

第三讲：曲线积分与曲面积分

目录

1 导言：积分概念再释	3
2 曲线的弧长微分和第一型曲线积分	6
3 曲面的面积	15
4 第一型曲面积分及其应用	24
5 向量场积分概念导引，曲线、曲面的定向	32
6 第二型曲线积分的计算及其应用	42
6.1 利用曲线积分求面积	49
7 第二型曲面积分的计算及其应用	51
8 格林公式和斯托克斯公式	57
8.1 概念背景及核心枢纽	57
8.2 格林公式	63
8.3 平面曲线积分与路径无关的条件	69
8.4 斯托克斯公式与空间空间曲线积分与路径无关的条件	85
8.5 向量场沿曲线的环流、旋度	91
8.6 保守场和势函数	95
9 高斯公式、散度、通量及其它	97
9.1 概念导引	97
9.2 高斯公式计算举例	103
9.3 散度和通量，有源场和无源场	110
9.4 矢量势的不唯一性，规范对称性 (*)	115

9.5 拉普拉斯算子、格林等式与调和函数的平均值性质 (*) 119

10 附录：引力场的泊松方程 128

第三讲：曲线积分与曲面积分

1 导言：积分概念再释

积分的物理意义是数量（向量或更一般的张量）在空间区域上的积累。比如当物理量 Q 分布在区间 $[a, b]$ 上时，设其密度函数为 $\rho(x)$ ，则其总分布量为 $\int_a^b \rho(x)dx$ ，它可看成是“微分形式” $\rho(x)dx$ 同区域 $[a, b]$ 相互作用而产生了一个数。

而 $\rho(x)dx$ 是物理量 Q 的微分，即 $dQ = \rho(x)dx$ ，事实上，密度函数就是通过 $\frac{dQ}{dx}$ 定义的，即

$$\rho(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q(x + \Delta x) - Q(x)}{\Delta x}$$

根据微积分基本定理（或牛顿-莱布尼茨公式）， Q 在 $[a, b]$ 上的分布总量为

$$\Delta Q = Q(b) - Q(a) = \int_a^b dQ = \int_a^b \rho(x)dx$$

定积分概念的推广既可往更高维走（比如多重积分），亦可往更低维走，那么要问：什么是零维积分？

零维的典型图形是一系列离散点 $S := \{p_i\}_{i=1}^n$ ，设物理量 Q 定义在 S 上，记 Q 在 p_i 处的取值为 $Q_i = Q(p_i)$ ，则 Q 在 S 上的“积分”可定义为

$$\int_S Q := \sum_{i=1}^n Q_i$$

更一般地，可考虑带“±”的离散点集，比如 $S = \{p_1, -p_2, p_3, -p_4, -p_5\}$ ，则 Q 在 S 上的“积分”为

$$\int_S Q = Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 - Q_5$$

为凸显积分的“区域可加性”这一根本属性，我们可将上 S 写为点的形式和（差）

$$S = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 - p_5$$

更一般地，我们可以将零维积分区域定义为点的形式“整数线性组合”，即

$$S = a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n \quad \text{其中 } a_i \in \mathbb{Z}$$

并称如上的点的整数线性组合 S 为一条“零维链”——作为零维积分区域，则 Q

在 S 上的积分可定义为

$$\int_S Q = \sum_{i=1}^n a_i Q_i$$

再考虑 $n = \infty$ 的情形，便得到了最一般形式的“零维积分”概念——离散和.

为了说明考虑带“±”的点集的合理性，我们重审一维定积分的情形，由于

$$\int_a^b dQ = - \int_b^a dQ$$

如果将积分区域 $I = [a, b]$ 看成是带方向的线段 \vec{ab} ，并记 $-I := \vec{ba}$ ，则上式可写为

$$\int_I dQ = - \int_{-I} dQ$$

由此可见，定积分的定义天然就蕴含对积分区域的方向性的考量. 如考察方向性，则 $I = \vec{ab}$ 的边界不应是单纯的由其两端点组成的几何 $\{a, b\}$ ，而应是带“±”符号的点集，或端点的整数线性组合，即 $\partial I = b - a$. 如此，则牛顿-莱布尼茨公式可写为

$$\int_{\partial I} Q = \int_I dQ$$

由于积分相当于被积的函数（其实是微分形式，函数看做是0次微分形式）和被积区域“作用”后产生一个数（积分值），将上式中的这种作用分别写成 $\langle \partial I, Q \rangle$ 和 $\langle I, dQ \rangle$ ，则上式可写为如下漂亮形式

$$\langle \partial I, Q \rangle = \langle I, dQ \rangle$$

这体现出来了深刻的对偶性 (*duality*)，即被积对象（微分形式）和积分区域之间相互作用的“盈虚消长”. 即一函数 Q 在有向线段 I 的有向边界 ∂I 上的积分（累积）等于其微分 dQ 在 I 上的积分（累积），并且，1维积分区域 I 降维为其0维边界 ∂I 的同时，0次微分形式（函数） Q 提升为1次微分形式 dQ . 由此也可看出函数层面上的微分运算 d 是对偶于其定义区域上的取边算子 ∂ 的.

那么，上面的概念图景如何往更高维度推广呢？上面考虑的是一维积分转化为零维积分，则下一步是二维积分转化为一维积分，进而三微积分转化为二维积分等等. 这将是本章的主题.

让我们想象，高维的有向积分区域是什么？其有向边界又该如何确定？如何用微分手段来“度量”有向区域上物理量的累积？以及高维积分是如何自然“下降”到其边界上的低一维积分的？

展开畅想之前，我们理应对一维的情形在上面新语境下给出更合理的诠释.

$$a = x_0 \xrightarrow{x_1} \xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_i} \xrightarrow{x_{n-1}} \xrightarrow{x_n} b$$

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{x_0x_1} + \overrightarrow{x_1x_2} + \cdots + \overrightarrow{x_{n-1}x_n}$$

由上图可知

$$\begin{aligned} \int_a^b dQ &= \int_{\overrightarrow{ab}} dQ = \int_{\sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{x_i x_{i+1}}} dQ \xrightarrow{\text{区域可加性}} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\overrightarrow{x_i x_{i+1}}} dQ \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (Q(x_{i+1}) - Q(x_i)) \xrightarrow{\text{相互抵消}} Q(x_n) - Q(x_0) = Q(b) - Q(a) \end{aligned}$$

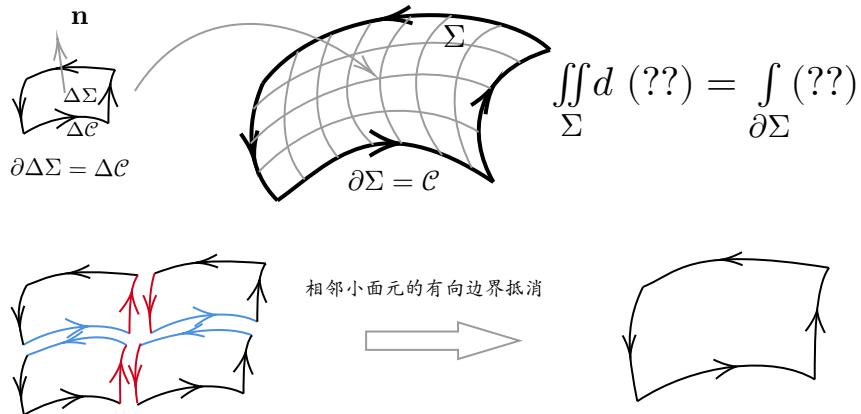
而牛顿-莱布尼茨公式表现为

$$\int_{\overrightarrow{ab}} dQ \xrightarrow{\text{牛顿-莱布尼茨公式}} \int_{\partial(\overrightarrow{ab})} Q = \int_{b-a} Q = Q(b) - Q(a)$$

由此看出，从 1 维积分到 0 维积分过渡的关键在于下面的有向边界的“抵消”机制

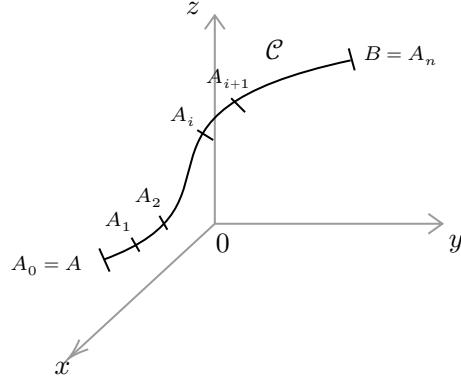
$$\partial \left(\sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{x_i x_{i+1}} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \partial (\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = b - a$$

即将一维链 $\sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ 首尾抵消得到其 0 维边界 $b - a$ ，而刚好 dQ 在 $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ 上的积分，即 Q 在 $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$ 上的变化 $\Delta Q = Q(x_{i+1}) - Q(x_i)$ 与该抵消的机制是相协调的，结合积分的可加性（线性性）便可实现积分的降维。那么，这一“抵消机制”的二维图景又是如何的呢？“比类合谊”，不难用下面的图景“以见指撝”



2 曲线的弧长微分和第一型曲线积分

设某物理量分布于一条空间曲线 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$, 设其密度函数为 $f(x, y, z)$, 则它的总量可按下面方法加以计算.



定义 2.1 (第一型曲线积分) 按积分的一般模式——局部“以直代取”, 然后“见微知著”, 即将曲线 \mathcal{C} 分为一些小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$, $i = 1, \dots, n$. 记第 i 个小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δs_i , 并记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$. 取任点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widehat{A_{i-1}A_i}$, 然后作相应的黎曼和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$$

如果当所有小弧段的最大长度 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上黎曼和的极限存在, 且与对曲线的划分方式和点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法都无关, 则称该极限值是 $f(x, y, z)$ 在曲线 \mathcal{C} 上的第一类曲线积分, 记为

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$$

其中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数, 曲线 \mathcal{C} 称为积分路径, ds 称为弧长微分. 特别地, 若曲线 \mathcal{C} 是一封闭曲线, 即曲线首尾两端点重合, 此时上积分也常记为 $\oint_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$.

第一型曲线积分 $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$ 也称为函数 $f(x, y, z)$ 对弧长的曲线积分.

注记 2.1 如果曲线是平面曲线 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$, 也可仿此定义函数 $f(x, y)$ 对弧长的曲线积分.

另外, 对通常的定积分 $\int_a^b f(x) dx$, 如果恒考虑 $a < b$ 的情形, 此时 dx 非负, 则可将 dx 看成“曲线” \overrightarrow{ab} 上的弧长, 则可将其看作第一型曲线积分; 但如果考察方向性, 即将积分区间 $[a, b]$ 视作有向线段 \overrightarrow{ab} , 则在其反向线段 \overleftarrow{ab} 上时, dx 视作是负的, 故此时不能视作第一型曲线积分, 而应视作第二型曲线积分, 即考虑方向的积分.

注记 2.2 由定义, 由于第一型曲线积分中的弧长微分 ds 是非负的, 所以第一型曲线积分与路径无关, 即在 \widehat{AB} 和 \widehat{BA} 上的积分都相同; 或对曲线 \mathcal{C} 规定一个方向, 并记 $-\mathcal{C}$ 为曲线 \mathcal{C} 的反向曲线, 则 $\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_{-\mathcal{C}} f ds$, 这是它与定积分的不同之处, 也是它有别与其后将定义的第二型曲线积分的根本之处.

既然第一类曲线积分的定义模式类同定积分及重积分的定义模式, 故相应的可积性条件也是类似的, 比如可以证明: 如果 $f(x, y, z)$ 在光滑曲线 \mathcal{C} 上连续, 或 $f(x, y, z)$ 在 \mathcal{C} 上有界且只有有限多个间断点时, 函数在 \mathcal{C} 上是可积的, 即 $\int_{\mathcal{C}} f ds$ 存在.

此外, 第一型曲线积分亦满足积分的根本线性性质, 即对被积对象的线性性——积分作为线性映射和对被积区域的线性性——区域可加性, 在曲线积分的情形, 这将表现为下面的路径可加性.

1. **线性性** 若 f, g 都在曲线 \mathcal{C} 上可积, 则对常数 α, β , 函数 $\alpha f + \beta g$ 也在 \mathcal{C} 上可积, 且有

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) ds = \alpha \int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds + \beta \int_{\mathcal{C}} g(x, y, z) ds$$

2. **路径可加性** 设曲线 \mathcal{C} 由 \mathcal{C}_1 和 \mathcal{C}_2 首尾相接而成, 则 f 在 \mathcal{C} 上可积等价于 f 在 \mathcal{C}_1 和 \mathcal{C}_2 上同时可积, 且有

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_{\mathcal{C}_1} f(x, y, z) ds + \int_{\mathcal{C}_2} f(x, y, z) ds$$

3. **中值定理** 若函数 f 在光滑曲线 \mathcal{C} (即定义曲线的函数是光滑的) 上连续, 则 $\exists (\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{C}$, 使得

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = f(\xi, \eta, \zeta) s_{\mathcal{C}}$$

其中 $s_{\mathcal{C}}$ 是曲线 \mathcal{C} 的弧长, 它可按函数 $f \equiv 1$ 对其的弧长积分来计算, 即 $s_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} ds$

由定义可知, 计算第一型曲线积分的关键就在于确定弧长微分 ds . 如果曲线 \mathcal{C} 由

参数方程给出, 即 $\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) & t \in [\alpha, \beta]. \\ z = z(t) \end{cases}$

如果曲线光滑, 即 $x(t), y(t), z(t)$ 都具有连续导数, 且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时为零,

即 $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \neq 0$, 则 \mathcal{C} 是可求长的, 且其弧长为

$$s_{\mathcal{C}} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

注记 2.3 曲线的光滑性条件等价于下映射的雅克比矩阵 \mathbf{J}_{φ} 是满秩的

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_{\varphi} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

由此可知, 此时弧长微分为 $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$, 而第一型曲线积分, 如其存在, 则可按下计算

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

定理 2.1 如 \mathcal{C} 光滑, 且 f 在 \mathcal{C} 上连续, 则 $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$ 存在, 且其值按上积分计算.

证明: 在曲线 \mathcal{C} 上依次任意插入分点 $A_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, 并记 $A_0 = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$, $A_n = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$. 这对应着参数区间 $[\alpha, \beta]$ 的一个划分

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$$

注意, 这需要假设曲线 \mathcal{C} 是简单的, 即它没有自交点, 也就是不存在不同的参数 t, t' , 单它们对应相同的点.

记小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的长度为 Δs_i , 及 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. 根据弧长公式及中值定理, 知 $\exists t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$, 使得

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \sqrt{x'^2(t_i^*) + y'^2(t_i^*) + z'^2(t_i^*)} \Delta t_i$$

记小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 上对应参数 t_i^* 的点为 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 则有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*)) \sqrt{x'^2(t_i^*) + y'^2(t_i^*) + z'^2(t_i^*)} \Delta t_i$$

由于 $f(x, y, z)$ 在 \mathcal{C} 上连续, 故 $\int_{\mathcal{C}} f ds$ 存在. 又因为 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 是连续

的, 故函数 $f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上可积. 从而当 $\lambda := \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\} \rightarrow 0$ 时, $\lambda' := \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\} \rightarrow 0$, 且上面等式两边的和的极限都为对应积分, 即有

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \quad \square$$

注记 2.4 由于 $\Delta s_i > 0$, 故要求 $\Delta t_i > 0$, 从而上定积分中 t 的下限一定小于上限.

下面讨论几种常见情形

1. 若曲线 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ 是平面曲线, 其参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$. 设 $f(x, y)$ 对 \mathcal{C} 的弧长积分存在, 则其值为

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

2. 如平面曲线 \mathcal{C} 由 $y = y(x)$, $a < x < b$ 描述, 则

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad a < b$$

3. 若曲线 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ 由方程组 (一般方程) $\mathcal{C} : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 即曲线作为两曲面的相交. 当然, 这要求下雅可比矩阵是满秩的

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix}$$

即其三个二阶行列式子式不能全为零. 不失一般性, 假设

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} := \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \neq 0$$

则利用克拉默法则从微分关系 $\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \\ G_x dx + G_y dy + G_z dz = 0 \end{cases}$ 将 dx, dy 用 dz 表

示为

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} -F_z dz & F_y \\ -G_z dz & G_y \\ F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} = -\frac{F_z G_y - F_y G_z}{F_x G_y - F_y G_x} dz$$

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} F_x & -F_z dz \\ G_x & -G_z dz \\ F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}} = -\frac{F_x G_z - F_z G_x}{F_x G_y - F_y G_x} dz$$

由隐函数存在定理, 存在函数关系 $\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$ 使得 $\begin{cases} \frac{dx}{dz} = -\frac{F_z G_y - F_y G_z}{F_x G_y - F_y G_x} \\ \frac{dy}{dz} = -\frac{F_x G_z - F_z G_x}{F_x G_y - F_y G_x} \end{cases}$.

换言之, z 可选为曲线 \mathcal{C} 的参数, 从而 \mathcal{C} 有如下参数方程

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \\ z = z \end{cases} \quad z_1 \leq z \leq z_2 \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1} dz = \\ & = \sqrt{\left(\frac{F_z G_y - F_y G_z}{F_x G_y - F_y G_x}\right)^2 + \left(\frac{F_x G_z - F_z G_x}{F_x G_y - F_y G_x}\right)^2 + 1} dz \\ & = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, y)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right)^2}{\left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right)^2}} dz \\ & = \frac{1}{\left|\left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right)\right|} \sqrt{\left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, y)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right)^2} dz \end{aligned}$$

然后利用下公式计算积分

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_{z_1}^{z_2} f(x(z), y(z), z) ds$$

当然, 在具体中可灵活寻找参数化, 而无需凡例必套上公式求解.

例 2.1 计算 $\int_{\mathcal{C}}(x^2 + y^2)ds$, 其中 \mathcal{C} 是圆心在 $(R, 0)$, 半径为 R ($R > 0$) 的上半圆周.

解: 曲线 \mathcal{C} 的方程为 $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, 即 $x^2 + y^2 = 2xR$, 从而

$$\int_{\mathcal{C}}(x^2 + y^2)ds = 2R \int_{\mathcal{C}}xds \xrightarrow[\substack{ds=Rdt \\ t \in [0, \pi]}]{} 2R \int_0^\pi (R + R \cos t)Rdt = 2\pi R^3$$

或利用极坐标 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 则曲线方程为 $r = 2R \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 被积函数为 r^2 , 而弧长微分为

$$ds = \sqrt{r(\theta) + r'(\theta)}d\theta = \sqrt{4R^2 \cos^2 \theta + 4R^2 \sin^2 \theta}d\theta = 2Rd\theta$$

从而

$$\int_{\mathcal{C}}(x^2 + y^2)ds = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4R^2 \cos^2 \theta d\theta = 2\pi R^3$$

例 2.2 计算曲线积分 $\oint_{\mathcal{C}} x^2 ds$, 其中曲线 \mathcal{C} 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

解 I: 曲线 \mathcal{C} 为球面上一大圆, 我们先求其参数方程. 联立两方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

从中消去 z 可得 \mathcal{C} 于 xy 平面上的如下投影曲线 (椭圆)

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy = R^2$$

可以通过坐标旋转将 xy 消除后利用椭圆的标准参数化, 也可将上方程直接配方为

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos t \\ \frac{x}{2} + y = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{2}{3}}R \cos t \\ y = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t - \frac{R}{\sqrt{6}} \cos t \\ z = -(x + y) = -\frac{R}{\sqrt{6}} \cos t - \frac{R}{\sqrt{2}} \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$[0, 2\pi]$. 故得在该参数下的弧长微分为

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \\ = R \sqrt{\frac{2}{3} \sin^2 t + \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{\sin t}{\sqrt{6}} - \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \right)^2} dt = R dt$$

从而

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2 ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} R \cos t R^2 dt = \frac{2\pi R^3}{3}$$

解 II: 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, $G(x, y, z) = x + y + z$, 则

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y - 2z; \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2z;$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y \implies$$

$$ds = \frac{1}{2|(x-y)|} \sqrt{4(y-z)^2 + 4(x-z)^2 + 4(x-y)^2} dz = \\ = \frac{1}{|x-y|} \sqrt{y^2 + z^2 - 2yz + x^2 + z^2 - 2xz + x^2 + y^2 - 2xy} dz \\ = \frac{1}{|x-y|} \sqrt{2R^2 - 2xy - 2yz - 2xz} dz \xrightarrow[x+y=-z]{2xy=2z^2-R^2}$$

$$\frac{1}{|x-y|} \sqrt{2R^2 - 2z^2 + R^2 + 2z^2} dz = \frac{1}{|x-y|} \sqrt{3R} dz = \frac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2R^2 - 3z^2}} dz$$

\mathcal{C} 在 xy 的投影椭圆的描述为: $2x^2 + 2y^2 + 2xy = R^2$, 与 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 联立, 可得 $R^2 - z^2 + xy = \frac{R^2}{2}$, 从而 $z^2 = \frac{R^2}{2} + xy \leq \frac{R^2}{2} + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{z^2}{4}$, 即知在曲线 C 上 z 满足: $z^2 \leq \frac{2}{3}R^2$, 即 $-\sqrt{\frac{2}{3}}R \leq z \leq \sqrt{\frac{2}{3}}R$. 尚需将 x^2 用 z 来表达, 这较复杂, 但如果注意到曲线 \mathcal{C} 关于 x, y, z 是对称的, 故利用对称性, 可先计算

$$\oint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \textcolor{red}{2\times} \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}R}^{\sqrt{\frac{3}{2}}R} R^2 \frac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2R^2 - 3z^2}} dz = 2\pi R^3$$

注意这里 $\times 2$ 是因为: 遍历曲线 \mathcal{C} 一周上的点时, z 先从 $-\sqrt{\frac{2}{3}}R$ 增加到 $\sqrt{\frac{2}{3}}R$, 然

后又减至 $-\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

然后 $\oint_{\mathcal{C}} x^2 ds = \frac{2\pi R^3}{3}$. 当然, 如果一开始就注意利用对称性, 则直接有

$$\oint_{\mathcal{C}} x^2 ds = \frac{1}{3} \oint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{R^2}{3} \oint_{\mathcal{C}} ds = \frac{R^2}{3} 2\pi R = \frac{2\pi R^3}{3}$$

对曲线 \mathcal{C} , 若它上面分布着质量, 且密度函数为 $\mu(x, y, z)$, 则曲线的质心坐标为 (x_C, y_C, z_C) 由下给出

$$x_C = \frac{\int_{\mathcal{C}} x \mu(x, y, z) ds}{\int_{\mathcal{C}} ds}; \quad y_C = \frac{\int_{\mathcal{C}} y \mu(x, y, z) ds}{\int_{\mathcal{C}} ds}; \quad z_C = \frac{\int_{\mathcal{C}} z \mu(x, y, z) ds}{\int_{\mathcal{C}} ds}$$

例 2.3 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 在第一卦限部分的边界曲线的质心坐标 (设质量密度 $\mu \equiv 1$) .

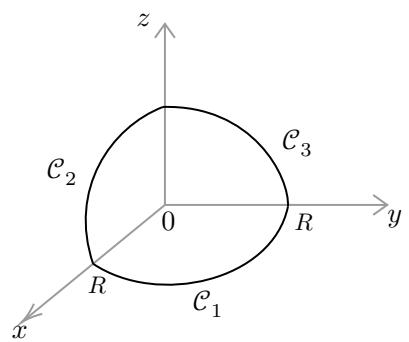
解: 边界曲线的质量为 $m = 3 \times \frac{2\pi R}{4} = \frac{3\pi R}{2}$. 将边界曲线划分为如下图的三部分 \mathcal{C}_i ($i = 1, 2, 3$). 我们计算

$$\int_{\mathcal{C}_1} x ds \xrightarrow{\text{利用极坐标}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta ad\theta = R^2$$

由对称性知, $\int_{\mathcal{C}_2} x ds = R^2$, 但 $\int_{\mathcal{C}_3} x ds = 0$. 故知质心的 x 坐标为

$$x_C = \frac{1}{m} \left(\int_{\mathcal{C}_1} x ds + \int_{\mathcal{C}_2} x ds + \int_{\mathcal{C}_3} x ds \right) = \frac{4R}{3\pi}$$

再用对称性, 知质心的 x , y 和 z 坐标都相同, 即 $x_C = y_C = z_C = \frac{4R}{3\pi}$.



3 曲面的面积

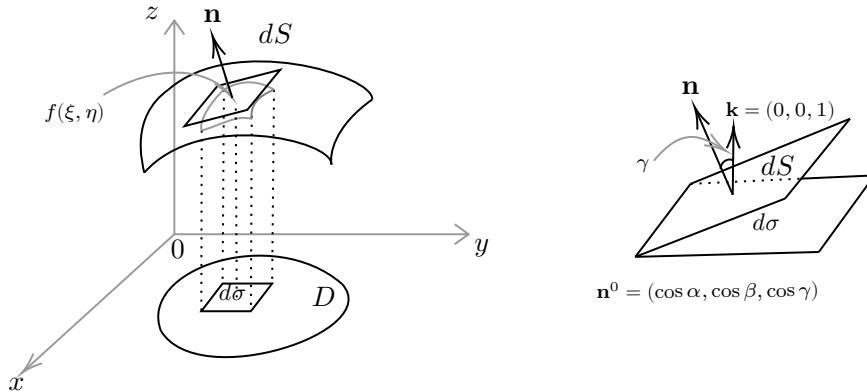
上节中讨论了分布在曲线上的物理量（标量）在空间曲线 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ 上的累计量及其计算，从而有一般的第一型曲线积分的概念及其计算。同样地，如果物理量（标量）是分布在空间曲面 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ 上的，该如何计算其在曲面 Σ 上的累计量及其计算？

基本的概念模式及处理思路应是相通的。设物理量的密度函数为 $\mu(x, y, z)$ ，为计算其在曲面上的累计量，先将曲面 Σ 用曲线网分割称小曲面块 $\Delta\Sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。记 $\Delta\Sigma_i$ 的面积为 ΔS_i ，并记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ （其中 d_i 为 $\Delta\Sigma_i$ 的直径，即连接曲面内任意两点距离的最大值）。分割地细致些，使得在 $\Delta\Sigma_i$ 上可将密度函数视为常数，从而可任取 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta\Sigma_i$ ，下和式可作为物理量总值的一个有效近似

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

通常情况下，当分割越来越细致，即 λ 越来越小时，我们期待上面的近似越来越精确，以至于当考虑极限情形，即 $\lambda \rightarrow 0$ 时，如上和式的极限也存在，则它就是物理量在曲面 Σ 上的精确积累。由此可导引出一般（第一型）曲面积分的概念（见下节定义），但前提是需明确如何对曲面求面积，否则上面和式中 ΔS_i 的意义将不明，遑论其计算。此外，如果上面的密度函数 $\mu \equiv 1$ ，则按上和极限（如其存在）计算出来的应该是曲面 Σ 的面积才是，由此看出，要定义第一型曲面积分，需先明确曲面的面积概念及其计算方法，否则将是无源之水，而这将是本节的主要内容。

如果曲面 Σ 可表示为二元函数 $z = f(x, y)$ 在 $(x, y) \in D$ 上的图形。我们假设曲面 Σ 是有界的，并假设 z 是 D 上具有连续一阶偏导数的函数，即曲面 Σ 是光滑的。在此假设下，为计算 Σ 的面积，我们将平面区域 D 用平行于坐标轴的坐标直线作划分，则 D 的任一典型矩形子区域 $d\sigma = dx dy$ 上对应的小曲面部分可由由 $d\sigma$ 内任意一点 (ξ, η) 对应的切平面在 $d\sigma$ 上的部分来近似，见下图



记曲面在其上点 $(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$ 处的法向量为 \mathbf{n} , 则 $\mathbf{n} = (z_x, z_y, -1)$, 从而单位法向量为

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right)$$

将其写成方向余弦的形式 $\mathbf{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则 $\cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$.

由此可知切平面近似的面元面积 dS 同 $d\sigma$ 是投影关系, 即

$$d\sigma = dS |\cos \gamma| \implies dS = \frac{d\sigma}{|\cos \gamma|} = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

由此可知曲面 Σ 的面积可按下二重积分计算

$$S = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$$

更一般地, 若光滑曲面 Σ 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 描述, 且假设 $F_z \neq 0$, 则对其两边微分, 得

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \implies dz = -\frac{F_x}{F_z} dx - \frac{F_y}{F_z} dy$$

即
$$\begin{cases} z_x = -\frac{F_x}{F_z} \\ z_y = -\frac{F_y}{F_z} \end{cases}$$
 从而曲面上的面积微元为 $dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy$

$$= \sqrt{1+\frac{F_x^2}{F_z^2}+\frac{F_y^2}{F_z^2}} dx dy = \frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|} dx dy = \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} dx dy$$

从而此时, 曲面面积为 $S = \iint_D \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} dx dy$, 其中 D 是曲面 Σ 在 xy -平面上的投影区域. 当然, 如 $F_x \neq 0$ 或 $F_y \neq 0$, 则可通过对 yz -平面或 xz -平面上投影计算.

曲面往往通过参数方程描述, 设 Σ 由参数方程
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D_{uv}$$
 即曲面上点的径矢为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

设 x, y, z 对 u, v 都具有连续偏导数, 且 $\mathbf{r}(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的雅可比矩阵 $\mathbf{J}_r =$

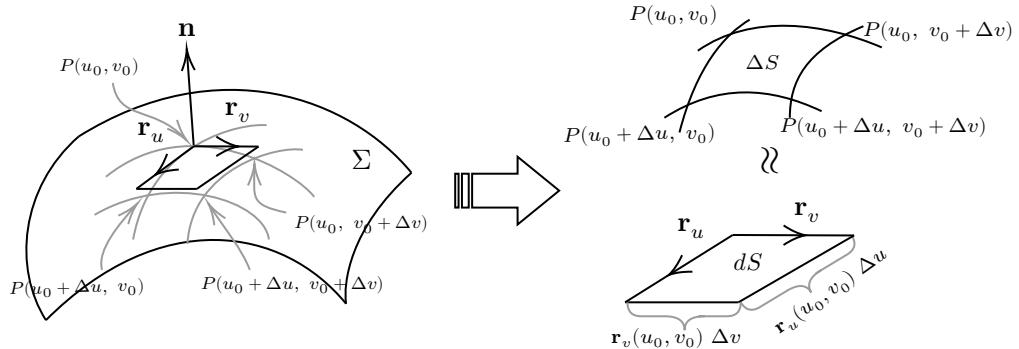
$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$ 满秩, 这也是曲面 Σ 是光滑的要求. \mathbf{J}_r 满秩即要求其三个二阶子式的行列式不能全为零, 即下面三个行列式在曲面上任意一点处不全为零

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

事实上, 这条件表明: 曲面存在整体连续变化的法向量——即曲面由连续法向量场. 这可通过下面的推理看出

在参数方程 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ 中, 固定 $v = v_0$, 则参数方程描述了曲面 Σ 上一条

(坐标) 曲线, 称为 u -曲线; 同理, 固定 $u = u_0$, 可得曲面 Σ 上的一条 v -曲线. 设曲面是光滑的, 即 x, y, z 对 u, v 具有连续一阶偏导, 且其雅可比矩阵 \mathbf{J}_r 满秩, 这表明任意一条 u -曲线和 v -曲线上的点都具有切向量 \mathbf{r}_u 和 \mathbf{r}_v , 即 $\begin{cases} \mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u) \\ \mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v) \end{cases}$ 在曲面上任意点处都存在, 且不共线, 即是线性独立的.



从而法向量 \mathbf{n} 可按 $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 来计算, 即

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

不妨设 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 则 $\cos \gamma = \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2}}$, 且由

于 $dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$, 故知而曲面上无穷小面积微元 dS 由下给出

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2} dudv$$

当然, 也可用 $P(u_0, v_0)$ 处的切平面上对应 $dudv$ 的面积 dS 作为 ΔS 的一阶线性近似. 首先, $P(u_0, v_0)$ 处 du 和 dv 对应的坐标曲线上的曲线弧有如下切线近似

$$\widehat{P(u_0 + \Delta u, v_0) P(u_0, v_0)} \approx \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \Delta u + o(\Delta u)$$

$$\widehat{P(u_0, v_0 + \Delta v) P(u_0, v_0)} \approx \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \Delta v + o(\Delta v)$$

故由无穷小坐标曲线弧围成的曲面上的面元 ΔS 可用对应切线不妨张成的无穷小平行四边形的面积来近似, 即

$$\Delta S \approx \| (\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)) \times (\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)) \|$$

$$\approx \| \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \| \Delta u \Delta v$$

即曲面 Σ 上的面积微元为

$$dS = \| \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \| dudv = \| \mathbf{n} \| dudv$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2} dudv$$

$$\text{记 } A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

则上公式可简记为

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

从而曲面 Σ 的面积可由下面的关于 u, v 的二重积分来计算

$$S = \iint_{D_{uv}} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

另一种常用表示法: 令

$$E = \mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2; F = \mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v; G = \mathbf{r}_v \bullet \mathbf{r}_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

则计算可得

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2 \\
&= \color{red}{x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2} + \color{blue}{x_u^2 y_v^2 + x_u^2 z_v^2 + y_u^2 x_v^2 + y_u^2 z_v^2} + \color{green}{z_u^2 x_v^2 + z_u^2 z_v^2} - \\
&\quad - (\color{red}{x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2}) - \color{blue}{2x_u x_v y_u y_v} - \color{blue}{2x_u x_v z_u z_v} - \color{green}{2y_u y_v z_u z_v} \\
&= (\color{green}{y_u^2 z_v^2 - 2y_u y_v z_u z_v + y_v^2 z_u^2}) + (\color{green}{z_u^2 x_v^2 - 2x_u x_v z_u z_v + x_u^2 z_v^2}) + \\
&\quad + (\color{blue}{x_u^2 y_v^2 - 2x_u x_v y_u y_v + x_v^2 y_u^2}) = A^2 + B^2 + C^2
\end{aligned}$$

从而，曲面 Σ 上的面积微元也可表达为 $dS = \sqrt{EG - F^2} dudv$ ，从而有面积公式

$$S = \iint_{D_{uv}} \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint_{D_{uv}} \sqrt{\det \mathbf{G}} dudv$$

其中 \mathbf{G} 为曲面上的度规矩阵 (*metric matrix*)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v \bullet \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \bullet \mathbf{r}_v \end{bmatrix}$$

注记 3.1 二阶实对此矩阵 \mathbf{G} 也称为格拉姆矩阵，它之所以被称为度规矩阵，是因为它本质上是度量曲面上两点之间的距离的，即考虑与 \mathbf{G} 相伴的二次型

$$\begin{aligned}
ds^2 &= [du \ dv] \mathbf{G} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = [du \ dv] \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v \bullet \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \bullet \mathbf{r}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \\
&= \mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_u (du)^2 + 2\mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v dudv + \mathbf{r}_v \bullet \mathbf{r}_v (dv)^2 \\
&= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)du^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)dudv + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)dv^2 \\
&= Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2
\end{aligned}$$

上式也称为是曲面 Σ 的高斯第一微分型。它之所以衡量曲面上两点间的距离也可由下看出 $ds^2 = d\mathbf{r} \bullet d\mathbf{r} =$

$$\begin{aligned}
&= (x_u du + x_v dv, y_u du + y_v dv, z_u du + z_v dv) \bullet (x_u du + x_v dv, y_u du + y_v dv, z_u du + z_v dv) \\
&= (x_u du + x_v dv)^2 + (y_u du + y_v dv)^2 + (z_u du + z_v dv)^2 \\
&= Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2
\end{aligned}$$

例 3.1 计算半径为 R 的球的表面积.

