作业　六

必做题:

1. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，利用导数的定义计算下列各式的值

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},\ \text{其中}\ f(0)=0;\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$c)\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h};\qquad \lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_0+3h)-f^2(x_0-h)}{h}$$

解: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$; b) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$

$$=-\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+(-\Delta x)\right)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$$

$$c)\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$$

$$d)\ \lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_0+3h)-f^2(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_0+3h)-f^2(x_0)+f^2(x_0)-f^2(x_0-h)}{h}$$

$$=3\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_0+3h)-f^2(x_0)}{3h}+\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x_0)-f^2(x_0-h)}{x_0-(x_0-h)}=3\left(f^2\right)'(x_0)+\left(f^2\right)'(x_0)$$

$$=4\left(f^2(x)\right)'(x_0)=8f(x_0)f'(x_0)$$

2. 求下列函数在 x_0 处的左、右导数，并指出它在该点的可导性.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\ge 0\\ x^2, & x<0.\end{cases}\quad x_0=0;\qquad b)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\ne 0,\\ 0 & ,x=0,\end{cases}\quad x_0=0$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad x_0=0;\qquad d)\ f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}\quad x_0=1$$

解： a) $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 0}{x} = 0$；而

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - 0}{x} = 1$$

左导数不等于右导数，从而 $f(x)$ 在 0 处不可导.

b) $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}} = 1$，但 $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}} = 0$. 左右导数不相等，从而在 0 处不可导.

c) $f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} x \sin \dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} x \sin \dfrac{1}{x} = f'_+(0)$，从而 $f'(0) = 0$.

d) $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$，但 $f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ax + b - 1}{x - 1}$. 显然，只有当 $a = 2, b = -1$ 时，左右极限都为 2，故在 1 处可导，且导数为 2，否则函数是不可导的.

3. 求导数 $a)$ $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}$ $\qquad b)$ $f(x) = \arccos \dfrac{1}{|x|}$

解： a) 当 $x \in (-1, 1)$ 时，$f'(x) = \left(x^2 e^{-x^2}\right)' = 2xe^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1 - x^2)$；而当 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 时，$f'(x) = 0$；下面探讨 $x = \pm 1$ 处的可导性.

- $x = -1$ 时，$f(-1) = (-1)^2 e^{-(-1)^2} = e^{-1}$. $f'_-(-1) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\frac{1}{e} - \frac{1}{e}}{x + 1} = 0$，同理 $f'_+(-1) = 0$，故 $f'(-1) = 0$.
- $x = 1$ 时，$f(1) = e^{-1}$，而由于 $x > 1$ 时，$f \equiv 1/e$，故 $f'(1) = 0$.

综合可知 $f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1 - x^2), & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

b) 为使 f 有定义，须 $-1 \leq 1/|x| \leq 1$，即 $|x| \geq 1$，故 f 的定义域是 $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1\ +\infty)$. 运用 $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$，并利用复合函数的求导法则，有

- $x \in (1, +\infty)$ 时，$f(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$，故 $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(1/x)^2}} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)'$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

- $x \in (-\infty, -1)$ 时，$f(x) = \arccos \dfrac{1}{-x}$，故

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(-1/x)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' = -\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

综合可知 $f'(x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$，$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

4. 按定义求导数 $a)$ $f(x) = x^2 + 4x + 200$; $b)$ $f(x) = x \sin x$

解： a) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 + 4(x_0+\Delta x) + 200 - (x_0^2 + 4x_0 + 200)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + 4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + 4$$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)\sin(x+h) - x\sin x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)(\sin x \cos h + \sin h \cos x) - x \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x \sin x(\cos h - 1) + x \cos x \sin h + h(\sin x \cos h + \sin h \cos x)}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{x \sin x(\cos h - 1)}{h}}_{\lim_{h \to 0} \frac{x \sin x(-h^2/2)}{h}} + x \cos x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1} + \lim_{h \to 0} (\sin x \cos h + \sin h \cos x)$$

$$= 0 + x \cos x + \sin x = \sin x + x \cos x$$

5. 计算导数 $a)\ y=\dfrac{1-\sqrt[3]{2x-1}}{1+\sqrt[3]{2x-1}}$; $\quad b)\ y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$

$$c)\ y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2});\qquad d)\ y=x\arcsin(\ln x)$$

