 Q 件产品的情况下，生产第 Q 件产品的成本. 总收益 $E(Q)=p(Q)Q$ 是指销售 Q 件产品后得到的总收入，其中 $p(Q)$ 是价格函数，指在生产了 Q 件产品时对每件产品的定价，一般来说，Q 越大，$p(Q)$ 就会越小，因此 $p'(Q)<0$. $E(Q)$ 的导数 $E'(Q)$ 称为*边际收益*，其含义是总销售 Q 件产品的情况下，销售第 Q 件产品的所得收入.

$P(Q)=E(Q)-C(Q)$ 称为*利润函数*. 实际需考虑 $P(Q)$ 取极大值的条件:

$$P'(Q)=E'(Q)-C'(Q)=0 \quad \text{边际成本等于边际收益}$$

$$P''(Q)=E''(Q)-C''(Q)<0 \quad \text{边际成本变化率大于边际收益的变化率}$$

例 11.3.5（*马尔蒂斯人口模型*）设 $p(t)$ 是某区域的人口数量函数，其中 t 是时间变量. 数据表明，t 时刻的人口增长率 $p'(t)$ 与 t 时刻的人口数量大体成正比，故存在比例常数 λ，使得

$$p'(t)=\lambda p(t)$$

当 $\lambda>0$ 时，t 时刻人口数量是增长的；反之，当 $\lambda<0$ 时，t 时刻人口数量是减少的. 我们希望确定满足上关系的 $p(t)$ 的具体表达. 首先，e^t 的导数是其本身，未得到因子 λ，我们常数用 $e^{\lambda t}$ 试之，发现它的确满足上方程，但我们需要确定所有满足上方程的函数. 设 $p(t)$ 是满足上方程任意不同于 $e^{\lambda t}$ 的函数，对 $\frac{p(t)}{e^{\lambda t}}$ 求导，得

$$\left(\frac{p(t)}{e^{\lambda t}}\right)'=\frac{p'(t)e^{\lambda t}-\lambda e^{\lambda t}p(t)}{\left(e^{\lambda t}\right)^2}\xlongequal{p'(t)=\lambda p(t)}0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{p(t)}{e^{\lambda t}}=C\ (C\text{ 为一常数}) \quad \Longrightarrow \quad p(t)=Ce^{\lambda t}$$

这里，常数 C 可由初始条件：$C=p(0)=p_0$ 来决定. 故人口数量函数 $p(t)$ 由下约束完全确定

$$\begin{cases} p'(t)=\lambda p(t) \\ p(0)=p_0 \end{cases}$$

上即是一个*带有初始条件的常微分方程*. 另一种得到上面解的方式是：将 $p'=\lambda p$ 写成 $\frac{dp}{p}=\lambda dt$，将其看成是对某个隐函数关系 $f(p)=g(t)$ 两边求微分的结果，即

$$f'(p)dp=g'(t)dt \quad \longleftrightarrow \quad \frac{dp}{p}=\lambda dt$$

即 $f(p)$ 满足方程 $f'(p)=\frac{1}{p}$；$g'(t)=\lambda$，不难看出

$$f(p)=\ln p+C_1 \qquad g(t)=\lambda t+C_2$$

其中 C_1，C_2 是常数，从而知函数 $p(t)$ 由下面的关系确定

$$f(p)=g(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \ln p+C_1=\lambda t+C_2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\ln p=\lambda t+C_2-C_1 \quad \Longleftrightarrow \quad p(t)=\underbrace{e^{C_2-C_1}}_{C}e^{\lambda t}$$

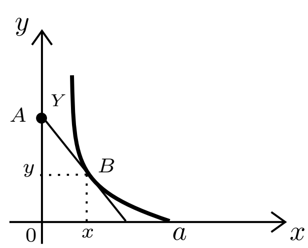
注记 11.3.1 上面的人口模型是粗糙的，因其解 $p(t)=p_0e^{\lambda t}\xrightarrow{t\to\infty}\infty$. 这显然是荒谬的，人口的数量增加到一定程度会受自然资源和环境条件的制约而会趋缓、乃至减少，也就是说 $p(t)$ 应有个上界 p_{max}，而马尔蒂斯模型不能反映出该特征. 可对上模型稍加修正，得到下面的逻辑斯蒂（*Logistic*）人口模型

$$\begin{cases} p'(t)=\lambda\left(1-\frac{p(t)}{p_{max}}\right)p(t) \\ p(0)=p_0 \end{cases}$$

之后，用积分方法会求出满足上模型的解

$$p(t)=\frac{p_{max}}{1+\left(\frac{p_{max}}{p_0}-1\right)}e^{-\lambda t}\xrightarrow{\lambda\to\infty}p_{max}$$

例 11.3.6（跟踪问题模型）设 A 在初始时刻从坐标原点沿 y 轴正向前进，与此同时 B 于 $(a,0)$ 处始终保持距离 a 对 A 进行跟踪（B 的前进方向始终对着 A 当时所在的位置），求 B 的运动轨迹.



解: 设 B 的运动轨迹为 $y=y(x)$，并设在 t 时刻，A 在 $(0,Y)$ 处，B 在 (x,y) 处. 由于 B 的跟踪方向始终指向 A，即 B 处切线的斜率可计算如下

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y-y}{-x} \quad \Longrightarrow \quad Y=y-x\frac{dy}{dx}$$

B 处弧长微分为 $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$，故 B 的速度为 $\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt}$，而 A 的速度为 $\frac{dY}{dt}$. 设 B 的速度和 A 的速度之比为 r，则有关系

$$\frac{ds}{dt}=r\frac{dY}{dt}\quad\Longrightarrow\quad ds=rdY$$

$$\Longrightarrow\quad\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=r\left(\frac{dy}{dx}dx-\frac{dy}{dx}dx-x\frac{d^2y}{dx^2}dx\right)$$

$$\Longrightarrow\quad\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=-rx\frac{d^2y}{dx^2}\quad\stackrel{u=\frac{dy}{dx}}{\Longleftrightarrow}\quad 1+u^2=r^2x^2(u')^2$$

不妨设 $r=1$，则需求解以下微分方程

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$$

将其看成是对某一函数关系 $f(u)=g(x)$ 两边微分的结果，即

$$f'(u)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}};\qquad g'(x)=-\frac{1}{x}$$

显然 $g(x)=-\ln|x|+C_1$ （C_1 是任意常数）. 为求 $f(u)$，我们回忆起 $(\sinh u)'=\cosh u=1+\sinh^2 u$，从而（令 $v=\sinh^{-1}u$）

$$\left(\sinh^{-1}u\right)'=\frac{1}{\cosh v}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 v}}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

从而 $f(u)=\sinh^{-1}u+C_2$（C_2 为任意常数），故有关系

$$\sinh^{-1}u=\ln\left(\frac{C}{x}\right)\quad C\text{ 为任意常数}$$

$$\text{但 } u=\sinh v=\frac{e^v-e^{-v}}{2}=\frac{C}{x}-\frac{x}{C}\quad\Longrightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{C}{x}-\frac{x}{C}$$

由于 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=0$, 即 $0=\frac{C}{a}-\frac{x}{C}$, 所以 $C=a$. 故 B 的轨迹 $y=y(x)$ 由下条件给出

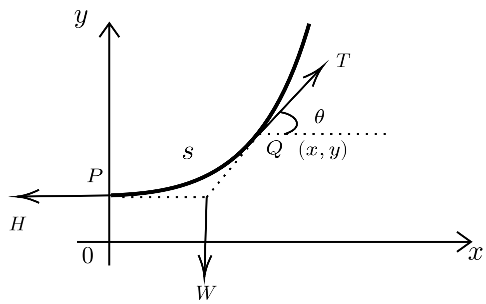
$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\quad\Longrightarrow\quad y=a\ln x-\frac{x^2}{2a}+C$$

常数 C 由条件 $y(a)=0$ 决定，即 $0=a\ln a-\frac{a}{2}+C$，故 $C=\frac{a}{2}-a\ln a$，从而

$$y=a\ln\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{a^2-x^2}{2a}$$

例 11.3.7（悬链线）一条无弹性、质量分布均匀的绳子的两端系在一条水平直线上，求其在重力下达到平衡时的形状.

解: 由于绳子的两端系在水平直线上，故绳子的形状关于最低点对称. 设绳子在最低点 P 受水平张力 $\mathbf{H}$，在如图中 Q 点处收到的张力为 $\mathbf{T}$，其方向是绳子在 Q 点处的切线方向.



以 w_0 表示单位长度绳子的重力，并设弧 PQ 的长度为 s，则绳子所受重力为 $\mathbf{W}=w_0 s$. 绳子在 $\mathbf{H}$，$\mathbf{T}$，$\mathbf{W}$ 下达到平衡的条件是

$$\begin{cases} T\sin\theta=w_0 s \\ T\cos\theta=H \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \tan\theta=\frac{dy}{dx}=\frac{w_0}{H}s$$

但 $ds^2=dx^2+dy^2$，从而 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2-1}$ 并令 $c:=\frac{H}{w_0}$，则上方程可写作

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{s^2}{c^2}}$$

函数 $s=c\sinh\frac{x}{c}$ 满足上方程，故所有满足上方程的函数为 $s=c\sinh\dfrac{x}{c}+C$，其中 C 为任一常数. 选坐标系（如上图），使得当 $x=0$ 时，$s=0$，则可确定 $C=0$. 从而绳子 $y=y(x)$ 满足下方程:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=\frac{s}{c} \\ \frac{s}{c}=\sinh\frac{x}{c} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\sinh\frac{x}{c} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{y=c\cosh\frac{x}{c}}$$

此方程所代表的曲线即为“悬链线

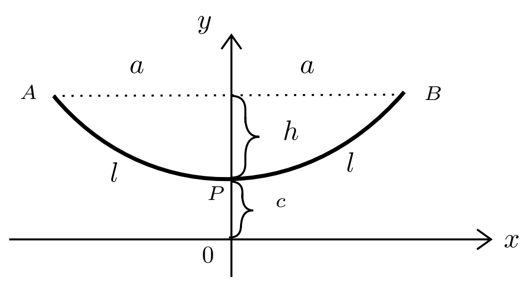
- 当 x 远小于 $c = \overline{OP}$，即 $\frac{x}{c}$ 接近零时，由双曲函数的泰勒展开，得近似

$$s = c\left[\frac{x}{c} + \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{c}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{x}{c}\right)^5 + \cdots\right]$$

$$y = c\left[1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{c}\right)^4 + \cdots\right]$$

  故得此时（即接近绳子底部时）有近似关系 $y \approx c + \dfrac{x^2}{2c}$. 故悬链线在其最低点位置附近形似抛物线.

