

第二讲：重积分

目录

1 多重积分概念	2
1.1 重积分的定义	3
1.2 可积条件 (*)	5
1.3 重积分的性质及其应用	10
1.4 二重积分的计算	13
1.5 二重积分的变换代换	22
1.6 三重积分的计算——累次积分法	36
1.7 三重积分的计算——变量替换法；柱面坐标和球面坐标	43
1.8 一般 n 重积分的计算及趣例 (*)	53
2 重积分的物理应用	60
2.1 重心	60
2.2 相对运动与质心运动的分离，折合质量	63
2.3 转动惯量	64
2.4 转动惯量的张量属性 (*)	65
2.5 引力计算——拉普拉斯方程和泊松方程及其它 (*)	72

第二讲：重积分

1 多重积分概念

我们先回忆一元（一重）积分的定义模式，然后将其推广到多元（多重）的情形。

定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的含义是分布在 $[a, b]$ 上的某物理量 Q 的“密度函数” $f(x)$ 对 x 的连续累积，从而得到该量的总量。其“微观机制”是：在 $[a, b]$ 中某微小区间 Δx 上，“密度” $f(x)$ 可看做恒常，故 Q 在 Δx 上的数量为 $f(x)\Delta x$ ，将区间分割为微小区间

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

则 Q 在 $[a, b]$ 上的数量可近似为 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ ，其中 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ， $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 。则当 $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ 时，若上（黎曼）和的极限存在，则它应是 Q 在 $[a, b]$ 上的实际数量。当然，如果该计算是合理的，则要求不论对何样的区间分割方式及分点 ξ_i 的选取，对应黎曼和的极限都存在且相同。此时就将它定义为 Q 的密度 f 对 x 在 $[a, b]$ 上的积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$ 。我们知道，如果知道 Q 的任一“分布函数” $F(x)$ ，即满足 $F'(x) = f(x)$ 的 F ，那么 Q 在 $[a, b]$ 上的总量 $\int_a^b f(x)dx$ 可由 $F(b) - F(a)$ 的计算，即看成是 Q 从某个固定点（一般选做 $-\infty$ ）积累到 b 的量与从该点积累到 a 的量的差。用公式表达，就是

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx \quad \text{此时 } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

即由变上限积分给出 $f(x)$ 的一个原函数，不同的“起点” c （上面是 $-\infty$ ）给出不同的原函数 $\int_c^x f(t)dt$ ，但其在 a, b 处的值之差是不依赖 c 的选择的。选 $-\infty$ 时就是通常的分布（distribution）函数。而上面计算的的核心枢纽就在于 $\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f(t)dt = f(x)$ ，或微观地 $F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) =$

$$= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)$$

$$\xrightarrow[\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)]{\text{拉格朗日中值定理}} F'(\xi_n)\Delta x_n + F'(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + \cdots + F'(\xi_1)\Delta x_1 =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \xrightarrow{\lambda := \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \int_a^b f(x) dx$$

值得强调的是, 明明只知 Q 的一阶近似 (对其高阶近似可以一无所知), 即 $\Delta Q \approx f(x)\Delta x$, 但对其积分后却给出的是 Q 的精确值, 这无疑是撼动人心的数学结论. 而计算积分通常只需求其原函数 (分布函数) ——本质上 (作为求导之逆运算) 还是一阶运算. 这也是我们在讲解时处处强调微积分作为局部线性化这一核心枢纽的原因之一.

自然地, 物理量不止分布在平直的直线上 (x -轴), 它可以分布在平面 \mathbb{R}^2 区域内, 也可分布在空间 \mathbb{R}^3 区域内, 或更高维空间 \mathbb{R}^n 的区域内; 乃至可分布在比如 \mathbb{R}^n 中的曲线、曲面或其它高维图形上. 现实中我们需有办法计算如此分布着的物理量的总量, 由此有必要将积分概念从我们熟知的一维直线上的积分推广到高维图像上的积分.

