hw_7

必做题

1. 利用微分计算下列近似值：

a) $\sqrt[3]{9}$;

解：

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{9} \approx f(8) + f'(8) \cdot 1 = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$$

b) $\arctan 1.04$;

解：

$$f(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan 1.04 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \times 0.04 = \frac{\pi}{4} + 0.02$$

c) $\lg 11$

解：

$$f(x) = \lg x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$$

$$\lg 11 \approx 1 + \frac{1}{10 \ln 10}$$

2. 已知单摆的周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 $g = 980\mathrm{cm/s}^2$，l 为摆长（单位：cm），且原摆长为 20cm，为使周期 T 增大 0.05s，摆长约需增长多少？

解： 2.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\frac{dT}{dL} = \frac{\pi}{\sqrt{gL}}$$

$$\Delta L \approx \Delta T \cdot \frac{\sqrt{gL}}{\pi} = 0.05 \cdot \frac{\sqrt{980 \times 20}}{\pi} \approx \frac{7}{\pi} \text{ cm}$$

3. 利用一阶微分的形式不变性，计算下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$，其中 u, v 都是 x 的函数。

a) $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$;

解:

$$dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2udu + 2vdv}{u^2 + v^2} = \frac{udu + vdv}{u^2 + v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx}}{u^2 + v^2}$$

b) $y = \arctan\frac{v}{u}$

解:

$$y = \arctan\frac{v}{u}$$

$$dy = \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} d\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u^2}{u^2 + v^2} \cdot \frac{udv - vdu}{u^2} = \frac{udv - vdu}{u^2 + v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{u^2 + v^2}$$

4. 计算下面的微商，并用复合函数求导的链式法则加以解释：

a) $\frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)}$;

解: 令 $z = x^3$

$$y = z - 2z^2 - z^3$$

$$\frac{dy}{dz} = 1 - 4z - 3z^2$$

原式 $= 1 - 4x^3 - 3x^6$

b) $\frac{d\arcsin x}{d\arccos x}$

解: 原式 $= \frac{d(\arcsin x)}{dx} \cdot \frac{dx}{d(\arccos x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = -1$

5. 求下列极限（可用洛必达法则，无穷小替换或泰勒展开。）

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x-1}$;

解：原式 $=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\frac{1}{x}}{2x-1}=\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

解：原式 $=\lim_{x\to0}\frac{x(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x^3}=-\frac{1}{3}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{\tan x-x}$;

解：原式 $=\lim_{x\to0}\frac{x-(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))}{\tan x-x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x}=1$

d) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

解：原式 $=\lim_{x\to0}\frac{(x+x^2-\frac{x^2}{2}+o(x^2))+(-x+x^2-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1$

e) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

解：原式 $=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\right)=\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x\to1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$

解：令 $t=1-x$

原式

$$\lim_{t\to0^+}\ln(1-t)\ln t=\lim_{t\to0^+}(-t)\ln t=0$$

g) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$;

解：

令 $u=x-\frac{\pi}{4}$

原式

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\tan 2x\ln(\tan x)}$$

$$=\lim_{u\to0}e^{\frac{1}{2u}\ln(1+2u)}$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

h) $\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

解:
原式

$$= \lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to0^+} e^{\frac{\ln x}{x-1}}$$

$$= +\infty$$

6. 确定常数 a, b 使得

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ ax^2 + bx + 1, & x \le 0 \end{cases}$ 二阶可导，并求 $f''(x)$。

解:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$

由连续性：$f(0^+) = f(0^-) \Rightarrow 1 = 1$，成立

一阶导数连续：

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{ax^2 + bx + 1 - 1}{x} = b = 0$$

二阶导数连续：

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{ax^2 - 0}{x^2} = a = -\frac{1}{6}$$

故 $a = -\frac{1}{6}, b = 0$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x}{x^3}, & x > 0 \\ -\frac{1}{3}, & x \le 0 \end{cases}$$

7. 讨论函数

$f(x)=\begin{cases}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0 \\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性。

解: $x\to 0^+$

$$f(x)=\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}=e^{\frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x}-1=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)$$

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+o(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$$

故连续

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内二阶可导，且 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$。

解:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$\sin x+xf(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+x\left(f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2\right)+o(x^3)$$

