# 作业　五

**必做题：**

1. (a) 证明：$y=ax+b\,(a\neq 0)$ 是曲线的渐近线（渐近线的严格定义见讲义《第三讲》附录一）当且仅当

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax) \end{cases}$$

   (b) 计算 $y=\sqrt{3x^2+4x+1}$ 所描绘曲线的渐近线.

2. 当 $x\to 0$ 时，确定下列无穷小对于 $x$ 的阶，并确定其主部

$$a)\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\ (x\to 0^+) \qquad b)\ \sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}\ (a>0)$$

$$c)\ \sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x} \qquad d)\ (\cos x)^x-1$$

3. 求下列各题中的常数 $a$.
   (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$;
   (b) 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[4]{1+ax^2}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小;
   (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，并指出该计算的几何意义;
   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2-bx+1})=2$，并指出该计算的几何意义.

4. 计算下列极限（可用无穷小（大）替换）

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}\,(a,b\neq 0) \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

5. 已知 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是比 $x$ 高阶的无穷小，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

6. 求下列函数的间断点，并确定其类型，若为可去间断点，补充或修改定义使之连续.

$$a)\ y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} \qquad b)\ y = \ln|\cos x|$$

$$c)\ y = \left[\frac{1}{|x|+1}\right] \qquad d)\ y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$$

7. 求下列各题中的常数 $a$，$b$ 的值，使得函数连续.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \frac{b(\sqrt{1+x}-1)}{x} & x > 0 \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

8. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^a \sin\frac{1}{x}, & x > 0 \\ e^x + b, & x \le 0 \end{cases}$ 的连续性，其中 $a, b$ 是任意常数.

9. 假设 $f$ 在 $[0,4]$ 上连续，且 $f(0) = f(2) = f(4) = 1$，$f(1) = f(3) = -1$. 试问：$f(x) = 0$ 在 $[0,4]$ 上解的个数?

10. 证明方程 $x = a\sin x + b\ (a, b > 0)$ 至少有一个正根.

11. 证明: 对偶数次多项式方程 $f(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$, 若 $a_{2n} < 0$，则它至少有两个实根.

12. 设函数 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 且 $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$. 证明: $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = g(\xi)$.

13. 设 $f(x) \in C[0,2]$, 且 $f(0) = f(2)$, 证明: 存在 $x, y \in [0,2]$ 满足 $y - x = 1$, 使得 $f(x) = f(y)$.

**选做题:**

1. 设 $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$（有限值），证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

2. 证明：当 $x \to 0$ 时，无穷小量 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 没有阶.

3. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\varphi(0)=0$ 及 $|f(x)|\le|\varphi(x)|$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

4. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $f(0)=f(1)$，证明：$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\exists\xi_n\in[0,1]$ 使得 $f(\xi_n)=f\left(\xi_n+\frac{1}{n}\right)$

5. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $f(x)$ 只取有理值，若 $f\left(\frac{1}{3}\right)=2$，证明：$\forall x\in[0,1]$，有 $f(x)=2$.