- 当 x 远大于 c，上近似关系失效，但注意到此时 $\cosh\dfrac{x}{c} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$ 中 $e^{-\frac{x}{c}}$ 是个小量，从而悬链线远离其最低点的部分形似指数曲线 $y = \dfrac{c}{2}e^{\frac{x}{c}}$.



如上图，假设绳子总长度为 $2l$，绳子两水平端之间的距离为 $2a$. 则常数 c 由关系 $\frac{l}{c} = \sinh\frac{a}{c}$ 给出. 又 A, B 端点处的高度 y 与 c 的差是绳子弛垂的长度 h. 当绳子的水平张力较大时，弛垂较小，且 $x = a$ 远大于 c，故此时有近似关系

$$h = y - c \approx c + \frac{a^2}{2c} - c = \frac{a^2}{2c}$$

取 $s = l$ 关于 $\frac{a}{c}$ 的三阶近似，得

$$l \approx c\left(\frac{a}{c} + \frac{1}{6}\left[\frac{a}{c}\right]^3\right) = a + \frac{a^3}{6c^2}$$

$$\Longrightarrow \quad 2(l-a) \approx \frac{a^3}{3c^2} \approx \frac{2}{3}\frac{ah}{c} \approx \frac{4h^2}{3a} \approx \frac{4h^2}{3l}$$

例 11.3.8 记 M 为地球质量，m 表示物体质量，r 为地球半径，h 为物体距地面的高度，则由万有引力定律知物体所受地球引力为

$$F = -\frac{G^2mM}{(r+h)^2}$$

若 h 远小于 r，即 $\frac{h}{r}$ 是个很小的数，则由泰勒展开知

$$F = -\frac{GmM}{r^2}\left(1+\frac{h}{r}\right)^{-2} =$$

$$-\frac{GmM}{r^2}\left[1-2\frac{h}{r}+3\left(\frac{h}{a}\right)^2-\cdots\right] \approx -mg\left(1-2\ \frac{h}{r}\right)$$

地球半径 $r \approx 6400km$，故当物体离地面 $3000m$ 时，重力常数只改变不到千分之一.

例 11.3.9 一物体在一维力场 $F(s)$ 的作用下运动，其中 s 表示物体的坐标. 假设物体在 P_0 点（$s = s_0$）静止，即 $F(s_0) = 0$. 在 P_0 点近旁，将 $F(s)$ 泰勒展开

$$F(s) = F'(s_0)(s-s_0) + \frac{F''(s_0)}{2!}(s-s_0)^2 + \frac{F'''(s_0)}{3!}(s-s_0)^3 + \cdots$$

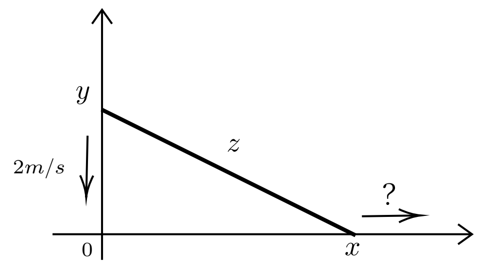
- 若 $F'(s_0) \neq 0$，则在 s_0 近旁，有 $F(s) \approx F'(s_0)(s-s_0)$.
  - 如 $F'(s_0) < 0$，则 $F(s) < 0\,(> 0)$，当 $s - s_0 > 0\,(< 0)$. 这意味着：物体从 P_0 偏离时，力有将其拉回的趋势. 故此时可认为 P_0 是运动的稳定平衡点（*stable equilibrium*）;
  - 如 $F'(s_0) > 0$，则 $F(s) < 0\,(> 0)$，当 $s - s_0 < 0\,(> 0)$. 这意味着：物体从 P_0 偏离时，力有使其朝着与 P_0 点相反反向运动的趋势. 故此时可认为 P_0 是运动的非稳定平衡点（*unstable equilibrium*）.
- 假设 $F'(s_0) = 0$，但 $F''(s_0) \neq 0$，则有近似 $F(s) \approx \frac{1}{2}F''(s_0)(s-s_0)^2$.
  - 如 $F''(s_0) > 0$，则 $F(s)$ 在 s_0 近旁恒大于零. 即当物体偏离 P_0 时，力场有让它向 P_0 右运动的趋势，故此时 P_0 时非平衡平衡点.
  - 如 $F''(s_0) > 0$，则类似可知 P_0 时非平衡平衡点.
- 假设 $F'(s_0) = F'' = 0$，但 $F'''(s_0) \neq 0$，则有近似 $F(s) \approx \frac{1}{3}F'''(s_0)(s-s_0)^3$. 此时 P_0 是否稳定取决于 $F'''(s_0)$ 的符号，完全雷同于 $F'(s_0) \neq 0$ 的情形.

一般地，若 $F'(s_0) = F''(s_0) = F'''(s_0) = \cdots = F^{(n-1)}(s_0) = 0$，但 $F^{(n)}(s_0) \neq 0$.

1. 设 n 是奇数，则 $F^{(n)}(s_0) < 0$ 代表物体在 P_0 点的平衡是稳定的；$F^{(n)}(s_0) > 0$ 代表物体的平衡是不稳定的.
2. 设 n 是偶数，则不论 $F^{(n)}(s_0)$ 的正负，物体在 P_0 点是在不平衡的稳定状态中的.

相关变化率问题

例 11.3.10 一长为 $10m$ 的梯子斜倚于一面墙，其靠墙一段开始沿墙向下滑动. 当梯子顶端距地面 $6m$ 时梯子乡下滑动的速度是 $2m/s$，问此时梯子底端沿地面滑动的速度是多少?



解: 见上图，有关系：$x^2+y^2=z^2=100$. 两边对时间变量 t 求导，得

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

代入 $x=8$，$y=6$，$\frac{dy}{dt}=-2$，得

$$8\frac{dx}{dt}-6(-2)=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}\,m/s$$

例 11.3.11 气球中的空气以 $2cm^3/min$ 的速度泄漏，试问：当气球直径为 $1cm$ 时气球的表面积以多大速率收缩?

解: 气球体积为 $V=\frac{4\pi r^3}{3}$，气球表面积为 $S=4\pi r^2$.

已知：$\frac{dV}{dt}=-2cm^3/min$ 时，求当 $r=1$ 时，$\frac{dS}{dt}=?$

$$\frac{dS}{dt}\Big|_{r=1}=8\pi\,\frac{dr}{dt}\Big|_{r=1}$$

$$\frac{dV}{dr}=4\pi r^2\frac{dr}{dt} \quad\Longrightarrow\quad \frac{dr}{dt}\Big|_{r=1}=\frac{-2}{4\pi}=-\frac{1}{2\pi}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{dS}{dt}\Big|_{r=1}=8\pi\times\left(-\frac{1}{2\pi}\right)=-4cm^2/min$$

11.4 利用微分、泰勒展开做近似计算

在 x_0 点附近，考虑自变量增量 $\Delta x = x - x_0$，则若函数 $f(x)$ 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导，我们有如下 n 阶（泰勒多项式）近似

$$f(x_0+\Delta x) \approx \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x)}$$

其中 $\boxed{L_{f,x_0}(x) := P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$ 为 f 在点 x_0 处的线性近似.

特别地，微分 $df|_{x=x_0}$ 不是别的，正是线性近似的增量，即

$$df|_{x=x_0} = \Delta L_{f,x_0}(x) = L_{f,x_0}(x_0+\Delta x) - L_{f,x_0}(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$$

近似之误差，若仅论其作为无穷小的阶，则由下给出（带皮亚诺余项的泰勒公式）

$$f(x) = P_n(x) + o((\Delta x)^n) \quad \text{或} \quad R_n(x) := f(x) - P_n(x) = o((\Delta x)^n)$$

利用带拉格朗日余项的泰勒公式，可更好控制逼近的误差:

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{其中}\,\xi\,\text{介于}\,x_0\,\text{和}\,x\,\text{之间}}$$

记 $\theta := \frac{\xi - x_0}{x - x_0} \in (0,1)$，则 $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$，那么上公式可写成

$$\boxed{f(x) = P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad 0<\theta<1.}$$

上面公式是我们利用微分、泰勒展开做近似计算的基础.

例 11.4.1 利用微分计算 $\sin 46^o$ 和 $\sqrt[10]{1.003}$ 的近似值.

解: 由于 $\sin 46^o = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right)$. 令 $f(x) = \sin x$，$x_0 = \frac{\pi}{4}$，$\Delta x = \frac{\pi}{180}$. 利用线性近似（微分），得

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$\sin 46^o = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4} \approx 0.7071(1+0.0175) \approx 0.7194$$

同理, 令 $f(x)=\sqrt[10]{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=0.003$, 则 $f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{10}x^{-\frac{9}{10}}\Big|_{x=1}=\frac{1}{10}$.

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt[10]{1.003}\approx 1+\frac{0.003}{10}=1.0003$$

例 11.4.2 考虑由方程 $3(x^2+y^2)^2=100xy$ 定义的隐函数关系 $y=y(x)$, 利用微分估计当 $x=3.1$ 时 y 的值.

解: 方程两边对 x 求导, 得

$$6(x^2+y^2)(2x+2yy')=100y+100xy'$$

注意到当 $x=3$ 时, $y=1$, 代入上关系, 得

$$6(9+1)(6+2y')=100+300y' \quad\Longrightarrow\quad y'(3)=\frac{13}{9}$$

所以曲线上过点 $(3,1)$ 的切线方程为: $y-1=\frac{13}{9}(x-3)$, 即 $y=\frac{13}{9}x-\frac{30}{9}$. 而所谓利用微分做近似计算, 几何上来看, 就是在切线上计算相应数量的改变量, 故当 x 和 3 接近时, 对函数值 y, 有如下（线性）近似

$$y\approx\frac{13}{9}x-\frac{30}{9} \quad\Longrightarrow\quad y(3.1)\approx\frac{103}{90}\approx 1.14$$

定义 11.4.1（误差估计）设某个量的准确值是 x_0, 近似值是 x, 则称 $|\Delta x|=|x-x_0|$ 为用 x 近似 x_0 的绝对误差（*absolute error*); 称 $\frac{\Delta x}{|x|}$ 是用 x 近似 x_0 的相对误差（*relative error*）. 若 $|x-x_0|=|\Delta x|\le\delta$, 则称 δ 为用 x 近似 x_0 的最大绝对误差（*maximum absolute error*), 而称 $\frac{\delta}{|x|}$ 为用 x 近似 x_0 的最大相对误差（*maximum relative error*）.

