hw_8

必做题:

1. 设 $f(x) = (a + b\cos x)\sin x - x$ 当 $x \to 0$ 时是 x 的五阶无穷小，求 a, b.

解:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$f(x) = [a + b(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})](x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) - x + o(x^5)$$

x 系数: $(a+b) - 1$

x^3 系数: $-\frac{a+b}{6} - \frac{b}{2} = -\frac{a+b}{6}$

x^5 系数: $\frac{a+b}{120} + \frac{b}{12} + \frac{b}{24} = \frac{a+b}{120}$

故

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ \frac{a+b}{6} = 0 \\ \frac{a+b}{120}! = 0 \end{cases}$$

$a = \frac{4}{3}$

$b = -\frac{1}{3}$

2. 利用极值判别法 I 求下列函数的极值:

$a)\, y = \frac{\ln^2 x}{x}$,

解:

$$y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = 0$$

$$x = 1 \text{ 或 } e^2$$

$x \in (0, 1)$
$y' < 0$ 单调减少

$x \in (1, e^2)$
$y' > 0$ 单调增加
$x \in (e^2, +\infty)$
$y' < 0$ 单调减少

极小值 当 $x = 1, y = 0$
极大值 当 $x = e^2, y = \frac{4}{e^2}$

$b)\, y=x^2(a-x)^2\,(a>0)$

解:

$y'=2x(a-x)^2+2x^2(x-a)$

$$=2x(x-a)(2x-a)$$

$x\in(-\infty,0)$ $y'<0$ 单调减少

$x\in(0,\frac{a}{2})$ $y'>0$ 单调增加

$x\in(\frac{a}{2},a)$ $y'<0$ 单调减少

$x\in(a,+\infty)$ $y'>0$ 单调增加

极小值

$$\begin{cases} x=0 & y=0 \\ x=a & y=0 \end{cases}$$

极大值

$$x=\frac{a}{2} \quad y=\frac{a^4}{16}$$

3. 利用极值判别法 II 求下列函数的极值:

$a)\, y=xe^{-x},$

解:

3. a

$$y=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

$$y''=e^{-x}(x-2)$$

当 $x=1$
$y'=0$
$y''=-e^{-1}<0$

故极大值
$x=1$
$y=\frac{1}{e}$

$b)\, y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

解:

$$y'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1-x}{1+x^2}$$

$$y''=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$$

当 $x = 1$
$y' = 0$
$y'' = -\frac{1}{2} < 0$

故极大值
$x = 1$
$y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2y^2 + y = 1\,(y > 0)$ 给出，求其极值.

解:

$$2xy^2 + x^2 \cdot 2yy' + y' = 0$$

$$y' = \frac{-2xy^2}{2x^2y + 1} = 0$$

$$x = 0$$

故 $y = 1$

又

$$y''(2x^2y + 1) + y'(2x^2y + 1)' = -(2y^2 + 4xyy')$$

$x = 0, y = 1, y' = 0$ 代入

$$y'' = -2 < 0$$

故极大值
$x = 0 \quad y = 1$

无极小值

5. 设 $f(x) \in C[0, +\infty]$，$f(0) = 0$，且 $f'(x)$ 单调增加，证明：$\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上也是单调增加的.

解:

设 $\varphi(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

在 $[0, x]$ 上，$\exists \xi \in (0, x)$

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0)$$

$$f(x) = xf'(\xi)$$

$$\varphi(x) = \frac{f'(\xi) - f'(x)}{x}$$

又 $f'(x)$ 单调增加，$x > 0$。

故 $\varphi'(x) > 0$

成立

6. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值：

$y = |4x^3 - 18x + 27|$ 在 $[0, 2]$ 上；

解：

令 $f(x) = 4x^3 - 18x + 27$

$$f'(x) = 12x^2 - 18 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

当 $x = 0$
$f(0) = 27$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 27 - 6\sqrt{6}$$

$$x = 2 \quad f(2) = 23$$

又 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上恒大于 0

故 $y_{\max} = 27$

$$y_{\min} = 27 - 6\sqrt{6}$$

7. 写出 $y = \arcsin x$ 和 $y = \tan x$ 的带拉格朗日余项的三阶马克劳林公式（须有计算过程）.

