

## 第二章：函数的极限与连续性

### 目录

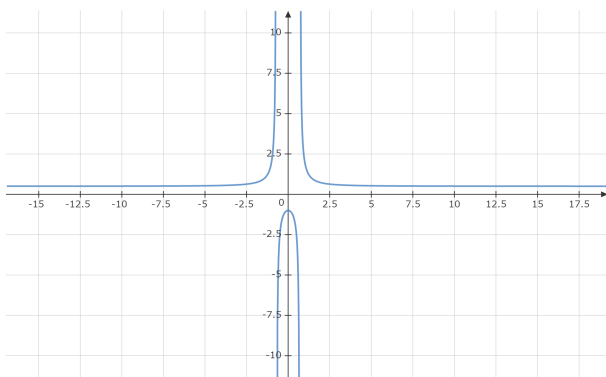
1 函数的极限	2
2 海涅定理，函数极限的性质及运算法则	7
3 两个基本极限及极限计算举例 I	13
4 无穷小量与无穷大量的阶及其比较	17
5 无穷小（大）等价代换与极限计算举例 II	23
6 函数的连续性	28
7 不连续点（间断点）的类型	32
8 闭区间上连续函数的性质	33
9 附录一：极限与渐近线	39
10 附录二：无穷小的阶的运算	41
11 附录三：反函数连续性定理的证明	43

## 第二章：函数的极限与连续性

### 1 函数的极限

数列是特殊的函数，即定义域是  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$  的函数. 特别地，如果数列  $\{x_n\}$  可写成  $x_n = f(n)$  的形式，则求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  的问题相当于探讨函数  $f(x)$  当  $x$  趋向正无穷  $+\infty$  时的性状.

比如，我们知道  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 1} = \frac{1}{2}$ . 它对应为函数  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1}$  当  $x \rightarrow \infty$  时的取值可无限逼近于  $\frac{1}{2}$ ，即  $y = \frac{1}{2}$  是函数  $f(x)$  的图像（曲线）的一条渐近线（*asymptotic line*）. 见下图所示.



我们可以仿照数列极限的定义逻辑而给出  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  的极限的定义.

**定义 1.1** 设函数  $f(x)$  在  $|x| > a$ （其中  $a$  为固定正常数）时有定义，若存在实数  $A, \forall \epsilon > 0, \exists X > 0 (X > a)$ ，使得当  $|x| > X$  时，有  $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称当  $x$  趋向无穷时，函数  $f(x)$  有极限  $A$ ，或  $f(x)$  在  $x$  趋于无穷时收敛于  $A$ . 记为  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

设函数  $f(x)$  在  $x > a$ （ $a$  为固定常数）时有定义，若存在实数  $A, \forall \epsilon > 0, \exists X > a$ ，使得当  $x > X$  时，有  $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称当  $x$  趋于正无穷时，函数  $f(x)$  有极限  $A$ ，记为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ；同理，设函数  $f(x)$  在  $x < a$ （ $a$  为固定常数）时有定义，若存在实数  $A, \forall \epsilon > 0, \exists X < a$ ，使得当  $x < X$  时，有  $|f(x) - A| < \epsilon$ ，则称当  $x$  趋于负无穷时，函数  $f(x)$  有极限  $A$ ，记为  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ .

**注记 1.1** 在上定义的背景下，如果  $\forall A > 0, \exists X > 0 (X > a)$ ，使得当  $|x| > X$  时，有  $|f(x)| > A$ ，则称  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时是无穷大，记为  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

**注记 1.2** 由定义 1.1 可见:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , 当且仅当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ .

**例 1.1** 我们用定义 1.1 严格证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ .

**证明:** 由于

$$\frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2(2x^2 - 1)} < \frac{3}{2x^2} \quad (x > 1)$$

故  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $X = \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{3}{2\epsilon}} \right\}$ , 则当  $|x| > X$  时, 有  $|f(x) - \frac{1}{2}| =$

$$= \left| \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2x^2} < \frac{3}{2X^2} < \epsilon \quad \square$$

**例 1.2**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$  极限不存在, 这是因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ .

**证明:**  $\forall \epsilon > 0$ , 要使

$$-\frac{\pi}{2} - \epsilon < \arctan x < -\frac{\pi}{2} + \epsilon$$

只须  $x < \tan(-\frac{\pi}{2} + \epsilon)$ . 故取  $X = \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon) > 0$ , 则当  $x < -X$  时, 有  $|\arctan x + \frac{\pi}{2}| < \epsilon$ , 即证得  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ . 同理可证  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ .  $\square$

**例 1.3** 如果  $k$  是正整数, 则不难推测  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$ , 下面是其严格证明.

**证明:**  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $X = \epsilon^{-\frac{1}{k}}$ , 则当  $|x| > X$  时, 有

$$\left| \frac{1}{x^k} - 0 \right| = \frac{1}{|x|^k} < \frac{1}{X^k} = \frac{1}{\epsilon^{-1}} = \epsilon \quad \square$$

**例 1.4** 不难看出  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ . 下严格证之.

**证明:**  $\forall \epsilon \in (0, 1)$ , 取  $X = \ln \frac{1}{\epsilon} > 0$ , 则  $\forall x < -X$ , 有

$$0 < e^x < e^{-X} < \epsilon \quad \square$$

**例 1.5** 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1)$

**证明:**  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $X = \log_a \epsilon$  (不妨设  $\epsilon < 1$ , 则  $X > 0$ ), 则当  $x > X$  时有

$$|a^x - 0| = a^x < a^X = \epsilon \quad \square$$

一般地, 对函数  $f(x)$ , 若关注它当  $x \rightarrow a$  时  $f(x)$  取值的极限情形, 则需引入

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  的概念.

注意, 这里  $x = a$  不必在  $f(x)$  的定义域之中, 因为我们关注的是  $f(x)$  当  $x$  可以无限接近  $x = a$  的变化, 而不在乎其是否在  $f(x)$  处有定义.

记  $U(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  为  $x_0$  的  $\delta$  邻域;

记  $\dot{U}(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$  为  $x_0$  的去心  $\delta$  邻域.

**定义 1.2** 设  $f(x)$  在点  $a$  的一个去心邻域  $\dot{U}(a)$  内有定义, 若存在实数  $A$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ . 则称当  $x$  趋向于点  $a$  时, 函数  $f(x)$  的极限为  $A$ , 或  $f(x)$  收敛于  $A$ , 记为  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 或  $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow a)$ .

**注记 1.3** 上定义表明, 对任意小的  $\epsilon > 0$ , 总存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x$  落入任意半径小于  $\delta$  的  $a$  的去心邻域中时, 便可使  $f(x)$  落入  $f(a)$  的半径为  $\epsilon$  的邻域之内. 即  $\forall 0 < \delta' < \delta$ , 若  $x \in \dot{U}(a, \delta')$ , 则  $|f(x) - A| < \epsilon$ .

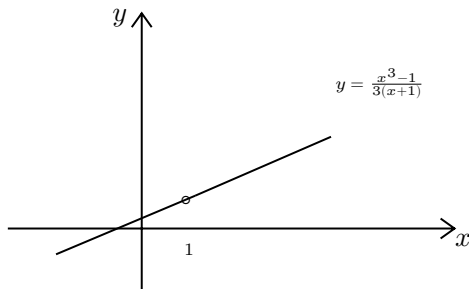
**例 1.6** 设  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3(x - 1)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{3(x - 1)}$ .

**分析:** 当  $x \rightarrow 1$  时, 由于  $x$  只要求与  $1$  可无限接近 ( $\forall \epsilon > 0$ , 即要多接近就多接近), 但不要求  $x = 1$ , 故在这一极限过程中, 函数的表达式可化简为  $f(x) = \frac{x+1}{3}$ . 也就是说, 虽然函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处没有定义, 但这不影响我们考察当  $x \rightarrow 1$  时函数的极限, 且在  $x$  无限接近  $1$  时, 函数的取值与  $\frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$  可无限接近, 故我们期待  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{3}$ . 下严格证之.

**证明:** 当  $x \neq 1$  时, 有

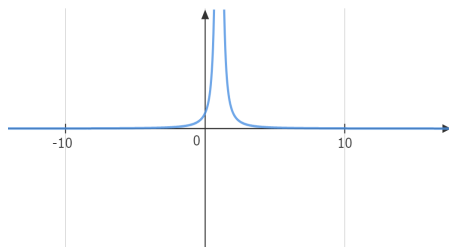
$$\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{x^2 - 1}{3(x - 1)} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{x + 1}{3} - \frac{2}{3} \right| = \frac{|x - 1|}{3}$$

故  $\forall \epsilon > 0$ , 要使  $|f(x) - \frac{2}{3}| = \frac{|x-1|}{3} < \epsilon$ , 只需  $|x - 1| < 3\epsilon$ . 故取  $\delta = 3\epsilon$ , 则当  $0 < |x - 1| < \delta$  时, 有  $|f(x) - \frac{2}{3}| < \epsilon$ .  $\square$ .



如果  $\forall A > 0$ ,  $\exists \delta_0 > 0$ , 使得当  $0 < |x - a| < \delta_0$  时, 有  $|f(x)| > A$ , 则称  $f(x)$  在  $a$  处为无穷大 (*infinitely large*), 记为  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

**例 1.7** 对  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ , 我们证明  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ , 由此知  $x = 1$  是其图像的一条 (铅直) 渐进线 (*asymptote*) (见下图) .



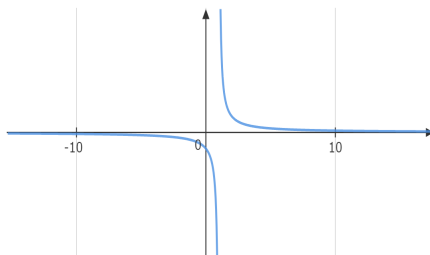
**证明:**  $\forall A > 0$ , 取  $\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{A}}$ , 则当  $x \in \dot{U}(1, \delta_0)$  时, 有  $|f(x)| = \frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{\delta_0^2} > A$  □.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  反映了当  $x$  从  $a$  的两侧趋向于  $a$  时, 函数取值的极限情形. 有时我们只关注当  $x$  从  $a$  的右边 ( $x > a$ ) 或从  $a$  的左边 ( $x < a$ ) 趋向于  $a$  是函数取值的极限情形. 故需下定义

**定义 1.3** 设函数  $f(x)$  在点  $a$  的一个右邻域  $(a, a + \delta_0)$  内有定义, 若存在实数  $A$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  ( $\delta < \delta_0$ ), 使得当  $a < x < a + \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 则称  $f(x)$  在  $a$  点的右极限 (*right limit*) 为  $A$ , 记为  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ , 或  $f(a+0) = A$ . 类似地可定义左极限 (*left limit*)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , 或  $f(a-0)$  的概念.

显然,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  当且仅当  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  都存在, 且其值都等于  $A$ .

**例 1.8** 设  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ , 则由其图像可见, 当  $x$  从 1 的右边无限接近  $x = 1$  时,  $f(x)$  变为正无穷大, 而从 1 的左边无限接近  $x = 1$  时,  $f(x)$  为负无穷, 故  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在.



**证明:**  $\forall A > 1$ , 取  $\delta = \frac{1}{A}$ , 则当  $x \in (1, 1 + \delta)$ , 即  $1 < x < 1 + \delta$  时, 有

$$f(x) = \frac{1}{x-1} > \frac{1}{\delta} = A \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty$$

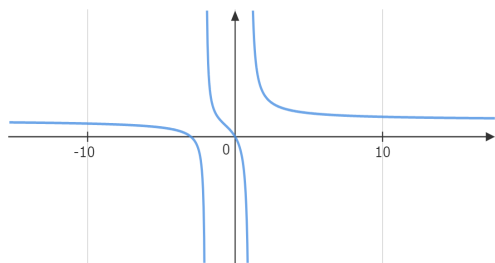
又  $\forall A > 1$ , 取  $\delta = \frac{1}{A}$ , 则当  $x \in (1 - \delta, 1)$ , 即  $1 - \delta < x < 1$  时, 有

$$f(x) = \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{\delta} = -A \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\infty \quad \square$$

**例 1.9** 对  $f(x) = \frac{x(x+3)}{(x-1)(x+2)}$ , 显然  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ . 下证

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -\infty$$

即  $x = 1$  和  $x = -2$  是函数图像的两条铅直渐近线 (*vertical asymptote*) .



