

作业 二 解答

必做题：

1. 数集 $E = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$ 的下确界是多少？证明你的结论。

解： $\inf E = 0$. 首先， $\forall \frac{1}{n} > 0$, 故 0 是 E 的一个下界，下证它是最大（从而是唯一）的下界。任给比 0 大的 ϵ , 都存在 $\exists \frac{1}{m} \in E$, 使得 $\frac{1}{m} < \epsilon$, 故任比 0 大的数 ϵ 都不再是 E 的下界。换言之，0 是 E 的下确界。

注 1：确界的定义本身就蕴含了与之相关的论证之道。

- (a) 上确界即最小上界，任意比它小的数都不是上界，即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in E$, 使得 $x_\epsilon > \sup E - \epsilon$ ；
(b) 下确界即最大下界，任意比它大的数都不是下界，即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in E$, 使得 $x_\epsilon < \inf E + \epsilon$.

2. 对非空数集 E , 证明若 $\inf E$ 存在，则其必唯一。

证明：用反证法。设 $\beta \neq \beta'$ 同为 E 的下确界，不妨设 $\beta < \beta'$. 由于两者都是下确界，故 $\forall x \in E$, $x \geq \beta$, $x \geq \beta'$. 从 β 为下确界的角度来看，任意比它大的数都不是下界，即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in E$, 使得 $x_\epsilon < \beta + \epsilon$. 对 ϵ 赋以值 $\beta' - \beta$, 则由上知 $\exists x_\epsilon \in E$, 使得 $x_\epsilon < \beta + \epsilon = \beta + (\beta' - \beta) = \beta'$, 但这与 β' 也是下确界（从而是下界）的假设相矛盾。故不可能有两个不同的下确界，即下确界存在必唯一。□。

3. 用定义严格证明： $y = \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界。

证明：即需证函数 y 的值域 $R := \left\{ \frac{1}{x^2} \mid \forall x \in (0, +\infty) \right\}$ 作为 \mathbb{R} 的子集（从而使一数集）是无界的。由数集 E 有界的定义： $\exists M > 0$, $\forall x \in E$, $|x| \leq M$ 知，欲证明 R 无界，只需表明： $\forall M > 0$, $\exists y \in R$, 使得 $|y| > M$ 。这是容易的，因为

$$|y| = \left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} > M \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

故 $\forall M > 0$, 取 $x = \frac{1}{\sqrt{M}} - \epsilon \in (0, \infty)$ (其中 $\epsilon > 0$ 是使得 $x \in (0, +\infty)$ 内的任意正数), 则对应函数值

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}} - \epsilon\right)^2} > \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2} = M. \quad \square.$$

4. 如果数列的一般项可写成 $a_n = f(n)$ 的形式, 其中 f 是 \mathbb{R} 上的函数 (或至少是 $[1, +\infty)$ 上的函数), 证明: 如 f 单调增加, 则 $\{a_n\}$ 亦单调增加.

证明: 因 f 单调增加, 故 $\forall 1 \leq x_1 < x_2 < +\infty$, 都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$. 特别地, $\forall n \in \mathbb{N}$, 分别赋值: $x_1 = n, x_2 = n+1$, 则 $a_n = f(n) \leq f(n+1) = a_{n+1}$, 故数列 $\{a_n\}$ 单调增加. \square .

5. 数列 $\left\{\frac{n+3}{n+1}\right\}$ 是否单调? 是否有界? 证明你的论断.

解: 其前几项为: $2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \dots$ 不易看出规律. 考虑将式子变形

$$\frac{n+3}{n+1} = \frac{n+1+2}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$$

变化趋势由此明显. 不难看出它是单调减少且有界, 其上 (确) 界为 2; 下确界为 1. 下严格证之.

$$\begin{aligned} \text{单调性: } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ 有 } \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+3}{n+1} &= \\ &= \left(1 + \frac{2}{n+2}\right) - \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) = 2 \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) < 0 \end{aligned}$$

$$\text{有界性: } \left|\frac{n+3}{n+1}\right| = \left|1 + \frac{2}{n+1}\right| \leq 1 + \frac{2}{n+1} < 1 + 2 = 3.$$

上确界为 2: 显然 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1} \leq 2$$

且 2 能被数列取到 ($n = 2$ 时), 即数列各项最大值是 2, 故 $\sup = \max = 2$.

下确界为 1: $\forall n \in \mathbb{N}$, 有 $\frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1} > 1$

故 1 是下界, 下表明它是最大的下界 (即下确界). 若不是最大下界, 即 $\exists \epsilon_0 > 0$, 使得 $1 + \epsilon_0$ 也是下界, 则 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 + \frac{2}{n+1} > 1 + \epsilon_0$$

亦即 $\epsilon_0 < \frac{2}{n+1}$ 对任意 n 都成立, 但这显然不可能 (因 $\frac{2}{n+1}$ 可以无限接近于 0, 它能小于任意比零小的数). 由此得证 $\inf \left\{ \frac{n+3}{n+1} \right\} = 1$. \square .