解 I: 设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则在第一卦限内, 球面可描述为

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0\}$$

由于 $z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, 故球面面积为

$$S = 8 \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = 8R \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\xrightarrow{\text{极坐标}} 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = 4\pi R \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R^2$$

解 II: 球面有参数方程 $\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$ 其中 $(\theta, \varphi) \in D = \{(\theta, \varphi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.

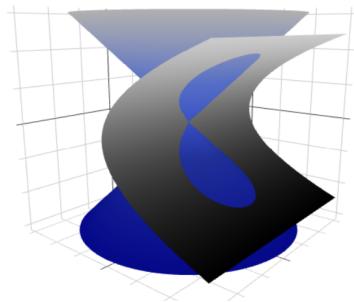
$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} = R^2 \sin^2 \varphi \cos \theta, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)} = R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} = R^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

故 $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = R^2 \sin \varphi$, 故球面面积可计算为

$$S = \iint_D R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi R^2 \sin \varphi d\varphi = 4\pi R^2$$

例 3.2 求锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 被柱面 $z^2 = 2y$ 所截部分的面积.

解:



由对称性, z 平面上下部分所截面积相等. $z > 0$ 中所截曲面部分由函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的图形给出, 只需计算对应 (x, y) 的取值区域 D . 首先锥面和柱面相交于曲

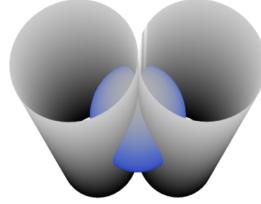
线 $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z^2 = 2y \end{cases}$, 从中消去 z , 得到相交曲线在 xy -平面上的投影曲线为

$$x^2 + y^2 = 2y \implies D = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$$

由于 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 故 $z_x = \frac{x}{z}$; $z_y = \frac{y}{z}$, 从而所求面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = 2 \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} dx dy \\ &= 2 \iint_D \sqrt{2} dx dy = 2\sqrt{2} \text{Area}(D) = 2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

例 3.3 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被两个柱面 $x^2 + y^2 - Rx = 0$, $x^2 + y^2 + Rx = 0$ 所截得部分的曲面面积.

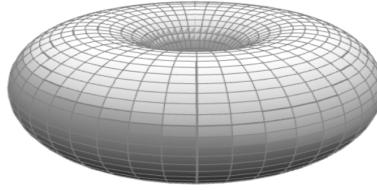


由对称性, 计算出第一卦限内的截面面积后 8 倍之即可. 联立 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - Rx = 0 \end{cases}$, 消去 z , 得到交曲线在 xy -平面上的投影曲线为 $x^2 + y^2 = Rx$, 从而第一卦限内的截面可看成函数 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 在 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq Rx, y \geq 0\}$ 上的部分. 故

$$\begin{aligned} S &= 8 \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = 8R \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \xrightarrow{\text{利用极坐标}} \\ &= 8R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \frac{r dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 8R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 4R^2(\pi - 2) \end{aligned}$$

由此可知, 球面被柱面截后所剩部分的面积为 $S = 4\pi R^2 - 4R^2(\pi - 2) = 8R^2$, 它与 π 无关, 从而也否定了有球面组成的曲面的面积必与 π 有关的猜想. (对相关体积问题的讨论见第二讲第 1.5 节中例 1.5.7 及其后注记.)

例 3.4 求环面的面积, 设环面由方程 $\begin{cases} x = (b + a \cos \theta) \cos \varphi \\ y = (b + a \cos \theta) \sin \varphi \\ z = a \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 表示 (其中 $0 < a < b$) .



解: $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi))$. 直接计算可得

$$\mathbf{r}_\theta = (-a \sin \theta \cos \varphi, -a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta); \quad \mathbf{r}_\varphi = (-(b+a \cos \theta) \sin \varphi, (b+a \cos \theta) \cos \varphi, 0)$$

不难看出 $\mathbf{r}_\theta \bullet \mathbf{r}_\varphi = 0$, 即 θ -曲线和 φ -曲线是正交曲线族 (*orthogonal family of curves*) ——两族正交的圆 (经圆和纬圆), 它们构成了环面上的正交曲线坐标网.

因为正交的缘故 $dS = \|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi\| d\theta d\varphi = \|\mathbf{r}_\theta\| \cdot \|\mathbf{r}_\varphi\| d\theta d\varphi = a(b + a \cos \theta) d\theta d\varphi$, 从而

$$S \underset{D := \{(\theta, \varphi) | 0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi\}}{\iint_D} a(b + a \cos \theta) d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b + a \cos \theta) d\theta = 4\pi^2 ab$$

例 3.5 设连续曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续导数, 且满足 $f(x) > 0$, 求曲线绕 x -轴一周所成旋转曲面的面积.

解 I: 只需计算旋转面在 $y, z \geq 0$ 部分的面积, 然后四倍之. 旋转面的描述方程为 $\pm\sqrt{y^2 + z^2} = f(x)$, 故 $y, z \geq 0$ 时曲面由下函数的图像描述

$$z = \sqrt{f^2(x) - y^2}, \quad (x, y) \in D := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

从而 $z_x = \frac{f'(x)f(x)}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}$, $z_y = \frac{-y}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}$, 从而所求旋转面面积为

$$S = 4 \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = 4 \iint_D \frac{f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x) - y^2}} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f^2(x) - y^2}} dy \xrightarrow{u = \frac{y}{f(x)}} \\
&= 4 \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx
\end{aligned}$$

与之前微元法得到的计算结果一致.

解 II: 旋转面具有参数描述 $\begin{cases} x = r \\ y = f(r) \cos \theta, \quad a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \\ z = f(r) \sin \theta \end{cases}$ 由此计算可得

$$E = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 = 1 + f'^2(r); \quad G = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = f(r)^2$$

$$F = x_r x_\theta + y_r y_\theta + z_r z_\theta = 0 + f'(r) \cos \theta f(r) \sin \theta - f'(r) \sin \theta f(r) \cos \theta = 0$$

从而 $\sqrt{EG - F^2} = f(r) \sqrt{1 + f'^2(r)}$, 故旋转面的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \sqrt{EG - F^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(r) \sqrt{1 + f'^2(r)} dr \\
&= 2\pi \int_a^b f(r) \sqrt{1 + f'^2(r)} dr
\end{aligned}$$

例 3.6 若例 3.5 中的连续曲线 $y = f(x)$ 不是绕 x -轴旋转一周, 而是绕 y -轴旋转

一周, 则旋转面有参数方程 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = f(r), \quad a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = r \sin \theta \end{cases}$ 按上例中的计算

步骤, 可知此时旋转面的面积计算公式为 $S = 2\pi \int_a^b r \sqrt{1 + f'^2(r)} dr$

对例 3.4 中的环面, 它可看成是圆 $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ 绕 y -轴旋转一周所成, 则可根据上公式计算其表面积. 当 $y \geq 0$ 时, $y = \sqrt{a^2 - (x - b)^2}$, 得到

$$\sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - (x - b)^2}} \implies \text{故环面面积为}$$

$$\begin{aligned}
S &= 2 \times 2\pi \int_{b-a}^{b+a} x \sqrt{1 + y'^2(x)} dr = 4\pi a \int_{b-a}^{b+a} \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - (x - b)^2}} \xrightarrow{r-b=t} \\
&4\pi a \int_{-a}^a \frac{b+t}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt \xrightarrow{u=\frac{t}{a}} 4\pi a \int_{-1}^1 \frac{b+au}{\sqrt{1-u^2}} du = 4\pi ab \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 4\pi^2 ab
\end{aligned}$$

4 第一型曲面积分及其应用

由上节开头的导言，我们直接给出第一型曲面积分的定义.

定义 4.1 设函数 $f(x, y, z)$ 是定义在光滑曲面 Σ 上的有界函数，将曲面用曲线网分割成 n 小块 $\Delta\Sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。记第 i 块小曲面的面积为 ΔS_i ，并记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ (其中 d_i 是 $\Delta\Sigma_i$ 的直径，即 $\Delta\Sigma_i$ 内任意两点距离的最大值，而任意两点的距离为联结两点的曲面上所有弧段弧长的最小值)，任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta\Sigma_i$ ，作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时，上和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上的第一型曲面积分，记作 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ ，即 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$

其中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数， Σ 为积分曲面， dS 称为曲面面积微元。 $f(x, y, z)$ 的第一型曲面积分也称为函数 $f(x, y, z)$ 对面积的曲面积分。

特别地，当 $f \equiv 1$ 时， $\iint_{\Sigma} dS$ 计算曲面 Σ 的面积。若曲面 Σ 为封闭曲面（比如球面），则曲面积分也记为 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$

类似于第一型曲线积分，若 $f(x, y, z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续，则 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 存在，且积分线性及区域可加性等对第一型曲面积分也是成立的，这里不再赘述。

第一型曲线积分的计算的关键在于确定弧长微分 ds ，然后化为定积分计算；同理，对第一型曲面积分，计算的关键是确定其曲面面积微元，然后便可化为二重积分进行计算。类似曲线积分的情形，我们也可证明下定理

定理 4.1 设光滑曲面 Σ 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D_{uv}$ 如果函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续，则 f 在曲面 Σ 上的第一类曲面积分存在，且有如下计算公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

其中 $A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$, $B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$, $C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$; 即考虑曲面上点的径矢

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D_{uv}$$

从而 $(A, B, C) = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \quad dS = ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|| dudv$ 或可按下计算

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv$$

其中 $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$, $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$, $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$.

特别地, 若 Σ 由 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ 给出, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

例 4.1 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ($R > 0$).

解 I: Σ 在 xy -平面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. 由于

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

故面积微元为 $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, 从而

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{xy}} (x + y + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \iint_{D_{xy}} \left(\frac{x + y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx dy \\ &= R \iint_{D_{xy}} \frac{x + y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy + R \iint_{D_{xy}} dx dy \end{aligned}$$

由于区域 D_{xy} 关于 x -轴和 y -轴都是对称的, 故由对称性 (考虑 $x \rightarrow -x$; $y \rightarrow -y$) 知

$$\iint_{D_{xy}} \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 0$$

从而 $I = R \iint_{D_{xy}} dx dy = \pi R^3$.

解 II: 利用 Σ 的参数方程

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$dS = ||\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta|| d\varphi d\theta$$

$$= |(R^2 \sin^2 \varphi) \cos \theta, R^2 \sin^2 \varphi \sin \theta, R^2 \sin \varphi \cos \varphi| d\varphi d\theta = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$\text{故 } I = \iint_{\Sigma} z dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos \varphi R^2 \sin \varphi d\varphi = 2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \pi R^3.$$

例 4.2 计算 $I = \iint_{\Sigma} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} dS$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a, b, c > 0)$.

解: 椭球面有参数表示 $\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta \\ y = b \sin \varphi \sin \theta \\ z = c \cos \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi)$. 计算可知

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} = bc \sin^2 \varphi \cos \theta, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)} = ac \sin^2 \varphi \sin \theta, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} = ab \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\text{故 } dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)}\right)^2} d\varphi d\theta$$

$$= \sqrt{(abc)^2 \sin^2 \varphi \left(\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}\right)} d\varphi d\theta$$

而被积函数为

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}}$$

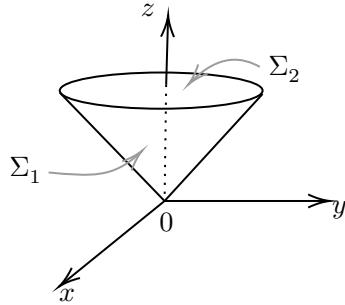
$$I = \iint_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} abc \left(\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}\right) \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$\xrightarrow[\text{根据对称性, 只算第一卦限的体积}]{8} \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} abc \left(\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}\right) \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$= \frac{4}{3} abc \pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

例 4.3 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = 1$ 所围成锥体的整个边界.

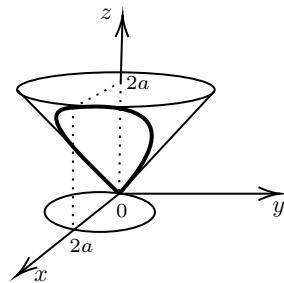
解: 锥体在 xy -平面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.



由上图, Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 两部分组成, 其中 $\Sigma_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D_{xy}$, $\Sigma_2 : z = 1, (x, y) \in D_{xy}$. 故

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS &= \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = (\sqrt{2} + 1) \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= (\sqrt{2} + 1) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \pi \end{aligned}$$

例 4.4 计算 $I = \iint_{\Sigma} (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 割下的部分.



解 I: 曲面 Σ 在 xy 平面上的投影区域为 $D_{xy} := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2ax\}$, 曲面由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的图像给出, 由上例中的计算, 知 $dS = \sqrt{2}dxdy$, 从而

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{xy}} (x^2y^2 + (x^2 + y^2)^2)\sqrt{2}dxdy \xrightarrow{\text{利用极坐标}} \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} (r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r^4)rdr \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta \sin^2 \theta + 1) \left(\frac{1}{6}r^6 \Big|_0^{2a \cos \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} (2a)^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta (\cos^2 \theta \sin^2 \theta + 1)d\theta = \frac{29}{8}\sqrt{2}\pi a^6 \end{aligned}$$

解 II: 如果用球面坐标, 则锥面上的点满足 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 从而锥面有如下参数表示

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}r \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}r \sin \theta \\ z = r \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}r \end{cases}$$

Σ 的边界 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 = 2ax \end{cases}$ 在球坐标下为 $\begin{cases} \varphi = \pi/4 \\ r^2 \sin^2 \varphi = 2ar \sin \varphi \cos \theta \end{cases}$ 故曲面在 xy -平面上的投影区域在球坐标下的表示为

$$D_{\theta, r} = \left\{ (\theta, r) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq r \leq 2\sqrt{2}a \cos \theta \right\}$$

$$\mathbf{r}_r = (x_r, y_r, z_r) = \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \quad \mathbf{r}_\theta = (x_\theta, y_\theta, z_\theta) = \left(\frac{-r \sin \theta}{\sqrt{2}}, \frac{r \cos \theta}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

从而

$$E = \mathbf{r}_\theta \bullet \mathbf{r}_\theta = \frac{r^2}{2}; \quad F = \mathbf{r}_r \bullet \mathbf{r}_\theta = 0; \quad G = \mathbf{r}_r \bullet \mathbf{r}_r = 1$$

故得

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}a \cos \theta} \left(\frac{1}{4}r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{4}r^4 \right) \frac{r}{\sqrt{2}} dr = \frac{29}{8}\sqrt{2}\pi a^6$$

例 4.5 设 S^2 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 证明

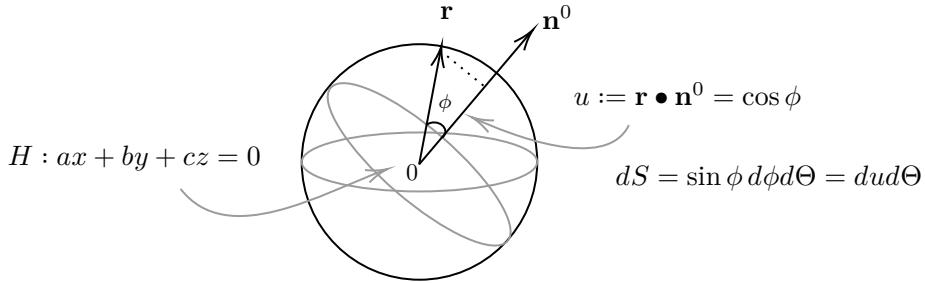
$$\iint_{S^2} f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du$$

其中 a, b, c 是不全为零的常数, $f(u)$ 是 $|u| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 上的一元连续函数.

证明: 令

$$u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

则 $|u|$ 表示单位球面上的点 (x, y, z) 到平面 $H: ax + by + cz = 0$ 的距离, 而 u 表示径矢 $\mathbf{r} = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$ 在平面 H 的单位法向量 \mathbf{n}^0 上的正交投影, 即 $u = \cos \phi$, 其中 ϕ 是 \mathbf{r} 和 \mathbf{n}^0 之间的夹角.



由例 4.1 之解 II 中的计算, 单位球面的面积微元在球坐标下的表达为 $dS = \sin \varphi d\varphi d\theta$, 由此可推知 (考虑到坐标的旋转不改变面积): 若记 Θ 为平面 H 上的角坐标, ϕ 的定义如上, 则单位球面 S^2 上的面积微元亦可表达为

$$dS = \sin \phi d\phi d\Theta \xrightarrow{u=\cos \varphi} du d\Theta$$

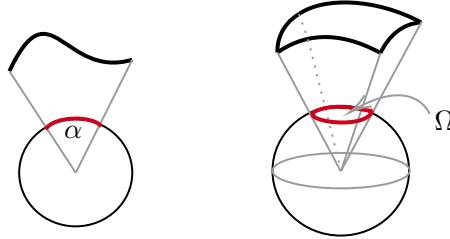
$$\begin{aligned} \text{从而 } \iint_{S^2} f(ax + by + cz) dS &= \iint_{(u,\Theta) \in [-1,1] \times [0,2\pi]} f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du d\Theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\Theta \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du \end{aligned}$$

注记 5.1 立体角 (*solid angle*) 是比较常用的概念, 它是平面角概念的三维推广, 用以衡量某点观察到的物体的大小. 对特定观察点, 一个近处的小物体可能和一个远处的大物体有着相同的立体角, 比如我们观测到了月亮和太阳的象, 虽然它们大小不同, 但因为远近关系, 它们呈现在我们视野 (用立体角衡量) 中的大小可能是相近的.

立体角惯以字母 Ω 来表示, 它的定义为: 如观测一物体, 我们以观测点为球心, 构造一个单位球面, 则物体投影到该单位球面上的投影面积, 即为该物体相对于该观测点

的立体角. 因此, 立体角是单位球面上的一块面积, 这和“平面角”是单位圆上的一段弧长”是相仿的. 在球坐标下, 球面的面积微元是 $dS = r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$, 故立体角的微元, 作为单位球面上的面积微元, 有如下表达

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin \varphi d\varphi d\theta$$



即对球面上的部分, 其立体角为投影面积与球半径平方的比值, 设球面上的区域为 S , 则其立体角可按下计算

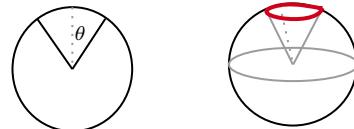
$$\Omega = \iint_S d\Omega = \iint_S \sin \varphi d\varphi d\theta$$

特别地, 对封闭球面 S^2 (半径任意), 若观察点在球心, 则其立体角显然是 4π , 当然也可直接计算如下

$$\Omega = \iint_{S^2} \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\pi \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 4\pi$$

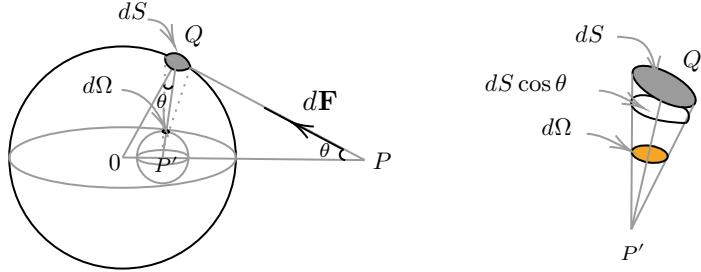
事实上, 不难想见, 以球面 S^2 内任意点为观测点, 球面 S^2 的立体角都是 4π ; 也不难想见, 对封闭曲面内的任意一点, 则曲面相对该点的立体角也是 4π , 这是电磁学中高斯定律的基础. 此外, 也不难想见, 封闭曲面对其外任意观测点的立体角为 0.

这些结论, 及对一般曲面立体角的计算将在第二型曲面积分后加以讨论. 对顶角为 2θ 的圆锥, 其相对于顶点的立体角即为单位球上的一个球冠的面积, 即



$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\theta \sin \varphi d\varphi = 2\pi(1 - \cos \theta) = 4\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

注记 5.2 利用立体角概念可方便一些积分计算. 我们先前证明过均匀球体对其外一质点产生的引力等效于将其看做质量集中于球心的质点对其外一质点产生的引力. 事实上, 牛顿证明了更强的结论: 即一个密度只随着到球心距离而变化的球体, 对其外一质点的引力等效于将其看做质量集中于球心的质点对其外一质点产生的引力.



$$\Delta OQP' \sim \Delta OPQ \Rightarrow \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2 \quad \frac{dS \cos \theta}{d\Omega} = \frac{\overline{P'Q}^2}{1}$$

将球分成薄球壳, 如能证明每一球壳(看成球面)的引力等效于将其质量集中于球心的引力效应, 则结论即明. 如上图, 设球面 $S^2(R)$ 半径为 R , 面密度为 μ , 并设球外一质点 P 的质量为 m . 考虑球壳上的面积微元 dS 对 P 的引力 $d\mathbf{F}$, 由对称性, 只有沿着 OP 的分量为零, 即只需计算

$$|d\mathbf{F}| \cos \theta = k \frac{m\mu dS}{PQ^2} \cos \theta$$

在直线 OP 上取点 P' , 使得 $\Delta OQP' \sim \Delta OPQ$, 从而 $\angle OQP' = \angle OPQ = \theta$, 并且 $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2$, 换言之, P' 是 P 关于球面的反射对称点. 以 P' 为圆心作单位球面, 则 dS 在该平面上的投影面积就是 dS 对应的立体角 $d\Omega$, 它与 $dS \cos \theta$ 的关系是

$$dS \cos \theta = \overline{P'Q}^2 d\Omega$$

从而求壳对 P 的净引力为

$$\begin{aligned} \iint_{S^2(R)} |d\mathbf{F}| \cos \theta &= \iint_{S^2(R)} k \frac{m\mu}{PQ^2} dS \cos \theta = km\mu \iint_{S^2(R)} \frac{\overline{P'Q}^2}{PQ^2} d\Omega \xrightarrow[\text{相似}]{\text{三角形}} km\mu \iint_{S^2(R)} \frac{R^2}{OP^2} d\Omega \\ &= \frac{km\mu R^2}{OP^2} \iint_{S^2(R)} d\Omega = \frac{km\mu R^2}{OP^2} 4\pi = k \frac{m\mu 4\pi R^2}{OP^2} \xrightarrow[M:=4\pi R^2 \times \mu]{=} k \frac{mM}{OP^2} \end{aligned}$$

即球壳对 P 的引力等效于其质量集中于 O 点的质点对 P 的引力.

5 向量场积分概念导引，曲线、曲面的定向

第一型曲线积分和第一型曲面积分的物理背景是：空间 \mathbb{R}^3 中的数量函数 $f(x, y, z)$ 在空间曲线或空间曲面上的积分，而数量函数 $f(x, y, z)$ 可看成是空间上的一个数量场 (*scalar field*)，即空间每点 (x, y, z) 处有数量 $f(x, y, z)$ 。注意，这里曲线和曲面也是不考虑方向的，我们只关心曲线上的弧长微元（作为恒正标量）即曲面上的面积微元（作为恒正标量）。

但物理量也可以是矢量（向量）及更一般的高阶张量等，我们尚需考虑它们在空间形状上的累积量，换言之，我们需要定义矢量场即一般张量场在空间上的积分。我们以矢量场为例探讨。设 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) =$

$$= P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

为空间上分布着的一矢量场或向量场 (*vector field*)。即空间 \mathbb{R}^3 中的点 (x, y, z) 处有一向量 $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 。称向量场 \mathbf{F} 是连续（光滑）的，如果其分量函数 P, Q, R 都是空间坐标 (x, y, z) 的连续（光滑）函数。

向量场作为映射是从 \mathbb{R}^3 到 \mathbb{R}^3 的一个映射，或向量值函数 $(x, y, z) \mapsto (P, Q, R)$ 。

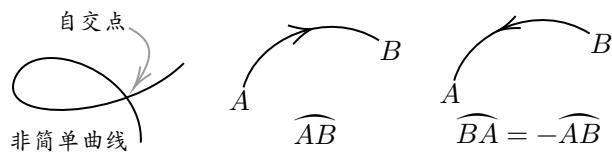
向量场的例子很多，比如力、速度、电场强度、磁场强度等。如果 \mathbf{F} 分布于 \mathbb{R}^3 中的某曲线 \mathcal{C} 或某曲面 Σ 上，那么矢量场 \mathbf{F} 在 \mathcal{C} 或 Σ 上的“累积”又该如何确定呢？

最平平无奇的累积方式是“直接加”，比如 \mathbf{F} 在曲线 \mathcal{C} 上的直接累积为

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} ds = \mathbf{i} \int_{\mathcal{C}} P ds + \mathbf{j} \int_{\mathcal{C}} Q ds + \mathbf{k} \int_{\mathcal{C}} R ds$$

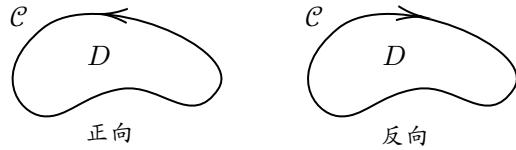
而这本质上任然是第一型曲线积分，只是将向量场积为一个向量，但通常积分要求积成数，从这个角度来看，上面的“直接加”也不是很有效的。而真正有效且在实用中价值较大的是由“力做功”模型启发出来的积累模式。

将 \mathbf{F} 视作以力场，并将曲线 \mathcal{C} 视作一质点在力场 \mathbf{F} 的作用下的轨迹，欲求力之做功几何？这里的关键在于质点在力 \mathbf{F} 的作用下的运动方向很关键，这表明我们必须考虑曲线 \mathcal{C} 的方向性。整体上，若曲线 \mathcal{C} 是简单曲线，即没有自交点 (*self-intersection points*)



对于简单曲线 \mathcal{C} , 若其两个端点为 A 和 B , 则其方向可可通过规定始点和终点来确定, 比如设其起点和终点分部为 A 和 B , 则 $\mathcal{C} = \widehat{AB}$, 其方向看成是沿着曲线从 A 走到 B , 并将之称为“正向”, 可记为 \mathcal{C}^+ , 则“反向”便是沿着曲线从 B 走到 A , 可记为 \mathcal{C}^- 或 $-\mathcal{C} = \widehat{BA}$.

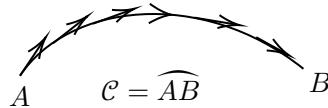
对封闭曲线 \mathcal{C} , 即其两端点重合 $A = B$. 记 \mathcal{C} 所围区域为 D , 则 \mathcal{C} 的方向规定为:



1. 正向: 在曲线上沿该方向走时, 区域 D 位于左侧;

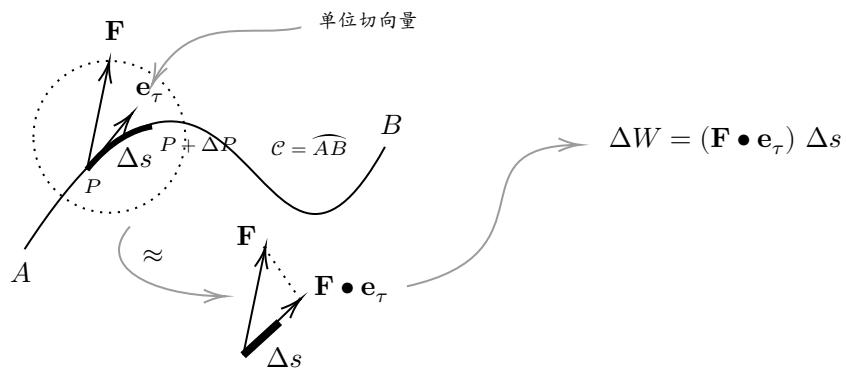
2. 反向: 在曲线上沿该方向走时, 区域 D 位于右侧.

局部来说, 可通过曲线上切向量的方向来定向, 比如对上面的曲线 $\mathcal{C} = \widehat{AB}$, 利用切向量的定向如下



用切向量场定向

则 \mathbf{F} 对质点的作用可计算如下. 若质点在 \mathbf{F} 的作用下从曲线 \mathcal{C} 上 P 点移动到 $P + \Delta P$, 对应弧长为 Δs , 则可将 $\widehat{PP + \Delta P}$ 用 P 点处的切线近似 (假设 ΔP 足够小时). 记 \mathbf{e}_τ 为 P 点的单位切向量, 则 \mathbf{F} 的做功微元为 $\Delta W = (\mathbf{F} \bullet \mathbf{e}_\tau) \Delta s$



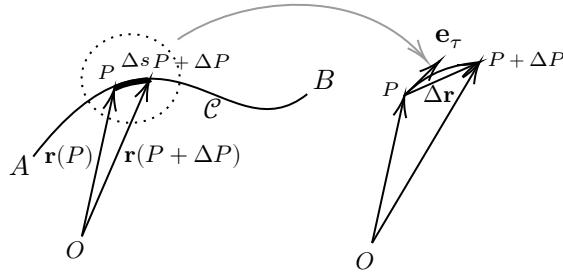
从而当质点在 \mathbf{F} 作用下沿着曲线 \mathcal{C} 从 A 移动到 B 的过程中, \mathbf{F} 的做功为

$$\sum \Delta W = \sum (\mathbf{F} \bullet \mathbf{e}_\tau) \Delta s \xrightarrow{\text{取极限}} \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{e}_\tau) ds$$

这种在有向曲线上对向量场在曲线切方向上正交投影的累计便是第二型曲线积分的模式. 记 $d\mathbf{r} := \mathbf{e}_\tau ds$, 称作定向弧微分 ($d\mathbf{r}$ 有时也记作 ds), 则上积分可写为

$$\int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{e}_\tau) ds = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

其中 $\mathbf{r}(P)$ 为曲线上动点 P 的位置矢量: \overrightarrow{OP} . 而微分关系 $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\tau ds$ 由下可见



则 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(P + \Delta P) - \mathbf{r}(P) \xrightarrow{\Delta P \rightarrow 0} \mathbf{e}_\tau ds$, 从而 $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\tau ds$.

若曲线由参数表达 \mathcal{C} : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 则曲线上点的位置矢量为: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = (x(t + \Delta t) - x(t), y(t + \Delta t) - y(t), z(t + \Delta t) - z(t))$$

$$= (x'(t)\Delta t + o(\Delta t), y'(t)\Delta t + o(\Delta t), z'(t)\Delta t + o(\Delta t))$$

$$\Rightarrow d\mathbf{r}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))dt = \mathbf{r}'(t)dt$$

$$= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \mathbf{e}_\tau ds$$

其中弧长微分为 $ds = \|\mathbf{r}'(t)\|dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$. 故第二型曲线积分为

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathbf{e}_\tau ds$$

这同时给出了它与第一型曲线积分的关系, 但要强调的是: 虽然它可写成第一型曲线积分, 但第二型和第一型曲线积分是有本质区别的, 主要在第一型曲线积分不依赖

于曲线的定向，而第二型曲线积分当曲线反向后，会产生一个负号。又注意到

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt = (x'(t)dt, y'(t)dt, z'(t)dt) = (dx, dy, dz)$$

即有向弧长微元 $d\mathbf{r} = ds$ 在 x, y, z 三个方向上的投影分别为 dx, dy 和 dz 。故第二型曲线积分亦可写作

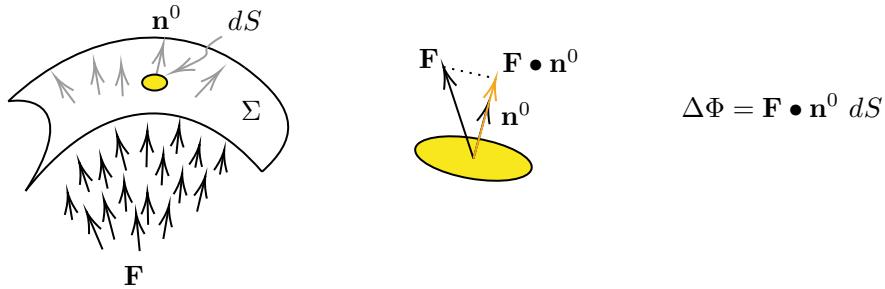
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} (P, Q, R) \bullet (dx, dy, dz) = \int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz$$

这也是第二型曲线积分的通常表达。记 $\omega := Pdx + Qdy + Rdz$ ，称为是1-形式，则

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \omega \quad (1\text{-形式 } \omega \text{ 在曲线 } \mathcal{C} \text{ 上的积分})$$

接着，我们探讨向量场 \mathbf{F} 在曲面上的累积问题，同曲线的情形，对向量“直接加”是无趣的，实际有意义的考量是对向量场沿某向量场的投影数量场的叠加。在第二型曲线积分中，这表现为 \mathbf{F} 沿曲线的单位切向量场 e_τ 的投影之叠加。那么， \mathbf{F} 该沿着曲面上的什么向量场投影比较自然呢？

自然科学中的实践表明，向量场沿着曲面的法向量场 \mathbf{n} 的投影是自然的，即向量场 \mathbf{F} 对应的物理量对于曲面 Σ 的通量 (flux) 概念。比如 \mathbf{F} 是一不可压缩的稳定流体的速度向量场，则它在单位时间内通过曲面 Σ 的净流量可按下计算。



在曲面上取面积微元 dS ，则通过 dS 的流量 $\Delta\Phi$ 为流速 \mathbf{F} 在 dS 上单位法向量 \mathbf{n}^0 上的投影和 dS 的乘积，即

$$\Delta\Phi = \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}^0 dS$$

显然，流量（通量）的微元 $\Delta\Phi$ 依赖于法向量 \mathbf{n} 的方向选择。流体在单位时间内通过曲面的总流量，即通量为

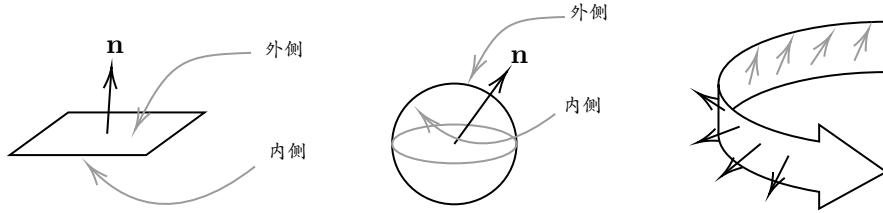
$$\sum \Delta\Phi = \sum \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}^0 dS \xrightarrow{\text{取极限}} \Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}^0 dS$$

这便是第二型曲面积分的模式. 记 $d\mathbf{S} := \mathbf{n}^0 dS$, 并称为定向曲面面元 (*oriented surface element*), 则上积分可表示为

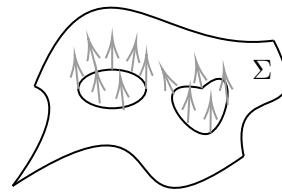
$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}^0 dS$$

虽然左边的第二型曲面积分, 在计算上, 表示成了右边的第一型曲面积分, 但两者是由本质差异的, 类似于第二型曲线积分依赖于曲线的定向, 第二型曲面积分也是依赖于曲面的某种定向的. 从上面的定义中亦可看出其端倪, 即为了使上面的极限求和有意义, 曲面 Σ 上的单位法向量 \mathbf{n}^0 的变动是连续且其指向须指向曲面的某一单侧才行. 而曲面上的法向量场的动态特征恰与曲面是否可定向及如何定向是密切关联的!

