作业　八

必做题：

1. 设 $f(x) = (a + b\cos x)\sin x - x$ 当 $x \to 0$ 时是 x 的五阶无穷小，求 a, b.

2. 利用极值判别法 I 求下列函数的极值:

$$a)\ y = \frac{\ln^2 x}{x}, \qquad b)\ y = x^2(a-x)^2\ (a > 0)$$

3. 利用极值判别法 II 求下列函数的极值:

$$a)\ y = xe^{-x}, \qquad b)\ y = \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^2y^2 + y = 1\ (y > 0)$ 给出，求其极值.

5. 设 $f(x) \in C[0, +\infty]$，$f(0) = 0$，且 $f'(x)$ 单调增加，证明：$\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上也是单调增加的.

6. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值:

   $a)\ y = |4x^3 - 18x + 27|$ 在 $[0, 2]$ 上;　　$b)\ y = |4x^3 - 18x + 27|$ 在 $[0, 2]$ 上.

7. 写出 $y = \arcsin x$ 和 $y = \tan x$ 的带拉格朗日余项的三阶马克劳林公式（须有计算过程）.

8. 由代数基本定理知：n 次多项式至多有 n 个实根. 利用此结论及罗尔定理，不求函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x) = 0$ 有几个实根，并指出根所在的区间.

9. 设 $a_0, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 都是实数，证明：若下条件满足

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$$

   则 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

10. 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f(a)f(b) > 0$，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. 证明：至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = f(\xi)$.

11. 利用拉格朗日中值定理，证明下面的不等式：

$$a)\ 0 < a < b,\, n > 1\ \text{时}:\ na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

$$b)\ |\sin x - \sin y| \le |x - y|$$

12. 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$ $(0 < a < b)$，证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f'(a) = f'(b) = 0$，证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$|f''(\xi)| \ge \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，且 $f(0) = f(1) = 0$，证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使得

$$2f'(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$$

15. 设 $f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$，且 $f(a) = f(b) = 1$，求证：$\exists \xi, \eta \in (a,b)$，使得

$$e^{\eta - \xi}\left[f(\eta) + f'(\eta)\right] = 1$$

16. 求下列函数图形的凹（下凸）凸区间及拐点：

$$a)\ y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50; \qquad b)\ y = a^2 - \sqrt[3]{x - b}$$

17. 证明：曲线 $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有三个拐点且位于同一条直线上.

18. 证明下列不等式：

    (a) 设常数 $p > 1$，则当 $x \in [0,1]$ 时，有 $x^p + (1-x)^p \ge \frac{1}{2^{p-1}}$.

    (b) $\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x \ne y)$

19. 全面讨论下列函数的性态，并描绘出它们的图像:

$$a)\ y = \frac{2x^2}{(1-x)^2}; \qquad b)\ y = x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$$

20. 证明方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有唯一的实根，并用切线法求这个根的近似值，使误差不超过 0.01.

21. 求方程 $\sin 2x - x = 0$ 的正实根（精准到两位小数）.

选做题:

1. 证明广义罗尔定理：设 $f(x) \in D(a, b)$，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ (或 $-\infty$)，则 $\exists\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

2. 设 $f(x) \in D[0, +\infty)$，且 $\forall x \in (0, +\infty)$，成立 $0 \le f(x) \le \ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$. 证明: $\exists\xi \in (0, +\infty)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{2}{2\xi+1} - \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

提示：利用推广的罗尔定理，见课本 157 页例 4.5.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某领域内 $n\,(\ge 3)$ 阶可导，且 $f^{(n)}(x)$ 在 $x = a$ 连续，又假设 $f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$，且 $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h) \quad 0 < \theta < 1$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x) < 0$. 若 $f(0) > 0$, $f'(0) < 0$，证明: $f(x) = 0$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有解.

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上二阶可导，且满足 $f(0) = f(1) = 0$, $\max_{0\le x\le 1} f(x) = 2$，证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$，使得 $f''(\xi) \le -16$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导，证明: 存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f(b) = f(a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f'''(\xi)$$

7. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，利用柯西中值定理，证明

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\qquad 0<\theta<1$$