作业　二

必做题：

1. 数集 $E=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$ 的下确界是多少？证明你的结论.
2. 对非空数集 E，证明若 $\inf E$ 存在，则其必唯一.
3. 用定义严格证明：$y=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.
4. 如果数列的一般项可写成 $a_n=f(n)$ 的形式，其中 f 是 $\mathbb{R}$ 上的函数（或至少是 $[1,+\infty)$ 上的函数），证明：如 f 单调增加，则 $\{a_n\}$ 亦单调增加.
5. 数列 $\left\{\dfrac{n+3}{n+1}\right\}$ 是否单调？是否有界？证明你的论断.
6. 数列 $\{x_n\}$ 由 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ 给出，且初始值满足 $0<x_1<1$，证明它是单调的且有下界. 并求其极限.
7. 用极限的定义严格证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{2n+13}=\frac{3}{2}$.
8. 用极限的定义严格证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.
9. 用定义证明 $a_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 是无穷小.
10. 用定义证明 $a_n=\dfrac{n^2+1}{2n-1}$ 是无穷大.
11. 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，$\{y_n\}$ 满足：$\exists\,\delta>0$，$\exists\,N\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n\geq N$，有 $|y_n|\geq\delta$，证明 $\{x_ny_n\}$ 是无穷大量.
12. 举出满足下列要求的数列的例子.

(1) 有界数列但无极限;　　(2) 无界数列但不是无穷大

选做题：

1. 设数集 E 有上界，证明：数集 $-E:=\{x\mid -x\in E\}$ 有下界，且 $\sup E=-\inf(-E)$.

2. 对非空数集 A, B, 定义其和为 $A+B := \{a+b \mid a \in A,\, b \in B\}$. 证明: 若 A，B 皆有上界，则 $A+B$ 亦有上界，且 $\sup\,(A+B) = \sup\, A + \sup\, B$.

3. 若数列 a_n 满足 $a_n \leq q a_{n-1}$，其中 $a_n > 0,\, 0 < q < 1$，试用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. 设有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = a\,(a \neq 0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.