设 Σ 是一个光滑曲面, 在曲面上任一点 P 的近旁, 我们可通过该点处的法向量 \mathbf{n} 的两种可能 \mathbf{n} 来区分该点附近曲面的**两侧**的, 即若视 \mathbf{n} 所指的为“内侧”的话, 那么 $-\mathbf{n}$ 所指的曲面侧为其“外侧”.

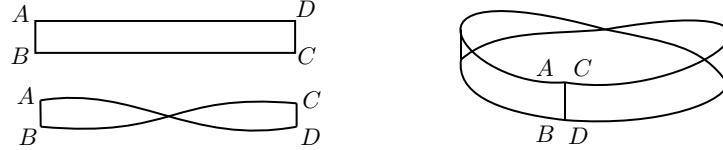


我们称曲面 Σ 是可定向 (*oriented*) 的, 或双侧 (*double sided*) 的, 如果上面曲面上每个点附近的定向可连续一致地拓展到整个曲面上. 也就是说, 当 P 在曲面上连续变动时, 相应的法向量 (即曲面的单位法向量场) \mathbf{n} 也连续变动, 且当点 P 沿 Σ 上任意不越过曲面边界的连续闭曲线移动后回到起始位置后, 法向量 \mathbf{n} 还原, 即任保持原来的方向, 那么 Σ 是双侧曲面, 或说 Σ 是可定向的.

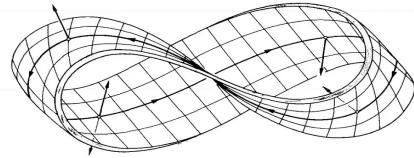


如 Σ 可定向, 可将 \mathbf{n} 指向的一侧看做内侧, 记作 Σ^- , 而把 $-\mathbf{n}$ 指向的一侧看做外侧, 记作 Σ^+ .

并非所有曲面都是可定向的，比如著名的莫比乌斯带 (*Möbius band*) 即是单侧曲面。莫比乌斯带的制作如下图所示，将长方形 $ABCD$ 先扭转一次再首尾相粘，即 A 与 C 相粘， B 与 D 相粘。



莫比乌斯带之不可定向由下图所示：



若光滑可定向曲面 Σ 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 描述，则其上的一个法向量场为（另一个为其反向）

$$\mathbf{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z)$$

由于曲面光滑，故 F_x, F_y, F_z 在任意点不能全为零，即 $\|\nabla F\| \neq 0$ ，故考虑其单位切向量场是有意义的，即

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \left(\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \right)$$

设 $F_z \neq 0$ ，则曲面上的面元为 $dS = \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} dx dy$ ，从而可知此时的定向曲面面元的表达式是

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0 dS = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} dx dy = \frac{\nabla F}{|F_z|} dx dy = \left(\frac{F_x}{F_z}, \frac{F_y}{F_z}, 1 \right) dx dy$$

同理，若 $F_x \neq 0$ ，则

$$d\mathbf{S} = \frac{\nabla F}{|F_x|} dy dz = \left(1, \frac{F_y}{F_x}, \frac{F_z}{F_x} \right) dy dz$$

若 $F_y \neq 0$ ，则

$$d\mathbf{S} = \frac{\nabla F}{|F_y|} dy dz = \left(\frac{F_x}{F_y}, 1, \frac{F_z}{F_y} \right) dx dz$$

当然, 若取 $-\mathbf{n}$ 为法向量场, 则得到另一定向的定向面元. 特别地, 若光滑曲面 Σ 由 $z = f(x, y)$ 描述, 则其上的定向曲面面元的表达式为

$$d\mathbf{S} = (-z_x, -z_y, 1) dx dy$$

而另一定向面元为 $d\mathbf{S} = (z_x, z_y, -1) dx dy$.

更一般地, 若光滑曲面 Σ 有参数描述 $\Sigma : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} (u, v) \in D_{uv}$ 即曲面上

的点的位置向量为

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D_{uv}$$

则其上有整体连续变动的非零法向量场

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) = (A, B, C)$$

故曲面上的一个单位法向量场 (另一个为其反向) 为

$$\mathbf{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$$

我们知道曲面上的面积微元为 $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$, 从而曲面上的一个定向面元为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0 dS = (A, B, C) dudv = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv$$

另一侧的定向面元为

$$d\mathbf{S} = -\mathbf{n}^0 dS = (A, B, C) dudv = - \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv$$

综合起来便有

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0 dS = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS$$

$$= (\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS) = (dy dz, dz dx, dx dy)$$

其中 $dy dz, dz dx$ 和 $dx dy$ 分别为 $d\mathbf{S}$ 在 yz -平面, xz -平面和 xy -平面上的投影面

积. 在这样的记号约定下, 第二型曲面积分又可表示为 $\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} =$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}^0 dS = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

这也是第二型曲面积分的通常表达.

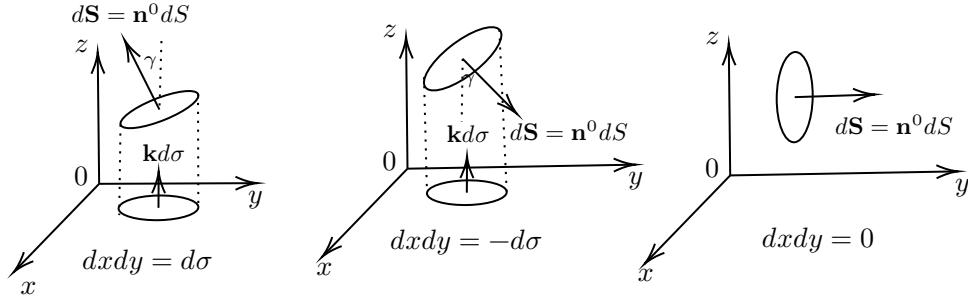
上面关于 $d\mathbf{S}$ 在坐标面上的投影记号有明显的不足之处: $d\mathbf{S}$ 是带方向的向量, 故其在坐标面上的投影可正可负可为零. 当然, 先得明确这里“正负”的含义.

首先, 需对坐标平面规定其定向: 对 xy -平面, 规定 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ 的方向为其“正向”, 而 $-\mathbf{k}$ 的方向为其反向; 对 yz -平面, 规定 $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ 的方向为其正向, 而 $-\mathbf{i}$ 的方向为其反向; 对 xz -平面, 规定 $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ 的方向为其正向, 而 $-\mathbf{j}$ 的方向为其反向.

回忆: 曲面法向量 \mathbf{n} 的方向余弦 $\mathbf{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 中的 α, β 和 γ 分别为 \mathbf{n} 与 \mathbf{i}, \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 的夹角. 则定向面元 $d\mathbf{S}$ 的坐标面投影的正负可按方向余弦的正负加以规定, 即

$$dxdy := dS \cos \gamma = \begin{cases} d\sigma, & \cos \gamma > 0 \\ 0, & \cos \gamma = 0 \\ -d\sigma, & \cos \gamma < 0 \end{cases}$$

其中 $d\sigma$ 为 $d\mathbf{S}$ 在 xy -平面上的投影面积大小. 也就是说, 如果 $d\mathbf{S}$ 的正向 \mathbf{n} 位于 xy -的正向一侧 (由 \mathbf{k} 决定), 则投影面积为正, 反之为负; 而若 \mathbf{n} 与 \mathbf{k} 正交, 则 $d\mathbf{S}$ 在 xy -平面上的投影面积为零.



同理, 可讨论 $dy dz = dS \cos \alpha, dz dx = dS \cos \beta$ 的正负性.

另外注意到, 在曲面的参数表示下, 一方面, 我们有

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0 dS = (A, B, C) dudv = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv$$

另一方面 $d\mathbf{S} = (\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS) = (dydz, dzdx, dx dy)$. 两相对比, 得

$$dydz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dudv; \quad dzdx = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} dudv; \quad dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} dudv$$

注意, 这里与之前二重积分换元公式中的情形有所区别, 换元公式中, 所有面元都是正的, 即

$$dydz = \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| dudv; \quad dzdx = \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right| dudv; \quad dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

而在上面的公式中, 由于 $dydz, dzdx, dx dy$ 是定向面元 $d\mathbf{S}$ 的投影, 其可正可负. 那么不禁要问: 它们的正负是否与对应雅克比行列式的正负相协调?

若某点附近 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$ (或 < 0), 这意味着曲面上该点附近法向量 \mathbf{n} 的方向余弦 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 中的 $\cos \gamma > 0$ (或 < 0), 从而 $dx dy > 0$ (或 < 0). 由此可见, $dx dy$ 的正负与对应雅克比行列式的正负是一致的, 这对 $dydz$ 和 $dzdx$ 也是成立的. 当然, 比较微妙的是, 尚有另一种定向, 即

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} = -\mathbf{n}^0 dS &= -(A, B, C) dudv = \left(-\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, -\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, -\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv \\ &= (\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS) = (dydz, dzdx, dx dy) \end{aligned}$$

若某点附近 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$ (或 < 0), 这意味着曲面上该点附近法向量 \mathbf{n} 的方向余弦 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 中的 $\cos \gamma < 0$ (或 > 0), 从而 $dx dy < 0$ (或 > 0). 由此可见, $dx dy$ 的正负与对应雅克比行列式的正负是相反的, 这对 $dydz$ 和 $dzdx$ 也是成立的.

由于法向量由曲面上的 u -曲线和 v -曲线的切向量 $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$ 和 $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$ 以向量叉乘确定的, 即

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

注意到 $-\mathbf{n} = \left(\frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, x)}{\partial(u, v)} \right) = -\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u$. 交换 \mathbf{r}_u 和 \mathbf{r}_v 的位置即可.

哦, 原来这里头蕴藏着“交换”产生负号这一根本机制, 既然如此, 我们不妨将 $d\mathbf{S}$ 的投影面元 $dydz, dzdx$ 和 $dx dy$ 分别看做是按顺序的乘积 (类似于向量的叉乘 “ \times ”), 交换顺序产生负号. 仿照叉乘的运算 (但不是叉乘, 因为叉乘的运算结果是向量, 而这里运算后是数, 只是通过所带正负号来表示方向性), 我们将 $dx dy$ 写成 $dx \wedge dy$, 即微

分 dx 和 dy 间的外积 (*wedge product*), 并规定: $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$. 同理, 可定义 $dy \wedge dz, dz \wedge dx$.

直观上, 可将 $dx \wedge dy$ 看成由以 dx 和 dy 为长度的平行四边形的无穷小有向面元, 其方向由 dx 和 dy 的顺序决定, 在 x, y, z 直角坐标系中, 规定 $dx \wedge dy$ 对应的无穷小面元的方向为 \mathbf{k} 的方向, 则 $dy \wedge dx$ 的方向是 $-\mathbf{k}$. 在这种解释下 $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$ 的几何意义也就很明晰了. 则由 dx, dy, dz 张成的非零有向无穷小面元为

$$dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$$

它们的以函数做为系数的线性组合称为是一个2-形式, 比如

$$\omega := P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy$$

就是一个 2-形式, 从而第二型曲面积分亦可表达为

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \omega \quad (\text{2-形式 } \omega \text{ 在曲面 } \Sigma \text{ 上的积分})$$

同理对 uv -平面上的 du 和 dv , 也可考虑其外积 $du \wedge dv$. 在这样的规定下, 可以很神奇地从纯代数角度产生出雅克比矩阵出来! 首先注意到

$$dx = x_u du + x_v dv; \quad dy = y_u du + y_v dv; \quad dz = z_u du + z_v dv$$

$$\text{接着看这神奇一幕 } dx \wedge dy = (x_u du + x_v dv) \wedge (y_u du + y_v dv) \xrightarrow{\text{运算是线性的}}$$

$$x_u y_u \underbrace{du \wedge du}_0 + x_u y_v du \wedge dv + x_v y_u dv \wedge du + x_v y_v \underbrace{dv \wedge dv}_0 \xrightarrow{\text{交换产生负号}}$$

$$x_u y_v du \wedge dv - x_v y_u du \wedge dv = (x_u y_v - x_v y_u) du \wedge dv = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv$$

即得 $dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv$, 同理可验证 $dy \wedge dz = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du \wedge dv, dz \wedge dx = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du \wedge dv$. 如仅关心面积的大小, 而不记其定向, 则两边取绝对值, 并记 $|dx \wedge dy| = |dy \wedge dx| = dx dy, |dz \wedge dx| = |dx \wedge dz| = dz dx, |dy \wedge dz| = |dz \wedge dy| = dy dz$ 则得到熟悉的面积关系

$$dy dz = \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| du dv; \quad dz dx = \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right| du dv; \quad dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

6 第二型曲线积分的计算及其应用

上节中我们已经对第二型曲线积分的引入背景及其定义模式做了详细的说明. 下面给出其正式定义.

定义 6.1 设 $\mathcal{C} = \widehat{AB}$ 是空间中的一条光滑定向曲线, 其起点为 A , 终点为 B . 设向量场 (或向量值函数)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

在曲线 \mathcal{C} 上有界. 并记 $\mathbf{e}_\tau(x, y, z)$ 为曲线 \mathcal{C} 在点 $M(x, y, z)$ 处于 \widehat{AB} 方向一致的单位切向量. 则若

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(x, y, z) \bullet \mathbf{e}_\tau(x, y, z) ds &\stackrel{ds:=\mathbf{e}_\tau ds}{=} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathcal{C}} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds \end{aligned}$$

存在, 则称其为 \mathbf{F} 在 \mathcal{C} 上的第二类曲线积分. 其中

$$d\mathbf{r} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) ds = (dx, dy, dz)$$

第二型曲线积分依赖于曲线的定向, 即若记 \mathcal{C}^- 或 $-\mathcal{C} = \widehat{BA}$ 为 \mathcal{C} 的反向定向曲线, 则有

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = - \int_{\mathcal{C}^-} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s}$$

第二型曲线积分也具有线性性, 即

$$\int_{\mathcal{C}} (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) \bullet d\mathbf{s} = \alpha \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} + \beta \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \bullet d\mathbf{s} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

第二型曲线积分具有路径可加性: 设光滑曲线 \mathcal{C} 分为 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 两段, 它们与 \mathcal{C} 的取向相同, 这时记 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. 如果 \mathbf{F} 在 \mathcal{C} 上的第二类曲线积分存在, 则它在 \mathcal{C}_1 和 \mathcal{C}_2 上的第二型曲线积分也存在.

反之, 若 \mathbf{F} 在 \mathcal{C}_1 和 \mathcal{C}_2 上的第二类曲线积分存在, 则其在 \mathcal{C} 上的第二类曲线积分也存在, 且成立

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s}$$

设光滑曲线 \mathcal{C} 有参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} t : \alpha \rightarrow \beta$. 这里 $t : \alpha \rightarrow \beta$ 表示起点对应的参数为 α , 终点对应的参数为 β , 且当参数 t 从 α 变化到 β 时 (注意, 这里 α 未必小于 β), 就确定了曲线的方向.

曲线的弧长微分为 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$, 由于 $\tau := (x'(t), y'(t), z'(t))$ 是曲线上的切向量场, 故曲线上的单位切向量场为

$$\mathbf{e}_\tau = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}$$

则对连续向量场 $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} &= \int_{\mathcal{C}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \\ &= \int_{\mathcal{C}} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \end{aligned}$$

对平面光滑曲线 \mathcal{C} : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} t : \alpha \rightarrow \beta$ 及平面向量场 $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y))$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

例 6.1 计算 $\int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy$, 其中 \mathcal{C} 是圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 的上半部分, 方向为逆时针方向.

解: 曲线的参数方程为 \mathcal{C} : $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} t : 0 \rightarrow \pi$. 从而

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^{\pi} (R^2 \sin^2 t (-R \sin t) + R^2 \cos^2 t (R \cos t)) dt \\ &= R^3 \int_0^{\pi} ((1 - \cos^2 t)(-\sin t) + (1 - \sin^2 t) \cos t) dt = -\frac{4}{3} R^3 \end{aligned}$$

注记 6.1 如按第二型曲线积分的原初定义, 可求出曲线的切向量场: $\tau = (x'(t), y'(t)) =$

$(-R \sin t, R \cos t)$, 然后可得其单位切向量场为

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{\boldsymbol{\tau}}{||\boldsymbol{\tau}||} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \frac{(-R \sin t, R \cos t)}{R} = (-\sin t, \cos t)$$

曲线弧长微元为 $ds = Rdt$. 从而 (记 $\mathbf{F} = (y^2, x^2)$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet \mathbf{e}_\tau ds \\ &= \int_0^\pi (-y^2 \sin t + x^2 \cos t) R dt = \int_0^\pi (-R^3 \sin t + R^3 \cos^3 t) = -\frac{4}{3} R^3 \end{aligned}$$

或者不用参数化, 直接解出 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $x : R \rightarrow -R$ (注意这个顺序非常重
要, 因为要考虑定向) 则

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy &= \int_R^{-R} (R^2 - x^2) dx + x^2 \frac{-2x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &= \int_R^{-R} (R^2 - x^2) dx - 2 \underbrace{\int_R^{-R} \frac{x^3 dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}}_{=0} = -\frac{4R^3}{3} \end{aligned}$$

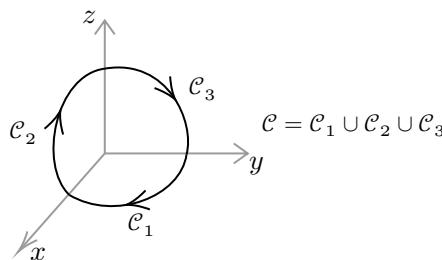
借助此例, 我们验证了第一型曲线积分的几个定义或表达方式之间的兼容性. 这种练习对理解概念的来龙去脉是很有帮助的.

例 6.2 求解上例中的曲线积分, 其中 \mathcal{C} 为从点 $M(R, 0)$ 到点 $N(-R, 0)$ 的直线段 \overrightarrow{MN} .

解: 区域在线段 \overrightarrow{MN} 上, $y = 0$, $dy = 0$, 从而

$$\int_{\mathcal{C}} y^2 dx + x^2 dy = \int_R^{-R} 0 \cdot dx = 0$$

例 6.3 计算 $\int_{\mathcal{C}} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 其中 \mathcal{C} 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的边界, 从球外看它是顺时针方向.



解：将积分路径分为三段 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, 其中每段的定向与原来的一致. 注意到被积表达式 $\omega = (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$ 关于 x, y, z 的地位完全对称. 又曲线 \mathcal{C}_i 是同样的, 只是相对于坐标系的位置不同, 表现为对 x, y, z 三个变量做轮换, 从而可知 ω 在 \mathcal{C}_i ($i = 1, 2, 3$) 上的积分都是相同的, 我们只需计算 $\int_{\mathcal{C}_1} \omega$. \mathcal{C}_1 具有参数表示

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad t : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$$

$$\text{故 } \int_{\mathcal{C}_1} \omega = \int_{\mathcal{C}_1} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin^2 t(-\sin t) - \cos^2 t(\cos t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt = \frac{4}{3}$$

$$\text{从而 } \int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}_1} \omega + \int_{\mathcal{C}_2} \omega + \int_{\mathcal{C}_3} \omega = 3 \int_{\mathcal{C}_1} \omega = 4.$$

例 6.4 计算 $\int_{\mathcal{C}} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中曲线 \mathcal{C} 由 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ 上 $z \geq 0$ 的部分给出 ($a > 0$), 且从 x 轴正向看 \mathcal{C} 是逆时针方向.

解： (尝试解法) 记 $F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, $G = x^2 + y^2 - ax$, 则曲线的切向量场为

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x - a & 2y & 0 \end{vmatrix} = (-4yz, -2z(2x - a), 4xy - 2y(2x - a)) \\ = (-4yz, 2az - 4xz, 2ay)$$

$$\text{故其单位切向量场为 } \mathbf{e}_{\tau} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|}, \text{ 弧长微分为 } ds = \frac{1}{\left| \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|} \|\boldsymbol{\tau}\| dz = \frac{1}{2ay} \|\boldsymbol{\tau}\| dz.$$

从而有向弧长微元为

$$d\mathbf{s} = \mathbf{e}_{\tau} ds = \frac{1}{2ay} \boldsymbol{\tau} dz$$

$$(y^2, z^2, x^2) \bullet d\mathbf{s} = \frac{-4y^3 z + z^2(2az - 4xz) + 2ax^2 y}{2ay} dz$$

但比较繁复，不易化简整理，故尝试它法。在柱面坐标系 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ 下，曲线

\mathcal{C} 有如下参数化

$$\begin{cases} x = a \cos^2 \theta \\ y = a \cos \theta \sin \theta \\ z = \sqrt{a^2 - r^2} = a |\sin \theta| \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

曲线的定向说明 θ 是从 $-\frac{\pi}{2}$ 变动到 $\frac{\pi}{2}$ 的。由此可知 $\int_{\mathcal{C}} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz =$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [a^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cdot 2a \cos \theta (-\sin \theta) + a^2 \sin^2 \theta \cdot a (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + a^2 \cos^4 \theta \cdot z'(\theta)] d\theta$$

注意到，上面第一项为奇函数，故其积分为零；而 $z(\theta)$ 为偶函数，从而 $z'(\theta)$ 为奇函数，从而第三项的积分也为零，故所求积分为

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta = 2a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta - 2 \sin^4 \theta) d\theta = -\frac{\pi}{4} a^3$$

例 6.5 设平面力场 \mathbf{F} 的方向指向坐标原点，且其在某点的大小与该点距离原点的距离 r 的平方成反比。求质量为 $m = 1$ 的质点在该力场下从 A 移动到 B （不通过原点）所需做功。

解：根据题意，有 $\mathbf{F} = \frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0$ ，其中 μ 为常数， $\mathbf{r}^0 = \left(\frac{-x}{r}, \frac{-y}{r} \right)$ ， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。设质点从 A 运动到 B 的路径为 $\mathcal{C} = \widehat{AB}$ 。则作功为

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mu}{r^2} \frac{1}{r} (-x, -y) \bullet (dx, dy) = -\mu \int_{\mathcal{C}} \frac{xdx + ydy}{r^3}$$

$$\stackrel{dr = \frac{xdx + ydy}{r}}{=} -\mu \int_{\mathcal{C}} \frac{dr}{r^2} = \mu \int_{\widehat{AB}} d\left(\frac{1}{r}\right) = \mu \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

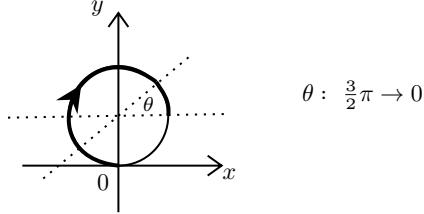
其中 r_A, r_B 分别表示原点到 A, B 的距离。

注记 6.2 上面的计算表明，力场 \mathbf{F} 的做功与路径无关。这样的力称为保守力，比如引力、电力都是保守力，它们可以写成势 (*potential*) 的梯度，由上计算即知

$$\mathbf{F} = \frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0 = \nabla \left(-\frac{\mu}{r} \right)$$

例 6.6 求质点在力场 $\mathbf{F} = \frac{e^x}{1+y^2}\mathbf{i} + \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}\mathbf{j}$ 的作用下, 沿 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 由 $(0,0)$ 顺时针方向运动到 $(1,1)$ 点的过程中力所做的功.

解: 轨迹曲线 \mathcal{C} 的参数表达为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \quad \theta : \frac{3\pi}{2} \rightarrow 0$



$$\begin{aligned} \text{力 } \mathbf{F} \text{ 的做功为 } W &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \frac{e^x}{1+y^2} dx + \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} dy = \\ &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 \frac{e^{\cos t}}{1+(1+\sin t)^2} (-\sin t) dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 \frac{2(1+\sin t)(1-e^{\cos t})}{(1+(1+\sin t)^2)^2} (\cos t) dt \end{aligned}$$

直接计算显然不易 (如果不是完全不可能的话). 但若从上例中学到了一些东西, 则不难想见: 如果这里的 \mathbf{F} 也是“保守”的, 即它可表成某个函数的梯度, 则积分与路径无关, 从而选择一条简单的从起点到终点的路径计算就可以了.

注记 6.3 也就是说, 如果 $\mathbf{F} = \nabla V$, 则 $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \nabla V \bullet (dx, dy)$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \bullet (dx, dy) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = dV \implies$$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla V \bullet (dx, dy) = \int_{\mathcal{C}} dV = V(\text{终点}) - V(\text{起点})$$

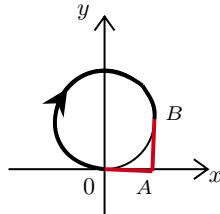
受上注记的启发, 则不难看出

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \frac{e^x}{1+y^2} dx + \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} dy = d \left(\frac{e^x - 1}{1+y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{由此可知 } W &= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} d \left(\frac{e^x - 1}{1+y^2} \right) = \int_{(0,0) \rightarrow (1,1)} d \left(\frac{e^x - 1}{1+y^2} \right) = \\ &= \left(\frac{e^x - 1}{1+y^2} \right) \Big|_{(1,1)} - \left(\frac{e^x - 1}{1+y^2} \right) \Big|_{(0,0)} = \frac{e-1}{2} \end{aligned}$$

或者, 由于已知积分只依赖起点 0 和终点 B , 而不依赖于具体路径, 则为简单起

见，我们选择下面的计算路径，即先沿着平行于 x 轴的路径，从 $0(0,0)$ 到 $A(1,0)$ ，然后再沿着平行于 y 轴的路径，从 $A(1,0)$ 到 $B(1,1)$.



$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_{OA} \frac{e^x}{1+y^2} dx + \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} dy + \int_{AB} \frac{e^x}{1+y^2} dx + \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} dy \\
 &= \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 \frac{2y(1-e)}{(1+y^2)^2} dy = e - 1 + (1-e) \int_0^1 \frac{d(1+y^2)}{(1+y^2)^2} \\
 &= e - 1 + (1-e) \left(-\frac{1}{1+y^2} \right) \Big|_0^1 = e - 1 + \frac{1-e}{2} = \frac{e-1}{2}
 \end{aligned}$$

注记 6.4 如上面将 $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ 写成全微分的方法不显然，也可直接求解如下：设

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \frac{e^x}{1+y^2} dx + \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} dy = dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy$$

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{e^x}{1+y^2} \\
 \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}
 \end{array}
 \right. \Rightarrow$$

$$V(x, y) = \int \frac{e^x}{1+y^2} dx + C(y) = \frac{e^x}{1+y^2} + C(y)$$

$$\text{从而 } \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-2ye^x}{(1+y^2)^2} + C'(y) = \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} \Rightarrow C'(y) = \frac{2y}{(1+y^2)^2}$$

解得

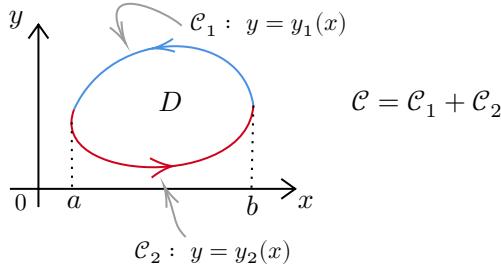
$$C(y) = \int \frac{2ydy}{(1+y^2)^2} = -\frac{1}{1+y^2} + C$$

取 $C = 0$ 即得

$$V(x, y) = \frac{e^x - 1}{1+y^2}$$

6.1 利用曲线积分求面积

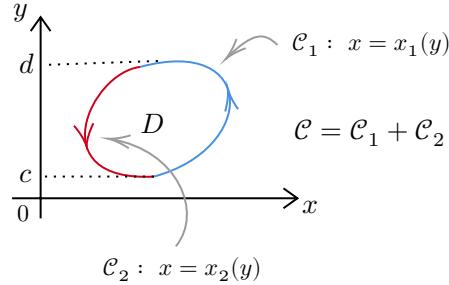
如果平面区域 D 由封闭曲线 \mathcal{C} 所包围, 且假定区域 D 夹在两曲线 $\mathcal{C}_1 : y = y_1(x)$, $a \leq x \leq b$ 和 $\mathcal{C}_2 : y = y_2(x)$, $a \leq x \leq b$ 之间, 称为 x -型区域, 如下图所示:



在这种情况下, 区域 D 的面积为

$$\begin{aligned} \int_a^b (y_1(x) - y_2(x)) dx &= - \int_b^a y_1(x) dx - \int_a^b y_2(x) dx \\ &= - \int_{\mathcal{C}_1} y dx - \int_{\mathcal{C}_2} y dx = - \oint_{\mathcal{C}} y dx \end{aligned}$$

若区域 D 夹在两曲线 $\mathcal{C}_1 : x = x_1(y)$, $c \leq y \leq d$ 和 $\mathcal{C}_2 : x = x_2(y)$, $c \leq x \leq d$ 之间, 称为 y -型区域如下图所示:



在这种情况下, 区域 D 的面积为

$$\begin{aligned} \int_c^d (x_1(y) - x_2(y)) dy &= \int_c^d x_1(y) dy + \int_d^c x_2(y) dy \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} x dy + \int_{\mathcal{C}_2} x dy = \oint_{\mathcal{C}} x dy \end{aligned}$$

若一区域 D 既是 x -型又是 y -型的 (比如平面矩形区域), 设其边界曲线为 \mathcal{C} , 定向

为：当沿着 \mathcal{C} 走动时，区域 D 恒位于左侧。那么由上讨论，区域 D 的面积可计算如下

$$Area(D) = \iint_D dxdy = \oint_{\mathcal{C}} xdy = - \oint_{\mathcal{C}} ydx = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} xdy - ydx$$

比如对单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ ，我们知道其面积为 2π ，如按上公式，则有

$$\frac{1}{2} \oint_{x^2+y^2=1} xdy - ydx \xrightarrow[x=\cos\theta, y=\sin\theta]{\theta: 0 \rightarrow 2\pi} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = 2\pi$$

自然要问：面积公式

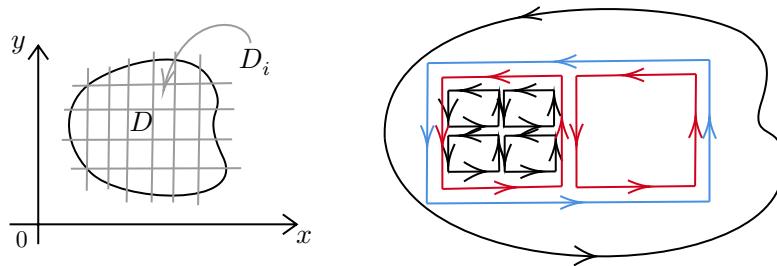
$$Area(D) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} xdy - ydx$$

对一般区域 D （当然其边界曲线 \mathcal{C} 须是分段光滑的）是否仍然成立？

答案是肯定的，这是因为可对区域 D 进行剖分，每一小部分要么是小矩形，要么是边界附近的区域——可看出 x -型或 y -型区域，其上的积分 $\oint xdy - ydx$ 计算出的是每一块的小面积，将所有这些面积相加就得到了区域 D 的面积，而对应的第二型曲线积分（或环积分）由于在相邻矩形边界上的抵消（见下面右图）机制，其净效应是沿曲面边界上的定向积分，即

$$Area(D) = \sum_i Area(D_i) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \oint_{\partial D_i} xdy - ydx = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} xdy - ydx$$



注意，上面积公式本质上将一个区域上的二重积分通过转化为其边界曲线上的一维线积分来计算。这类似于定积分中的牛顿-莱布尼茨公式，它将一维有向线段上的积分转化为其边界点上的加符号权的求和（0-维积分）。事实上，这是个普遍现象，下几节中将对之开展讨论。在此之前，我们先探讨第二型曲面积分的计算。

7 第二型曲面积分的计算及其应用

第五节中我们对第二型曲面积分的引入背景及其定义模式做了详细的说明. 它是向量场 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 对有向曲面 Σ 的通量积分, 即

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}^0 dS$$

其中 \mathbf{n}^0 是与曲面定向一致的单位法向量场. 记 $\mathbf{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. 则

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0 dS = \cos \alpha dS\mathbf{i} + \cos \beta dS\mathbf{j} + \cos \gamma dS\mathbf{k}$$

1. $dydz := \cos \alpha dS$ 是曲面上有向面元 $d\mathbf{S}$ 在 yz -平面上的投影 (有向) 面积 (\mathbf{i} 方向规定为正向);
2. $dzdx := \cos \beta dS$ 是曲面上有向面元 $d\mathbf{S}$ 在 xz -平面上的投影 (有向) 面积 (\mathbf{j} 方向规定为正向);
3. $dxdy := \cos \gamma dS$ 是曲面上有向面元 $d\mathbf{S}$ 在 xy -平面上的投影 (有向) 面积 (\mathbf{k} 方向规定为正向).

故第二型曲面积分亦可写作

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} &= \iint_{\Sigma} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx + \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

即第二型曲面积分可写为三个坐标面上的曲面积分之和.

如光滑曲面 Σ 有参数描述 $\Sigma : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} (u, v) \in D_{uv}$, 则由第五节的讨论,

我们知道其上的有向面元为

$$d\mathbf{S} = \pm \mathbf{n}^0 dS = \pm (A, B, C) dudv = \pm \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv$$

$$\begin{aligned}
\text{从而 } \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} &= \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \\
&\pm \iint_D \left(P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \right. \\
&\quad \left. + R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) dudv
\end{aligned}$$

其中“±”由曲面的定向决定.

特别地, 若曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 给出, 则视 x, y 为参数, 可知

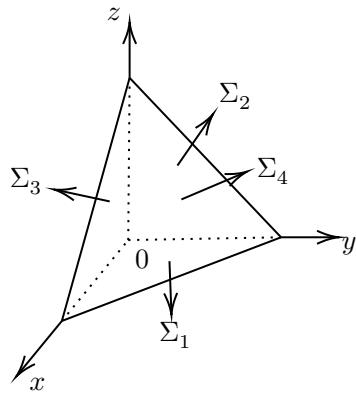
$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)} = -z_x; \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)} = -z_y; \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = 1$$

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} (-P z_x - Q z_y + R) dx dy$$

当曲面 Σ 的定向取“上侧”(即 $\cos \gamma > 0$) 时, 符号取 "+", 反之取 "-".

