作业 五 解答

必做题：

1. (a) 证明：$y=ax+b\,(a\neq 0)$ 是曲线的渐近线（渐近线的严格定义见讲义《第三讲》附录一）当且仅当

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)\end{cases}$$

证明： 若 $y=ax+b\,(a\neq 0)$ 是渐近线，即 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$ 的极限必然存在，且为 b. 这是因为，若该极限不存在，那么 $f(x)-ax-b=(f(x)-ax)-b$ 的极限也不存在，与假设矛盾. 又因为 $f(x)-ax=(f(x)-(ax+b))+b$，故

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))+\lim_{n\to\infty}b=0+b=b.$$

再计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-ax+ax}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-ax}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax}{x}$. 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$ 存在，故 $f(x)-ax$ 有界（$\forall\epsilon>0$，$\exists X$，使得 $|x|>X$ 时，$|f(x)-ax-b|<\epsilon$，即 $b-\epsilon<f(x)-ax<b+\epsilon$，特别地可取 $\epsilon=1$，则 $f(x)-ax$ 的有界性明矣），从而上面右边第一个极限为 0，而第二个极限显然为 a. 必要性由此得证，下证充分性.

即，若 $\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)\end{cases}$，则有 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$. 这是近乎显然的，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$ 存在，且等于 b，故

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)\xlongequal[\text{故可拆分求极限}]{\text{因后两项极限存在}}\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)+\lim_{x\to\infty}(-b)$$

$$=b+(-b)=0 \qquad \square.$$

(b) 计算 $y=\sqrt{3x^2+4x+1}$ 所描绘曲线的渐近线.

解： 首先，由于在无穷远处 $(x\to\infty)$ 函数 y 无极限，并在任何有限点处，y 都没有无穷极限（即极限为无穷大），故 y 的图像不存在

水平渐近线和铅直渐进线. 唯一可能存在的是斜渐进线. 为探求其是否存在，直接的方法是利用 (a) 中的结论. 设 $y = ax + b$ 是渐近线，则

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+4x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{3}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{3x^2+4x+1} - \sqrt{3}x\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2+4x+1} - \sqrt{3}x\right)\left(\sqrt{3x^2+4x+1} + \sqrt{3}x\right)}{\left(\sqrt{3x^2+4x+1} + \sqrt{3}x\right)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+1}{\left(\sqrt{3x^2+4x+1} + \sqrt{3}x\right)} \xlongequal[\text{同除}x]{\text{分子分母}} \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

从而函数 y 的图像具有斜渐近线 $y = \sqrt{3}x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

注记: 上面的解法可谓中规中矩，但“匠气”十足，现实应用中不够灵活自如. 比较好的处理方法是将问题转为“无穷小算术”模式. 即

$$y = \sqrt{3x^2+4x+1} = \sqrt{3}x\sqrt{1 + \frac{4}{3x} + \frac{1}{3x^2}}$$

则当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ 是无穷小量，且有无穷小展开

$$\sqrt{1 + \frac{4}{3x} + \frac{1}{3x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right) + \underbrace{o\left(\frac{4}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)}_{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

故 $y = \sqrt{3}x\sqrt{1 + \dfrac{4}{3x} + \dfrac{1}{3x^2}} = \sqrt{3}x + \dfrac{\sqrt{3}x}{2}\left(\dfrac{4}{3x} + \dfrac{1}{3x^2}\right) + \sqrt{3}x\, o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= \underbrace{\sqrt{3}x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}}_{\text{渐近线}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 将渐近线方程直接“解析”出来了！

2. 当 $x \to 0$ 时，确定下列无穷小对于 x 的阶，并确定其主部

$$a)\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\ (x \to 0^+) \qquad\qquad b)\ \sqrt{a + x^3} - \sqrt{a}\ (a > 0)$$

$$c)\ \sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x} \qquad\qquad d)\ (\cos x)^x - 1$$

a) 分析：当 $x \to 0+$ 时，$x^{\frac{2}{3}}$ 作为无穷小的阶自然是 $2/3$，$\sqrt{x}$ 作为无穷小的阶自然是 $1/2$，而 $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$，但两个无穷小以“和”的形式“绑在”一起变化，其整体的阶应有阶数较小的 $x^{1/2}$ 来决定，这是因为 $x^{3/2} - x^{1/2} = x^{1/2}(x^{1/6} - 1)$，而括号里是个有界量. 下面将该分析正面表述