解：

(1) $f(x) = \arcsin x$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad f'''(0) = 1$

故 $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

(2) $f(x) = \tan x \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \sec^2 x \quad f'(0) = 1$

$f''(x) = 2\sec^2 x \tan x \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x \quad f'''(0) = 2$

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

8. 由代数基本定理知：n 次多项式至多有 n 个实根. 利用此结论及罗尔定理，不求函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出根所在的区间.

解:

$f(x)=0$

$$x=1,2,3,4$$

$f(x)$ 在 $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ 上连续可导，且在端点处值为 0

故 $\exists\xi_1\in(1,2),\xi_2\in(2,3),\xi_3\in(3,4)$

s.t.

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$$

$f(x)$ 为 4次多项式，$f'(x)$ 为 3 次多项式

故 $f'(x)=0$ 有 3 个实根，分别位于 $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$

9. 设 $a_0,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$ 都是实数，证明：若下条件满足 $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ 则 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

解:

$f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx$ 在 $[0,1]$ 上连续可导

$$f(0)=0\quad f(1)=\frac{a_0}{n+1}+\cdots+a_n=0$$

故 $\exists\xi\in(0,1)$
s.t.

$$f'(\xi)=0$$

又

$$f'(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$$

故方程在 $(0,1)$ 内至少有 1 个实根 ξ

10. 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f(a)f(b) > 0$，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. 证明：至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = f(\xi)$.

解:

令 $F(x) = e^{-x}f(x)$

$$F'(x) = e^{-x}\left[f'(x) - f(x)\right]$$

若 $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$，则 $\exists x_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$ s.t. $f(x_1) = 0$

若 $f(b)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$，则 $\exists x_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ s.t. $f(x_2) = 0$

此时 $F(x_1) = F(x_2) = 0$

由罗尔定理，$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$ s.t. $F'(\xi) = 0$ 即 $f'(\xi) = f(\xi)$

11. 利用拉格朗日中值定理，证明下面的不等式：

a) $0 < a < b, n > 1$ 时：$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$

解:

$$f(x) = x^n$$

$\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

$$b^n - a^n = n\xi^{n-1}(b-a)$$

所以 a^{n-1} < \xi^{n-1} < b^{n-1}$

所以 $a^{n-1}(b-a) < n\xi^{n-1}(b-a) < nb^{n-1}(b-a)$

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

b) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

解:

$f(t) = \sin t$

令 $x < y$ 且 $\xi \in (x,y)$

$$\sin y - \sin x = \cos\xi \cdot (y - x)$$

$$|\sin y - \sin x| = |\cos\xi| \cdot |y - x|$$

又 $|\cos\xi| \leq 1$

故 $|\sin y - \sin x| \leq |y - x|$

12. 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$ ($0 < a < b$)，证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$

解：

$g(x) = \ln x$

故 $\exists \xi \in (a,b)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$$

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a) = f'(b) = 0$，证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$

解：

泰勒展开：

$$f(b) = f(c) + f'(c)(b-c) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(b-c)^2$$

$$= f(c) + f'(c) \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}f''(\xi_1) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$\xi_1 \in (c,b)$

$$f(a) = f(c) + f'(c)(a-c) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(a-c)^2$$

$$= f(c) - f'(c) \cdot \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}f''(\xi_2) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$\xi_2 \in (a,c)$

两式相减：

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

又由拉格朗日中值定理：

$$f'(b) = f'(c) + f''(\eta_1)(b-c) \quad \eta_1 \in (c,b)$$

$$f'(a) = f'(c) + f''(\eta_2)(a-c) \quad \eta_2 \in (a,c)$$

结合 $f'(a) = f'(b) = 0$：

$$f''(\eta_2) = -f''(\eta_1)$$

设 $M = \max_{\xi\in(a,b)} |f''(\xi)|$

由前面的推导:

$$|f''(\eta_1)| = |f''(\eta_2)| \leq M$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]$$

由于 $f'(a) = f'(b) = 0$，由罗尔定理:
$\exists\eta_3 \in (a,b)$ s.t. $f''(\eta_3) = 0$

考虑:

$$\frac{(b-a)^2}{2}|f''(\eta_3)| = \left|[f(b) - f(a)] - \frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)]\right|$$

$$\frac{(b-a)^2}{2}|f''(\eta_3)| \leq |f(b) - f(a)| + \frac{(b-a)^2}{8}|f''(\xi_1) - f''(\xi_2)|$$

