hw_5

必做题

1.

(a) 证明：$y=ax+b$（$a\neq 0$）是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线（渐近线的严格定义见讲义《第三讲》附录一）当且仅当

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

或

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax).$$

解:
先证充分性:
若渐近线为 $y=ax+b$，则

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$$

由定义有

$$\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)-ax-b|=0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)-ax|=b$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right|=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$$

故成立.

再证必要性:
将 a,b 代入

$$\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)-ax-b|=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)-ax-b|=0$$

故 $y=ax+b$ 为渐近线.

(b) 计算 $y=\sqrt{3x^2+4x+1}$ 所描绘曲线的渐近线.

解:

(b)
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 故不存在水平渐近线.

对任意 $x_0\in(-2,-1]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 故也不存在铅直渐近线.

设渐近线为 $y=ax+b$
$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+4x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{3}$
$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+4x+1}-\sqrt{3}\,x\right)$

令 $t=\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时 $t\to 0$，代入得：

$$b=\lim_{t\to 0}\left(\sqrt{\frac{3}{t^2}+\frac{4}{t}+1}-\frac{\sqrt{3}}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\sqrt{\frac{3+4t+t^2}{t^2}}-\frac{\sqrt{3}}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3+4t+t^2}-\sqrt{3}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{4}{3}t+\frac{1}{3}t^2}-1\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\sqrt{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}t+o(t)}{t}=\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

因此，渐近线为：

$$y=\sqrt{3}\,x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2. 当 $x\to 0$ 时，确定下列无穷小对于 x 的阶，并确定其主部：

(a) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\quad(x\to 0^+)$

解：
设其阶为 k

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}{x^k}$$

令 $k=\frac{1}{2}$，则

$$\lim_{x\to 0^+}(x^{\frac{1}{6}}-1)=-1$$

所以，为 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小，主部为 $-\sqrt{x}$

(b) $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}\quad(a>0)$

解：

设其阶为 k

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a}}\cdot\frac{x^3}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{3-k}}{\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a}}$$

当 $k=3$ 时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+x^3}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

所以，为 3 阶无穷小，主部为 $\dfrac{x^3}{2\sqrt{a}}$

(c) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$

解:
设其阶为 k

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin x}{x^k(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x})}$$

$$\tan x+\sin x\sim 2x$$

$$\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}\to 2$$

所以，令 $k=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^k\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{k-1}}=1$$

所以，为 1 阶无穷小，主部为 x

(d) $(\cos x)^x-1$

解:
设其阶为 k

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^x-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(\cos x)}-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(\cos x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)]}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+O(x^2)}{x^{k-1}}$$

令 $k=3$，极限为 $-\frac{1}{2}$

所以，为 3 阶无穷小，主部为 $-\frac{x^3}{2}$

3. 求下列各题中的常数 a（或 a,b）：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$

解:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{x-a}\cdot\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^a=e^{3a}=8$$
$$a=\ln 2$$

(b) 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1+ax^2}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+ax^2}-1}{\cos x-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}ax^2+o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}$$
$$=-\frac{1}{2}a=1$$

故 $a=-2$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$**，并指出该计算的几何意义**

解:
]

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-1+\dfrac{2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1-a)x-(b+1)+\dfrac{2}{x+1}\right]$

$1-a=0\Rightarrow a=1$

$-(b+1)=0\Rightarrow b=-1$

因此:

$$a=1,\quad b=-1$$

故渐近线为:

$$y=x-1$$

即 $y=x-1$ 是曲线 $\dfrac{x^2+1}{x+1}$ 的斜渐近线.

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2-bx+1}\right)=2$**，并指出该计算的几何意义**

解:
(d)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2-bx+1}\right)\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-\sqrt{ax^2-bx+1})(3x+\sqrt{ax^2-bx+1})}{3x+\sqrt{ax^2-bx+1}}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-(ax^2-bx+1)}{3x+\sqrt{ax^2-bx+1}}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x^2+bx-1}{3x+\sqrt{ax^2-bx+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}9-a=0\\a=9\end{gathered}$$

代入后:

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx-1}{3x+\sqrt{9x^2-bx+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{9-\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}b=12$$

因此:

$$a=9,\quad b=12$$

故 $y=3x-2$是曲线 $y=\sqrt{9x^2-12x+1}$ 的斜渐近线.