6. 数列 $\{x_n\}$ 由 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ 给出, 且初始值满足 $0 < x_1 < 1$, 证明它是单调的且有下界. 并求其极限.

证明: 不难猜测数列单调减少有下界, 下证之.

有界性 (用数学归纳法): 由 $0 < x_1 < 1$, $x_2 = x_1(1 - x_1)$ 知 $0 < x_2 < 1$.
设 $\forall n \geq 3$, $0 < x_n < 1$, 由 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ 知 $0 < x_{n+1} < 1$.

单调性: 上已证 $\forall n \in \mathbb{N}$, 都有 $0 < x_n < 1$. 则

$$x_{n+1} - x_n = x_n(1 - x_n) - x_n = -x_n^2 < 0$$

即证得 $\{x_n\}$ 是单调减少的.

注 2. 既然 $\{x_n\}$ 即单调减少又有下界, 故由单调有界收敛准则 (后面会细讲) 知它必有极限, 且极限必为下确界 $\inf\{x_n\}$. 下面是其计算法.

既然 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 那么我们可以在关系式 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ 两边令 $n \rightarrow \infty$, 从而得 $L = L(1 - L)$, 解得 $L = 0$. 故下确界为 0.

注 3. 再次强调: 是因为先确定了极限 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性, 才能在递归关系两边求极限的, 否则是错误! 另外, 上结果表明, 无论初始值 x_1 选成什么, 只要它介于 0 和 1 间, 数列变化的最终趋势是一致的. 这种对初值的不敏感性与 “混沌 (chaos)” 中数学结构对初值具异常敏感性 (如著名的 “蝴蝶效应”) 形成了鲜明的对比.

7. 用极限的定义严格证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+7}{2n+13} = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}\text{证明: 先变换式子 } & \left| \frac{3n+7}{2n+17} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{2(3n+7) - 3(2n+17)}{2(2n+17)} \right| = \\ & = \frac{37}{2(2n+17)} < \frac{19}{2n+17} < \frac{19}{2n} < \frac{5}{n}\end{aligned}$$

由上分析 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N := \left[\frac{5}{\epsilon} \right]$, 则 $\forall n > N$ 时, 有 $\left| \frac{3n+7}{2n+17} - \frac{3}{2} \right| < \frac{5}{n} < \epsilon$,
故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+7}{2n+13} = \frac{3}{2}$. \square .

注 4. 直观上, 当 n 非常大时, $2n+7$ 与 $3n$ 的量级“最终”相当, $2n+13$ 与 $2n$ 量级“最终”相当, 从而 $\frac{3n+7}{2n+13}$ 与 $\frac{3n}{2n}$ 量级“最终”相当, 即 极限为 $\frac{3}{2}$. 上面借助极限严格定义的论证, 是对该“直观”从数量控制(放缩)的角度出发, 而所作出的逻辑上严丝合扣的模刻.

注 5. 如对下题, 为证明 $\frac{n!}{n^n}$ 是无穷小, 须将其“放缩”到 $\frac{n!}{n^n} < f(n)$ 的形式, 其中 $f(n)$ 须是无穷小, 且易于从 $f(n) < \epsilon$ 解出 $n > N$ 的结构, 则从 $\frac{n!}{n^n} < \epsilon$ 解出 $n > N$ 的困难问题就转化为从 $f(n) < \epsilon$ 解出 $n > N$ 的相对容易的问题. 弃繁就简自然导致数量变化的细节有所改变, 但不改变其最终趋势. 由此, 我们“抓住了”其极限的本质.

8. 用极限的定义严格证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

证明: 先变换式子 $\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots \cdots n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n}$. 从第二项开始每项都 < 1 , 故 $\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$. 简易! 故 $\forall \epsilon > 0$, 只要取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时 $\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} < \epsilon$. 即知 $\frac{n!}{n^n}$ 为无穷小量. \square .

注 6. 若容许用“牛刀宰鸡”, 则借助对 $n!$ 增长量级估计的斯特林 (Sterling) 公式: $n! \sim \sqrt{2\pi}e^{-n}n^n$ (即当 n 大时, $n!$ 的增长和量级与 $\sqrt{2\pi}e^{-n}n^n$ 相当), 可知 $\frac{n!}{n^n} \sim \sqrt{2\pi}e^{-n} \rightarrow 0$.

9. 用定义证明 $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$ 是无穷小.

证明: 首先注意到 $\sin \frac{n\pi}{2}$ 有界, 即 $|\sin \frac{n\pi}{2}| \leq 1$, 而 $\frac{1}{n}$ 显然是无穷小.