**证明:** 只证明  $f(1+0) = +\infty$ . 限制  $x \in (1, 2]$ , 则  $\frac{x(x+3)}{x+2} \geq \frac{4}{3}$ . 故当  $x \in (1, 2]$  时

$$\frac{x(x+3)}{(x+2)(x-1)} > \frac{4}{3} \frac{1}{x-1}$$

则  $\forall A > 0$ , 为使  $f(x) > A$ , 只需  $x-1 < \frac{4}{3A}$ , 即取  $\delta = \min\{\frac{4}{3A}, 1\}$ , 则当  $x-1 < \delta$  时, 有  $f(x) > A$ .  $\square$

**定义:** 如果  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , 则称  $f(x)$  是  $x$  趋于  $a$  时的无穷小量, 简称无穷小, 记为  $f(x) = o(1) (x \rightarrow a)$ .

显然, 若在  $a$  的去心邻域  $f(x) \neq 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  当且仅当  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

**例 1.10** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 5)$ .

不难猜测极限为 6. 下证明之. 为方便分析当  $x \rightarrow 1$  时的表现, 我们用变量  $u = x - 1$  将函数在  $x = 1$  附近重新整理为下面的形式 (相当于, 为更好地聚焦  $x = 1$  附近函数的表现, 我们采用更恰当的坐标  $u$ )

$$x^2 + 5 = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 6$$

则易见当  $x \rightarrow 1$  时, 由于  $(x - 1)^2$  和  $x - 1$  皆是无穷小, 故  $x^2 + 5 \rightarrow 0 + 0 + 6 = 6$ . 故  $\forall \epsilon > 0$ , 我们希望找到  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - 1| < \delta$  (即  $x \in \mathring{U}(1, \delta)$ ) 时, 有

$$|x^2 + 5 - 6| = |x^2 - 1| = (x + 1)|x - 1| < \epsilon$$

显然, 当  $x$  在 1 的一个去心领域内变动时,  $x + 1$  总是有界量, 而  $x - 1$  当  $x \rightarrow 1$  时是无穷小. 则为方便估值, 不妨将  $\delta$  一开始就定于一个范围内, 比如  $\delta \leq 1$  (这不影响我们的证明, 因为我们只关心当  $x$  无限趋于 1 时函数的变动情况). 在此限定之下,  $x \leq 1 + \delta \leq 2$ , 即  $|x + 1| \leq 3$ . 从而  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{3}\}$ , 则当  $x \in \mathring{U}(1, \delta)$  时, 有

$$|x^2 + 5 - 6| = |x^2 - 1| = (x + 1)|x - 1| < 3|x - 1| < 3\delta < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \square$$

**例 1.11** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \sqrt{\frac{1}{1-x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{1-x} - 1} \right)$

**分析:** 函数表达式较复杂, 不易化简, 为此我们利用新变量  $y := \frac{1}{1-x}$ , 将函数表达为

$$\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} = \frac{2}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}}$$

显然, 当  $x \rightarrow 1^-$  时,  $y \rightarrow +\infty$ , 则不难看出所求极限为 0. 严格证明如下:

$\forall \epsilon > 0$ , 取  $M = 1 + \frac{4}{\epsilon^2}$ , 则当  $y > M$  时, 成立

$$0 < \sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} = \frac{2}{\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}} < \frac{2}{\sqrt{y-1}} < \epsilon \quad \square$$

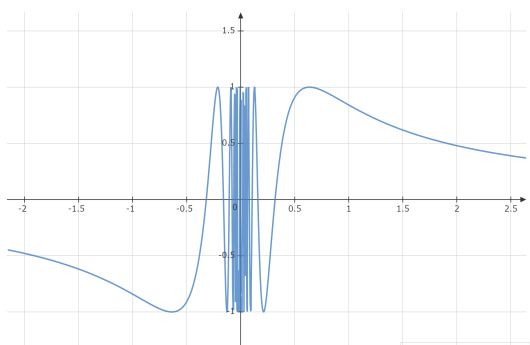
## 2 海涅定理, 函数极限的性质及运算法则

上节例 1.11 中的极限  $\lim_{y \rightarrow +\infty} (\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1})$  与第一讲的例  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$  的结构和结果都是一致的. 这不是巧合, 其关联机理凸显于下定理之中.

**定理 2.1** (海涅 (Heine))  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  的充分必要条件是任意满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 且  $x_n \neq a$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 的数列  $\{x_n\}$  均有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

海涅定理建立了函数极限同数列极限之间的关联, 通过该定理, 可利用数列极限求函数极限, 也可利用函数极限求数列极限. 常利用海涅定理来证明函数极限不存在.

**例 2.1** 对函数  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , 它当  $x \rightarrow 0$  时振荡频率越来越高, 以致于不能让它的值与某个固定的值可无限接近.



利用海涅定理, 假若  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在, 则对任意  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  存在且都相等. 但可取  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ ,  $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ , 显然它们的极限都是 0, 但  $f(x_n) = \sin 2\pi n = 0 \rightarrow 0$ ;  $f(y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \rightarrow 1$ . 从而与假设矛盾, 故  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

**例 2.2** 对迪利克雷函数  $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  我们利用海涅定理证明它在任一点都不存在极限. 给定  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 由于  $\mathbb{Q}$  的稠密性, 可找  $\mathbb{Q}$  中数列  $\{x_n\}$  使得  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ , 则  $D(x_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ; 同理, 可取一无理数数列  $\{y_n\}$  收敛于  $x_0$ , 但  $D(y_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . 故函数  $D(x)$  在任意  $x_0 \in \mathbb{R}$  都不存在极限.  $\square$

**海涅定理的证明:** “ $\Rightarrow$ ” 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 则  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得  $\forall x \in \dot{U}(a, \delta)$ , 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ . 又因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 且  $x_n \neq a (n = 1, 2, \dots)$ , 故对上述  $\delta > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\forall n > N$ , 成立  $0 < |x_n - a| < \delta$ . 故  $\forall n > N$ , 成立  $|f(x_n) - A| < \epsilon$ .

“ $\Leftarrow$ ” 用反证法, 假设  $f(x)$  在  $a$  处的极限不存在或存在但  $\neq A$ , 则  $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \dot{U}(a, \delta)$ , 有  $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$ . 故取一系列  $\delta_n = \frac{1}{n}$ , 从而有

$$\begin{aligned} & \text{对 } \delta_1 = 1, \exists x_1 \in \dot{U}(a, \delta_1), \text{ 使得 } |f(x_1) - A| \geq \epsilon_0; \\ & \quad \dots \quad \dots \\ & \text{对 } \delta_k = \frac{1}{k}, \exists x_k \in \dot{U}(a, \delta_k), \text{ 使得 } |f(x_k) - A| \geq \epsilon_0; \\ & \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

即找到趋向于  $a$  的数列  $\{x_n\}$ , 但  $f(x_n)$  不以  $A$  为极限, 矛盾.  $\square$

利用定义证明极限常常是繁琐的, 在实践中常利用极限的性质及其运算法则来计算极限. 函数极限的基本性质和运算法则和数列的情形是相似的, 其证明的思路和方法也是一致的.

**命题 2.1** (唯一性) 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 又  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ , 则  $A = B$ .

**证明:**  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2$ , 当  $0 < |x - a| < \delta_1$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon/2$ ; 当  $0 < |x - a| < \delta_2$  时, 有  $|f(x) - B| < \epsilon/2$ . 取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \square$$

**另证:** 利用海涅归结定理: 由于  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ , 根据海涅归结定理, 对任意满足  $x_n \neq a$ , 且  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  的数列, 皆有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$ , 问题则转为数列极限的唯一性了.  $\square$

**命题 2.2** (局部有界性) 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 使得函数在  $\dot{U}(a, \delta)$  内有界.

**证明:** 由于  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 故对  $\epsilon = 1, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < 1$ , 即当  $x \in \dot{U}(a, \delta)$  时, 有  $A - 1 < f(x) < A + 1$ . 取  $M = \max\{|A - 1|, |A + 1|\}$ , 则当  $x \in \dot{U}(a, \delta)$  时, 成立  $|f(x)| < M$ , 即有界.  $\square$

**命题 2.3** (局部保序性) 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , 且  $A > B$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(a, \delta)$  时, 成立  $f(x) > g(x)$ .

**证明:** 取  $\epsilon = \frac{A-B}{2}$ , 由  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 知  $\exists \delta_1 > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta_1$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 即有  $f(x) > A - \epsilon = \frac{A+B}{2}$ . 同理, 由  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , 知  $\exists \delta_2 > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta_2$  时, 有  $|g(x) - B| < \epsilon$ , 即有  $g(x) < B + \epsilon = \frac{A+B}{2}$ . 令  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有  $f(x) > \frac{A+B}{2} > g(x)$   $\square$

**推论 2.1** (局部保号性) 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 且  $A > 0 (A < 0)$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(a, \delta)$  时, 成立  $f(x) > \frac{A}{2} > 0 (f(x) < \frac{A}{2} < 0)$ .

**证明:** 在命题 2.2 的证明中, 令  $B = 0$ .  $\square$

**推论 2.2** 若  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $x \in \dot{U}(a, \delta)$  时, 有  $f(x) \geq 0 (f(x) \leq 0)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 则必有  $A \geq 0 (A \leq 0)$ .

**证明:** 假设  $A < 0$ , 由局部保号性知, 在  $a$  的一某去心领域内有  $f(x) < 0$ , 这与  $f(x)$  在  $\dot{U}(a, \delta)$  内不小于零相矛盾 (总可让 “某个去心领域” 包含于  $\dot{U}(a, \delta)$  之中)  $\square$

**定理 2.2** (函数极限的运算法则) 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ,  $h(x)$  在  $a$  的某个去心邻域内有界, 则有

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x) + lg(x)] = kA + lB$ , 其中  $k, l \in \mathbb{R}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = AB$ ;
3. 若  $A = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)h(x) = 0$ ;
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$  ( $B \neq 0$ );
5.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{k}{m}} = A^{\frac{k}{m}}$ , 其中  $k, m$  为正整数,  $m$  为偶数时  $f(x) \geq 0$  (当  $k < 0$  时, 通过  $[f(x)]^{\frac{k}{m}} = \frac{1}{[f(x)]^{-\frac{k}{m}}}$  解决, 故结论对有理数幂指数都成立) .

**证明:** 完全类似于对数列极限情形的证明. 记  $\alpha := f(x) - A$ ,  $\beta := g(x) - B$ . 则  $\alpha$  和  $\beta$  都是当  $x \rightarrow a$  时的无穷小量. 有

$$\text{对 1. } kf(x) + lg(x) = k(A + \alpha) + l(B + \beta) = kA + lB + k\alpha + l\beta \xrightarrow{x \rightarrow a} kA + lB$$

$$\text{对 2. } f(x)g(x) = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + A\beta + B\alpha + \alpha\beta \xrightarrow{x \rightarrow a} AB$$

对 3. 当  $f(x)$  是无穷小量,  $h(x)$  为有界量时, 即  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists M > 0$ , 使得当  $x \in \mathring{U}(a, \delta)$  时, 有  $|h(x)| \leq M$ , 且  $|f(x)| < \frac{\epsilon}{M}$ , 故有  $|f(x)h(x)| < \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon$

$$\text{对 4. } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A + \alpha}{B + \beta} = \frac{\frac{A}{B} + \frac{\alpha}{B}}{1 + \frac{\beta}{B}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{\frac{A}{B} + 0}{1 + 0} = \frac{A}{B}$$

对 5. 当  $m = 1$  时, 对正整数  $k$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^k \stackrel{2}{=} A^k$ ;  $k = 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^0 = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1 = A^0$ ; 对负整数  $k$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{[f(x)]^{-k}} \stackrel{\text{由 4}}{=} \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{-k}} \stackrel{\text{由正整数情形}}{=} \frac{1}{A^{-k}} = A^k$ .

当  $k = 1$  时, 对正整数  $m$ , 我们证明  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{1}{m}} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{A}$ .