解： $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$ 作为 $x \to 0+$ 时的无穷小的阶是 $1/2$，直接证明如下

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt[6]{x} - 1)}{\sqrt{x}} = -1$$

同时知道了，当 $x \to 0+$ 时，无穷小 $\sqrt[4]{x^2} - \sqrt{x}$ 的无穷小主部是 $-x^{1/2}$.

b) 分析：当 $x \to 0$ 时，$\sqrt{a + x^3} - \sqrt{a} = \sqrt{a}\sqrt{1 + \frac{x^3}{a}} - \sqrt{a} =$

$$= \sqrt{a}\left(1 + \frac{x^3}{2a}\right) + o\left(\frac{x^3}{a}\right) - \sqrt{a} = \frac{x^3}{2\sqrt{a}} + o(x^3)$$

即知 $\sqrt{a + x^3} - \sqrt{a}$ 当 $x \to 0$ 时是 3 阶无穷小，且 $\dfrac{x^3}{2\sqrt{a}}$ 是其主部. 这个解法如同上面注记中的方法，流畅自然，是后面分析问题的范式. 若不知晓上面无穷小展开（等价无穷小替换），也可直接操作如下

解： 设其阶为 k，则必然有 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{a + x^3} - \sqrt{a}}{x^k} =$ 常数. 而

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a + x^3} - \sqrt{a}}{x^k} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{a + x^3} - \sqrt{a})(\sqrt{a + x^3} + \sqrt{a})}{x^k(\sqrt{a + x^3} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^k(\sqrt{a + x^3} + \sqrt{a})} \overset{k=3}{=\!=} \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

故只有当 $k = 3$ 时上极限为常数，即无穷小阶为 3，且 $\dfrac{x^3}{s\sqrt{a}}$ 为其主部.

c) **解：** 设 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$ 为 k 阶无穷小，则下极限为常数

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\sin x}{x^k\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}$$

我们看到，由于 $\tan x+\sin x\sim x+x=2x$，故只要 $k=1$ 就能让上面的极限为 $\dfrac{2}{2}=1$. 从而 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\sim x$.

分析：上面是常规解法，按上面反复强调的无穷小“算术”思路，可直接求解如下：

$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}=\left(1+\frac{\tan x}{2}+o(\tan x)\right)-\left(1-\frac{\sin x}{2}+o(\sin x)\right)$$

$$=\frac{\tan x+\sin x}{2}+o(\tan x)+o(\sin x)=\frac{x+o(x)+x+o(x)}{2}+o(x)+o(x)$$

$$=\frac{2x+o(x)}{2}+o(x)=x+o(x)$$

$o(\sin x)=o(x)$是因为若 $A(x)=o(\sin x)$
故 $\frac{A(x)}{x}=\frac{A(x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\longrightarrow 0\times 1=0$
从而 $A(x)=o(x)$.

d) **解：** 设 $(\cos x)^x-1$ 的阶为 k，则下极限需是常数.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^x-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\cos x}-1}{x^k}\xlongequal[e^x-1\sim x]{\text{利用等价无穷小替换}}\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\cos x+o(x\ln\cos x)}{x^k}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+(\cos x-1)\right)+o(x\ln\cos x)}{x^k}\xlongequal[\ln(1+x)\sim x+o(x)]{\text{利用无穷小计算}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x-1+o(\cos x-1))+o(x\ln\cos x)}{x^k}\xlongequal[\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}]{\text{利用等价无穷小替换}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o(x\ln\cos x)\right)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3+o(x^3)+x\,o(x\ln\cos x)}{2}}{x^k}$$

只要能保证 $o(x\ln\cos x)$ 至少是二阶无穷小，则说明：只要取 $k=3$，则上极限为常数 $-\frac{1}{2}$，从而 $(\cos x)^x-1$ 是 $x\to 1$ 时的 3 阶无穷小，且其无穷小主部为 $-\dfrac{x^3}{2}$. 下面验证 $o(x\ln\cos x)=o(x^3)$. 这是因为，设

$A(x)=o(x\ln\cos x)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{x\ln\cos x}\frac{x\ln\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{x\ln\cos x}\frac{x(\cos x-1)+xo(\cos x-1)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{x\ln\cos x}\frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)+\overbrace{xo(\cos x-1)}^{o(x^3)}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{x\ln\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3}=0$$

3. 求下列各题中的常数 a.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$;