若曲面由 $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{xz}$, 或由 $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$ 来确定, 则可类似讨论.

例 7.1 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x+1) dy dz + (y+1) dz dx + (z+1) dx dy$, 其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ 和 $z=0$ 所围立体的表面, 方向取外侧.



解: 将曲面 Σ 分为 Σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ 四个小曲面片. 我们求出 Σ_i 上的积分, 然后相加即可. Σ_1 的方程为 $z = 0, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1$, 其单位法向量为 $-\mathbf{k}$. 从而 $d\mathbf{S}$ 在

xy 平面上的投影面积 $dxdy$ 为负, 故

$$\iint_{\Sigma_1} (x+1)dydz + (y+1)dzdx + (z+1)dxdy = - \iint_{\Sigma_1} dxdy = - \iint_{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1-x} dxdy = -\frac{1}{2}$$

同理可得

$$\iint_{\Sigma_2} (x+1)dydz + (y+1)dzdx + (z+1)dxdy = -\frac{1}{2}$$

$$\iint_{\Sigma_3} (x+1)dydz + (y+1)dzdx + (z+1)dxdy = -\frac{1}{2}$$

又 Σ_4 的方程为 $z = 1 - x - y$, $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$. 其法向量为 $(1, 1, 1)$, 故有向面元 $d\mathbf{S}$ 在三个坐标面上的投影面积 $dydz$, $dzdx$, $dxdy$ 都为正, 从而

$$\iint_{\Sigma_4} (z+1)dxdy = \iint_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x} (2-x-y)dxdy = \frac{2}{3}$$

由对称性可知

$$\iint_{\Sigma_4} (x+1)dydz = \iint_{\Sigma_4} (y+1)dzdx = \frac{2}{3}$$

故 $\iint_{\Sigma_4} \dots = 2$. 最后将诸计算结果相加, 得到 $I = \frac{1}{2}$.

注记 7.1 或直接将积分化为 $\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$ 的形式求解. 比如在计算 $\iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$ 时, 由于在

Σ_1 上有向面元的表达为 $d\mathbf{S} = -\mathbf{k}dxdy$, 故 $\iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} =$

$$\iint_{\Sigma_1} ((x+1), (y+1), (z+1)) \bullet (0, 0, -1) dxdy$$

$$= - \iint_{\Sigma_1} (z+1)dxdy = -\frac{1}{2}$$

这与上面直接计算 $d\mathbf{S}$ 在 xy -平面上的投影面积得到的 $-dxdy$ 是一致的.

例 7.2 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z) dx dy$, 其中曲面 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧.

解: 先用广义球坐标对椭球面参数, 即 $\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta \\ y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]. \\ z = c \cos \varphi \end{cases}$ 即

曲面上点的位置向量为

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = (a \sin \varphi \cos \theta, b \sin \varphi \sin \theta, c \cos \varphi)$$

对应两族坐标曲线的切向量分别为

$$\mathbf{r}_\varphi = (a \cos \varphi \cos \theta, b \cos \varphi \sin \theta, -c \sin \varphi); \quad \mathbf{r}_\theta = (-a \sin \varphi \sin \theta, b \sin \varphi \cos \theta, 0)$$

$$\text{曲面上的法向量场为 } \mathbf{n} = \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \varphi \cos \theta & b \cos \varphi \sin \theta & -c \sin \varphi \\ -a \sin \varphi \sin \theta & b \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (bc \sin^2 \varphi, ac \sin^2 \varphi \sin \theta, ab \sin \varphi \cos \varphi)$$

注意该法向量的选取与曲面的定向是一致的. 故曲面上的有向面元 $d\mathbf{S}$ 在 xy -平面上的投影面积为

$$dxdy = \cos \gamma dS = \frac{ab \sin \varphi \cos \varphi}{\|\mathbf{n}\|} \cdot \|\mathbf{n}\| d\varphi d\theta = ab \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\theta$$

$$\text{故 } \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z) dx dy =$$

$$= \iint_{0 \leq \varphi \leq \pi; 0 \leq \theta \leq 2\pi} (a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c \cos \varphi) ab \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^\pi (a^3 b \sin^3 \varphi \cos \varphi) d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \int_0^\pi (ab^3 \sin^3 \varphi \cos \varphi) d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ + abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$$

前两项关于 φ 的积分为零, 故只需计算第三项积分. 不难算出所求积分为 $\frac{4\pi}{3} abc$.

注记 7.2 上面投影面积 $dxdy$ 的计算也可利用外积的规则 (c.f. 第五节末尾的讨论) 方便求出, 即

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} d\varphi \wedge d\theta = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\theta \\ y_\varphi & y_\theta \end{vmatrix} d\varphi \wedge d\theta \\ &= \begin{vmatrix} a \cos \varphi \cos \theta & b \cos \varphi \sin \theta \\ -a \sin \varphi \sin \theta & b \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} d\varphi \wedge d\theta = ab \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \wedge d\theta \end{aligned}$$

例 7.3 计算 $I = \iint_{\Sigma} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2rx$ ($0 < r < R$) 截下的位于 $z \geq 0$ 的部分, 方向取外侧.

解: Σ 上与其定向一致的单位法向量场为

$$\mathbf{n}^0 = \left(\frac{x-R}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } I &= \iint_{\Sigma} (y-z, z-x, x-y) \bullet \mathbf{n}^0 dS \\ &= \frac{1}{R} \iint_{\Sigma} ((y-z)(x-R) + (z-x)y + (x-y)z) dS = \iint_{\Sigma} (z-y) dS \\ &\stackrel{\Sigma \text{ 关于 } xz \text{ 平面对称}}{=} \iint_{\Sigma} zdS = \iint_{x^2+y^2 \leq 2rx} \sqrt{2Rx-x^2-y^2} \frac{R}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}} dxdy \\ &= R\pi r^2 = \pi Rr^2 \end{aligned}$$

有时候第一型曲面积分也可转化为第二型曲面积分求解.

例 7.4 计算 $I = \iint_{\Sigma} xyz(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 在第一卦限中的部分.

解: 注意到球面上的单位法向量可选为

$$\mathbf{n}^0 = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right)$$

而积分 I 可转写为如下形式

$$I = R \iint_{\Sigma} \left(y^3 z^3 \frac{x}{R} + z^3 x^3 \frac{y}{R} + x^3 y^3 \frac{z}{R} \right) dS = R \iint_{\Sigma} (y^3 z^3, z^3 x^3, x^3 y^3) \bullet d\mathbf{S}$$

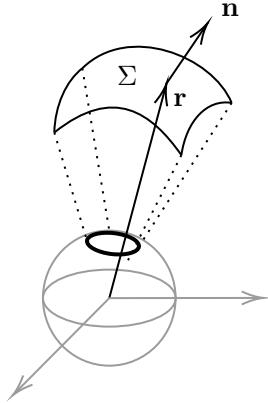
即将 I 看出第二型曲面积分，其中曲面的定向为球面外侧。由对称性，可得

$$I = 3R \iint_{\Sigma} x^3 y^3 dx dy = 3R \iint_{D_{xy}} x^3 y^3 dx dy$$

其中 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ，利用 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ ，可计算得

$$I = 3R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r^7 \sin^3 \theta \cos^3 \theta dr = \frac{3}{64} R^9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\theta d\theta = \frac{R^9}{32}$$

例 7.8 (立体角. c.f. 注记 5.1) 在注记 5.1 中，我们将立体角 Ω 定义为物体（看成空间一曲面 Σ ）投影到单位球面（以观测点为球心）上的投影面积大小。



记 \mathbf{r} 为曲面 Σ 上的点相对于观测点（原点）的位置矢量， \mathbf{n} 为曲面的外法向量，则 Σ 的立体角 Ω 的微元 $d\Omega$ 即曲面上的有向面元 $d\mathbf{S} = \mathbf{n}^0 dS$ 在单位球面（以观测原点为球心）上的投影面积。由于 \mathbf{r} 同时也是球面的外法向量，故投影面积为

$$d\Omega = d\mathbf{S} \bullet \mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{n}^0 \bullet \mathbf{r}^0}{r} dS = \frac{\mathbf{n}^0 \bullet \mathbf{r}^0}{r^2} dS = \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS$$

其中 (\mathbf{r}, \mathbf{n}) 表示 \mathbf{r} 和 \mathbf{n} 之间的夹角。由此，可得曲面 Σ 的立体角的计算公式

$$\Omega = \iint_{\Sigma} \mathbf{r}^0 \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS$$

该积分称为 *Gauss 曲面积分*，我们将在第 9.2 节的注记 9.2.2 中计算当 Σ 是一个封闭曲面时的立体角。不难想见，只要 Σ 不包含观测点，则上积分为 0；而当任意封闭 Σ 包含观测点时，上积分计算出的立体角应是 4π 。

8 格林公式和斯托克斯公式

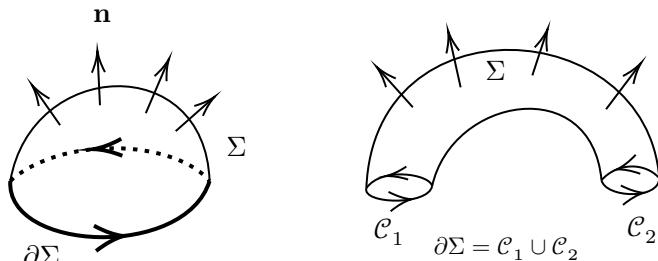
8.1 概念背景及核心枢纽

微积分学的核心枢纽自然是牛顿-莱布尼茨公式，即 $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. 从积分区域来看，这一公式将一维积分区域 $[a, b]$ 和零维点集 $\{a, b\}$ 联系起来了.

更严格来说，它将一维有向线段 \overrightarrow{ab} 和零维有向点集 “ $b - a$ ” (c.f. 见第一节中的相关说明) 联系起来了；而另一方面，这一公式将函数 $F(x)$ 及其微分 dF 关联起来了. 即一次微分 dF 和一维 \overrightarrow{ab} 积分得到的数 $\int_a^b dF(x)$ 和零次微分（即函数） F 和零维 $b - a$ “积分”（即 $F(b) - F(a)$ ）所得相同.

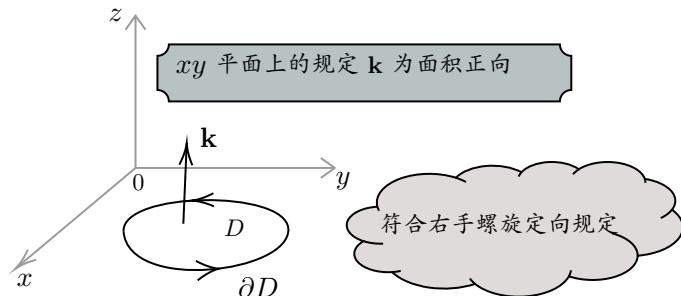
推广的方向自然是将维度提高，即二维有向曲面 Σ 上的（第二型）曲面积分同其边界曲线 $\partial\Sigma$ 上的（第一型）曲线积分之间是否也具有类似上面的关系？

答案是肯定，一般的斯托克斯（Stokes）公式即是这种关系的表达. 根据上面的线索，我们先猜测其可能的形式. 设 Σ 是有向曲面，其边界 $\partial\Sigma$ 曲线（注意边界曲线一定是封闭的，为什么？）的定向规定如下：



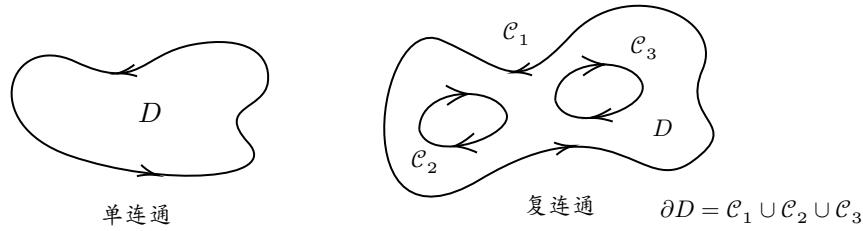
右手法则定向：右手四指沿 $\partial\Sigma$ 的方向环绕时，大拇指应指向曲面 Σ 的定向法向量 n 对应的一侧.

特别地，对平面区域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ，其边曲线的定向 ∂D 按上面的规则可定向为：当沿着 ∂D 走动时，区域 D 恒位于左侧.

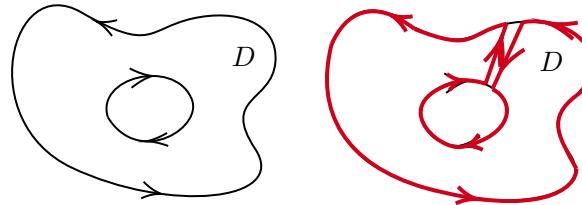


上图中 xy -平面上的区域 D 是单连通 (*simply connected*) 区域，即区域内的任意闭曲线都可收缩为一点；不是单连通的区域称为是复连通的，即其中存在闭曲线，不能在区域内连续收缩为一点。

不难发现：区域 D 内的曲线不能收缩为一点的“障碍”是其中有“洞”，故单连通区域可认为是其中没有“洞”的区域，而复连通区域中有洞存在。



根据上面的定向规定：上右图中的复连通区域 D 的边界曲线的定向如图中所示，即沿着边界曲线的定向方向行走时，区域总位于左侧。当然，也可从下面的考量看出该定向规定的合理性。



比如要想沿着边界 ∂D 上某点开始环绕边界一周然后回到起始点，则在上面的定向下，可通过搭建“双向桥”（在其上的积分会相互抵消）顺畅地沿边界通行一圈。否则，“搭桥”后也会“碰壁”，或被迫原路返回。

好，定向已明，我们可试图推测高一维度的牛顿-莱布尼茨公式的可能形式。对定向曲面 Σ ，在其有向边界 $\partial\Sigma$ 上考察对 1-次微分形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 的（第二型）曲线积分 $\oint_{\partial\Sigma} \omega$ ，按照定积分的模式，它应该等于 ω 的某种“微分” $d\omega$ 在有向曲面 Σ 上的积分，即应有

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \iint_{\Sigma} d\omega$$

关键是这里的 $d\omega$ 应该是什么？对零次微分形式，即函数 $f(x)$ ，其微分就是通常的微分 $df(x)$ ；而对这里的一次微分形式 ω ，其微分 $d\omega$ 应是个能够度量有向面积的二次

微分形式 (c.f. 第 5 节后段的讨论). 下面我们对其形式进行合理推测. 首先, 求微分算子 “ d ” 应该是个线性算子, 从而

$$d\omega = d(Pdx + Qdy + Rdz) = d(Pdx) + d(Qdy) + d(Rdz)$$

故核心是该如何定义 $d(Pdx)$, $d(Qdy)$, $d(Rdz)$ 该才是合理? 已知线索是: 对函数 P, Q, R , 我们可计算其全微分如下

$$\left\{ \begin{array}{l} dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \\ dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \\ dR = \frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz \end{array} \right. \quad (8.1)$$

当然, 更实质的线索是: 我们知道 $d(Pdx)$ 在 Σ 上的积分应等于在其边界 $\partial\Sigma$ 上对 Pdx 的积分.

因为 $\iint_{\Sigma} d(Pdx)$ 是第二型曲面积分, 故它可以写成下面的形式

$$\iint_{\Sigma} (\widetilde{P}, \widetilde{Q}, \widetilde{R}) \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \widetilde{P}dydz + \widetilde{Q}dzdx + \widetilde{R}dxdy$$

记 Σ_{yz} 、 Σ_{zx} 、 Σ_{xy} 分别为定向曲面 Σ 在三个坐标平面 yz -平面、 zx -平面、 xy -平面上的投影区域, 则上积分可写为

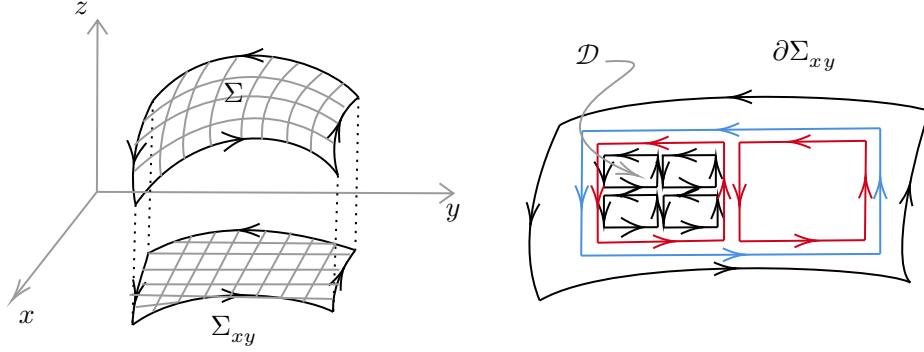
$$\iint_{\Sigma} \widetilde{P}dydz + \widetilde{Q}dzdx + \widetilde{R}dxdy = \iint_{\Sigma_{yz}} \widetilde{P}dydz + \iint_{\Sigma_{zx}} \widetilde{Q}dzdx + \iint_{\Sigma_{xy}} \widetilde{R}dxdy$$

其中 $dydz = dy \wedge dz$ (用外积表示投影面积的正负性, 即 $dy \wedge dz = -dz \wedge dy$, 即用 “+” 表示 \mathbf{i} 方向, “-” 表示 $-\mathbf{i}$ 方向); 同理 $dzdx = dz \wedge dx$, $dxdy = dx \wedge dy$.

为使上积分等于第二型曲线积分 $\oint_{\partial\Sigma} Pdx$, 由于在 Σ_{yz} 上 $x \equiv 0$, 从而 $\oint_{\partial\Sigma} Pdx = 0$, 故知

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx = \iint_{\Sigma_{zx}} \widetilde{Q}dzdx + \iint_{\Sigma_{xy}} \widetilde{R}dxdy = \iint_{\Sigma} \widetilde{Q}dzdx + \widetilde{R}dxdy = \iint_{\Sigma} d(Pdx)$$

下面我们通过计算求出 \widetilde{Q} 和 \widetilde{R} . 首先将曲面 Σ 分划为小曲面片，分划后的每一片按原模式定向，并假设该分划对应着 Σ 在 xy -平面上的投影区域 Σ_{xy} 上按平行与 x 和 y -轴的直线族所给的分划. 见下图所示



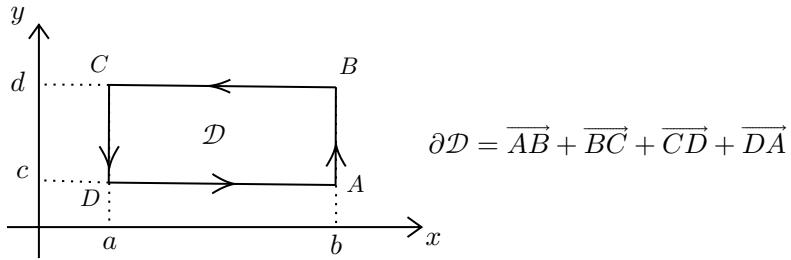
同理可由对 Σ 在 xz -平面上的投影区域 Σ_{zx} 上的类似分划.

设 $\Sigma = \bigsqcup_i \Sigma_i$, 并设 Σ_i 在 xy -平面和 xz -平面上的投影区域分别为 Σ_{xy}^i , Σ_{zx}^i , 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} d(Pdx) &= \sum_i \iint_{\Sigma_i} d(Pdx) = \sum_i \iint_{\Sigma_{xy}^i} d(Pdx) + \sum_i \iint_{\Sigma_{zx}^i} d(Pdx) \\ &= \sum_i \oint_{\partial \Sigma_{xy}^i} Pdx + \sum_i \oint_{\partial \Sigma_{zx}^i} Pdx \end{aligned}$$

按上面的右图, $\sum_i \oint_{\partial \Sigma_{xy}^i} Pdx$ 之间通过抵消得到 $\sum_i \oint_{\partial \Sigma_{xy}^i} Pdx = \oint_{\partial \Sigma_{xy}} Pdx$.

从而为了获知 $d(Pdx)$ 的表达如何? 我们只需取 Σ_{xy} 的分划中的一个典型小矩形块, 记为 $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$, 然后在其上计算即可.



对上区域 \mathcal{D} , 可计算如下

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} Pdx = \underbrace{\int_{AB} Pdx}_{=0} + \underbrace{\int_{BC} Pdx}_{=0} + \underbrace{\int_{CD} Pdx}_{=0} + \underbrace{\int_{DA} Pdx}_{=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\overrightarrow{BC}} P dx + \int_{\overrightarrow{DA}} P dx = \int_b^a P(x, d) dx + \int_a^b P(x, c) dx \\
&= \int_a^b [P(x, c) - P(x, d)] dx = - \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy = - \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy
\end{aligned}$$

由此可知 $d(P dx) = -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx$, 其中外积 $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ 表示无穷小的有向面积 (以 "±" 区分方向, $dx \wedge dy$ 代表 \mathbf{k} 方向面元).

同理, 在计算 $\iint_{\Sigma_{zx}} d(P dx)$ 时, 可知 $d(P dx) = \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx = -\frac{\partial P}{\partial z} dx \wedge dz$

由于 $\iint_{\Sigma} d(P dx) = \iint_{\Sigma_{xy}} d(P dx) + \iint_{\Sigma_{zx}} d(P dx)$, 故知 (将 $dxdy, dzdx$ 视为投影面积)

$$d(P dx) = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx = \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

类似的讨论可知

$$d(Q dy) = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy = \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz$$

$$d(R dz) = \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz = \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx$$

从而得知 $\omega = P dx + Q dy + R dz$ 的“微分”应是

$$\begin{aligned}
d\omega &= d(P dx) + d(Q dy) + d(R dz) = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \\
&\quad + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy
\end{aligned}$$

故得斯托克斯 (Stokes) 公式:

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \iint_{\Sigma} d\omega$$

$$\text{即 } \oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

看成对向量场的积分, 记 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 则左边积分为 $\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s}$, 右边是下面的向量场对曲面 Σ 的 (通量) 积分

$$\nabla \times \mathbf{F} := \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$\nabla \times \mathbf{F}$ 称为向量场 \mathbf{F} 的旋度 (*curl*), 其形式运算规则给出如下:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

即将 ∇ 看成是矢量微分算子 $\nabla := \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$. 从而斯托克斯公式可写作

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{S}$$

注记 8.1.1 结合全微分公式 (8.1), 不难看出, 对一次微分形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 的微分 $d\omega$ 是按如下规则进行的, 称为对 ω 进行外微分 (*exterior differential*), 即

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz \xrightarrow{\text{外积的反对称和线性运算法则}} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

由此看出, 反对称线性这种代数运算, 即外微分的操作是完全契合于我们这里所需, 非常神奇! 外微分是法国数学家 *E. Cartan* 于 20 世纪初发明的, 并已被广泛运用到现代数学和应用科学的方方面面, 该工具尤其在现代微分几何中有着惊人的威力.

8.2 格林公式

$$\begin{aligned} \text{考慮斯托克斯 (Stokes) 公式 } & \oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \\ & = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

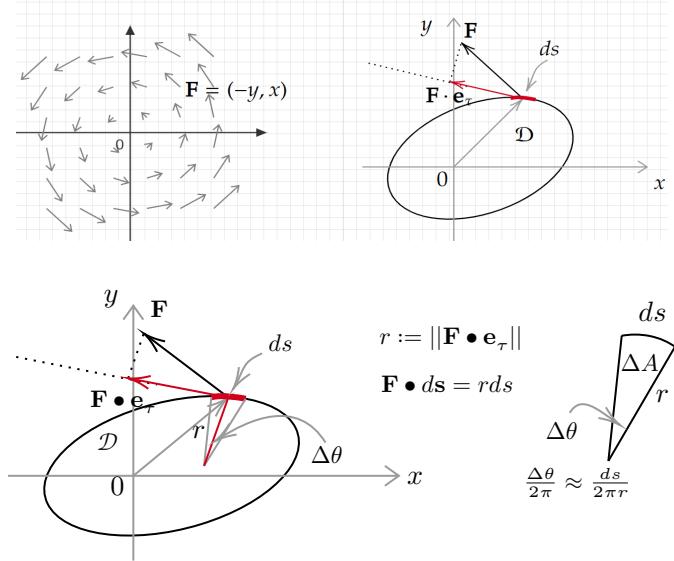
的特殊情形，即设 Σ 是 xy -平面上的由光滑或分段光滑的简单（即无自交点）闭曲线所围成的单连通区域 \mathcal{D} ，则对平面上的向量场

$$\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

若 P, Q 在 \mathcal{D} 上具有连续偏导数（保证可积性），则有如下格林 (Green) 公式：

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

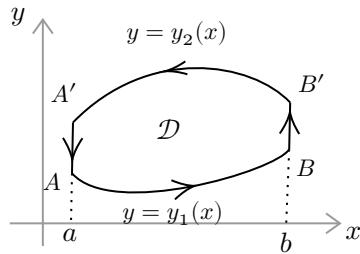
注记 8.2.1 特别地，若取 $Q = x$, $P = -y$ ，则右边的积分等于 $2\text{Area}(\mathcal{D})$ ，使得用线积分计算平面区域面积的公式 $\text{Area}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \oint_{\partial\mathcal{D}} xdy - ydx$. 下面我们给出该公式的几何解释：令 $\mathbf{F} = (-y, x)$ ，它是平面上的旋转向量场，其图形如下.



$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta \theta = \frac{r^2}{2} \frac{ds}{r} = \frac{1}{2} r ds = \frac{1}{2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} \implies \sum \Delta A = \frac{1}{2} \oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s}$$

格林公式的直接证明：

- 若区域 \mathcal{D} 是 x -型区域，即 $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$

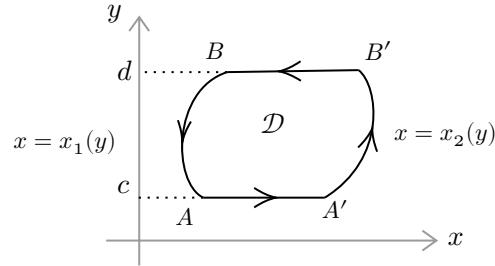


$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx \\ &= - \int_{\overbrace{B'A'}^{\text{arc}}} P dx - \int_{\overbrace{AB}^{\text{arc}}} P dx \end{aligned}$$

又因为 Pdx 在 $\overrightarrow{A'A}$ 和 $\overrightarrow{BB'}$ 上为零，故得

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\overbrace{AB}^{\text{arc}}} P dx - \int_{\overbrace{B'A'}^{\text{arc}}} P dx - \int_{\overbrace{A'A}^{\text{arc}}} P dx - \int_{\overbrace{BB'}^{\text{arc}}} P dx = - \oint_{\partial \mathcal{D}} P dx$$

- 若区域 \mathcal{D} 是 y -型区域，即 $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$

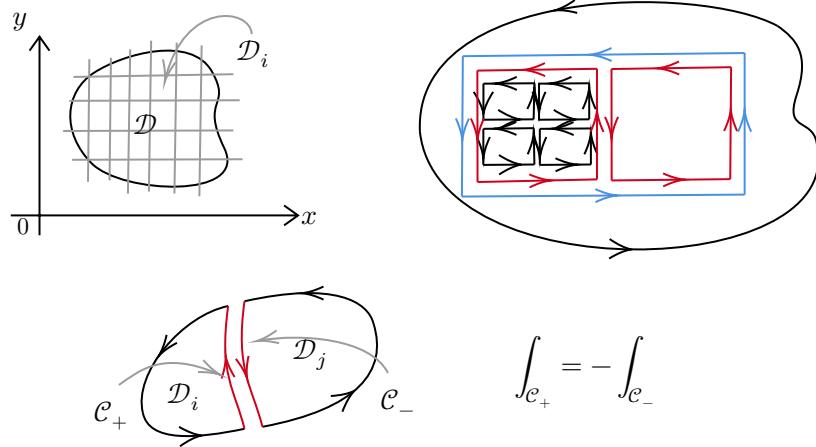


完全类似地，可证（请读者自行完成）

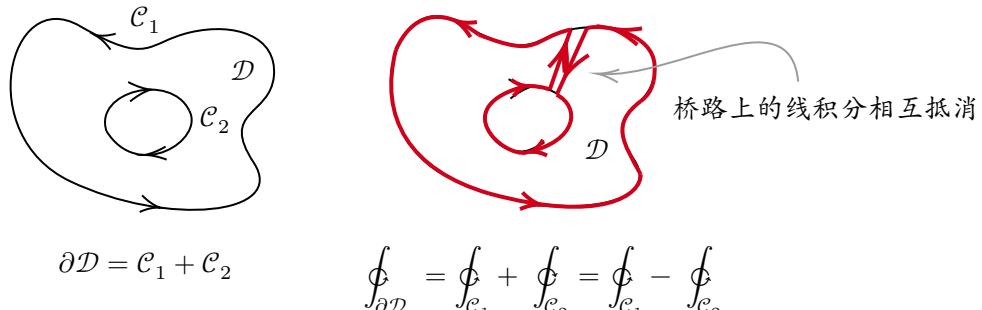
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial \mathcal{D}} Q dy$$

故若区域 \mathcal{D} 即是 x -型的又是 y -型的（如矩形区域），则其上格林公式成立——上两式相加即可。

对一般单连通区域 \mathcal{D} , 总可以将其剖分为有限个区域, 使得每一个小区域或是 x -型的, 或是 y -型的, 从而在每个小区域上格林公式成立, 而在相邻区域的相邻边界上, 由于曲线积分相互抵消 (见下图), 故格林公式对一般单连通区域也成立.



格林公式对具有有限个洞的复连通区域 \mathcal{D} 也是成立的, 这是因为可以将 \mathcal{D} 先划分成有限个单连通区域 \mathcal{D}_i , 在每个 \mathcal{D}_i 上应用上格林公式, 然后相加即可.



$$\oint_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy = \oint_{\mathcal{C}_1} + \oint_{\mathcal{C}_2} = \oint_{\mathcal{C}_1} - \oint_{\mathcal{C}_2}$$

比如, 对上面有一个“洞”的复连通区域 \mathcal{D} , 仍然成立

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

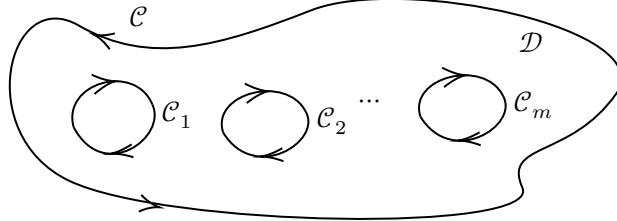
$$\text{其中 } \oint_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy = \oint_{\partial\mathcal{C}_1} Pdx + Qdy + \oint_{\partial\mathcal{C}_2} Pdx + Qdy$$

注意 \mathcal{C}_2 的定向与 \mathcal{C}_1 的定向相反. \mathcal{C}_1 按“逆时针”定向, 而 \mathcal{C}_2 按“顺时针”定向.

更一般地, 若平面区域 \mathcal{D} 中有 m 个“洞” \mathcal{D}_i , 记 $\partial\mathcal{D}$ 的最外侧曲线为 \mathcal{C} , 按逆时针定向, 并记区域中“洞” \mathcal{D}_i 的边界曲线为 \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, m$, 按顺时针定向. 则有

如下公式

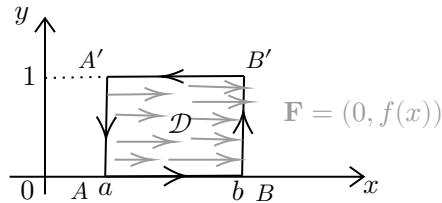
$$\oint_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$



其中

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy &= \oint_C Pdx + Qdy + \sum_{i=1}^m \oint_{C_i} Pdx + Qdy \\ &\xrightarrow{\text{如曲线 } C_i \text{ 都按逆时针处理}} \oint_C Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} Pdx + Qdy \end{aligned}$$

注记 8.2.2 格林公式是牛顿-莱布尼茨公式的直接推广. 故通过选定特殊区域, 可从格林公式直接导出牛顿-莱布尼茨公式. 取 $\mathcal{D} = [a, b] \times [0, 1]$. 并考虑向量场 $\mathbf{F} = (0, f(x))$ 在 $\partial\mathcal{D}$ 上的“环流”



即 $P = 0$, $Q = f(x)$, 故 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f'(x)$, 从而 $\iint_{\mathcal{D}} f'(x)dxdy = \oint_{\partial\mathcal{D}} f(x)dy$.

坐标等于

$$\int_0^1 dy \int_a^b f'(x)dx = \int_a^b f'(x)dx$$

$$\begin{aligned} \text{右边等于 } & \left(\int_{B'A'} + \int_{A'A} + \int_{AB} + \int_{BB'} \right) f(x)dy = \left(\int_{A'A} + \int_{BB'} \right) f(x)dy \\ &= \int_1^0 f(a)dy + \int_0^1 f(b)dy = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

从而得到牛顿-莱布尼茨公式 $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

例 8.2.1 计算椭圆的面积.

解: 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 记其所围区域为 \mathcal{D} , 其边界 $\partial\mathcal{D}$ 按逆时针定向, 则有

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} dxdy = \frac{1}{2} \oint_{\partial\mathcal{D}} xdy - ydx \\ &\stackrel{x=a\cos\theta, y=b\sin\theta}{=} \int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta) d\theta = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab \end{aligned}$$

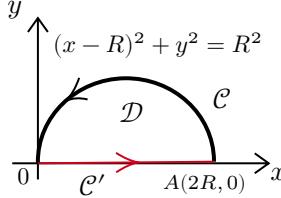
例 8.2.2 计算曲线积分 $I = \oint_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x})dx + (5x + \sqrt{1+y^2})dy$, 其中 \mathcal{C} 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 按逆时针定向.

解: 令 $P = 3y - e^{\sin x}$, $Q = 5x + \sqrt{1+y^2}$. 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 5 - 3 = 2$, 故由格林公式

$$I = \oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{\mathcal{D}} 2dxdy = 2\pi \times 2 \times 3 = 12\pi$$

例 8.2.3 计算曲线积分 $I = \int_{\mathcal{C}} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y + mx)dy$, 其中 m 为常数, \mathcal{C} 为上半圆周 $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ 上, 从点 $A(2R, 0)$ 到原点 $O(0, 0)$ 的弧段.

解: 添加线段 $\mathcal{C}' := \overrightarrow{OA}$, 将曲线 \mathcal{C} 补为封闭曲线 $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$, 记其所围区域为 \mathcal{D} .



记 $P = e^x \sin y - my$, $Q = e^x \cos y + mx$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (e^x \cos y + m) - (e^x \cos y - m) = 2m$$

利用格林公式, 可得 $I + \int_{\overrightarrow{OA}} \dots = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 2m \text{Area}(\mathcal{D}) = \pi m R^2$.

