期中复习题

1. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$ 满足条件 $y(1) = 3$ 的解，求曲线 $y = y(x)$ 的渐近线.

解： 方程式一阶线性微分方程，其通解为

$$y = e^{-\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}} \left(C + \int (2+\sqrt{x}) e^{\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}} \right) = e^{-\sqrt{x}} \left(C + \int (2+\sqrt{x}) e^{\sqrt{x}} dx \right)$$

$$= e^{-\sqrt{x}} \left(C + 2xe^{\sqrt{x}} \right) = Ce^{-\sqrt{x}} + 2x \ (C \text{ 为任意常数})$$

由 $y(1) = 3$ 得 $C = e$，故 $y(x) = e^{1-\sqrt{x}} + 2x$. 显然曲线没有铅直渐近线和水平渐近线，而

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1-\sqrt{x}} + 2x}{x} = 2; \quad b = \lim_{x\to+\infty} (y - ax) = \lim_{x\to+\infty} e^{1-\sqrt{x}} = 0$$

故曲线有一条斜渐近线 $y = 2x$.

2. 欧拉方程 $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$，$y'(1) = 2$ 的解为 $y = \underline{x^2}$.

解： 令 $x = e^t$，则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} =$

$$= \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

故 $y(t) = y(x(t))$ 满足 $y'' - 4y = 0$，其特征方程 $\lambda^2 - 4 = 0$ 有解 $\lambda = \pm 2$，从而有通解 $y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$. 由此知

$$y(x) = C_1e^{2\ln x} + C_2e^{-2\ln x} = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2}$$

由初始条件 $y(1) = 1, y'(1) = 2$ 得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = 1 \end{cases}$，即 $C_1 = 1, C_2 = 0$，故所求解为 $y(x) = x^2$.

3. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解为 $y=\underline{\dfrac{1}{x}}$.

解： 方法一. 直接分离变量，得 $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x}$，两边积分得 $\ln|y|=-\ln|C_1x|$，即通解为 $y=\dfrac{C}{x}$，由 $y(1)=1$，得 $C=1$，从而 $y=\dfrac{1}{x}$.
方法二：方程式一阶欧拉方程，故令 $x=e^t$，则方程转为 $y(t)$ 的方程 $y'+y=0$，直接积分得 $y(t)=Ce^{-t}$，从而 $y(x)=\dfrac{C}{x}$.

4. 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $\underline{xe^{2x+1},\ x>0}$.

5. 若 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=\underline{e^x}$.

解： 两方程相减，知 f 亦满足 $y'-3f=-2e^x$.

6. 微分方程 $y''-4y'+3y=2e^x$ 的通解为 $\underline{C_1e^x+C_2e^{2x}+xe^x}$.

解： 对应齐次方程的特征方程由特征根 $1,3$，故齐次方程由通解 $\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{3x}$. 根据非齐次项 $2xe^x$ 的形式及特征根，可设特解为 $y^*=axe^x$，代入原方程后得到 $a=1$，从而特解为 $y^*=xe^x$，即可知原方程的通解为 $y(x)=\overline{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{3x}+xe^x$.

7. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为 $\underline{y=-xe^x+x+2}$.

解： 由通解的形式可推断出方程对应特征方程有双重根 1（进一步可由根于系数的关系确定 $a=-2$，$b=1$）. 则非齐次方程的特解可设为 $y^*=Ax+B$，代入方程，得 $aA+b(Ax+B)=x$，即 $-2A+B=0$，且 $A=1$，故 $B=2$. 从而原方程的通解为 $y=e^x(C_1+C_2x)+x+2$，代入 $y(0)=2,y'(0)=0$，得 $C_1=0,C_2=-1$.

8. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数线性非齐次常微分方程的解，求该方程的通解.

解： 我们知道二阶常系数线性方程的解的结构为：

$$\text{通解} = \text{任一特解} + \underbrace{\text{对应齐次方程的通解}}_{\text{任意两个线性无关解的线性组合}}$$

又知道：非齐次方程的任意两个特解之差 = 对应齐次方程的一个解.

故由上可知 $y_1 - y_3 = e^{3x}$ 和 $y_2 - y_3 = e^x$ 是对应齐次方程的两个线性无关的解，故对应齐次方程的通解为 $C_1e^x + C_2e^{3x}$，从而原方程的通解为 $y(x) = y_3 + C_1e^x + C_2e^{3x} = -xe^{2x} + C_1e^x + C_2e^{3x}$.

9. 若 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0\,(a > 0), f(0) = m, f'(0) = n$，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \underline{n + am}$.

解： 可先求特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$ 的根 $\lambda = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$，然后讨论不同 a 时方程的解，最后积分. 不是不可以，但着实繁琐，故觅它途. 便发现只需分布积分就可轻松获解. 方程两边从 0 积到 $+\infty$，得

$$\int_0^{+\infty} f''(x)dx + a\int_0^{+\infty} f'(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0$$

$$\int_0^{+\infty} df'(x) + a\int_0^{+\infty} df(x) + \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0$$

$$f'(+\infty) - f'(0) + af(+\infty) - af(0) + \int_0^{+\infty} f(x)dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx = n + ma - f'(+\infty) - af(+\infty)$$

注意到特征根当 $a > 2$ 时为两个负值，对应通解为两个负指数函数的线性组合，显然此时 $f'(+\infty) = f(+\infty) = 0$；当 $a = 2$ 时有重根 -1，此时通解为 $f(x) = e^{-x}(C_1x + C_2)$，亦有 $f'(+\infty) = f(+\infty) = 0$；当 $0 < a < 2$ 时有共轭虚根，且由于 $a \neq 0$，故通解为 $e^{-ax/2}\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x$ 与 $e^{-ax/2}\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x$ 的线性组合，故亦有 $f'(+\infty) = f(+\infty) = 0$. 故知无论 $a > 0$ 取何值，都有 $f'(+\infty) = f(+\infty) = 0$，从而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = n+am$.

10. 设 2 阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解为 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$，则 $y''+py'+qy=e^x\cos x$ 应具有的特解形式为$\underline{y^*=x\left[A(x)\cos x+B(x)\sin x\right]e^x}$.

解： 由通解的形式可推断出方程的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 具有一对共轭复根 $1\pm i$，则根据非齐次项 $e^x\cos x$ 的特点（对应根 $1\pm i$），可设方程的特解为 $y^*=x\left[A(x)\cos x+B(x)\sin x\right]e^x$.

11. 已知 $y_1=x\ln x$，$y_2=x\ln x+x, y_3=2x\ln x-x$ 是某个二阶齐次线性线性微分方程的三个特解，则这个微分方程为（C）

$$(A)\quad y''-y'-2y=0 \qquad\qquad (B)\quad y''+y=0$$

$$(C)\quad x^2y''-xy'+y=0 \qquad\qquad (D)\quad x^2y''-2y=0$$

解： 首先排除 A,B 选项. 繁琐的方法是直接代入验证 $y_i, i=1,2,3$ 满足 C 和 D 哪个方程. 但注意到 C,D 都是欧拉形方程，故先考虑变量替换 $x=e^t$，将 C，D 中的方程化为如下

$$\begin{cases}(C):\ y''-2y'+y=0\\(D):\ y''-y'-2y=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}y(t)=C_1e^t+C_2te^t\\y(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad\begin{cases}y(x)=C_1x+C_2\,x\ln x\\y(x)=C_1x^2+\dfrac{C_2}{x}\end{cases}$$

由此知 C 中方程有基础解 x 和 $x\ln x$，它们是线性无关的，故原方程的通解是它们的所有线性组合，显然能组合出题中的 y_1,y_2,y_3.

12. 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是 (D)

$$(A)\quad y'''+y''-4y'-4y=0. \qquad (B)\quad y'''+y''+4y'+4y=0.$$

$$(C)\quad y'''-y''-4y'+4y=0. \qquad (D)\quad y'''-y''+4y'-4y=0.$$

解： 由通解的形式可推断出 y 所满足的三阶齐次常系数线性方程具有

特征值：$1, 2i, -2i$，以它们为根的最高次系数为 1 的三次多项式方程为 $(\lambda-1)(\lambda-2i)(\lambda+2i) = (\lambda-1)(\lambda^2+4) = \lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4 = 0$，即知 y 满足的微分方程为：$y'''-y''+4y'-4y=0$.

13. 求平行于平面 $10x-11y-2z+3=0$ 且于球面 $(x-4)^2+y^2+(z-2)^2=225$ 相切的平面的方程.