$f(0)=-1$

$f'(0)=0$

$f''(0)=\frac{1}{3}$

9. 求下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$：

a) $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$;

解: 对 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 两边求导:

$$e^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(y+xy')=0$$

$$y'(e^{2x+y}+x\sin(xy))=-2e^{2x+y}-y\sin(xy)$$

$$y' = -\frac{2e^{2x+y} + y\sin(xy)}{e^{2x+y} + x\sin(xy)}$$

b) $y\sin x - \cos(x-y) = 0$

解: 对 $y\sin x - \cos(x-y) = 0$ 两边求导:

$$y'\sin x + y\cos x + \sin(x-y)(1-y') = 0$$

$$y'(\sin x - \sin(x-y)) + y\cos x + \sin(x-y) = 0$$

$$y' = -\frac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin x - \sin(x-y)}$$

10. 求曲线 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 在点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ 处的切线方程和法线方程。

解:
对 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 两边求导:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0$$

$$y'(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2$$

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

在点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ 处:

$$y' = \frac{\sqrt[3]{4} - (\sqrt[3]{2})^2}{(\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}} = 0$$

切线方程:

$$y - \sqrt[3]{4} = 0$$

法线方程:

$$x = \sqrt[3]{2}$$

11. 求下列方程所确定隐函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

a) $e^{x+y} = xy$;

解:

$$|| \cdot (a)$$

$$e^{x+y}(1+y) = y + xy$$

$$y' = \frac{y - e^{x+y}}{e^{x+y} - x}$$

$$y'' = \frac{\left(\frac{y - e^{x+y}(1+y)}{e^{x+y}-x}\right)(e^{x+y} - x) - \left(\frac{y - e^{x+y}(1+y)}{e^{x+y}-x}\right)(e^{x+y}(1+y) - 1)}{(e^{x+y} - x)^2}$$

b) $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

解:

$$\frac{y - xy}{x^2 + y^2} = \frac{x + yy^2}{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{y - x}{x + y}$$

$$y'' = \frac{(y' - 1)(x + y) - (y - x)(1 + y')}{(x + y)^2}$$

y'带入

12. 求下列参数方程所确定函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 和二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

a) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$;

解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3a\cos^2 t \sin t}{3a\sin^2 t\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$$

b) $\begin{cases} x = t - \ln(1 + t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$;

解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{1}{(t-1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2(1+t^2)}{(t-1)^5}$$

c) $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$

解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{tf(t)} = t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{f''(t)}$$

13. 求下列参数方程表示的曲线在给定处的切线方程和法线方程:

a) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $t = \frac{\pi}{4}$;

解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{at\ sint}{at\ cost} = tant$$

$$x_0 = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \frac{\pi}{4}) \quad y_0 = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \frac{\pi}{4})$$

切: $y - y_0 = (x - x_0)$

法: $y - y_0 = -(x - x_0)$

b) $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, $t = 0$

解:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{-t}}{2e^t}$$

切: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$

法: $y - 1 = 2(x - 2)$

14. 验证 $y = e^t \cos t$, $x = e^t \sin t$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 满足微分方程

$$y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$$

解:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$$

$$y' = \frac{u}{v}$$

$$y'' = \frac{d}{d\lambda}(y') = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{2}{e^t v^3}$$

代入，左边=右边

15. 设 $y = y(x)$ 是由 $\begin{cases} x = t^2 - 2t - 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dy}{dx}|_{t=0}$。

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-e^y \cos t}{(e^y \sin t - 1)(2t - 2)}$$

$$\frac{dy}{dx}|_{t=0} = -\frac{e}{2}$$

16. 求下列极坐标方程表示的曲线在指定点处的切线和法线方程：

a) $r = \cos\theta + \sin\theta$, $\theta = \frac{\pi}{4}$;

解：

$$r = r(\theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r\cos\theta}{r(\theta)\sin\theta - r\sin\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\tan\theta}\Big|\frac{\pi}{4} = -1$$

$$y = -x + 2$$

b) $r = a\sin 2\theta (a > 0)$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

解：

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$y - \frac{a\sqrt{2}}{2} = -(x - \frac{a\sqrt{2}}{2})$$

17. 写出下列函数在指定点的泰勒公式

(a) $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$ **在点** $x_0=-2$ **处；（可不用求导计算）**