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{\frac{x-a}{3a}}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right)^{\frac{3ax}{x-a}}=$

$$\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-a}{3a}}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}=8\quad\Longrightarrow\quad a=\frac{\ln 8}{3}=\ln 2.$$

(b) 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1+ax^2}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小;

解： $x\to 0$ 时，若 $\sqrt[4]{1+ax^2}-1\sim\cos x-1$，则须满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+ax^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt[4]{1+ax^2}-1}{x^2}}{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2(\sqrt[4]{1+ax^2}+1)}}{\frac{\cos x-1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{ax^2}{x^2(\sqrt[4]{1+ax^2}+1)(\sqrt{1+ax^2}+1)}}{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{4}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{a}{2}=1\quad\Longrightarrow\quad a=-2$$

注记： 上面的解答稍显麻烦. 快捷的解法是注意到无穷小的等价具传递性，即若 $\alpha\sim\beta$，且 $\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$. 已知 $\sqrt[4]{1+ax^2}-1\sim\dfrac{ax^2}{4}$，$\cos x-1\sim-\dfrac{x^2}{2}$，从而将问题转换为何时 $\dfrac{ax^2}{4}\sim-\dfrac{x^2}{2}$，由此直接看出 $a=-2$.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，并指出该计算的几何意义；

解： 即 $y=ax+b$ 是曲线 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ 的渐近线，则由习题一中的结论，知 $a=\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+x}=1$，则 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1}=-1$$

注记： 上面是由几何意义求解，直接解法是：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}$$

若其为零，须 $1-a=0$，$a+b=0$，即 $a=1, b=-1$. 殊途同归.

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-bx+1})=2$，并指出该计算的几何意义.

解： 如知道渐进线的几何意义,则该极限的含义是 $f(x)=\sqrt{ax^2-bx+1}$ 的图像以直线 $y=3x-2$ 为其渐进线,从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{ax^2-bx+1}}{x}=3$, 即

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{a}=3 \quad\Longrightarrow\quad a=9$$

$$\lim_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{9x^2-bx+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-\sqrt{9x^2-bx+1})(3x+\sqrt{9x^2-bx+1})}{3x+\sqrt{9x^2-bx+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-(9x^2-bx+1)}{3x+\sqrt{9x^2-bx+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{bx-1}{3x+\sqrt{9x^2-bx+1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{9-\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{b}{3+3}=\frac{b}{6}=2 \quad\Longrightarrow\quad b=12$$

注记： 更直接的求解方法是：$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-bx+1})=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x-\sqrt{ax^2-bx+1})(3x+\sqrt{ax^2-bx+1})}{3x+\sqrt{ax^2-bx+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-ax^2+bx-1}{3x+\sqrt{ax^2-bx+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x^2+bx-1}{3x+\sqrt{9x^2-bx+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(9-a)x+b-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{9-\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}}\xlongequal{a=9}\frac{b}{3+3}=2$$

当然，最直接的解法还是转化为无穷小演算. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-bx+1})=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x-x\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{a}x\sqrt{1-\frac{b}{ax}+\frac{1}{ax^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{a}x\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{ax}-\frac{1}{ax^2}\right)+o\left(\frac{b}{ax}-\frac{1}{ax^2}\right)\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(3-\sqrt{a}\right)x+\frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{ax}\right)+\sqrt{a}x\,o\left(\frac{b}{ax}-\frac{1}{ax^2}\right)\right)$$

其中 $x\,o\left(\frac{b}{ax}-\frac{1}{ax^2}\right)=x\,o\left(\frac{b}{ax}\right)-xo\left(\frac{1}{x^2}\right)$. 且 $o\left(\frac{b}{ax}\right)$ 包含的关于 $1/x$ 的最低次项是 $(1/x)^2$，从而 $xo\,(b/ax)\xrightarrow{x\to+\infty}0$，同理 $xo\,(1/x^2)\xrightarrow{x\to+\infty}0$. 故为了使上面的极限 $=2$，必须 $\sqrt{a}=3$，即 $a=9$，且 $\frac{\sqrt{a}}{2}\frac{b}{a}=\frac{b}{6}=2$，即 $a=12$.