解: 由题意，可设所求切平面的方程为 $10x-11y-2z=C$，其中 C 为待定常数. 对球面方程微分，得 $2(x-4)dx+2ydy+2(z-2)dz=0$，从而球面上点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为:

$$2(x_0-4)(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2(z_0-2)(z-z_0)=0$$

即：$(x_0-4)x+y_0y+(z_0-2)z = x_0(x_0-4)+y_0^2+z_0(z_0-2)$. 与我们所设方程对比，令

$$\begin{cases} x_0-4=10k, \\ y_0=-11k, \\ z_0-2=-2k \end{cases}$$

为确定 k，代入球面方程，得到 $(10k)^2+(-11k)^2+(-2k)^2=225$，解得 $k=\pm1$. 从而切点坐标为 $(14,-11,0)$ 或 $(-6,11,4)$. 将坐标代入所设切平面方程，解得 $C=261$ 或 $C=-189$. 故所求切平面为

$$10x-11y-2z-261=0, \quad \text{或}\ 10x-11y-2z+189=0$$

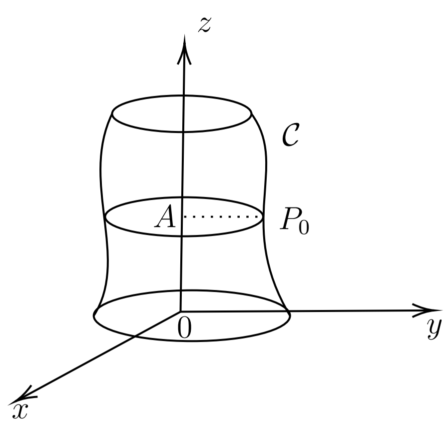
14. 将曲线 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad (a\le t\le b) \\ z=z(t), \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周.

(a) 证明:所得旋转面有如参数表示 $\mathcal{C}:\begin{cases} x=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\cos\theta, \\ x=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\sin\theta, \qquad a\le \\ z=z(t), \end{cases}$ $t\le b, 0\le\theta\le 2\pi$.

解: 在 $\mathcal{C}$ 上任取一点 $P_0(x(t_0,y(t_0))$，则过点 P_0 的纬圆是在平面

$z = z(t_0)$ 上，并以 $A(0, 0, z(z_0))$ 为圆心，以 $|AP_0| = \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}$ 为半径，故纬圆的参数方程是：

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)} \cos\theta \\ y = \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)} \sin\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = z(t_0) \end{cases}$$



当 P_0 遍历曲线上所有点事，所有这样的纬圆边生成了所求的旋转曲面，故旋转曲面有如下参数方程：

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cos\theta \\ y = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \sin\theta \qquad a \le t \le b;\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = z(t) \end{cases}$$

(b) 求旋转面上点的切平面方程.

解： 曲面上 t 曲线（固定 θ, 以 t 为参数的曲线）在某点处的切向量为

$$\boldsymbol{l}_t = (x_t, y_t, z_t) = \left(\frac{x(t)x'(t)\cos\theta}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}},\ \frac{y(t)y'(t)\sin\theta}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}},\ z'(t) \right)$$

曲面上 θ 曲线（固定 t, 以 θ 为参数的曲线）在某点处的切向量为

$$\boldsymbol{l}_\theta = (x_\theta, y_\theta, z_\theta) = \left(-\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \sin\theta,\ \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cos\theta, 0 \right)$$

而曲面上任何一点都是某条 θ 曲线和某条 t 曲线的交点（由此以 (θ, t) 为该点之坐标），从而旋转曲面在该点的法向量可取为

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{l}_t \times \boldsymbol{l}_\theta = \Big(-z'(t)\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\cos\theta,$$

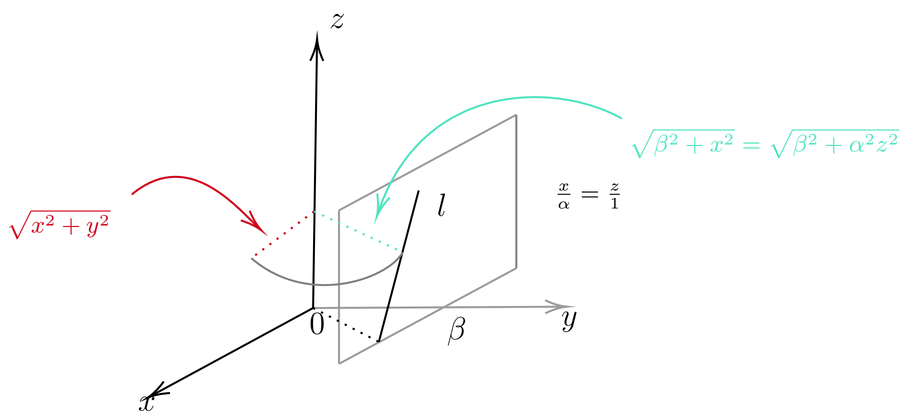
$$z'(t)\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\sin\theta,\ x(t)x'(t)\cos^2\theta + y(t)y'(t)\sin^2\theta\Big)$$

故切平面方程为

$$-z'(t)\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\cos\theta\left(X-\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\cos\theta\right)+$$
$$+\ z'(t)\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\sin\theta\left(Y-\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\sin\theta\right)\ +$$
$$+\ \left(x(t)x'(t)\cos^2\theta + y(t)y'(t)\sin^2\theta\right)(Z-z(t)) = 0$$

(c) 求直线 $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y-\beta}{0} = \dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转所成曲面的方程. 并按 α, β 的取值讨论曲面的形状.

解： 给定直线为 $y = \beta$ 平面上的直线 $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{z}{1}$. 它绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的方程为 $(\sqrt{x^2+y^2})^2 = \beta^2 + \alpha^2 z^2$，即 $x^2+y^2-\alpha^2z^2 = \beta^2$



- $\alpha = 0, \beta \neq 0$ 时，旋转曲面为圆柱面；
- $\alpha \neq 0, \beta = 0$ 时，旋转曲面为圆锥面；
- $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时，旋转曲面为单叶双曲面.

15. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的重极限和累次极限.

解: 累次极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\to 0}(0) = 0$；$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$y\sin\dfrac{1}{x}\to 0$，但 $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 的极限不存在. 这是因为，(x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，$\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{k}{1+k^2}$，依赖于 k.

16. 探讨下面的函数在 $(0,0)$ 是否连续，是否可偏导，及是否可微分?

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

解: 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$0\le |f(x,y)|\le |xy|$，由夹逼定理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$，故知函数在原点连续. 根据偏导数作为极限的定义，有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0$$

故 f 在 $(0,0)$ 可偏导. 最后，在 $(0,0)$ 处，给自变量以增量 (x,y)，则对应的函数增量 $\Delta f = f(x,y)-f(0,0) = f(x,y)$，如 f 在原点可微，则其微分必为 $df|_{(0,0)} = f_x(0,0)dx + f_y(0,0)dy = 0$，且 $\Delta f - df|_{(0,0)}$ 是 $\rho := \sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小. 事实上，有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta f - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因为 $0\le\left|\dfrac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\left|\dfrac{xy}{|x|}\right| = |y|$，由夹逼定理知极限为 0，从而函数在 $(0,0)$ 处是可微的.

17. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x-y+\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 证明：$f(x,y)$ 在原点处连续，沿任何方向的方向导数存在，但不可微.

解： 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$x-y\to 0$，且 $0\le\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{|xy^2|}{y^2}=|x|$，故由夹逼定理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，故 f 在 $(0,0)$ 连续. 对任意 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则对应方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t(\cos\alpha-\sin\alpha)+\frac{t^3\cos\alpha\sin^2\alpha}{t^2}}{t}$$

$$=(\cos\alpha-\sin\alpha)+\cos\alpha\sin^3\alpha$$

故 $(0,0)$ 点处任意方向的方向导数存在. 下证其在原点不可微，首先

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{-y}{y}=-1$$

故，如果 f 在 $(0,0)$ 可微，其微分必是 $dx-dy$，则对增量 (x,y)，对应函数增量 $\Delta f=f(x,y)=f(0,0)=f(x,y)$ 与其线性主部 $x-y$（此时 $dx=\Delta x=x,dy=\Delta y=y$）之差必是 $\rho:=\sqrt{x^2+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的高阶无穷小，但

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\Delta f-x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\xlongequal{y=kx}\lim_{x\to0}\frac{k^2x^3}{(1+k^2)^{3/2}x^3}=\lim_{x\to0}\frac{k^2}{(1+k^2)^{3/2}}$$

依赖于 k 的取值，故上极限不存在，这说明函数 f 在原点是不可微的.

18. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ，则（C）

(A) $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$ (B) $f''_{xy}(0,0)>f''_{yx}(0,0)$

(C) $f''_{xy}(0,0)<f''_{yx}(0,0)$; (D) $f''_{xy}(0,0)$ 与 $f''_{yx}(0,0)$ 至少有一个不存在.

解： 当 $(x,y)\neq 0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}=$

$$=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2},\quad \text{同理可知}\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

而当 $(x,y)=(0,0)$ 时 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x}=0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y}=0$$

则 $f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\frac{-y^5}{y^4}}{y}=-1$，且

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^5}{x^4}}{x}=1.$$

19. 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是（B）

(A) 若极限 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

解： 考察可微的定义，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，即 $\exists$ 与 (x_0,y_0) 无关的常数 A,B，使得当 $\Delta x=x-x_0\to 0,\Delta y=y-y_0\to 0$ 时，成立

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-A\Delta x-B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0$$

则称 $df|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$ 为函数 f 在点 (x_0,y_0) 处的微分. 若函数可微，则其微分唯一，即 $A=f_x(x_0,y_0)$，$B=f_y(x_0,y_0)$.