解：

$$f(x)=-26+23(x+2)-8(x+2)^2+(x+2)^3$$

(b) $f(x)=\frac{1}{x}$ **在点** $x_0=-1$ **处的** n **阶泰勒公式；**

解：

$$T_h(x)=-\sum_{k=0}^{n}(x+1)^k$$

(c) $f(x)=x^2\ln x$ **在点** $x_0=1$ **处的** n **阶泰勒公式；**

解：

$$T_h(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}+2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^{k-1}}{k}+\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^{k-2}}{k}$$

(d) $f(x)=\sqrt{x}$ **在点** $x_0=4$ **处的** n **阶泰勒公式**

解：

$$T_h(x)=2\sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{x-4}{4}\right)^k$$

18. 利用泰勒公式求 $\sqrt[3]{30}$ 和 $\ln 1.2$ 的近似值（精确到 0.001）

解：

(a) 原式 = $3+\frac{1}{27}\cdot 3\approx$ 3.107

(b) 原式 = $0.2-\frac{0.2^3}{2}+\frac{0.2^3}{3}-\cdots\approx 0.1823$

19. 利用泰勒公式求下列极限：

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$**；**

解：

原式 =

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x-x^2}{x^3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

(b) $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$;

解:

原式 =

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-o(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}$$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4}\right)$

解:

原式 =

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{5}}-(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{5}}\right]$$

$$=\frac{2}{5}$$

20. 求极限:

a) $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]$;

解:

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty} x\ln 2\cdot\frac{3}{x}$$

$$=3\ln 2$$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^{x+1}-2^{x+1}}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

解:

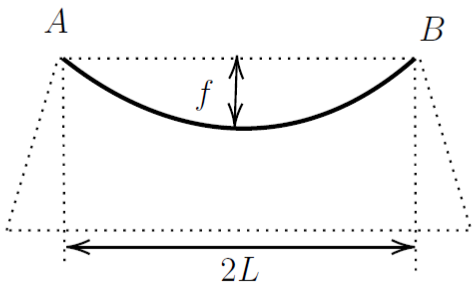
$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\left[1+x(3\ln 3-2\ln 2-1)+o(x)\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=e^{3\ln 3-2\ln 2-1}=\frac{27}{4e}$$

选做题：

1. 如下图所示的电缆 AOB 的长度为 s，跨度为 $2L$。电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f，则电缆长可按下列公式计算

$$s = 2L\left(1 + \frac{2f^2}{3L^2}\right)$$



当 f 变化了 Δf 时，电缆长的变化约为多少?

解:

$$S = 2L\left(1 + \frac{2f^2}{2L^2}\right)$$

$$ds = \frac{8f}{3L}df$$

$$\Delta s \approx \frac{8f}{3L}\Delta f$$

2. 求证：星型线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) 在两坐标轴间的切线长度为常数

解:

2. $\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} = 0$

$$y' = (-\frac{x}{y})$$

$$y - y_0 = -(\frac{x_0}{y_0})^{\frac{1}{3}}(x - x_0)$$

令 $y = 0$

$$x = x_0 + \frac{y_0^{\frac{1}{3}}}{x_0^{\frac{1}{3}}}$$

令 $x = 0$

$$y=y_0+\frac{x_0^{\frac{1}{3}}}{y_0^{\frac{1}{3}}}$$

$$l=\sqrt{x^2+y^2}=(x_0^{\frac{4}{3}}+y_0^{\frac{4}{3}})\frac{\sqrt{x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}}}{(x_0y_0)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=(x_0^{\frac{4}{3}}+y_0^{\frac{4}{3}})\frac{a^{\frac{1}{3}}}{(x_0y_0)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=(\frac{a}{x_0y_0})^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{4}{3}}-(x_0y_0)^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

$$a^{\frac{4}{3}}-(x_0y_0)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{3}}\left(1-\frac{(x_0y_0)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}\right)$$

故 $l=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a$

3. 当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{\pi}{2}-\arctan x$ 和 $\frac{1}{x}$ 是否为等价无穷小？证明你的结论

解： 为等价无穷，

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}-\arctan x=\arctan\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$$

为等价无穷

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=Ce^y$ 确定（其中 C 为非零常数），设 f 具有二阶导数，且 $f'(y)\neq 1$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$