我们先解释如何在平面区域上累积物理量得到二重积分的概念, 由此可推广到三重积分及更一般的 n -重积分, 通称为多重积分 (*multiple integrals*). 之后, 还将探讨如何在空间曲线和曲面上累积物理量的 (第一型) 曲线积分和 (第一型) 曲面积分. 而且我们会看到, 它们的计算往往会划归为熟悉的一元积分.

1.1 重积分的定义

定义 1.1.1 设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是有界闭区域, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上有界. 若 $\exists I \in \mathbb{R}$, 使得对区域 D 的任意分划: $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$ (即用任意曲线网将 D 分划为小区域), 以及 $\forall (\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i$ ($i = 1, \dots, n$), 下面的黎曼和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i \quad (\text{其中 } \Delta \sigma_i \text{ 是 } \Delta D_i \text{ 的面积})$$

有极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = I$$

其中 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ (而 $d_i := \max\{d(P_1, P_2) \mid P_1, P_2 \in \Delta D_i\}$ 为小区域 ΔD_i 的直径), 则称 $f(x, y)$ 在 D 上是可积的, 并记 $f \in R(D)$; 极限值 I 称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分 (*double integral*), 并用下符号记之

$$\iint_D f(x, y) d\sigma := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

并称 D 为积分区域, $f(x, y)$ 为被积函数, $d\sigma$ 为面积微元.

注记 1.1.1 上定义中的有界闭区域类比于 \mathbb{R} 中的闭区间 $[a, b]$, 如果对无界的或开区域,

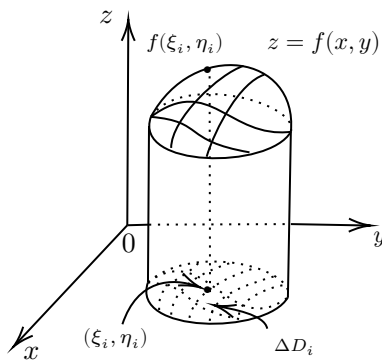
则可按反常积分的定义模式用极限逼近处理.

如 $f(x, y)$ 表示一物理量的密度函数 (比如电荷密度、质量密度), 那么 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 计算的是该物理量在区域 D 上分布的总量.

如 f 为区域 D 的探测函数 (indicator function), 即 $\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$, 则

$$\iint_D \chi_D(x, y) d\sigma = \iint_D d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \text{Area}(D) \quad \text{即为区域 } D \text{ 的面积}$$

一般地, 若 f 非负, 即 $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D$. 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 代表以 $z = f(x, y)$ 的图形为顶面, 以区域 D 为底面的曲顶柱体的体积.



如果物理量是分布在三维空间 \mathbb{R}^3 中的某有界闭区域时, 计算它的总量须按下三重积分来进行.

定义 1.1.2 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 是有界闭区域, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上有界. 若 $\exists I \in \mathbb{R}$, 使得对区域 Ω 的任意分划: $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ (即用任意曲线网将 Ω 分划为小区块), 以及 $\forall (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta\Omega_i (i = 1, \dots, n)$, 下面的黎曼和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i \quad (\text{其中 } \Delta V_i \text{ 是 } \Delta\Omega_i \text{ 的体积})$$

有极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i = I$$

其中 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ (而 $d_i := \max\{d(P_1, P_2) \mid P_1, P_2 \in \Delta\Omega_i\}$ 为小区块 $\Delta\Omega_i$ 的直径), 则称 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上是可积的, 并记 $f \in R(\Omega)$; 极限值 I 称为 $f(x, y, z)$

在 Ω 上的三重积分 (*triple integral*), 并用下符号记之

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$$

并称 Ω 为积分区域, $f(x, y, z)$ 为被积函数, dV 为体积微元.

读者不难将上面定义推广到一般 n 元模式, 即对 n -元函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在 n 维空间 \mathbb{R}^n 中的有界闭区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的积分 $\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dV$. 这里就不做赘述了.

1.2 可积条件 (*)

如同一元情形, 为考察 $f(x, y)$ 在 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上的可积性, 我们要同时考虑两点:

1. 如何方便考虑对任意划分, 或如何给不同划分的集合注入秩序?