由题设及选项 B 的条件知 $f(0,0)=0$，此时 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$ 满足可微的定义，且 $df|_{(0,0)}=0dx+0dy$.

20. 求使 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^n}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续和可微的最小正整数 n.

解： 当 $n=2$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\xlongequal{y=kx}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+k)^2}{1+k^2}$，极限不存在，故函数不连续.

当 $n\geq 3$ 时

$$|f(x,y)|=\left|\frac{(x+y)^n}{x^2+y^2}\right|=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}|x+y|^{n-2}\leq 2|x+y|^{n-2}$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，连续. 从而能使 f 在原点处连续的最小自然数是 $n=3$. 而当 $n=3$ 时，$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^3}=1$，同理 $f_y(0,0)=1$，此时

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^3-(x+y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\xlongequal{y=x}\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2\sqrt{2}x^3}=\sqrt{2}\neq 0$$

故函数在原点不可微. 当 $n \geq 4$ 时，$f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^3} = 0$，同理 $f_y(0,0)=0$，此时

$$\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{(x+y)^n}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$\frac{(x+y)^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}|x+y|^{n-3} \leq \frac{\left[2(x^2+y^2)^{3/2}\right]}{(x^2+y^2)^{3/2}}|x+y|^{n-3} = 2\sqrt{2}|x+y|^{n-3}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = 0$$

故当 $n \geq 4$ 时函数在原点处可微.

21. 设 $u = f(ax^2+by^2+cz^2)$，求 du.

解： $du = f'(ax^2+by^2+cz^2)\,d(ax^2+by^2+cz^2)$

$$= f'(ax^2+by^2+cz^2)\ (2axdx+2bydy+2czdz)$$

$$= 2f'(ax^2+by^2+cz^2)(axdx+bydy+czdz).$$

22. 设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x) = x(x+1)^2$，$f(x,x^2) = 2x^2\ln x$，则 $df(1,1) = \underline{dy}$.

解： 方程 $f(x+1,e^x) = x(x+1)^2$ 和 $f(x,x^2) = 2x^2\ln x$ 两边同时对 x 求导，得到 $\begin{cases} f_x(x+1,e^x)+f_y(x+1,e^x)e^x = (x+1)^2+2x(x+1) \\ f_x(x,x^2)+f_y(x,x^2)(2x) = 4x\ln x+2x \end{cases}$

令 $x=0$，得 $\begin{cases} f_x(1,1)+f_y(1,1)=1 \\ f_x(1,1)=0 \end{cases}$，即知 $f_x(1,1)=0$，$f_y(1,1)=1$，从而知微分 $df(1,1)=dy$.

23. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x = 2$ 确定，则 $dz|_{(0,1)} = \underline{-dx}$.

解： 利用隐函数求导法则，将 z 看成是 x,y 的函数，方程两边同时对

x 和 y 求导，得

$$\begin{cases} e^z z_x + yz + xyz_x + 1 - \sin x = 0 \\ e^z z_y + xz + xyz_y = 0 \end{cases} \xRightarrow{(0,1)\text{点处},\, z=0} \begin{cases} z_x + 1 = 0 \\ z_y = 0 \end{cases}$$

故所求微分为 $dz|_{(0,1)} = z_x(0,1)dx + z_y(0,1)dy = -dx + 0dy = -dx.$

另解： 方程两边同时微分（利用一阶微分的形式不变性，“一微到底解千愁！”）$e^z dz + yzdx + xzdy + xydz + dx - \sin x dx = 0$

$$\Longrightarrow \quad (e^z + xy)dz + (1 + yz - \sin x)dx + xzdy = 0$$

$$\Longrightarrow \quad dz = \frac{\sin x - yz - 1}{e^z + xy}dx + \frac{-xz}{e^z + xy}dy$$

故 $dz|_{(0,1)} = -dx$. 畅快！

24. 设 $f(u, v)$ 可微，$z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x - z, y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)} = \underline{-dx + 2dy}$.

解： “一微到底”，“无微不至”，得

$$zd(x+1) + (x+1)dz - 2ydy = 2xf(x-z, y)dx + x^2 df(x-z, y)$$

$$\Longrightarrow \quad zdx + (x+1)dz - 2ydy = 2xf(x-z, y)dx + x^2\left(f_u d(x-z) + f_v dy\right)$$

$$zdx + (x+1)dz - 2ydy = 2xf(x-z, y)dx + x^2\left((f_u dx - f_u dz) + f_v dy\right)$$

整理得 $(z - x^2 f_u)dx - (2y + x^2 f_v)dy + (x + 1 + x^2 f_u)dz = 0$

$$\Longrightarrow \quad dz = \frac{x^2 f_u - z}{1 + x + x^2 f_u}dx + \frac{2y + x^2 f_v}{1 + x + x^2 f_u}dy$$

在 $(0,1)$ 点处，$dz|_{(0,1)} = -z(0,1)dx + 2dy$，将 $(0,1)$ 代入方程，得 $z(0,1) - 1 = 0$，即 $z(0,1) = 1$，从而知 $dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$.

25. 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 $\underline{x - y + z + 2 = 0}$.

解：方程两边同时微分，得 $2xdx-\sin(xy)(xdy+ydx)+ydz+zdy+dx=0$，整理得 $(1+2x-y\sin(xy))dx+(z-x\sin(xy))dy+ydz=0$，由此即知在 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为 $(1+2x-y\sin(xy))(0,1,-1)(x-0)+$

$$+\ (z-x\sin(xy))(0,1,-1)(y-1)+y(0,1,-1)(z+1)=0$$

即为 $x-(y-1)+z+1=0$，即 $x-y+z+2=0$.

26. 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为 $\underline{2x-y-z=1}$.

解： 方程两边同时微分，得

27. 设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\underline{4e}$.

解： $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x(xy)^2}\frac{d(xy)}{dy}=xe^{x^3y^2}$，从而 $\frac{\partial f^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{x^3y^2}\right)=e^{x^3y^2}+3x^3e^{x^3y^2}$，由此知 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=e+3e=4e$.

解： 如果选择先对 x 求偏导，则 $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x(xy)^2}\frac{\partial(xy)}{\partial x}+\int_0^{xy}\frac{\partial e^{xt^2}}{\partial x}dt$

$$=ye^{x^3y^2}+\int_0^{xy}t^2e^{xt^2}dt$$

从而 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{x^3y^2}+\int_0^{xy}t^2e^{xt^2}dt\right)=e^{x^3y^2}+ye^{x^3y^2}(2y)+$

$$+\ (xy)^2e^{x(xy)^2}\frac{\partial(xy)}{\partial y}=e^{x^3y^2}+2y^2e^{x^3y^2}+x^3y^2e^{x^ey^2}$$

从而 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=e+2e+3=4e$，明显比上方法繁琐了不少（甚至因此写不对导数！）

28. 设 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\underline{\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}}$.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(u)(-\cos x) + y$ 且 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)(\cos y) + x$，从而所求为

$$\frac{1}{\cos x} f'(u)(-\cos x) + \frac{y}{\cos x} + \frac{1}{\cos y} + f'(u)(\cos y) + \frac{x}{\cos y}$$

$$= \frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}.$$

另解： $z = f(\sin y - \sin x) + xy$ 两边直接微分，得

$$dz = f'(\underbrace{\sin y - \sin x}_{u}) d(\sin y - \sin x) + d(xy)$$

$$= f'(u)\left(\cos y dy - \cos x dx\right) + x dy + y dx$$

$$= \left(y - f'(u)\cos x\right) dx + \left(x + f'(u)\cos y\right) dy$$

即知 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y - f'(u)\cos x$ 且 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + f'(u)\cos y$，其后同上解.

29. 验证 $z(x,y) = \sqrt{xy}\,\phi\left(\dfrac{x}{y}\right) + \psi(xy)$ 满足方程 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}y^2$（*c.f. HW 7 9(b) iii*）.

解： $z_x = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}\phi\left(\dfrac{x}{y}\right) + x^{1/2}y^{1/2}\phi'\left(\dfrac{x}{y}\right)\dfrac{1}{y} + \psi'(xy)y$

$$z_{xx} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}\phi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y} + \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{-1/2}\phi'\left(\frac{x}{y}\right) +$$

$$+\ x^{1/2}y^{-1/2}\phi''\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y} + \psi''(xy)y^2$$

$$x^2 z_{xx} = -\frac{1}{4}x^{1/2}y^{1/2}\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}x^{3/2}y^{-1/2}\phi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}x^{3/2}y^{-1/2}\phi'\left(\frac{x}{y}\right) +$$

$$+\ x^{5/2}y^{-3/2}\phi''\left(\frac{x}{y}\right) + \psi''(xy)y^2$$

$$= -\frac{1}{4}x^{1/2}y^{1/2}\phi\left(\frac{x}{y}\right) + x^{3/2}y^{-1/2}\phi'\left(\frac{x}{y}\right) + x^{5/2}y^{-3/2}\phi''\left(\frac{x}{y}\right) + x^2y^2\psi''(x)$$

另一方面，$z_y = \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}\phi\left(\frac{x}{y}\right) - x^{3/2}y^{-3/2}\phi'\left(\frac{x}{y}\right) + \psi'(xy)x$

$$z_{yy} = -\frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2}\phi\left(\frac{x}{y}\right) + x^{3/2}y^{-5/2}\phi'\left(\frac{x}{y}\right) + \psi''(xy)x^2$$

$$y^2 z_{yy} = -\frac{1}{4}x^{1/2}y^{1/2}\phi\left(\frac{x}{y}\right) + x^{5/2}y^{-1/2}\phi'\left(\frac{x}{y}\right) + x^{5/2}y^{-3/2}\phi''\left(\frac{x}{y}\right) + x^2y^2\psi''(xy)$$

比较可知 $x^2 z_{xx} = y^2 z_{yy}$.