- $A = 0$  时,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有  $|f(x)| \leq \epsilon^m$ , 则当  $x \in \mathring{U}(a, \delta)$ , 有  $|f(x)^{\frac{1}{m}}| < (\epsilon^m)^{\frac{1}{m}} = \epsilon$ . 即  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{1}{m}} = 0 = A^{\frac{1}{m}}$ .
- $A \neq 0$  时, 在公式  $a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + b^{m-1})$  中取  $a = \sqrt[m]{f(x)}$ ,  $b = \sqrt[m]{A}$ , 得

$$\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[m]{A} = \frac{f(x) - A}{\sqrt[m]{f(x)}^{m-1} + \sqrt[m]{f(x)}^{m-2}A + \dots + \sqrt[m]{A}^{m-1}}$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[m]{A}| < \frac{|f(x) - A|}{\sqrt[m]{A^{m-1}}}$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(a, \delta)$  时, 有  $|f(x) - A| < \sqrt[m]{A^{m-1}}\epsilon$ , 结合上面的放缩, 便知  $\forall \epsilon > 0$ , 当  $x \in \dot{U}(a, \delta)$  时, 成立  $|\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[m]{A}| < \frac{|f(x) - A|}{\sqrt[m]{A^{m-1}}} < \epsilon$

由上面的分类讨论, 知对任意的有理数  $\frac{k}{m}$  ( $k$  为任意整数  $m$  为正整数), 都有

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{k}{m}} = \left[ \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{1}{m}} \right]^k = \left( A^{\frac{1}{m}} \right)^k = A^{\frac{k}{m}} \quad \square$$

**问题:** 如果  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 那么对任意实数  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^\alpha = A^\alpha$  是否成立?

**例 2.3** 对有理函数  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , 其中  $P, Q$  是多项式函数, 设  $Q(x_0) \neq 0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

设  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ;  $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ . 若  $b_0 \neq 0$ , 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0}$$

另外, 当  $x \rightarrow \infty$  时, 类似与数列极限的情形, 有  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & n = m \\ \infty & n > m \end{cases}$

**定理 2.3** (夹逼定理) 若存在  $a$  的去心邻域  $\dot{U}(a, \delta)$ , 使得在其中成立  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

**证明:** 利用海涅归结定理知, 对任意满足  $x_n \neq a$  且  $x_n \rightarrow a$  的数列, 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = A$ . 当  $n$  足够大时, 可使  $x_n$  落入  $\dot{U}(a, \delta)$  中, 故当  $n$  足够大时, 有  $g(x_n) \leq f(x_n) \leq h(x_n)$ , 则由数列的夹逼定理可证函数的夹逼定理.  $\square$

**定理 2.4** (单调有界函数单侧极限存在定理) 若  $f(x)$  在点  $a$  的某个右邻域  $(a, a+\delta)$  内单调有界, 则其右极限  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  存在; 若  $f(x)$  在点  $a$  的某个左邻域  $(a-\delta, a)$  内单调有界, 则其左极限  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  存在.

**证明:** 不妨设  $f(x)$  单调增加 (单调减少的情形类似可证), 下面证明:  $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in (a, a+\delta)} \{f(x)\} := m$ .  $\forall \epsilon > 0$ , 由于  $m+\epsilon$  不是  $\{f(x) \mid x \in (a, a+\delta)\}$  的下界, 故存在  $x_0 \in (a, a+\delta)$ , 使得  $f(x_0) < m+\epsilon$ . 由  $f(x)$  的单调性知, 当  $x \in (a, x_0)$  时, 有  $f(x) < f(x_0) < m+\epsilon$ , 但显然有  $f(x) > m-\epsilon$ . 即当  $x \in (a, x_0)$  时成立  $m-\epsilon < f(x) < m+\epsilon$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m$ .  $\square$

**推论 2.3** 若  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内单调有界, 则  $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  和  $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  都存在.

在计算极限时, 我们常引入新的变量以便简化极限表达式, 或将其转变为已知极限, 从而方便我们的计算. 且看下例

**例 2.4** 为计算  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right)$ , 可令  $u = x+1$ , 则当  $x \rightarrow -1$  时,  $u = x+1 \rightarrow 0$ , 且

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} &= \frac{1}{u} - \frac{3}{(u-1)^3+1} = \frac{1}{u} - \frac{3}{u^3-3u^2+3u} \\ &= \frac{1}{u} \left[ 1 - \frac{3}{u^2-3u+3} \right] = \frac{1}{u} \frac{u^2-3u}{u^2-3u+3} = \frac{u-3}{u^2-3u+3} \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u-3}{u^2-3u+3} = \frac{-3}{3} = -1$$

令  $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1}$ , 令  $x = u-1$ , 则上计算过程相当于  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} f(x(u))$ . 其合理性由上计算可直观了解, 并由下定理得到保障.

**定理 2.5** (变量替换) 若  $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ , 且当  $x \in \dot{U}(a)$  时,  $\varphi(x) \neq b$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = A$ .

**证明:** 由  $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = A$  知,  $\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0$ , 当  $0 < |u-b| < \sigma$  时, 有  $|f(u)-A| < \epsilon$ . 又因  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ , 知对上面的  $\sigma > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x-a| < \delta$  时, 成立  $|\varphi(x)-b| < \sigma$ . 综合可知, 当  $x \in \dot{U}(a, \delta)$  时, 成立  $|f(\varphi(x))-A| < \epsilon$ .  $\square$

**注记 2.1** 定理 2.5 中的条件: 在  $a$  的一去心邻域内,  $\varphi(x) \neq b$  是必要的, 因为函数  $f(u)$  未必在  $u=b$  处有定义.

**例 2.5** 证明:  $\forall x_0 > 0$ , 都有  $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$ . 即自然对数函数在其定义域内任意一点处的极限都存在, 且等于函数在该点的值.

**证明:** 利用变量  $u = \frac{x}{x_0}$ ,  $\ln x = \ln \left( \frac{x}{x_0} x_0 \right) = \ln \frac{x}{x_0} + \ln x_0 = \ln u + \ln x_0$ , 故只需  $\lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$ . 它成立是因为  $\forall \epsilon > 0$ , 为使  $|\ln u| < \epsilon$ , 只需  $e^{-\epsilon} < u < e^{\epsilon}$ , 即  $-e^{-\epsilon}(e^{\epsilon}-1) < u-1 < e^{-\epsilon}(e^{\epsilon}-1) < e^{\epsilon}-1$ . 取  $\delta = e^{-\epsilon}(e^{\epsilon}-1)$ , 则可使  $0 < |u-1| < \delta$  时, 成立  $|\ln u| < \epsilon$ .  $\square$ .

**注记 2.2** 对一般对数函数  $\log_a x$ , 由于  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ , 故知对任意  $x_0 > 0$ , 有  $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$ .

**例 2.6** 证明:  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ , 有  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$  ( $a > 0$ )

**证明:** 当  $a = 1$  时结论显然成立; 假设当  $0 < a < 1$  时, 结论成立, 则当  $a > 1$  时,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} (1/a)^x} = \frac{1}{(1/a)^{x_0}} = a^{x_0}$$

从而只需表明当  $0 < a < 1$  时  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ . 又由于  $a^x = a^{x_0} a^{x-x_0}$ , 利用变量替换  $u = x - x_0$ , 则问题可转化为证明: 当  $0 < a < 1$  时, 有  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ .

由于函数  $a^x$  在  $(0, 1)$  内单调有界, 故由定理 2.4 知极限  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x$  存在, 为计算它, 根据海涅归结定理, 取趋向于 0 的数列  $\{\frac{1}{n}\}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ .  $\square$

### 3 两个基本极限及极限计算举例 I

下面两个极限有基本的重要性, 不仅其本身重要, 且很多极限问题都能通过转化到它们而得以求解.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

第二讲, 第八节, 例 8.9 中我们证明了不等式: 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 有  $\sin x < x < \tan x$ . 即有

$$\begin{aligned} \cos x &< \frac{\sin x}{x} < 1 \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \quad 0 &< 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

则由夹逼定理知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**注记 3.1** 上面用到了:  $0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ , 由此得知  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

对第二个极限, 只需表明: 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . 因为当  $x \rightarrow -\infty$  时, 利用变量替换  $u = -x$ , 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{u}{u-1}\right)^u = \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right) = e \end{aligned}$$

当  $x > 1$  时, 因为  $[x] \leq x < [x] + 1$ , 故有

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}$$

令  $x \rightarrow +\infty$ , 左边

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1}}{1 + \frac{1}{[x] + 1}} = e$$

右边

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) = e$$

由夹逼定理知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \square$$

**注记 3.2** 令  $t = \frac{1}{x}$ , 则当  $x \rightarrow \infty$  时,  $t \rightarrow 0$ , 故上极限的另一种常见形式是

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e}$$

**例 3.1** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

**例 3.2** 证明:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

$$\text{证明: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \square$$

**例 3.3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{m}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n}.$$

**例 3.4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

例 3.2 表明分母有极限  $\frac{1}{2}$ , 下证分子也有极限.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

**例 3.3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{5}{x}}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1+(-3x))^{-\frac{1}{3x}} \right)^{\frac{-3x}{1} \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1+(-3x))^{-\frac{1}{3x}} \right)^{-15}$$

$$\stackrel{t=-3x}{=} \left( \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{-15} = e^{-15}$$

### 极限计算举例 I

**例 3.4** 证明:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

**证明:** 令  $t = \frac{1}{x}$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $t \rightarrow \infty$ , 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right) = \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t$$

令  $u = \left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t$ , 则当  $t \rightarrow \infty$  时,  $u \rightarrow e$ , 又由例 2.5 知道  $\lim_{u \rightarrow e} \ln u = \ln e = 1$

**例 3.4'** 证明:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \ (a > 0)$

**证明:** 令  $a^x - 1 = y$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时, 由例 2.6 知  $y \rightarrow 0$ , 且有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = (\ln a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \stackrel{\text{例 3.4}}{=} \ln a$$

**例 3.5** 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a, b \geq 0)$

**分析:** 当  $n \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b} \rightarrow 1$ , 所以该极限的形式是  $1^\infty$ . 这令我们想起了基本的极限  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ , 它也是  $1^\infty$  形式. 受此启发, 我们尝试将极限写成基本极限的形式, 即考虑变形如下

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1 \right) \right)^{\left( \frac{2}{\sqrt[n]{a}-1 + \sqrt[n]{b}-1} \right)} \right]^{n \left( \frac{\sqrt[n]{a}-1 + \sqrt[n]{b}-1}{2} \right)}$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \left( \frac{\sqrt[n]{a}-1 + \sqrt[n]{b}-1}{2} \right) \right] &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} + \frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x-1}{x} \stackrel{\text{例 3.4'}}{=} \frac{1}{2} (\ln a + \ln b) = \ln \sqrt{ab} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

**注记 3.3** 上面最后一步用到了结论, 如果  $f(x) > 0, g(x)$  当  $x \rightarrow a$  时极限都存在, 且  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = A^B$ . 这是因为  $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ , 且  $\ln f(x) \rightarrow \ln A$ , 则由极限运算法则的乘法规则可:  $f(x)^{g(x)} \rightarrow e^{B \ln A} = A^B$

**例 3.6** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$

**分析:** 难处理的部分是  $\sqrt[n]{1+x}$ , 不如用  $t = \sqrt[n]{1+x} - 1$  代之, 则原式变为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{(1+t)^n - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 + \binom{n}{1}t + \binom{n}{2}t^2 + \cdots + \binom{n}{n}t^n - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\binom{n}{1} + t(\binom{n}{2} + \cdots)} = \frac{1}{\binom{n}{1}} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

**例 3.7** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]$ . 由于当  $x \neq 0$  时成立:  $\frac{1}{x} - 1 < \left[ \frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$ . 故

$$\begin{cases} 1 - x < x \left[ \frac{1}{x} \right] \leq 1, & x > 0 \\ 1 - x > x \left[ \frac{1}{x} \right] \geq 1, & x < 0 \end{cases}$$

故由夹逼定理知  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1$ .

**例 3.7** 求极限  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\tan x}$ .

**分析:** 极限类型为  $1^\infty$ , 故考虑将其写成基本极限  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$  的形式.

**解:** 令  $\sin x = 1+t$ , 则当  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  时,  $t \rightarrow 0^-$ . 则有  $\tan x = \frac{1+t}{\sqrt{1-(1+t)^2}}$ . 从而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\tan x} &= \lim_{t \rightarrow 0^-} (1+t)^{\frac{1+t}{\sqrt{1-(1+t)^2}}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \left( (1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{t(1+t)}{\sqrt{1-(1+t)^2}}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left( (1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{\sqrt{\frac{t(1+t)^2}{-2-t}}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

**例 3.8** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x^2+x+1}$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x^2+x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} - 1 \right) \right)^{x^2+x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \left( \frac{-2}{x^2+1} \right) \right)^{-\frac{x^2+1}{2}} \right]^{\frac{-2}{x^2+1}(x^2+x+1)} = e^{-2} \end{aligned}$$

**例 3.9** 求常数  $a$ , 使得  $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x^2 + a & x \leq 0 \end{cases}$  当  $x \rightarrow 0$  时极限存在.