例 11.4.3 测量球的半径 r, 它的准确度应如何才能使由此算出的体积的相对误差不超过 1%.

解: 球的体积 V 和半径 r 的关系是 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, 则测量体积的相对误差为

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right|\approx\left|\frac{dV}{V}\right|=\left|\frac{4\pi r^2\Delta r}{\frac{4}{3}\pi r^3}\right|=\frac{3|\Delta r|}{r}$$

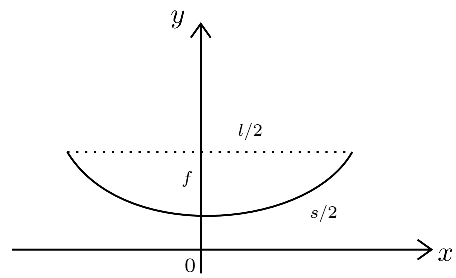
欲使 $\left|\frac{\Delta V}{V}\right|\le 1\%$, 只需

$$\left|\frac{\Delta r}{r}\right|\le\frac{1}{3}\%\approx 0.03\%$$

故将半径的测量相对误差控制在 0.03% 以内, 才可保证体积的相对误差不超过 1%.

例 11.4.4 设两端悬挂着的链条长为 s，跨度为 l，垂度为 f，常用近似公式（*c.f.* 例 *11.3.7*）

$$s \approx l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l}$$



将 s 看成为 f 的函数，则有

$$ds \approx \frac{16}{3}\frac{f}{l}df \quad \Longrightarrow \quad df \approx \frac{3l}{16f}ds$$

由此可估计 s 的微小变化 ds 引致的垂度变化的一阶近似 df.

例 11.4.5 用微分近似计算 $\log_{10} 101$，并估算近似的误差.

解： 考虑 $f(x) = \log_{10} x$，当 $x = x_0 = 100$ 时，$f(x_0) = 2$. 令 $\Delta x = 1$，利用微分做近似计算，得

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

但根据拉格朗日中值定理，又有

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(\xi)\Delta x \qquad x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$$

故线性近似的误差为

$$|f(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) + f'(x_0)\Delta x)| = |(f'(\xi) - f'(x_0))|\,\Delta x$$

由于 $f'(x) = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{M}{x}$ $(M := \frac{1}{\ln 10} = 0.43429\cdots)$，$f'(x_0) = \frac{M}{100}$，故线性近似为

$$\log_{10} 101 \approx \log_{10} 100 + \frac{M}{100} = 2.00434\cdots$$

误差估计为

$$\left|\frac{M}{\xi} - \frac{M}{100}\right| \xlongequal{\xi=100+\theta,\ 0<\theta<1} \frac{M\theta}{100(100+\theta)} \leq$$

$$\leq \frac{M}{100(100+\theta)} < \frac{M}{100^2} < 0.00004\cdots$$

注记 11.4.1 用带拉格朗日余项的泰勒公式，有

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0+\theta\Delta x)}{2!}(\Delta x)^2 \quad 0<\theta<1$$

$$\text{即有}\quad \log_{10}101=2.00434\cdots-\frac{M}{2(100+\theta)^2}$$

故误差有如下估计

$$\frac{M}{2(100+\theta)^2}<\frac{M}{2(100)^2}<0.00002\cdots \quad (\text{跟之前估计的数量级一致})$$

例 11.4.6 函数 e^x 的带拉格朗日余项的马克劳林公式为

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad 0<\theta<1$$

$$\Longrightarrow \quad e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad 0<\theta<1$$

为了对 e 近似到误差小于 $\frac{1}{10^7}$，只需

$$\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<\frac{1}{10^7} \quad \Longrightarrow \quad (n+1)!>3\times 10^7$$

我们只需确定 n，使得 $(n+1)!$ 的位数是 7. 为此，设

$$\begin{aligned}(n+1)! &= a_m 10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_1 10+a_0\\ &= 10^m\underbrace{\left(a_m+\frac{a_{m-1}}{10}+\cdots+\frac{a_1}{10^{m-1}}+\frac{a_0}{10^m}\right)}_{=:\gamma<10}\end{aligned}$$

其中 $a_i\in\{0,1,\cdots,9\}$ 且 $a_m\neq 0$. 两边取对数，得 $\log_{10}(n+1)!=$

$$=\log_{10}(n+1)+\log_{10}n+\cdots+\log_{10}2=m+\log_{10}\gamma$$

令 $m=7$，计算得知 $n=10$ 是满足上条件的最小正整数，此时算出 e 的近似为

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{10!}\approx 2.71828181$$

近似计算 $\sqrt[m]{A}$：先选一整数 a，使得

$$A = a^m + b \quad \text{或} \quad A = (a+1)^m - c$$

使得 $\frac{b}{a^m}$ 或 $\frac{c}{(a+1)^m}$ 中有一个小于 1，则有

$$A^{\frac{1}{m}} = (a^m + b)^{\frac{1}{m}} = a\left(1 + \frac{b}{a^m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\text{或} \quad A^{\frac{1}{m}} = ((a+1)^m - c)^{\frac{1}{m}} = (a+1)\left(1 - \frac{c}{(a+1)^m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

然后利用下面展开可进行近似运算及误差估计

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+ +\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1} \quad 0<\theta<1$$

例 11.4.7 计算 $(1000)^{\frac{1}{5}}$，准确到 10^{-6}.

解： $\sqrt[5]{1000} = \sqrt[5]{1024-24} = 4\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{5}} =$

$$= 4\left[1 - \frac{1}{5}\frac{3}{128} - \frac{1}{5}\frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2 - \frac{1}{5}\frac{4}{10}\frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3 + R_3\left(\frac{3}{128}\right)\right]$$

$$\text{即} \ \sqrt[5]{1000} \approx 4\left[1 - \frac{1}{5}\frac{3}{128} - \frac{1}{5}\frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2 - \frac{1}{5}\frac{4}{10}\frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3\right] \approx 3.9810720$$

下面分析误差项

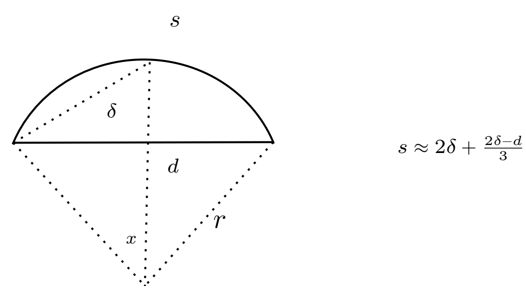
$$4\left|R_3\left(\frac{3}{128}\right)\right| = 4\left|\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)\left(-\frac{14}{5}\right)}{3!}\left(1-\frac{3\theta}{128}\right)^{-\frac{19}{5}}(1-\theta)^3\left(-\frac{3}{128}\right)^4\right|$$

$$= \frac{4}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}\cdot\left(\frac{3}{128}\right)^4\cdot\left(1-\frac{3\theta}{128}\right)^{-\frac{4}{5}}\underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1-\frac{3\theta}{128}}\right)^3}_{<1} <$$

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}\cdot\left(\frac{3}{128}\right)^4\cdot\underbrace{\left(1-\frac{3}{128}\right)^{-\frac{4}{5}}}_{<\left(1-\frac{3}{128}\right)^{-\frac{4}{5}}<\frac{128}{125}} < \frac{3^5\cdot 7}{5^7\cdot 2^{17}} = \frac{3^2\cdot 63}{2^4\cdot 64}10^{-7} < \frac{27}{16}10^{-7}$$

例 11.4.8 （弧长的惠更斯（*Huygens*）公式）设圆的半径为 r，圆心角 $2x$ 所对应的弦长为 d，弧长为 s，又设 θ 所对应的弦长为 δ，则有如下近似

$$s \approx 2\delta + \frac{2\delta - d}{3}, \qquad \left| s - 2\delta - \frac{2\delta - d}{3} \right| < r\frac{x^5}{180}$$



证明： 注意到

$$d = 2r\sin x \xlongequal{0<\theta<1} 2r\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos(\theta x)}{120}x^5\right) \xlongequal[0<\theta'<1]{\theta':=\cos\theta x} 2r\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{\theta'}{120}x^5\right)$$

$$\delta = 2r\sin\frac{x}{2} \xlongequal{0<\theta<1} 2r\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \frac{\cos(\theta x)}{3840}x^5\right) \xlongequal[0<\theta''<1]{\theta'':=\cos\theta x} 2r\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \frac{\theta''}{3840}x^5\right)$$

而 $s = 2rx$，为得到 s, d, δ 之间的近似线性关系，我们设 $s \approx Ad + B\delta$，则有

$$2rx \approx Ad + B\delta = 2r\left(\left(A + \frac{B}{2}\right)x - \left(\frac{A}{6} + \frac{B}{48}\right)x^3 + \left(\frac{\theta'}{120}A + \frac{\theta''}{3840}B\right)x^5\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} A + \frac{B}{2} = 1 \\ \frac{A}{6} + \frac{B}{48} = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{8}{3} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad s \approx 2\delta + \frac{2\delta - d}{3}$$

$$\text{误差} \quad \left| s - 2\delta - \frac{2\delta - d}{3} \right| < 2r\left(\frac{1}{120} \cdot \frac{1}{3}\right)x^5 = r \cdot \frac{x^5}{180} \qquad \square$$

例 11.4.9 设物体的静止质量（*rest mass*）为 m_0，根据狭义相对论（*special relativity*），运动物体的动能由下公式给出

$$K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

其中 v 为物体运动速度，当 v 远小于光速 c 时，$\frac{v^2}{c^2}$ 为一小量. 利用近似

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\quad\Longrightarrow$$

$$K=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)\approx m_0c^2\cdot\frac{v^2}{2c^2}=\frac{1}{2}m_0v^2\text{（经典力学中的动能公式）}$$