从而

$$I = \pi m R^2 - \int_{\overrightarrow{OA}} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y + mx)dy$$

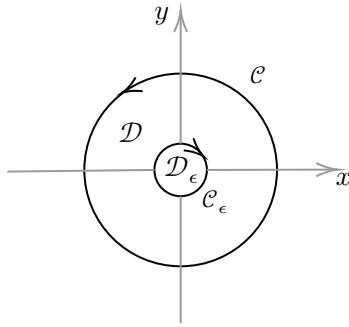
$$\overline{\overline{OA \text{ 上 } y=0}} \pi m R^2 - \int_0^{2R} (e^x \sin 0 - m \cdot 0) dx = \pi m R^2$$

例 8.2.4 计算 $I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^y}{x^2 + y^2} [(x \sin x + y \cos x)dx + (y \sin x - x \cos x)dy]$ 其中 $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向.

解: $P = \frac{e^y}{x^2 + y^2}(x \sin x + y \cos x), Q = \frac{e^y}{x^2 + y^2}(y \sin x - x \cos x)$. 不难看出当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

为了能够运用格林公式, 我们将“奇异点” $(0,0)$ 挖掉, 即取曲线 $\mathcal{C}_\epsilon : x^2 + y^2 = \epsilon^2$ (顺时针方向), 并记曲线 \mathcal{C} 和 \mathcal{C}_ϵ 之间的区域为 \mathcal{D} .



在区域 \mathcal{D} 上运用格林公式, 得

$$\begin{aligned} I &= \left(\oint_{\mathcal{C}} + \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} \right) P dx + Q dy - \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} P dx + Q dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} P dx + Q dy = - \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} P dx + Q dy \xrightarrow{\text{改变曲线方向}} \\ &= \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} P dx + Q dy = \frac{1}{\epsilon^2} \oint_{\mathcal{C}_\epsilon} e^y ((x \sin x + y \cos x)dx + (y \sin x - x \cos x)dy) \\ &\xrightarrow{\text{在 } \mathcal{D}_\epsilon \text{ 上运用格林公式}} \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\mathcal{D}_\epsilon} -2e^y \cos x dx dy \xrightarrow{\substack{\text{利用中值定理} \\ \exists (\xi, \eta) \in \mathcal{D}_\epsilon}} \frac{1}{\epsilon^2} (-2e^\xi \cos \eta \pi \epsilon^2) \\ &= -2\pi e^\xi \cos \eta \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0 \Leftrightarrow (\xi, \eta) \rightarrow (0,0)} -2\pi e^0 \cos 0 = -2\pi \end{aligned}$$

即得 $I = -2\pi$. 注意我们利用了 I 的值不依赖于具体 $0 < \epsilon < 1$ 的选取, 故在计算时采取极限过程, 令 $\epsilon \rightarrow 0^+$.

8.3 平面曲线积分与路径无关的条件

第六节例 6.5 中讨论了力场 $\mathbf{F} = \frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0$ (其中 $\mathbf{r} = (x, y)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) 的做功问题, 我们表明这种力 (引力、电磁力都属此类) 作用下的做功与路径无关. 我们的处理思路是: 力 \mathbf{F} 可写成势函数 $V = -\frac{\mu}{r}$ 的梯度, 即

$$\mathbf{F} = \frac{\mu}{r^2} \mathbf{r}^0 = \mathbf{grad} \left(-\frac{\mu}{r} \right) = \nabla \left(-\frac{\mu}{r} \right)$$

从而 $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\mu \frac{xdx + ydy}{r^3} = d \left(\frac{\mu}{r} \right)$, 即微分形式 $\mu \frac{xdx + ydy}{r^3}$ 可写为函数 $\frac{\mu}{r}$ 的 (外) 微分. 从而对任意以 A 为起点, 以 B 为终点的曲线 $\mathcal{C} = \widehat{AB}$, 都有

$$W_{A \rightarrow B} := \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} d \left(\frac{\mu}{r} \right) = \mu \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

即做功与路径无关. 特别地, 对一封闭路径 \mathcal{C} , 必有 $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$.

而根据格林公式, 令

$$P = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad Q = -\mu \frac{y}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

则若曲线 \mathcal{C} 中不含原点 (原点处 P, Q 无意义, 即原点为向量场 \mathbf{F} 的一个奇点 (*singularity*)), 便有 (\mathcal{D} 为曲线 \mathcal{C} 所围区域)

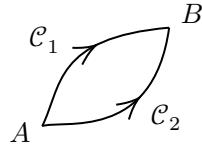
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} 0 dx dy = 0$$

虽然上面是具体特例, 但其中蕴含的结论具有普遍性, 即我们有如下定理

定理 8.3.1 设 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ 是平面上的单连通区域, P, Q 具有连续偏导数, 则下面命题相互等价

1. 对 \mathcal{D} 内任意一条光滑 (或分段光滑) 的闭曲线 \mathcal{C} , 成立 $\oint_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = 0$;
2. 曲线积分 $\int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy$ 与路径无关;
3. 存在 \mathcal{D} 上的可微函数 $u(x, y)$, 使得 $du = P dx + Q dy$, 即 $P dx + Q dy$ 是 u 的全微分, 或称 u 为微分 (形式) $P dx + Q dy$ 的原函数;
4. 在区域 \mathcal{D} 内恒成立等式: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

证明: “ $1. \Rightarrow 2.$ ” 给出联结 A, B 两点的任意两条路径 (皆从 A 点起, 终于 B 点): $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$. 则曲线 $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ (即 \mathcal{C}_1 联结 \mathcal{C}_2 的反向曲线) 是逆时针定向的闭合曲线.



根据假设, 知 $\oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \int_{\mathcal{C}_1} Pdx + Qdy - \int_{\mathcal{C}_2} Pdx + Qdy$, 由此可知

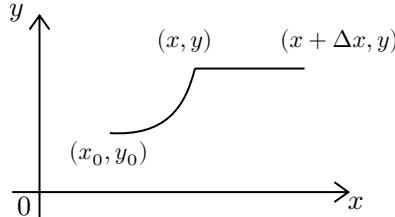
$$\int_{\mathcal{C}_1} Pdx + Qdy = \int_{\mathcal{C}_1} Pdx + Qdy$$

即积分与路径选择无关.

“ $2. \Rightarrow 3.$ ” 取区域中一定点 $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, 做函数 $u(x, y) := \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$, 积分路径为从 (x_0, y_0) 到 (x, y) 的 (\mathcal{D} 内的) 任意路径. 由于积分不依赖于路径的选择, 故函数 $u(x, y)$ 是“良好” 定义的, 即它的值只依赖于 (x, y) . 下面证明其全微分为 $Pdx + Qdy$, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

取如下图的路径



$$\begin{aligned} \text{则有 } \frac{\Delta u}{\Delta x} &= \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x + \Delta x} P(t, y) dt \xrightarrow[\exists \xi]{\text{中值定理}} P(\xi, y) \end{aligned}$$

从而 $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\xi, y) = P(x, y)$. 同理可证 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

“3. \Rightarrow 4.” 如存在 \mathcal{D} 中的可微函数 u , 使得 $du = Pdx + Qdy$, 故

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

又由于 P, Q 在 \mathcal{D} 内具有连续偏导数, 从而

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

“4. \Rightarrow 1.” 对 \mathcal{D} 中任意一条光滑 (或分段光滑) 的闭曲线 \mathcal{C} , 设其包围区域为 $\tilde{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{D}$, 应用格林公式, 得

$$\oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad \square$$

注记 8.3.1 注意, 条件存可微函数 u , 使得在 \mathcal{D} 内成立 $du = Pdx + Qdy$ 意味微分形式 $Pdx + Qdy$ 的外微分 $d(Pdx + Qdy) = 0$, 即

$$\begin{aligned} d(Pdx + Qdy) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \xrightarrow{\text{区域 } \mathcal{D} \text{ 的方向为 } \mathbf{k}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \end{aligned}$$

从而自动得到条件 4. 这是因为当 $Pdx + Qdy$ 可写成 du (即具有“原函数”) 时, 显然有 $d(Pdx + Qdy) = d(du) = 0$, 即 $d(du) =$

$$d \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) dx \wedge dy \equiv 0$$

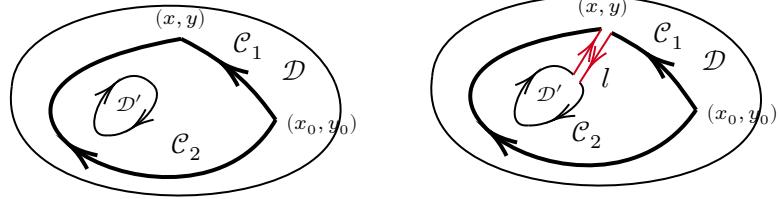
这是用微分形式及其上的外微分运算总结上面论证中的相关部分.

从上小节中例 8.2.4 可知, 若区域中的曲线 \mathcal{C}_ϵ 绕奇点, 则虽然 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 而

$$\oint_{\mathcal{C}_\epsilon} Pdx + Qdy = -2\pi \neq 0$$

这不是特例, 而是普遍成立的.

比如区域 \mathcal{D} 是有一个“洞” \mathcal{D}' 的复连通区域 \mathcal{D} . 固定 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$ 中的一定点 (x_0, y_0) . 则对 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$ 中的另一点 (x, y) . 如下图所示, 设 \mathcal{C}_1 和 \mathcal{C}_2 是联结从 (x_0, y_0) 到 (x, y) 的两条光滑曲线, 则 $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ 逆时针绕“洞” \mathcal{D}' 一圈.



则按上面右图, 做割线将 \mathcal{C}_i 和 $\partial\mathcal{D}'$ 连通起来, 则由曲线 \mathcal{C}_i , $i = 1, 2$ 和割线 $l, -l$ 所围区域 (记为 \mathcal{D}'') 是单连通的, 从而对 $\omega = Pdx + Qdy$, 若它在 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$ 上满足 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (即其外微分 $d\omega = 0$, 或微分形式 ω 为闭 (closed) 的), 则由格林公式, 知

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathcal{C}_1} + \int_l + \oint_{\partial\mathcal{D}'} + \int_{-l} + \int_{-\mathcal{C}_2} \right) Pdx + Qdy = \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} Pdx + Qdy + \oint_{\partial\mathcal{D}'} Pdx + Qdy - \int_{\mathcal{C}_2} Pdx + Qdy = 0 \end{aligned}$$

记 $\Omega' := \oint_{\partial\mathcal{D}'} Pdx + Qdy$, 称为 $\omega = Pdx + Qdy$ 在 $\partial\mathcal{D}'$ 上的循环常数, 或积分周期 (period). 从而上面的计算可记作

$$\int_{\mathcal{C}_2} \omega = \int_{\mathcal{C}_1} \omega + \Omega'$$

由此可知, 对上述复连通区域

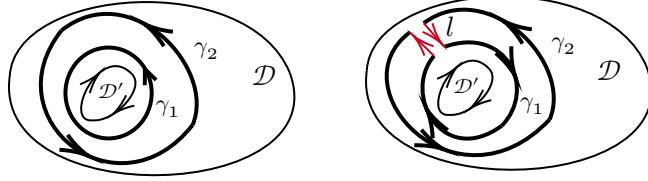
$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

是一个多值函数 (multi-valued function), 即沿不同从 (x_0, y_0) 到 (x, y) 的路径得到的 $u(x, y)$ 的值是不同的.

比如, 对上面有一个“洞”的情形, 不同的值相差“周期” Ω 的整数倍 (请读者思考其具体机理?)

另外, 若 γ_1 和 γ_2 是绕“洞” \mathcal{D}' 一周的同方向闭合曲线, 则对上面的 ω (在 $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$ 上成立 $d\omega = 0$), 我们有

$$\oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma_2} \omega$$



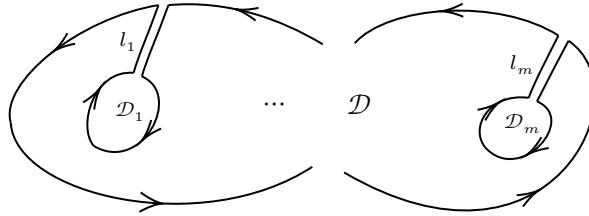
如上图，做割线，则曲线 γ_i , $i = 1, 2$ 和割线所为区域上条件 $d\omega = 0$ 成立，故

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

在其上（记为 \mathcal{D}'' ）的积分为零，从而由格林公式可得 $\oint_{\partial\mathcal{D}''} \omega = 0$. 但因为 $\partial\mathcal{D}'' = \gamma_2 + l - l - \gamma_1$, 从而

$$0 = \oint_{\partial\mathcal{D}''} \omega = \oint_{\gamma_2} \omega + \int_l \omega - \int_l - \oint_{\gamma_1} \omega \implies \oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma_2} \omega$$

更一般地，若区域 \mathcal{D} 是具有有限个“洞” \mathcal{D}_i , $i = 1, \dots, m$ 的复连通区域. 此时，我们用一些列割线 l_i 将区域“割开”后的区域是单连通的，从而在其上定理 8.3.1 成立.

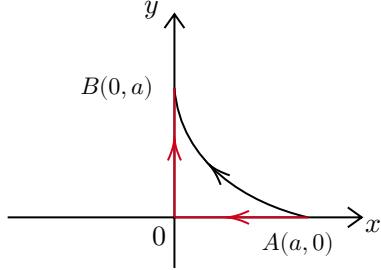


若 $\omega := Pdx + Qdy$ 在 $\mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathcal{D}_i$ 上满足“闭条件” $d\omega = 0$, 即 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 则对每个“洞” \mathcal{D}_i 定义其“周期”（或循环常数）为 $\Omega_i := \oint_{\partial\mathcal{D}_i} \omega$. 那么对固定的点 $(x_0, y_0) \in \mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathcal{D}_i$ 及动点 $(x, y) \in \mathcal{D} \setminus \bigcup_{i=1}^m \mathcal{D}_i$, 下面的函数

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

是个多值函数，其对应不同路径的值相差 $k_1\Omega_1 + \dots + k_m\Omega_m$, 其中 $k_i \in \mathbb{Z}$.

例 8.3.1 计算曲线积分 $I = \int_{\widehat{AB}} (y \cos x - y^2 e^x) dx + (\sin x - 2ye^x) dy$, 其中 \widehat{AB} 为从点 $A(a, 0)$ 沿星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) 位于第一象限部分到点 $B(0, a)$ 的一段弧.



解: 这里 $P = y \cos x - y^2 e^x$, $Q = \sin x - 2ye^x$, 则 $\forall x, y$, 我们有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos x - 2ye^x = \frac{\partial P}{\partial y}$$

从而曲线积分与路径无关, 故我们选择从 A 到 B 的折线路径 (见上图红色路径), 从而有

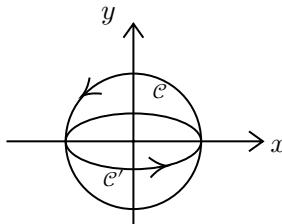
$$\begin{aligned} I &= \int_{AO} (y \cos x - y^2 e^x) dx + (\sin x - 2ye^x) dy + \int_{OB} (y \cos x - y^2 e^x) dx + (\sin x - 2ye^x) dy \\ &= \int_0^a (\sin 0 - 2ye^0) dy = -2 \int_0^a y dy = -a^2 \end{aligned}$$

例 8.3.2 计算 $\oint_{\mathcal{C}} \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2 + 4y^2}$, 其中 \mathcal{C} 为单位圆 $x^2 + y^2 = 1$, 逆时针方向.

解: 令 $P = \frac{x-y}{x^2 + 4y^2}$, $Q = \frac{x+4y}{x^2 + 4y^2}$, 积分在 $(0, 0)$ 处无意义, 但在该点之外有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 - 8xy + 4y^2}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

构造曲线 \mathcal{C}' : $x^2 + 4y^2 = 1$, 方向取顺时针, 则它与 \mathcal{C} 共同构成了平面区域 \mathcal{D} 的边界, 而该区域 \mathcal{D} 中不包含奇点 $(0, 0)$



从而 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ 在其上的积分为零, 由格林公式, 得

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} P dx + Q dy &= \oint_{\mathcal{C}'} P dx + Q dy = \oint_{\mathcal{C}'} \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2 + 4y^2} \\&= \oint_{\mathcal{C}'} (x-y)dx + (x+4y)dy \xrightarrow{x=\cos\theta, y=\frac{1}{2}\sin\theta} \\&= \int_0^{2\pi} \left(\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta \right) (-\sin\theta) d\theta + (\cos\theta + 2\sin\theta) \left(\frac{1}{2}\cos\theta \right) d\theta \\&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \times (2\pi) = \pi\end{aligned}$$

例 8.3.3 考虑微分形式 $\omega = \frac{xdy - ydx}{ax^2 + 2bxy + cy^2}$ (其中 $ac - b^2 > 0$) .

ω 在 $(0,0)$ 外有定义, 且 $d\omega = 0$, 即成立 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 其中

$$P(x,y) = \frac{-y}{ax^2 + 2bxy + cy^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{ax^2 + 2bxy + cy^2}$$

则对围绕 $(0,0)$ 逆时针一周的任意曲线 \mathcal{C} , 曲线积分 $\oint_{\mathcal{C}} \omega$ 的值是相同的, 即等于 ω 关于 $(0,0)$ 的循环常数, 或周期 Ω .

为计算 Ω 的值, 我们取 \mathcal{C} 为椭圆 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$, 按逆时针定向, 则有

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = \oint_{\mathcal{C}} xdy - ydx = 2 \times \text{椭圆所围区域面积}$$

二次型 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ 对应的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, 其特征值 λ_i 之积为

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = ac - b^2$$

从而椭圆方程可换为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$. 故椭圆面积所谓区域面积微 $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$. 从而

$$\Omega = 2 \times \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{ac - b^2}}$$

例 8.3.4 计算积分 $I = \oint_{\mathcal{C}} x \ln(x^2 + y^2 - 1) dx + y \ln(x^2 + y^2 - 1) dy$. 其中 \mathcal{C} 为被积函

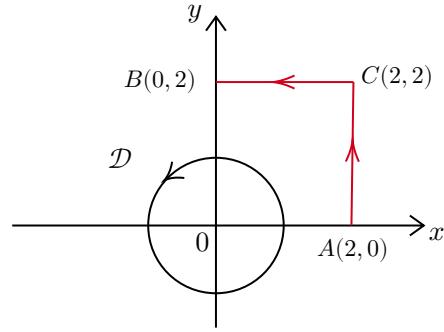
数定义域内从点 $(2, 0)$ 到 $(0, 2)$ 的逐段光滑曲线.

解: 令 $P = x \ln(x^2 + y^2 - 1)$, $Q = y \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

它们在 $\mathcal{D} := \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < +\infty\}$ 上有定义. P, Q 在 \mathcal{D} 上连续、有连续偏导数, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 + y^2 - 1} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

注意 \mathcal{D} 是有一个“洞”($x^2 + y^2 \leq 1$)的复连通区域. 从而在任何围绕该洞逆时针一周的闭曲线上的积分的值相等, 即该“洞”的周期(或循环常数) Ω .



为计算该周期, 选取逆时针圆周 $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 4$, 有

$$\begin{aligned}\Omega &= \oint_{\mathcal{C}} x \ln(x^2 + y^2 - 1) dx + y \ln(x^2 + y^2 - 1) dy \\ &= \oint_{\mathcal{C}} x \ln 3 dx + y \ln 3 dy = \ln 3 \int_0^{2\pi} (2 \cos \theta(-2 \sin \theta) + 4 \sin \theta \cos \theta) d\theta = 0\end{aligned}$$

由于循环周期 $\Omega = 0$, 故

$$u(x, y) = \int_{P_0(x_0, y_0)}^{P(x, y)} P dx + Q dy$$

本质上是个单值函数, 即曲线积分不依赖于路径的选择.

由此, 我们选择最简单的折线从 $A(2, 0)$ 到 $B(0, 2)$, 从而

$$\begin{aligned}I &= \left(\int_{AC} + \int_{CB} \right) (x \ln(x^2 + y^2 - 1) dx + y \ln(x^2 + y^2 - 1) dy) \\ &= \int_0^2 y \ln(3 + y^2) dy + \int_2^0 x \ln(3 + x^2) dx = 0\end{aligned}$$

原函数的确定: 设 P, Q 在单连通区域 \mathcal{D} 具有连续偏导数, 如在 \mathcal{D} 内恒成立 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 则微分形式 $\omega := Pdx + Qdy$ 在 \mathcal{D} 上存在原函数 $u(x, y)$, 即 u 满足

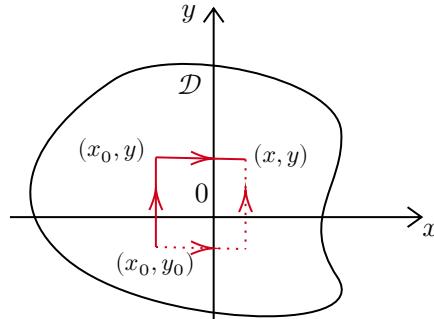
$$du = \omega = Pdx + Qdy \iff \frac{\partial u}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q$$

事实上, 固定 $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, 则对任意 $(x, y) \in \mathcal{D}$, 函数

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

是单值函数 (即沿着不同路径积分后得到的结果一样, 如果不是单值的, 那么当路径穿越割线时, 积分值会加 (减) 相应的循环常数 (周期)), 它就是 $\omega = Pdx + Qdy$ 的一个原函数.

既然 $u(x, y)$ 的值不依赖于从 (x_0, y_0) 到 (x, y) 的具体路径的选择, 那么, 简单起见, 通常选择如下折线路径计算 (当然, 得保证路径在定义区域 \mathcal{D} 之内才行):



沿着上图的折线从 (x_0, y_0) 积到 (x, y) , 得到

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y) dx$$

当然, 如果如果按“先横向再纵向”的折线走, 则有

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy$$

两种方式 (或更多其它方式) 计算出的 $u(x, y)$ 之间只差一个常数.

得到一个原函数 $u(x, y)$ 后, 则

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy = u(x, y) - u(x_0, y_0)$$

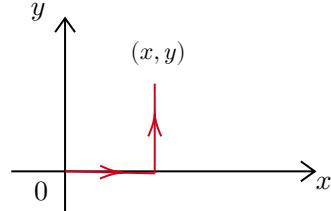
如同定积分的牛顿-莱布尼茨公式. 事实上, 任取一条从 A 到 B 的光滑 (或分段光滑) 路径 \widehat{AB} : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} t : \alpha \rightarrow \beta$, 则有

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) x'(t) dt + Q(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

$$\xrightarrow[\text{链式法则}]{\text{求导之}} \int_{\alpha}^{\beta} du(x(t), y(t)) = u(x(t), y(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = u(x(\beta), y(\beta)) - u(x(\alpha), y(\alpha))$$

例 8.3.5 验证微分形式 $\omega = (x+y)^2 dx + (x^2 + 2xy - y^2) dy$ 在全平面 \mathbb{R}^2 上是闭的 (即 $d\omega = 0$), 进而找出它的一个原函数.

解: 令 $P = (x+y)^2$, $Q = x^2 + 2xy - y^2$, 则 $d\omega = 0$ 等价于 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 2y = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故 ω 存在原函数. 为得到其原函数, 我们固定 $(0, 0)$, 考虑其在下面折线路径上的积分



$$\text{得到它的一个原函数为: } u(x, y) = \int_0^x (x+0)^2 dx + \int_0^y (x^2 + 2xy - y^2) dy$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 y + xy^2 - \frac{y^3}{3}$$

或者, 假设 $u(x, y)$ 是一个原函数, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = P = (x+y)^2$, 两边对 x 积分, 得到

$$u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int (x+y)^2 dx = \frac{(x+y)^3}{3} + C(y)$$

结合 $\frac{\partial u}{\partial y} = (x+y)^2 + C'(y) = Q = x^2 + 2xy - y^2$, 从而 $C'(y) = -y^2$, 积分得 $C(y) = -\frac{y^3}{3} + C$, 不妨取常数 $C = 0$, 则得一个原函数为 $u(x, y) = \frac{(x+y)^3}{3} - \frac{y^3}{3}$.

例 8.3.6 计算积分 $I = \int_{\mathcal{C}} \frac{(1 + \sqrt{x^2 + y^2})(xdx + ydy)}{x^2 + y^2}$, 其中 \mathcal{C} 是不通过原点, 从点 $A(1, 0)$ 到点 $B(0, 2)$ 的分段光滑曲线.

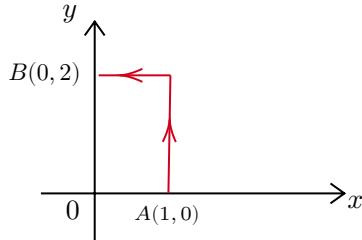
解: 记

$$P = \frac{x(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{y(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}$$

不难看出, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 成立 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 我们计算 $\omega = Pdx + Qdy$ 相对于原点 $(0, 0)$ 的周期 (循环常数), 考虑单位圆周 $S^1 : x^2 + y^2 = 1$, 方向取逆时针, 则 ω 对于 $(0, 0)$ 的周期为

$$\begin{aligned} \Omega &= \oint_{S^1} Pdx + Qdy = 2 \oint_{S^2} (xdx + ydy) \xrightarrow{x=\cos\theta, y=\sin\theta} \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (-\cos\theta \sin\theta + \sin\theta \cos\theta) d\theta = 0 \end{aligned}$$

从而 $\int_{\mathcal{C}} \omega$ 本质上是与路径选取无关的, 故可沿下面的折线路径计算积分的值



$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{y(1 + \sqrt{1 + y^2}) dy}{1 + y^2} + \int_1^0 \frac{x(1 + \sqrt{4 + x^2}) dx}{4 + x^2} = \\ &= \int_0^2 \frac{ydy}{1 + y^2} + \int_0^2 \frac{ydy}{\sqrt{1 + y^2}} - \int_0^1 \frac{x dx}{4 + x^2} - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4 + x^2}} \\ &= \left. \frac{\ln(1 + y^2)}{2} \right|_0^2 + \left. \sqrt{1 + y^2} \right|_0^2 - \left. \frac{\ln(4 + x^2)}{2} \right|_0^1 - \left. \sqrt{4 + x^2} \right|_0^1 \\ &= \frac{\ln 5}{2} + \sqrt{5} - \frac{\ln 5 - 2 \ln 2}{2} - (\sqrt{5} - 2) = 1 + \ln 2 \end{aligned}$$

另解: 除选简单折线路径积分求解之外, 也可通过计算出一个原函数来求解. 一种方法也是通过折线积分, 我们下面用求解微分方程的方法来计算.

设 $u(x, y)$ 是原函数, 即 $du = Pdx + Qdy$, 那么 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}x$, 两边对 x 积分, 得

$$u(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int \frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} x dx = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + C(y)$$

$$\text{从而 } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C'(y) = \frac{y(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} + C'(y)$$

又因为 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q = \frac{y(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}$, 从而得到 $C'(y) \equiv 0$, 故 $C(y)$ 为常数, 不妨取 0, 由此可知一个原函数为

$$u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{由此可知 } I = u(B) - u(A) = u(0, 2) - u(1, 0) = (\ln \sqrt{0+4} + \sqrt{0+4}) - (\ln \sqrt{1+0} + \sqrt{1+0})$$

$$= \ln 2 + 2 - (0 + 1) = \ln 2 + 1$$

注记 8.3.2 或直接观察可知

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \sqrt{x^2 + y^2})(xdx + ydy)}{x^2 + y^2} &= \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d \ln (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + d\sqrt{x^2 + y^2} \\ &= d(\sqrt{x^2 + y^2} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}$$

由此亦可知 $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 是一个原函数.

如果微分方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 可写成 $du(x, y) = 0$ 的形式, 则称它是全微分方程, 此时它有通解 $u(x, y) = C$.

有时候, 虽然方程 $Pdx + Qdy = 0$ 本身不是全微分方程, 但其两边乘上一个函数因子 $\mu(x, y)$, 可化为全微分方程, 即 $\exists u(x, y)$, 使得

$$du = \mu Pdx + \mu Qdy \iff \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} \iff Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mu$$

则称 $\mu(x, y)$ 为方程 $Pdx + Qdy = 0$ 的一个积分因子.

例 8.3.7 求解微分方程 $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

解: 令 $P = x^2 + 2xy$, $Q = x^2 - y^2$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y}$, 从而方程是全微分方程, 即 $\exists u(x, y)$, 使得 $du = Pdx + Qdy$. 为求 u , 固定 $(0, 0)$, 对 $Pdx + Qdy$ 通过“先横后纵”的折线从 $(0, 0)$ 积到 (x, y) , 得

$$u(x, y) = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - y^2) dy = \frac{x^3}{3} + x^2 y - \frac{y^3}{3}$$

故原方程的通解为 $\frac{x^3}{3} + x^2 y - \frac{y^3}{3} = C$ (其中 C 为任意常数).

例 8.3.8 求解 $y(1 + xy)dx + x(1 - xy)dy = 0$.

解: 令 $P = y(1 + xy)$, $Q = x(1 - xy)$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 - 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

故方程不是全微分方程, 但我们将 $Pdx + Qdy = 0$ 中的项分组改写后得

$$(ydx + xdy) + xy(ydx - xdy) = 0$$

由此易看出, 两边同乘积分因子 $\frac{1}{x^2 y^2}$, 则有

$$\frac{d(xy)}{(xy)^2} + \frac{ydx - xdy}{xy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d\left(-\frac{1}{xy} + \ln|x| - \ln|y|\right) = 0$$

故原方程的通解为 $-\frac{1}{xy} + \ln|x| - \ln|y| = C$ (其中 C 为任意常数).

连续曲线和连续向量场的旋转度: 考虑微分形式

$$\omega_0 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

它在除原点 $(0, 0)$ 的区域外是闭的, 即 $d\omega_0 = 0$. 故它在绕原点逆时针方向一周的任意曲线上的积分值都相等, 即 ω_0 相对于 $O(0, 0)$ 的循环常数, 或周期 Ω .

为计算 Ω , 不妨取最简单的单位圆周 $S^1 : x^2 + y^2 = 1$, 逆时针定向, 则

$$\Omega = \oint_{S^1} \omega = \oint_{S^1} xdy - ydx \xrightarrow[x=\cos t, y=\sin t]{t: 0 \rightarrow 2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - \sin \theta (-\sin \theta)) d\theta = 2\pi$$

即 $\frac{1}{2\pi} \oint_{S^1} \omega_0 = 1$. 若曲线为: $2S_1 : \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \rightarrow 4\pi$, 即绕单位圆逆时针旋转 2 周, 则有

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{2S^1} \omega_0 = 2$$

同理, 对绕单位圆逆时针旋转 k 圈的曲线 $\gamma = kS^1$, 有 $\frac{1}{2\pi} \oint_{kS^1} \omega_0 = k$. 当 k 为负整数时, kS^1 表示绕单位圆顺时针旋转 k 圈的曲线, 则上面的计算结果为负整数.

更一般地, 对平面光滑 (或分段光滑) 封闭曲线 \mathcal{C} , 积分 $\gamma(\mathcal{C}, O) := \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \omega_0$ 衡量的是曲线 \mathcal{C} 相对于原点 O 的旋转数 (*rotation number*) .

若曲线 \mathcal{C} 上一粒子按逆时针出发, 当周行一圈返回起点时, 它绕原点逆时针旋转了 m 圈, 绕原点顺时针旋转了 n 圈, 则有

$$\gamma(\mathcal{C}, O) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \omega_0 = m - n$$

1. 若 $m > n$, 则粒子周行的净效果是绕原点逆时针旋转了 $m - n$ 圈;
2. 若 $m < n$, 则粒子周行的净效果是绕原点顺时针旋转了 $n - m$ 圈.

当然, 若曲线 \mathcal{C} 不包含 $O(0, 0)$, 则旋转数为零.

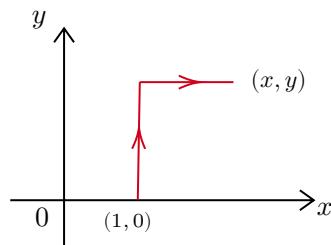
注记 8.3.3 当然, 若考虑的是封闭曲线相对于另一点 $P(x_0, y_0)$ 的旋转数, 只需做替换

$$\omega_0 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \rightsquigarrow \omega_P := \frac{(x - x_0)dy - (y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

然后考虑它在曲线上的积分即可. 即曲线 \mathcal{C} 相对于 P 点的旋转数可定义为

$$\gamma(\mathcal{C}, P) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \omega_P$$

既然 ω_0 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上满足 $d\omega_0 = 0$, 故 $\exists u(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, 使得 $\omega_0 = du$. 为求 ω_0 的原函数 $u(x, y)$. 我们选定点 $(1, 0)$, 然后按下折线积分

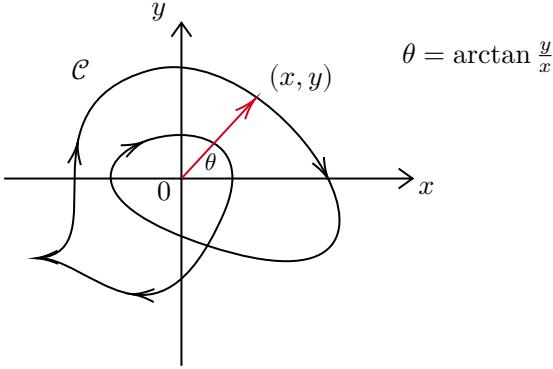


得到

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} + \int_1^x \frac{-ydx}{x^2+y^2} = \arctan y + \int_1^x \frac{-y^2 d\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2 \left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} \\
 &= \arctan y - \arctan \frac{x}{y} \Big|_1^x = \arctan y - \left(\arctan \frac{x}{y} - \arctan \frac{1}{y} \right) \\
 &= \arctan y + \arctan \frac{1}{y} - \arctan \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{y}{x}
 \end{aligned}$$

注记 8.3.4 如果选择“先横后纵”的积分路径，则得到上面结果的计算会大幅简化.

记 $\theta := \arctan \frac{y}{x}$, 它是曲线上的点相对于 x -轴的夹角，将其在曲线上积分，然后除 $\frac{1}{2\pi}$ ，这自然是衡量曲线相对于原点 O 的旋转数的.



$$\gamma(C, O) := \frac{1}{2\pi} \oint_C d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_C d \arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

更进一步，对平面 \mathbb{R}^2 上的连续向量场

$$\mathbf{F} = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$$

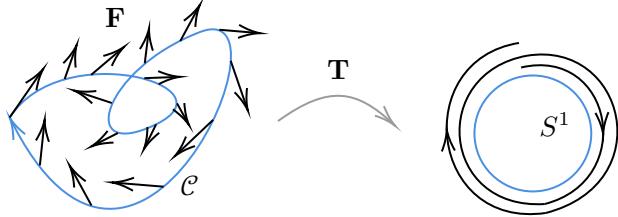
此处，“连续”是指定义向量场 \mathbf{F} 的函数 $u(x, y), v(x, y)$ 是 (x, y) 的二元连续函数.

