作业　十二　解答

1. 利用级数收敛的必要条件,证明:$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$; $b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

证明: a) 只需表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$ 收敛. 由"比值法": $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1}=0<1$, 故级数收敛.

b) 同理只需表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ 收敛. 由 "比值法": $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e}<1$, 故级数收敛.

注: 若不用比值法就会难一些,但也是可行的. 比如对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$,设 $N>a$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=\sum_{n=1}^{N}\frac{a^n}{n!}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}<\sum_{n=1}^{N}\frac{a^n}{n!}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{a^n}{n^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{a^n}{n!}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^n<\sum_{n=1}^{N}\frac{a^n}{n!}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{a}{N}\right)^n<\infty$$

又如对 b 中级数, 首先注意到有不等式 $\dfrac{n!}{n^n}\le\dfrac{1}{2^{n-1}}$, 当 $n\ge 4$ 时成立. 从而由比较法知级数收敛.

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 中有一个收敛,另一个发散,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 必发散. 若所给的两个级数都发散, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 是否必发散?

证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛, 则其前 n 项和序列 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=S_n'+S_n''$ 必收敛, 其中 S_n' 和 S_n'' 分别代表 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的前 n 项和序列. 根据假设, 不妨设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,

即 S_n' 收敛，但 S_n'' 发散. 然而 $S_n''=S_n-S_n'$ 为两个收敛数列的差，不应该发散，矛盾. 即知 S_n 必也发散. $\square$.

若两级数都发散，则其和未必发散，比如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-n)$ 都发散，但其和收敛.

3. 若数列 $\{na_n\}$ 收敛，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$ 收敛（$a_0=0$），则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. （提示："移形换位"）

证明: 记 S_n 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项和数列，T_n 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$ 的前 n 项和数列，则

$$T_n=a_1-a_0+2(a_2-a_1)+3(a_3-a_2)+\cdots+n(a_n-a_{n-1})$$

$$=-a_0-a_1-a_2-\cdots-a_{n-1}+na_n=na_n-a_0-S_{n-1}$$

则由于 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 都存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ 也存在. $\square$.

4. 判断 $\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$ 的敛散性.

解: 记 $b_n:=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n重}$. 由于 $b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}$，$b_1=\sqrt{2}$，可证 b_n 单调增加有上界，如下

- 单调性. 首先 $b_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=b_1$，设 $b_n>b_{n-1}$，则 $b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}>\sqrt{2+b_{n-1}}=b_n$.
- 有上界. 首先 $b_1=\sqrt{2}\le 2$，$b_2=\sqrt{2+b_1}\le\sqrt{2+2}=2$，设 $b_n\le 2$，则 $b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}\le\sqrt{2+2}=2$.

由单调有界收敛准则知 $\{b_n\}$ 收敛，设其极限为 B，则 $B>0$ 满足 $B=\sqrt{2+B}$，故 $B=2$.

令 $a_n=\sqrt{2-b_n}$，则 $a_n\to 0$，且给定级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{2-b_n}$.

由于 b_n 满足递推式 $b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}$，故

$$a_{n+1}=\sqrt{2-b_{n+1}}=\sqrt{2-\sqrt{2+b_n}}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$$

即 $a_{n+1}^2=2-\sqrt{4-a_n^2}=2-2\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$. 由于 $a_n\xrightarrow{n\to\infty}0$，故当 $n\to\infty$ 时，利用等价无穷小 $(1+x)^{\frac{1}{2}}\sim 1+\frac{1}{2}x,\ x\to 0$，知

$$a_{n+1}^2\approx 2-2\left(1-\frac{a_n^2}{8}\right)=\frac{a_n^2}{4}\quad\Longleftrightarrow\quad a_{n+1}\approx\frac{a_n}{2}$$

即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\approx\frac{1}{2}$，故可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的增长相当，故收敛. 更严格的说明见下

- 比较法：存在 N，使得当 $n>N$ 时，成立

  $$a_{n+1}^2=2-2\sqrt{1-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}<2-2\left(1-\frac{a_n^2}{8}\right)=\frac{a_n^2}{4}\quad\Longrightarrow\quad a_{n+1}<\frac{a_n}{2}$$

  即当 $n>N$ 时，$a_{n+1}<\frac{1}{2}a_n<\frac{1}{2^2}a_{n-1}<\cdots<\frac{1}{2^{n+1-N}}a_N$，则由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 亦收敛.