答: 可通过对给定划分“加细”, 即添加有线条曲线作进一步划分这一操作来解决.

2. 对给定划分, 如何考虑对应黎曼和的收敛性?

答: 可通过考察函数在划分区域上的上确界和下确界, 从而给黎曼和一个上界和下界, 然后控制该上(下)界在分划加细下的变化即可.

好, 有了以上说明, 对 D 的任一划分 $\{\Delta D_i\}_{i=1}^n$, 记 M_i 和 m_i 分别为 f 在 ΔD_i 上的上确界和下确界, 据此定义 *Darboux* 上和和 *Darboux* 下和如下

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta \sigma_i; \quad s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta \sigma_i$$

完全类似于一元情形, 可证明如下性质

性质 1. 分划加细, 则上和不变, 下和不变.

性质 2. 任意分划的下和都不大于任意分划的上和.

也就是说, *Darboux* 上和的全体在加细下构成一个单调(减少)有下界的集合; 而 *Darboux* 下和的全体在加细下构成一个单调(增加)有上界的集合, 故其下确界和上确界是存在的, 并记 $I^* = \inf\{S\}$, $I_* = \sup\{s\}$, 则有

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S$$

显然, 若函数 $f \in R(D)$, 即对任意划分, 任意取点, 黎曼和的极限存在且相同, 那么 $S - s \rightarrow 0$, 反之也是成立的, 故得如下可积条件

定理 1.2.1 $f(x, y) \in R(D)$ 当且仅当 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$. 记 $\omega_i := M_i - m_i$, 即 f 在 ΔD_i 上

的振幅, 则上条件可写为 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta \sigma_i = 0$. 且此时有 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} s = \iint_D f(x, y) d\sigma$.

有了上面可积的**充要条件**, 可轻松推导出一些常用的判断函数可积的充分条件.

定理 1.2.2 如 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y) \in R(D)$.

证明: 因 $f \in C(D)$, 且 D 为有界闭区域, 故 f 在 D 上一致连续 (类比于一元时 $[a, b]$ 上的连续函数是一致连续的), 即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$ (与具体哪点的选择无关), 使得只要 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 之间的距离小于 δ , 即 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$, 则成立

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (\text{其中 } \sigma \text{ 是区域 } D \text{ 的面积})$$

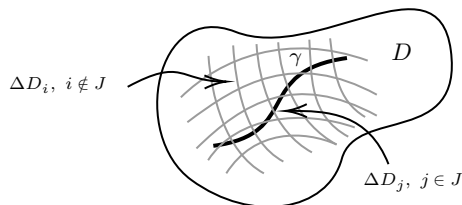
则对 D 的任意划分 $\{\Delta D_i\}_{i=1}^n$, 只要所有 ΔD_i 的直径 d_i 的最大值 λ 小于 δ , 则振幅 $\omega_i < \frac{\epsilon}{\sigma}$, 从而

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta \sigma_i < \frac{\epsilon}{\sigma} \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i = \frac{\epsilon}{\sigma} \cdot \sigma = \epsilon \implies \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta \sigma_i = 0 \quad \square$$

若考虑地更细致一些, 较强的“连续性”条件也可放宽.

若 $f(x, y)$ 在 D 上只有有限个间断点, 或 f 的间断点出现在有限多条简单曲线 (即曲线有连续可微参数表示 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$, $\varphi(t), \psi(t)$ 且只有有限多个极值点, 则可证明此时 $f(x, y) \in R(D)$. 故在有限多条简单曲线上改变函数的取值也不影响可积性和积分的值. 这本质是因为: 简单曲线的“面积”为零. 可从如下论述中看出!

假设曲线 $\gamma(t) : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$ 是位于有界闭区域 D 中的一条简单曲线, 则对区域 D 的任一划分 $\{\Delta D_i\}$, 设其中 $j \in J$ 对应的 D_j 内包含曲线, 可同过加细操作, 使得曲线 γ 在每个 D_j 内的部分都是单调 (不妨设 φ, ψ 都是单调增加) 的, 这是可能的, 因 γ 只有有限多个极值点.