直观上 (当然也是定理), 一无穷小和有界量的乘积自然也是无穷小.

还原到原初概念层面也是容易证明的. $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则 $\forall n > N$

$$|a_n| = \left| \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right| \leq \frac{1}{n} < \epsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad \square.$$

10. 用定义证明 $a_n = \frac{n^2 + 1}{2n - 1}$ 是无穷大.

注 7. 先回忆无穷大量的定义. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 当且仅当 $\forall M > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$, 有 $a_n > M$. 如果 a_n 结构复杂, 不易从 $a_n > M$ 解出 $n > N$, 则需转换结构, 将其放缩为 $a_n > f(n)$, 其中 $f(n)$ 必须是无穷大量, 且 $f(n)$ 的结构相对简易, 方便从 $f(n) > M$ 解出 $n > N$.

证明: 注意到 $\frac{n^2 + 1}{2n - 1} > \frac{n^2 + 1}{2n} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$, 而 $\frac{n}{2} > M$ ($M > 0$) 当且仅当 $n > [2M]$.

故 $\forall M > 0$, 取 $N = [2M]$, 则 $\forall n > N$, 有 $\frac{n^2 + 1}{2n - 1} > \frac{n}{2} > M$. 从而 $\{a_n\}$ 是无穷大量. \square .

注 7. 如不惯于无穷大的文法格式, 也可将问题转为证明 $\frac{1}{a_n} = \frac{2n - 1}{n^2 + 1}$ 为无穷小, 即 $\forall \epsilon > 0$, 需找 N , $\forall n > N$, 有 $\frac{2n - 1}{n^2 + 1} < \epsilon$. 而这是容易的, 只需注意到 $\frac{2n - 1}{n^2 + 1} < \frac{2n}{n^2 + 1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$, 然后套路化“包装”即可.

11. 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $\{y_n\}$ 满足: $\exists \delta > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n \geq N$, 有 $|y_n| \geq \delta$, 证明 $\{x_n y_n\}$ 是无穷大量.

证明 (看似抽象, 其实是“文法”的规范化常规练习): 由于 $\{x_n\}$ 是无穷大量 (正、负无穷大同时处理), 故 $\forall A > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > M$,

有 $|x_n| > \frac{A}{\delta}$. 取 $K := \max\{N, M\}$, 则当 $n > K$ 时, 有

$$|x_n y_n| = |x_n| |y_n| > \delta \cdot \frac{A}{\delta} = A. \quad \square.$$

注 8. 类似地: 设 $\{x_n\}$ 为无穷小量, $\{y_n\}$ 有界, 则 $\{x_n y_n\}$ 是无穷小量.

12. 举出满足下列要求的数列的例子.

- (1) 有界数列但无极限; (2) 无界数列但不是无穷大

解答: 我们知道: 数列有极限必有界. 但反过来, 有界数列未必有极限, 比如最简单的振荡类型 $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$, 或变化稍复杂点的 $\{\sin n\}$ 等等; 同理, 可证: 无穷大量必是无界的, 但反过来, 无界数列未必是无穷大量. 比如 $\{n \sin n\}$ 显然无界 (因其“振幅” n 可任意大, 但正因为其持续振荡特征, 其值无法有恒定趋势.) 或更简单的 $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ 偶} \\ n, & n \text{ 奇.} \end{cases}$

注 9. 上面的 a_n 无极限按定义的证明为: $\forall A > 0$, 我们证明 a_n 都不可能以 A 为极限. $|a_n - A| = \begin{cases} |1/n - A|, & n \text{ 偶} \\ |n - A|, & n \text{ 奇} \end{cases}$ 需找到一个 $\epsilon_0 > 0$, 使得 $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n_0 > N$, 使得 $|a_{n_0} - A| \geq \epsilon_0$. 显然, 只需取 $\epsilon_0 = 1/2$, 则不论 A 是多少, 也不论 N 是奇是偶, 总可找到大于 N 的一个奇数 n_0 , 使得 $|a_{n_0} - A| \geq 1/2$.

由上看出, 证明思路不难, 但说明不易, 尤其是对 $\{n \sin n\}$, 要想严格说明它不存在极限, 是要费一番周折的. 但若有了“归结原理”, 即一数列收敛当且仅当其任意子数列都收敛且收敛于同一值, 那么, 若想证明一数列不收敛 (即无极限), 只需找到其不收敛的一个子列, 或找到两个不收敛于同一值的子列. 对上面的例子, 其偶数项构成的子列 $\{\frac{1}{2n}\}$ 收敛到 0, 其奇数项构成的子列 $\{2n+1\}$ 显然为无穷大, 故原数列无极限. 同理, 对 $\{n \sin n\}$, 可挑选 $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, 使得对应 $\sin n_k > 0$, 则子列 $\{n_k \sin n_k\}$ 发散到正无穷, 也可选 $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$, 使得对应 $\sin m_k < 0$, 则子列 $\{m_k \sin m_k\}$ 发散到负无穷, 由此知 $\{n \sin n\}$ 不可能有极限.