- 比值法：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-b_{n+1}}}{\sqrt{2-b_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+b_n}}{2-b_n}}$

  $$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2+b_n})(2+\sqrt{2+b_n})}{(2-b_n)(2+\sqrt{2+b_n})}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2+b_n}}}$$

  $$=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}=\frac{1}{2}<1\quad\Longrightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ 收敛.}$$

5. 判别下列级数的敛散性，并求出其中收敛级数的和.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{6^n}$　　2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$　　3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$　　5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^n$　　6) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

解： 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1/2}{1-1/2}+\frac{-1/3}{1-(-1/3)}=$ $1-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+3}\right]$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1\neq 0$　级数发散　4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}=\infty$　发散

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^n=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}\neq 0$　故级数发散

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1-\sqrt{2}$$

6. 用积分判别法判别下列级数的敛散性.（须验证判别法适用条件）

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$　　2) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$　　3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$　　4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(\ln n)}{n\ln n}$

解： 1） $\int_3^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_3^{+\infty}=+\infty$，故级数发散.

2) $\displaystyle\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2e}$. 收敛.

3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\arctan^2 x\Big|_1^{\infty} = \frac{3}{32}\pi^2$. 收敛.

4) $\displaystyle\int_5^{\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx = \frac{1}{2}\ln^2\ln x\Big|_5^{\infty} = +\infty$. 发散.

7. 用比较判别法或比较判别法的极限形式判别下列级数的敛散性.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$ 7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}\ (a>0)$ 8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$

解： 1） 由于 $\displaystyle\frac{1}{\ln(1+n)} > \frac{1}{n}$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$ 也发散.

2) 由于 $\displaystyle\sin\frac{\pi}{2^n} \le \frac{\pi}{2^n}$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛，故原级数收敛.

3) 由于 $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，故原级数收敛.

4) 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\arctan n}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2} \ne 0$，故由比较法的极限形式知级数发散.

5) 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1/n\sqrt[n]{n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \ne 0$，故知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

6) 由于 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)}{\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)^2} = 1 > 0$，故原级数与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\sqrt[n]{n})^2}$ 的敛散性一致. 而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n\sqrt[n]{n})^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{2}{n}} = 1 > 0 \quad\Longrightarrow\quad \text{原级数收敛.}$$

7) 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ （$a>0$），分类讨论

- 当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{a^n}{1+a^{2n}}}{\frac{1}{a^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+a^{-2n}} = 1 > 0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a^n}$ 收敛，从而原级数收敛.
- 当 $a=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2}$ 发散.
- 当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{a^n}{1+a^{2n}}}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+a^{2n}} = 1 > 0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ 收敛，从而原级数收敛.

8) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{\ln n}{n}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，从而原级数发散.

8. 设 $a_n>0, b_n>0$ 且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

证明： 由给定条件知

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \le \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1 = b_n$$

由此可见，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散. □.

9. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，且有 $a_n \le c_n \le b_n$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛. 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的敛散性如何?

证明: 由条件知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛, 又由 $a_n \le c_n \le b_n$ 知, $c_n-a_n \le b_n-a_n$, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛. □.

但若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=}^{\infty}b_n$ 同时发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 的敛散性不确定，比如

- $a_n = 1-\dfrac{1}{n}$，$b_n = 1+\dfrac{1}{n}$，$c_n = 1$，发散;
- $a_n = -\dfrac{1}{n}$，$b_n = \dfrac{1}{n}$，$c_n = 0$，收敛.