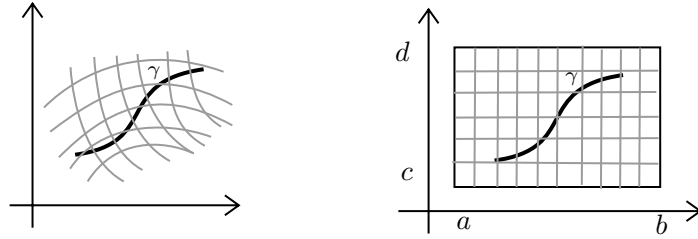


此分划的振幅和为

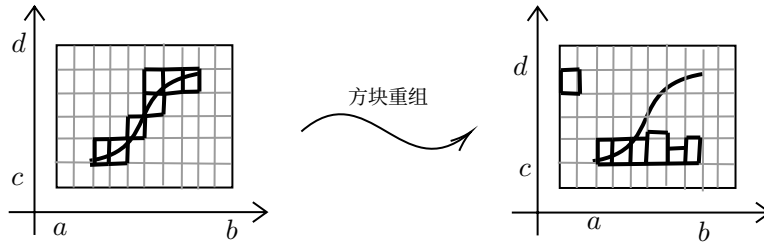
$$\sum_{j=1}^n \omega_i \Delta \sigma_i = \sum_{j \in J} \omega_j \Delta \sigma_j + \sum_{j \notin J} \omega_j \Delta \sigma_j$$

当 $i \notin J$ 时, 可将 $\sum_{j \notin J} \omega_j \Delta \sigma_j$ 控制地任意小, 故只需处理 $\sum_{j \in J} \omega_j \Delta \sigma_j$. 由于 $f(x, y)$ 在这些小区域 ΔD_j 上只有间断点, 故可设其有界的, 即 $\exists M > 0$, 使得 $|f(x, y)| \leq M$, 而被曲线 γ 穿过的小区域 $\{\Delta D_j\}_{j \in J}$ 的总面积 $\sum_{j \in J} \Delta \sigma_j$ 是可以控制到要有多小就有多小的 (故简单曲线的面积为零), 这可通过如下操作实现:

将趋于 D 界于矩形框 $[a, b] \times [c, d]$ 中, 并利用平行于 x 和 y 轴的直线族做加细分, 见下图



现估计被曲线 γ 穿过的小矩形块的总面积.



由上面“方块重组”的游戏, 不难看出, 被曲线 γ 穿过的小矩形块的总面积不超过

$$\Delta x \times (d - c) + \Delta y \times (b - a)$$

其中 Δx 和 Δy 分别表示诸 $\{\Delta x_i\}$ 和诸 $\{\Delta y_i\}$ 中的最大值. 由此, 可知

$$\left| \sum_{j \in J} \omega_j \Delta \sigma_j \right| \leq 2M (\Delta x \times (d - c) + \Delta y \times (b - a)) \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} 0$$

定理 1.2.3 设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 且它在至多有限条面积为零的曲线上不连续, 则它在 D 上可积.

上面的讨论突出了函数在其上不连续的曲线面积为零起到的作用,事实上,这是很自然的要求:考虑 $\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$ 在 D 上的积分,则边界 ∂D 是函数 $\chi(x, y)$ 的不连续“曲线”.如 $\chi_D(x, y)$ 在 D 上可积,即要求 $\iint_D \chi_D(x, y) d\sigma = \text{Area}(D)$ 有意义,则按上页的讨论, ∂D 的面积为零(即可被总面积任意小的小矩形框住).由此可得

定理 1.2.4 有界点集 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 可求面积的充要条件是其边界 ∂D 的面积为零.

注记 1.2.1 有界点集 D 的面积的定义及 $\iint_D \chi_D(x, y) d\sigma$ 的定义,但因小矩形是我们通常熟悉的图形,其面积即长 \times 宽,是已知的(或约定成立的),故通常在计算 $\text{Area}(D)$ 时,我们选择将 D 框在某个矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 中,然后按上页,将该矩形划分为很多小矩形块,则面积定义为这些矩形块当划分无限精细下的(不依赖于划分方式的)极限.利用这种方法,可定义任意有界点集的面积概念,而定理 1.2.2 可推广为如下的判别可积性的充分必要条件.