$$e)\ y=e^{\arctan\sqrt{x}};\qquad f)\ y=10^{x\tan x^2}$$

解: a) $y'=\dfrac{(1-\sqrt[3]{2x-1})'(1+\sqrt[3]{2x-1})-(1+\sqrt[3]{2x-1})'(1-\sqrt[3]{2x-1})}{(1+\sqrt[3]{2x-1})^2}$

$$=\frac{-\frac{2}{3}(1+\sqrt[3]{2x-1})(2x-1)^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}(1-\sqrt[3]{2x-1})}{(1+\sqrt[3]{2x-1})^2}$$

$$=-\frac{4}{3}\frac{(2x-1)^{-\frac{2}{3}}}{(1+\sqrt[3]{2x-1})^2}$$

b) $y'=\big(\sin\cos^2 x\big)'\cdot\cos(\sin^2 x)+\sin(\cos^2 x)\big(\cos\sin^2 x\big)'$

$$=(\cos\cos^2 x)(\cos\sin^2 x)(\cos^2 x)'-(\sin\cos^2 x)(\sin\sin^2 x)(\sin^2 x)'$$

$$=-(\cos\cos^2 x)(\cos\sin^2 x)(\sin 2x)-(\sin\cos^2 x)(\sin\sin^2 x)(\sin 2x)$$

$$=-\sin 2x\cos(\cos^2 x-\sin^2 x)=-\sin 2x\cos\cos 2x$$

c) $y'=\dfrac{\sqrt{x^2+a}}{2}+\dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2+a}}+\dfrac{a^2}{2}\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{2x^2+a}{2\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{a^2}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$$=\frac{2x^2+a^2+a}{2\sqrt{x^2+a^2}}$$

注记: 上面得结论不具有“对称美”，原因是第一个根号里是 x^2+a，而不是 x^2+a^2，如果是后者，则 $y'=\sqrt{x^2+a^2}$. 后面学习不定积分（即导数的逆运算）后会明白：上面相对简单的计算过程的逆向是不那么简单的，即通过几次“分部积分”运算得到的如下积分公式

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

一般来说，逆运算比原运算来得复杂些，比如减比加难、除比乘难，同理，积分比求导难！

d) $y' = (x \arcsin \ln x)' = \arcsin \ln x + x\dfrac{(\ln x)'}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \arcsin \ln x + \dfrac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

e) $y' = \left(e^{\arctan \sqrt{x}}\right)' = e^{\arctan \sqrt{x}} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = e^{\arctan \sqrt{x}} \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

f) $y' = \left(10^{x \tan x^2}\right)' = \left(e^{(\ln 10) x \tan x^2}\right)' = \ln 10 \cdot 10^{x \tan x^2} (x \tan x^2)'$

$$= \ln 10 \cdot 10^{x \tan x^2} \left(\tan x^2 + 2x^2 \sec^2 x^2\right)$$

6. 用对数求导法求导数

$$a)\ y = \frac{(x+1)^2 \sqrt[5]{4x+3}}{\sqrt[3]{2x^2+2x+1}}; \qquad b)\ y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$$

$$c)\ y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x; \qquad d)\ y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}$$

解： a) $\ln y = 2\ln(x+1) + \dfrac{1}{5}\ln(4x+3) - \dfrac{1}{3}\ln(2x^2+2x+1)$，两边同时对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{2}{5(4x+3)} - \frac{4x+2}{3(2x^2+2x+1)}$$

$$y' = \frac{2(x+1)\sqrt[5]{4x+3}}{\sqrt[3]{2x^2+2x+1}} + \frac{2(x+1)^2(4x+3)^{-\frac{4}{5}}}{5\sqrt[3]{2x^2+2x+1}} - \frac{2(x+1)^3\sqrt[5]{4x+3}}{3(2x^2+2x+1)^{\frac{4}{3}}}$$

b) $y' = ((\sin x)^{\cos x})' + ((\cos x)^{\sin x})' = \left(e^{\cos x \ln \sin x}\right)' + \left(e^{\sin x \ln \cos x}\right)'$