10. 证明下列命题（提示：利用比较法）:

(a) 若 $a_n \ge 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

(b) 若 $a_n \ge 0$ 且数列 $\{na_n\}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

(c) 若 $a_n \ge 0$，$b_n \ge 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$（提示：利用 a)）

证明: a) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$，结合 $a_n \ge 0$，知 $\exists N$，使得 $\forall n \ge N$，$a_n < 1$，从而当 $n > N$ 时，$a_n^2 < a_n < 1$. 故由**正项级数**的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛. □.

b) 由于 na_n 收敛，故其有界，即 $\exists M > 0$，使得 $na_n \le M$，即 $a_n \le \dfrac{M}{n}$，于是 $a_n^2 \le \dfrac{M^2}{n^2}$，即（由比较判别法）知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛. □.

c) 由 a) 中结论知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛. 结合 $a_nb_n \le \dfrac{1}{2}a_n^2+\dfrac{1}{2}b_n^2$，及

比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. 又因为 $(a_n+b_n)^2 \le 2a_n^2+2b_n^2$, 知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛. $\square$.

11. 设 $a_n \ge 0$, 则下列结论中正确的是哪一项? 给出论证. 若结论不正确, 请给出反例.

(a) 若 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(b) 若存在非零常数 λ, 使得 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(c) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

(d) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ, 使得 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

解: a) d) 都未必成立, 比如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$, 即 $a_n = \frac{1}{n\ln n}$. c) 也未必. 如 $a_n = \frac{1}{n^2}$. 下证 b) 是正确的. 由于 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$, 即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$, 使得 $\forall\, n > N$, 成立 $|na_n - \lambda| < \epsilon$, 即

$$\frac{\lambda-\epsilon}{n} < a_n < \frac{\lambda+\epsilon}{n}$$

取 ϵ, 使 $\lambda - \epsilon > 0$, 则因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. $\square$.

12. 用比值判别法或根值判别法判别下列级数的敛散性.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2n\arctan\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b}\right)^n$, 其中 $\lim_{n\to\infty} a_n = a\,(a,b>0)$, 且 $a \ne b$.

解： 1） 记 $a_n=\dfrac{(2n-1)!!}{n!}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n+1}=2>1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2) 记 $a_n=\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)!}}{\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot$ $\dfrac{n+1}{n+2}=e>1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

3) 记 $a_n=n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)\pi}{2^{n+2}}}{\dfrac{n\pi}{2^{n+1}}}=$ $\dfrac{1}{2}<1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

4) 记 $a_n=\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0<1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

5) 记 $a_n=\left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)=0<1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

6) 记 $a_n=3^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=3\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\dfrac{3}{e}>1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

7) 记 $a_n=\left(2n\arctan\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\sqrt{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n\arctan\dfrac{1}{n}}=$ $\sqrt{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{1}{n}}=\sqrt{2}>1$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{a_n}{b}\right)^n}=\dfrac{a}{b}$，故当 $a>b$ 时，级数发散；当 $a<b$ 是级数收敛.

13. 证明：若 $a_n \geq 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 也收敛.

证明： 由于 $a_n \geq 0$，故 $\frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$，从而由**正项级数**的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛. □.

14. 用适当的方法判别下列级数的敛散性.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}} \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} \qquad 5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \qquad 6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n\ (a>0)$$

解： 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{3^{n+1}}}{2^n \sin\dfrac{\pi}{3^n}} = 2\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi/3^{n+1}}{\pi/3^n} = \dfrac{2}{3} < 1$，故级数收敛（比值法）.

2) 因 $\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$，故级数收敛（比较法）.

3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\sqrt{n}\dfrac{\pi^2}{n^2}n^{\frac{3}{2}} = \dfrac{\pi^2}{2} > 0$，故由比较法的极限形式知级数收敛.

4) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+\frac{1}{n}}\right)^n n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2+1}\right)^n \cdot 1 = 1 \neq 0$. 故级数发散（违背收敛的必要条件）.

5) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^{\sqrt{n}}} = 0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数收敛（比较法的极限形式）.

6) 由于 $\sqrt[n]{\left(\dfrac{an}{n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an}{n+1} = a$，故当 $0 < a < 1$ 时，级数收

敛；当 $a>1$ 时，级数发散；而当 $a=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$，但 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$，故此时级数发散.

15. 利用不等式 $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

证明: 因为 $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散. 另一方面

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n-1}<\frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 的敛散性相同，从而根据比较判别法，知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

16. 证明极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1\cdot 2}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ 存在.（提示：将乘积转为求和，然后判定所得级数的敛散性）

证明: 记 $I_n=\left(1+\frac{1}{1\cdot 2}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$，则 $\frac{I_n}{I_{n-1}}>1$，故 I_n 单调增加，又注意到

$$\ln I_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}<1$$

从而 $I_n<e$. 即知 I_n 单调增加有上界，则由单调有界收敛准则，知 I_n 的极限存在. □.

17. 判别下列 (交错) 级数的收敛性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\frac{n}{n+1}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3n}{3+4n}\right)^n$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ $(a>0)$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ (提示：利用 *Abel* 或 *Dirichlet* 判别法)

解： 1） 记 $a_n=\frac{\ln n}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. 再令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$，当 $x>e$ 时，故 $a_n=f(n)$ 当 $n\geq 3$ 时单调减少. 综上，并由莱布尼茨判别法知原级数收敛，但对应绝对值级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 是发散的（由于 $\int_3^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$ 发散)，故原级数是条件收敛.

2) 令 $f(x)=\ln\frac{x}{x+1}=\ln x-\ln(x+1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}>0$，$x>0$，故 $\ln\frac{n}{n+1}$ 单调增加，从而 $-\ln\frac{n}{n+1}=\ln\frac{n+1}{n}>0$ 是单调减少的，且其极限也为 0，故由莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 收敛，但对应绝对值级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$ 的前 n 项和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n=\ln(n+1)-\ln 1$ 发散，从而绝对值级数发散. 故原级数条件收敛.

3） 令 $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n+2}<1$，故 $\{a_n\}$ 单调减少. 下证 $a_n\to 0$. 首先注意到 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$，引入辅助数列 $b_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}$. 比较对应项：对任意正整数 k，有 $\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$,

因此 $a_n < b_n$. 又因为

$$a_n b_n = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1},$$

所以

$$a_n^2 < a_n b_n = \frac{1}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0$，而 $a_n > 0$，故由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

综上可知，原级数收敛，但对应绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的项 $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 满足

$$a_n = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}$$

故知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，从而原级数只是条件收敛.

4) 对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-3n}{3+4n}\right)^n$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{1-3n}{3+4n}\right|^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1-3n}{3+4n}\right| = \dfrac{3}{4} < 1$，给原级数绝对收敛.

5) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}e^{-1} \neq 0$，故级数发散.

6) 考虑对应绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|1-\cos\dfrac{a}{n}\right|$，记 $a_n = \left|1-\cos\dfrac{a}{n}\right|$，则由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^2}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{a^2}{2} > 0$$

故原级数绝对收敛.

7) 记 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{1/\sqrt{n}} = e$，故对应绝对值级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 下研究其本身是否收敛. 首先，注意到 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，又

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}$$

$$< \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} < 1$$

故 $\{a_n\}$ 单调减少趋于 0，从而有莱布尼茨判别法知原级数收敛.