**解:**  $g(x)$  在  $x = a$  处的极限存在当且仅当其在  $x = a$  处的左、右极限都存在且相等.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + a) = a; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0$$

故当且仅当  $a = 0$  时  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  存在, 且此时  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

**例 3.10** 证明: 如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a \sin x + b \cos x)$  存在, 则必有  $a = b = 0$ .

**证明:** 设  $f(x) = a \sin x + b \cos x$ . 假设  $a, b$  不全为 0, 不妨设  $b \neq 0$ . 取  $x_n = n\pi$ , 有海涅归结定理知  $\{f(x_n)\}$  亦收敛, 但此时  $f(x_n) = b \cos n\pi = b(-1)^n$ . 由此可知  $b = 0$ . 矛盾. 该矛盾表明  $a = b = 0$ .  $\square$

## 4 无穷小量与无穷大量的阶及其比较

无穷小量是动态量, 虽然最终趋向是一致的, 但其趋向于零的过程各有千秋, 比如当  $x \rightarrow 0$  时,  $x, x^2, \sin x, e^x - 1, 1 - \cos x$  等都是无穷向量, 那么该如何区分它们 (当

$x$  无限接近 0 的过程中) 呢?

直观上来看,  $x^2$  要比  $x$  趋向零的速度更快, 比如令  $x = \frac{1}{n}$  的“步调”趋向零 ( $n \rightarrow \infty$ ), 则  $x^2$  以  $\frac{1}{n^2}$  的“步调”趋向零, 显然  $x^2$  以更快的速度趋向零, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

同理  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  表明  $\sin x$  和  $x$  趋于 0 的速度也是一样的. 但由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{x}{\sin x} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} x \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \right) = 0$$

故  $x^2$  趋向于 0 的速度必  $\sin x$  趋向于 0 的速度要快. 又由例 3.2 知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ , 所以  $1 - \cos x$  和  $\frac{x^2}{2}$  趋向于 0 的速度是一致的.

**定义 4.1** 设  $\alpha(x)$  和  $\beta(x)$  是当  $x \rightarrow a$  ( $a$  可为无穷) 时的无穷小量, 且  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = l$

1. 若  $l = 0$ , 则称  $x \rightarrow a$  时,  $\beta(x)$  是比  $\alpha(x)$  高阶的无穷小 (*higher order infinitesimal*), 记为  $\beta(x) = o(\alpha(x))$  ( $x \rightarrow a$ );
2. 若  $l \neq 0$ , 则称  $x \rightarrow a$  时,  $\beta(x)$  是与  $\alpha(x)$  同阶的无穷小, 记为  $\beta(x) = O(\alpha(x))$  ( $x \rightarrow a$ );
3. 特别地, 若  $l = 1$ , 则称  $x \rightarrow a$  时,  $\beta(x)$  是与  $\alpha(x)$  等价的 (*equivalent*) 无穷小, 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  ( $x \rightarrow a$ ).

**注记 4.1** 当  $l \neq 0$  时,  $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  是  $x \rightarrow a$  时的有界量.  $l = 1$  时, 即  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  ( $x \rightarrow a$ ), 也称  $\alpha(x)$  和  $\beta(x)$  当  $x \rightarrow a$  时具有相同的渐进性态.

**命题 4.1**  $x \rightarrow a$  时,  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  当且仅当  $\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$

**证明:** “ $\Leftarrow$ ”: 若  $\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(\beta(x))}{\beta(x)} = 1 + 0 = 1, \text{ 即 } \alpha(x) \sim \beta(x)$$

“ $\Rightarrow$ ”: 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  ( $x \rightarrow a$ ), 即  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 则  $\alpha(x) = \beta(x) + (\alpha(x) - \beta(x))$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \square$$

**例 4.1** 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x^2 = o(x)$ , 一般地  $x^n = o(x^m)$  ( $n > m$ )

**例 4.2** 当  $x \rightarrow 0$  时  $\boxed{\sin x \sim x} \quad \boxed{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}} \quad \boxed{\tan x \sim x} \quad \boxed{\arcsin x \sim \arctan x \sim x}.$

例 4.3 例 3.4 及例 3.4' 表明: 当  $x \rightarrow 0$  时

$$\boxed{\ln(1+x) \sim x} \quad \boxed{a^x - 1 \sim (\ln a)x}$$

特别地,  $\boxed{e^x - 1 \sim x}$

例 4.4 例 3.6 表明: 当  $x \rightarrow 0$  时  $\boxed{\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}}$  一般地, 有

$$\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad (x \rightarrow 0)}$$

**证明 (不太严格的):** 首先可证当  $\alpha$  是有理数时成立; 当  $\alpha$  是无理数时, 取一收敛于  $\alpha$  的有理数数列  $\alpha_n t \rightarrow \alpha$ , 在  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\alpha_n}}{x} = \alpha_n$  两边同时令  $n \rightarrow \infty$ , 得结论对无理数  $\alpha$  也成立.  $\square$

**命题 4.2** 等价无穷小是等价关系 (*equivalent relation*), 即

1. 反身性:  $\alpha(x) \sim \alpha(x)$ ;
2. 对称性: 如  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\beta(x) \sim \alpha(x)$ ;
3. 传递性: 如  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 且  $\beta(x) \sim \gamma(x)$ , 则  $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ .

我们把相互等价的无穷小量看做一类, 该如何对某一极限过程中所有的无穷小量进行分类呢? 首先, 注意到: 当  $x \rightarrow a$  时  $(x-a)^k$  ( $k \geq 1$ ) 是标准的 ( $k$  阶) 无穷小, 常用其衡量无穷小量的阶, 即有如下定义

**定义 4.2** 如  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ , 且  $\exists$  常数  $c \neq 0$ , 及整数  $k > 0$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{(x-a)^k} = c$$

即当  $x \rightarrow a$  时,  $\alpha(x)$  与  $(x-a)^k$  同阶, 则称  $\alpha(x)$  是  $k$  阶无穷小 (*k-th order infinitesimal*), 并称  $c(x-a)^k$  为其主部 (*principal part*). 此时, 有

$$\alpha(x) = \underbrace{c(x-a)^k}_{\text{主部}} + o((x-a)^k)$$

且  $o((x-a)^k)$  是更高阶的无穷小, 即  $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^k)}{(x-a)^k} = 0}$

故可按无穷小的阶来对无穷小进行分类, 即将有共同阶的无穷小看成是一类, 其中任何一个无穷小可代表该类. 我们常用  $(x-a)^k$  来代表  $x \rightarrow a$  时的  $k$  阶无穷小的类.

**例 4.5**  $a_k(x-a)^k + a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots + a_n(x-a)^n$  ( $a_k \neq 0$ ) 是  $x \rightarrow 0$  时的  $k$  阶无穷小,  $a_k(x-a)^k$  是其主部. 换言之

$$a_k(x-a)^k + a_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots + a_n(x-a)^n \sim a_k(x-a)^k \quad (x \rightarrow a)$$

**例 4.6**  $\sin x$  是  $x \rightarrow 0$  时的一阶无穷小,  $x$  是其主部;  $1 - \cos x$  是  $x \rightarrow 0$  时的二阶无穷小,  $\frac{x^2}{2}$  是其主部.

**例 4.7** 考察  $\tan x - \sin x$ , 它是  $x \rightarrow 0$  时的无穷小量, 我们求其阶及其主部. 设其阶是  $k$ , 则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^k \cos x} \\ &\stackrel{k=3}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

即  $\tan x - \sin x$  是  $x \rightarrow 0$  时的三阶无穷小, 且其主部是  $\frac{x^3}{2}$ , 换言之

$$\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$$

**例 4.8**  $\ln x - \ln a$  是  $x \rightarrow a$  ( $a > 0$ ) 时的几阶无穷小?

**解:** 假设阶是  $k$ , 则应有  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{(x-a)^k} = \text{非零常数}$ . 但

$$\frac{\ln x - \ln a}{(x-a)^k} = \frac{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}{(x-a)^k} = \frac{\ln\left[1 + \left(\frac{x}{a} - 1\right)\right]}{(x-a)^k} \stackrel{t := \frac{x}{a} - 1}{=} \frac{\ln(1+t)}{a^k t^k}$$

由  $\ln(1+x) \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ ) 知:  $k = 1$ . 此时

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{(x-a)^k} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{at} = \frac{1}{a}$$

故  $\ln x - \ln a$  是  $x \rightarrow a$  ( $a > 0$ ) 时的 1 阶无穷小, 且其主部是  $\frac{x-a}{a}$ .

**例 4.9**  $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}$  是  $x \rightarrow 0$  时的几阶无穷小?

**解:**  $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x} = \frac{2 \tan x}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x}}$ . 当  $x \rightarrow 0$  时, 分母为有界量, 而分子中  $\tan x \sim x$ , 故知无穷小的阶是 1, 且因

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \tan x}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

即其主部是  $x$ .

类似地, 我们有无穷大的阶及其分类概念.

**定义 4.3** 如果  $u(x)$  和  $v(x)$  是  $x \rightarrow a$  ( $a$  可为  $\pm\infty$ , 亦可只考虑左、右极限) 时的无穷大量, 即极限等于  $\infty$ , 若  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = L$ , 则

1. 若  $L = \infty$ , 则称  $u(x)$  是比  $v(x)$ , 在  $x \rightarrow a$  时的高阶无穷大 (或  $v(x)$  是比  $u(x)$  低阶的无穷大);
2. 若  $L < \infty$ , 即  $\frac{u(x)}{v(x)}$  在  $x$  的去心领域内有界, 则称  $u(x)$  和  $v(x)$  是当  $x \rightarrow a$  时的同阶无穷大, 记为  $u(x) = O(v(x))$ ;
3. 特别地, 若  $L = 1$ , 则称  $u(x)$  和  $v(x)$  是当  $x \rightarrow a$  时的等价无穷大, 记为  $u(x) \sim v(x)$ .

**注记 4.2** 当  $u(x)$  是无穷大时,  $\frac{1}{u(x)}$  是 (同一个极限过程下的) 无穷小, 故关于无穷大的讨论可转换为关于无穷小的讨论, 反之亦然.

当  $x \rightarrow a$  是, 最基本的 ( $k$  阶) 无穷大是  $\frac{1}{(x-a)^k}$

**定义 4.4** 设  $u(x)$  是  $x \rightarrow a$  时的无穷大量, 则如果  $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^k u(x) = c$  ( $c$  为非零常数), 则称  $u(x)$  是  $x \rightarrow a$  时的  $k$  阶无穷大, 并称  $\frac{c}{(x-a)^k}$  是其 (当  $x \rightarrow a$  时的, 或  $x = a$  附近的) 主部. 显然, 此时有  $u(x) \sim \frac{c}{(x-a)^k}$ .

**注记 4.3** 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $x^k$  是基本的  $k$  阶无穷大. 假设  $u(x)$  是  $x \rightarrow \infty$  时的无穷大, 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x^k} = c$  (非零常数), 则称  $u(x)$  是  $x \rightarrow \infty$  时的  $k$  阶无穷大, 且  $\frac{x^k}{c}$  是其主部. 显然, 此时有  $u(x) \sim \frac{x^k}{c}$ .

**例 4.10** 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$  ( $a_n \neq 0$ ) 是  $n$  阶无穷大, 且其主部为  $a_n x^n$ , 即  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \sim a_n x^n$  ( $x \rightarrow \infty$ ).

**例 4.11** 判断  $x^3 \sin \frac{1}{x}$  当  $x \rightarrow \infty$  时的阶.

**解:** 由于当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\sin \frac{1}{x}$  是有无穷小量, 其  $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ . 故其作为无穷大量的阶应等同于  $x^3 \frac{1}{x} = x^2$  的阶, 即阶为 2, 下面严格验证之.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

**例 4.12**  $\forall \alpha > 0$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $x^\alpha$  显然是无穷大量; 另外,  $\ln x$  也是  $x \rightarrow +\infty$  时的无穷大量, 我们比较一下它们趋于无穷的速度.

**解:** 对任意  $\alpha > 0$ , 都有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \stackrel{y:=x^\alpha}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y} = \frac{1}{\alpha} 0 = 0$$

这说明：对任意  $\alpha > 0$ ,  $\ln x$  当  $x \rightarrow +\infty$  趋于正无穷的速度都小于  $x^\alpha$  趋于正无穷的速度，故  $x^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) 是比  $\ln x$  更高阶的无穷大. 也可以说  $\ln x$  作为  $x \rightarrow +\infty$  时的无穷大是不存在阶的.