例 11.4.10 在利用下公式近似 $\ln 2$ 时

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{(\theta x)^{n+1}}{n+1}x^{n+1}\quad 0<\theta<1$$

如需准确度到 10^{-3}，则要求

$$\frac{\theta^{n+1}}{n+1}<\frac{1}{n+1}<0.001\quad\Longrightarrow\quad n\geq 1000$$

得计算到展开的 1000 项才可以，不太好用，为得到更有效的近似计算，操作如下

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)\approx$$

$$\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right)$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)$$

令 $x=\frac{1}{3}$，只取前四项，便有

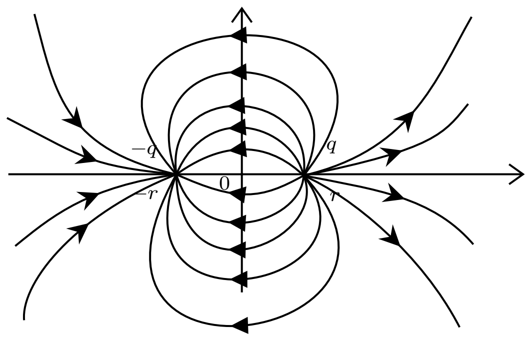
$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^7\right)=0.69313475\cdots$$

同真实值 $\ln 2=0.69314728\cdots$ 已相当接近了. 我们下面分析其计算有效性的根源：上面近似公式的误差为

$$error=\left|(-1)^{2n-1}\frac{\theta'^{2n}}{2n}-(-1)^{2n-1}\frac{\theta''^{2n}}{2n}\right|=\frac{\left|\theta'^{2n}-\theta''^{2n}\right|}{2n}<$$

$$<\frac{|(\theta'^n+\theta''^n)(\theta'^n-\theta''^n)|}{2n}<\frac{|(\theta'^n-\theta''^n)|}{n}\quad 0<\theta',\theta''<1$$

例 11.4.11（电偶极矩（*electric dipole moment*））电偶极矩衡量正电荷与负电荷分布的分离状况，即电荷系统的整体极性.



电量为 q 的电荷产生的电场强度为 $E = \frac{kq}{r^2}$，其中 k 为比例常数，r 为到电荷的距离. 将电荷分别为 q 和 $-q$ 的正负电荷放置于 $(r, 0)$ 和 $(-r, 0)$ 处，形成一电偶极子，则它在 $(x, 0)$ 处的电场强度为

$$E = \frac{kq}{(x-r)^2} - \frac{kq}{(x+r)^2} = \frac{kq}{x^2\left(1-\frac{r}{x}\right)^2} - \frac{kq}{x^2\left(1+\frac{r}{x}\right)^2} \approx$$

$$kq\left[\left(1+\frac{2r}{x}+\frac{3r^2}{x^2}+\frac{4r^3}{x^3}+\cdots\right)-\left(1-\frac{2r}{x}+\frac{3r^2}{x^2}-\frac{4r^3}{x^3}+\cdots\right)\right] \approx \frac{4rq}{x^3}$$

例 11.4.12 所有气体在稀薄极限条件下性质相同，即在一定温度 T 下气体体积 V 与压力 P 满足理想气体的状态方程：$PV = NkT$，其中 N 是气体的总分子数，k 是玻尔兹曼常数.

为了描述气液相变，范德瓦尔斯考虑了气体分子间的两种基本作用：

1. 每个分子具有一定体积 b，因此气体活动的有效体积应为 $V - Nb$;
2. 气体分子间在远距离上有微弱的相互吸引，相当于补充了一点“内压力”，使 P 增加到 $P + \left(\frac{N}{V}\right)^2 a$.

由此，便将理想气体的状态方程修正为

$$\left(P + \left(\frac{N}{V}\right)^2 a\right)(V - Nb) = NkT$$

这就是著名的范德瓦尔斯方程.

稀薄气体极限是指密度 $\frac{N}{V}\to 0$ 的极限状态. 不难求解出

$$
\begin{aligned}
P &= NkT(V-Nb)^{-1}-\frac{N^2}{V^2}a = kT\frac{N}{V}\frac{1}{1-b\frac{N}{V}}-a\frac{N^2}{V^2} \\
&\xlongequal{\text{按 } \frac{N}{V} \text{ 展开}} kT\frac{N}{V}\left(1+b\frac{N}{V}+b^2\left(\frac{N}{V}\right)^2+\cdots\right)-a\frac{N^2}{V^2} \\
&= kT\left(\frac{N}{V}+\left(b-\frac{a}{RT}\right)\left(\frac{N}{V}\right)^2+\sum_{n=3}^{\infty}b^{n-1}\left(\frac{N}{V}\right)^n\right)
\end{aligned}
$$

显然, 在稀薄气体极限 $\frac{N}{V}\to 0$ 下, 略去 $\frac{N}{V}$ 的高阶项, 便得到理想气体的状态方程.

例 11.4.13 (胡克 (*Hook*) 定律) 一粒子在一保守力 F 作用下沿着 x-轴运动, 它受一保守力 F 的作用下的运动质点. 这里保守力 (*conservative force*) 是指: $F=-\frac{dU}{dx}$, 其中 $U(x)$ 称为势能函数 (引力、电力等都是保守力).

假设 x_* 是势能函数 $U(x)$ 的一个极小值点, 不妨假设 $U(x_*)=0$ (这相当于改变一个势能标度, 不影响实际物理过程). 在该点附近将 $U(x)$ 泰勒展开

$$
\begin{aligned}
U(x) &= U(x_*)+U'(x_*)(x-x_*)+\frac{U''(x_*)}{2!}(x-x_*)^2+\cdots \\
&\approx \frac{U''(x_*)}{2}(x-x_*)^2>0 \ \text{(因 } x_* \text{ 是极小值点)}
\end{aligned}
$$

记 $k:=U''(x_*)>0$, 则在极小势能点附近, 粒子受到的力可近似为

$$
\boxed{F=-\frac{dU}{dx}=-k(x-x_*)}
$$

这便是一般的胡克定律. 虽然胡克定律最早是针对弹簧振动而提出来的, 但从上面的讨论可知: 它是势能极小点附近做泰勒展开的自然结果, 具有非常普遍的意义. 由此也可瞥见何以简谐振动如此频繁出现于自然界的某种根由了.

若 $F=-k(x-x_*)$, 不妨设 $x_*=0$, 则由牛顿第二定律, 知在该力作用下, 粒子的运动方程为 (设粒子质量为 1)

$$
\frac{d^2x}{dt^2}=-kx
$$

不难看出对任意常数 C_1, C_2, 函数 $x(t)=C_1\cos(\sqrt{k}t+C_2)$ 满足上方程.

即它描述一简谐振动, 其振动周期为 $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$, 振幅为 $|C_1|$, 初始相位为 C_2.

11.5 方程近似解

在实际应用中，我们常需要求解函数方程 $f(x) = 0$ 的近似解（或数值解），它可以按一定程序给出实际解的一些列越来越准确的近似. 探究近似解的算法及其误差控制是非常重要的课题，计算机及人工智能的兴起更是促进了这方面的长足发展.

最直观、最常用的寻求 $f(x) = 0$ 的根的方法是所谓“二分法”，其思路已在介绍“零点存在定理”，“费马定理”及“中值定理”时反复强调，下面是其操作程序.

二分法求根： 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$，则我们知道方程 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 上一定有根，即 $\exists x^* \in (a,b)$，使得 $f(x^*) = 0$. 另假设 x^* 是 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内的唯一根.

1. 记 $[a_1,b_1] = [a,b]$，取 x_1 为 $[a_1,b_1]$ 的中点，即 $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$；
2. 计算 $f(x_1)$
   (a) 若 $f(x_1) = 0$，则 x_1 即为所求之 x^*，计算结束；
   (b) 若 $f(x_1) \neq 0$，按如下规则得到区间 $[a_2,b_2]$
      i. 若 $f(x_1)f(b_1) < 0$, 此时 $f(x) = 0$ 的根在 $[x_1,b_1]$ 中, 取 $a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$.
      ii. 若 $f(x_1)f(b_1) > 0$, 此时 $f(x) = 0$ 的根在 $[a_1,x_1]$ 中, 取 $a_2 = a_1$, $b_2 = x_1$.

   显然 $x^* \in [a_2,b_2]$，且 $[a_2,a_1]$ 的长度是 $[a_1,b_1]$ 的一半.
3. 取 x_2 为 $[a_2,b_2]$ 的中点.
4. 类似地，若 x_2 是方程的根，则计算结束；否则返回到 2.(b) 得到区间 $[a_3,b_3]$，它满足：$x_* \in [a_3,b_3]$，且 $[a_3,b_3]$ 的长度是 $[a_2,a_1]$ 的一半.
5. 如是重复，直到找到根或找到满足精度的近似解.

比如找到了 x_k 作为 x^* 的近似，此时

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k}$$

所以，当执行到

$$k = \left[\log_2 \frac{b-a}{\epsilon}\right]^+$$

步时，必有

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b-a}{2^k} \leq \epsilon$$

例 11.5.1 求方程 $x\ln x-1=0$ 的近似解，且误差小于 10^{-2}.

解: 设 $f(x)=x\ln x-1$. 由于 $f(1)=-1<0, f(2)=\ln 4-1>0,$ 且 $f'(x)=1+\ln x$ 在 $(1,2)$ 恒正，故方程在 $(1,2)$ 内有唯一实根. 下面用二分法求其近似解.

$$x_0=1.5, \qquad f(1.5)=\ln 1.5^{1.5}-1<0;$$

$$x_1=1.75, \qquad f(1.75)=1.75\ln 1.75-1=\ln 2.663-1<0;$$

$$x_2=1.875, \qquad f(1.875)=1.875\ln 1.675-1=\ln 3.25-1>0;$$

$$x_3=1.8125, \qquad f(1.8125)>0;$$

$$x_4=1.78125, \qquad f(1.78125)>0;$$

$$x_5=1.765625, \qquad f(1.765625)>0;$$

$$x_6=1.7578125, \qquad f(1.7578125)<0.$$

故知根在区间 (1.7578125, 1.765625) 内，该区间长度已小于 0.01，取满足精度要求的方程的近似解可取为

$$x^*\approx 1.76$$

二分法由直观简洁的优点，但其收敛速度不够快，而下面的*牛顿迭代法*则是收敛速度较快的一种数值求根法.