30. 设 $z = f(x+y, yg(x))$，其中 f 具有 2 阶连续偏导数，曲线 $w = g(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $w = 1+x$，且 $f(u,v)$ 的各阶偏导数在 $u = v$ 处取值为 1，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=0,y=1} = \underline{5}$.

解： 曲线 $w = g(x)$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $w = 1+x$，故 $g(0) = 1, g'(0) = 1$. 从而 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + f_2'(yg'(x))$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{11}'' + f_{12}''g(x) + g'(x)f_2' + yg'(x)(f_{21}'' + f_{22}''g(x))$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=0,y=1} &= f_{11}''(0+1, 1g(0)) + f_{12}''(0+1, 1g(0))g(0) + g'(0)f_2'(0+1, 1g(0)) \\ &\quad +1g'(0)\left(f_{21}''(0+1, 1g(0)) + g(0)f_{12}''(0+1, 1g(0))\right) \\ &= 1+1+1+1(1+1) = 5.\end{aligned}$$

31. 设 $z = \sin(xy) + \phi\left(x, \frac{x}{y}\right)$，其中 $\phi(u,v)$ 具有二阶导数，且满足 $\phi_{uv} + \frac{1}{y}\phi_{vv} = 0$，则 $z_{xy} = \underline{\cos(xy) - xy\sin(xy) - \frac{1}{y^2}\phi_v\left(x, \frac{x}{y}\right)}$.

解： $z_x = \cos(xy)y + \phi_u\left(x, \frac{x}{y}\right) + \phi_v\left(x, \frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}$，进而

$$z_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy) + \phi_{uu}\left(x, \frac{x}{y}\right) \times 0 +$$

$$+\phi_{uv}\left(x,\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{y^2}\right)+\frac{1}{y}\phi_{vu}\left(x,\frac{x}{y}\right)\times 0+\frac{1}{y}\phi_{vv}\left(x,\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

$$+\phi_v\left(x,\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-1}{y^2}\right)=\cos(xy)-xy\sin(xy)+$$

$$+\left(\frac{-x}{y^2}\right)\underbrace{\left[\phi_{uv}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}\phi_{vv}\left(x,\frac{x}{y}\right)\right]}_{\equiv 0}-\frac{1}{y^2}\phi_v\left(x,\frac{x}{y}\right)=$$

$$=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{1}{y^2}\phi_v\left(x,\frac{x}{y}\right).$$

32. 若 $f(u,v)$ 可微，$z=f(x^y,y^x)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{f_1'yx^{y-1}+f_2'y^x\ln y}$.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\dfrac{\partial x^y}{\partial x}+f_2'\dfrac{\partial y^x}{\partial x}=f_1'yx^{y-1}+f_2'y^x\ln y.$

33. 设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且在 $(1,0)$ 的充分小的领域内有

$$f(u,v)=1-u-2v+o(\sqrt{(u-1)^2+v^2})$$

记 $g(x,y)=f(e^y,x+y)$，计算 $dg(x,y)(0,0)$.

解： $f(u,v)=-(u-1)-2v+o\left(\sqrt{(u-1)^2+v^2}\right)$——$f$ 在 $(1,0)$ 的一阶 *Taylor* 展开（即微分）. 故 $f(1,0)=0$，且微分为 $df|_{(1,0)}=-du-2dv$（$du=\Delta u=u-1, dv=\Delta v=v$）. 从而 $f_u(1,0)=-1$，$f_v(1,0)=-2$. 由此

$$dg(x,y)=f_u de^y+f_v d(x+y)=f_u e^y dy+f_v(dx+dy)$$

$$=f_v(e^y,x+y)dx+(f_v(e^y,x+y)+e^y f_u(e^y,x+y))\,dy$$

从而 $dg(x,y)(0,0)=f_v(e^0,0+0)dx+\left(f_v(e^0,0+0)+e^0 f_u(e^0,0+0)\right)dy$

$$=f_v(1,0)dx+(f_v(1,0)+f_u(1,0))\,dy=-2dx-3dy.$$

34. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{z}$.

解： 这是齐次函数满足的欧拉方程. 对 $F=0$ 两边微分，得

$$F_1'd\left(\frac{y}{x}\right)+F_2'd\left(\frac{z}{x}\right)=0 \implies F_1'\frac{xdy-ydx}{x^2}+F_2'\frac{xdz-zdx}{x^2}=0$$

$$\implies dz=\frac{zF_2'+yF_1'}{xF_2'}dx-\frac{F_1'}{F_2'}dy \implies \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x}+\dfrac{y}{x}\dfrac{F_1'}{F_2'} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'}{F_2'} \end{cases}$$

从而 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+y\dfrac{F_1'}{F_2'}-y\dfrac{F_1'}{F_2'}=z.$

35. 设 $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{1/z}$，求 $df(1,1,1)$.

解： 两边取对数，有 $z\ln f=\ln x-\ln y$，两边微分，得

$$\ln f dz+z\frac{df}{f}=\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}$$

代入 $(x,y,z)=(1,1,1)$，又 $f(1,1,1)=1$，从而

$$\ln f(1,1,1)dz+\frac{df(1,1,1)}{f(1,1,1)}=\frac{dx}{1}-\frac{dy}{1} \implies df(1,1,1)=dx-dy.$$

36. 设函数 $u(x,y)=\phi(x+y)+\phi(x-y)+\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，期中 ϕ 具有二阶导数，函数 ψ 具有一阶导数，则必有 (B)

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解： $u_x=\phi'(x+y)+\phi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$；$u_y=\phi'(x+y)-\phi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)$；再求偏导，得

$$\begin{cases} u_{xx}=\phi''(x+y)+\phi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y) \\ u_{yy}=\phi''(x+y)+\phi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y) \end{cases}$$

37. 设 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个领域，在此领域内该方程 (D)

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$，$z = z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$，$z = z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$，$y = y(x,z)$.

解： 方程两边微分，有 $ydx + xdy - \ln y dz - \dfrac{z}{y}dy + e^{xz}(xdz + zdx) = 0$，整理得 $(y + ze^{xz})dx + \left(x - \dfrac{z}{y}\right)dy + (xe^{xz} - \ln y)dz = 0$. 在点 $(0,1,1)$ 处，dx 前的系数和 dy 前的系数都不为零，但 dz 前的系数为零. 即在该点处，dx 可由 dy 和 dz 线性地表达，dy 也可由 dx 和 dz 线性地表达，而隐函数存在定理保证了在该点的一个领域内，原方程可确定 x 是 y,z 的函数，y 亦可确定为 x,z 的函数，且 $x(y,z)$，$y(x,z)$ 都具连续偏导数，偏导数可由微分前的系数读出. 由于 dz 在该点不能由 dx 和 dy 线性地表达，故在该点附近，z 不能确立为 x 和 y 的函数.

38. 设 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$$

若 $f(0) = 0$，$f'(0) = 0$，求 $f(u)$ 的表达式.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x \cos y)e^x \cos y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(e^x \cos y)(-e^x \sin y)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(e^x \cos y)e^x \cos y e^x \cos y + f'(e^x \cos y)e^x \cos y \\ &= f''(e^x \cos y)e^{2x} \cos^2 y + f'(e^x \cos y)e^x \cos y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= f''(e^x \cos y)(-e^x \sin y)(-e^x \sin y) + f'(e^x \cos y)(-e^x \cos y) \\ &= f''(e^x \cos y)e^{2x} \sin^2 y - f'(e^x \cos y)e^x \cos y\end{aligned}$$

代入 z 满足的方程，得 $f''(e^x\cos y)e^{2x}=\left[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y\right]e^{2x}$，即

$$f''(e^x\cos y)-4f(e^x\cos y)=e^x\cos y$$

令 $u:=e^x\cos y$，则 $f''(u)-4f(u)=u$，其特征方程为 $\lambda^2-4=0$，故有通解 $f(u)=C_1e^{2u}+C_1e^{-2u}$，设特解为 $y^*=au+b$，代入方程解得 $a=-1/4$，$b=0$，故方程的通解为

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2y}-\frac{1}{4}u$$

由 $f(0)=0,f'(0)=0$，得 $C_1=\dfrac{1}{16},C_1=-\dfrac{1}{16}$，故所求函数为

$$y=f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u.$$

39. 已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)e^{-(u+v)}$，且 $f(u,0)=u^2e^{-u}$.

(a) 记 $g(x,y)=f(x,y-x)$，求 $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$.