**注记 4.4** 对  $\ln \frac{1}{x}$ , 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 它是无穷大量, 下面的计算说明, 它当  $x \rightarrow 0^+$  时也不存在阶.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^\alpha}} = 0$$

**注记 4.5** 上面利用到了  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$ , 它可由如下考虑看出. 由于  $\frac{\ln y}{y}$  当  $x$  足够大时单调减少有下界, 故其极限存在. 从而  $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{\frac{1}{y}}$  亦存在, 且其值等于  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$  (见《第二讲》例 4.3). 由此可知

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y^{\frac{1}{y}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \ln 1 = 0$$

**例 4.12'** 在例 4.12 中的计算中, 令  $x = e^u$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^{\alpha u}} = 0$$

取  $\alpha = 1$ , 则当  $u \rightarrow +\infty$  时,  $e^u$  相比于  $u$ , 是更高阶的无穷大. 事实上, 可证明: 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $e^x$  没有阶, 即当  $x \rightarrow +\infty$  时, 对任意  $\beta > 0$ , 它比  $x^\beta$  趋向无穷大的速度都要快.

**证明:** 由于

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^{\alpha u}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(u^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}{(e^u)^\alpha} = \left( \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{e^u} \right)^\alpha = 0 \stackrel{\beta=\frac{1}{\alpha}}{\implies} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^\beta}{e^u} = 0 \quad \square$$

**注记 4.6** 无穷小(大)的阶可以不是正整数. 比如对  $u(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1.$$

故  $u(x) \sim \sqrt{x}$  ( $x \rightarrow +\infty$ ). 而当  $x \rightarrow 0^+$  时

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \sqrt{x}} = 1$$

故  $u(x) \sim \sqrt[4]{x}$  ( $x \rightarrow 0^+$ ).

## 5 无穷小（大）等价代换与极限计算举例 II

例 5.1 我们知道：若  $a_0, b_0 \neq 0$ ，下极限成立

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + \cdots + a_l}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } l = m; \\ 0, & \text{若 } l < m; \\ \infty, & \text{若 } l > m. \end{cases}$$

我们也知道当  $n \rightarrow \infty$  时

$$a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + \cdots + a_l \sim a_0 x^l; \quad b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m \sim b_0 x^m$$

而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^l}{b_0 x^m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } l = m; \\ 0, & \text{若 } l < m; \\ \infty, & \text{若 } l > m. \end{cases}$$

即在计算极限时，我们用分子、分母的用其等价无穷大替换了。

例 5.2 在计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$  时，如果直接用等价替换  $\sin x \sim x$ ;  $\tan x \sim x$ ，则将得到极限为 0 的错误论断。产生这种错误的根源在于： $\sin x - \tan x$  的无穷小阶要大于  $\sin x$  和  $\tan x$  的阶，所以如果贸然代替，则会产生代替后的无穷小的阶小于原无穷小的阶的情况，从而产生错误（类似于用放缩法证明极限时放缩过度的情形）。也可从运算角度理解为： $\frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \frac{(x+o(x)) - (x+o(x))}{x^3} = \frac{o(x)-o(x)}{x^3}$ ，但我们只知道分子上的两个  $o(x)$  都是大于 1 阶的无穷小，但其差完全不能确定，即直接替换太粗糙了，不能给出有效的关于极限状态的信息。

解：

$$\frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^3} = \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^3 \cos x}$$

由于  $\sin x \sim x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ，故尝试用  $x$  替代  $\sin x$ ；用  $\frac{x^2}{2}$  代替  $1 - \cos x$ ，可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \frac{x^2}{2}}{x^3 \cos x} = -\frac{1}{2}$$

即得到了有限的极限，故必是原极限的值。这是因为：当  $x \rightarrow 0$  时，分母的无穷小是三阶的  $x^3$ ，而分子上

$$\sin x (1 - \cos x) = (x + o(x)) \left( \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) =$$

$$= \frac{x^3}{2} + \underbrace{xo(x^2) + \frac{x^2}{2}o(x^2) + o(x)o(x^2)}_{=o(x^3)} = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

则

$$\frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3} = \frac{x^3/2 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

**注记 5.1** 由上例可知，对于无穷小相减（加）时，往往需要用更高阶的无穷小来替代各无穷小，才能保障计算的正确性。比如，之后我们会知道，当  $x \rightarrow 0$  时，对于  $\sin x$  和  $\cos x$  有更精确的估计：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

从而

$$\begin{aligned} \sin x - \tan x &= \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) - \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \\ &= -\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + \underbrace{o(x^3) - o(x^3)}_{=o(x^3)} = -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

例 5.2 的解采用了将和差的形式化为乘除形式，然后利用无穷小等价替换，使得分子上无穷小的阶不小于分母上无穷小的阶。其合理性由下定理给出。

**定理 5.1** 设  $\alpha(x), \beta(x), \widetilde{\alpha(x)}, \widetilde{\beta(x)}$  都是同一自变量变化过程中的无穷小，并且  $\alpha(x) \sim \widetilde{\alpha(x)}, \beta(x) \sim \widetilde{\beta(x)}$ ，若  $\lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\alpha(x)}$  存在，则

$$\lim \frac{f(x)\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}}$$

**证明：**

$$\begin{aligned} \lim \frac{f(x)\beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim \left( \frac{\beta(x)}{\widetilde{\beta(x)}} \cdot \frac{\widetilde{\alpha(x)}}{\alpha(x)} \cdot \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}} \right) = \\ &= \left( \lim \frac{\beta(x)}{\widetilde{\beta(x)}} \right) \left( \lim \frac{\widetilde{\alpha(x)}}{\alpha(x)} \right) \left( \lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}} \right) = \lim \frac{f(x)\widetilde{\beta(x)}}{\widetilde{\alpha(x)}} \quad \square \end{aligned}$$

## 极限计算举例 II

**例 5.3** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x}(1 - \cos x)}{x \ln(1 + 2x)}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x}(1 - \cos x)}{x \ln(1 + 2x)} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x(2x)} = \frac{e}{4}$$

**例 5.4** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc^2 x}$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc^2 x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)^{\csc^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \csc^2 x \ln(\cos x)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

**例 5.5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

**分析:** 已知  $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$  ( $x \rightarrow 0$ ), 即  $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ . 又  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$  ( $x \rightarrow 0$ ), 即  $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ . 故

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x - 1} - \sqrt[3]{1 + \cos x - 1}}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 + \frac{\cos x - 1}{2} + o(\cos x - 1)\right] - \left[1 + \frac{\cos x - 1}{3} + o(\cos x - 1)\right]}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2) + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) + o(x^2)\right)}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + 0}{1 + 0} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

**例 5.6** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}$

**分析:** 如果直接用替代:  $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ , 将得到极限为零的错误结论. 这是因为, 分子上的无穷小是 1 阶, 小于分母的无穷小阶. 我们将分子化为乘积的形式

$$\text{解: } \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} = \frac{(1+x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2}{x^2 \left(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2}\right)} = \frac{-\frac{x^2}{4}}{x^2 \left(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{8}$$

**注记 5.2** 如果要用无穷小等价替换解上题, 需要分子上至少是 2 阶无穷小. 已知  $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$  ( $x \rightarrow 0$ ), 即  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ . 为找到更高阶的无穷小形式, 我

们需确定最小的  $k$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^k} = c \text{ (非零常数)}$$

$$\begin{aligned} \text{因为: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1 + \frac{x}{2})^2}{x^k (\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4}}{x^k (\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2})} \\ &\stackrel{k=2}{=} -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

即当  $k = 2$  时, 极限值  $c = -\frac{1}{8}$ . 从而有

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$$

则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{8} + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{8} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1} = \frac{-\frac{1}{8} + 0}{1} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

**例 5.7** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

**解:** 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2\left(\pi n \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \pi \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right) \\ &\stackrel{t:=\frac{1}{n}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \sin^2 \pi \left(\frac{\sqrt{1+t}}{t}\right) \stackrel{\sqrt{1+t} \sim 1 + \frac{t}{2}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \sin^2 \pi \left(\frac{1 + \frac{t}{2}}{t}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{x}\right) \stackrel{n=\frac{1}{x}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} = 1 \end{aligned}$$

**注记 5.3** 如果不用等价替换, 我们可按如下方面计算. 注意到  $\sin^2 \pi n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - \pi\sqrt{n^2})$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left( \frac{\pi (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}) (\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left( \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left( \frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1
\end{aligned}$$

**例 5.8** 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \ (x > 0)$

$$\text{解: } n(\sqrt[n]{x} - 1) = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \stackrel{\frac{1}{n}=t}{=} \frac{x^t - 1}{t}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^t - 1}{t} \stackrel{\text{例 3.4'}}{=} \ln x$$

**例 5.9** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x + o(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) + o(x + o(x))}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) + o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1
\end{aligned}$$

## 6 函数的连续性

函数的连续性是一个局部概念, 也就是说, 我们可以讨论函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处是否连续. 如果一个函数在其定义域中的每个点处都连续, 则说它是一个连续函数.

直观上来看, 说  $y = f(x)$  在  $x_0$  处连续即意味着: 当自变量  $x$  在  $x_0$  的一个领域内连续变化时, 对应函数值的变化也应该是连续的, 即无如下面中函数所表现出的“跃迁”行为.

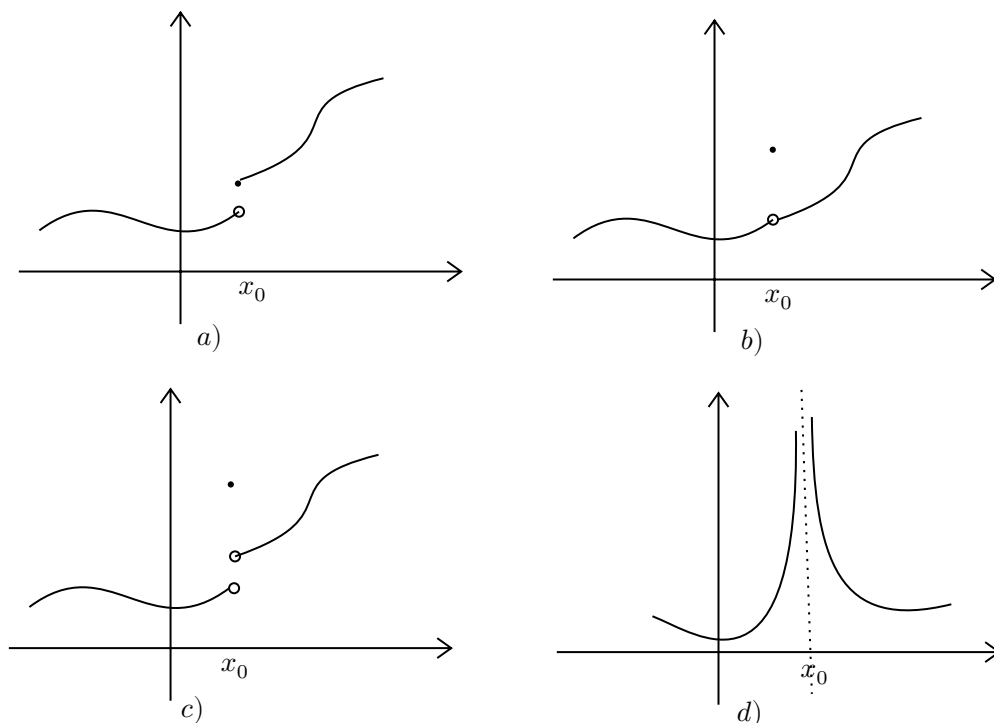


图 a) 中的函数在  $x_0$  处的左极限  $f(x_0 - 0)$  不等于右极限  $f(x_0 + 0) = f(x_0)$  的; 图 b) 中的函数在  $x_0$  处虽然有极限 (即左、右极限存在且相等), 但它不等于该点函数的值; 图 c) 中的函数在  $x_0$  处的左、右极限不相等, 也不等于在该点函数的值; 图 d) 中的函数在  $x_0$  处的极限不存在.

在  $x_0$  点处, 给自变量以增量  $\Delta x := x - x_0$ , 对应函数值的增量为

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

则函数在  $x_0$  处连续要求: 对任意的微小增量  $\Delta x$ , 对应  $\Delta f(x)$  也是微小增量. 即

要求

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

**定义 6.1** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某领域内有定义, 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处连续 (*continuous*), 并称  $x_0$  是  $f(x)$  的一个连续点; 如果  $f(x)$  在  $x_0$  不连续, 则称  $f(x)$  在点  $x_0$  处间断, 并称  $x_0$  是  $f(x)$  的间断点.