8) 令 $a_n = (-1)^n \sin^2 n$，$b_n = \dfrac{1}{n}$. 注意到 b_n 单调趋于 0，下考虑 a_n 的部分和. 由于

$$a_n = (-1)^n \sin^2 n = (-1)^n \frac{1-\cos n}{2} = \frac{(-1)^n}{2} - \frac{(-1)^n \cos 2n}{2}$$

由于 $\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^n}{2}$ 有界，又 $\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \cos 2n\right| \le \sum_{n=1}^{N} |\cos 2n| \le N$ 也有界. 故由迪利克雷判别法知原级数收敛. 下证其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 n}{n}$ 发散，故原级数条件收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos 2n}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}.$$

- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 是调和级数，发散.
- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{n}$ 收敛. 这可以用狄利克雷判别法证明:

  (a) 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调递减且趋于零;

(b) 部分和 $\sum_{k=1}^{n}\cos 2k$ 有界，因为

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\right| = \left|\Re\left(\sum_{k=1}^{n}e^{2ik}\right)\right| = \left|\Re\left(e^{2i}\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}}\right)\right| \le \frac{2}{|1-e^{2i}|} = \frac{1}{\sin 1}.$$

因此，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ 收敛.

原级数等于一个发散级数与一个收敛级数的线性组合，故原级数发散.

18. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一领域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛. （提示：利用泰勒展开获得 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的二阶信息）

证明: 由条件知，$\exists\,\delta>0$，使得 $f''(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 内有界，即 $\exists\, M>0$，使得 $\forall\, x\in[-\delta,\delta]$，都有 $|f''(x)|\le M$. 又可导蕴含连续，从而 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 内具有一阶连续导数, 且 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 内连续. 由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, 知

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0),\quad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

即知 $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上的一阶泰勒展开为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2=\frac{f''(\theta x)}{2}x^2,\quad 0<\theta<1$$

令 $x=\frac{1}{n}$，则当 n 充分大时，$\frac{1}{n}\in[-\delta,\delta]$，故有

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right|\cdot\frac{1}{n^2}\le\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

故由正项级数的比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛. $\square$.

19. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且 $a_{n+1} \le a_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 试证：a） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛；b) $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. （参考第 *3* 题）

证明： a) 考虑部分和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} n(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} na_n - \sum_{n=1}^{N} na_{n+1}$

$$= \sum_{n=1}^{N} na_n - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1)a_n = \sum_{n=1}^{N} na_n - \sum_{n=1}^{N} (n-1)a_n - Na_{N+1} + 0 \cdot a_1$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_n - Na_{N+1}$$

由于 $a_n > 0$ 且单调递减，每一项 $n(a_n - a_{n+1}) \ge 0$，故 S_N 单调递增，且由上知

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n - Na_{N+1} \le \sum_{n=1}^{N} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故 S_N 有上界. 单调递增且有上界的数列必收敛，即 $\lim_{N\to\infty} S_N$ 存在且有限，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛.

b) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，根据柯西收敛准则，对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n \ge N$ 时，对任意正整数 p 有 $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$. 特别地，取 $p = n$，有

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \varepsilon, \quad \forall n \ge N. \tag{1}$$

因为数列 $\{a_n\}$ 单调递减，对 $k = n+1, n+2, \ldots, 2n$ 有 $a_k \ge a_{2n}$，故

$$na_{2n} \le \sum_{k=n+1}^{2n} a_k < \varepsilon, \quad \forall n \ge N,$$

从而

$$2na_{2n} < 2\varepsilon. \tag{2}$$

对于奇数项，注意到 $a_{2n+1} \le a_{2n}$，于是

$$(2n+1)a_{2n+1} \le (2n+1)a_{2n} = \frac{2n+1}{2n} \cdot 2na_{2n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n} = 1$，存在 $N_1 \ge N$ 使得当 $n \ge N_1$ 时 $\dfrac{2n+1}{2n} \le 2$，从而

$$(2n+1)a_{2n+1} \le 2 \cdot 2na_{2n} < 4\varepsilon, \quad \forall n \ge N_1. \tag{3}$$

综合 (2) 和 (3)，对任意充分大的 n（无论奇偶），均有 $na_n < 4\varepsilon$. 由 ε 的任意性即得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. $\square$.

20. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.（提示：回到级数收敛的原始定义，即利用部分和 S_n 的收敛性来讨论，“归并原理”等）

证明: 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 S_n，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 的部分和数列为 T_n，设 $T_n \xrightarrow{n\to\infty} t$. 由于

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(u_{2k-1}+u_{2k}) = T_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} T_n = t$$

另一方面，$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} u_n = t + 0 = t$. 命题由此得证. $\square$.

下面是一些知识综合运用的题目，帮助大家在情景应用中进一步熟悉并整合知识线索。主线脉络要清晰，细节还需耐心磨，灵活机变莫迟疑。

21. 求曲线 $y = e^{-x}\sin x$ $(x \ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

解：所求面积为 $S=\int_0^{+\infty} e^{-x}|\sin x|\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-e^{-x}\cos x\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\cos x dx\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{2}\left[e^{-(n+1)\pi}+e^{-n\pi}\right]=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$

22. 设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积，记 $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求 S_1 与 S_2 的值.

解：曲线的交点为 $(0,0)$，$(1,1)$，所以 $a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})dx$

$$=\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

故 $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$$

由于 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$，令 $x=1$，得

$$\ln 2=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots\right)=1-S_2\quad\Longrightarrow\quad S_2=1-\ln 2$$

23. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$

(a) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$ $(n=2,3,\cdots)$

(b) 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

证明： $a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}\,dx$. 而被积函数在区间 $[0,1]$ 上 ≤ 0，故 $a_{n+1}-a_n<0$，即 $\{a_n\}$ 单调减少. 当 $n\ge 2$ 时，有

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 x^{n-1}\cdot x\sqrt{1-x^2}dx=\frac{-1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^1 x^{n-1}d\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]=-\frac{x^{n-1}}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx-$$

$$-\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n\quad\square.$$

b) 由 a) 中结论知 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+2}\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$. 因为 $a_n>0$ 且单调减少，故 $\frac{n-1}{n+2}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$，从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

24. 设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数，证明此方程存在唯一正实根 x_n，并证明当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

证明： 记 $f_n(x)=x^n+nx-1$. 当 $x>0$ 时，$f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0$，故 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加. 而 $f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=n>0$. 从而由连续函数的介值定理知 $x^n+nx-1=0$ 存在唯一的正实根 x_n.

由 $x_n^2+nx_n-1=0$ 与 $x_n>0$ 知

$$0<x_n=\frac{1-x_n^n}{n}<\frac{1}{n}$$

故当 $\alpha>1$ 时，$0<x_n^{\alpha}<\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$，而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛. $\square$.

25. 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ $(n=2,3,\cdots)$ 证明：1) a_n 收敛；2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.（提示：整理表达式并利用放缩简化到可利用结论 *1)*）；3） 给出上级数的一个上界.

证明：1) 显然 $a_n>0$, 因为 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\geq\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{a_n}\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}\right)=1$, $n=1,2,\cdots$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leq 0,\ n=1,2,\cdots$$

故 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，从而收敛. 设其极限为 a，则 ≥ 0，且有

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

解得 $a=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

2) 由 1) 的证明过程知

$$0\leq\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leq a_n-a_{n+1}$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 的部分和为

$$S_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})$$

$$=a_1-a_{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}a_1-1=1$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，从而由正项级数的比较判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ \text{收敛.}\quad\square.$$

3) 由上知 $S_n=a_1-a_{n+1}=2-a_{n+1}\to 1$. 又由于 S_n 单调增加（作为正项级数的部分和数列），故其一个上界为 1.

26. 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$. 1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n}$ 的值；2) 证明: 当 $\lambda > 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

证明： 由于

$$a_n+a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x+\tan^{n+2} x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x) \, dx = \frac{1}{n+2}$$

故知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

又注意到

$$\frac{a_n}{n^\lambda} \le \frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda}}{\frac{1}{n^{1+\lambda}}} = \lim\limits_{n\to\infty} n(a_n + a_{n+2}) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$

故由比较法的极限形式，及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 的收敛性，知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n^\lambda}$ 也收敛. 从而由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 也收敛. □.