给定一条光滑（或分段光滑）的封闭曲线 $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ，设 $\mathbf{F}(x, y)$ 在 C 上恒不为零（称 \mathbf{F} 在 C 上非退化（non-degenerate））. 则可定义曲线 C 上的如下单位向量场

$$\mathbf{T}(x, y) := \frac{\mathbf{F}(x, y)}{||\mathbf{F}(x, y)||}$$

映射 \mathbf{T} 将曲线 \mathcal{C} 映射到单位圆周 $S^2 : x^2 + y^2 = 1$ 上. 则有如下定义

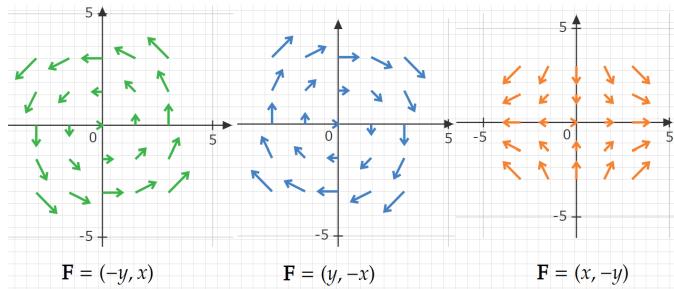
向量场的旋转数: 当 (x, y) 在 \mathcal{C} 上逆时针旋转一周时, $\mathbf{T}(x, y)$ 在 S^2 上旋转, 其相对于原点 O 的旋转数定义为向量场 \mathbf{F} 沿着封闭曲线 \mathcal{C} 的旋转数, 记为 $\gamma(\mathbf{F}, \mathcal{C})$.



当 $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ 是可微向量场时, 旋转数可计算如下

$$\gamma(\mathbf{F}, \mathcal{C}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} d \arctan \frac{v}{u} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{u(x, y)dv(x, y) - v(x, y)du(x, y)}{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$$

例 8.3.9 看下面三个向量场



显然这三个向量场 (从左到右) (在逆时针的单位圆周 S^1 上) 的旋转数分别是 1, -1, 0. 其积分计算如下

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{S^1} d \arctan \left(\frac{x}{-y} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{S^1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 1$$

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{S^1} d \arctan \left(\frac{-x}{y} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{S^1} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = -1$$

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{S^1} d \arctan \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{S^1} \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

8.4 斯托克斯公式与空间空间曲线积分与路径无关的条件

平面 xy -上的格林公式往三维推广就是一般的斯托克斯 (Stokes) 公式了, 我们在第 8.1 节中已经将其推导出了, 本小节介绍利用它的计算及其应用.

斯托克斯 (Stokes) 公式: 令 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, Σ 是空间定向光滑曲面, 其边界曲线 $\partial\Sigma$ 是光滑或分段光滑的, 定向于 Σ 的定向相协调, 则有

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \iint_{\Sigma} d\omega$$

$$\begin{aligned} \text{即 } & \oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \\ & = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

看成对向量场的积分, 记 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 则左边积分为 $\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s}$, 右边是下面的向量场对曲面 Σ 的 (通量) 积分

$$\nabla \times \mathbf{F} := \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$\nabla \times \mathbf{F}$ 称为向量场 \mathbf{F} 的旋度 (*curl*), 其形式运算规则如下:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

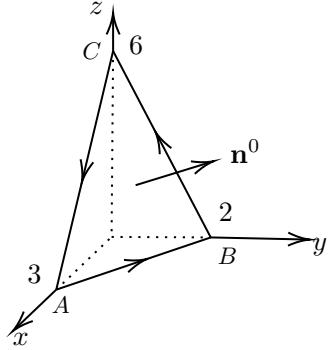
即将 ∇ 看成是矢量微分算子 $\nabla := \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$. 从而斯托克斯公式可写作

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{S}$$

借助行列式记号, 可将斯托克斯公式写成如下形式

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

例 8.4.1 计算 $I = \oint_{\mathcal{L}} zdx + xdy + ydz$, 其中 \mathcal{L} 为平面 $2x + 3y + z = 6$ 被三个坐标面所截三角形的整个边界, 若从 x -轴正向看去, 定向为逆时针方向.



解: 曲线 $\mathcal{L} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, 则

1. \overrightarrow{AB} : $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, 则 $\int_{\overrightarrow{AB}} zdx + xdy + ydz = \int_0^2 xdy = \int_0^0 x\left(-\frac{2}{3}\right) dy = 3$;
2. \overrightarrow{BC} : $\frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$, 则 $\int_{\overrightarrow{BC}} zdx + xdy + ydz = \int_0^6 ydz = \int_2^0 y(-3)dy = 6$;
3. \overrightarrow{CA} : $\frac{x}{3} + \frac{z}{6} = 1$, 则 $\int_{\overrightarrow{CA}} zdx + xdy + ydz = \int_0^2 zdx = \int_6^0 z\left(-\frac{1}{2}\right) dz = 9$.

$$\text{从而 } I = \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overrightarrow{BC}} + \int_{\overrightarrow{CA}} = 3 + 6 + 9 = 18.$$

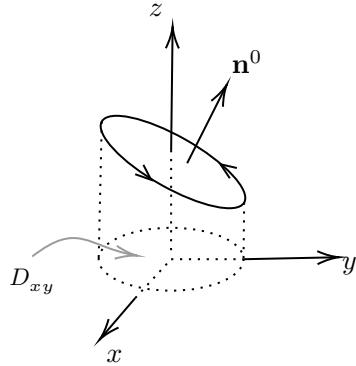
如果用斯托克斯公式, 则注意到曲线 \mathcal{L} 所围区域为三角形 ΔABC , 其定向由 $\mathbf{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1)$ 给出. 又向量场 $\mathbf{F} = (z, x, y)$ 的旋度 (向量) 为

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ y & z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ z & x \end{vmatrix} \right) \\ = (1, 1, 1)$$

$$\text{故由 Stokes 公式, 可得 } I = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\Delta ABC} (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{S} =$$

$$\iint_{\Delta ABC} (1, 1, 1) \bullet \mathbf{n}^0 dS = \iint_{\Delta ABC} \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{14}} dS = \frac{6}{\sqrt{14}} \iint_{\Delta ABC} dS = 18$$

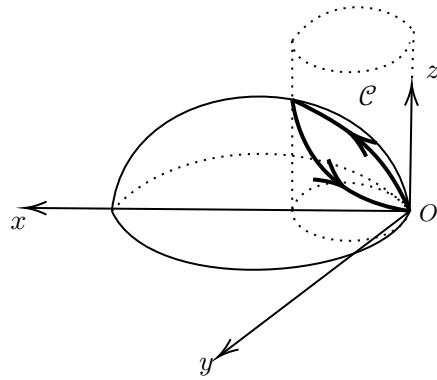
例 8.4.2 计算向量场 $\mathbf{F} = (-y^2, x, z^2)$ 对曲线 \mathcal{L} 的环量 $\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, 其中 \mathcal{L} 为平面 $y+z=2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ ($R > 0$) 的交线, 若从 z 轴正向看去, 定向为逆时针方向.



解: 记 Σ 为曲线 \mathcal{L} 所围曲面, 定向取上, 即其单位法向量为 $\mathbf{n}^0 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 由 *Stokes* 公式, 得

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} (1+2y)dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} (1+2y)d\sigma = \iint_{D_{xy}} d\sigma = \pi R^2\end{aligned}$$

例 8.4.3 计算 $I = \oint_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, 其中 \mathcal{C} 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ ($z \geq 0$) 与圆柱面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2rx$ ($R > r > 0$) 的交线, 从 z 轴的正向看去, 是逆时针方向.



解：记 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 上由 \mathcal{C} 所围的曲面，它的与 \mathcal{C} 的定向相一致的定向为上侧，故取其法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x - R}{R}, \quad \cos \beta = \frac{y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{R}$$

故由 Stokes 公式，可得 $I = \oint_{\mathcal{C}} (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz =$

$$\begin{aligned} &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & z^2 + x^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} dS \\ &= 2 \iint_{\Sigma} ((y - z) \cos \alpha + (z - x) \cos \beta + (x - y) \cos \gamma) dS \\ &= 2 \iint_{\Sigma} \left((y - z) \frac{x - R}{R} + (z - x) \frac{y}{R} + (x - y) \frac{z}{R} \right) dS = 2 \left(\iint_{\Sigma} zdS - \iint_{\Sigma} ydS \right) \end{aligned}$$

注意到 Σ 关于 xz -坐标面是对称的，从而 $\iint_{\Sigma} ydS = 0$.

在上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx (z \geq 0)$ 上， $z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$ ，故对应面元为

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{(x - R)^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} dx dy = \frac{R}{z} dx dy$$

$$\text{从而 } I = 2 \iint_{\Sigma} zdS = 2 \iint_{(x-r)^2+y^2 \leq r^2} z \frac{R}{z} dx dy = 2R \iint_{(x-r)^2+y^2 \leq r^2} dx dy = 2\pi r^2 R.$$

空间曲线积分与路径无关的条件：类似于定理 8.3.1，对空间曲域内的曲线积分，有

定理 8.4.1 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 是空间上的按曲线连通区域，即对 Ω 内任何一条封闭曲线，都可在此曲线上张一张光滑曲面（即以封闭曲线为其边界），使之完全位于 Ω 之内。设 P, Q, R 在 Ω 内具有连续偏导数，则下面命题相互等价

1. 对 Ω 内任意一条光滑（或分段光滑）的闭曲线 \mathcal{C} ，成立 $\oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz = 0$ ；
2. 曲线积分 $\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz$ 与路径无关；
3. 存在 Ω 上的可微函数 $u(x, y, z)$ ，使得 $du = Pdx + Qdy + Rdz$ ，即 $Pdx + Qdy + Rdz$

是 u 的全微分，或称 u 为微分（形式） $Pdx + Qdy + Rdz$ 的原函数；

4. 在区域 Ω 内恒成立等式： $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$.

即 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$.

例 8.4.4 计算 $I = \int_{\mathcal{C}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$, 其中 \mathcal{C} 是从点 $A(1, 0, 0)$ 到 $B(1, 0, 2)$ 的光滑曲线.

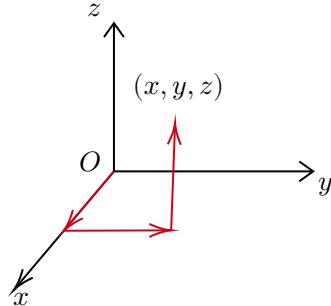
解：记 $P = x^2 - yz$, $Q = y^2 - xz$, $R = z^2 - xy$. 易见

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -z, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = -x, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -y$$

从而积分与路径无关，则不妨取积分路径为联结 A , B 的直线 \overrightarrow{AB} , 而在其上, $x \equiv 1, y \equiv 0$, 故而

$$I = \int_0^2 z^2 dz = \frac{8}{3}$$

另解：我们求出 $Pdx + Qdy + Rdz$ 的一个原函数 $u(x, y, z)$, 为此我们按下折线路径从 $O(0, 0, 0)$ 积到点 (x, y, z) , 即有



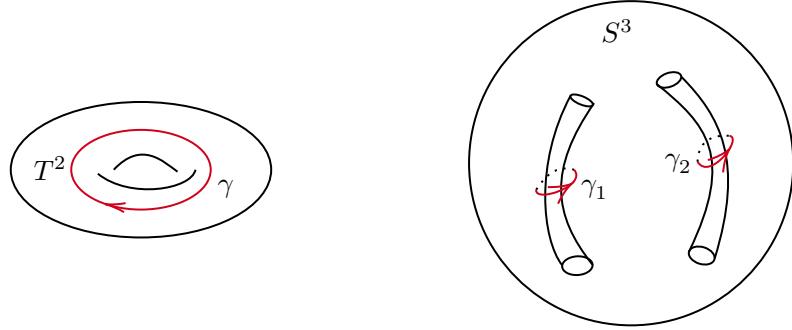
$$u(x, y, z) = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z (z^2 - xy) dz = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - xyz$$

所求积分从而为 $I = u(B) - u(A) = u(1, 0, 2) - u(1, 0, 0) =$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{0}{3} + \frac{8}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{3} + 0 + 0 - 0 \right) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

注记 8.4.1 对一般多连通的空间区域（即并非“按曲线连通”的空间区域）中的曲线积分，类似与平面上多连通（有“洞”）区域上的曲线积分，积分值一般依赖于所选路径，选择不同的积分路径往往会导致积分值相差“周期”的整数倍。比如，设 Ω 为空间中环面 $T^2 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a^2)^2 + z^2 = b^2$ ($0 < b < a$) 所围区域。它里面一条封闭

曲线 γ 是不能在其中收缩唯一的，也就不存在 Ω 中以其为边界的光滑曲面了。对 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ ，其在曲线 γ 上的积分（选择一个定向）为“周期” $\oint_{\gamma} \omega$ ，则对 Ω 中的其它封闭曲线上的积分的值要么为零，要么是该周期的整数倍。



另外，考虑 \mathbb{R}^3 中的单位球体 $S^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ，在其中挖取几个贯穿球体的“管子”，如上图是挖了两个管子的情形，记挖去后在 S^3 中剩余的区域为 Ω ，则 Ω 不是“按曲线连通”的空间区域。事实上，记绕两个管子分别一周的曲线为 γ_1, γ_2 ，则一般地， ω 在其上积分不为零，所以得到 ω 在区域 Ω 上的两个“周期”

$$\Omega_1 = \oint_{\gamma_1} \omega, \quad \Omega_2 = \oint_{\gamma_2} \omega$$

则对 Ω 中任意一条封闭曲线 γ ，要么 $\oint_{\gamma} \omega = 0$ ，要么 $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ ，使得

$$\oint_{\gamma} \omega = m\Omega_1 + n\Omega_2$$

此时 γ 本质上是绕了 γ_1 有 m 圈 ($m > 0$ 时与 γ_1 方向一致， $m < 0$ 时为逆向环绕) 的同时，又绕了 γ_2 有 n 圈。故可方便地记 $\gamma = m\gamma_1 + n\gamma_2$ ，从而将上结论变成了曲线积分的路径可加性。固定 ω 中一定的 M_0 ，则对任意 $M(x, y, z) \in \Omega$ ，定义如下函数

$$u(x, y, z) = \int_{M_0}^M \omega = \int_{M_0}^M Pdx + Qdy + Rdz$$

该函数是多值的，即其取值依赖于积分路径的选取，设 α, β 是两条不同的从 M_0 到 M 的积分路径，若 $\alpha - \beta$ (即先沿 α 再逆着沿 β 构成的闭合曲线) 没有绕 γ_1 和 γ_2 旋转，则按这两条积分路径计算的 $u(M)$ 的值相等，但若 $\alpha - \beta = m\gamma_1 + n\gamma_2$ ，那么沿不同路径计算出的 $u(M)$ 的值相差 $m\Omega_1 + n\Omega_2$ 。

8.5 向量场沿曲线的环流、旋度

设有向量场 $\mathbf{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, $(x, y, z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. 给定空间定向曲线 $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^3$, 我们将下面的(第二型)曲线积分定义为向量场 \mathbf{F} 沿着曲线 \mathcal{L} 的环量 (circulation) .

$$\int_{\mathcal{L}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{L}} P dx + Q dy + R dz$$

设 $M(x, y, z)$ 是向量场中的任一点, 我们称下面的向量为 \mathbf{F} 在 M 点的旋度 (curl), 记为 $\text{rot } \mathbf{F}(M)$ 或 $\text{curl } \mathbf{F}(M)$.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Big|_M = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)_M \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)_M \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)_M \mathbf{k}$$

形式上, 定义矢量微分算子 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$, 则上面的表达可看成是 $\nabla \times \mathbf{F}$, 故也常用该符号记旋度, 即

$$\text{rot } \mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

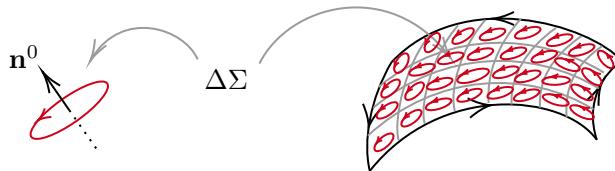
旋度 $\nabla \times \mathbf{F}$ 也是一个向量场. 斯托克斯 (Stokes) 公式可表达为

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{S}$$

并可解释为: 空间向量场 \mathbf{F} 的旋度 (场) $\nabla \times \mathbf{F}$ 过曲面 Σ 的通量 (flux) 等于向量场 \mathbf{F} 沿曲面的边界曲线 $\partial\Sigma$ (其定向与曲面的定向一致) 的环流量.

下面我们写出 Stokes 公式的无穷小形式, 从而对旋度的几何意义有更直观的把握.

直观上, 环量 $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s}$ 衡量的是向量场绕封闭曲线 \mathcal{C} 的旋转圈数 (按是否与曲线定向一致记“±”). 在曲面 Σ 上的某点 M 附近, 取以 \mathbf{n}^0 为法向量的一个无穷小有向面元 $\Delta\Sigma$, 其边界 $\partial(\Delta\Sigma)$ 定向与 $\Delta\Sigma$ 的一致, 即与 \mathbf{n}^0 符合“右手螺旋法则”, 见下图



则在无穷小有向面元 $\Delta\Sigma$ 及其边界上应用 *Stokes* 公式，有

$$\oint_{\partial(\Delta\Sigma)} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \iint_{\Delta\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Delta\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}^0 dS$$

$$\frac{\text{记 } \Delta\Sigma \text{ 的面积大小为 } \Delta S}{\text{并由“积分中值定理”}} ((\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}^0)_{M^*} \Delta S$$

由此可知，当有向面元 $\Delta\Sigma \rightarrow M$ 时，成立

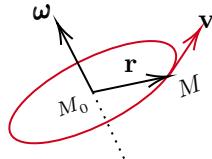
$$((\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}^0)_M := \lim_{\Delta\Sigma \rightarrow M} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\partial(\Delta\Sigma)} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s}$$

右边的极限表达可定义为向量场 \mathbf{F} 在点 M 处沿曲面方向 \mathbf{n}^0 的环量面密度。它是环量关于面积的变化率，即沿曲线上单位面积边界的环量。

显然当 $(\nabla \times \mathbf{F})(M)$ 的方向与曲面在该点的单位法向量 \mathbf{n}^0 的方向相同时，环量的面密度取最大值 $\|(\nabla \times \mathbf{F})(M)\| = \|\operatorname{rot} \mathbf{F}(M)\|$ 。换言之，向量场 \mathbf{F} 在 M 点沿着其在该点的旋度方向的环流量面密度最大，且最大值就是旋度在该点的向量长度。

下面的例子说明形象说明环量和旋度的几何含义。

例 8.5.1 设稳定不可压缩流体的速度场为 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ，且设 v_x, v_y, v_z 对 (x, y, z) 具有连续偏导数。如果流体在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点有旋涡，即流体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转（这里 $\boldsymbol{\omega}$ 在旋涡的轴线上，且方向与旋涡的旋转方向成右手螺旋法则）。



则流体在 M_0 附近的任一点 $M(x, y, z)$ 的速度 \mathbf{v} 为 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ，其中 \mathbf{v}_0 表示在点 M_0 的速度， $\mathbf{r} = \overrightarrow{M_0 M}$ ，即流体在 M 点的速度是平移速度 \mathbf{v}_0 与旋转产生的线速度 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ 的叠加。下面表明 $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ 恒量的是旋涡的强度和方向。

记 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ ，则流体在 M 点的速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 的分量为

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + \omega_y(z - z_0) = \omega_z(y - y_0) \\ v_y = v_{0y} + \omega_z(x - x_0) - \omega_x(z - z_0) \\ v_z = v_{0z} + \omega_x(y - y_0) - \omega_y(x - x_0) \end{cases}$$

故在 M 点成立

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial x} = 2\omega_y, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z$$

故 $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, 即不用真正测量角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 就能通过 $\text{rot } \mathbf{v}$ 来测量流体中旋涡的强度和方向. 由 Stokes 公式, 可得

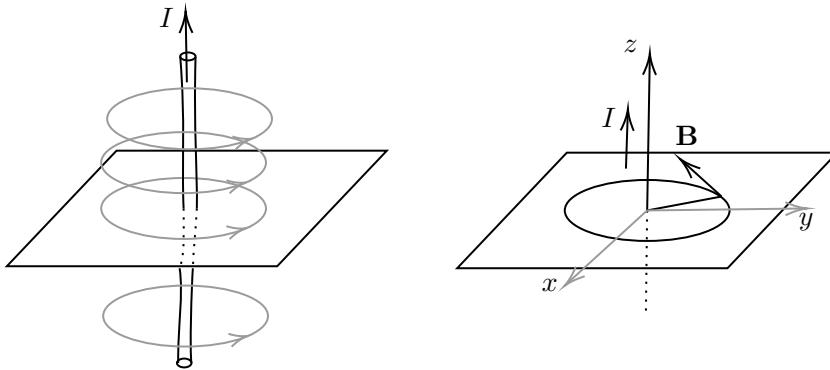
$$\oint_{\partial(\Delta\Sigma)} \mathbf{v} \bullet d\mathbf{s} = \iint_{\Delta\Sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \bullet d\mathbf{S} = 2 \iint_{\Delta\Sigma} \boldsymbol{\omega} \bullet d\mathbf{S}$$

从而速度场沿着边界曲线的“环流”也是衡量流体中涡旋的量.

例 8.5.2 考虑一根无限长直线电流载体产生的磁场. 设其载流为 I , 则该电流产生的磁感应强度 \mathbf{B} 的大小为 (r 为观察点到导线的距离, μ_0 为真空磁导率)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

如下图, 所产生磁力线是围绕该导线的圆周, 且电流方向、半径方向和磁感应强度的方向成右手定则.



按上建立坐标系, 电流方向为 z 轴的正向. 任取一张垂直于导线的平面为 xy 平面. 那么点 (x, y, z) ($x^2 + y^2 \neq 0$) 处的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y/r^2 & x/r^2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}, \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

这表明 \mathbf{B} 是定义在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{包含 } z \text{ 轴的管子}\}$ 上的向量场，这与我们在注记 8.4.1 中探讨的球体中挖掉管子的情景非常相似。由于

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

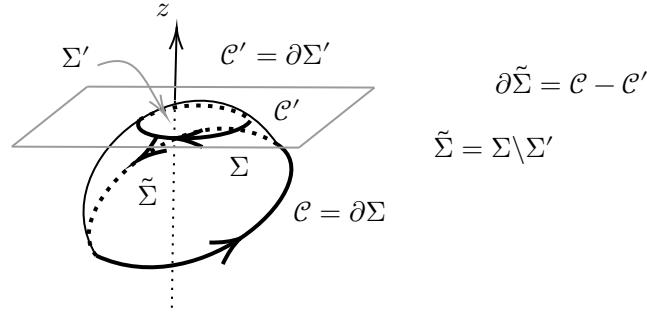
又由于 $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d \arctan \frac{y}{x}$ ，故上积分实际计算的是曲线绕“管子”(z -轴)的圈数的(按定向规定“±”)，详见第 8.3 节末尾的讨论。

1. 对空间中的任意一条不缠绕管子(z -轴)的简单闭曲线 \mathcal{C} ，则 $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} = 0$ ；
2. 对位于垂直于导线的平面上的绕导线的任意简单闭曲线 \mathcal{C} ，取从上往下看是逆时针方向为正向，则若曲线 \mathcal{C} 按正向环绕了管子一圈，则

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times 2\pi = \mu_0 I$$

3. 对空间中任意一条缠绕管子(z -轴)的简单闭曲线 \mathcal{C} ，取其正向为从上往下看是逆时针的方向，则若 \mathcal{C} 沿逆时针缠绕管子一圈，此时亦有

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times 2\pi = \mu_0 I$$



细节说明：我们按正向绕导线一圈的情景为例：取任意一个以 \mathcal{C} 为边界的光滑曲面 Σ ，然后去一个垂直于导线的平面，使得它与 Σ 的交线 \mathcal{C}' 为围绕导线的简单闭曲线。又记 $\tilde{\Sigma} := \Sigma \setminus \Sigma'$ 为曲面 Σ 在 \mathcal{C} 和 \mathcal{C}' 之间的部分。则由 Stokes 公式，得

$$0 = \iint_{\tilde{\Sigma}} (\nabla \times \mathbf{B}) \bullet d\mathbf{S} = \oint_{\partial \tilde{\Sigma}} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} - \oint_{\mathcal{C}'} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s}$$

从而 $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}'} \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} = \mu_0 I$ 。此即著名的安培 (Ampère) 环路定理。

8.6 保守场和势函数

给定空间区域 Ω 上的向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 其中 P, Q, R 为区域 Ω 上的连续函数. 如果存在函数 u 使得

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad} u = \nabla u = -\nabla V$$

则称向量场 \mathbf{F} 为有势场, 且称 $V = -u$ 为场 \mathbf{F} 的势函数 (*potential function*). 即有势场是梯度场 (*gradient field*) .

有势场 \mathbf{F} 的势函数有无穷多个, 不同势函数之间相差一个常数.

对 Ω 中的任意两点, 如果 $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$ 与从 A 到 B 的具体路径 (光滑或分段光滑) 的选择无关, 则称 \mathbf{F} 为一个保守场 (*conservative field*) .

如果区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 是单连通的, 即其中任意一条封闭曲线都可以不经过 Ω 外的点而连续地收缩到 Ω 中的一点. 显然, 对单连通区域 Ω , 我们有

$$\text{保守场} \iff \text{有势场} \iff \text{无旋场}$$

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \text{ 与路径无关} \iff \mathbf{F} = \nabla u \iff \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

例 8.6.1 引力场是有势场, 即 $\mathbf{F} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}^0$, 其中 r 是单位质量 (设坐标为 (x, y, z)) 到质量 M (设坐标为 $(0, 0, 0)$) 的距离, $\mathbf{r} = (x, y, z)$. 则

$$\mathbf{F} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} = \nabla \left(\frac{GM}{r} \right)$$

即引力势为 $V(x, y, z) = -\frac{GM}{r}$. 通过势函数, 则 \mathbf{F} 沿从 A 到 B 的任一轨迹 C 的做功为

$$\begin{aligned} W &= - \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_C \nabla V \bullet d\mathbf{r} = \int_C \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \bullet (dx, dy, dz) = \\ &\int_C \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \int_C dV = V(x_B, y_B, z_B) - V(x_A, y_A, z_A) \end{aligned}$$

特别地, 将单位质量在引力场中从无穷远 ∞ 移动到 $M(x, y, z)$ 的过程中克服引力的做功为

$$\int_{\infty}^M -\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = V(x, y, z) = V|_{\infty} \xrightarrow{V|_{\infty} \equiv 0} V(x, y, z)$$

这便是引力势的物理意义.

例 8.6.2 电场也是有势场. 位于原点的点电荷 q 所产生的静电场的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} = -\nabla \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{那么 } \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{r^3} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{r^3} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{r^3} \right) \right)$$

$$\text{我们计算 } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{r^3} \right) = \frac{-3zr^2 \frac{\partial r}{\partial y}}{r^6} + \frac{3yr^2 \frac{\partial r}{\partial z}}{r^6} = 3 \frac{y \frac{\partial r}{\partial z} - z \frac{\partial r}{\partial y}}{r^4}, \text{ 而}$$

$$y \frac{\partial r}{\partial z} - z \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{yz}{r} - \frac{zy}{r} \equiv 0$$

从而 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{r^3} \right) \equiv 0$. 由轮换对称性, 知旋度 $\nabla \times \mathbf{E}$ 的其它两个分量也是零, 故 \mathbf{E} 是无旋场.

由于 $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{原点}\}$ 是单连通的 (只要不穿过原点的封闭曲线都能在其中连续收缩为一点), 故有势场也是保守场、也是无旋场. 事实上, 我们可证明: 在但连通区域 Ω 上, 只要 $\mathbf{F} = \nabla u$, 则必有 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, 即单连通区域上的梯度场必是无旋场. 即

$$\nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}$$

$$\text{证明: } \nabla \times (\nabla u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = (u_{yz} - u_{zy}, u_{zx} - u_{xz}, u_{xy} - u_{yx}) = \mathbf{0}.$$

注记 8.6.1 $\nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}$, 或 $\text{curl}(\text{grad } u) = \mathbf{0}$ 等价于 $d(du) = 0$, 即外微分两次作用为零. $d(du) = d(u_x dx + u_y dy + u_z dz) = (u_{xx} dx + u_{yx} dy + u_{zx} dz) \wedge dx +$

$$+ (u_{xy} dx + u_{yy} dy + u_{zy} dz) \wedge dy + (u_{xz} dx + u_{yz} dy + u_{zz} dz) \wedge dz =$$

$$u_{yx} dy \wedge dx + u_{zx} dz \wedge dx + u_{xy} dx \wedge dy + u_{zy} dz \wedge dy + u_{xz} dx \wedge dz + u_{yz} dy \wedge dz = 0$$

事实上, (外) 微分两次为零: $d^2 = 0$ 是普遍成立的, 这与几何图形的边界无边界: $\partial^2 = 0$ 是互为对偶的. $d(d(1\text{-形式})) = 0$ 的表达及其物理意义将在下节讨论.

9 高斯公式、散度、通量及其它

9.1 概念导引

我们先前讨论了一般积分模式（即广义的 *Stokes* 公式） $\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega$ 的一维和二维情形，即

$$f(b) - f(a) = \int_a^b df \quad \oint_{\partial\Sigma} \omega = \iint_{\Sigma} d\omega$$

其中 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, 而 $d\omega$ 是微分形式 ω 的外微分，其计算如下

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

通常记 $dy \wedge dz = dydz$, $dz \wedge dx = dzdx$, $dx \wedge dy = dxdy$, 只是需将右边理解为有向面元在左边平面上的投影面积，可正可负，取决于投影面积的方向是否与三个坐标面的标准定向一致。当然，用外积符号的话，通过交换顺序（如 $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ ）便可区分不同的定向。

换言之 $d\omega = (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet (dydz, dzdx, dxdy)$. 其中 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. 即

$$d\omega = \underbrace{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}}_{\nabla \times \mathbf{F}} \bullet (dydz, dzdx, dxdy) = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

注记 9.1.1 更严格的写法是，将 $dydz$, $dzdx$, $dxdy$ 分别写为 $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$.

自然地，我们希望考虑 ω 是二次微分形式（即 2-形式）时的情形，此时 $d\omega$ 应在空间中的三维区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 上积分，而 ω 应在其二维边界曲面 $\partial\Omega$ 上积分。注意 $\partial\Omega$ 天然是封闭曲面（即边界无边界： $\partial^2\Omega = 0$ ）。

我们先推测此时广义 *Stokes* 公式 $\iint_{\partial\Omega} \omega = \iiint_{\Omega} d\omega$ 的具体形式。

对二次微分形式 $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$,
按对一次微分形式求外微分的形式规则 (c.f. 注记 8.1.1), 推广可得

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

故我们期待

$$\oint_{\partial\Omega} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

我们将上面右边的 3-形式 $dx \wedge dy \wedge dz$ 解释为三维空间中的体积微元 $dxdydz$, 如此上式右边可看为是一个空间区域 Ω 上的三重积分 (类似于我们将格林公式的右边解释为 xy 平面上的二重积分). 而上式左边自然是向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 在**有向边界曲面** $\partial\Sigma$ 上的第二型曲面积分, 即向量场 \mathbf{F} 穿越封闭曲面 $\partial\Sigma$ 的通量 (flux).

自然的问题是定向如何? 我们通过计算简单例子来回答这个问题, 并看出上面的公式之所以成立的机理.

比如取 Ω 为三维单位球 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 其边界曲面为 $\partial\Omega = S^2$ 为二维单位球面. 取向量场为 $\mathbf{F} = (P, Q, R) = (x, y, z)$. 则右边为

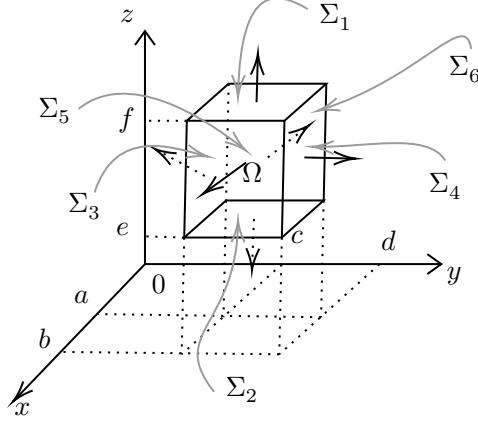
$$\iiint_{\Omega} 3dV = 3 \iiint_{\Omega} dxdydz = 3 \times \frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

对球面 $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 将方程微分得 $xdx + ydy + zdz = 0$, 即球面上的**外侧法向量**为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ (即等于球面上点的位置向量 \mathbf{r}), 由此可知左边的积分

$$\begin{aligned} \iint_{S^2} xdydz + ydzdx + zdxdy &= \iint_{S^2} \mathbf{n} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{S^2} \mathbf{n} \bullet \mathbf{n}^0 dS \\ &= \iint_{S^2} \|\mathbf{n}\| dS \xrightarrow[\|\mathbf{n}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1]{} \iint_{S^2} dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = 4\pi \end{aligned}$$

即知在此例中, 取 $\partial\Omega = S^2$ 的定向为**外侧**, 则所得结果与右边三重积分得到的结果是相同的. 下面我们就算个更简单的例子, 不仅也能将定向问题看清, 更能看出上面公式成立的根本原因 (本质还是牛顿-莱布尼茨公式).

考察在空间长方体区域 $\Omega := [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subseteq \mathbb{R}^3$ 上的积分.