4. 计算下列极限（可用无穷小（大）替换）

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}\,(a,b\neq0)$ d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

解： a) 利用等价无穷小，$(e^x-1)\ln(1+x)\sim xx$，分子 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，从而 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2/2}{x^2}=\frac{1}{2}$（分母等价于 2 阶无穷小 x^2，故只需将分子 $1-\cos x$ 展开为至少包含 2 阶的无穷小就可以计算极限了. 展开更多项无助于求极限，为方便大家看清实质，这里不厌其烦，将这个极限的完整信息写出来）

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots}{x^2 + \frac{x^4}{4} + \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \cdots\right)}{x^2\left(1 + \frac{x^2}{4} + \cdots\right)} = \frac{1}{2}$$

b) 对极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$，分母等价于 $-\dfrac{x^2}{2}$（利用 $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$），分子等价于 $x^2 \cdot x = x^3$（利用 $\tan x \sim x$），从而极限为 0（对这题，不用等价无穷小，直接计算也是方便的）

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \tan x}{\sqrt{1-x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \tan x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \tan x(\sqrt{1-x^2}+1)}{-x^2} = -\lim_{x\to 0} \tan x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right) = 0$$

c) 对极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}\ (a, b \neq 0)$. 将 $\ln\cos ax$ 和 $\ln\{\cos bx\}$ 写成

$$\ln\left(1 + (\cos ax - 1)\right) = \cos ax - 1 + o(\cos ax - 1)$$

$$\ln\left(1 + (\cos bx - 1)\right) = \cos bx - 1 + o(\cos bx - 1)$$

另一方面

$$\cos ax - 1 \sim \frac{a^2x^2}{2} + o\left(\frac{a^2x^2}{2}\right); \qquad \cos bx - 1 \sim \frac{b^2x^2}{2} + o\left(\frac{b^2x^2}{2}\right)$$

则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{a^2}{2}x^2 + o\left(\frac{a^2x^2}{2}\right) + o(\cos ax - 1)}{\frac{b^2}{2}x^2 + o\left(\frac{b^2x^2}{2}\right) + o(\cos bx - 1)} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{a^2}{2} + o\left(\frac{a^2x^2}{2}\right)/x^2 + o(\cos ax - 1)/x^2}{\frac{b^2}{2} + o\left(\frac{b^2x^2}{2}\right)/x^2 + o(\cos bx - 1)/x^2}$$

注意到 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(\cos ax - 1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(\cos ax - 1)}{\cos ax - 1}\dfrac{\cos ax - 1}{x^2} = 0 \times \dfrac{a^2}{2} = 0$, 同理 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(\cos ax - 1)}{x^2} = 0$. 从而上面的极限为 $\dfrac{a^2}{b^2}$.

上面的解法利精细分析, 知其然知其所以然, 但对所问来说显然是“牛刀

宰鸡”了. 比较简洁的做法是，注意到 $\ln(1+(\cos ax-1))\sim\cos ax-1$，而 $\cos ax-1\sim-\dfrac{a^2}{2}$，由于等价关系有传递性，故 $\ln\cos ax\sim-\dfrac{a^2}{2}$，同理 $\ln\cos bx\sim-\dfrac{b^2}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-a^2/2}{-b^2/2}=\dfrac{a^2}{b^2}$.

d) 对极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$，先往基本模式凑，即将极限写成

$$\lim_{x\to0}\left(1+\left(\frac{2^x+3^x}{2}-1\right)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\underbrace{\frac{(2^x-1)+(3^x-1)}{2}}_{t}\right)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{t}{x}}$$

内层极限显然是 e，下证明指数项 $\frac{t}{x}$ 的极限存在，即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{t}{x}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{(2^x-1)+(3^x-1)}{2x}\xlongequal{\text{利用 } a^x-1\sim(\ln a)x}\lim_{x\to0}\frac{(\ln 2)\,x+(\ln 3)\,x}{2x}=\ln\sqrt{6}$$

从而原极限 $=e^{\ln\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.

5. 已知 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解： $3^x-1\sim(\ln3)x$. 故只需将分子中的 $\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)$ 展为至少 1 阶无穷小. 由于 $f(x)=o(x)$，故 $f(x)=0(\sin 2x)$，从而 $\dfrac{f(x)}{\sin 2x}$ 也是 $x\to0$ 时的无穷小. 从而

$$\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin 2x}\right)\sim\frac{f(x)}{\sin 2x}$$

故由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$ 知，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{(\ln 3)\,x}=\dfrac{1}{\ln 3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x\sin 2x}=$

$$\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^2}=5\quad\Longrightarrow\quad\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=10\ln 3$$

6. 求下列函数的间断点，并确定其类型，若为可去间断点，补充或修改定义使之连续.

$$a)\ y=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}} \qquad b)\ y=\ln|\cos x|$$

$$c)\ y=\left[\frac{1}{|x|+1}\right] \qquad d)\ y=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$$

解： a) 中函数的定义域是 $x\neq 0, x\neq 1, x\neq -1$. 由于初等函数在其定义域内极限就是函数在该点的值，换言之，初等函数在其定义域内是连续的. 故不连续点，或间断点只有可能是 $0,1,-1$. 下分别讨论.