**注记 6.1:** 上定义说明, 要验证函数  $f(x)$  在  $x_0$  是连续的, 需要求

1. 极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 即左、右极限存在且相同.
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (特别地  $f(x)$  在  $x_0$  处有定义, 且其取值有限)

**定义 6.2** 如果  $f(x)$  在  $x_0$  的某右领域内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处右连续 (*right continuous*); 同理, 如果  $f(x)$  在  $x_0$  的某左领域内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处左连续 (*left continuous*).

**命题:**  $f(x)$  在  $x_0$  处连续当且仅当它在  $x_0$  处既左连续又右连续.

**证明:** 显然.

**例 6.1** 图 a) 中函数在  $x_0$  处是右连续的, 但不是连续的; 图 b) 中的函数在  $x_0$  处即不是左连续, 也不是右连续, 虽然它在  $x_0$  处的极限存在; c) 中函数处既不是左连续, 也不是右连续的; 图 d) 中的函数在  $x_0$  处的极限不存在 (或为无穷大), 故是不连续的.

**定义 6.2** 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 指它在开区间  $(a, b)$  内连续, 且在  $a$  处右连续、在  $b$  处左连续.

用符号  $C(I)$  表示区间  $I$  上全体连续函数的集合. 所以  $f \in C(I)$  表示  $f$  在  $I$  上连续. 无歧义时也省略其中的括弧, 比如  $C[a, b]$  表示闭区间  $[a, b]$  上的连续函数全体.

**例 6.2** 证明  $\sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

**证明:** 利用三角函数的和差化积公式

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$0 \leq |\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$$

由夹逼定理得:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$   $\square$ .

由于  $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ , 故知  $\cos x$  在其定义域内也是连续的.

**例 6.3** 指数函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

**证明:**  $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (a^{x-x_0}) \stackrel{t=x-x_0}{=} a^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} a^t = a^{x_0} \quad \square$$

**例 6.4** 证明  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  内连续.

**证明:**  $\forall x_0 \in (0, 1)$ .  $\forall \epsilon > 0$ , 需要找到  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 成立  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , 即

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x - x_0}{xx_0} \right| < \epsilon \quad (*)$$

为方便估计, 不妨将  $x$  的范围限制于  $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$ , 即  $x > \frac{x_0}{2}$ , 故  $xx_0 > \frac{x_0^2}{2}$ , 从而

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x - x_0}{xx_0} \right| < \frac{2|x - x_0|}{x_0^2}$$

由此可见, 如取  $\delta = \min \left\{ \frac{x_0^2}{2}\epsilon, \frac{x_0}{2} \right\}$ , 则当  $|x - x_0| < \delta$  时, 条件 (\*) 即可满足.  $\square$

**定理 6.1** (连续函数的四则运算) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ , 则有

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x) + lg(x)) = kf(x_0) + lg(x_0), \forall k, l \in \mathbb{R}.$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = f(x_0)g(x_0)$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad (g(x_0) \neq 0).$

**证明:** 根据函数极限的四则运算规则.  $\square$

**定理 6.2** (复合函数的连续性) 设函数  $g$  在点  $x_0$  处连续, 而函数  $f$  在点  $u_0 = g(x_0)$  处连续, 则复合函数  $f \circ g$  在点  $x_0$  处连续, 即有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = f[g(x_0)]$$

**证明:** 由于  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$ , 故  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ , 当  $|u - u_0| < \eta$  时, 有  $|f(u) - f(u_0)| < \epsilon$ . 又由于  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ , 则对上面的  $\eta, \exists \delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - u_0| < \eta$ . 由此可知: 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f[g(x)] - f[g(x_0)]| = |f[g(x)] - f(u_0)| = |f(u) - f(u_0)| < \epsilon \quad \square$$

**注记 6.2** 如果没有连续性条件, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = f[g(x_0)]$  一般是不成立的, 比如  $f(x) = 1$ ,  $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ . 显然,  $f$  连续,  $g$  在 1 处是不连续的, 但  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ . 然而, 复合函数  $g(f(x))$  在  $x = 1$  处没定义.

**引理 6.1** (反函数存在引理) 若函数  $y = f(x)$  在其定义域上  $D(f)$  严格单调, 则存在它的反函数  $x = f^{-1}(y)$ ,  $y \in R(f)$ , 且  $f^{-1}(y)$  也是严格单调的, 并且和  $y = f(x)$  的单调性是一致的.

**证明:** 不妨设  $y = f(x)$  在  $D(f)$  上严格单调增加. 我们说明, 对任意  $y \in R(f)$ , 都有唯一  $x \in D(f)$  与之对应, 即  $f(x) = y$ , 从而表明  $f^{-1}: R(f) \rightarrow D(f)$  存在. 假设另有  $x'$  与  $y$  对应, 即  $f(x') = y$ , 且不妨设  $x < x'$ , 则由  $f$  的严格单调性知  $f(x) < f(x')$ , 这与它们都等于  $y$  相矛盾了. 下证  $f^{-1}$  也具有与  $f$  相同的严格单调性. 在  $R(f) = D(f^{-1})$  中, 设  $y_1 < y_2$ , 记  $x_1 = f^{-1}(y_1)$ ,  $x_2 = f^{-1}(y_2)$ . 如果  $x_1 \geq x_2$ , 那么必有  $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ , 矛盾, 故  $x_1 < x_2$ , 从而  $f^{-1}$  也是严格单调增加的.  $\square$

**定理 6.3** (反函数连续性定理) 设函数  $y = f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续且严格单调增加, 且  $f(a) = \alpha$ ,  $f(b) = \beta$ , 则其反函数  $x = f^{-1}(y)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续且严格单调增加.

**证明:** 见附录三.

由定理 6.1 知, 多项式函数及有理函数再起定义域内都是连续的; 例 6.2 又表明  $\sin x, \cos x$  是连续的, 结合定理 6.1 便知  $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$  都连续; 例 6.3 指出指数函数  $a^x$  在其定义域内连续, 故双曲函数  $\sinh x, \cosh x$  等也在其定义域内连续, 又由定理 6.3 知, 指数函数的反函数对数函数也在其定义域内是连续的; 对于幂函数  $x^a$ , 由于  $x^a = e^{a \ln x}$ , 结合定理 6.2 知其也在其定义域内是连续的.

故五类基本初等函数在其定义域内都是连续的, 由此即知

**定理 6.4** 所有初等函数在其定义域内连续. 故对初等函数  $f(x)$ , 如果  $x_0 \in D(f)$ , 则必有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

**例 6.5** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\text{解: } (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln \cos x}{x^2}} = e^{\frac{\ln(1-2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2}} = e^{\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \ln(1-2\sin^2 \frac{x}{2})^{\frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \ln(1-2\sin^2 \frac{x}{2})^{\frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}}} \right) \xrightarrow{e^x, \ln x \text{ 连续}} e^{\frac{1}{2} \ln e^{-1}}$$

## 7 不连续点（间断点）的类型

**定义 7.1** 如果  $f(x)$  在  $x_0$  处不连续, 则称  $x_0$  是  $f(x)$  的一个不连续点, 也称为间断点 (*discontinuous point*) .

由于  $f(x)$  在  $x_0$  处连续意味着:

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

故若  $x_0$  是间断点, 则  $f(x_0)$ ,  $f(x_0 - 0)$ ,  $f(x_0 + 0)$  这三者至少有一个不存在, 或它们都存在但不全相等. 按此逻辑, 我们对间断点可作出如下分类:

### 1. 第一类间断点: 左、右极限均存在, 但不连续

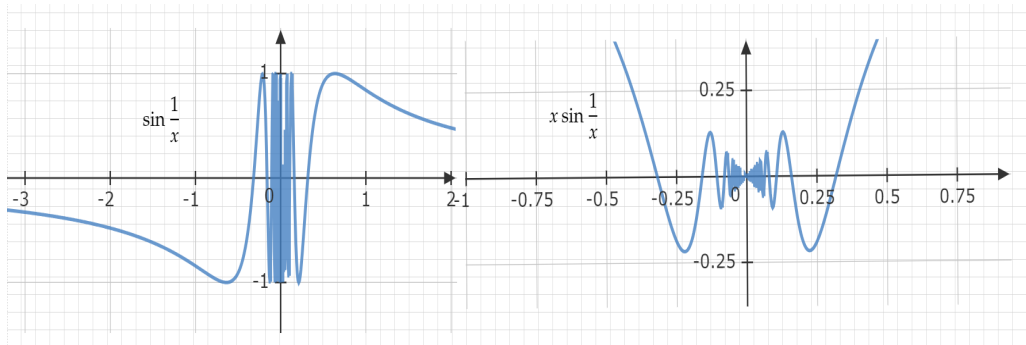
(a) 可去间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在 (即  $f(x_0 - 0)$ ,  $f(x_0 + 0)$  存在且相等), 但  $f(x)$  在  $x_0$  点无定义, 或不等于  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . (称其为“可去”, 因为我们可以该点重新定义函数的取值, 令其等于极限值, 便可使函数在该点连续.)

(b) 跳跃间断点:  $f(x_0 - 0)$  和  $f(x_0 + 0)$  存在但不相等.

### 2. 第二类间断点: 左、右极限至少有一个不存在.

(a) 无穷间断点:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ , 或  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ .

(b) 振荡间断点:  $x \rightarrow x_0$  时, 函数值在两个不同数之间不断地变动无限多次. (即振荡但又不收敛, 如  $\sin \frac{1}{x}$ , 以区别于类似  $x \sin \frac{1}{x}$  这种振荡但收敛的函数.)

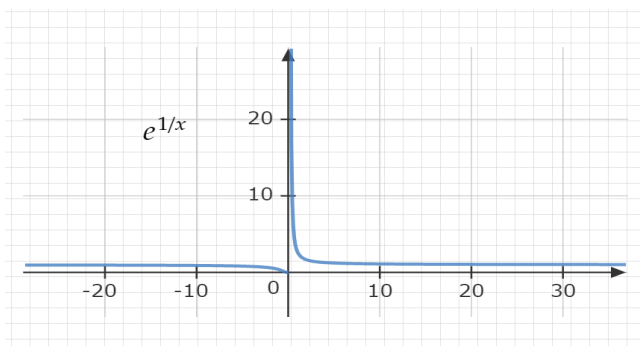


**例 7.1** 对  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ , 我们只需规定  $f(0) = 0$ , 那么  $f(x)$  就是  $(-\infty, \infty)$  上的连续函数了, 换言之, 0 是其第一类间断点的可去类型. 但是对  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , 由于  $x \rightarrow 0$  时, 它没有极限, 故 0 是第二类间断点的振荡类型.

**例 7.2** 对函数  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ , 它在 0 处无定义, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

故 0 是  $e^{\frac{1}{x}}$  的第二类间断点的无穷类型.



**例 7.3** 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x^\sigma \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x^3 + b, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处的连续性, 其中  $\sigma, b$  为常数.

**解:** 首先  $f(0) = b$ , 且  $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + b) = b = f(0)$ .

- $\sigma > 0$  时,  $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ;
- $\sigma = 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在 (因函数值无穷振荡);
- $\sigma < 0$  时,  $f(x)$  当  $x \rightarrow 0^+$  时无穷振荡且振幅  $x^\sigma$  趋于  $+\infty$ , 故  $f(0+0)$  不存在.

综上所述:  $b = 0$  时, 仅当  $\sigma > 0$  (此时  $f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 0$ ), 函数  $f(x)$  在 0 处连续, 否则为振荡间断点. 而当  $b \neq 0$  时, 若  $\sigma > 0$ , 则 0 是第一类跳跃间断的; 若  $\sigma \leq 0$  时, 0 是  $f(x)$  的第二类间断振荡间断点.

## 8 闭区间上连续函数的性质

连续性是个局部 (*local*) 概念, 即函数在一个区间内连续是指它在区间内任意一点连续, 且在区间的端点处左连续或右连续. 通常, 如果知道一个函数在某点连续, 虽然知道在这点近旁函数有有界性等性质, 但并不能由此推断出在另一点是否也连续或局部有界等. 但是, 如果一函数在一闭区间上是连续的, 则会迫使函数具有某些“整体属性 (*global properties*)”, 比如整体有界性等.

**定理 8.1** (有界性定理) 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上有界.

**注记 8.1** 该定理对开区间显然不成立, 比如  $\frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  上连续, 但它在  $(0, 1)$  上显然无界.

**证明:** (利用闭区间套) 记  $[a_1, b_1] = [a, b]$ . 假设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上无界, 将  $[a_1, b_1]$  等分为两个闭区间:  $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ ,  $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ , 则  $f(x)$  至少在其中一个区间上无界, 将其记为  $[a_2, b_2]$ , 再将其二分, 得到  $f(x)$  至少在其中的  $[a_3, b_3]$  上无界. 如此进行下去, 我们便得到了如下闭区间套, 且在其上  $f(x)$  都是无界的.

