作业　十一

1. 讨论下列反常积分的敛散性，如果收敛求出它的值:

$$a)\ \int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x};\qquad b)\ \int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$$

$$c)\ \int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx;\qquad d)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}$$

$$e)\ \int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx;\qquad f)\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(4+x)}$$

2. 判断下列反常积分的敛散性，如果收敛求出它的值:

$$a)\ \int_{-1}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{1+x}};\qquad b)\ \int_0^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$$

$$c)\ \int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}};\qquad d)\ \int_{1/2}^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}}$$

3. 设 $k\in\mathbb{R}$，讨论 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 的敛散性.

4. 求下列曲线所围成的图形的面积.

$a)$ $x^2+3y^2=6y$ 与直线 $y=x$ (两部分都要计算)

$b)$ 抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的面积；

$c)$ 曲线 $y=e^x$ 与通过坐标原点的切线及 y 轴所围成的图形.

5. 用两种方法计算心脏线所围成图形的面积

$a)$ 参数式：$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t)\\ y=a(2\sin t-\sin 2t)\end{cases}$ ；　$b)$ 极坐标下：$r=2a(1-\cos\theta)\,(a>0)$

6. 求双纽线 $r^2=4\cos 2\theta$ 位于第一象限部分上求一点 M，使得坐标原点 O 与点 M 的连线 OM 将双纽线所围成的位于第一象限部分的图形分

为面积相等的两部分.

7. 求下曲线所围成的图形的公共部分的面积：$r=3\cos\theta$，$r=1+\cos\theta$

8. 求由笛卡尔叶形线 $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$ 所围图形的面积.

9. 求下列各立体的体积:

   (a) 以椭圆域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 为底面，且垂直于长轴的截面都是等边三角形的立体;

   (b) 由曲面 $y^2+z^2=e^{-2x}$ 与平面 $x=0, x=1$ 所围成的立体.

10. 求下列各旋转体的体积:

    (a) 曲线 $y=\sin x$，$y=\cos x$ $\left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得到的旋转体;

    (b) 摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 的第一拱（$0\le t\le 2\pi$）与 x 轴所围成的图形绕直线 $y=2a$ 旋转所得的旋转体.

11. 用“薄壳法”求下列各旋转体的体积:

    (a) 由曲线 $y=x(x-1)^2$ 与 x 轴所围绕的图形绕 y 轴旋转所得到的旋转体.

    (b) 由抛物线 $y=2x-x^2$ 与直线 $y=x$ 及 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得的旋转体.

12. 求下列各旋转体的面积:

    (a) 立方抛物线 $y=x^3$ 介于 $x=0$ 与 $x=1$ 之间的一段弧绕 x 轴旋转所得到的旋转门.

    (b) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转面.

13. 求抛物线 $y=\sqrt{x-1}$ 与它的通过坐标原点的切线及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的表面积.

14. 计算下列各弧长:

(a) 曲线 $y=\ln(\cos x)$ 上从 $x=0$ 到 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 的一段弧长.

(b) 曲线 $x=\arctan t$, $y=\dfrac{\ln(1+t^2)}{2}$ 相应于 $0\le t\le 1$ 的一段弧.

(c) 曲线 $\theta=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$ 相应于 $1\le r\le 3$ 的一段弧.

15. 设 $f\in C[0,1]$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$，并且满足关系式 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$ (a 为常数)，又曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的图形 S 的面积为 2.

(a) 求函数 $f(x)$;

(b) 当 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积最小?