假设 $|f''(\xi)| < \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$ 不成立

则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$

结合前面的不等式:

$$\frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(a)| + \frac{(b-a)^2}{8} \cdot 2M$$

简化得:

$$2|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(a)| + \frac{(b-a)^2}{4}M$$

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}M$$

矛盾，故假设不成立
即存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，且 $f(0) = f(1) = 0$，证明: $\exists\xi \in (0,1)$，使得$2f'(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$

解:

令 $g(x) = xf(x)$

$f(0) = f(1) = 0$，故由罗尔定理，$\exists c \in (0,1)$ s.t. $f'(c) = 0$

$g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$，$g(c) = c \cdot f(c)$，但 $f(c)$ 不一定为 0

重新考虑：令 $g(x) = x^2 f'(x)$

$g(0) = 0^2 \cdot f'(0) = 0$
由 $f'(c) = 0$，得 $g(c) = c^2 \cdot f'(c) = 0$

故 $g(0) = g(c) = 0$，由罗尔定理，$\exists\xi \in (0,c) \subset (0,1)$ s.t. $g'(\xi) = 0$

$$g'(\xi) = 2\xi f'(\xi) + \xi^2 f''(\xi) = 0$$

又 $\xi \neq 0$，故

$$2f'(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$$

15. 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f(a) = f(b) = 1$，求证：$\exists \xi, \eta \in (a,b)$，使得$e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$

解：

15、 $g(x) = e^x f(x)$ $\quad h(x) = e^x$

$\exists\ \eta, \xi \in (a,b)$ s.t. $g'(\eta) = \dfrac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b-a} = \dfrac{e^b - e^a}{b-a} = e^\eta[f(\eta) + f'(\eta)]$

$h'(\xi) = \dfrac{e^b - e^a}{b-a} = e^\xi$

故 $e^\eta[f(\eta) + f'(\eta)] = e^\xi$

$e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 1$

16. 求下列函数图形的凹（下凸）凸区间及拐点：

a) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50;$

解：

$$y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x$$

$$y' = 4x(x-2)(x-4)$$

$$y'' = 12x^2 - 72x + 96 = 12(x-2)(x-4)$$

$x \in (-\infty, 2)\ \ y'' > 0$ 凹

$x \in (2, 4)\ \ y'' < 0$ 凸

$x \in (4, +\infty)\ \ y'' > 0$ 凹

拐点：
$x = 2\ \ y = 62$
$x = 4\ \ y = 206$

拐点 $(2, 62)$，$(4, 206)$

b) $y = a^2 - \sqrt[3]{x-b}$

解：

$$y' = -\frac{2}{3}(x-b)^{-1/3}$$

$$y'' = \frac{2}{9}(x-b)^{-4/3}$$

$x \in (-\infty, b)$ $y'' < 0$ 凸

$x \in (b, +\infty)$ $y'' > 0$ 凸

拐点 (b, a^2)

17. 证明：曲线 $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ 有三个拐点且位于同一条直线上.

解：

$$y'' = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y''' = \frac{4x^3 + 8x^2 - 6x - 2}{(x^2+1)^3}$$

令 $y''' = 0$ 得：

$$2x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

设拐点处的切线方程为 $y = kx + m$

在拐点处有：

$$\frac{x+1}{x^2+1} = kx + m$$

整理得：

$$kx^3 + mx^2 + (k-1)x + (m-1) = 0$$

又拐点满足：

$$2x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

由于两个方程同解，对应系数成比例：

$$\frac{k}{2} = \frac{m}{4} = \frac{k-1}{-3} = \frac{m-1}{-1}$$

解得：

$$k = \frac{2}{5}, \quad m = \frac{4}{5}$$

故三个拐点均在直线 $y = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$ 上

18. 证明下列不等式：

(a) 设常数 $p > 1$，则当 $x \in [0, 1]$ 时，有 $x^p + (1-x)^p \geq \frac{1}{2^{p-1}}$.