迭代法求近似解思路： 将求解 $f(x)=0$ 根的问题转变为求解方程 $x=F(x)$ 的根的问题，即满足 $f(x)=0$ 的 x^* 也满足

$$x^*=F(x^*)$$

选一个适当的*初始值* x_0，按 $x_{k+1}=F(x_k), \quad k=0,1,2,\cdots$

产生数列 $\{x_k\}$ 的过程称为*迭代*（*iteration*），函数 $F(x)$ 称为是*迭代函数*. 如数列 $\{x_k\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x^*$，则 x^* 即是方程 $x=F(x)$ 的根，亦即是 $f(x)=0$ 的根.

为评估用 x_k 逼近 x^* 是否满足特定的精度要求：$|x_k-x^*|\le\epsilon$，我们通常比较相领两次的迭代值是否满足：$|x_{k+1}-x_k|\le\epsilon$

例 11.5.2 从初始值 $x_0=1$ 开始，利用以下递归关系可迭代计算 $\sqrt{2}$ 的近似值

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}$$

这个算法的收敛速度非常快，比如

$$x_2 = 1.5, \quad x_3 \approx 1.416, \quad x_4 \approx 1.414215$$

下面估计其误差，并分析迭代法的收敛速度.

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_n - \sqrt{2})^2$$

显然当迭代步数 n 增加时，$x_n \to \sqrt{2}$ 的收敛速度是越来越快的. 即后一次迭代的误差是前一次迭代误差的平方.

牛顿迭代法: 设 x^* 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中唯一的根, 假设 $f(x)$ 具有**二阶连续导数**, 且 $\forall a \in [a,b]$，都有 $f'(x) \neq 0$. 为考察 x 和 x^* 的依存关系，从而设计出近似 x^* 的策略，我们将方程 $f(x^*) = 0$ 在 x 处泰勒展开，得

$$f(x^*) = f(x) + f'(x)(x^* - x) + f''(\xi)\frac{(x^* - x)^2}{2} = 0 \quad \xi \text{ 介于 } x \text{ 和 } x^* \text{ 之间}$$

$$\Longrightarrow \quad x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(\xi)}{f'(x)}\frac{(x^* - x)^2}{2}$$

由此可见，当 $x \to x^*$ 时，上式最后一项趋于零，从而可知

$$\lim_{x \to x^*}\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

故可选取迭代函数为

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

则满足 $x^* = F(x^*)$ 的 x^* 也满足 $f(x^*) = 0$，其值可按如下递归式迭代计算

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots}$$

此迭代算法即著名的牛顿迭代法. 该算法有很直观的几何解释.

取 $[a,b]$ 内的点 x_0 作为初始值，过 $(x_0, f(x_0))$ 作切线，其方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

从中解得切线与 x 轴的交点的横坐标为

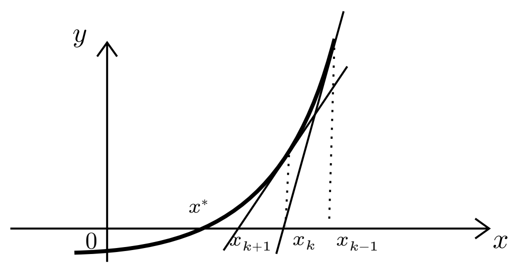
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

将 x_1 作为 x^* 的第一次近似，再过点 $(x_1, f(x_1))$ 作切线，其与 x 轴交点的横坐标 x_2 作为根的第二次近似，即

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

依此继续下次，从第 $k-1$ 次近似值 x_{k-1} 可迭代出根的第 k 次近似如下

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \cdots$$



故牛顿迭代法也称为*牛顿切线法*.

例 11.5.3 我们用牛顿迭代法重新求解例 *11.5.1* 中方程 $x\ln x - 1 = 0$ 的近似解.

解: 取初值为 $x_0 = 2$，然后利用下递归关系迭代

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}\ln x_{n-1} - 1}{1 + \ln x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \cdots \quad \Longrightarrow$$

$$x_1 = 1.7718483; \quad x_2 = 1.7632362; \quad x_3 = 1.7632228; \quad x_4 = 1.7632228$$

显然，为使牛顿迭代法有效，函数 $f(x)$ 需满足一些条件，我们有下面定理.

定理 11.5.1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中有二阶连续导数，且满足条件

1. $f(a)f(b) < 0$;
2. $f'(x)$ 在 (a, b) 保号;
3. $f''(x)$ 在 (a, b) 保号;

取 x_0 是 (a, b) 中满足 $f(x_0)f''(x_0) > 0$ 的点，以它为下面迭代的初始条件

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

则由此迭代而产生的数列 $\{x_k\}$ 单调收敛于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中的唯一解.

注记 11.5.1 定理中的条件 1 保证了方程在 $[a,b]$ 有根；条件 2 保证了函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的根是唯一的；条件 3 保证函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中保持上凸或下凸，从而每一个 x_{k+1} 都在同一方向上必 x_k 更靠近 x^*，因此 $\{x_k\}$ 单调有界，故存在极限，其极限值即是所求方程的根 x^*.

例 11.5.4 用牛顿迭代法求 $\sqrt{2}$ 的近似值.

解： 令 $f(x)=x^2-2$. 需寻求其零点 x^* 的近似值. 由于 $f'(x)=2x$，牛顿迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}$$

此即为例 *11.5.2* 中的迭代策略.

收敛速度分析： 牛顿迭代法的误差为:

$$x_{n+1}-x^*=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-x^*=\frac{(x_n-x^*)f'(x_n)-f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\xlongequal[\text{令 } x=x_n]{f(x^*)=f(x)+f'(x)(x^*-x)+f''(\xi)\frac{(x^*-x)^2}{2}=0}\frac{f''(\xi)(x_n-\xi)^2}{2f'(x_n)}\quad \xi\in(x^*,x_n)$$

由于 $f''(\xi)>0$，$f'(x_n)\neq 0$，故误差随着 n 的增长以越来越快的速度减少.

误差估计： $f(x_n)=f(x_n)-f(x^*)\xlongequal{\exists\xi \text{ 介于 } x_n \text{ 和 } x^* \text{ 之间}}f'(\xi)(x_n-x^*)$

$$\Longrightarrow\quad x_n-x^*=\frac{f(x_n)}{f'(\xi)}\quad \text{记 } m=\min_{x\in[a,b]}|f'(x)|\quad\Longrightarrow\quad \boxed{|x_n-x^*|\leq\frac{|f(x_n)|}{m}}$$

例 11.5.5 为求 $x^3-2x^2-4x-7=0$ 的近似解，令 $f(x)=x^3-2x^2-4x-7$，则 $f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$；$f''(x)=6x-4$. 在 $x=-2/3$ 处取极大值，$x=2$ 处取极小值，且 $f(-2/3)<0$，$f(2)<0$. 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$. 故 $f(x)=0$ 只有一个根. 注意到 $f(3)=-10$，$f(4)=9$，从而方程的根 $x^*\in(3,4)$. 取初始值为 $x_0=4$，采用牛顿切线法，得到

$$x_1=4-\frac{f(4)}{f'(4)}=4-\frac{9}{28}\approx 3.68;\quad x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=3.68-\frac{1.03}{21.9}\approx 3.63$$

$m=\min_{x\in[3,4]}f'(x)=11$，而 $f(x_2)=-0.042$，故 x_2 逼近 x^* 的误差有如下估计

$$|x_2-x^*|\leq\frac{|f(x_2)|}{m}=\frac{0.042}{11}<0.01$$

11.6 零点定理、中值定理、泰勒展开相关

零点定理的一些应用

例 11.6.1 设 $f(x) \in C[0,1], f(0)=0, f(1)=1$. 证明: $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$.

证明: 构造 $F(x)=f(x)+x-1$, 则 $F(x) \in C[0,1]$, 且 $F(0)=-1$, $F(1)=1$, 则由零点定理知 $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=1-\xi$. $\square$

例 11.6.2 确定方程 $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}=0$ 的实根个数，并判定它们的范围.

解: 方程等价于 $(x-2)(x-3)+2(x-1)(x-3)+3(x-1)(x-2)=0$. 令左边的函数为 $F(x)$, 由于 $F(x)=0$ 是个二次方程，故它最多有两个实根. 注意到 $F(1)>0$, $F(2)<0$, $F(3)>0$, 故由零点定理可知

$$\exists x_1 \in (1,2);\ \exists x_2 \in (2,3),\ \text{使得}\ F(x_1)=F(x_2)=0 \qquad \square$$

例 11.6.3 设 $f(x) \in C[0,1]$, 且 $f(0)=f(1)=0$, 证明: $\forall l\,(0<l<1)$, $\exists x_0 \in [0,1]$, 使得 $f(x_0)=f(x_0+l)$.

证明: 如果 $f(l)=0$, 则取 $x_0=0$ 即可. 故假设 $f(l) \neq 0$, 不妨设 $f(l)>0$（<0 的情形类似可证）. 构造函数 $F(x)=f(l+x)-f(x)$, 我们要确定 $F(x)$ 的零点.

$$F(0)=f(l)-f(0)=f(l)>0, \qquad F(1-l)=f(1)-f(1-l)=-f(1-l)$$

1. 若 $f(1-l)=0$, 取 $x_0=1-l$, 此时 $f(x_0)=f(x_0+l)$;
2. 若 $f(1-l)>0$, 则 $F(1-l)<0$, 故由零点定理知 $\exists x_0 \in (0,1-l)$, 使得 $F(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=f(x_0+l)$. $\square$

例 11.6.4 设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $\forall x \in [a,b]$, $\exists y \in [a,b]$, 使得 $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明: $\exists \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi)=0$.