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots$$

且其长度

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

根据闭区间套定理:  $\exists! \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ . 由于  $\xi \in [a, b]$ , 它是函数的连续点, 则必存在  $\delta > 0$ , 使得  $f(x)$  在  $U(\xi, \delta)$  内有界 (如  $\xi = a$  或  $b$ , 则在  $a$  的一个右邻域,  $b$  的一个左邻域内有界); 但  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 故  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 使得  $[a_N, b_N] \subseteq U(\xi, \delta)$ , 但根据构造,  $f(x)$  在  $[a_N, b_N]$  上无界的, 这与  $f(x)$  在  $U(\xi, \delta)$  上有界相矛盾了. 由此知假设  $f$  在  $[a, b]$  上无界不成立, 故它在  $[a, b]$  上有界.  $\square$

**定理 8.2** (最值存在定理) 若  $f \in C[a, b]$ , 则它在  $[a, b]$  上必能取到其最大 (小) 值, 即  $\exists \xi, \eta \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $f(\eta) = m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$

**证明:** 由定理 8.1 知, 函数  $f$  在  $[a, b]$  上有界, 故其取值的集合  $R_f := \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$  具有上、下确界, 记之为  $\alpha = \inf R_f$ ;  $\beta = \sup R_f$ . 如能证明  $\exists \xi \in [a, b]$  使得  $f(\xi) = \alpha$ , 则说明  $\alpha$  可被  $f$  在  $[a, b]$  上取到, 从而  $\alpha$  就是函数在  $[a, b]$  上的最小值, 即  $\alpha = m$ ; 同理可说明  $\beta = M$ . 下证  $\alpha$  可被取到.

由于  $\alpha$  是下确界, 故  $\forall x \in [a, b]$ , 都有  $f(x) \geq \alpha$ , 且  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $x \in [a, b]$ , 使得  $f(x) < \alpha + \epsilon$ . 那么对  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ , 存在  $x_n \in [a, b]$ , 使得  $\alpha \leq f(x_n) < \alpha + \frac{1}{n}$ . 由于数列  $\{x_n\}$  是有界的, 故由凝聚定理知它必有收敛子列  $\{x_{n_k}\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi \in [a, b]$ , 且有

$$\alpha \leq f(x_{n_k}) < \alpha + \frac{1}{n_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 结合  $f(x)$  在  $\xi$  处的连续性及夹逼定理, 可知:  $f(\xi) = \alpha$ .  $\square$

**注记 8.2** 上述定理只对闭区间成立, 对开区间显然不成立, 比如  $\frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  上; 即便函数在开区间上有界, 也不能保证其最值存在, 比如  $x$  在  $(0, 1)$  上, 其上确界是 1, 但不能被取到.

**定理 8.3** (零点存在定理) 设  $f \in C[a, b]$ , 且  $f(a)f(b) < 0$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$  使得  $f(\xi) = 0$  ( $\xi$  称为是  $f(x)$  的一个零点 (zero), 也称为方程  $f(x) = 0$  的一个根 (root)).

**注记 8.3** 零点存在定理本质涉及实数系的完备性的, 即收敛实数列的极限是实数. 如对函数  $f(x) = x^2 - 2$ , 它在  $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$  中虽满足定理的条件, 但不存在根.

下面证明的思路是用“二分法”搜索  $f(x)$  根的具体位置, 在技术上则转换为用闭区间套来“套”出零点.

**证明:** 记  $[a_1, b_1] = [a, b]$ , 将其二等分, 得到  $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$  和  $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ . 如果  $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$ , 则零点被找到; 如不为零, 则  $f(\frac{a_1+b_1}{2})$  的符号必与  $f(a_1)$  和  $f(b_1)$  符号中的一个相反. 故在两个二分闭区间中必有一个,  $f$  在其两端点的符号相反. 记该区间为  $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ , 对其继续二等分, 然后经由同样的判断得出  $[a_3, b_3]$ , 使得  $f$  在其两端点的符号相反. 继续操作下去, 便得到一个闭区间套

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots$$

函数  $f$  在其中每个闭区间两端的符号相反, 且  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . 从而由闭区间套定理, 知

$$\exists! \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

我们断言:  $f(\xi) = 0$ . 因为假如  $f(\xi) \neq 0$ , 不妨设  $f(\xi) > 0$ , 由于  $f$  是连续函数, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(\xi)$$

则由局部保号性, 知在  $\xi$  的某个领域内, 将由无穷多项  $a_n$  和  $b_n$  使得  $f(\xi)$  与  $f(a_n)$  和  $f(b_n)$  同号, 但这与  $f(a_n)$  和  $f(b_n)$  异号相矛盾. 从而由反证法知  $f(\xi) = 0$   $\square$

**注记 8.4** 以确界存在定理的视角来看, 集合  $E = \{x \mid f(x) < 0, x \in [a, b]\}$  非空且有界, 不妨设  $f(a) < 0, f(b) > 0$ , 故  $E$  必有上确界  $\xi = \sup E$ , 读者可尝试证明  $\xi$  就是  $f(x)$  的一个零点.

**定理 8.4** (介值定理) 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $f(a) \neq f(b)$ , 则对介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间的任意  $c$ , 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = c$ .

**证明:** 令  $F(x) = f(x) - c$ , 显然  $F(x) \in C[a, b]$ , 由于  $c$  介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间, 故

$$F(a)F(b) = (f(a) - c)(f(b) - c) < 0$$

从而由零点存在定理知  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = c$   $\square$ .

下面是上定理的两个自然推论, 证明从略.

**推论 8.1**  $f \in C[a, b]$ , 则它能取到最大值  $M = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$  和最小值  $m = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$  之间的任何值.

**推论 8.2**  $f \in C[a, b]$ , 设  $M = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ ,  $m = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ , 则  $f$  的值域是  $R(f) = [m, M]$ .

**例 8.1** 证明任何实系数奇次多项式方程必有一个实根.

**分析:** 记  $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1}$  (不妨设  $a_0 > 0$ ). 直观上, 由于  $f(x)$  各项中增长最快的项是  $a_0x^{2n+1}$ , 从而当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow +\infty$ , 同理当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ . 由于  $f(x)$  连续, 故由介值定理知  $\exists \xi \in (-\infty, +\infty)$  使得  $f(\xi) = 0$ , 即  $\xi$  是多项式方程  $f(x) = 0$  之根. 但上面所说的“增长最快的项”等字眼稍显模糊, 我们需要找到一个策略, 将直观的论述严格地写出. 策略是除以最高次数项, 从而将无穷大的增长问题转化为对无穷小的控制.

**证明:** 将  $f(x)$  写成  $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1} =$

$$= x^{2n+1} \underbrace{\left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}} \right)}_{g(x)}$$

由此看出, 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 由于  $x^{2n+1}$  可以任意大, 而  $g(x)$  可无限接近  $a_0$ , 又  $a_0 > 0$ , 从而  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ; 同理  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ . 从而可利用零点存在定理.  $\square$

**例 8.2** 证明方程  $3x^5 - 4x^2 = 3$  在区间  $[0, 2]$  上有根.

**证明:** 记  $f(x) = 3x^5 - 4x^2 - 3$ , 它在  $[0, 2]$  上连续, 且  $f(0) = -3$ ,  $f(2) = 80$ , 从而由零点存在定理知  $\exists \xi \in (0, 2)$  使得  $f(\xi) = 0$   $\square$ .

**注记 8.5** 为探测  $\xi$  的具体位置, 我们采用二分法. 由于  $f(1) = -4$ , 故  $\xi \in (1, 2)$ , 又  $f(\frac{3}{2}) > 0$ ; 故  $\xi \in (1, \frac{3}{2})$ ; 又  $f(1.25) = -0.0947265625$ , 故  $\xi \in (1.25, 1.5)$ ; 又  $f(1.375) = 4.18215942383$ , 故  $\xi \in (1.25, 1.375)$ ; 又  $f(1.3125) = 1.79408168793$ , 故  $\xi \in (1.25, 1.3125)$ ; 又  $f(1.28125) = 0.79194530845$ , 故  $\xi \in (1.25, 1.28125)$ ; 又  $f(1.265625) = 0.33473651391$ , 故  $\xi \in (1.25, 1.265625)$  继续下去, 会得到关于零点误差越来越小的近似, 其实在第二步时得到的 1.25 就已经是方程根的一个很好的近似了.

**例 8.3** 设  $f(x) = xe^x$ , 找出  $f^{-1}(2)$  的一个近似值.

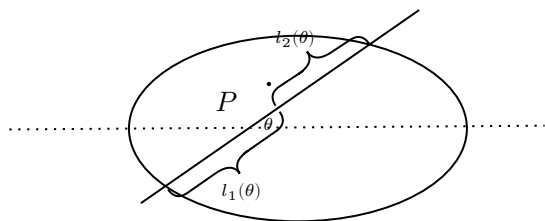
**解:** 我们需要找到  $f(x) = 2$ , 即  $xe^x = 2$  的一个根, 亦即  $g(x) = xe^x - 2$  的一个零点. 由于  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ . 故由零点存在定理知方程存在根.

下面用二分法探测根的位置. 首先  $g(0) = -2$ ,  $g(1) = e - 2 > 0$ , 故  $\exists \xi \in (0, 1)$

使得  $g(\xi) = 0$ ; 又  $g(0.5) = 0.5e^{0.5} - 2 = -1.175639$ , 故  $\xi \in (0.5, 1)$ ; 又  $g(0.75) = -0.41224998754$ , 故  $\xi \in (0.75, 1)$  且 0.75 已经是一个好的近似了.

**例 8.4** 证明: 对椭圆内的任意一点  $P$ , 存在椭圆过  $P$  的一条弦, 使得  $P$  是该弦的中点.

**证明:** 过  $P$  点做弦, 设弦与  $x$ -轴的夹角为  $\theta$ , 则  $P$  点将弦分成长度为  $l_1(\theta)$  和  $l_2(\theta)$  的两线段, 则  $f(\theta) = l_1(\theta) - l_2(\theta)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 且满足  $f(0) = -f(\pi)$



故  $\exists \theta_0 \in (0, \pi)$  使得  $f(\theta_0) = 0$ , 即  $l_1(\theta_0) = l_2(\theta_0)$ .  $\square$

**例 8.5** 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 且  $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ , 则  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ , 阶  $\xi$  是函数  $f(x)$  的一个不动点 (fixed point).

**证明:** 令  $g(x) = f(x) - x$ , 它在  $[a, b]$  上也是连续的, 且  $g(a) = f(a) - a \geq 0$ ,  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ .

1. 如果  $g(a) = 0$  或  $g(b) = 0$ , 则  $\xi = a$  或  $b$ ;
2. 如果  $g(a) > 0$  且  $g(b) < 0$ , 则由零点存在定理知  $\exists \xi \in (a, b)$  使得  $g(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = \xi$ .  $\square$

**例 8.6** 设函数  $f, g$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的连续函数, 且在所有有理点上成立  $f(x) = g(x)$ , 证明  $f \equiv g$  ( $f$  恒等于  $g$ )

**证明:** 给定任意无理数  $x_0$ , 由于有理数集合  $\mathbb{Q}$  在  $\mathbb{R}$  中稠密, 故必存在  $\{x_n\}$  (其中  $x_n \in \mathbb{Q}$ ) 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

由假设知:  $f(x_n) = g(x_n)$ , 则由  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  处连续, 结合海涅定理, 在上等式中令  $n \rightarrow \infty$ , 知

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0) \quad \square$$

**例 8.7** 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 且  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , 成立  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . 证明  $f$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 且  $f(x) = f(1)x$ .

**证明：**在方程  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  中令  $x = y = 0$ , 得到  $f(0) = f(0) + f(0)$ , 故  $f(0) = 0$ , 而  $f(x)$  在  $x = 0$  处的连续性表明:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ .

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ , 我们证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . 记  $\Delta x = x - x_0$ , 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0) + f(\Delta x)] \\ &= f(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = f(x_0)\end{aligned}$$

故  $f$  处处连续. 在方程  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  中令  $x = -y$ , 得

$$0 = f(0) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x)$$

故只需探讨当  $x > 0$  时函数的表达. 在方程  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  中令  $x = y = 1$ , 得  $f(2) = 2f(1)$ , 一般地  $f(n1) = nf(1)$ , 故结论对自然数成立, 下证它对任意有理数也成立. 由于

$$f(1) = f\left(n \frac{1}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_n\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \implies f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$$

故对一般有理数  $\frac{m}{n}$ , 我们有

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \frac{1}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_m\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$$

从而  $f(x) = f(1)x$  对所有有理数都成立, 而函数是处处连续的, 故由例 8.6 的结论知结论对任意无理数也成立.  $\square$

**例 8.8** 设  $f \in C[a, b]$ ,  $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$ . 证明: 存在  $\xi \in [x_1, x_n]$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

**证明：**设  $m = \min_{x \in [x_1, x_n]} f(x)$ ,  $M = \max_{x \in [x_1, x_n]} f(x)$  (它们的存在性由闭区间上连续函数的最值存在定理保证.) 从而

$$m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M$$

故有介值定理知  $\exists \xi \in [x_1, x_n]$  使得  $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$   $\square$

## 9 附录一：极限与渐近线

记函数  $y = f(x)$  表示的曲线是  $C$ ，若动点沿曲线无限远离原点时，此动点与某一固定直线的距离趋于零，则称该直线为曲线的一条渐近线 (asymptote)。

1. 铅直 (vertical) 渐近线：垂直于  $x$  轴的直线  $x = x_0$  为曲线的渐近线当且仅当

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$$

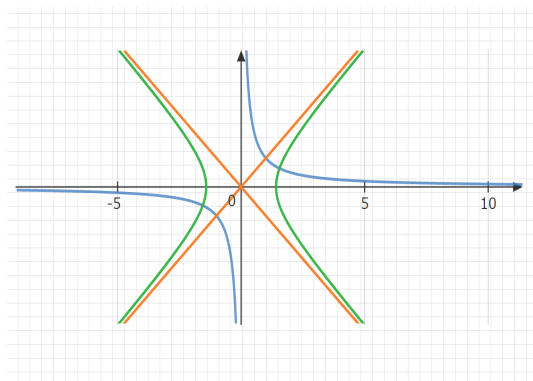
2. 水平 (horizontal) 渐近线：平行于  $x$  轴的直线  $y = y_0$  为曲线的渐近线当且仅当

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

3. 斜 (oblique) 渐近线： $y = ax + b (a \neq 0)$  是曲线的渐近线当且仅当

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

**例 1** 双曲线  $y = \frac{1}{x}$  显然有水平渐近线  $y = 0$  (因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ )；有垂直渐近线  $x = 0$  (因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ ，准确说是  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ； $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ )



引入变量替换

$$\begin{cases} x = \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}}_{\text{旋转矩阵}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

则在  $v-u$  坐标系里 ( $x-y$  坐标系顺时针旋转  $45^\circ$ ), 原双曲线的方程变为

$$v^2 - u^2 = 2$$

它有一对斜渐近线  $v \pm u = 0$ . 我们下面用计算来验证. 设  $u = av + b$  是其渐近线, 则对曲线的一支  $u = \sqrt{v^2 - 2}$ , 有

$$\lim_{v \rightarrow \infty} [\sqrt{v^2 - 2} - (av + b)] = 0$$

即, 确定常数  $a, b$  的值, 使得上极限成立, 当  $v \rightarrow \infty$  时,  $\sqrt{v^2 - 2} \sim v$ , 故  $a = 1$ , 尚需确定常数  $b$  的值, 使得

$$0 = \lim_{v \rightarrow \infty} [\sqrt{v^2 - 2} - (v + b)] \stackrel{t := \frac{1}{v}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2t^2} - (1 + bt)}{t} \implies b = 0$$

即  $u = v$  是双曲线右半支的一条斜渐近线.

同理, 对另一支  $u = -\sqrt{v^2 - 2}$ , 有

$$\lim_{v \rightarrow \infty} [-\sqrt{v^2 - 2} - (av + b)] = 0 \implies a = -1, b = 0$$

即  $u = -v$  的左半支的一条斜渐近线.

**注:** 求曲线  $v^2 - u^2 = 2$  的渐近线相对于将曲线族  $v^2 - u^2 = \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) 退化为  $\epsilon = 0$  的情形.

**例 2**  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$  的渐近线.

**分析:** 由于  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , 故不存在水平渐近线; 又对任意有限的  $x_0$ , 都有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 故也不存在铅直渐近线. 下面讨论其是否存在斜渐近线. 首先当  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x)$  渐进于  $y = x$ , 即作为无穷大量, 有  $f(x) \sim x$  ( $x \rightarrow \infty$ ). 即渐近线的方向同于  $y = x$  的方向, 我们只需要确定一常数  $c$ , 使得  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x + c)] = 0$ . 即

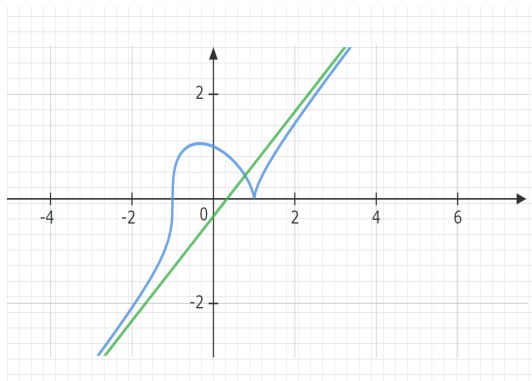
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} - (x + c)] = 0$$

用变量替换  $t = \frac{1}{x}$ , 则上极限变为

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \sqrt[3]{\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1} - \frac{1}{t} - c \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt[3]{1 - t - t^2 + t^3} - (1 + ct)}{t} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \frac{t}{3}(1+t-t^2) + o(t) - (1+ct)}{t} \right] = 0 \implies c = -\frac{1}{3}$$

故  $y = x - \frac{1}{3}$  是曲线  $f(x) = 0$  的一条斜渐近线.



## 10 附录二：无穷小的阶的运算

**问题：**如果当  $x \rightarrow 0$  时， $\alpha(x) = o(x^m)$ ，但  $\alpha(x) \neq o(x^{m+1})$ ；且  $\beta(x) = o(x^n)$ ，但  $\beta(x) \neq o(x^{n+1})$ ，即  $\alpha(x)$  是  $m+1$  阶无穷小， $\beta(x)$  是  $n+1$  阶无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x^m} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x^{m+1}} \neq 0; \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{x^n} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{x^{n+1}} \neq 0$$

试问： $\alpha(x) + \beta(x)$ （设不为零）和  $\alpha(x)\beta(x)$  的阶分别时多少？

**解：**假设  $\alpha(x) + \beta(x) = o(x^k)$ ，则须满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{x^k} = 0, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{x^{k+1}} \neq 0$$

为使上条件成立，不难看出： $k = \max\{m, n\}$ . 或者，当  $x \rightarrow 0$  时，可设  $\alpha(x) = Ax^{m+1}$ ， $\beta(x) = Bx^{n+1}$ ，其中  $A, B$  为非零常数. 不妨设  $k = n$ ，则有

$$\alpha(x) + \beta(x) = Ax^{m+1} + Bx^{n+1} = x^{m+1}(A + Bx^{n-m})$$

即知  $\alpha(x) + \beta(x)$  是  $m+1 = \min\{m+1, n+1\}$  阶无穷小，即

两无穷小之和的阶是两者无穷小阶的最小值.

我们用符号  $\text{ord}(\alpha(x))$  记  $\alpha(x)$  的阶，则有

$$\text{ord}(\alpha(x) + \beta(x)) = \min\{\text{ord}(\alpha), \text{ord}(\beta(x))\}$$

对于无穷小的乘积，我们显然有

$$\text{ord}(\alpha(x)\beta(x)) = \text{ord}(\alpha(x)) + \text{ord}(\beta(x))$$

即

两无穷小的乘积的阶是两者无穷小阶的和.

直观上来说， $\alpha(x)$  趋于零的速度快过  $x^m$ ， $\beta(x)$  趋于零的速度快过  $x^n$ ，而  $\alpha(x) + \beta(x)$ （假设不为零）趋于零时，是要同时顾及  $\alpha(x)$  和  $\beta(x)$  的速度的，相当于将两者“绑定”在一起奔向零，那么， $\alpha(x) + \beta(x)$  趋于零的速度就不能超过两者中“最慢”（阶最小者）的，否则“最慢”的会“掉队”；而  $\alpha(x)\beta(x)$  趋向于零的过程，相当于两者“强强联合，互相加速”，故以两者阶之和为阶。

这样一来，我们就有了一种对无穷小的阶的运算的代数结构，它与我们熟悉的数运算的代数不同，即两者的和定义为其中最小者，积定义为两者的和。也就是说，在阶的层面，我们有

$$\alpha(x) + \beta(x) = \min\{\alpha(x), \beta(x)\} \quad \alpha(x) \times \beta(x) = \alpha(x) + \beta(x)$$

在数学中，复合上面规则的奇异的代数结构称为“极小热带半环 (*minimal tropical semi-ring*)”结构，该代数结构在“镜像对称” (*mirror symmetry*)，计数几何 (*enumerative geometry*) 等领域有重要的应用。

另外，上面的讨论给我们的启示是：虽然无穷量本身千变万化，复杂难控，但如只考虑其阶，则会给出了关于无穷量的一个可结构化的特征轮廓，表现于上面 tropical 代数的结构里头。

**注记：** 如果上面结构中的  $\min$  以  $\max$  取代，则它对应于关于无穷大量阶的运算。或者，如果将  $x \rightarrow \infty$  时无穷大量的阶定义为负，比如  $\text{ord}(x^m) = -m$ 。

则变换  $x \mapsto \frac{1}{x}$ （无穷小  $\rightarrow$  无穷大）在阶的层面对应为  $x \mapsto -x$ ，从而将  $\min$  变为  $\max$ ，即

$$\min\{m, n\} = -\max\{-m, -n\}$$

## 11 附录三：反函数连续性定理的证明

**反函数连续性定理：**设函数  $y = f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续且严格单调增加，且  $f(a) = \alpha$ ,  $f(b) = \beta$ ，则它的反函数  $x = f^{-1}(y)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续且严格单调增加。

**证明：**由于  $f(x) \in C[a, b]$ ，且  $f(x)$  严格单调增加，则由介值定理的推论知  $f$  可取到  $\alpha = f(a)$  和  $\beta = f(b)$  之间的任何值，即  $f$  的值域  $R(f) = [\alpha, \beta]$ 。则根据反函数存在性定理知在  $[\alpha, \beta]$  上的反函数  $x = f^{-1}(y)$  存在，且也是严格单调增加函数。下证其在  $[\alpha, \beta]$  上时连续的。

对任意  $y_0 \in (\alpha, \beta)$ ， $f^{-1}(y_0) = x_0 \in (a, b)$ 。则  $\forall \epsilon > 0$ ，须找到  $\delta > 0$ ，使得当  $|y - y_0| < \delta$  时，有

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon \iff x_0 - \epsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \epsilon$$

令  $y_- = f(x_0 - \epsilon)$ ,  $y_+ = f(x_0 + \epsilon)$ ，可取  $\delta = \min\{y_0 - y_-, y_+ - y_0\} > 0$ ，则当  $|y - y_0| < \delta$  时，成立

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$$

如  $y_0 = \alpha$  或  $\beta$ ，需验证函数的右连续性或左连续性，证明思路时类似的，此处省略。□

**注记：**区间  $(a, b)$  上单调函数的不连续点必为第一类不连续点。其证明如下

**证明：**不妨设  $f$  单调增加。对任意  $x_0 \in (a, b)$ ，集合  $\{f(x) \mid x \in (a, x_0)\}$  有上界，由确界存在定理知  $\alpha = \sup\{f(x) \mid x \in (a, x_0)\}$  存在。也就是说， $\forall x \in (a, x_0)$ ，必有  $f(x) \leq \alpha$ ，且  $\forall \epsilon > 0$ ，必  $\exists x' \in (a, x_0)$ ，使得  $f(x') > \alpha - \epsilon$ 。取  $\delta = x_0 - x' > 0$ ，则当  $-\delta < x - x_0 < 0$  时，有  $x' < x < x_0$ ，则由单调性得

$$-\epsilon < f(x') - \alpha \leq f(x) - \alpha \leq 0$$

即  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$ 。同理可证  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \beta$ ，其中  $\beta = \inf\{f(x) \mid x \in (x_0, b)\}$ 。也就是说，函数在  $x_0$  处的左、右极限都时存在的。换言之，单调函数的不连续点必定时跳跃点。□