4. 计算下列极限（可用无穷小（大）替换）：

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解:

原式 = $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{o(x^2)}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1)\ln(1+x)}{\tan x\sqrt{1-x^2}-1}$

解:

原式= $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[x+o(x)][x+o(x)]}{[x+o(x)]-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+o(x^2)}{x-1+o(x)}=0$

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos(ax)}{\ln\cos(bx)}\quad(a,b\neq0)$

解:

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1-\frac{1}{2}a^2x^2+o(x^2)\right]}{\ln\left[1-\frac{1}{2}b^2x^2+o(x^2)\right]}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}a^2x^2+o(x^2)}{-\frac{1}{2}b^2x^2+o(x^2)}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}a^2+o(1)}{-\frac{1}{2}b^2+o(1)}\\
&=\frac{a^2}{b^2}
\end{aligned}$$

(d) $\lim\limits_{x\to0}\left(2x+3x^2\right)^{1/x}$

解:

原式 = $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln(2x+3x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}[\ln x+\ln(3x+2)]}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}[\ln x+3x+1+o(x)]}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(ex)}{x}+3}$

$=e^{-\infty}=0$

5. 已知当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小，且 $\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$,求 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$

解：

$$
\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}
$$

$$
=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{(\ln 3)x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin 2x\cdot(\ln 3)x}
$$

$$
=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x\cdot(\ln 3)x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^2\ln 3}=5
$$

$$
\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=10\ln 3
$$

6. 求下列函数的间断点，并确定其类型；若为可去间断点，补充或修改定义使之连续：

(a) $y=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$

解：

$y=\frac{x-1}{x+1}$

$x=-1$ 分母为 0，分子为 $-2\neq0$，故为 **无穷间断点**

$x=0$ 原函数无定义，但极限存在：

$$
\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-1}{1}=-1
$$

故为 **可去间断点**

补充定义 $y(0)=-1$

$x=1$ 原函数无定义，但极限存在：

$$
\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=0
$$

故为 **可去间断点**

补充定义 $y(1)=0$

(b) $y = \ln|\cos x|$

解:
(b)

当 $\cos x = 0$ 时，函数无定义
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}|\cos x| \to 0^+$

所以 $\ln|\cos x| \to -\infty$，故为 **无穷间断点**

(c) $y = \left[\frac{1}{|x|} + 1\right]$

解:

$x = 0$ 因为 $\frac{1}{|x|} \to +\infty$，故 $y \to +\infty$，为 **无穷间断点**

$x = \pm\frac{1}{n-1}$，$n = 2, 3, \ldots$ 为 **跳跃间断点**

(d) $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$

解:

$x = 1$

当 $x \to 1^-$，$y \to 0$

当 $x \to 1^+$，$y \to 1$

$x = 1$为 **跳跃间断点**

7. 求下列各题中的常数 a, b 的值，使得函数连续：

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{b(\sqrt{1+x}-1)}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

解:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin ax}{x} = a = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{b(\sqrt{1+x} - 1)}{x} = \frac{b \cdot (\frac{1}{2}x)}{x} = \frac{1}{2}b = 1$$

所以，$a = 1, b = 2$

(b)

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

解:

当 $|x|<1$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+ax^{2n}+bx^{2n-1}}{1+x^{2n}}=1$$

当 $|x|>1$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-2n}+a+bx^{-1}}{1+x^{-2n}}=a+\frac{b}{x}$$

当 $x=1$

$$f(x)=\frac{1+a+b}{2}$$

当 $x=-1$

$$f(x)=\frac{1+a-b}{2}$$

$x\to 1^+$

$$a+\frac{b}{1}=\frac{1+a+b}{2}$$

$x\to -1^-$

$$a+\frac{b}{-1}=\frac{1+a-b}{2}$$

解得 $a=0,b=1$

8. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ e^x+b, & x\le 0\end{cases}$ 的连续性，其中 a,b 是任意常数.

解: $f(0)=1+b$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(e^x+b)=1+b=f(0)$$

$a>0$ 时 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$

$a=0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在

$a<0$ 时 $f(x)$ 当 $x\to 0^+$ 时无穷振荡且振幅 x^a 趋于 $+\infty$，故 $f(0+0)$不存在

综上，$b=-1$ 时，当 $a>0$，使 $f(0)$ 在 0 处连续，否则振荡间断点
$b\ne -1$ 时，当 $a>0$，0 为跳跃间断点
$a\le 0$，0 为振荡间断点

9. 假设 f 在 $[0,4]$ 上连续，且 $f(0)=f(2)=f(4)=1, \quad f(1)=f(3)=-1$.试问：方程 $f(x)=0$ 在 $[0,4]$ 上解的个数?

解：由零点存在定理

在 $(0,1)(1,2)(2,3)(3,4)$ 各有一个零点

故 $f(x)=0$ 在 $[0,4]$ 上至少有 4 个不同的解

10. 证明方程 $x=a\sin x+b$（$a,b>0$）至少有一个正根.

解：

$$f(x)=a\sin x+b-x$$

$$f(0)=b>0$$

$$f(a+b+1)=a\sin(a+b+1)+b-a-b-1$$

$$=a[\sin(a+b+1)-1]-1<0$$

由零点存在定理，$f(x)$ 在 $(0,a+b+1)$ 上至少存在一个正根

11. 证明：对偶数次多项式方程 $f(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x+a_{2n}=0$,若 $a_{2n}<0$，则它至少有两个实根.