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/x-1/(1+x)}{1/(x-1)-1/x}=\dfrac{x-1}{x+1}=-1$，故 0 是可去间断点，只需补充定义 $f(0)=-1$，便可使函数在 0 处连续.
- 同理 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$，故故 1 是可去间断点，只需补充定义 $f(1)=0$，便可使函数在 1 处连续.
- 但 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x+1}=\infty$，故 1 是函数的第 II 类间断点的无穷间断点类型.

b) 中函数要由定义除非 $\cos x\neq 0$，即 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$. 这些点之外，函数是连续的，而在这些点处，由于 $\cos=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$. 故这些点都是函数的无穷间断点.

c) 中函数 $=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 由此易见函数的间断点是 0，且为可去间断点，只需补充 $f(0)=0$ 便可使函数连续.

d) 中函数只在 $x=1$ 处无定义，故它是唯一的间断点. 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{1-x}}=+\infty$，而 $\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{1-x}}=0$. 故 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$. 故 $x=1$ 是函数的跳跃间断点.

7. 求下列各题中的常数 a，b 的值，使得函数连续.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\frac{\sin ax}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \frac{b(\sqrt{1+x}-1)}{x} & x>0\end{cases} \qquad b)\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

解: 对 $a)$ 中函数,唯一可能的不连续点是 $x=0$. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$，而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{b(\sqrt{1+x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{bx}{2}}{x}=\dfrac{b}{2}$. 为使函数连续，只需 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=1$，即需 $a=\dfrac{b}{2}=1$，从而 $a=1$，$b=2$.

对 $b)$ 中函数 $f(x)$，先将其重新表示.

- 当 $0<|x|<1$ 时，$x^n\to0$，从而 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\dfrac{0+ax^2+bx}{0+1}=ax^2+bx$；
- 当 $|x|>1$ 时，$x^{2n}\to\infty$，$x^{2n-1}\to\pm\infty$，故

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1/x+0+0}{1+0}=\frac{1}{x}$$

- 当 $x=0$ 时，$f(x)=0$.
- 当 $x=1$ 是，$f(x)=\dfrac{a+b+1}{2}$.
- 当 $x=-1$ 时，$f(x)=\dfrac{a-b-1}{2}$.

则函数的可能间断点为 $0,\pm1$. 但对 $x=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(ax^2+bx)=0=f(0)$，故 $x=0$ 不是间断点.

- $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(ax^2+bx)=a+b$；$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$. 故为使函数 f 在 $x=1$ 处也连续，必须满足：$a+b=\frac{a+b+1}{2}=1$，解得 $a+b=1$.
- $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x}=-1$；$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}(ax^2+bx)=a-b$. 故为使函数 f 在 $x=1$ 处也连续，必须满足：$a-b=\frac{a-b-1}{2}=-1$，即 $a-b=-1$.

综上所述,为使 $f(x)$ 是连续函数,a,b 需满足 $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$.

8. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^a\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ e^x+b, & x\le 0 \end{cases}$ 的连续性，其中 a,b 是任意常数.

解: 要使 $f(x)\in C(\mathbb{R})$, 只需 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 首先 $f(0)=e^0+b=b+1$. 又

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(e^x+b)=b+1;\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} x^a\sin\frac{1}{x}$$

故要求 $\lim\limits_{x\to 0} x^a\sin\dfrac{1}{x}=b+1$. 该极限中，正弦因子当 $x\to 0$ 时是无限振荡的，要“压制”它，x^a 必须是无穷小，即 $a>0$. 故当 $a>0, b=-1$ 时，函数连续. 但

- $a>0$，$b\neq -1$ 时，0 为“跳跃间断点”;
- $a=0$，$\forall b$，0 是“振荡间断点”;
- $a<0$，$\forall b$，函数在 0 附近也是无限振荡的，只是振幅可 $1/x^a$ 可趋向无穷，但依然是最大主导，故此时 0 也是“振荡间断点”.