(b) 求 $f(u,v)$ 的表达式和极值.

解： 由链式法则，知 $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y-x)}{\partial u}-\dfrac{\partial f(x,y-x)}{\partial v}=$

$$=2(x-(y-x))e^{-(x+y-x)}=2(2x-y)e^{-y}$$

上式两边对 x 积分（将 y 看成常数），得到 $g(x,y)=\displaystyle\int\frac{\partial g}{\partial x}dx=$

$$\int 2(2x-y)e^{-y}dx=2e^{-y}\left(x^2-xy\right)+C(y)\,(\text{对 } x \text{ 积分而言的积分常数})$$

$$f(x,y-x)=2e^{-y}(x^2-xy)+C(y)$$

令 $x=y$，得到 $C(x)=f(x,0)=x^2e^{-x}$，从而 $f(x,y-x)=2e^{-y}x(x-y)+y^2e^{-y}$，令 $x=u,y-x=v$，得 $f(u,v)=-2uve^{u+v}+(u+v)^2e^{-(u+v)}$.

40. 设 $u = xyze^{x+y+z}$，求 $\left.\dfrac{\partial^k u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}\right|_{(0,0,0)}$，其中 $p+q+r=k$.

解： u 在 $(0,0,0)$ 处的 *Taylor* 展开为

$$u(x,y,z)=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{l}\bigg|_{(0,0,0)}u(x,y,z)+o(\underbrace{(\sqrt{(x^2+y^2+z^2})^k}_{\rho^k})$$

$$=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\sum_{p+q+r=l}\frac{l!}{p!q!r!}\frac{\partial^l u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}\bigg|_{(0,0,0)}x^py^qz^r+o(\rho^k)$$

$$=\sum_{l=0}^{k}\sum_{p+q+r=l}\frac{1}{p!q!r!}\frac{\partial^l u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}\bigg|_{(0,0,0)}x^py^qz^r+o(\rho^k)$$

另一方面 $xyze^{x+y+z}=xe^xye^yze^z=x\left(\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{x^p}{p!}\right)y\left(\sum_{q=0}^{\infty}\dfrac{y^q}{q!}\right)z\left(\sum_{r=0}^{\infty}\dfrac{z^p}{r!}\right)=$

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{p+1}}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{y^{q+1}}{q!}\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^{r+1}}{r!}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p+q+r=l}\frac{1}{p!q!r!}x^{p+1}y^{q+1}z^{r+1}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{p+q+r=l+3}\frac{1}{(p-1)!(q-1)!(r-1)!}x^py^qz^r$$

同 *Taylor* 展开对比即知：$\dfrac{1}{p!q!r!}\left.\dfrac{\partial^l u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}\right|_{(0,0,0)}=\dfrac{1}{(p-1)!(q-1)!(r-1)!}$，

从而知道

$$\frac{\partial^l u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}\bigg|_{(0,0,0)}\overset{p+q+r=l}{=\!=\!=\!=}\frac{p!q!r!}{(p-1)!(q-1)!(r-1)!}=pqr.$$

41. 计算 $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$ 在 $(1,2)$ 处的全微分，二阶，及三阶泰勒展开.

解： $f_x = \dfrac{2x}{1+x^2+y^2}$， $f_y = \dfrac{2y}{1+x^2+y^2}$， $f_{xx} = \dfrac{2(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$

$$f_{xy} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}, f_{yy} = \frac{2(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xxx} = \frac{-4x(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}, f_{yyy} = \frac{-4y(1-3y^2+x^2)}{(1+x^2+y^2)^3}, f_{xxy} = \frac{-4y(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}, f_{yyx} = \frac{-4x(1}{(1+}$$

. 在 $(1,2)$ 处，上述偏导数的值为

$$f_x = \frac{1}{3}, f_y = \frac{2}{3}; f_{xx} = \frac{2}{9}, f_{xy} = -\frac{2}{9}, f_{yy} = -\frac{1}{9};$$

$f_{xxx} = -\dfrac{1}{27}, f_{yyy} = \dfrac{10}{27}, f_{xxy} = -\dfrac{2}{27}, f_{yyx} = \dfrac{5}{27}$. 从而有

- 全微分：$df|_{(1,2)} = f_x(1,2)dx + f_y(1,2)dy = \dfrac{dx}{3} + \dfrac{2dy}{3}$;
- 二阶展开：$f(x,y) = \ln 6 + \dfrac{x-1}{3} + \dfrac{2(x-2)}{3} + \dfrac{1}{2!}\big(f_{xx}(1,2)(x-1)^2 +$

$$+\ 2f_{xy}(1,2)(x-1)(x-2) + f_{yy}(1,2)(x-2)^2 + o\left(\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)^2\right)\right)$$

$$= \ln 6 + \frac{x-1}{3} + \frac{2(x-2)}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2(x-1)^2}{9} - \frac{(x-1)(x-2)}{9} - \frac{(y-2)^2}{9} + o(\rho^2)\right.$$

- 三阶展开：$f(x,y) = \ln 6 + \dfrac{x-1}{3} + \dfrac{2(x-2)}{3} + \dfrac{1}{2!}\big(f_{xx}(1,2)(x-1)^2 +$

$$+\ 2f_{xy}(1,2)(x-1)(x-2) + f_{yy}(1,2)(x-2)^2\big) +$$

$$+\frac{1}{3!}\big(f_{xxx}(1,2)(x-1)^3 + 3f_{xxy}(1,2)(x-1)^2(y-2) +$$

$$+\ 3f_{xyy}(1,2)(x-1)(y-2)^2 + f_{yyy}(1,2)(y-2)^3 + o(\rho^3)\big)$$

$$= \ln 6 + \frac{x-1}{3} + \frac{2(x-2)}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2(x-1)^2}{9} - \frac{(x-1)(x-2)}{9} - \frac{(y-2)^2}{9}\right) +$$

$$+\ \frac{1}{3!}\left(-\frac{(x-1)^3}{27} - \frac{6(x-1)^2(y-2)}{27} + \frac{15(x-1)(y-2)^2}{27} + \frac{10(y-2)^3}{27} + o(\rho^3)\right.$$

42. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $\int_y^z e^{t^2}dt+xy+yz=0$ 确定的隐函数,计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)$.

解: 方程两边先对 y 求偏导，得 $e^{z^2}z_y-e^{y^2}+x+z+yz_y=0$，两边再对 x 求偏导，得 $e^{z^2}2zz_xz_y+e^{z^2}z_{xy}+1+z_x+yz_{xy}=0$. 为计算 z_x，原方程两边同时对 x 求偏导，有 $e^{z^2}z_x+y+yz_x=0$. 上诸式中代入 $x=0,y=0$，由原关系知 $\int_0^z e^{t^2}dt=0$，从而知 $z(0,0)=0$. 又

$$\begin{cases} e^0z_y(0,0)-e^0=0 \\ e^0z_x(0,0)=0 \\ e^0z_{xy}(0,0)+1+z_x(0,0)=0 \end{cases} \implies \quad z_{xy}(0,0)=-1$$

另解: 更加迅捷的求解方案是,先算出 $z_x=-\dfrac{y}{e^{z^2}+y}$,代入后知 $z_x(0,0)=0$，再由偏导数作为极限的原初定义，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{z_x(0,y)-z_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{-y}{e^{z^2(0,y)+z}}-0}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{e^{z^2(0,y)+y}}=-\frac{1}{1+0}=-1.$$

43. 设 z 由 $xy+yz+zx=1$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解: 方程两边分别对 x 和 y 求导，得

$$\begin{cases} y+yz_x+z+xz_x=0 \\ x+z+yz_y+xz_y=0 \end{cases} \implies \begin{cases} z_x=-\dfrac{y+z}{x+y} \\ z_y=-\dfrac{x+z}{x+y} \end{cases}$$

上方程两边再求导，得

$$\begin{cases} yz_{xx}+z_x+z_x+xz_{xx}=0 \\ z_y+z_y+yz_{yy}+xz_{yy}=0 \\ 1+z_x+yz_{xy}+z_y+xz_{xy}=0 \end{cases} \implies \begin{cases} z_{xx}=-\dfrac{2z_x}{x+y}=\dfrac{2(y+z)}{(x+y)^2} \\ z_{yy}=-\dfrac{2z_y}{x+y}=\dfrac{2(x+z)}{(x+y)^2} \\ z_{xy}=-\dfrac{1+z_x+z_y}{x+y}=\dfrac{2z}{(x+y)^2} \end{cases}$$

44. 设 $\begin{cases} x = u\cos\dfrac{v}{u} \\ y = \sin\dfrac{v}{u} \end{cases}$ ，求反函数组的偏导数 u_x, u_y, v_x, v_y.