解：$f(0)=a_{2n}<0$

因为其为偶数次

所以
$x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$

$x\to-\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$

由零点存在定理，$f(x)=0$ 至少有 2 个实根.

12. 设函数 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$.

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

解：
$h(x)=f(x)-g(x)$
$\quad h(a)<0 \quad h(b)>0$
由零点存在定理，$\exists\xi\in[a,b],h(\xi)=0$

即 $f(\xi)=g(\xi)$

13. 设 $f(x) \in C[0,2]$，且 $f(0)=f(2)$.

证明：存在 $x, y \in [0,2]$，满足 $y-x=1$，使得 $f(x)=f(y)$.

解：
$g(x)=f(x)-f(x+1)$，$\lambda \in [0,1]$

$$g(0)=f(0)-f(1)$$

$$g(1)=f(1)-f(2)=f(1)-f(0)=-g(0)$$

当 $g(0)=0$，则取 $x=0, y=1$

当 $g(0)\neq 0$
$g(0)\cdot g(1)<0$

由零点存在定理
$\exists \xi \in [0,1], g(\xi)=0$

即
$f(\xi)=f(\xi+1)$
$x=\xi, y=\xi+1$

选做题

1. 设 $f(x) \in C(\mathbb{R})$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ （有限值）.

证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

解： $\forall \epsilon>0, \exists X_1>0, s.t. \forall |x|>X_1, |f(x)-A|<1$

故 $\forall x>X_1, |f(x)|\leq |A|+1,$

$f(x)$ 在 $[-X_1, X_1]$ 上有界

$\exists X_2>0, \forall |x|\leq X_1, |f(x)|\leq X_2$

则取 $X_3=\max\{X_1, X_2\}$

$\forall x\in\mathbb{R}, |f(x)|\leq X_3$, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 有界

2. 证明：当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 没有阶.

解： 2、设其阶为 k，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x^k}$ 构建两组数列

$$a_n=\frac{1}{2\pi n},\quad b_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$$
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

$$\sin\frac{1}{a_n}=0,\quad \sin\frac{1}{b_n}=1$$

$$\frac{a_n\sin\frac{1}{a_n}}{a_n^k}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n\sin\frac{1}{b_n}}{b_n^k}=\lim_{n\to\infty}b_n^{1-k}\neq 0$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x^k}$ 不存在
故 k 不存在，阶不存在

3. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\varphi(0)=0$，及 $|f(x)|\le|\varphi(x)|$.

证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解：

$|f(0)|\le|\varphi(0)|=0\Rightarrow f(0)=0$

$-|\varphi(x)|\le f(x)\le|\varphi(x)|$

由夹逼定理

$\lim\limits_{x\to0}-|\varphi(x)|=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}|\varphi(x)|=0$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

4. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $f(0)=f(1)$.

证明：对任意 $n\in\mathbb{N}^+$，存在 $\xi_n\in[0,1]$，使得 $f(\xi_n)=f\left(\xi_n+\frac{1}{n}\right)$.

解：

令 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$

$$S=\sum_{i=0}^{n-1}g(\frac{i}{n})=f(0)-f(1)=0$$

若 $\forall i,g(\frac{i}{n})>0$，则 $S>0$，矛盾
若 $\forall i,g(\frac{i}{n})<0$，则 $S<0$，矛盾

故 $\exists i,s.t.\ g(\frac{i}{n})=0$

或 n 个数中有正有负

$\exists i_1,i_2,\ s.t.\ \ g(i_1)>0,g(i_2)<0$

故 $\exists\xi_n\in(i_1,i_2),s.t.\ g(\xi_n)=0$

故 $\exists\xi_n\in[0,1],s.t.\ f(\xi_n)=f(\xi_n+\frac{1}{n})$

5. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $f(x)$ 只取有理值，若 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=2$，

证明：对任意 $x\in[0,1]$，有 $f(x)=2$.

解： 若 $f(x)$ 不恒等于 2
故 $\exists x_0\in[0,1]$, s.t. $f(x_0)\ne2$
令 $f(x_0)=t,t\in\mathbb{Q}$ 且 $t\ne2$
考虑以 $\frac{1}{3}$ 与 x_0 为端点的区间 I
由于 $f(x)\in C[0,1]$, $f(x)$ 在 I 上连续
对于 2 与 t 之间的任意值 k, $\exists x_k\in I$, s.t. $f(x_k)=k$

若 k 为无理数，$f(x_k)=k$ 不成立

故矛盾，故 $f(x)=2$ 在 $[0,1]$ 上恒成立