其边界 $\partial\Omega$ 由六片长方形区域 Σ_i , $i = 1, \dots, 6$ 构成, 我们赋予其向外侧的定向. 则

1. 上侧 $\Sigma_1 : z = f, (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, 定向法向量为: $\mathbf{n}^0 = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$;
2. 下侧 $\Sigma_2 : z = e, (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, 定向法向量为: $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{k} = (0, 0, -1)$;
3. 左侧 $\Sigma_3 : y = c, (x, z) \in [a, b] \times [e, f]$, 定向法向量为: $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{j} = (0, -1, 0)$;
4. 右侧 $\Sigma_4 : y = d, (x, z) \in [a, b] \times [e, f]$, 定向法向量为: $\mathbf{n}^0 = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$;
5. 前侧 $\Sigma_5 : x = b, (y, z) \in [c, d] \times [e, f]$, 定向法向量为: $\mathbf{n}^0 = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$;
6. 后侧 $\Sigma_6 : x = a, (y, z) \in [c, d] \times [e, f]$, 定向法向量为: $\mathbf{n}^0 = -\mathbf{i} = (-1, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} P dy \wedge dz &= \iint_{\Sigma_5} P dy \wedge dz + \iint_{\Sigma_6} P dy \wedge dz = \iint_{\Sigma_5} P dy dz - \iint_{\Sigma_6} P dy dz = \\ &= \int_c^d \int_e^f P(b, y, z) dy dz - \int_c^d \int_e^f P(a, y, z) dy dz = \\ &= \int_e^f dz \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial P}{\partial x} dx = \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\partial\Omega} Q dz \wedge dx = \iint_{\Sigma_3} Q dz \wedge dx + \iint_{\Sigma_4} Q dz \wedge dx = - \iint_{\Sigma_3} Q dz dx + \iint_{\Sigma_4} Q dz dx =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_e^f \int_a^b Q(x, c, z) dz dx + \int_e^f \int_a^b Q(x, d, z) dz dx = \\
&= \int_e^f dz \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial Q}{\partial y} dy = \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz \\
\iint_{\partial\Omega} R dx \wedge dy &= \iint_{\Sigma_1} R dx \wedge dy + \iint_{\Sigma_2} R dx \wedge dy = \iint_{\Sigma_1} R dx dy - \iint_{\Sigma_2} R dx dy = \\
&= \int_a^b \int_c^d R(x, y, f) dx dy - \int_a^b \int_c^d R(x, y, e) dx dy = \\
&= \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz
\end{aligned}$$

综合上面计算结果，可知对长方体空间封闭区域 Ω ，取其边界封闭曲面 $\partial\Omega$ 的定向为外侧，则有

$$\iint_{\partial\Omega} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

记 $\mathbf{F} := (P, Q, R)$ ，则可写为 $\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{F} dV$. 其中 $\nabla \bullet \mathbf{F}$ 为矢量微分算子 ∇ 在 \mathbf{F} 上的作用，定义如下

$$\nabla \bullet \mathbf{F} := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量场 \mathbf{F} 的散度 (*divergence*)，也记为 $\text{div } \mathbf{F}$. 散度是一个数量 (标量)，其几何及物理意义我们在后面 (9.3 小节) 讨论.

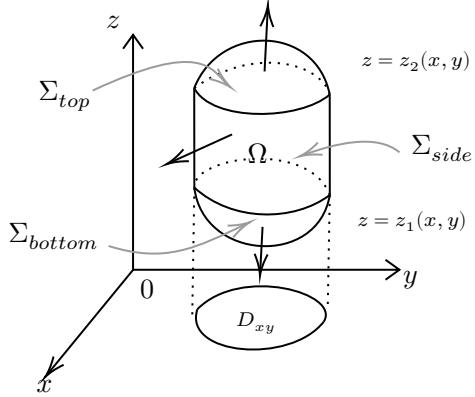
我们自然期望，上面在长方体区域上推导的公式——著名的高斯 (*Gauss*) 公式对一般封闭区域 Ω 也成立. 事实也是如此，但需假定区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 是由光滑或分片光滑曲面 S 所围成的空间闭区域，此时 $S = \partial\Omega$.

想象用坐标面将区域 Ω 分割成一些小矩形块，在每一矩形块上上面定理成立，而对于相邻矩形块上重合平面上的积分，由于定向是相反的，故曲面积分相互抵消，抵消的净结果是得到边界曲面 $\partial\Omega$ 上的第二型曲面积分.

当然由于分割的边界小区域块可能不是矩形块，我们需处理比上面更一般的情形，从而分割后的边界附近的小区域块可归为这些类型.

假设 Ω 是 xy 型空间区域，即 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}$$



按照三重积分的累次积分，有 $\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$

$$= \iint_{D_{xy}} (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))) dx dy$$

下面计算曲面积分 $\iint_{\partial\Omega} R dx dy$ (其实应是 $\iint_{\partial\Omega} R dx \wedge dy$)，由于 $\partial\Omega = \Sigma_{top} \cup \Sigma_{bottom} \cup \Sigma_{side}$ ，定向皆以外侧为正向，则

$$\iint_{\partial\Omega} R dx dy = \iint_{\Sigma_{top}} R dx dy + \iint_{\Sigma_{bottom}} R dx dy + \iint_{\Sigma_{side}} R dx dy$$

由于 Σ_{side} (母线平面与 z 轴的柱面之侧) 在 xy -平面上没有投影，故 $\iint_{\Sigma_{side}} R dx dy = 0$ ，

下面计算 Σ_{top} 和 Σ_{bottom} 上的积分。

$$\iint_{\Sigma_{top}} R dx \wedge dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy$$

$$\iint_{\Sigma_{bottom}} R dx \wedge dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy$$

$$\begin{aligned}
\text{从而可得 } \iint_{\partial\Omega} R dxdy &= \iint_{D_{xy}} (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))) dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz
\end{aligned}$$

同理，对于 yz 型空间区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), (y, z) \in D_{yz}\}$ ，则在其上成立

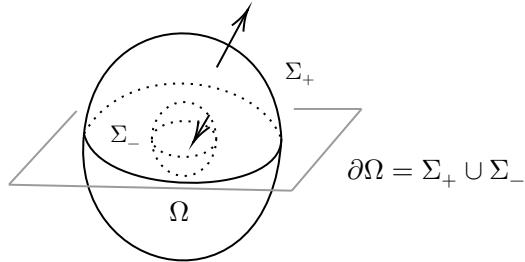
$$\iint_{\partial\Omega} P dydz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz$$

对于 zx 型空间区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid y_1(z, x) \leq y \leq y_2(z, x), (z, x) \in D_{zx}\}$ ，则在其上成立

$$\iint_{\partial\Omega} Q dzdx = \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz$$

则如果区域 Ω 同时符合上面三种类型（比如球体、矩形块等），则其上 *Gauss* 公式是成立的。对更一般区域，通过利用辅助线将其分割，将它分割成上面类型即可。

注记 9.1.1 三维区域 Ω 中如果没有“洞”，则称为二维连通区域，即 Ω 中的任何一张封闭曲面所围的立体仍然属于 Ω 。对这样的区域，上述 *Gauss* 公式是直接成立的，类似于平面（空间）单连通区域上的 *Green* 公式（*Stokes* 公式）。当然，对空间的二维复连通区域 Ω ，即 Ω 中有“洞”的情形，也可将 *Gauss* 公式推广于其上。



如上图所示， Ω 是中间有一个“洞”的区域，其边界由 Σ_+ （定向外侧）和 Σ_- （定向内侧）组成，则可得通过用图中平面将趋于割开，割开后的两个区域都是二维连通的，故其上 *Gauss* 公式直接成立，然后相加，即得

$$\iint_{\Sigma_+} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_-} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

9.2 高斯公式计算举例

高斯 (Gauss) 公式: 给定空间区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, 设它里面没有“洞”(即二维但连通区域), 且设其边界 $\partial\Omega$ 曲面是光滑的或分片光滑的, 并规定其定向为外侧. 则对在 Ω 上具有连续的偏导数向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 成立

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

$$\text{即 } \oint_{\partial\Omega} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

特别地, 在上面公式中分别令 $\mathbf{F} = (x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z)$, 可得

$$\oint_{\partial\Omega} x dy dz = \oint_{\partial\Omega} y dz dx = \oint_{\partial\Omega} z dx dy = \iiint_{\Omega} dV = \operatorname{vol}(\Omega)$$

从而可得

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \frac{1}{3} \oint_{\partial\Omega} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

这是利用边界上的曲面积分求体积的计算公式, 类似于利用边界曲线上的积分计算区域面积的公式

$$\operatorname{Area}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \oint_{\partial\mathcal{D}} x dy - y dx$$

例 9.2.1 计算椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的体积.

解: 利用参数化 Σ :
$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta \\ y = b \sin \varphi \sin \theta \\ z = c \cos \varphi \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$
 则

$$dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} d\varphi \wedge d\theta = ab \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \wedge d\theta$$

$$\text{从而椭球的体积为 } V = \iint_{\Sigma} z dx \wedge dy = \iint_{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi} c \cos \varphi \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} d\varphi \wedge d\theta$$

$$\xrightarrow[d\varphi \wedge d\theta = d\varphi d\theta]{\text{定向取外侧, 故}} abc \iint_{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi d\theta = \frac{4\pi abc}{3}$$

例 9.2.2 对例 7.2 中的积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z) dx dy$, 其中 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

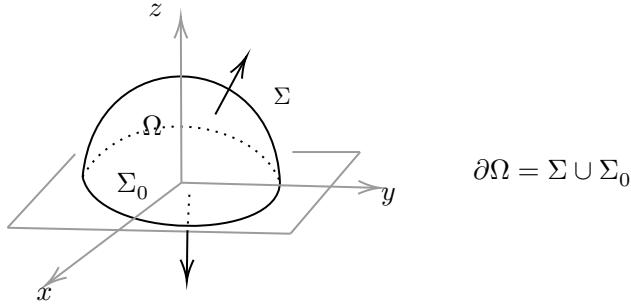
的外侧, 我们按常规方法计算出其值为 $\frac{4\pi}{3}abc$. 下面利用 Gauss 公式给出快速求解.

解: 记椭球面 Σ 所围区域为 Ω , 则曲面积分求的是向量场 $\mathbf{F} = (0, 0, x^2 + y^2 + z)$ 对曲面 Σ 的通量 $\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$, 利用 Gauss 公式, 它等于

$$\iiint_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{F} dV = \iiint_{\Omega} 1 dV \xrightarrow{\text{利用上例结论}} \frac{4\pi}{3}abc$$

例 9.2.3 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xz^2 dy dz + (x^2 y - z^3) dz dx + (2xy + y^2 z) dx dy$, 其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

解: 补充曲面 $\Sigma_0 : z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2$, 方向取下侧, 则 $\Sigma + \Sigma_0$ 围成了封闭区域 Ω .



由 Gauss 公式, 得 $\iint_{\Sigma \cup \Sigma_0} xz^2 dy dz + (x^2 y - z^3) dz dx + (2xy + y^2 z) dx dy =$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \xrightarrow{\text{球坐标}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho^4 \sin \varphi d\rho = \frac{2}{5}\pi R^5$$

而 $\iint_{\Sigma_0} xz^2 dy dz + (x^2 y - z^3) dz dx + (2xy + y^2 z) dx dy =$

$$\xrightarrow[dx \wedge dy = -dxdy]{z=0} - \iint_{\Sigma_0} (2xy) dx dy \xrightarrow{\text{对称性}} 0$$

$$\text{故 } I = \iint_{\Sigma \cup \Sigma_0} - \iint_{\Sigma_0} = \frac{2}{5}\pi R^5 - 0 = \frac{2}{5}\pi R^5.$$

例 9.2.4 计算 $I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{3/2}}$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 取外侧 ($a, b, c > 0$).

解 I: 将 Σ 参数化 $\begin{cases} x = \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sin \varphi \sin \theta \\ z = \cos \varphi \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. 计算可得

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} = \sin^2 \varphi \cos \theta, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \theta)} = \sin^2 \varphi \sin \theta, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \theta)} = \sin \varphi \cos \varphi$$

而 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 的方向与球面外侧方向是一致的, 所以球面上的有向面元为

$$d\mathbf{S} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy) = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\varphi d\theta$$

$$= (A, B, C) d\varphi d\theta = (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi d\theta$$

$$\text{记 } \mathbf{F} = \left(\frac{x}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{3/2}}, \frac{y}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{3/2}}, \frac{z}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{3/2}} \right)$$

$$= \left(\frac{\sin \varphi \cos \theta}{\Xi}, \frac{\sin \varphi \sin \theta}{\Xi}, \frac{\cos \varphi}{\Xi} \right)$$

其中 $\Xi = (a \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c \cos^2 \varphi)^{3/2}$, 则所求积分 $I = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} =$

$$= \iint_{\Sigma} \frac{\sin^3 \varphi \cos^2 \theta + \sin^3 \varphi \sin^2 \theta + \sin \varphi \cos^2 \varphi}{\Xi} d\varphi d\theta = \iint_{\Sigma} \frac{\sin \varphi}{\Xi} d\varphi d\theta$$

$$\xrightarrow[\text{对称性, 只计算}{\text{第一卦限部分}}]{} 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \varphi d\varphi d\theta}{(a \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c \cos^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$\xrightarrow[t=\cos \varphi]{} 8 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{dt}{((a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta) - (a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta - c)t^2)^{3/2}}$$

$$= 8 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta)} \cdot \frac{t}{[(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta) - (a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta - c)t^2]^{1/2}} \Big|_{t=0}^{t=1} d\theta$$

$$= 8 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{1}{a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta} d\theta \xrightarrow[t=\tan \theta]{t=\tan \theta} \frac{8}{\sqrt{c}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{a + bt^2} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

解 II:(利用 *Gauss* 公式)向量场 \mathbf{F} 在原点 $O(0,0,0)$ 处是没有定义的(或称为奇异的),故在利用 *Gauss* 公式时,需要将原点“挖掉”,为此,考虑小闭曲面 $\Sigma_\epsilon = \{ax^2+by^2+cz^2=\epsilon^2\}$ (取 ϵ 很小),方向取外侧,则在 Σ_ϵ 和 Σ 围成的封闭区域 Ω 上运用 *Gauss* 公式,有

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} - \oint_{\Sigma_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (\nabla \bullet \mathbf{F}) dV$$

$$\begin{aligned} \text{但由于在 } \Omega \text{ 上 } \nabla \bullet \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}} \right) \equiv 0 \end{aligned}$$

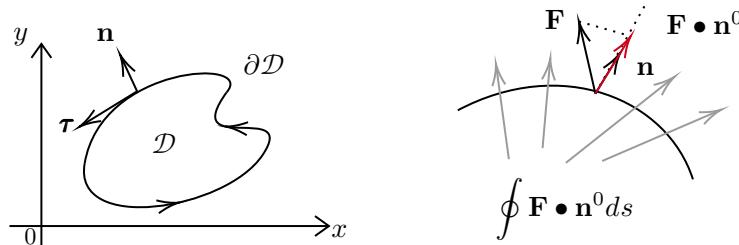
$$\begin{aligned} \text{从而 } I &= \oint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon^3} \iint_{\Sigma_\epsilon} x dy dz + y dz dx + z dx dy \xrightarrow{\text{再用一次 } Gauss \text{ 公式}} \\ &= \frac{1}{\epsilon^3} \iiint_{ax^2+by^2+cz^2 \leq \epsilon^2} dx dy dz = \frac{3}{\epsilon^3} \cdot \frac{4\pi}{4} \cdot \frac{\epsilon^2}{\sqrt{abc}} = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}} \end{aligned}$$

Green 公式与 Gauss 公式: 我们回忆 *Green* 公式的形式

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

这与如下 *Gauss* 公式的形式无疑是很相似的

$$\iint_{\partial D} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$



为凸显相似性,进而发现其内在一致性,如上图,记边界曲线 ∂D 的外侧法向量场为 \mathbf{n} ,并记与定向一致的切向量场为 τ .则沿着方向 τ 对 \mathbf{F} 的积分给出 \mathbf{F} 沿曲线 ∂D 的环流 $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \bullet \mathbf{e}_\tau ds$;而 \mathbf{F} 沿着 \mathbf{n} 的积分 $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}^0 ds$ 给出的是 \mathbf{F} 穿越 ∂C 的通量.

另外, 记 (\mathbf{n}, x) 为 \mathbf{n} 和 \mathbf{i} 的夹角, 则有 $(\mathbf{n}, x) = (\boldsymbol{\tau}, y)$, $(\mathbf{n}, y) = \pi - (\boldsymbol{\tau}, x)$. 从而

$$\cos(\mathbf{n}, x)ds = \cos(\boldsymbol{\tau}, y)ds = dy; \quad \cos(\mathbf{n}, y)ds = -\cos(\boldsymbol{\tau}, x)ds = -dx$$

$$\text{从而 } \oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}^0 ds = \oint_{\partial\mathcal{D}} (P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)) ds =$$

$$= \oint_{\partial\mathcal{D}} -Q dx + P dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy$$

在 xy 平面上, 向量场 \mathbf{F} 的散度为 $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$. 故上面的格林公式可写为

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}^0 ds = \iint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mathbf{F} dxdy$$

这可以看成是二维形式的 *Gauss 公式*.

例 9.2.5 对平面但连通二维区域 \mathcal{D} , 设其有光滑 (或分段光滑) 的边界曲线 $\partial\mathcal{D}$, 定向沿逆时针方向. 记 \mathbf{n} 为边界的外法向量场. 设 $u(x, y)$ 是区域 \mathcal{D} 上的二次可微函数, 我们考察其梯度场 (*gradient vector field*) ∇u 对边界 $\partial\mathcal{D}$ 的通量积分.

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{D}} \nabla u \bullet \mathbf{n}^0 ds &\xlongequal{\text{记 } \frac{\partial u}{\partial n} \text{ 为 } u \text{ 沿着 } \mathbf{n} \text{ 的方向导数}} \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &= \oint_{\partial\mathcal{D}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) \right) ds = \oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \\ &\xlongequal{\text{Green 公式}} \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy = \iint_{\mathcal{D}} \Delta u dxdy \end{aligned}$$

即得到公式 $\oint_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{\mathcal{D}} \Delta u dxdy$. 其中 $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维拉普拉斯 (*Laplace*) 算子.

注记 9.2.1 由上公式, 可证明: u 在 \mathcal{D} 上是调和函数 (*harmonic function*), 即 $\Delta u \equiv 0$ 当且仅当对 \mathcal{D} 内任意逐段光滑的闭曲线 \mathcal{C} , 都成立 $\oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$. 必要性由上面的公式直接可得, 下证充分性. 用反证法, 若 $\exists M_0 \in \mathcal{D}$ 使得 $\Delta u(M_0) > 0$ (或 < 0), 则由连续函数的局部保号性, 可设在包含 M_0 的一个小圆盘 Δ 上恒有 $\Delta u > 0$, 则由于 $0 < \iint_{\Delta} \Delta u dxdy = \oint_{\partial\Delta} \frac{\partial u}{\partial n} ds$, 矛盾. 从而结论得证. \square

例 9.2.6 计算 Gauss 曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\mathbf{n}^0, \mathbf{r})}{r^2} dS$, 其中 Σ 为光滑封闭曲面. $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 为曲面上点相对于原点的位置矢量, r 是曲面上点到原点的距离 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 而 \mathbf{n}^0 是曲面的外法向向量.

解: 设 $\mathbf{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 则 $\cos(\mathbf{n}^0, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}^0}{r} = \frac{x}{r} \cos \alpha + \frac{y}{r} \cos \beta + \frac{z}{r} \cos \gamma$.

令 $P = \frac{x}{r^3}$, $Q = \frac{y}{r^3}$, $R = \frac{z}{r^3}$, 则所求积分为 $I = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$, 其中 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$.

1. 原点在曲面 Σ 的外部. 此时 P, Q, R 在 Σ 包围的区域 Ω 中是良好定义的, 故由 Gauss 公式, 得

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right] dx dy dz$$

但 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^5} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$, 由轮换对称性, 得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = \frac{3}{r^3} - \left(\frac{3x^2}{r^5} + \frac{3y^2}{r^5} + \frac{3z^2}{r^5} \right) = 0$$

$$\text{从而知此时 } I = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iiint_{\Omega} 0 dV = 0.$$

2. 原点在曲面的内部时, 此时 \mathbf{F} 在原点奇异, 故为了处理积分, 需要“挖掉”包含原点的一个小球 $B_\epsilon : x^2 + y^2 + z^2 \leq \epsilon$, 则 \mathbf{F} 在区域 $\Omega \setminus B_\epsilon$ 上是良好定义的. 在该区域上运用高斯公式, 得 (其中 $S_\epsilon : x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon$ 的定向取外侧)

$$0 = \iiint_{\Omega \setminus B_\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\partial(\Omega \setminus B_\epsilon)} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\partial\Omega = \Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} - \iint_{\partial B_\epsilon = S_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$$

$$\text{从而 } I = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} \xrightarrow[r=\epsilon]{\text{在 } S_\epsilon \text{ 上}} \frac{1}{\epsilon^3} \iint_{S_\epsilon} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

$$\xrightarrow[\text{Gauss 公式}]{\text{再运用}} \frac{3}{\epsilon^3} \iiint_{B_\epsilon} dx dy dz = \frac{3}{\epsilon^3} \times \frac{4\pi\epsilon^3}{3} = 4\pi$$

故得到

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\mathbf{n}^0, \mathbf{r})}{r^2} dS = \begin{cases} 4\pi & \text{原点在 } \Sigma \text{ 之内;} \\ 0 & \text{原点在 } \Sigma \text{ 之外.} \end{cases}$$

注记 9.2.2 Gauss 曲面积分可写为 $\iint_{\Sigma} \left(\frac{x}{r^3} \cos \alpha + \frac{y}{r^3} \cos \beta + \frac{z}{r^3} \cos \gamma \right) dS$

$$= \iint_{\Sigma} \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \bullet \mathbf{n}^0 dS = \iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{r}^0 \bullet \mathbf{n}^0}{r^2} dS = \iint_{\Sigma} \frac{\mathbf{r}^0 \bullet d\mathbf{S}}{r^2}$$

这当然不是别的，就是由曲面 Σ 张成的立体角 Ω (c.f. 例 7.8). 上面的结论表明，对一个封闭曲面，其相对于其内任一点的立体角都是 4π ，印证了我们先前的预期。由上也看出立体角可用来衡量封闭曲面“缠绕”单位球面的“圈数”。

当降低一个维度考察时，这一直观会更明晰呈现。

考虑低一维度的 Gauss 积分，即

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为曲线上点 \mathbf{r} 的位置向量的长度， \mathbf{n} 为曲线的外法向量，设 $\mathbf{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta)$ ，则

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \mathbf{r}^0 \bullet \mathbf{n}^0 = \frac{x}{r} \cos \alpha + \frac{y}{r} \cos \beta$$

$$\cos \alpha ds = dy, \quad \cos \beta ds = -dx$$

故

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds &= \oint_{\mathcal{C}} \frac{x \cos \alpha ds + y \cos \beta ds}{r^2} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\ &= \oint_{\mathcal{C}} d \arctan \frac{y}{x} = \oint_{\mathcal{C}} d\theta \end{aligned}$$

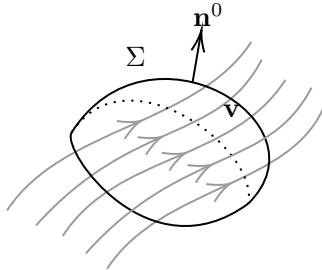
若 \mathcal{C} 是顺时针的封闭曲线，则类似于曲面积分的情形，我们有

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} ds = \begin{cases} 2\pi & \mathcal{C} \text{ 包围原点,} \\ 0 & \mathcal{C} \text{ 不包围原点.} \end{cases}$$

9.3 散度和通量，有源场和无源场

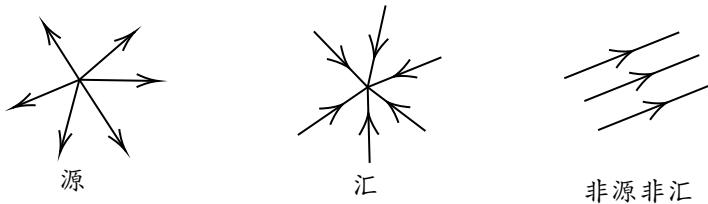
考虑区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 上的不可压缩流体（设其密度为 1），设其流速场为 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ ，且设 P, Q, R 具有连续偏导数。设 Σ 是 Ω 中的定向曲面， \mathbf{n}^0 为与定向一致的单位法向量场，则单位时间内通过 Σ 流向指定侧的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}^0 dS$$



1. 当 $\Phi > 0$ 时，沿 \mathbf{n}^0 方向穿过曲面 Σ 的流量多于沿相反方向穿过曲面的流量；
2. 当 $\Phi < 0$ 时，沿 \mathbf{n}^0 方向穿过曲面 Σ 的流量小于沿相反方向穿过曲面的流量。

特别地，若果 Σ 是封闭曲面，定向为外侧，则若 $\Phi > 0$ ，说明曲面内的流出量大于流入量，即曲面内有产生流体的源头，称为流体的源 (*source*)；反之，若 $\Phi < 0$ ，则说明曲面的流出量大于流入量，说明 Σ 内必有排出流体的漏洞，称为汇 (*sink*)。



下面我们探讨判断某点是否为源或汇，及源的“强弱”及汇的“大小”的量。而这只需写出下面 *Gauss* 公式的微分形式。

$$\Phi = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

即取 Ω 是由包围点 M 的一区域，其边界曲线 $\partial\Omega$ 定向取外侧，则有三重积分的中

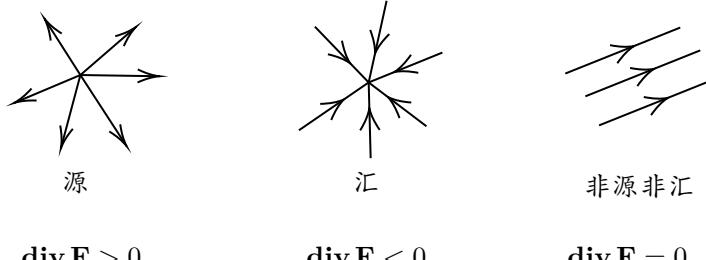
值定理知 $\exists M^* \in \Omega$, 使得

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \operatorname{div} \mathbf{F}|_{M^*} \operatorname{vol}(\Omega) \implies \operatorname{div} \mathbf{F}|_{M^*} = \frac{\Phi}{\operatorname{vol}(\Omega)} = \frac{\oint \mathbf{v} \bullet d\mathbf{S}}{\operatorname{vol}(\Omega)}$$

则在 Ω 收缩为点 M 的极限过程在, $M^* \rightarrow M$, 从而

$$\operatorname{div} \mathbf{F}|_M = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\Phi}{\operatorname{vol}(\Omega)} = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}}{\operatorname{vol}(\Omega)}$$

即 M 点向量场的散度 (*divergence*) $\operatorname{div} \mathbf{F}|_M = \nabla \bullet \mathbf{F}|_M$ 衡量的是流体的通量关于体积的变化率, 即穿出单位体积的边界的通量大小.



$$\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$

例 9.3.1 在原点置放一点电荷 q , 它产生的电场在 $M(x, y, z)$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为点 M 到原点的距离, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 为 M 的相对于原点的位置向量. ϵ_0 为真空介电常数.

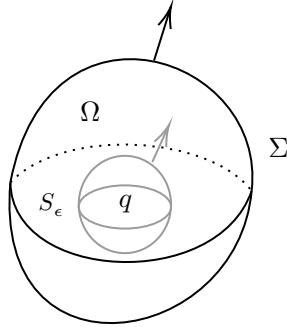
记 $\mathbf{E} = (P, Q, R)$, 其中 $P = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, $Q = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, $R = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, 所以

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

故当 $r \neq 0$ 时, 即在点电荷之外的区域内都有 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$, 从而在点电荷之外, 场是无源的.

但电荷所在的原点是 \mathbf{E} 的奇点, 为探测奇点的属性, 我们考虑包围原点的光滑封闭曲面 Σ , 定向取外侧, 并在其所围区域内部“挖掉”一个小球体 $B_0(\epsilon) : x^2 + y^2 + z^2 \leq \epsilon^2$,

其边界球面 $S_\epsilon : x^2 + y^2 + z^2 = \epsilon^2$ 的定向也取外侧. 记 S_ϵ 和 Σ 之间的区域为 Ω .



在 Ω 上运用 *Gauss* 定律: $\oint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = \iiint\limits_{\Omega} (\nabla \bullet \mathbf{E}) dV \equiv 0$. 从而

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint\limits_{\Sigma} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = \oint\limits_{S_\epsilon} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} \xrightarrow{\text{在球面 } S_\epsilon \text{ 上 } r = \epsilon} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon^3} \oint\limits_{S_\epsilon} \mathbf{r} \bullet d\mathbf{S} = \\ &\quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon^3} \iint\limits_{S_\epsilon} xdydz + ydzdx + zdxdy \xrightarrow{\text{在球体 } B_0(\epsilon) \text{ 上再运用 } Gauss \text{ 公式一次}} \\ &\quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon^3} \iiint\limits_{B_0(\epsilon)} 3dV = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0\epsilon^3} \times \frac{4\pi\epsilon^3}{3} = \frac{q}{\epsilon^0} \end{aligned}$$

这便是电磁学中的 *Gauss* 定理, 它表明: 电场强度穿出任一封闭曲面的电通量等于其内部的电荷量除以 ϵ_0 .

对单连通 (即其中任何封闭曲面都可不通过其外的点连续收缩为一点) 区域 Ω 中的光滑向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 如果它在 Ω 中的任意封闭光滑闭曲面 Σ 上的通量为零, 则直观上, 我们有充足的理由相信 Ω 中没有场 \mathbf{F} 的源, 即 \mathbf{F} 在 Ω 内无源, 也就是说在 Ω 中恒成立

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv 0$$

证明: 假设存在内点 $M_0 \in \Omega$ 使得 $\operatorname{div} \mathbf{F}|_{M_0} \neq 0$, 则做一以 M_0 为中心, 半径为 ϵ 的球体 $B_{M_0}(\epsilon) \subsetneq \Omega$, 其边界球面 S_ϵ 的方向取外侧. 则由条件可知, $\iint\limits_{S_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = 0$, 但根

据 *Gauss* 定理, 我们有 $0 = \iint\limits_{S_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint\limits_{B_{M_0}(\epsilon)} (\nabla \bullet \mathbf{F}) dV$. 不妨设 $\nabla \bullet \mathbf{F}|_{M_0} > 0$, 则

由连续性, 在 M_0 的一个小领域 $U(M_0)$ 中, 恒有 $\nabla \bullet \mathbf{F} > 0$. 适当缩小半径 ϵ , 并对三重积分运用积分中值定理, 得

$$0 = \iiint_{B_{M_0}(\epsilon)} (\nabla \bullet \mathbf{F}) dV = (\nabla \bullet \mathbf{F})|_{M^*} \text{vol}(B_{M_0(\epsilon)}) > 0 \quad \text{其中 } M^* \in U(M_0)$$

从而导出一个矛盾, 故原假设不成立, 即 $\text{div } \mathbf{F} = 0$ 在 Ω 内处处成立. \square

我们知道: 若空间 \mathbb{R}^3 (显然是连通的) 中一个场 \mathbf{F} 是有势的, 即存在势函数 V , 使得 $\mathbf{F} = -\nabla V$, 则它必是无旋的 (c.f. 8.6 节), 即 $\text{curl } \mathbf{F} = -\text{curl grad } V = \mathbf{0}$. 即有恒等式

$$\nabla \times (\nabla V) = \mathbf{0} \iff d^2V = d(dV) = 0$$

我们进一步要问, 上面等式的高维推广如何?

注记 9.3.1 从微分形式的外微分角度来看, 上面的结论是对一个函数 V (看成0-形式) 两次外微分后为零的产物, 那么其推广就应该是对一个1-形式两次外微分后为零的对应向量形式. 对1-形式 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, 其外微分为

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

如对其再外微分一次, 便有 $d^2\omega = d(d\omega) =$

$$\begin{aligned} & d \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \wedge dy \wedge dz + d \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \wedge dz \wedge dx + d \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} \right) dy \wedge dz \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \right) dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz \equiv 0 \end{aligned}$$

此外, 对一个2-形式 $\omega' = P'dy \wedge dz + Q'dz \wedge dx + R'dx \wedge dy$, 其外微分可计算为

$$\begin{aligned} d\omega' &= d(P') \wedge dy \wedge dz + d(Q') \wedge dz \wedge dx + d(R') \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P'}{\partial x} dx + \frac{\partial P'}{\partial y} dy + \frac{\partial P'}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q'}{\partial x} dx + \frac{\partial Q'}{\partial y} dy + \frac{\partial Q'}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R'}{\partial x} dx + \frac{\partial R'}{\partial y} dy + \frac{\partial R'}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

由上注记, 将 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 等同为一向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 则 $d\omega$ 对应为

向量场 \mathbf{F} 的旋度 $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, 在对 $d\omega$ 求外微分 $d(d\omega)$ 得到的是 $\operatorname{curl} \mathcal{F}$ 的散度 $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F})$, 故 $d^2\omega = 0$ 等价于下面的恒等式

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F}) = 0 \iff \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

即连通区域上一向量场的旋度场必是无源的. 这一结论也可直接验证如下: 设 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 则 $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) =$

$$\nabla \bullet \left(\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \right) \xrightarrow[\text{或直接展开验证}]{\text{向量三重积运算规则}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \equiv 0$$

换言之, 如果一向量场是某一向量场的旋度场 $\operatorname{curl} \mathbf{F}$, 则对空间任意封闭有向曲面 Σ , 穿过其的通量为 0. 即

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$\xrightarrow{\omega = Pdx + Qdy + Rdz} \iint_{\Sigma} d\omega \xrightarrow{\text{Stokes 公式}} \oint_{\partial\Sigma} \omega = \oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz \xrightarrow{\partial\Sigma \text{ 为空}} 0$$

哦, 原来 $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F}) \equiv 0$ 的另一视角下的归因为: 对封闭曲面 Σ , 其边界 $\partial\Sigma$ 必为空. 而另一方面, 根据 *Gauss* 公式, 我们有

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} \xrightarrow{\Omega \text{ 为 } \Sigma \text{ 所围区域}} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{F} dV \equiv 0$$

而最后一个等式本质是由于外微分两次为零 $d^2 = 0$. 故我们再一次看到“核心概念枢纽”的强大统摄及整合力:

在广义 *Stokes* 公式 (或广义牛顿-莱布尼茨公式) 的框架下, 对微分形式 (被积对象) 两次外微分 (考虑了定向的微分) 为零这一根本结论对偶于对图形 (积分区域), 两次求边缘为空——即边缘无边缘这一根本结论. 这种互为“对偶”又“相反相成”的图景总结如下:

$$d^2 = 0 \quad \xleftrightarrow{\text{对偶}} \quad \partial^2 = 0$$

$$\langle \Omega, d\omega \rangle := \int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega =: \langle \partial\Omega, \omega \rangle$$

9.4 矢量势的不唯一性, 规范对称性 (*)

由定理 8.4.1, 如果 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 为按曲线连通区域 (也称单连通区域), 即对 Ω 内的任何一条封闭曲线, 都可在此曲线上张一张光滑曲面 (即以封闭曲线为边界), 使之完全位于 Ω 之内, 则对于 Ω 中的任一光滑向量场 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, 它是保守场 (即它在 Ω 中曲线上 \mathcal{C} 的积分 $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ 与路径无关) 当且仅当它是有势场, 即存在势函数 V , 使得 $\mathbf{F} = -\nabla V$.

显然, 对上面的有势场 \mathbf{F} , 其势函数的选择是不唯一的, 如果 V 是一个势函数, 则对任何常数 C , 函数 $V + C$ 也是 \mathbf{F} 的一个势函数. 当然, 由于在物理中, 真正观测的是势差, 故不同势函数的选择不会造成物理实质的改变.

注记 9.4.1 记 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, 则 $\mathbf{F} = -\nabla V$ 等价于 $\exists u$ 使得 $\omega = du$, 由于外微分两次为零, 故此时必有 $d\omega = d^2u = 0$, 以向量场的语言描述, 便是 $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$, 即单连通区域上的梯度场必无旋: $\nabla \times (\nabla V) = \mathbf{0}$.