解: 将关系式微分，得 $\begin{cases} dx = \cos\dfrac{v}{u}du + ud\cos\dfrac{v}{u} = \cos\dfrac{v}{u}du - u\sin\dfrac{v}{u}d\left(\dfrac{v}{u}\right) \\ dy = \cos\dfrac{v}{u}d\left(\dfrac{v}{u}\right) \end{cases}$

$$\begin{cases} dx = \cos\dfrac{v}{u}du - u\sin\dfrac{v}{u}\left(\dfrac{udv - vdu}{u^2}\right) = \left(\cos\dfrac{v}{u} - \dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}\right)du - \sin\dfrac{v}{u}dv \\ \\ dy = \cos\dfrac{v}{u}\dfrac{udv - vdu}{u^2} = -\dfrac{v}{u^2}\cos\dfrac{v}{u}du + \dfrac{1}{u}\cos\dfrac{v}{u}dv \end{cases}$$

须从上方程组中反解除 du, dv（即用 dx, dy 来表示 du, dv），为此第一个方程 $\times\dfrac{1}{u}$ + 第二个方程 $\times\sin\dfrac{v}{u}$，得到

$$\frac{1}{u}\cos\frac{v}{u}dx + \sin\frac{v}{u}dy = \underbrace{\left(\frac{1}{u}\cos^2\frac{v}{u} - \frac{v}{u^2}\sin\frac{2v}{u}\right)}_{\xi}du$$

$$\Longrightarrow \quad du = \frac{1}{\xi}\frac{1}{u}\cos\frac{v}{u}dx + \frac{1}{\xi}\sin\frac{v}{u}dy \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} u_x = \dfrac{1}{u\xi}\cos\dfrac{v}{u} \\ u_y = \dfrac{1}{\xi}\sin\dfrac{v}{u} \end{cases}$$

将 du 代入第二个方程，可将 dv 解为 dx, dy 的线性组合，则 v_x, v_y 即为 dx, dy 前的系数函数.（没想到如此繁琐，不想算下去了，读者有耐心可完成其余）

45. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^3 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线与法平面方程.

解: 曲线是曲面 $x^2 + y^3 + z^2 = 6$ 和平面 $x + y + z = 0$ 的相交曲线. 将曲面方程微分得 $2xdx + 3y^2dy + 2zdz = 0$，从而知曲面在 $(1, -2, 1)$ 处的切平面方程为 $2(x-1) + 12(y+2) + 2(z-1) = 0$. 曲线在该点处的切线即为该切平面与平面 $x + y + z = 0$ 的相交直线，由此知切线的一般

方程为 $\begin{cases} x+6y+z+10=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，进而可知切线的方向向量由下给出

$$\boldsymbol{l}=(1,6,1)\times(1,1,1)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(5,0,-5)$$

即知切线的点向式为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$. 又因 $\boldsymbol{l}$ 为法平面的的法向量，故曲线在该点的法平面方程为 $1(x-1)+0(y+2)-1(z-1)=0$.

46. 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度为 $\underline{(1,0)}$.

解： f 的梯度场为 $\nabla f=(f_x,f_y)=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$
故 $\nabla f(0,1)=(1,0)$.（注意到梯度场 ∇f 是个平面上逆时针的旋转（单位）向量场，它指向了每点处极角 $\theta=\arctan\dfrac{x}{y}$ 变化最快的方向）

47. 求 $u=x^2+y^2+z^2$ 沿椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上点 (x,y,z) 处的外法线方向的方向导数.

解： 椭球面在点 (x,y,z) 的一个法向量为函数 $w=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$ 在 (x,y,z) 的梯度向量，即可取外法向量为

$$\mathbf{n}:=\nabla w=(w_x,w_y,w_z)=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$$

函数 u 在 (x,y,z) 的梯度向量为 $\nabla u=(u_x,u_y,u_z)=(2x,2y,2z)$，则 u 沿着 $\mathbf{n}$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(x,y,z)}=\nabla u|_{(x,y,z)}\bullet\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}=(2x,2y,2z)\bullet\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)\frac{1}{|\mathbf{n}|}$$

$$=\left(\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}+\frac{4z^2}{c^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4z^2}{c^4}}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

48. 函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在点 $(0,1)$ 的最大方向导数为 $\underline{4}$.

解: f 的梯度场为 $\nabla f=(2x,4y)$，在 $(0,1)$ 处为 $\nabla f|_{(0,1)}=(0,4)$. 由于 f 在 $(0,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数为 $\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\right|_{(0,1)}:=\nabla f|_{(0,1)}\bullet \boldsymbol{l}^0$，故 $\left|\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,1)}\right|\leq \left|\nabla f|_{(0,1)}\right|=4$. 由此可知 f 在 $(0,1)$ 处的最大方向导数为 4.

49. 设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ 的方向导数最大，最大值为 10，则 $a=\underline{-1}$, $b=\underline{-1}$.

解: 方向导数最大的方向与该点处的梯度方向共线，且最大的方向导数就是梯度向量的模长.

而 $\nabla z|_{(3,4)}=(6a,8b)$，故 $(3a,4b)//(3,4)$，即 $a=b$，且 $|\nabla z|_{(3,4)}|=\sqrt{36a^2+64b^2}=10$，由此解得 $a=b=\pm 1$，结合 $\boldsymbol{l}$ 的方向，知 $a=b=-1$.

50. 已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C: x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解: 我们知道 f 在点 (x,y) 处的最大方向导数为梯度模

$$|\nabla f(x,y)|=\sqrt{f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$$

则问题转为：当 (x,y) 限制于曲线 C 上时，求 $|\nabla f(x,y)|$ 的最大值. 下用拉格朗日乘子法求解，构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$$

$$\left\{\begin{array}{c} L_x=2(1+x)+2\lambda x+\lambda y=0 \\ L_y=2(1+y)+2\lambda y+\lambda x=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2+xy-3=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} (y-x)(2+\lambda)=0 \\ x^2+y^2+xy-3=0 \end{array}\right.$$

故若 $y=x$，则 $y=x=\pm 1$；若 $\lambda=-2$，则 $x=-1,y=2$ 或 $x=2,y=-1$. 代入后知 f 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

51. 设 $x\geq 0,y\geq 0$ 时，$x^2+y^2\leq ke^{x+y}$ 恒成立，则 k 的取值范围为 $\underline{[2e^{-2},+\infty)}$.

解: 相当于求函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-x-y}$, $x\geq 0, y\geq 0$ 的最大值. 先计算函数的驻点，即梯度消失的点.

$$\nabla f=(f_x,f_y)=\left(e^{-x-y}(2x-x^2-y^2),\, e^{-x-y}(2y-x^2-y^2)\right)$$

则 $\nabla f=\mathbf{0}$ 等价于求解 $\begin{cases} 2x-x^2-y^2=0 \\ 2y-x^2-y^2=0 \end{cases}$，解得驻点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

又因为 $f(0,0)=0$, $f(1,1)=2e^{-2}$，故 $f(x,y)\leq f(1,1)=2e^{-2}$，从而 $k\in[2e^{-2},+\infty)$.

52. 求 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

解: 先计算驻点，由 $\begin{cases} f_x=2x(2+y^2)=0 \\ \\ f_y=2x^2y+\ln y+1=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{e} \end{cases}$.

再计算二阶量，$A=f_{xx}=2(2+y^2)$，$B=f_{xy}=2x^2+1/y$，$C=f_{yy}=4xy$.

在驻点处，$A=2\left(2+\dfrac{1}{e^2}\right)$，$B=0, C=e$，从而 $A>0$，且 $\Delta=AC-B^2>0$，故知函数在驻点处取极小值 $f\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$.

53. 求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

解: 先求驻点，$\begin{cases} f_x=3x^2-y=0 \\ f_y=24y^2-x=0 \end{cases}$，解得驻点为 $(0,0)$ 和 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$.

再计算 *Hessian* 矩阵中的元素，即 $A=f_{xx}=6x$, $B{=}f_{xy}=-1$, $C=f_{yy}=48y$, 且判别式 $\Delta=AC-B^2=288xy-1$

- 在 $(0,0)$ 处，因 $\Delta=-1<0$，故不是极值点;
- 在 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$ 处，$\Delta=3>0$，且 $A=1>0$，故函数在 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 处取极小值 $f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=-\dfrac{1}{216}$.

54. 求函数 $f(x,y)=\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

解: $\begin{cases} f_x = x^2e^{x+y}+\left(y+\dfrac{x^3}{3}e^{x+y}\right)=\left(x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}=0 \\ \\ f_y = e^{x+y}+\left(y+\frac{x^3}{3}e^{x+y}\right)=\left(1+y+\frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}=0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

又 $A=f_{xx}=\left(2x+2x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$, $B=f_{xy}=\left(1+x^2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$, $C=f_{yy}=\left(2+y+\dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$.

- 在 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 处，$A=3e^{-\frac{1}{3}}$, $B=e^{-\frac{1}{3}}$, $C=e^{-\frac{1}{3}}$，故 $H=AC-B^2=2e^{-\frac{2}{3}}>0$，且由于 $A>0$，故函数在 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 取极小值 $-e^{-\frac{1}{3}}$;
- 在 $\left(1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 处，$A=-e^{-\frac{5}{3}}$, $B=e^{-\frac{5}{3}}$, $C=e^{-\frac{5}{3}}$，故 $H=AC-B^2=-2e^{-\frac{10}{3}}<0$，故 $\left(1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 不是极值点.

综上，函数只在点 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 处取极小值 $-e^{-\frac{1}{3}}$.

55. 求 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值.