证明: 任取一点 $x \in [a,b]$, $\exists x_1 \in [a,b]$, 使得 $|f(x_1)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$; 同理 $\exists x_2 \in [a,b]$, 使得

$$|f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|f(x_1)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |f(x)|$$

一般地, $\exists x_n \in [a,b]$, 使得

$$|f(x_n)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |f(x)| \quad \xRightarrow{\exists M>0,\ \text{使得}\ |f(x)| \leq M} \quad 0 \leq |f(x_n)| \leq M\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$. 取 $\{x_n\}$ 的一收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设它收敛于 x_0, 由 f 的连续性, 知 $f(x_0)=0$. $\square$

罗尔定理的推广形式及应用

例 11.6.5（罗尔定理的推广形式）设 (a,b) 为有限或无穷区间，$f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$ (有限或无穷)，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

证明: 假设 $f(x)$ 不恒等于 A, 则 $\exists x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) \neq A$, 不妨设 $f(x_0) > A$. 由于 $f(x) \in D(a,b)$，且在边界 a，b 处的单侧极限存在都为 A，故 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续. 利用介质定理，对任意 $\mu\,(A < \mu < f(x_0))$，$\exists x_1 \in (a,x_0)$，$x_2 \in (x_0,b)$，使得

$$f(x_1) = f(x_2) = \mu$$

在 $[x_1,x_2]$ 上运用罗尔定理，可知 $\exists \xi \in (x_1,x_2) \subseteq (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$. 如果 $A = \infty$，在 (a,b) 内任意取一点 x_0，则仿照上面推理仍可得结论. □

在第八节例 *8.3* 中,我们还证明了罗尔定理的另一种推广形式:设 $f(x) \in C[a,+\infty) \cap D(a,+\infty)$（其中 a 为常数）. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$，则 $\exists \xi \in (a,\,+\infty)$，使得 $f'(\xi) = 0$. 它可被用来处理类似下例这样的问题.

例 11.6.6 设 $f(x) \in D[0,+\infty)$，且 $0 \le f(x) \le \frac{x}{1+x^2}$，证明:

$$\exists \xi > 0,\ \text{使得}\ \ f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

证明: 构造函数 $F(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}$，显然 $F(x) \in C[0,+\infty) \cap D(0,+\infty)$，且由夹逼定理，知

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

即 $F(0) = F(+\infty)$. 故由推广形式的罗尔定理知，$\exists \xi \in (0,+\infty)$，使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2} = 0 \qquad \square$$

利用罗尔定理求解零点（根）的问题

例 11.6.7 证明方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内有有且仅有一个实根.

证明: 记 $f(x) = x^3 - 3x + 1$, 则 $f(x) \in C[0,1]$, 且 $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, 故由零点定理, 知 $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 0$. 由于当 $x \in (0,1)$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) < 0$, 故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上时单调减少的，从而 ξ 是函数在 $(0,1)$ 上的唯一零点. □

例 11.6.8 若 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ 有 $n+1$ 个（不同）实根，则 $f(x) \equiv 0$.

证明: 设 $f(x) = 0$ 的 $n+1$ 个不同零点分别是 (按从小到大排列)：$x_0, x_1, \cdots, x_n$.

则根据罗尔定理，知 $\exists\xi_1\in(x_0,x_1)$，$\exists\xi_2\in(x_1,x_2),\cdots,\exists\xi_n\in(x_{n-1},x_n)$，使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=\cdots=f'(\xi_n)=0$$

即

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1=0$$

有 n 个不同零点. 同样的推理逻辑表明：$f''(x)=0$ 有 $n-1$ 个不同零点；更一般地，$f^{(k)}(x)=0$ 有 $n-k+1$ 个不同零点. 特别地，$f^{(n)}(x)=0$ 有 1 个零点，但这是荒谬的，因为 $f^{(n)}(x)=n!a_n$，除非 $f\equiv 0$，否则是不可能的. □

例 11.6.9 下面定义的函数被称为是n 次勒让德多项式:

$$p_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

证明：$p_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 上恰有 n 个不同的实根.

证明: 不难看出当 $m<n$ 时, $q_{2n-m}(x):=\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^n$ 中含有因子 (x^2-1), 故当 $m<n$ 时, $q_{2n-m}(x)$ 都有实根 ±1. 特别地, 当 $m=0$ 时, $q_{2n}(x)=(x^2-1)^n$ 只有两个根 ±1. 由罗尔定理知，$q_{2n-1}(x)=q'_{2n}(x)$ 在 $(-1,1)$ 中必有一根，记之为 x_{11}. 即 $q_{2n-1}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上至少有三个不同的根: $-1,x_{11},1$. 再用罗尔定理, 知 $q_{2n-2}(x)=q'_{2n-1}(x)$ 在 $(-1,x_{11})$ 和 $(x_{11},1)$ 中至少各有一个根, 分别记之为 x_{21}, x_{22}, 则 $q_{2n-2}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上至少有四个不同的根：$-1,x_{21},x_{22},1$. 如此继续下去，可归纳证明：$q_{2n-m}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上至少有 $m+2$ 个不同的根: $-1,x_{m1},x_{m2},\cdots,x_{mm},1$. 特别地, 当 $m=n-1$ 时, $q_{n+1}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上至少有 $n+1$ 个不同的根，从而由罗尔定理知：$q_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 在 $[-1,1]$ 上至少有 n 个不同的根. 但 $q_n(x)$ 本身是个 n 次多项式，由代数基本定理，结合上面的结论，知 $q_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上恰有 n 个不同的根. □

转化为罗尔定理的类型

例 11.6.10 设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

分析： 如要使用罗尔定理，需构造 $F(x)$，使得 $F'(\xi)=0\ \Rightarrow\ f'(\xi)-f(\xi)=0$. 直接的思路是 $F(x)=f(x)-\int_a^x f(x)dx$，但不满足 $F(a)=F(b)$ 的条件. 但可将 $f'-f$ 看成是 uf 求导后表达式中的一个因子，即需找到 u，使得

$$(uf)'=u'f+uf'\overset{\exists v}{=\!=}v(f-f')\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}u'=v\\ u=-v\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad u'=-u$$

即 u 满足 $\frac{du}{u}=-dx$，将其看成是对 $f(u)=g(x)$ 两边求微分的结果，则有

$$f'(u)du=g'(x)dx \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f'(u)=\frac{1}{u} \\ g'(x)=-1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(u)=\ln u+C_1 \\ g(x)=-x+C_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \ln u=-x+C_2-C_1 \quad \Longrightarrow \quad u=Ce^{-x} \text{ 其中 } C\text{为任意常数}$$

不妨取 $C=1$，即知需构造函数 $F(x)=e^{-x}f(x)$，则它满足 $F(a)=F(b)=0$，满足需求.

证明: 令 $F(x)=e^{-x}f(x)$，则 $F\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $F(a)=F(b)=0$，根据罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$e^{-\xi}f'(\xi)-e^{-\xi}f(\xi)=0 \quad \Longrightarrow \quad f'(\xi)=f(\xi) \qquad \square$$

注记 11.6.1 题设同例 *11.6.10*，若要证明 $\forall\gamma\in\mathbb{R}$, $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\gamma f(\xi)$，按上面的分析，只需令 $F(x)=e^{-\gamma x}f(x)$ 即可.

例 11.6.11 设 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明: $\forall\lambda>0$，$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)-\lambda\left(f(\xi)-\xi\right)=1$$

分析: 需找 $F(x)$ 使得 $F'(x)$ 包含因子 $f'(x)-\lambda\left(f(x)-x\right)-1$，设 $F=u(f-x)$

$$F'=u(f'-1)+u'(f-x)\overset{\exists v}{=\!=\!=}v(f'-\lambda(f-x)-1) \quad \Longrightarrow \quad u'=-\lambda u$$

$$\Longrightarrow \quad u=Ce^{-\lambda x} \ (C\text{为任意常数})$$

证明: 构造 $F(x)=e^{-\lambda x}\left(f(x)-x\right)$，则 $F(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$. 由于

$$F(0)=0,\ F(1)=-e^{-\lambda}<0,\ F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}}>0$$

在 $[\frac{1}{2},1]$ 上应用介值定理，知 $\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $F(\eta)=0$，然后在 $[0,\eta]$ 上应用罗尔定理，知 $\exists\xi\in(0,\eta)\subseteq(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\lambda\left(f(\xi)-\xi\right)=1 \qquad \square$$

例 11.6.12 设 $f(x)\in D[1,+\infty)$，且 $f(x)$ 有界，$f(1)=0$，证明：$\exists\xi\in(1,+\infty)$，使得 $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.

分析： 同前，希望找到 F，使得 F' 包含 $xf'-f$，假设 $F=uf$，则

$$(uf)'=u'f+uf'\overset{\exists v}{=\!=}v(xf'-f)\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}u'=-v\\ u=vx\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad u'=-\frac{u}{x}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{du}{u}=-\frac{dx}{x}$$

将它看成是对 $g(u)=h(x)$ 两边求微分的结果，即有 $g'(u)du=h'(x)dx$

$$\begin{cases}g'(u)=\frac{1}{u}\\ h'(x)=-\frac{1}{x}\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}g(u)=\ln u+C_1\\ h(x)=\ln\frac{1}{x}+C_2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad\ln u=\ln\frac{1}{x}+C_2-C_1\quad\Longrightarrow\quad u=\frac{C}{x}$$

不妨取 $C=1$.

证明： 构造 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $F(x)\in D[1,+\infty)$. 因为 $F(1)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ($f(x)$ 有界)，故由推广形式的罗尔定理，知 $\exists\xi\in(0,+\infty)$，使得

$$F'(\xi)=0\quad\Longrightarrow\quad\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\quad\Longrightarrow\quad\xi f'(\xi)-f(\xi)=0\qquad\square$$

例 11.6.13 设 f 在 $[0,1]$ 上二阶可微，且 $f'(0)=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

分析： 需证明 $(1-\xi)f''(\xi)-2f'(\xi)=0$. 希望将 ξ 它看出某个满足罗尔定理条件的函数 F 的导数的零点. 由等式的形式，可尝试对 $(1-x)f'(x)$ 进行修正. 假设 $F(x)=u(x)(1-x)f'(x)$，它需满足：

$$F'(x)=u(x)(1-x)f''(x)+(u(x)(1-x))'f'(x)=$$

$$u(x)(1-x)f''(x)+u'(x)(1-x)f'(x)-u(x)f'(x)\overset{\exists v(x)}{=\!=\!=}v(x)(1-x)f''(x)-2v(x)f'(x)$$

$$\Longrightarrow\quad\begin{cases}u(x)(1-x)=(1-x)v(x)\\ u'(x)(1-x)-u(x)=-2v(x)\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}u'(x)(1-x)+u(x)=0\\ v(x)=u(x)\end{cases}$$

$$\implies \quad \frac{du}{u}=\frac{dx}{x-1} \quad \implies \quad \text{不妨取 } u(x)=x=1$$

证明: 令 $F(x)=(1-x)^2f'(x)$，则 $F(0)=f'(0)=0$，$F(1)=0$，且 $F(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$，故有罗尔定理，知 $\exists\xi\in(0,1)$，使得

$$F'(\xi)=0 \quad \implies \quad (1-\xi)^2f''(\xi)-2(1-\xi)f'(\xi)=0 \quad \square$$

中值的估算

例 11.6.14 对函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 和 $f(x)=\frac{1}{x}\ (x>0)$，求出下面对应有限增量公式（$a.k.a$ 拉格朗日中值定理）中的 θ，并计算 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\theta$.