上面 $d(d(1\text{-形式})) = 0$ 对应 $\operatorname{curl} \operatorname{grad} V = \mathbf{0}$ (或 $\nabla \times \nabla V = \mathbf{0}$), 而我们知道 $d(d(2\text{-形式})) = 0$ 对应 $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$ (或 $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$), 即连通区域上的旋度场必是无源的.

类似的结论在高一维度也成立. 对单连通区域 Ω 上的光滑向量场 \mathbf{F} , 如果我们知道它是个旋度场, 即 \exists 向量场 \mathbf{A} , 使得 $\mathbf{F} = \operatorname{curl} \mathbf{G}$ (或 $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$), 则其散度为零 $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, 即它是无源的. 此时我们称 \mathbf{F} 为管量场, 并称 \mathbf{A} 为场 \mathbf{F} 的一个矢量势 (*vector potential*) .

显然, 管量场 \mathbf{F} 的矢量势是不唯一的, 如果 \mathbf{A} 是其一个矢量势, 则对任意函数 u , $\mathbf{A} + \nabla u$ 也是其矢量势, 即

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla u) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla u) = \nabla \times \mathbf{A}$$

那么问题来了: 如果 \mathbf{F} 无源, 即 $\nabla \bullet \mathbf{F} = 0$, 是否存在矢量势 \mathbf{A} , 使得 $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$?

注记 9.4.2 将 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 等同于 2-形式, 即考虑 $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$, 则 $\nabla \bullet \mathbf{F} = 0$ 等价于 $d\omega = 0$, 那么上面的问题即是: 是否存在微分形式 $\lambda = Ldx + Mdy + Ndz$, 使得 $\omega = d\lambda$. 这是因为, 若记 λ 对应的向量场为 $\mathbf{A} = (L, M, N)$, 则 $\omega = d\lambda$ 等价于 $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$.

上问题的回答对曲线连通区域是肯定的. 即有

定理 9.4.1 设曲线连通区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 上的光滑向量场 \mathbf{F} 无源, 即 $\nabla \bullet \mathbf{F} = 0$, 则它是管量场, 即存在矢量势 \mathbf{A} , 使得 $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$.

证明：令 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \int_0^1 \mathbf{F}(\lambda\mathbf{r}) \times (\lambda\mathbf{r}) d\lambda$, 其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$. 下面验证它就是 \mathbf{F} 的一个矢量势, 即 $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$. 事实上 $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_0^1 \lambda \nabla \times (\mathbf{F}(\lambda\mathbf{r}) \times \mathbf{r}) d\lambda =$

$$= \int_0^1 \lambda \left[3\mathbf{F}(\lambda\mathbf{r}) + (\mathbf{r} \bullet \nabla)\mathbf{F}(\lambda\mathbf{r}) - \underbrace{(\nabla \bullet \mathbf{F})_{\lambda\mathbf{r}}}_{\equiv 0} \lambda\mathbf{r} - \mathbf{F}(\lambda\mathbf{r}) \right] d\lambda$$

由于 $(\mathbf{r} \bullet \nabla)\mathbf{F}(\lambda\mathbf{r}) = \lambda \frac{d\mathbf{F}(\lambda\mathbf{r})}{d\lambda}$, 故代入上式后得到

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_0^1 \left(2\lambda\mathbf{F}(\lambda\mathbf{r}) + \lambda^2 \frac{d\mathbf{F}(\lambda\mathbf{r})}{d\lambda} \right) d\lambda = \lambda^2 \mathbf{F}(\lambda\mathbf{r}) \Big|_{\lambda=0}^{\lambda=1} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad \square$$

上面证明中用到了如下矢量恒等式, 请读者尝试证明之.

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \bullet \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \bullet \mathbf{A} + (\mathbf{B} \bullet \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \bullet \nabla) \mathbf{B}$$

例 9.4.1 磁感应强度 \mathbf{B} 是无源场, 即 $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$, 我们知道在 \mathbb{R}^3 上是存在电磁场的矢量势 \mathbf{A} , 使得 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 的.

由法拉第定律, 若 \mathbf{B} 是变化的, 则其感生电场强度 \mathbf{E} 满足方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 若 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 则有

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}$$

而这又意味着, \exists 函数 $\phi(\mathbf{r})$, 使得 $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$, 即 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

如此定义的 $\phi(\mathbf{r})$ 称为电磁场的标量势, 它是静电势的推广. 下面我们讨论 \mathbf{A} 有不同选择的自由将如何简化电动力学理论的描述.

电动力学的麦克斯韦 (Maxwell) 方程给出如下

$$\begin{cases} \nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} & (1) \\ \nabla \bullet \mathbf{B} = 0 & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (3) \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

则 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 使得上面的方程 (2) 和 (3) 自动满足. 将

$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ 分别代入上面的方程 (1) 和 (4), 得到

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial(\nabla \bullet \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3)'$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon\mu} \nabla \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mu\mathbf{j} \quad (4)'$$

此即标量势 ϕ 和矢量势 \mathbf{A} 所应满足的偏微分方程, 为了简化其形式, 我们利用 \mathbf{A} 选择的不确定性.

设 \mathbf{A}' 是磁场 \mathbf{B} 的另一矢势, 即它也满足 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$, 则 $\exists \psi(\mathbf{r})$, 使得

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\psi(\mathbf{r}) \quad (*)$$

类似地, 存在函数 $\phi'(\mathbf{r})$, 使得 $\mathbf{E} = -\nabla\phi'(\mathbf{r}) - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}$. 则不难推得 (读者自行完成) ϕ, ϕ' 之间有如下关系

$$\phi'(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) - \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (**)$$

上面的方程 (*) 和方程 (**) 称为电磁场的规范变换 (*gauge transformation*). 规范变换不改变电磁场即电动力学的属性, 只是表述形式有所变化而已. 如我们选择合适的 ψ , 使得矢量势 \mathbf{A} 满足如下条件——洛伦兹 (*Lorentz*) 规范:

$$\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

则方程 (3)' 和 (4)' 在此规范下将具有如下形式

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3)''$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j} \quad (4)''$$

推导上面方程 (4)'' 时我们利用了矢量等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$. 由此可见, 在洛伦兹规范下, 标量势 ϕ 满足以 $\frac{\rho}{\epsilon}$ 为源的波动方程; 而矢量势 \mathbf{A} 满足以 $-\mu\mathbf{j}$ 为源的波动方程.

从中看出, 利用 \mathbf{A} 的不确定性, 选择合适的规范, 是如何简化理论表述的. 在经典电动力学中, 矢势 \mathbf{A} 只是求解电磁方程的一个数学概念, 并不具有物理意义 (即不可观测), 但在量子力学中, 矢势 \mathbf{A} 的环量积分 $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \bullet d\mathbf{s}$ 是可观测的物理量, 具体参见阿哈罗洛夫-波姆 (*Aharanov-Bohm*) 效应.

例 9.4.2 设 \mathbf{F} 为有势场, 关于原点对称, 即它是 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 的函数. 除原点外, 处处有 $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, 但它在原点处有强度为 e 的源头, 即单位时间内从原点涌出的场的流量为 e . 证明: \mathbf{F} 具有如下唯一形式 (引力场和电场都具有该形式)

$$\mathbf{F} = \frac{e}{4\pi r^3} \mathbf{r} \quad \text{其中 } r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

证明: 由于 \mathbf{F} 有势, 故 $\exists u$, 使得 $\mathbf{F} = \nabla u$. 由于对称性, u 是关于 r 的函数, 从而

$$\mathbf{F} = \nabla u(r) = u'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

由于当 $r \neq 0$ 时恒有 $\nabla \bullet \mathbf{F} \equiv 0$, 故对任意不包含原点的封闭光滑曲面 Σ , 设其所围区域为 Ω , 都成立

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV \equiv 0$$

而原点是 \mathbf{F} 的“奇点”, 我们“挖去”一个以原点为球心, 半径为 ϵ 的小球 B_ϵ , 并设其边界球面 $S_\epsilon = \partial B_\epsilon$ 的定向朝外侧. 则对任意包含原点的曲面 Σ , 定向取外侧, 记 Ω 为 Σ 和 S_ϵ 所包裹区域.

在 Ω 上运用 *Gauss* 公式, 得

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} \xrightarrow{\text{根据假设}} e$$

代入 $\mathbf{F} = u'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, 得到

$$\begin{aligned} e &= \iint_{S_\epsilon} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{S_\epsilon} u'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \bullet d\mathbf{S} = \iint_{S_\epsilon} u'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \bullet \mathbf{n}^0 dS \\ &= \iint_{S_\epsilon} u'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \bullet \frac{\mathbf{r}}{r} dS \xrightarrow{\mathbf{r} \bullet \mathbf{r} = r^2} \iint_{S_\epsilon} u'(r) dS \xrightarrow{\text{球面上 } r = \epsilon} \\ &= \iint_{S_\epsilon} u'(\epsilon) dS = u'(\epsilon) \times 4\pi\epsilon^2 \implies u'(\epsilon) = \frac{e}{4\pi\epsilon^2} \quad (\epsilon > 0) \end{aligned}$$

从而可知

$$\mathbf{F} = u'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{e}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{e}{4\pi r^3} \mathbf{r} \quad (r > 0) \quad \square$$

9.5 拉普拉斯算子、格林等式与调和函数的平均值性质 (*)

利用矢量微分算子 $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$, 场论中很多重要算子可得到简洁表述, 比如

$$1. \text{ 梯度: } \mathbf{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right);$$

$$2. \text{ 散度: } \mathbf{div} \mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \text{ 其中 } \mathbf{F} = (P, Q, R);$$

$$3. \text{ 旋度: } \mathbf{curl} \mathbf{F} = \mathbf{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \text{ 其中 } \mathbf{F} = (P, Q, R).$$

上面三种矢量微分算子都是一阶算子, 即其运算涉及一阶导数, 且它们都是“类导数”算子, 即都满足线性性以及求导的“莱布尼茨法则”, 事实上, 可证明下面的等式.

$$\text{i) } \mathbf{grad}(kf + lg) = k\mathbf{grad}f + l\mathbf{grad}g; \quad \mathbf{grad}(fg) = f\mathbf{grad}g + (\mathbf{grad}f)g;$$

$$\text{ii) } \mathbf{div}(k\mathbf{A} + l\mathbf{B}) = k\mathbf{div}\mathbf{A} + l\mathbf{div}\mathbf{B}, \quad \mathbf{div}(u\mathbf{F}) = u\mathbf{div}\mathbf{F} + \mathbf{grad}u \bullet \mathbf{F};$$

$$\text{iii) } \mathbf{rot}(k\mathbf{A} + l\mathbf{B}) = k\mathbf{rot}\mathbf{A} + l\mathbf{rot}\mathbf{B}, \quad \mathbf{rot}(u\mathbf{F}) = u\mathbf{rot}\mathbf{F} + \mathbf{grad}u \times \mathbf{F}.$$

比较常用的还有如下等式

$$\text{a) } \mathbf{grad}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\mathbf{rot} \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\mathbf{rot} \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \bullet \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \bullet \nabla) \mathbf{B};$$

$$\text{b) } \mathbf{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \bullet \mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \bullet \mathbf{rot} \mathbf{B};$$

$$\text{c) } \mathbf{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \mathbf{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \bullet \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \bullet \nabla) \mathbf{B}.$$

核心的性质来自“外微分两次为零”: $d^2 \equiv 0$, 即对 \mathbb{R}^3 上的函数 u 和向量场 \mathbf{F} , 有

$$\mathbf{rot} \mathbf{grad} u = \mathbf{0} \quad (\nabla \times \nabla u = \mathbf{0}); \quad \mathbf{div} \mathbf{rot} \mathbf{F} = 0 \quad (\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0)$$

换言之, 梯度场无旋; 旋度场无源. 最重要的二阶微分算子是所谓拉普拉斯(*Laplace*)算子 Δ , 在 \mathbb{R}^3 中, 它可表示为

$$\Delta u = \mathbf{div}(\mathbf{grad} u) = \nabla \bullet (\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

即 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. 满足 $\Delta u = 0$ 的函数称为调和函数 (*harmonic function*)

例 9.5.1 设 u 是 \mathbb{R}^3 中的径向函数, 即它可写成 $u(r)$ 的形式, 其中 r 为位置向量 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 的长度, 则如果它是调和函数, 那么

$$\begin{aligned}\Delta u &= \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \left(f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \xrightarrow{\text{利用公式 } ii)} \frac{f'(r)}{r} \operatorname{div} \mathbf{r} + \\ &+ \operatorname{grad} \frac{f'(r)}{r} \bullet \mathbf{r} = \frac{3f'(r)}{r} + \left[\frac{f''(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^2} \right] \frac{\mathbf{r}}{r} \bullet \mathbf{r} \\ &= f''(r) + 2 \frac{f'(r)}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(r) = \frac{C}{r} + C_0\end{aligned}$$

这便是 \mathbb{R}^3 中的径向调和函数所具有的形式. 但在 \mathbb{R}^2 中, 由于 $\operatorname{div} \mathbf{r} = 2$, 故其上的径向调和函数的形式是 $f(r) = C_1 \ln r + C_0$

我们知道分部积分是个利器, 它不仅仅是重要的积分手段, 更在于它如同牛顿-莱布尼茨公式那样, 也是联系高维积分及其在边界上的低一维度积分的枢纽; 而且, 更重要地, 它还将微分运算的根本特征——莱布尼茨法则, 也直接考量在内了. 怪道其能化巧于无形, 原是集成了诸核心.

分部积分基本模式: $d(fg) = f dg + g df \quad \Rightarrow \quad \int_a^b d(fg) = \int_a^b f dg + \int_a^b g df$, 即

$$\int_a^b f dg = fg \Big|_a^b - \int_a^b g df \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b fg' dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b gf' dx$$

换言之, 只要有类“莱布尼茨法则”的结构, 那么两边积分即可得到对应的“分部积分”结构. 比如对 $\operatorname{div}(u\mathbf{F}) = u \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{grad} u \bullet \mathbf{F}$ 两边在区域 Ω 上积分, 得到

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(u\mathbf{F}) dV = \iiint_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{F} dV + \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} u \bullet \mathbf{F} dV$$

左边利用 *Gauss* 公式后整理可得

$$\iiint_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_{\partial\Omega} (u\mathbf{F}) \bullet d\mathbf{S} - \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} u \bullet \mathbf{F} dV$$

便是在“分部积分基本模式”之上的一种“变奏”. 该“变奏”中已然浮现出很深刻的内涵, 它将对向量场 \mathbf{F} 的“导数” $\operatorname{div} \mathbf{F}$ 转化为了对函数 u 的“导数” $\operatorname{grad} u$.

这表明, 即便 $\operatorname{div} \mathbf{F}$ 是性质不好的函数, 但通过与性质好的函数 u 作乘积后积分, 由于右边都是对性质好的函数的积分, 便可借此消弭 $\operatorname{div} \mathbf{F}$ 本身的不好性质. 这可看做是一般分布理论 (*distribution theory*) 或广义函数 (*generalized function*) 理论的滥觞.

为了得到关于拉普拉斯算子 Δ 的作用信息，我们借助下面的类“莱布尼茨法则”

$$\nabla \bullet (v \nabla u) = \nabla v \bullet \nabla u + v \Delta u$$

两边在区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 上积分，得到

$$\iiint_{\Omega} \nabla \bullet (v \nabla u) dV = \iiint_{\Omega} (\nabla v \bullet \nabla u) dV + \iiint_{\Omega} v \Delta u dV$$

对左边的积分利用 *Gauss* 公式，得 $\iiint_{\Omega} \nabla \bullet (v \nabla u) dV = \oint_{\partial\Omega} (v \nabla u) \bullet d\mathbf{S}$

$$= \oint_{\partial\Omega} v \nabla u \bullet \mathbf{n}^0 dS \quad (\text{其中 } \mathbf{n}^0 \text{ 为曲面 } \partial\Omega \text{ 的外单位法向量})$$

$$\frac{\text{利用方向导数的定义}}{\frac{\partial}{\partial n} := \nabla \bullet \mathbf{n}^0 \text{ 为沿外法向的方向导数}} \quad \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

代入后整理即得著名的**第一格林 (Green) 恒等式**:

$$\boxed{\iiint_{\Omega} (\nabla u \bullet \nabla v) dV = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} v \Delta u dV} \quad (9.5.1)$$

调换 u, v 的位置 (假设 u, v 都在 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上具有直到二阶的连续偏导数)，同理可得

$$\iiint_{\Omega} (\nabla u \bullet \nabla v) dV = \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} u \Delta v dV$$

上面两式相减，变得到**第二格林恒等式**:

$$\boxed{\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dV = \oint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS} \quad (9.5.2)$$

特别地，在第一格林恒等式中令 $v \equiv 1$ ，得到 $\iiint_{\Omega} \Delta u dV = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS$. 这个公式的二维情形我们在 9.2 节的例 9.2.5 中直接证明过。注记 9.2.1 中的结论显然可直接推广到这里的三维情形，即：

对以分片光滑的封闭曲面 Σ 为边界的任意 \mathbb{R}^3 中的区域 Ω ，设 $u(x, y, z)$ 在 Ω 及其

边界上有二阶连续偏导数，且它在 Ω 及其边界上调和，即 $\Delta u \equiv 0$ ，则成立

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_{\Sigma} \nabla u \bullet d\mathbf{S} \equiv 0$$

反之也可证明，对曲面连通区域 Ω 内的任意区域 Σ ，如果上公式都成立，则 u 在 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上调和。而上积分为零表明： u 沿着 Ω 中各个方向的平均变化率为零，而这又等价于 $\Delta u = 0$ 。故我们有理由相信拉普拉斯算子 Δ 的作用是衡量 u 在一点的值和它在其近旁的平均之间的差异的。这可从下面的命题中见出端倪。

命题 9.5.1 设 $u(x, y, z)$ 在以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为中心，以 R 为半径的球 $B_R(M_0)$ 及其边界上二阶连续可微，且对于任意 $\rho : 0 < \rho \leq R$ ，都有 $\iint_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$ ，其中 \mathbf{n} 是球面 $\partial B_\rho(M_0)$ 的外法向量，则 $u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial B_R(M_0)} u(x, y, z) dS$ 。即函数在球心的值等于其在球面上的积分平均值。

证明：令 $\begin{cases} x = x_0 + \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \\ z = z_0 + \rho \cos \varphi \end{cases}$ 则在 $\partial B_\rho(M_0)$ 上成立

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \nabla u \bullet \mathbf{n}^0 = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{x - x_0}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{y - y_0}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{z - z_0}{\rho} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{du}{d\rho}(M_0 + \rho \mathbf{n}^0) \end{aligned}$$

从而

$$0 = \iint_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{du}{d\rho}(M_0 + \rho \mathbf{n}^0) dS$$

下面我们将积分从球面 $\partial B_\rho(M_0)$ 转为以原点为球心的单位球面 $\partial B_1(\mathbf{0})$ 上。由于单位球面上的面元为 dS_1 和 $\partial B_\rho(M_0)$ 上面元 dS 的关系是 $dS_\rho = \rho^2 dS_1$ ，从而

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\partial B_\rho(M_0)} \frac{du}{d\rho}(M_0 + \rho \mathbf{n}^0) dS_\rho = \rho^2 \iint_{\partial B_1(\mathbf{0})} \frac{du}{d\rho}(M_0 + \rho \mathbf{n}^0) dS_1 \\ &= \rho^2 \frac{d}{d\rho} \iint_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(M_0 + \rho \mathbf{n}^0) dS_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\rho} \iint_{\partial B_1(\mathbf{0})} u(M_0 + \rho \mathbf{n}^0) dS_1 = 0 \end{aligned}$$

从而 $\frac{d}{d\rho} \left(\rho^{-2} \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{0})} u(M_0 + \rho \mathbf{n}^0) dS_\rho \right) = 0$, 其中 $d\rho = \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$ 是球面 $\partial B_\rho(\mathbf{0})$ 上的面积元. 由此可知, 对 $0 < \rho \leq R$, 我们有

$$\rho^{-2} \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{0})} u(M_0 + \rho \mathbf{n}^0) dS_\rho = R^{-2} \iint_{\partial B_R(\mathbf{0})} u(M_0 + R \mathbf{n}^0) dS_R$$

而另一方面, 当 $\rho \rightarrow 0^+$ 时, 有 $\rho^{-2} \iint_{\partial B_\rho(\mathbf{0})} u(M_0 + \rho \mathbf{n}^0) dS_\rho \rightarrow 4\pi u(M_0)$. 结合 $\rho = R$ 和 $\rho \rightarrow 0^+$ 时的情形, 可知命题成立. \square

注记 9.5.1 拉普拉斯算子 Δ 衡量“函数值和其局部平均值的差异”也可由其离散近似看出. 首先, 当 h 很小时, 可用下面的中心差商来近似计算偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在 (x, y) 处的值

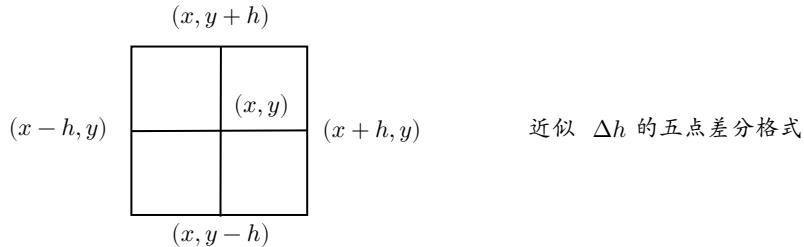
$$\frac{u\left(x + \frac{h}{2}, y\right) - u\left(x - \frac{h}{2}, y\right)}{h}$$

同理对 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)$, 它有近似 $\frac{1}{h} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \left(x + \frac{h}{2}, y \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(x - \frac{h}{2}, y \right) \right) \approx$

$$\frac{\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} - \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h}}{h} = \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2}$$

同理, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) \approx \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2}$, 从而 Δh 有如下近似

$$\Delta_h u(x, y) := \frac{u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2}$$



显然, $\Delta_h u(x, y)$ 涉及对函数在 (x, y) 点处四个方位上的平均, 故若 $\Delta u(x, y) = 0$,

则

$$u(x, y) = \frac{u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h)}{4}$$

即 u 在 (x, y) 处的值等于其在周边“四个方位”处值的平均. 故调和函数的变化具有“均衡”特性. 这也可从下面“热传导”模型的讨论中看出来.

注记 9.5.2 设 $U(x, y, z, t)$ 是某一均匀介质 (密度为 ρ) 上的无热源温度场. 对场内任意区域 Ω , 设其边界的定向为外侧. 由于热量是从介值中较热处流向较冷的区域, 即热流的方向是 $-\text{grad } U$, 故单位时间内流过边界曲面 $\partial\Omega$ 上 dS 面元的热量 (微元) 为

$$dQ = -k(\text{grad } U)dS dt = -k(\text{grad } U) \bullet \mathbf{n}^0 dS dt$$

其中 \mathbf{n}^0 为曲面 $\partial\Omega$ 的外单位法向量, 而 k 为介值的热传导系数. 故时间 dt 内自 Ω 通过 $\partial\Omega$ 向外流出的热量为

$$Q = -kdt \iint_{\partial\Omega} \text{grad } U \bullet d\mathbf{S} \xrightarrow{\text{Gauss 公式}} -kdt \iiint_{\Omega} (\text{div}(\text{grad } U)) dV$$

另一方面, 对于 Ω 内体积为 dV 的立体唯一, 在时间 dt 内温度改变为 $dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt$ 所需要的热量为

$$cdU \rho dV = c \frac{\partial U}{\partial t} dt \rho dV$$

其中 c 为介质的比热. 那么在时间 dt 内的温度改变需要的热量为 $dt \iiint_{\Omega} c \rho \frac{\partial U}{\partial t} dV$.

由于场内无热源, 所以流出与流入的热量必相等, 即

$$kdt \iiint_{\Omega} \text{div}(\text{grad } U) dV = dt \iiint_{\Omega} c \rho \frac{\partial U}{\partial t} dV$$

故 $\iiint_{\Omega} \left(c \rho \frac{\partial U}{\partial t} - k \text{div}(\text{grad } U) \right) dV = 0$. 由于 Ω 的任意性, 故在场内必成立

$$c \rho \frac{\partial U}{\partial t} = -k \text{div}(\text{grad } U) = 0$$

由于 $\text{div}(\text{grad } U) = \Delta U$, 故上方程可写为 $\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U}$ 其中 $a^2 = \frac{k}{c \rho}$. 该

方程称为热传导方程. 当温度场 U 为稳定场 (即与时间无关的场) 时, 上方程就是拉普拉斯方程: $\Delta U = 0$. 即稳定温度场的温度分布具有“均衡性”, 即每点处的值等于其在以该点为球心的球面上的值的平均.

下面推广命题 9.5.1, 即考虑 $u(M_0)$ 和在包含它的任意封闭曲面 Σ 上积分的关系.

定理 9.5.1 设区域 Ω 为由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成, $u(x, y, z)$ 为在 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 上具有二阶连续偏导数, 且在 Ω 及 $\partial\Omega$ 上调和. 设 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ 为区域中一定点, 证明

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

其中 $\mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $r = \|\mathbf{r}\|$.

注记 9.5.3 特别地, 当 Σ 为以 (x_0, y_0, z_0) 为球心, 以 R 为半径的球面时, 此时

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} dS \equiv 0$$

故 $u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} u \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma} u dS$, 即得到命题 9.5.1.

证明: 令 $u = \frac{1}{r}$, $v = u$, 将其代入格林第二等式, 得到

$$\iint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) dS = - \iiint_{\Omega} u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV$$

而

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \bullet \mathbf{n}^0 = -\frac{\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}^0}{r^{3/2}} = -\frac{\mathbf{r}^0 \bullet \mathbf{n}^0}{r^2} = -\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2}$$

且当 $r \neq 0$ 时, $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$, 故为了处理右边的三重积分, 我们“挖去”以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为心, 以 r 为半径的一个小球 $B_{M_0}(r)$, 其边界球面 $\partial B_{M_0}(r)$ 的定向选外侧, 并记 Ω' 为球面 $\partial B_{M_0}(r)$ 和 $\partial\Omega$ 之间所围的区域, 则

$$\iiint_{\Omega} u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV = \underbrace{\iiint_{\Omega'} u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV}_{=0} + \iiint_{B_{M_0}(r)} u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV$$

当 $r \rightarrow 0^+$ 时, $u(x, y, z) \rightarrow u(x_0, y_0, z_0)$, 故 $\forall \epsilon, \exists \delta > 0$, 使得当 $r < \delta$ 时成立 $|u(M) - u(M_0)| = |u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0)| < \epsilon$, 又因为

$$\iiint_{B_{M_0}(r)} u(M) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV = \iiint_{B_{M_0}(r)} (u(M) - u(M_0)) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV + \iiint_{B_{M_0}(r)} u(M_0) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV$$

故

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{B_{M_0}(r)} u(M) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV \right| &\leq \iiint_{B_{M_0}(r)} |(u(M) - u(M_0))| \left| \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \right| dV + \\ &+ \left| \iiint_{B_{M_0}(r)} u(M_0) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV \right| \rightarrow \left| \iiint_{B_{M_0}(r)} u(M_0) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV \right| \end{aligned}$$

同理可证反向的不等式，故当 $r \rightarrow 0$ 时，所求积分实际上是

$$\begin{aligned} u(M_0) \iiint_{B_{M_0}(r)} \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV &= u(M_0) \iiint_{B_{M_0}(r)} \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dV \\ &\xrightarrow{\text{Gauss 公式}} u(M_0) \iint_{\partial B_{M_0}(r)} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \bullet \mathbf{n}^0 dS = u(M_0) \iint_{\partial B_{M_0}(r)} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ &= -u(M_0) \iint_{\partial B_{M_0}(r)} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS \xrightarrow{\text{例 9.2.6}} -4\pi u(M_0) \quad \square \end{aligned}$$

注记 9.5.4 注意我们在上面计算中用到了 Gauss 积分的结果，即若 Σ 是任意光滑封闭曲面，其定向由外法向量 \mathbf{n} 为准的外侧，则其相对于固定的 M_0 所张成的立体角为

$$\iint_{\Sigma} \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2} dS = \begin{cases} 4\pi, & M_0 \text{ 包含在 } \Sigma \text{ 之内;} \\ 0, & M_0 \text{ 在 } \Sigma \text{ 之外.} \end{cases}$$

从而形式地，有 $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(M_0 - M)$. 故可见

$$\iiint_{\Omega} u(M) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dV = -4\pi \iiint_{\Omega} u(M) \delta(M_0 - M) dV = -4\pi u(M_0)$$

调和函数的极值原理：调和函数的均值性质 (c.f. 命题 9.5.1) 蕴含着一区域上的非常数调和函数的极值只能在其边界上取到，即有

定理 9.5.2 设 $u(M)$ 是 Ω 上的不恒为常数的调和函数，则 u 在 Ω 的任何内点上的值不可能达到其在 Ω 上的上界或下界；若 Ω 有界，若 u 在 $\Omega \cup \partial\Omega$ 上连续，且在 Ω 内调和，则 u 的最值只能在 $\partial\Omega$ 上取到。

证明：设 $u(M)$ 不为常数，且在区域的内点 $M_0 \in \Omega$ 上取到其最大值 K ，则 \exists 以 M_0

的球面 S_r , 在其上 $u(M) < K$, 则由平均值公式有

$$K = u(M_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} u(x, y, z) dS < \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} K dS = K$$

这是一个矛盾, 故原假设不成立. \square

推论 9.5.1 若有界区域 Ω 上的调和函数 u 在区域中某内点取到最值, 则它必为常数.

推论 9.5.2 如果 u 和 v 是有界区域 Ω 上的调和函数, 且它们在边界 $\partial\Omega$ 上的值相同, 即 $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$, 则在 Ω 上 $u \equiv v$.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的 Poisson 问题: 求解 u 使得
$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

该问题具有现实的物理背景, 即求解区域 Ω 上有电荷密度 f 决定的电势 u , 同时电场强度 $\mathbf{E} = -\nabla u$ 的法向分量 $\mathbf{E}_u := -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ 为 h .

在格林第一等式中令 $v = 1$, 则得到 $\iiint_{\Omega} fdV = \iint_{\partial\Omega} hdS$, 即 Ω 中的总电荷同场强的法向分量在区域边界上的平均成正比.

Poisson 问题的解的唯一性: 设 u_1, u_2 都是 Poisson 问题的解, 记 $w = u_1 - u_2$, 则在 Ω 上 $\Delta w = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上 $w = 0$, 则由格林第一等式, 得到

$$0 = \iiint_{\Omega} w \Delta w dV = - \iiint_{\Omega} ||\nabla w||^2 dV + \iint_{\partial\Omega} w \frac{\partial u}{\partial n} dS = - \iiint_{\Omega} ||\nabla w||^2 dV$$

故 $w \equiv 0$, 从而 w 为常数 0, 即在 Ω 上有 $u_1 = u_2$.

对有界区域 Ω 上的函数 u , 我们定义其能量为 $E[u] = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} ||\nabla u||^2 dV$

Dirichlet 原理: 如果 u 是上述 Poisson 问题的解, 则对任意满足 $v|_{\partial\Omega} = h$ 的函数 v , 都有 $E[u] \leq E[v]$. 该原理也称为调和函数的能量最小原理.

证明: 同前, 令 $w = v - u$, 则 $w|_{\partial\Omega} = 0$, 故 $E[w] = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} ||\nabla u + \nabla w||^2 dV =$

$$\begin{aligned} E[u] + E[w] + \iiint_{\Omega} \nabla u \bullet \nabla w dV &\stackrel{\text{格林等式}}{=} E[u] + E[w] - \iiint_{\Omega} (\Delta u) w dV + \iint_{\partial\Omega} w \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ &= E[u] + E[w] \geq E[u] \quad \square \end{aligned}$$

10 附录：引力场的泊松方程

设物体占据空间为 Ω , 其密度为 $\mu(\mathbf{r}')$ (其中 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$), 由于它的引力, 在 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 处质量为 m 的质点获得势能 $V(\mathbf{r}) = mU(\mathbf{r})$, 其中引力势为

$$U(\mathbf{r}) = -k \iiint_{\Omega} \frac{\mu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (d\mathbf{r}' = dx' dy' dz')$$

首先, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}')'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

再注意到: $\Delta f = \nabla \bullet (\nabla f)$, 即将 ∇ 看成矢量算子 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, 从而

$$\nabla \bullet (\nabla f) = \nabla \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

故有

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) &= \nabla \bullet \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla \bullet \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= -\frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

显然, 当 $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ 时, 上面的结果为零, 从而可知此时 U 满足拉普拉斯方程. 当 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 时, 上式是两无穷大之差, 为确定其值, 考虑以 \mathbf{r}' 为中心, 半径为 ϵ 的球体 $\Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)$, 在其上积分, 有

$$\iiint_{\Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV \xrightarrow{dV=dx dy dz} \iiint_{\Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)} \nabla \bullet \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV \xrightarrow{\text{Gauss 公式}}$$

$$\iint_{\partial \Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)} \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \bullet d\mathbf{S} = \iint_{\partial \Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \bullet d\mathbf{S} = -\frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\partial \Omega_{\mathbf{r}'}(\epsilon)} dS = -4\pi$$

故对任意包含 \mathbf{r}' 的封闭区域 Ω , 都成立

$$\iiint_{\Omega} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV = -4\pi$$

而若 Ω 不包含 \mathbf{r}' , 成立

$$\iiint_{\Omega} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV = 0$$

从而

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

其中 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 是三维 δ 函数, 即它满足下关系

$$\iiint_{\Omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \begin{cases} 1, & \text{若 } \Omega \text{ 包含 } \mathbf{r}' \\ 0, & \text{若 } \Omega \text{ 不包含 } \mathbf{r}' \end{cases}$$

显然 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$, 故有 (记 $dV' = dx' dy' dz'$)

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}') dV &= \iiint_{\Omega_{\epsilon}(\mathbf{r}')} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}') dV' + \underbrace{\iiint_{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}(\mathbf{r}')} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}') dV'}_{\equiv 0} \\ &= \iiint_{\Omega_{\epsilon}(\mathbf{r}')} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mu(\mathbf{r}') dV' = \mu(\mathbf{r}) \quad (\text{通过考虑极限 } \epsilon \rightarrow 0 \text{ 可知}) \end{aligned}$$

故可得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \Delta \left(\frac{\mu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' &= \iiint_{\Omega} \mu(\mathbf{r}') \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + \underbrace{\iiint_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Delta \mu(\mathbf{r}') dV'}_{\equiv 0} \\ &\quad - 4\pi \iiint_{\Omega} \mu(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -4\pi \mu(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

从而可得

$$\Delta U(\mathbf{r}) = -k \iiint_{\Omega} \Delta \left(\frac{\mu(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = -4\pi k \mu(\mathbf{r})$$

从而得知 $U(\mathbf{r})$ 满足泊松方程.