$= (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln \sin x + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right) + (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \ln \cos x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$

$$= (\sin x)^{\cos x} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x}{\sin x} + (\cos x)^{\sin x} \frac{\cos^2 x \ln \cos x - \sin^2 x}{\cos x}$$

c) $\ln y = x\ln x - x\ln(1+x)$，两边同时对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 - \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \ln x(1+x) + \frac{1}{1+x} \quad \Longrightarrow$$

$$y' = \left(\ln x(1+x) + \frac{1}{1+x}\right)\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

d) $\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln\sin x + \frac{1}{2}\ln(1-e^x)\right)$，两边同时对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{e^x}{2(1-e^x)}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$y = \frac{\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{e^x}{2(1-e^x)}\right)$$

7. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的连续正值函数，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^{\frac{1}{x}}$

解： $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln f(x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln f(x)}{x}}$. 而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x) - \ln f(0)}{x-0} = \frac{d}{dx}\bigg|_{x=0}\ln f(x) = \frac{f'(0)}{f(0)} = 2.$$

8. 计算函数的微分 $a)\ y = \ln\tan\frac{x}{2}$; $\qquad b)\ y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$c)\ y = \arctan\frac{v}{u}$ (以 du, dv 表示之); $\qquad d)\ y = \ln(\ln(x))$

注： 为求 dy，一种方法是计算出 $y'(x)$，然后 $dy = y'dx$；更直接的思路是利用一阶微分的形式不变性（本质是换元公式），比如

$$df(u(x)) = f'(u)\,du = \underbrace{f'(u(x))u'(x)}_{f'(x)}\,dx$$

解： a) 对 $y = \ln\tan\dfrac{x}{2}$. 直接计算 $y'(x)$ 如下

$$y' = \frac{1}{2\tan(x/2)}\sec^2\frac{x}{2} \quad\Longrightarrow\quad dy = y'(x)dx = 2\cot\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$$

或利用一阶微分的形式不变性“一微到底”，即

$$dy = \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{\sec^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx = 2\cot\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$$

b) “一微到底”，得 $dy = \dfrac{d\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \dfrac{dx + \frac{d(x+\sqrt{x})}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

$$= \frac{2\sqrt{x+\sqrt{x}}\,dx + dx + \frac{dx}{2\sqrt{x}}}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}dx$$

c) $dy = d\arctan\dfrac{v}{u} = \dfrac{d(v/u)}{1+(v/u)^2} = \dfrac{1}{1+(v/u)^2}\dfrac{udv-vdu}{u^2} = \dfrac{udv-vdu}{u^2+v^2}$

注： 如果 u, v 都是 x 的函数，则将 du, dv 用 dx 表示后代入便得 x 变动引致的函数值改变的微分 dy. 如果 u, v 本身就是独立的自变量，则 $y = \arctan\dfrac{v}{u}$ 是 u, v 的二元函数，则 dy 表示为自变量 u, v 微分 du, dv 的线性函数即为二元函数 y 由 u, v 变动引致的改变了的微分.

d) $dy = d\ln(\ln x) = \dfrac{d\ln x}{\ln x} = \dfrac{dx}{x\ln x}$.

9. 证明函数 $y = f(x)$ 的反函数的二阶导数公式 $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$

证明： $y = f(x)$ 两边同时对 y 求导，得 $1 = f'(x)\dfrac{dx}{dy}$，即 x 作为 y 的函数的变化率（导数）为 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f'(x)}$, 即若 $y = f^{-1}(x)$, 则 $y' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$（反函数求导公式）. 为求二阶导数，一种方法是直接计算

$$y'' = \frac{d}{dx}\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{-f''(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))'}{f'(f^{-1}(x))^2}$$

$$= \frac{-f''(f^{-1}(x)))}{f'(f^{-1}(x))^2}\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{f''(f^{-1}(x)))}{f'(f^{-1}(x))^3}$$

另一解法是在 $1 = f'(x)\dfrac{dx}{dy}$ 再对 y 求一次导数，得

$$0 = f'(x)\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{df'(x)}{dy}\frac{dx}{dy} = f'(x)\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{df'(x)}{dx}\frac{dx}{dy}\frac{dx}{dy} \quad 即$$

$$0 = f'(x)\frac{d^2x}{dy^2} + f''(x)\frac{1}{(f'(x))^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$$

即若 $y = f^{-1}(x)$,则 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{f''(f^{-1}(x))}{\left(f'(f^{-1}(x))\right)^3}$（这里的函数记号转换背后的原理是：一开始，$y = f(x)$，则 $x = f^{-1}(y)$，从而 $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{f''(f^{-1}(y))}{\left(f'(f^{-1}(y))\right)^3}$，然后为了符合通常将 x 视为自变量，y 视为变量的规范，将 x 和 y 位置交换，便得所证)

10. 计算下列函数反函数的一阶导数和二阶导数

$$a)\ \theta = r\arctan r; \qquad b)\ y = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$$

$$c)\ y = e^{\arcsin x}; \qquad d)\ y = 2x - \cos\frac{x}{2}$$

注： 如果懂得了第 *9* 题的证明，就知道没必要通过记忆公式求解，当然记住了直接算也方便，但效率未必会更高. 我们下面直接计算.

