hw_2

必做题:

1. 数集 $E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$ 的下确界是多少？证明你的结论.

解: $\inf E=0$

证明: $\forall n, \frac{1}{n}>0$，故 0 为 E 的一个下界

下证明，$\forall \epsilon>0$，$\exists k$，s.t. $\frac{1}{k}<\epsilon+0$

取 $k=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1$，则 $k>\frac{1}{\epsilon}$

所以 $\frac{1}{k}<\epsilon$，$\inf E=0$

2. 对非空数集 E，证明若 $\inf E$ 存在，则其必唯一.

解: 假如 $\inf E$ 不唯一，可设 α 与 α' 为 E 的两不同下确界，

则根据下确界的定义，有 $\alpha\leq\alpha'$ 且 $\alpha'\leq\alpha$，故 $\alpha=\alpha'$，

则若 $\inf E$ 存在，则其必唯一

3. 用定义严格证明：$y=\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.

解: ③ $y=\frac{1}{x^2}>0$ 故有下界
下证明，$\forall M>0$，$\exists x>0$，s.t. $\frac{1}{x^2}>M$
取 $x=\frac{1}{\sqrt{M}+1}<\frac{1}{\sqrt{M}}$
即 $\frac{1}{x^2}>M$
故 $y=\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 无上界即无界

4. 如果数列的一般项可写成 $a_n=f(n)$ 的形式，其中 f 是 $\mathbb{R}$ 上的函数（或至少是 $[1,+\infty)$ 上的函数），证明：如 f 单调增加，则 $\{a_n\}$ 亦单调增加.

解: ④若 f 单调增加
则 $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}(x_1<x_2),\quad f(x_1)\leq f(x_2)$
所以 $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad f(n)\leq f(n+1)$
即 $a_n\leq a_{n+1}$，故 $\{a_n\}$ 单调增加。

5. 数列 $\left\{\frac{n+3}{n+1}\right\}$ 是否单调？是否有界？证明你的论断.

解: (1) 单调性：

设 $x_n=\frac{n+3}{n+1}$，比较前后两项
$x_{n+1}-x_n=\frac{n+4}{n+2}-\frac{n+3}{n+1}=\frac{n^2+5n+4-n^2-5n-6}{(n+2)(n+1)}=-\frac{2}{(n+2)(n+1)}<0$

即 $x_{n+1}<x_n$，故该数列单调递减

(2) 有界性：
因为 $\{x_n\}$ 单调递减
故 $x_n\leq x_1=2$
又因为 $x_n=\frac{n+3}{n+1}=1+\frac{2}{n+1}>1$
故 $1<x_n\leq 2$，该数列有界

6. 数列 $\{x_n\}$ 由 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ 给出，且初始值满足 $0<x_1<1$，证明它是单调的且有下界. 并求其极限.

解: 证明：单调性：
$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)-x_n=-x_n^2$
若 $x_n=0$，则 $x_{n+1}=x_n=0$，矛盾，故 $x_n\neq 0$
所以 $x_{n+1}-x_n<0$

即 $x_{n+1}<x_n$，$\{x_n\}$ 是单调递减的

下界：$0<x_1<1$
注意到 $x_2=x_1(1-x_1)\in(0,1)$
设 $x_k\in(0,1)$，则对 $n=k+1$
有 $x_{k+1}=x_k(1-x_k)\in(0,1)$

故由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有下界

极限：因为 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界，所以 $\{x_n\}$ 存在极限
设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A$
由$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$
得$A=A(1-A)$
$A=0$

故极限为 0

7. 用极限的定义严格证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{2n+13}=\frac{3}{2}$.

解: 证明：$\forall\epsilon>0$

取 $N=\left[\frac{25}{4\epsilon}-\frac{13}{2}\right]+1$

当 $n>N$ 时，必有

$|x_n-\frac{3}{2}|=\left|\frac{3n+7}{2n+13}-\frac{3}{2}\right|=\frac{25}{2(2n+13)}<\frac{25}{2(2\cdot\frac{25}{4\epsilon}-13+13)}=\epsilon$

所以
$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{2n+13}=\frac{3}{2}$

8. 用极限的定义严格证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

解: 因为
$\frac{n!}{n^n}=\frac{n\cdot(n-1)\cdots1}{n\cdot n\cdots n}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{n}<\frac{1}{n}$

故 $\forall\epsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，有
$\left|\frac{n!}{n^n}\right|<\frac{1}{n}<\epsilon$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

9. 用定义证明 $a_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$ 是无穷小.