9. 假设 f 在 $[0,4]$ 上连续，且 $f(0)=f(2)=f(4)=1$，$f(1)=f(3)=-1$. 试问：$f(x)=0$ 在 $[0,4]$ 上解的个数?

解: 由于 $f\in C[0,4]$，由零点定理，有如下分析

- 因 $f(0)=1, f(1)=-1$，故 $\exists\xi_1\in(0,1)$，使得 $f(\xi_1)=0$;
- 因 $f(1)=-1, f(2)=1$，故 $\exists\xi_2\in(1,2)$，使得 $f(\xi_2)=0$;
- 因 $f(2)=1, f(3)=-1$，故 $\exists\xi_3\in(2,3)$，使得 $f(\xi_3)=0$;
- 因 $f(3)=-1, f(4)=1$，故 $\exists\xi_4\in(3,4)$，使得 $f(\xi_4)=0$.

也就是说，$f(x)=0$ 在 $[0,4]$ 上至少有 4 个解.

10. 证明方程 $x = a\sin x + b$ $(a, b > 0)$ 至少有一个正根.

证明: 方程 $x = a\sin x + b$ 的根即 $f(x) = x - a\sin x - b$ 的零点. 首先, f 显然是连续函数, 且 $f(0) = -b < 0$; 又因为 $f(k\pi) = k\pi - b$. 在必 $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $f(k_0\pi) > 0$. 故在 $[0, k_0\pi]$ 上对 f 运用"零点定理", 知 $\exists \xi \in (0, k_0\pi)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 即 $x = a\sin x + b$ 至少有一个正根 ξ. □.

11. 证明: 对偶数次多项式方程 $f(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$, 若 $a_{2n} < 0$, 则它至少有两个实根.

分析: 由于最高次项 x^{2n} 前的系数为 1,而当 $x \to \infty$ 时,它作为正无穷是函数增长的"主导项",故预期 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 和当 $x \to -\infty$ 时都是恒正的函数,又注意到 $f(0) = a_{2n} < 0$,则连续函数 $f(x) = 0$ 至少有两个正根的图景明矣. 下面将此考量严格化.

证明: 注意到 $f(x) = x^{2n}\left(1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} + \frac{a^{2n}}{x^{2n}}\right)$ 当 $|x| \to +\infty$ 时, 括号内的极限是 1, 故 $\exists X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时

$$\left|1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} + \frac{a^{2n}}{x^{2n}} - 1\right| < \frac{1}{2}, \text{ 即 } 1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} + \frac{a^{2n}}{x^{2n}} > \frac{1}{2}$$

故当 $|x| > X$, 即 $x > X$ 或 $x < -X$ 时, 有 $f(x) > \frac{x^{2n}}{2} > \frac{X^{2n}}{2}$. 特别地

$$f(X+1) > \frac{(X+1)^{2n}}{2} > 0 \qquad f(-X-1) > \frac{(-(X+1))^{2n}}{2} > 0$$

注意到 $f(0) = a_{2n} < 0$. 在区间 $[-X-1, 0]$ 和 $[0, X+1]$ 上分别应用"零点定理", 知 $\exists \xi_1 \in (-X-1, 0)$, 以及 $\exists \xi_2 \in (0, X+1)$, 使得 $f(\xi_1) = 0$, $f(\xi_2) = 0$. 这说明题中多项式方程至少有两个实根. □.

12. 设函数 $f(x), g(x) \in C[a, b]$,且 $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$. 证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = g(\xi)$.

证明: 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x) \in C[a, b]$. 根据题设 $h(a) = f(a) - g(a) < 0$, 但 $h(b) = f(b) - g(b) > 0$, 则在 $[a, b]$ 上对 $h(x)$ 利用"零点定理", 知 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $h(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = g(\xi)$. □.

13. 设 $f(x) \in C[0,2]$, 且 $f(0)=f(2)$, 证明: 存在 $x, y \in [0,2]$ 满足 $y-x=1$, 使得 $f(x)=f(y)$.

证明: 令 $g(x) = f(x) - f(1+x)$, 当 $x \in [0,1]$ 时, $g(x)$ 连续, 且 $g(0)=f(0)-f(1)$, 但 $g(1)=f(1)-f(2)=f(1)-f(0)$.