解： a) $d\theta = \left(\arctan r + \dfrac{r}{1+r^2}\right)dr$，从而 $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{1}{\arctan r + \frac{r}{1+r^2}}$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} = \frac{1}{1+r^2} + \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2} = \frac{2}{(1+r^2)^2}$$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{1}{x^2-1}$，故 $\dfrac{dx}{dy} = x^2 - 1.$

可解出 $x=\dfrac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}}$，则 $x^2-1=\dfrac{-4e^{2y}}{(1+e^{2y})^2}$，故 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{-4e^{2y}}{(1+e^{2y})^2}$.

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d(x^2-1)}{dy}=\frac{d(x^2-1)}{dx}\frac{dx}{dy}=2x(x^2-1)=\frac{-8e^{2y}(1-e^{2y})}{(1+e^{2y})^3}$$

c) $\dfrac{dy}{dx}=e^{\arcsin x}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，从而 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{e^{\arcsin x}}$. 又因为 $x=\sin\ln y$. 故 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\ln y}}{y}$. 又

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{\sqrt{1-\sin^2\ln y}}{y}\right)=\frac{y\frac{(-2\sin\ln y)(\cos\ln y)\frac{1}{y}-\sqrt{1-\sin^2\ln y}}{2\sqrt{1-\sin^2\ln y}}}{y^2}$$

$$=\frac{-2(\sin\ln y)(\cos\ln y)-y\sqrt{1-\sin^2\ln y}}{2y^2\sqrt{1-\sin^2\ln y}}$$

d) $\dfrac{dy}{dx}=2+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}$，即 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}$，不易将 x 用 y 显式解出，故 $\dfrac{dx}{dy}$ 就以这种“隐函数”模式给出.

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}\right)\frac{dx}{dy}$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}}{\left(2+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{4\left(2+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)^3}$$

11. *a)* 设 $y=e^x\cos x$, 求 $y^{(4)}$; *b)* 设 $y=(x+1)^2e^{2x}$，求 $y^{(100)}$.

解： a) $y'=e^x(\cos x-\sin x)$，$y''(x)=-2e^x\sin x$，$y'''(x)=-2e^x(\cos x+\sin x)$, 故 $y^{(4)}(x)=-2e^x(\cos x+\sin x)-2e^x(-\sin x+\cos x)=-4e^x\cos x$.

b) 利用高阶导数的莱布尼茨公式：

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

知 $\left((x+1)^2e^{2x}\right)^{(100)}=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}((x+1)^2)^{(k)}\left(e^{2x}\right)^{(100-k)}=$

$$(x+1)^2(e^{2x})^{(100)}+200(1+x)(e^{2x})^{(99)}+\frac{100\times 99}{2}\cdot 2(e^{2x})^{(98)}$$

$$=2^{100}e^{2x}(1+x)^2+100\times 2^{100}e^{2x}(1+x)+99\times 25\times 2^{100}e^{2x}$$

$$=2^{100}e^{2x}\left((1+x)^2+100+100x+99\times 25\right)$$

$$=2^{100}e^{2x}\left(x^2+102x+2576\right)$$

12. 求 n 阶导数 $a)\ y=\dfrac{1-x}{1+x};\qquad b)\ y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

$$c)\ y=x\ln x;\qquad d)\ y=\sin^2 x$$

解： a) $y=\dfrac{2}{1+x}-1$，故 $y^{(n)}=\left(\dfrac{2}{1+x}\right)^{(n)}=2(-1)^n n!(1+x)^{-n-1}.$

b) $y=\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$,故 $y^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$$

c) $(x\ln x)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^{(k)}(\ln x)^{(n-k)}=x(\ln x)^{(n)}+n(\ln x)^{(n-1)}$

$$\overset{n\geq 2}{=\!=\!=}x\frac{(-1)^{n+1}}{x^n}+n\frac{(-1)^n}{x^{n-1}}=(-1)^n(n-1)\frac{1}{x^{n-1}}$$