解: $\begin{cases} f_x=2x-2xy^2=0 \\ f_y=4y-2x^2y=0 \end{cases}$ 的解为 $\left(\pm\sqrt{2},1\right)$; $\left(\pm\sqrt{2},-1\right)$; $(0,0)$.

故在区域 D 里有驻点 $(\sqrt{2},1)$, $(-\sqrt{2},1)$ 和 $(0,0)$.

下计算函数在边界 ∂D 上取极值的情况，作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4y - 2x^2y + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

而 $f(\pm\sqrt{2}, 1) = 2$，$f\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = \dfrac{7}{4}$，$f(0,0) = 0$, $f(0,2) = 8$, $f(\pm 2, 0) = 4$. 综上，函数在区域 D 上的最大值为 8，最小值为 0.

56. 设 $z = z(x,y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数，求 z 的极值点和极值.

解： 方程两边同时对 x 和 y 求导，得到

$$\begin{cases} 2x - 6y - 2yz_x - 2zz_x = 0 \\ -6x + 20y - 2z - 2yz_y - 2zz_y = 0 \end{cases} \xRightarrow{z_x = z_y = 0} \begin{cases} x - 3y = 0 \\ -3x + 10y - z = 0 \end{cases}$$

故 $x = 3y, z = y$，代入原方程解得 $\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -9 \\ y = -3 \\ z = -3 \end{cases}$. 再对上述两个一阶偏导数的式子两边求导，得

$$\begin{cases} 2 - 2yz_{xx} - 2(z_x)^2 - 2zz_{xx} = 0 \\ -6 - 2z_x - 2yz_{xy} - 2z_xz_y - 2zz_{xy} = 0 \\ 20 - 2z_y - 2z_y - 2yz_{yy} - 2z_y^2 - 2zz_{yy} = 0 \end{cases}$$

求解出 $A = z_{xx}$, $B = z_{xy}$, $C = z_{yy}$，代入驻点数据，得到如下信息

- 在点 $(9,3)$ 处，$A = \dfrac{1}{6}$, $B = -\dfrac{1}{2}$，$C = \dfrac{5}{3}$，$AC - B^2 = \dfrac{1}{36} > 0$，故 $(9,3)$ 是函数 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3) = 3$.
- 在点 $(-9,-3)$ 处，$A = -\dfrac{1}{6}$, $B = \dfrac{1}{2}$，$C = -\dfrac{5}{3}$，$AC - B^2 = \dfrac{1}{36} > 0$，故 $(-9,-3)$ 是函数 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3) = -3$.

57. 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分是 $dz=2xdx-2ydy$，且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

解： 由题意知 $z_x=2x, z_y=-2y$，从而 $z(x,y)=\int\frac{\partial z}{\partial x}dx=\int(2x)dx=x^2+C(y)$（积分时只考虑 x，视 y 为常数），然后 $z_y=C'(y)=-2y$，故 $C(y)=-y^2+C$，由此可知 $f(x,y)=x^2-y^2+C$.

由 $f(1,1)=2$ 得 $C=2$，故 $f(x,y)=x^2-y^2+2$.

它有唯一驻点 $(0,0)$，且在该点处 $A=f_{xx}=2,\ B=f_{xy}=0,\ C=f_{yy}=-2,\ \Delta=AC-B^2=-2<0$，故 $(0,0)$ 不是极值点（鞍点）.

下考虑 $f(x,y)$ 在边界 ∂D 上的最值问题. 构造拉格朗日函数

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$$

$$\begin{cases}\mathcal{L}_x=2x+2x\lambda=0\\ \mathcal{L}_y=-2y+\dfrac{\lambda}{2}y=0\\ \mathcal{L}_\lambda=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad \text{驻点为 } (\pm1,0) \text{ 和 } (0,\pm2)$$

在 $(\pm1,0)$，$f=3$；在 $(0,\pm2)$，$f=-2$.

综上可知函数在椭圆区域 D 上的最大值是 $f(\pm,1)=3$，最小值是 $f(0,\pm2)=-2$.

58. 已知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某个领域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则 (A)

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判定 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

解： 在计算计算中令 $y=kx$，即让 (x,y) 沿着射线 $y=kx$ 趋向 $(0,0)$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,kx)-kx^2}{(1+k^2)x^4}=1$$

由于分子分母都是 $x\to 0$ 时的无穷小，故知 $f(0,0)=0$，且 $f(x,kx)-kx^2\sim(1+k^2)x^4$（等价无穷小）. 即当 $x\to 0$ 时，有 $f(x,kx)$ 的如下 4 阶 *Taylor* 展开

$$f(x,kx)=kx^2+(1+k^2)x^4+o(x^4)$$

$$=x^2\left[k+(1+k^2)x^2+o(x^2)\right]$$

当 $x\to 0$ 时，由于 $1+k^2x^2+o(x^2)$ 是无穷小量，故方括号内的数量的正负号由 k 的符号决定，故该展开说明，当沿着不同方向 $y=kx$ 趋于原点时，函数的增量 $\Delta f=f(x,kx)-f(0,0)=f(x,kx)$ 对不同的 k 值是可正可负的（$k>0$ 的方向为正，$k<0$ 的方向为负）.

换言之，这表明当 (x,y) 接近 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 的值依不同接近方向既可大于 $f(0,0)$，亦可小于 $f(0,0)$，从而 $(0,0)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点，而是鞍点.

另解： 由 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 知 $f(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy-(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

令 $\rho:=\sqrt{x^2+y^2}$，则上极限为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy-(x^2+y^2)^2}{\rho^4}=0$$

由此可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处有如下四阶 *Taylor* 展开

$$f(x,y)=xy+x^4+y^4+2x^2y^2+o(\rho^4)\quad(*)$$

由于展开中没有一次项，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的梯度为零，即 $(0,0)$ 是驻点；又注意到二次项只有 xy，而 *Taylor* 展开的唯一性表明，展开中的二阶项必为

$$\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right)$$

故知在 $(0,0)$ 处，$A=f_{xx}=0$，$C=f_{yy}=0$，$B=1$. 因为 $\Delta=AC-B^2=-1<0$，故知 $(0,0)$ 点不是极值点，是鞍点. 事实上，在驻点 $(0,0)$ 附近，考虑坐标变换 $\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$，则在 (u,v) 坐标下，f 在 $(0,0)$ 附近的二阶近似为

$$f(u,v)=(u+v)(u-v)=u^2-v^2+o(u^2+v^2)$$

故在二阶近似下，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近的图像，在差一个 $\frac{\pi}{4}$ 旋转和标度拉长 $\sqrt{2}$ 外，是和标准的马鞍面 $z=x^2-y^2$ 在 $(0,0)$ 处的形态是相同的.

注： 由于四阶展开式 $(*)$ 中没有关于 x,y 的三次项，故由展开的唯一性知，f 在 $(0,0)$ 处的三阶偏导数（即 $f_{xxx},f_{yyy},f_{xxy},f_{xyy}$）全部消失. 另外，展开中关于 x,y 的四次项由下公式计算

$$\frac{1}{4!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^4\bigg|_{(0,0)}f(x,y)=\frac{1}{4!}\left[\binom{4}{0}f_{xxxx}(0,0)x^4+\binom{4}{1}f_{xxxy}(0,0)x^3y+\right.$$

$$\left.+\ \binom{4}{2}f_{xxyy}(0,0)x^2y^2+\binom{4}{3}f_{xyyy}(0,0)xy^3+\binom{4}{4}f_{yyyy}(0,0)y^4\right]$$

对比系数，得 $\frac{1}{4!}f_{xxxx}(0,0)=1$，即 $f_{xxxx}(0,0)=4!$；$\frac{1}{4!}f_{yyyy}(0,0)=1$，即 $f_{yyyy}(0,0)=4!$；$f_{xxxy}(0,0)=f_{xyyy}(0,0)=0$；$\frac{1}{4!}\binom{4}{2}f_{xxyy}(0,0)=2$，故 $f_{xxyy}(0,0)=8$.

期中选择、填空题部分分析

1. 设 $y_1 = e^x - e^{-x}\sin x$ 和 $y_2 = e^x + e^{-x}\cos x$ 是二阶常系数非齐次线性常微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的两个解，则 $f(x) = (\quad)$

   $(A)\quad e^x$ $\qquad$ $(B)\quad e^{-x}$

   $(C)\quad 5e^x$ $\qquad$ $(D)\quad e^{5x}$

   分析： $y_1 - y_2 = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x$ 是对应齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解，由该解的形式可知特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的特征根为 $\lambda_\pm = 1 \pm i$. 由根于系数之间的关系知 $\begin{cases} -p = \lambda_+ + \lambda_- = -2 \\ q = \lambda_+\lambda_- = -2 \end{cases}$. 从而方程为 $y'' + 2y' - 2y = f(x)$. 由于

   $$\begin{cases} y_1' = e^x - e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x \\ y_1'' = e^x + \cancel{e^{-x}\sin x} + e^{-x}\cos x + e^{-x}\cos x - \cancel{e^{-x}\sin x} = e^x + 2e^{-x}\cos x \end{cases}$$

   则 $f(x) = y_1'' + 2y_1' + 2y_1 = e^x + \cancel{2e^{-x}\cos x} + 2e^x - \cancel{2e^{-x}\cos x} + \cancel{2e^{-x}\sin x} - 2e^x - \cancel{e^{-x}\sin x} = 5e^x$. 故应选 C.

