hw_11

1. 讨论下列反常积分的敛散性，如果收敛求出它的值：

a) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$;

解：

令 $u=\ln x$，$du=\frac{dx}{x}$

当 $x=e$，$u=1$
$x\to\infty$，$u\to+\infty$

$$\text{原式}=\int_1^{+\infty}\frac{du}{u}=\lim_{t\to+\infty}|u|\Big|_1^t=+\infty$$

故发散

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$

解：

$$\text{原式}=\left(\frac{e^{-x}}{2}(-\sin x-\cos x)\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

故收敛，值为 $\frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$;

解：

$$\text{原式}=-\frac{\arctan x}{x}\Bigg|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{4}+\left(\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Bigg|_1^{+\infty}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

故收敛，值为 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}$

解:

令 $x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$\text{原式}=\int_1^0\frac{-dt}{\sqrt{2-2t+t^2}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+1}}$$
$$=\ln\left(t-1+\sqrt{(t-1)^2+1}\right)\Big|_0^1=\ln(\sqrt{2}+1)$$

故收敛，值为 $\ln(\sqrt{2}+1)$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,dx$**;**

解:

$$\text{原式}=\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$$
$$=-\frac{x}{e^x+1}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+1}$$
$$=0+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$
$$=-\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=\ln 2$$

故收敛，值为 $\ln 2$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(4+x)}$

解:

令 $t=\sqrt{x}$，$x=t^2$，$dx=2t\,dt$

$$\text{原式}=\int_0^{+\infty}\frac{2t\,dt}{4+t^2}=\arctan\frac{t}{2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

故收敛，值为 $\frac{\pi}{2}$

2. 判断下列反常积分的敛散性，如果收敛求出它的值：

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$;

解：

令 $t=\sqrt{1+x}$

$$x=t^2-1,\quad dx=2t\,dt$$

$$\text{原式}=\int_0^1 (t^2-1)\,dt=\left(\frac{2}{3}t^3-2t\right)\Big|_0^1=-\frac{4}{3}$$

收敛，值为 $-\frac{4}{3}$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$

解：

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|$$

当 $x\to 1$，$\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\to +\infty$

故发散

c) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

解：

令 $u=\ln x$，$du=\frac{dx}{x}$

$$\text{原式}=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

故收敛，值为 $\frac{\pi}{2}$

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}}$

解：

$$\text{原式}=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}$$

$$= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \left(\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x}\right|\right)\Bigg|_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})$$

故收敛，值为 $\frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})$

3. 设 $k \in \mathbb{R}$，讨论 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 的敛散性。

解:

令 $u = \ln x$，$du = \frac{dx}{x}$

$$原式 = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^k}$$

$$k > 1 \quad 收敛$$

$$k \leq 1 \quad 发散$$

4. 求下列曲线所围成的图形的面积。

a) $x^2 + 3y^2 = 6y$ 与直线 $y = x$（两部分都要计算）

解:

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 6y \\ y = x \end{cases}$$

解得：$(0,0)$，$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$S_1 = \int_0^{1.5} \left(x - 1 + \sqrt{1-\frac{x}{3}}\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

$$S_2 = S - S_1 = \sqrt{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi = \frac{5\sqrt{3}}{6}\pi$$

b) 抛物线 $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2}, p\right)$ 处的法线所围成的面积；

解:

$$y = -x + \frac{3}{2}p$$

$$S = \int_{-3p}^{p} \left(\frac{3p}{2} - y - \frac{y^2}{2p}\right) dy = \frac{16}{3}p^2$$

c) 曲线 $y = e^x$ 与通过坐标原点的切线及 y 轴所围成的图形。

解：

$$y = e^x$$

$$(1, e)$$

$$S = \int_0^1 (e^x - ex)\, dx = \left(e^x - \frac{e}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

5. 用两种方法计算心脏线所围成图形的面积

a)

参数式：$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$；

解：

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - yx')dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 6a^2(1 - \cos t)dt = 6\pi a^2$$

b)

极坐标下：$r = 2a(1 - \cos\theta)\ (a > 0)$

解：

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = 2a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta = 6\pi a^2$$

6. 求双纽线 $r^2 = 4\cos 2\theta$ 位于第一象限部分上求一点 M，使得坐标原点 O 与点 M 的连线 OM 将双纽线所围成的位于第一象限部分的图形分为面积相等的两部分。

解：

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos 2\theta\, d\theta = 1$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} 4\cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12}$$

$$r = \sqrt{2\sqrt{3}}$$

$$M\left(\sqrt{2\sqrt{3}},\ \frac{\pi}{12}\right)$$

7. 求下曲线所围成的图形的公共部分的面积：

$$r = 3\cos\theta, \quad r = 1 + \cos\theta$$

解：

$$3\cos\theta = 1 + \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$S = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2\theta\, d\theta\right] = \frac{5}{4}\pi$$