而当 $n=1$ 时，有 $(x\ln x)'=1+\ln x.$

d) $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,故 $y^{(n)}=-\dfrac{1}{2}(\cos 2x)^{(n)}\overset{\text{归纳}}{=\!=\!=}\begin{cases}-2^{n-1}\cos 2x & n\text{ 偶}\\ 2^{n-1}\sin 2x & n\text{ 奇}\end{cases}$

$$=(-2)^{n-2}\left[((-1)^n-1)\sin 2x+((-1)^{n-1}-1)\cos 2x\right]$$

13. (a) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f^2(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为 A，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性；

解： $f^2(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为 A，即 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(h)-f^2(0)}{h}=A$，即

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(h)+f(0))(f(h)-f(0))}{h}\xlongequal{\lim_{h\to 0}f(h)=f(0)}2f(0)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=A$$

即知若 $f(0)\neq 0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处亦可导,且导数为 $f'(0)=\dfrac{A}{2f(0)}$；若 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处未必可导，比如 $f(x)=|x|$，其平方在 0 处显然可导，但它本身在 0 处不可导.

(b) 设 $xf(x)$ 在 $x_0(\neq 0)$ 处可导，证明 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

证明： 由条件，知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x_0+h)f(x_0+h)-x_0f(x_0)}{h}$ 存在. 由于可导必连续，故 $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$，结合 $x_0\neq 0$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{1}{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{x_0\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)}{h}=$$

$$\frac{1}{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{x_0(f(x_0+h)-f(x_0)+hf(x_0+h))-hf(x_0+h)}{h}=$$

$$\frac{1}{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)f(x_0+h)-x_0f(x_0)-hf(x_0+h)}{h}=$$

$$\frac{1}{x_0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)f(x_0+h)-x_0f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{hf(x_0+h)}{h}\right)=$$

$$=\frac{1}{x_0}\left((xf(x))'|_{x_0}-f(x_0)\right)\qquad\square.$$

注： 因 $f'(x_0)$ 存在，上计算化简后应是 $f'(x_0)$，这是轻而易举的.

14. 设 $f(x)$ 是偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明：$f'(0)=0$.

证明： 由于 $f'(0)$ 存在，这意味着 $f(x)$ 在 0 处连续，特别地 $f(0)$ 存在. 则 $f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(-h)-f(0)}{-h}=f'_-(0)$. 但由于 $f(-h)=f(h)$，上面的左导数为 $-f'_+(0)$，而左右导数相等都为 $f'(0)$，这说明 $f'(0)=-f'(0)$，故它只能是零. $\square$.

选做题：

1. 若 $F(x)$ 在 a 处连续，且 $F(x)\neq 0$, 试讨论函数 $f(x)=|x-a|F(x)$ 在 $x=a$ 处的可导性.

   解： 注意到 $f(a)=0$，故

   $$f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|F(a+h)}{h}\xlongequal{F\text{ 的连续性}}-F(a)$$

   但 $f'_+(a)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|F(a+h)}{h}\xlongequal{F\text{ 的连续性}}F(a).$

   由于 $F(x)\neq 0$，故 $f'_-(a)\neq f'_+(a)$ 从而 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

2. 若 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，且 $f'(0)$ 存在，求 $f'(x)$.

   解： 在 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ 中令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$. 设 $f'(0)=A$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=A$，即 $f(h)=Ah+o(h)$. 则 $\forall x\in\mathbb{R}$

   $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$

   $$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+2xh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{Ah+o(h)+2xh}{h}=A+2x=f'(0)+2x$$

3. 按定义证明：可导的偶函数的导函数是奇函数，可导的奇函数的导函数是偶函数；可导的周期函数的导函数仍然是周期函数，且周期不变.

   证明： 设 $f(x)$ 是可导偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，则

   $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}=-f'(x)$$

   故 $f'(x)$ 为奇函数；同理可证：若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数.

   又若 $f(x)$ 为可导周期函数，设周期为 T，即 $\forall x$，$f(x+T)=f(x)$，两边对 x 求导，得

   $$f'(x+T)(x+T)'=f'(x)\quad\Longrightarrow\quad f'(x+T)=f'(x)\qquad\square.$$