- 如果 $f(0)=f(1)$, 则结论显然成立（取 $x=0$,$y=1$ 即可）.
- 如果 $f(0) \neq f(1)$, 则 $g(0)g(1)<0$, 对它在区间 $[0,1]$ 上应用"零点定理", 知 $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $g(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f(1+\xi)$, 取 $y=1+\xi$, $x=\xi$ 即可. $\square$.

选做题:

1. 设 $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$（有限值）, 证明: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

   证明: 首先 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 表明: $\forall \epsilon>0$, $\exists X>0$, 使得当 $|x|>X$ 时, 成立 $|f(x)-A|<\epsilon$. 特别地, 取 $\epsilon=1$, 则 $\exists X_1$ 当 $|x|>X_1$ 时, 有 $A-1<f(x)<A+1$. 而在**闭**区间 $[-X_1, X_1]$ 上, 由于函数连续, 则根据闭区间上连续函数的（整体）有界性, 知 $\exists M_1>0$, 使得 $\forall x \in [-X_1, X_1]$, 成立 $|f(x)| \le M_1$. 令 $M=\max\{M_1, |A-1|, |A+1|\}$, 则当 $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $|f(x)|<M$, 即知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界. $\square$.

2. 证明: 当 $x\to 0$ 时, 无穷小量 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 没有阶.

   证明: 若 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 有阶, 且阶为 α（不一定为整数）, 则必有

   $$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to 0} x^{1-\alpha}\sin\frac{1}{x} = 常数$$

   下面表明: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 上式都不成立（*c.f.* 本次作业第 *8* 题中的讨论）

   - $\alpha=1$, 振荡无极限;
   - $\alpha>1$, 更剧烈的振荡无极限;
   - $\alpha<1$, 无穷小量. 从而 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 是 x^{α}（$\forall\,\alpha<1$）的高阶无穷小量.

上面的论证表明：不存在 α，使得 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 与 x^α 是同阶无穷小量（当 $x\to 0$ 时），即作为（$x\to 0$）时的无穷小量是没有阶的. $\square$.

3. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\varphi(0)=0$ 及 $|f(x)|\le|\varphi(x)|$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

证明： 首先 $|f(0)|\le|\varphi(0)|=0$，故 $f(0)=0$. 又 $0\le|f(x)|\le|\varphi(x)|$，且 $\varphi(x)$ 在 0 处连续，故 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=\varphi(0)=0$，从而由“夹逼定理”知 $\lim\limits_{x\to0}|f(x)|=0$，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. $\square$.

4. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $f(0)=f(1)$，证明：$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\exists\xi_n\in[0,1]$ 使得 $f(\xi_n)=f\left(\xi_n+\frac{1}{n}\right)$

证明： 令 $g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$. 因 $f(x)\in C[0,1]$，故 $g(x)\in C\left[0,\,1-\dfrac{1}{n}\right]$. 注意到 $g\left(\dfrac{i}{n}\right)=f\left(\dfrac{i}{n}\right)-f\left(\dfrac{i+1}{n}\right)$，$i=0,1,\cdots,n-1$

$$\sum_{i=0}^{n-1}g\left(\frac{i}{n}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right]=f(0)-f(1)=0$$

- 若 $g(x)\equiv0$，则 $f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)\equiv0$，无甚可证.
- 若 $g(x)$ 不恒为 0，则 $f\left(\dfrac{i}{n}\right)$ 不全为零. 又因其和为 0，故 $\exists k,l$（不妨设 $k<l$），使 $g(k)g(l)<0$. 在区间 $\left[\dfrac{k}{n},\,\dfrac{l}{n}\right]$ 上应用零点定理，知 $\exists\xi_n\in\left(\dfrac{k}{n},\,\dfrac{l}{n}\right)$，使得 $g(\xi_n)=0$，即 $f(\xi_n)=f\left(\xi_n+\dfrac{1}{n}\right)$ $\square$.

5. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $f(x)$ 只取有理值，若 $f\left(\frac{1}{3}\right)=2$，证明：$\forall x\in[0,1]$，有 $f(x)=2$.

证明： 若 $\exists x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)\neq2$. 由无理数在实数中的稠密性知，$\exists$ 无理数 q：$\min\{f(x_0),2\}\le q\le\max\{f(x_0),2\}$. 由于 $f\in C[0,1]$，且 $f(1/3)=2$. 故由介值定理知 $\exists\xi\in(\min\{x_0,1/3\},\max\{x_0,1/3\})$，使得 $f(\xi)=q$. 这与 f 只取有理数矛盾. $\square$.