解：

18. (a) $f(x) = x^p + (1-x)^p$

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1} = 0$$

$$x^{p-1}=(1-x)^{p-1} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}+p(p-1)(1-x)^{p-2}$$

在 $(0,1)$ 内，$p>1$ 时

$$f''(x)>0$$

故

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$$

为极小值，故

$$f(x)=x^p+(1-x)^p \geq \frac{1}{2^{p-1}}$$

(b) $\frac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ **$(x \neq y)$**

解:

$f(t)=e^t$

$$f'(t)=e^t \quad f''(t)=e^t>0$$

为凸函数

由凸函数性质:

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (x \neq y)$$

故

$$\frac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y)$$

19. 全面讨论下列函数的性态，并描绘出它们的图像:

$a)\ y=\frac{2x^2}{(1-x)^2}$;

解:

定义域 $x \neq 1$

渐近线: $x=1$（垂直渐近线）
水平渐近线: $\lim\limits_{x \to \infty} y=2$，故 $y=2$ 为水平渐近线

单调性: $y'=\frac{4x}{(1-x)^3}$
$x \in (-\infty,0)$: $y'<0$，单调递减
$x \in (0,1)$: $y'>0$，单调递增
$x \in (1,+\infty)$: $y'<0$，单调递减

极值：$x=0$ 时，$y'=0$，$y=0$ 为极小值

凹凸性：$y''=\frac{4(1+x)}{(1-x)^2}$
$x\in(-\infty,-1)$：$y''<0$，凹
$x\in(-1,1)$：$y''>0$，凸
$x\in(1,+\infty)$：$y''>0$，凸

图像特征：过原点，且在原点取得极小值
在 $x=1$ 处向 $+\infty$ 发散，左侧先凹后凸，右侧始终凸
当 $x\to-\infty$ 时趋向 $y=2$，当 $x\to+\infty$ 时趋向 $y=2$

$b)\ y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$

解：

定义域 $x\in(-\infty,-\frac{1}{e})\cup(0,+\infty)$

单调性 $y'=\ln(e^{-\frac{1}{e}})-\frac{1}{e^{-\frac{1}{e+1}}}$，故单调增加

渐近线 $y=x$

图像：整件呈一条单调递增曲线，由两支构成，中间在 $x\in(-\frac{1}{e},0)$ 区间缺失
左支自 $x=-\infty$ 向右上升，趋近直线 $y=x$，在 $x=-\frac{1}{e}$ 附近趋向 0
右支从 $x=0^+$ 附近的 0 开始上升，最终在 $x\to+\infty$ 时近似直线 $y=x$

20. 证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有唯一的实根，并用切线法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

解：

20. $f(x)=x^5+5x+1$　$f'(x)=5x^4+5>0$

$f(-1)=-5<0$　$f(0)=1>0$

$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调增加

故有唯一实根

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^5+5x_n+1}{5x_n^4+5}$$

迭代得　$x=-0.20$

21. 求方程 $\sin 2x - x = 0$ 的正实根（精确到两位小数）.

解:

21.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin 2x_n - x_n}{2\cos 2x_n - 1}$$

迭代得 $x = 0.95$

选做题:

1. 证明广义罗尔定理：设 $f(x) \in D(a,b)$，且 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ (或 $-\infty$)，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

解:

2. 设 $f(x) \in D[0,+\infty)$，且 $\forall x \in (0,+\infty)$，成立 $0 \le f(x) \le \ln \frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$. 证明：$\exists \xi \in (0,+\infty)$，使得 $f'(\xi) = \frac{2}{2\xi+1} - \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$

提示：利用推广的罗尔定理，见课本 157 页例 4.5.

解:

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某领域内 $n(\geq 3)$ 阶可导，且 $f^{(n)}(x)$ 在 $x=a$ 连续，又假设 $f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，且 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h) \quad 0<\theta<1$，证明：$\lim_{h\to 0}\theta=\left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

解：

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$. 若 $f(0)>0$，$f'(0)<0$，证明：$f(x)=0$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有解.

解：

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足 $f(0)=f(1)=0$，$\max_{0\leq x\leq 1}f(x)=2$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\leq -16$.

解：

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)=f(a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}(b-a)^3f'''(\xi)$

解：

7. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，利用柯西中值定理，证明 $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \quad 0<\theta<1$

解：