解：

$$e^{f(y)}+xe^{f(y)}f'_{(y)}\frac{dy}{dx}=Ce^y\frac{dy}{dx}$$

$$e^{f(y)}+xe^{f(y)}f'_{(y)}y'=xe^{f(y)}y'$$

$$e^{f(y)}=xe^{f(y)}(1-f'_{(y)})y'$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x(1-f'_{(y)})}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{f''(y)-(1-f'_{(y)})^2}{x^2(1-f'_{(y)})^3}$$

5. 设 $f(x)=(a+b\cos x)\sin x-x$ 在 $x\to 0$ 时是 x 的五阶无穷小，求常数 a 和 b

解:

$$f(x)=(a+b-1)x-\frac{a+b}{6}x^3-\frac{b}{2}x^3+O(x^5)$$

$$=(a+b-1)x-\frac{a+b}{6}x^3+O(x^5)$$

$$\begin{cases} a+b-1=0 \\ a+4b=0 \end{cases}$$

$$a=\frac{4}{3}b=-\frac{1}{3}$$

6. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，证明：$\lim_{x\to 0^+} x^{f(x)}=1$

解:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} e^{f(x)/hx}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} e^{(f'(0)x+o(x))/hx}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} e^0=1$$

7. 计算下面极限

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4 3x}$

解:

原式 =

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^5)}{(3x)^4+o(x^6)}$$

$$=-\frac{1}{972}$$

b) $\lim_{x\to 0}\sqrt[x^3]{1-x+\sin x}$

解:
原式 =

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1-x+\sin x)}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1-\frac{x^3}{6}+o(x^5))}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3}}$$

$$=e^{-\frac{1}{6}}$$

8. 设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处连续，证明：当 $x\to 0$ 时，成立

$$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$$

并计算 A,B 的值

解:

$$f(x)=e^{\frac{\ln f(x)}{x}}$$

$$=e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+O(x^3)}$$

$$=e(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2+o(x^2))$$

A = -$\frac{e}{2}$
B = $\frac{11e}{24}$

9.

(a) 证明：对 $n=0,1,2,\cdots$ 方程 $e^x+x^{2n+1}=0$ 有唯一实根 x_n

解:

$$f_n(x)=e^x+x^{2n+1}$$

$$f_n'(x)=e^x+(2n+1)x^{2n}>0\quad f_n(x_n)\text{单调增加}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=-\infty\quad f_n(0)=1>0$$

故 $\exists x,t(-\infty,0)\quad s.t.\quad f_n(x_n)=0$

(b) 证明：$\lim_{n\to\infty} x_n$ 的极限存在

解:

$$e^{\lambda n} + x_n^{2n+1} = 0$$

$$f_{n+1}(x_n) = e^{x_n} + x_n^{2n+3} = x_n^{2n+1} \quad (1 + x_n^2) < 0$$

$$f_n(x_n)\text{单调增加} \quad f_n(x_n) < 0$$

故 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在

(c) 记 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，证明：$x_n - A$ 和 $\frac{1}{n}$ 是同阶无穷小

解:

$$|A| < 1 \quad x_n^{2n+1} \to 0 \quad e^A = 0$$

$$|A| > 1 \quad |x_n^{2n+1}| \quad \text{发散}$$

故 $|A| = 1$，$A = -1$

令 $\chi_n = -1 + \epsilon_n(\epsilon_n > 0)$

$$e^{-1+\epsilon_n} + (-1 + \epsilon_n)^{2n+1} = 0$$

$$e^{-1+\epsilon_n} = (1 - \epsilon_n)^{2n+1}$$

$$-1 + \epsilon_n = (2n + 1)|h(1 - \epsilon_n)$$

$$\ln(1 - \epsilon_n) = -\epsilon_n + O(\epsilon_n^2)$$

$$-1 + \epsilon_n = (2n + 1)(-\epsilon_n + O(\epsilon_n^2))$$

$$-1 + \epsilon_n \approx -(2n + 1)\epsilon_n$$

$$\epsilon_n \approx \frac{1}{2n + 2} \sim \frac{1}{2n}(n \to \infty)$$

$x_n - (-1) = x_{n+1} = \epsilon$ 与 $\frac{1}{n}$ 同阶无穷小;