定理 1.2.4 设 $f(x, y)$ 是边界面积为零的有界区域闭 D 上的有界函数,则 $f \in R(D)$ 当且仅当其不连续点的集合的面积为零.

注记 1.2.2 更一般的处理是,引入点集的测度(measure)这一概念,作为通常“长度”、“面积”、“体积”等概念的推广,然后上定理中出现的“面积为零”可改为“测度为零”,或“零测集”.这些内容将在《实分析》或《高等概率论》中进行深入探讨.

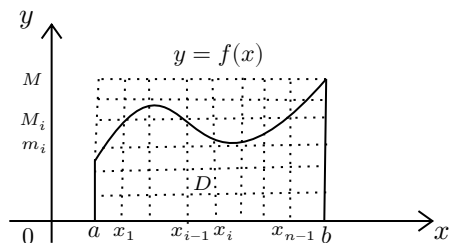
注记 1.2.3 我们强调了边界曲线的面积为零,或函数不连续点所在曲线的面积为零的概念,读者可能觉得诧异,曲线的面积为零不是很正常吗?但事情并非这么简单,因为的确存在有面积的曲线,即存在将实数轴上的闭区间映满平面上的一个二维区域的连续映射,也就是说,这条曲线可遍历该二维区域中的每一个点.这种曲线通常称作 *Peano* 曲线,这里就不介绍其构造了,有兴趣的读者可自行查找相关资料.

在本课程中,所讨论的区域都是可求面积的.而通常边界由分段光滑曲线衔接而成的有界区域也是可求面积的.

比如在一元积分学中,我们就知道:若 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 为非负连续函数,则它与直线 $x = a$, $x = b$ 和 $y = 0$ 所围成的曲边梯形 D 是可求面积的,其值为 $\int_a^b f(x) dx$.下面我们利用面积的更一般定义,证明之,从而有结论

$$\iint_D \chi_D(x, y) d\sigma = \int_a^b f(x) dx$$

证明：由于 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，故它在 f 上（一元）可积. 另一方面，闭区间上的连续函数有界，故 $\exists M = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$. 对任意分划 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ，区域 $D \subseteq [a, b] \times [0, M]$. 记 m_i 和 M_i 分别是 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最小值和最大值，则在 $[0, M]$ 上插入诸点 $\{m_i, M_i\}$, $i = 1, \cdots, n$ ，则过这些插点及 $\{x_i\}$, $i = 1, \cdots, n$ 的平行于 x 和 y -轴的直线将矩形 $[a, b] \times [0, M]$ 划分为小矩形块 $[x_{i-1}, x_i] \times [m_j, M_j]$.



则包含于 D 内部的小矩形块的面积之和为 $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ ，即 f 的 Darboux 下和；而包含 D 的，或与 D 的交集非空的那些小矩形的面积之和是 f 的 Darboux 上和 $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ ，则显然区域 D 的面积 $Area(D)$ ，如存在，必介于上面的下和与上和之间，即

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq Area(D) \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

而 f 的可积性表明：当划分加细时 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \rightarrow 0$. 从而 $Area(D)$ 存在且等于 $\int_a^b f(x) dx$. 又易见，包含曲线 $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$ 的小矩形的全体的面积为

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \xrightarrow{\text{分划加细}} 0 \quad \text{从而知该曲线面积为零.} \quad \square$$

并不是所有平面点集都可求面积，比如 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq D(x)\}$ ，其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

则点集 D 的边界 ∂D 为 D 内所有点列的极限点的全体，由于 $[0, 1]$ 中全体有理数和全体无理数在其中稠密，故知正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ 中（包括边界）的任意点都可以是 D 内的点列的极限点，故 $\partial D = [0, 1] \times [0, 1]$ ，它的面积非零，故 D 本身没有面积概念.