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$$

解: 对 $f(x)=ax^2+bx+c$，$f'(x)=2ax+b$. $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$，故 $\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2=(2a(x+\theta\Delta x)+b)\,\Delta x$$

$$\implies \quad 2a\theta(\Delta x)^2=a(\Delta x)^2 \quad \implies \quad \theta=\frac{1}{2}$$

对 $f(x)=\frac{1}{x}$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$，故 $\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{(x+\theta\Delta x)^2}\Delta x \quad \implies \quad x(x+\Delta x)=(x+\theta\Delta x)^2$$

$$\implies \quad x(1-2\theta)=\theta^2\Delta x \quad \implies \quad \theta=\frac{\sqrt{x^2+x\Delta x}-x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\theta=x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}-1}{\Delta x}\overset{\sqrt{1+t}\sim 1+\frac{t}{2},\ t\to 0}{=\!=\!=\!=\!=\!=}x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2x}}{\Delta x}=\frac{1}{2}$$

11.6.15 设 $f''(x)$ 在区间 I 上连续，且在 $x_0\in I$ 处，有 $f''(x_0)\neq 0$，则在下面有限增量公式

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

中的 θ 满足:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$$

证明： 对 $f'(x)$ 在 $[x_0,\, x_0+\theta\Delta x]$ 上运用拉格朗日中值定理，知 $\exists\,\alpha\in(0,1)$，使得

$$f'(x_0+\theta\Delta x)=f'(x_0)+f''(x_0+\alpha\theta\Delta x)\theta\Delta x$$

从而

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x)&=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x=\\ &=f(x_0)+\left[f'(x_0)+f''(x_0+\alpha\theta\Delta x)\theta\Delta x\right]\Delta x\\ &=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+f''(x_0+\alpha\theta\Delta x)\theta(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

但另一方面，利用二阶泰勒展开，有

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0+\beta\Delta x)}{2}(\Delta x)^2\qquad 0<\beta<1$$

对比 $f(x_0+\Delta x)$ 的两种表达，可得

$$f''(x_0+\alpha\theta\Delta x)\theta=\frac{f''(x_0+\beta\Delta x)}{2}$$

由于 $f''(x)$ 在 x_0 处连续，故当 $\Delta x\to 0$ 时，上式变为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$. □

例 11.6.16 设 $f(x)$ 在一区间 I 上 $n+1$ 阶可导，且其 $n+1$ 阶导函数连续. 又在 $x_0\in I$ 处，有 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$，则有泰勒展开如下

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta\Delta x)}{n!}(\Delta x)^n$$

求证：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

证明： 我们展开到第 $n+1$ 阶，得（$0<\alpha<1$）

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\alpha\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

对比两个表达式，可得

$$\underbrace{f^{(n)}(x_0+\theta\Delta x)-f^{(n)}(x_0)}_{=f^{(n+1)}(x_0+\theta\beta\Delta x,\ 0<\beta<1)\theta\Delta x}=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\alpha\Delta x)}{n+1}\Delta x\quad\Longrightarrow\quad f^{(n+1)}(x_0+\theta\beta\Delta x)\theta\ =$$

$$=\ \frac{f^{(n+1)}(x_0+\alpha\Delta x)}{n+1}\quad\xRightarrow{f^{(n+1)}(x)\text{ 连续}}\quad\theta\xrightarrow{\Delta x\to 0}\frac{1}{n+1}\qquad\square$$

例 11.6.17 证明当 $x \geq 0$ 时，$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$.

证明： 对函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[x, x+1]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x+1}+\sqrt{x}=2\sqrt{x+\theta(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad \theta(x)=\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2}{4}-x=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2}-\frac{x}{2} \geq \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad \theta'(x)=\frac{2x}{4\sqrt{x(x+1)}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\frac{1}{2}<0$$

$$\Longrightarrow \quad \theta(x) \leq \lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

例 11.6.18 证明：当 $|x| \leq 1$ 时，$\exists\, \theta \in (0,1)$，使得

$$\arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-(\theta x)^2}}, \quad 且 \lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

证明： 对 $f(x)=\arcsin x$ 在 $[0,x]$ $(|x| \leq 1)$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\exists\, \theta \in (0,1), 使得\ f(x)-f(0)=f'(\theta x)x \quad \Longleftrightarrow \quad \arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-(\theta x)^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\theta^2=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x-x^2}{x^2\arcsin^2 x} \xlongequal{\arcsin^2 x \sim x^2} \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x-x^2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+2x\times\frac{x^3}{6}+o(x^5)\right)-x^2}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/3}{x^4}=\frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \square$$

拉格朗日和柯西中值定理的应用

例 11.6.19 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f(x)>0$. 求证：$\exists\, c \in (a,b)$，使得

$$\ln\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)$$

分析： 欲证等式等价于 $\frac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{f(c)}$，从而看出它本质上是对 $\ln f$ 应用拉格朗日中值定理的结果.

证明： 令 $F(x)=\ln f(x)$. 在 $[a,b]$ 上对它应用拉格朗日定理，得 $\exists\in(a,b)$，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c)\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{f(c)}\qquad\Box$$

例 11.6.20 设 $a,b>0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^\xi(a-b)$$

分析： 上式两边同除 ab，得到 $\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}=(1-\xi)e^\xi\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$. 马上联想到 $\frac{e^x}{x}$，然而该函数的导数的形式与题意不符，故舍弃. 但变量替换 $x\to\frac{1}{x}$ 可破僵局.

解： 令 $F(x)=xe^{1/x}$，则 $F(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，由拉格朗日中值定理知 $\exists\eta\in\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$，使得

$$F\left(\frac{1}{b}\right)-F\left(\frac{1}{a}\right)=F'(\eta)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}=\left(e^{\frac{1}{\eta}}-e^{\frac{1}{\eta}}\frac{1}{\eta}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

令 $\xi=\frac{1}{\eta}$，则 $\xi\in(a,b)$，且

$$\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}=e^\xi(1-\xi)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\qquad\Box$$

例 11.6.21 设 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$, 证明: $\exists\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $abf'(\xi)=\eta^2f'(\eta)$.

分析： 貌似头绪全无，但题目本身暗示我们应该运用中值定理两次，首先，拉格朗日中值定理给出：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，则

$$abf'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

问题转化为证明：$\exists\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta^2}}$，思路由此畅然——应派柯西中值定理上场.

证明： 对 $f(x)$ 和 $g(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理，知 $\exists\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}}$$

又由拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，结合上等式，知

$$\frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{\frac{a-b}{ab}}\quad\Longrightarrow\quad\eta^2f'(\eta)=abf'(\xi)\qquad\Box$$

例 11.6.22 设 $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$，$0 \le a < b \le \frac{\pi}{2}$，证明：$\exists \xi_1, \xi_2 \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2} = f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$$

分析： 乍看一团乱麻，细思全是唬人．题目暗示利用中值定理两次，我们分而治之，逐一击破．既然 ξ_1 出现在 $\frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}$ 之中，那先对 f 和 $\sin$ 运用柯西中值定理，知 $\exists \xi_1 \in (a,b)$ ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\sin b - \sin a} = \frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}$$

而 ξ_2 出现在 $\frac{f'(x_2)}{\sin\xi_2}$ 中，对 f 和 $\cos$ 运用柯西中值定理，知 $\exists \xi_2 \in (a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\cos b - \cos a} = \frac{f'(\xi_2)}{-\sin\xi_2}$$

$$\text{从而有}\quad \frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}(\sin b - \sin a) = -\frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}(\cos b - \cos a)$$

$$\Longrightarrow \quad f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1} = -f'(\xi_2)\frac{\cos b - \cos a}{\sin b - \sin a}$$

证明： 由上分析知，只需证明三角等式

$$\tan\frac{a+b}{2} = -\frac{\cos b - \cos a}{\sin b - \sin a}$$

分别对 $\gamma = a$，$\gamma = b$ 应用“万能公式”

$$\sin\gamma = \frac{2\tan\frac{\gamma}{2}}{1+\tan^2\frac{\gamma}{2}}; \qquad \cos\gamma = \frac{1-\tan^2\frac{\gamma}{2}}{1+\tan^2\frac{\gamma}{2}}$$

上式右边等于

$$-\frac{\frac{1-\tan^2\frac{b}{2}}{1+\tan^2\frac{b}{2}} - \frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}}{\frac{2\tan\frac{b}{2}}{1+\tan^2\frac{b}{2}} - \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}} = -\frac{\left(1-\tan^2\frac{b}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{a}{2}\right) - \left(1-\tan^2\frac{a}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{b}{2}\right)}{2\left(\tan\frac{b}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{a}{2}\right) - 2\left(\tan\frac{a}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{b}{2}\right)} =$$

$$-\frac{2\tan^2\frac{a}{2} - 2\tan^2\frac{b}{2}}{2\left(\tan\frac{b}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{a}{2}\right) - 2\left(\tan\frac{a}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{b}{2}\right)} = -\frac{\left(\tan\frac{a}{2}+\tan\frac{b}{2}\right)\left(\tan\frac{a}{2}-\tan\frac{b}{2}\right)}{\left(\tan\frac{b}{2}-\tan\frac{a}{2}\right)\left(1-\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\right)}$$

$$= \frac{\tan\frac{a}{2}+\tan\frac{b}{2}}{1-\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}} = \tan\frac{a+b}{2} \qquad \square$$

例 11.6.23 $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$ $(0 \le a < b,\ f(a) \ne f(b))$ 证明：$\exists \xi, \eta \in (a,b)$，使

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$$

分析： 题目提示利用中值定理两次，先对 f 在 $[a,b]$ 上运用拉格朗日中值定理，知 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$，即 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 即需证明：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

证明： 将上分析中的线索“黏合”即可. $\square$.