8. 求由笛卡尔叶形线 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$) 所围图形的面积。

解：

$$r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$$

$$\theta \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{3}{2}a^2$$

9. 求下列各立体的体积：

(a) 以椭圆域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($a > b > 0$) 为底面，且垂直于长轴的截面都是等边三角形的立体；

解：

$$A(x) = \sqrt{3}\,y^2 = \sqrt{3}\,b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V=\int_{-a}^{a}A(x)\,dx=\frac{4\sqrt{3}}{3}ab^2$$

(b) 由曲面 $y^2+z^2=e^{-2x}$ 与平面 $x=0, x=1$ 所围成的立体。

解:

$$A(x)=\pi e^{-2x}$$

$$V=\int_0^1 \pi e^{-2x}\,dx=\frac{\pi}{2}(1-e^{-2})$$

10. 求下列各旋转体的体积:

(a) 曲线 $y=\sin x$，$y=\cos x$ ($0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$) 与直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$，$x=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得到的旋转体;

解:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\pi(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4})+\pi(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4})=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}$$

(b) 摆线

$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$ 的第一拱（$0\le t\le 2\pi$）与 x 轴所围成的图形绕直线 $y=2a$ 旋转所得的旋转体。

解:

$$S=3\pi a^2,\quad y_c=\frac{5}{6}a,\quad d=\frac{7}{6}a$$

$$V=2\pi dS=7\pi^2a^3$$

11. 用“薄壳法”求下列各旋转体的体积:

(a) 由曲线 $y=x(x-1)^2$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得到的旋转体。

解:

$$V=2\pi\int_0^1 x\cdot x(x-1)^2dx=2\pi\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)\,dx=\frac{\pi}{15}$$

(b) 由抛物线 $y = 2x - x^2$ 与直线 $y = x$ 及 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得的旋转体。

解:

$$V = 2\pi \int_0^1 x(2x - x^2 - x)\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \frac{\pi}{6}$$

12. 求下列各旋转体的面积:

(a) 立方抛物线 $y = x^3$ 介于 $x = 0$ 与 $x = 1$ 之间的一段弧绕 x 轴旋转所得到的旋转面。

解:

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

(b) 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 绕 x 轴旋转所得的旋转面。

解:

$$S = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\, dt = \frac{12\pi a^2}{5}$$

13. 求抛物线 $y = \sqrt{x-1}$ 与它的通过坐标原点的切线及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的表面积。

解:

$$y = \frac{x}{2}, \quad (2, 1)$$

$$S = \sqrt{5}\,\pi + 2\pi \int_1^2 \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4(x-1)}}\, dx = \frac{\pi}{6}(11\sqrt{5} - 1)$$

14. 计算下列各弧长:

(a) 曲线 $y = \ln(\cos x)$ 上从 $x = 0$ 到 $x = \dfrac{\pi}{4}$ 的一段弧长。

解:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\, dx = \ln(1 + \sqrt{2})$$

(b) 曲线 $x = \arctan t$, $y = \dfrac{\ln(1+t^2)}{2}$ 相应于 $0 \le t \le 1$ 的一段弧。

解:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2}\, dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(1+\sqrt{2})$$

(c) 曲线 $\theta = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$ 相应于 $1 \le r \le 3$ 的一段弧。

解:

$$ds = \sqrt{1+(r')^2}\, dr = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)dr$$

$$L = \int_1^3 \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)dr = 2 + \frac{1}{2}\ln 3$$

15. 设 $f \in C[0,1]$，当 $x \in (0,1)$ 时，$f(x) > 0$，并且满足关系式 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2 \quad (a \text{ 为常数})$，又曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成的图形 S 的面积为 2。

(a) 求函数 $f(x)$；

解:

$$xf'(x) - f(x) = \frac{3a}{2}x^2$$

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{3a}{2}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3a}{2}x + C$$

$$f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + Cx$$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 2$$

$$\left(\frac{a}{2}x^3 + \frac{C}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = 2$$

$$C = 4 - a$$

$$f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + (4-a)x$$

(b) 当 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积最小？

解：

$$V = \pi \int_0^1 f(x)^2 \, dx = \pi \left(\frac{9a^2}{20} + 3a - \frac{3a^2}{4} + \frac{16 - 8a + a^2}{3} \right) = \pi \left(\frac{1}{30}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{16}{3} \right)$$

$$V' = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -5$$

$$a = -5, \quad V'' = \frac{\pi}{15} > 0$$

$$\text{故 } a = -5$$