解: 证明:

$\forall\epsilon>0,$ 取 $N=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1,$ 则当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right|<\frac{1}{n}<\epsilon$

故 $a_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$ 为无穷小。

10. 用定义证明 $a_n=\frac{n^2+1}{2n-1}$ 是无穷大.

解: 证明:

$\forall G>0,$ 取 $N=[2G]+1,$ 则当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{n^2+1}{2n-1}\right|>\frac{n}{2}>G$

故 $a_n=\frac{n^2+1}{2n-1}$ 为无穷大。

11. 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，$\{y_n\}$ 满足：$\exists\delta>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n\geq N$，有 $|y_n|\geq\delta$，证明 $\{x_ny_n\}$ 是无穷大量.

解: $\forall G>0$，$\exists N_1\in\mathbb{N}$，s.t. 当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n|>G/\delta$
$\exists\delta>0$，$\exists N_2\in\mathbb{N}$，s.t. 当 $n>N_2$ 时，有 $|y_n|\geq\delta$

故 $\forall G>0$，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$
则当 $n>N$ 时，$|x_ny_n|\geq|\delta x_n|>G$

故 $\{x_ny_n\}$ 为无穷大量

12. 举出满足下列要求的数列的例子.

(1) 有界数列但无极限； (2) 无界数列但不是无穷大

解: (1) $a_n=(-1)^n$

(2) $a_n=\begin{cases} n & \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$

选做题：

1. 设数集 E 有上界，证明：数集 $-E := \{x \mid -x \in E\}$ 有下界，且 $\sup E = -\inf(-E)$.

解: (1) 设 E 的上界为 M，即 $\forall x \in E$，有 $x \le M$
对于数集 $-E$，$\forall y \in -E$，$\exists x \in E$，s.t. $y = -x$
因为 $x \le M$，故 $y = -x \ge -M$，故 $-M$ 为 $-E$ 的一个下界

(2)设 E 的上确界为 β，即 $\forall \epsilon > 0$，$\exists x \in E$，s.t. $x > \beta - \epsilon$
对于数集 $-E$，由上式知 $-\beta$ 为 $-E$ 的上界，且 $y = -x$，β 为 E 的最小上界，则 $-\beta$ 为 $-E$ 的最大下界
故 $-\inf(-E) = \beta = \sup E$

2. 对非空数集 A, B，定义其和为 $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ 。证明：若 A, B 皆有上界，则 $A + B$ 亦有上界，且 $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

解:

(1) 设 A 的上界为 M_1，B 的上界为 M_2，即
$\forall x_1 \in A, \, x_1 \le M_1$
$\forall x_2 \in B, \, x_2 \le M_2$
则对于数集 $A + B$,
$\forall x \in (A + B), \, x = x_1 + x_2 \le M_1 + M_2$
故 $A + B$ 亦有上界。

(2) 设 A 的上确界为 β_1，B 的上确界为 β_2，即
$\forall \epsilon > 0, \, \exists x_1 \in A \, \text{s.t.} \, x_1 > \beta_1 - \frac{\epsilon}{2}$
$\forall \epsilon > 0, \, \exists x_2 \in B \, \text{s.t.} \, x_2 > \beta_2 - \frac{\epsilon}{2}$
对于数集 $A + B$,
$\forall \epsilon > 0, \, \exists x \in (A + B) \, \text{s.t.} \, x = x_1 + x_2 > \beta_1 + \beta_2 - \epsilon$
故 $\sup(A + B) = \beta_1 + \beta_2 = \sup A + \sup B$

3. 若数列 a_n 满足 $a_n \le q a_{n-1}$，其中 $a_n > 0, 0 < q < 1$，试用定义证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

解: (3) $\forall \epsilon > 0$，取 $N = \left\lfloor \frac{\ln \epsilon - \ln a_1}{\ln q} \right\rfloor + 1$

当 $n > N$ 时，有 $a_n \le q^{n-1} \cdot a_1 < \epsilon$

故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

4. 设有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = a (a \ne 0)$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 证明 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

解: (4)
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = a \quad (a \ne 0)$

故 $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \, \text{s.t.} \, \left|\frac{a_n}{b_n}\right| > \frac{|a|}{2}$

所以 $|b_n| < |a_n| \cdot \frac{2}{|a|}$

因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \forall\epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \text{s.t.}$ 当 $n > N_2$, $|a_n| < \epsilon \cdot \frac{|a|}{2}$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，

$|b_n| < \epsilon \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \frac{2}{|a|} = \epsilon$

故 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$