2. 微分方程 $y' - \dfrac{y}{x} = -1$ 的解.

   分析： 问题本身是简单的，利用通解公式，直接得

   $$y = e^{-\int \frac{-dx}{x}}\left(-\int e^{\int \frac{-dx}{x}}dx + \overline{C}\right) = e^{\ln x}\left(-\int e^{-\ln x}dx + \overline{C}\right)$$

   $$= x\left(-\int \frac{dx}{x} + \overline{C}\right) = x\left(-\ln|x| + \overline{C}\right) = -x\ln|x| + \overline{C}x.$$

   但“魔鬼藏在细节里”，此处去掉绝对值符号后将使得解的定义域少一半（且无法通过任意常数 $\overline{C}$ 的赋值来弥补损失），从而不是真正的解函数，故通解写如上形式而未加绝对值符号者，此题皆得 0 分. 但如果将解写成 $-x\ln(Cx)$ 的形式，则虽未加绝对值，但仍是正确的解，因当 x 取负值时，令任意常数 $C < 0$ 可使 $\ln(Cx)$ 有意义.

3. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线方程.

分析： 曲线是球面和平面的交线，所求切线应是球面在 M 处的切平面与给定平面的交平面. 将球面方程微分，得 $2xdx+2ydy+2zdz=0$，即 $xdx+ydy+zdz=0$，则在点 $M(1,1,1)$ 处，球面的切平面（“以直代曲”之直者）方程由该微分关系所确定，即 $1(x-1)+1(y-1)+1(z-1)=0$，从而所求的切线方程为 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$，此为切线的“一般式”方程. 也可写成“点向式”，为此首先确定切线的方向向量 $\boldsymbol{l}$，即与切平面和给定平面皆正交的方向，即可取

$$\boldsymbol{l}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right)=(3,0,-3)$$

从而可知切线的“点向式”方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$.

注： 有些同学只计算出了切平面方程，而忘记与给定平面联立截出切线，而痛失 4 分，憾矣！

4. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^3}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 则函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}=(1,1)$ 的方向导数为（B）

(A) 0;　　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;　　(C) $\sqrt{2}$;　　(D) 不存在

分析： 因为给定函数未必在 $(0,0)$ 具有好性质，比如偏导连续，可微等，所以保险起见，最好用方向导数的原初定义计算求得. 首先 $\boldsymbol{l}^0=(\cos\theta,\sin\theta)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，则由定义

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to0}\frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-f(0,0)}{t}-\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^2}{2}\frac{t}{\sqrt{2}}}{\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2\sqrt{2}}}\frac{1}{t}=$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}t^2+t^3}{2\sqrt{2}}} \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{tt^2(\sqrt{2}+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}+t} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故选B.

注： 有些同学先利用定义求出了 f 在 $(0,0)$ 处的偏导数信息，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

同理可知 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0$，则 $\nabla f(0,0) = (0,0)$，但若根据公式

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)} = \nabla f(0,0) \bullet \mathbf{l}^0$$

计算出方向导数为零则是错误的. 其原因是上公式成立的前提条件是函数在 $(0,0)$ 可微. 而题目中的函数在 $(0,0)$ 是不可微的，这是因为，若它可微，则其微分 $df|_{(0,0)}$ 必是 $f_x(0,0)dx + f_y(0,0)dy = 0dx + 0dy = 0$，从而 $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$ 和 $df|_{(0,0)}$ 的差是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 当 $(x,y) \to (0,0)$ 时的高阶无穷小，但是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^3)\sqrt{x^2+y^2}}$$

的极限是不存在的. 这是因为，若极限存在，则 (x,y)无论以何种方式趋于 $(0,0)$ 时，极限都存在且相等，但我现在选择让 (x,y) 沿着直线 $y = kx$ 趋向原点，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{(x^2+y^3)\sqrt{x^2+y^2}} \xlongequal{y=kx} \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^3(1+k^2x)\sqrt{1+k^2}} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

显然沿不同的直线方向得到的极限是不同的. 这说明上面极限是不存在的，由此反证函数在 $(0,0)$ 点不可微. 有不少同学在求二元函数极限时只选择在“$y = kx$”这样的直线路径上计算，这是很致命的逻辑错误，请务必梳理清晰，不二过.

5. 设 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=1$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=3$，$\boldsymbol{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 为点 $(1,2)$ 处的一个单位向量，则（D）

(A) $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处连续；

(B) $df|_{(1,2)}=dx+3dy$;

(C) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,2)}=\cos\theta+3\sin\theta$

(D) $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处沿着 y 轴负向的方向导数为 -3.

分析： 题目给出的只是 f 在 $(1,2)$ 处的偏导数，但由此并不能推出 f 在 $(1,2)$ 处的连续性及可微性（虽然如果可微，则微分 $df|_{(1,2)}$ 确由 (B) 中给出），所以 $(A),(B)$ 率先排除. 对 (C)，上题中的分析中有提到，只有当 f 在 $(1,2)$ 处可微，则可利用公式 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,2)}=\nabla f(1,2)\bullet(\cos\theta,\sin\theta)$ 计算出 (C) 选项中的结果，但问题是我们并不确定 f 在 $(1,2)$ 是可微的（上一题就提供了一个函数不可微时贸然利用上公式计算出来的结果与真实方向导数的值不同的例子）. 故 (C) 不可选.

那么只剩下 (D) 选项了，自然要问它何以正确?不少同学知道 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=3$ 意味着 f 在 $(1,2)$ 点处沿着正 y 方向 $\boldsymbol{j}=(0,1)$ 的方向导数存在且其值为 3，但是不确定由此是否一定能推出沿着 $-\boldsymbol{j}$ 的方向导数是否也存在？事实上，一般地，我们有：

命题： 如果 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0,y_0)=A$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{l})}(x_0,y_0)$ 也存在，且其值为 $-A$.

证明： 由方向导数的定义，设 $\boldsymbol{l}^0=(\cos\theta,\sin\theta)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{l})}(x_0,y_0)=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0-t\cos\theta,y_0-t\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{t}=$$

$$=-\lim_{t\to0}\frac{f(x_0-t\cos\theta,y_0-t\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{-t}\overset{s:=-t}{=\!=\!=}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{f(x_0+s\cos\theta,y_0+s\sin\theta)-f(x_0,y_0)}{s}=-\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0,y_0).\quad\square$$

6. 设函数 $f(x,y)=y^2+xy-x^2$，则 $(0,0)$ 是否为函数的极值点？如果是，判断其为极大值点还是极小值点.

分析： 显然 $f(0,0)=0$，且 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，即 $(0,0)$ 是函数的驻点. 接着计算其二阶信息，有

$$A=f_{xx}(0,0)=-2,\quad B=f_{xy}(0,0)=1,\quad C=f_{yy}(0,0)=2$$

从而 $\Delta=AC-B^2=-4-1=-5<0$，由此知 $(0,0)$ 不是函数的极值点，而是鞍点.

注： 由上知，函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的二阶 *Taylor* 展开为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(-2+2xy+2y^2)=\frac{1}{2}[x,y]\underbrace{\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}}_{H_f(0,0)}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

而 $\Delta<0$ 说明，赫塞矩阵 $H_f(0,0)$ 是不定的. 通过适当的坐标变换，可将 $H_f(0,0)$ 化成标准的不定矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$. 事实上，考虑 45^0 旋转变换 $\begin{cases}x=\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{u}{\sqrt{2}}-\frac{v}{\sqrt{2}}\end{cases}$，则在 (u,v) 坐标系下，$f=\left(\frac{u}{\sqrt{2}}-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2+$

$$+\quad\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{2}}-\frac{v}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}$$

则 $f(u,v)$ 在 $(0,0)$ 处的二阶 *Taylor* 展开为 $f(u,v)=\dfrac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)$. 其图形是马鞍面，$(u,v)=(0,0)$ 乃其鞍点.

7. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{e^{-1/(x^2+y^2)}}{x^4+y^4}$

分析： 由于 $e^{-t}=1-t+\dfrac{t^2}{2!}-\dfrac{t^3}{3!}+\cdots=1-t+\dfrac{t^2}{2}-\left(\dfrac{t^3}{3!}-\dfrac{t^4}{4!}+\cdots\right)$

故当 $t \to 0$ 时，成立 $e^{-t} < 1 - t + \dfrac{t^2}{2}$，故当 $(x, y \to (0,0))$ 时，成立

$$0 \le e^{-1/(x^2+y^2)} \le 1 - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2(x^2+y^2)^2}$$

从而

$$0 \le \frac{e^{-1/(x^2+y^2)}}{x^4+y^4} \le \frac{1}{x^4+y^4} - \frac{1}{(x^2+y^2)(x^4+y^4)} + \frac{1}{2(x^2+y^2)(x^4+y^4)}$$

则由“夹逼定理”得所求极限为 0.