1.3 重积分的性质及其应用

同一元情形, 多重积分具有以下基本性质, 为方便表述, 我们以 $\int_{\Omega} f dV$ 即 n 元函数在 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的积分, 当 $n = 2$ 时, 它就是 $\iint_D f(x, y) d\sigma$; 当 $n = 3$ 时, 它就是 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$; 当然 $n = 1$ 时, 它就是 $\int_a^b f(x) dx$. 如此, 我们可以统一地写出不同维度积分所共有的如下形式. 其证明与一元情形完全雷同, 故此处省略.

1. **线性性:** 设 $f, g \in R(\Omega)$, 则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g \in R(\Omega)$, 且

$$\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) dV = \alpha \int_{\Omega} f dV + \beta \int_{\Omega} g dV$$

2. **区域可加性:** 设 $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ (不相交并), 则 $f \in R(\Omega) \iff f \in R(\Omega_1) \cap R(\Omega_2)$, 且有

$$\int_{\Omega} f dV = \int_{\Omega_1} f dV + \int_{\Omega_2} f dV$$

3. **保序性:** 设 $f, g \in R(\Omega)$, 且满足 $f \leq g$, 则有 $\int_{\Omega} f dV \leq \int_{\Omega} g dV$. 且有如下推论

(a) 若 $f \in R(\Omega)$, 且 $f \geq 0$, 则 $\int_{\Omega} f dV \geq 0$

(b) 若 $f \in R(\Omega)$, 则 $|f| \in R(\Omega)$, 且成立 $\left| \int_{\Omega} f dV \right| \leq \int_{\Omega} |f| dV$

(c) 若 $f \in R(\Omega)$, 且 $m \leq f \leq M$, 则有

$$m \text{vol}(\Omega) \leq \int_{\Omega} f dV \leq M \text{vol}(\Omega)$$

其中 $\text{vol}(\Omega)$ 代表区域 Ω 的“体积”, 当 $n = 2$ 时它代表面积 $\text{Area}(D)$; 当 $n = 1$ 时它代表被积区间的长度.

4. **乘积可积性:** 若 $f, g \in R(\Omega)$, 则其乘积 $fg \in R(\Omega)$

5. **积分中值定理:** 若 $f, g \in R(\Omega)$, 且 g 在 Ω 上不变号, 则 $\exists \xi \in \Omega$, 使得

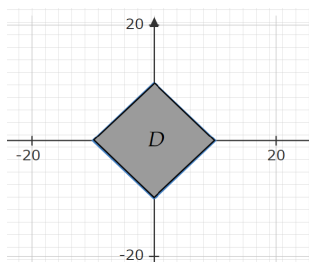
$$\int_{\Omega} f g dV = f(\xi) \int_{\Omega} g dV$$

特别地, 当 $g \equiv 1$ 时, 由 $\int_{\Omega} f dV = f(\xi) \text{vol}(\Omega)$, 换言之

$$f(\xi) = \frac{\int_{\Omega} f dV}{\int_{\Omega} dV} = \frac{\int_{\Omega} f dV}{\text{vol}(D)} \quad \text{即 } f(\xi) \text{ 为 } f \text{ 在 } \Omega \text{ 上的平均值.}$$

例 1.3.1 估计 $I = \iint_D \frac{d\sigma}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ 的取值, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 10\}$

解: 由于 $f(x, y) = \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ 在 D 上连续, 故由积分中值定理知 $\exists (\xi, \eta) \in D$, 使得



$$I = \frac{1}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta} \text{Area}(D) = \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}$$

从而

$$\frac{200}{102} \leq I \leq \frac{200}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{100}{51} \leq I \leq 2$$

例 1.3.2 设有界非负函数 f 在 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上可积, 证明 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ 的充分必要条件是 f 在其连续点处的值均为零.