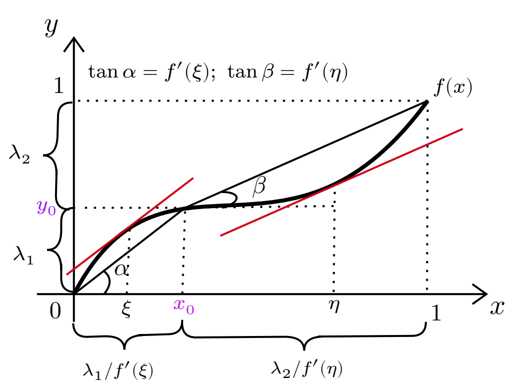
例 11.6.24 设 $f(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$，且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 给定 $a, b > 0$，证明：$\exists \xi, \eta \in (0,1)$, $\xi \ne \eta$，使得

$$a).\quad \frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b; \qquad b).\quad af'(\xi) + bf'(\eta) = a+b$$

分析： 等式 $a)$ 等价于

$$\underbrace{\frac{a}{a+b}}_{\lambda_1} \frac{1}{f'(\xi)} + \underbrace{\frac{b}{a+b}}_{\lambda_2} \frac{1}{f'(\eta)} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\lambda_1}{f'(\xi)} + \frac{\lambda_2}{f'(\eta)} = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

为求破解思路，将上等式解析为几何图景，然后直观其背后的“玄（弦）机”. 由拉格朗日中值定理，ξ 和 η 分别对应函数图形的两根斜率分别为 $f'(\xi)$ 和 $f'(\eta)$ 弦线（即联结两端点的割线）. 设两弦线的倾角分别为 α 和 β，则 $\tan\alpha = f'(\xi), \tan\beta = f'(\eta)$.



如果可选满足上条件的两弦线，使得它们在 y-轴方向上的投影分别是 λ_1，λ_2，则 $\frac{\lambda_1}{f'(\xi)}$ 和 $\frac{\lambda_2}{f'(\eta)}$ 的几何含义分别为两选线在 x-轴方向的投影. 则问题转变为：构造两条弦线，使得它们在 y-轴方向上的投影分别是 λ_1 和 λ_2；在 x-轴方向上的投影分别为 $\frac{\lambda_1}{f'(\xi)}$

和 $\frac{\lambda_2}{f'(\eta)}$，且满足：

$$\lambda_1+\lambda_2=1;\qquad \frac{\lambda_1}{f'(\xi)}+\frac{\lambda_2}{f'(\eta)}=1$$

这是容易办到的，在 y-轴取一点 $y_0=\lambda_1$（由于 $0<\lambda_1<1$，这是可行的），则根据介值定理，必 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=y_0$. 则联结 $(0,0)$ 和 (x_0,y_0) 的弦线在 y-轴和 x-轴方向上的投影分别为 λ_1 和 $\frac{\lambda_1}{\tan\alpha}$；而联结 (x_0,y_0) 和 $(1,1)$ 的弦线在 y-轴和 x-轴方向上的投影分别为 λ_2 和 $\frac{\lambda_2}{\tan\beta}$. 最后，在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 上分别运用拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in(0,x_0)$，$\exists\eta\in(x_0,1)$，使得 $f'(\xi)=\tan\alpha$; $f'(\eta)=\tan\beta$ 即可.

a) 的证明: 令 $\lambda_1=\frac{a}{a+b}\in(0,1)$，有闭区间上连续函数的介值定理，知 $\exists x_0$，使得 $f(x_0)=\lambda_1$. 在 $[0,x_0]$，$[x_0,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in(0,x_0)$，$\exists\eta\in(x_0,1)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{\lambda_1}{x_0};\qquad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-\lambda_1}{1-x_0}=\frac{\lambda_2}{1-x_0}$$

$$\Longrightarrow\quad x_0=\frac{\lambda_1}{f'(\xi)};\quad 1-x_0=\frac{\lambda_2}{f'(\eta)}\quad\Longrightarrow\quad \frac{\lambda_1}{f'(\xi)}+\frac{\lambda_2}{f'(\eta)}=1\quad\square$$

注记 11.6.2 不难将上面的结论推广为命题：设 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$，且 $f(0)=0$, $f(1)=1$，任取 n 各正数 $k_1,\cdots,k_n$，证明：$\exists[0,1]$ 中互不相等的数 $\xi_1,\cdots,\xi_n$，使得下式成立

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(\xi_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i$$

证明: 令 $m=\sum_{i=1}^n k_i$，$\lambda_i=\frac{k_i}{m}$，则 $0<\lambda_i<1$，且 $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$. 由介值定理，$\exists x_1\in(0,1)$，使得 $f(x_1)=\lambda_1$；又由于 $\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1$，由介值定理，$\exists x_2\in(x_1,1)$，使得 $f(x_2)=\lambda_1+\lambda_2$；归纳可知，$\exists x_i\in(x_{i-1},1)$，使得 $f(x_i)=\sum_{k=1}^i\lambda_k$，$i=1,2,\cdots,n$. 然后利用拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$，使得 $f'(\xi_i)=\frac{\lambda_i}{x_i-x_{i-1}}$，即

$$\frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)}=x_i-x_{i-1}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=1\qquad\square$$

b) 的证明: $af'(\xi)+bf'(\eta)=a+b$ 等价于 $\frac{a}{a+b}f'(\xi)+\frac{b}{a+b}f'(\eta)=1$. 为此，在 $\left[0,\frac{a}{a+b}\right]$ 和 $\left[\frac{a}{a+b},1\right]$ 上应用拉格朗日中值定理，知 $\exists\xi\in\left(0,\frac{a}{a+b}\right)$，$\exists\eta\in\left(\frac{a}{a+b},1\right)$，使得

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right)-f(0)=f'(\xi)\frac{a}{a+b};\quad f(1)-f\left(\frac{a}{a+b}\right)=f'(\eta)\left(1-\frac{a}{a+b}\right)$$

$$\Longrightarrow\quad 1=f(1)-f(0)=\frac{a}{a+b}f'(\xi)+\frac{b}{a+b}f'(\eta)\qquad\square$$

利用中值定理推出新的中值定理

例 11.6.25 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微，证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

证明: 利用在 $\frac{a+b}{2}$ 的一阶泰勒展开，可对 $f(a)$ 和 $f(b)$ 分别估值如下:

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

两式相加，并稍加整理，得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{(b-a)^2}{8}\left(f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\right)$$

对 $f''(x)$ 运用导函数的介值定理（达布定理），知 $\exists\,\xi\in(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{1}{2}\left(f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\right)\qquad\square$$

用泰勒展开来估计导数

例 11.6.26 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$，若 $|f''(x)|\leq 2$，证明 $\forall\,x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\leq 1$.

证明: 将 $f(x)$ 在任意一点 $x\in[0,1]$ 处泰勒展开，并利用它来估计 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的值，有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x)^2\quad 0<\xi_1<x$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2\quad x<\xi_2<1$$

两式相减，得

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2\right]$$

$$\Longrightarrow\quad |f'(x)|\leq\frac{1}{2}\cdot 2\left(x^2+(1-x)^2\right)=x^2+(1-x)^2\leq 1$$

我们用到了

$$x^2+(1-x)^2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=1\quad\square$$

例 11.6.27 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f'(a)=f'(b)=0$,证明:$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$f''(\xi)\geq 4\frac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$$

证明: 为利用条件 $f'(a)=f'(b)=0$,我们考虑在 a,b 处的二阶泰勒展开如下

$$f(x)=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,\quad \xi\text{ 介于 } x \text{ 和 } a\text{ 之间}$$

$$f(x)=f(b)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-b)^2,\quad \eta\text{ 介于 } x \text{ 和 } b\text{ 之间}$$

为出现 $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$,在上两式中令 $x=\frac{a+b}{2}$,得到

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\ \xi_1\text{ 介于 }\frac{a+b}{2}\text{ 和 } a\text{ 之间}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\ \xi_2\text{ 介于 }\frac{a+b}{2}\text{ 和 } b\text{ 之间}$$

两式相减,得

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{2}\left(f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\Longrightarrow\quad |f(b)-f(a)|=\frac{1}{8}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|(b-a)^2\leq$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\right)\leq\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$$

其中

$$f''(\xi)=\max\left\{|f'(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\right\}$$

从而

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4|(f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\qquad\square$$

12 附录：高阶微分

一个自然的问题是微分的微分该如何计算?

设 $y=f(x)$，则 $dy=f'(x)dx$. 显然，dy 作为函数是同时依赖于 x 和 dx 的，故对其微分相当于对乘积函数 $f'(x)dx$ 进行微分. 利用莱布尼茨法则，有

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx+f'(x)d(dx)$$

$$=(f''(x)dx)\,dx+f'(x)d^2x=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x$$

在变量替换 $x=g(t),y=f(g(t))$ 下，我们有

$$dx=g'(t)dt,\quad d^2x=g''(t)dt^2+g'(t)d^2t$$

另一方面 $dy=f'(x)dx=f'(g(t))g'(t)dt$，且 $d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x=$

$$=f''(g(t))(g'(t)dt)^2+f'(g(t))\left(g''(t)dt^2+g'(t)d^2t\right)$$

$$=\left(f''(g(t))g'(t)^2+\underbrace{f'(g(t)g''(t))}_{\text{多出一项}}\right)dt^2+f'(g(t))g'(t)d^2t$$

所以，二阶微分不具有形式不变性!

上面波浪线下的公式是二阶微分的完整表达. 在应用中，一般将 $dy=f'(x)dx$ 中的 dx 看成是固定的，即只考察不同点 x 处在给定相同增量 $dx=\Delta x$ 时函数 y 的线性近似，即微分 $dy|_x(dx)=f'(x)dx$，此时 $d^2x=d(dx)=0$，故有

$$d^2y=f''(x)\,dx^2$$

上面常被称为 y 的二阶微分（虽然它不是完整的二阶微分）. 从而在形式上，我们有如下二阶导数的表示符号

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$$

类似地常将 $f^{(n)}(x)$ 也写成 $f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$. 因为，如果将 d^2y 只看成是 x 的函数，则其微分

$$d^3y=d(d^2y)=d\left(f''(x)dx^2\right)=f'''(x)dx^3\quad\cdots$$

$$\cdots\quad d^ny=d(d^{n-1}y)=d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})=f^{(n)}(x)dx^n$$