选做题：

1. 设数集 E 有上界, 证明: 数集 $-E := \{x \mid -x \in E\}$ 有下界, 且 $\sup E = -\inf(-E)$.

证明: 由于 E 有上界, 故 $\exists M$, 使得 $\forall x \in E$, 有 $x \leq M$, 则 $\forall x \in E$, 有 $-x \geq -M$, 即 $-E$ 以 $-M$ 为其一个下界, 从而 $-E$ 是有下界的. 记 $\alpha := \sup E$, 即 $\forall x \in E$, $x \leq \alpha$, 且 $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in E$, 使得 $x_\epsilon > \alpha - \epsilon$. 换言之, $\forall x \in E$, $-x \geq -\alpha$, 且 $\forall \epsilon > 0$, $\exists -x_\epsilon \in -E$, 使得 $-x_\epsilon < -\alpha + \epsilon$. 这说明 $\inf(-E) = -\alpha = -\sup E$. \square .

2. 对非空数集 A, B , 定义其和为 $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. 证明: 若 A, B 皆有上界, 则 $A+B$ 亦有上界, 且 $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

证明: 若 A, B 都有上界, 分别设为 M 和 N , 则 $\forall a \in A, \forall b \in B$, 都有 $a \leq M, b \leq N$. 故 $\forall a+b \in A+B$, 成立 $a+b \leq M+N$. 从而 $A+B$ 以 $M+N$ 为其一个上界, 即 $A+B$ 亦有上界.

另一方面, 若 $\alpha = \sup A, \beta = \sup B$. 下证 $\sup(A+B) = \alpha+\beta$. 由上确界的性质, 知 $\forall a+b \in A+B$, $a+b \leq \alpha+\beta$, 即 $\alpha+\beta$ 是 $A+B$ 的一个上界. 又 $\forall \epsilon > 0$, $\exists a_\epsilon \in A$, 使得 $a_\epsilon < \alpha - \frac{\epsilon}{2}$; $\exists b_\epsilon \in B$, 使得 $b_\epsilon < \beta - \frac{\epsilon}{2}$, 则有 $a_\epsilon + b_\epsilon \in A+B$, 使得 $a_\epsilon + b_\epsilon < \alpha - \frac{\epsilon}{2} + \beta - \frac{\epsilon}{2} = \alpha + \beta - \epsilon$, 即是说 $A+B$ 以 $\alpha+\beta$ 为其上确界. \square .

3. 数列 a_n 满足 $a_n \leq qa_{n-1}$, 其中 $a_n > 0, 0 < q < 1$, 用定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

证明: 需表明 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N$, 成立 $|a_n| < \epsilon$.

$$|a_n| \stackrel{\text{假设}}{=} a_n \leq qa_{n-1} \leq q^2 a_{n-2} \leq \cdots \leq q^{n-1} a_1$$

故若能找到 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $q^{n-1} a_1 < \epsilon$, 则同时也必成立 $|a_n| < \epsilon$. 而要做到这点是容易的, 在 $q^{n-1} a_1 < \epsilon$ 两边取以 $0 < q < 1$ 为底的对数, 得 $n-1 + \log_q a_1 > \log_a \epsilon$, 即 $n > \log_q \frac{\epsilon}{a_1} + 1$. 由此知取 $N = \left[\log_q \frac{\epsilon}{a_1} + 1 \right]$ 即可. \square .

4. 设有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = a$ ($a \neq 0$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

证明: 用反证法, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, 则由极限的商运算法则, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{0}{b} = 0$$

这与它的极限是 $a \neq 0$ 相矛盾了. 故假设不成立, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. \square .

注 10. 我们用“反证法”绕开了直接用定义证明的繁琐和细致考量. 另一种考虑方法是, 注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = a \neq 0$, 故 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N_1$, 有 $\frac{a_n}{b_n} \neq 0$, 即当 $n > N_1$ 后, $a_n \neq 0$, 故表达式 $\frac{b_n}{a_n}$ 有意义. 注意到 $b_n = \frac{b_n}{a_n} \cdot a_n$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{a}$ (商法则), 故有极限运算的乘法法则, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$. 这与上证法是异曲同工的. 直观上来讲, $b_n = \frac{b_n}{a_n} a_n$.

另一方面, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{a}$ 存在, 故它必有界. 这样便可将 b_n 写成该有界数列同无穷小量 a_n 的乘积了, 故必也是无穷小量.

如非要求用定义证明, 则不难将上面的说法转变为 $\epsilon - N$ 语言的描述, 相当于将打好的“包袱”: “有界量与无穷小量的乘积还是无穷小量”(利用问题的背景) 给重新“拆解”开来.