证明: (必要性) 若 $\exists \mathbf{p}_0(x_0, y_0) \in D$, f 在 \mathbf{p}_0 连续, 且 $f(x_0, y_0) > 0$, 则由连续函数的局部保号性知 $\exists \delta > 0$, 使得

$$f(x, y) > \frac{1}{2} f(x_0, y_0) > 0, \quad \forall (x, y) \in U(\mathbf{p}_0, \delta)$$

从而由积分的保序性, 知

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq \iint_{U(\mathbf{p}_0, \delta)} \frac{1}{2} f(x_0, y_0) d\sigma = \frac{\pi}{2} \delta^2 f(x_0, y_0) > 0, \quad \text{矛盾.}$$

(充分性) 设 $f(x, y)$ 在其连续点处的值为零, 则由可积性的充要条件, $f(x, y)$ 不连

续的点构成的集合的面积（测度）为零. 即对任意 D 的分划, 只要其中小区域 ΔD_i 的面积 $\Delta\sigma_i > 0$, 则其中必存在 f 的连续点 (ξ_i, η_i) (否则不连续点的集合的面积就不是零了), 则对此分划, 即分划中的连续点作出的黎曼和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = 0$. 从而

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = 0 \quad \square$$

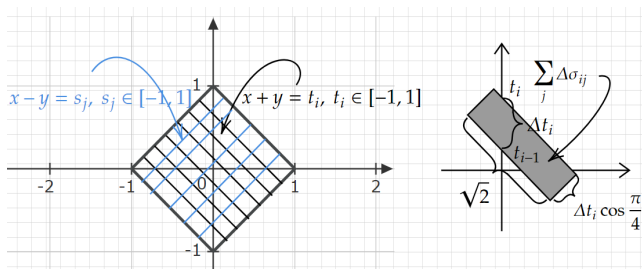
例 1.3.3 设 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{p}_0(x_0, y_0)$ 附近连续, 求 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq \rho^2} f(x, y) d\sigma$

解: 由积分中值定理知, $\exists(\xi, \eta)$, 使得 $\iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq \rho^2} f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \pi\rho^2$, 从而

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq \rho^2} f(x, y) d\sigma = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\rho^2} f(\xi, \eta) \pi\rho^2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\xi, \eta) = f(x_0, y_0)$$

例 1.3.4 证明 $\iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) d\sigma = \int_{-1}^1 f(t) dt$.

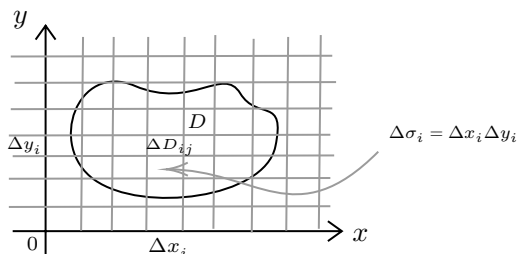
证明: 用两平行直线族 $l_t: x+y=t_i, i=1, \dots, n$; $l_s: x-y=s_j, j=1, \dots, m$ 将被积区域 $D = \{|x|+|y| \leq 1\}$ 划分为小矩形块



$$\begin{aligned} \text{则对应黎曼和为 } & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij} + \eta_{ij}) \Delta\sigma_{ij} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_{ij} + \eta_{ij}) \Delta\sigma_{ij} \right) = \\ & \xrightarrow{\text{取 } (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \text{ 在 } l_t \text{ 上}} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta\sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n f(t_i) \sum_{j=1}^m \Delta\sigma_{ij} \\ & = \sum_{i=1}^n f(t_i) \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta t_i = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(t) dt \quad \square \end{aligned}$$

1.4 二重积分的计算

我们先考虑直角坐标系下二重积分的作用, 即在 x - y 坐标中, 采用平行于 x -轴和 y -轴的两族直线对被积区域 D 做划分



则面积微元 $d\sigma = dxdy$, 故若函数 f 是在直角坐标系下写出的, 则其积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 默认为是在上划分意义下计算的, 此时也记积分为 $\iint_D f(x, y) dxdy$. 为探讨其计算规则, 我们按部就班, 由简到繁.

1. D 为矩形区域, 即假设 $D = [a, b] \times [c, d]$, 此时有

$$\begin{aligned}
 \sum_i f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i &= \sum_{1 \leq s \leq p} \sum_{1 \leq t \leq q} f(\xi_{i_s}, \eta_{i_t}) \Delta x_s \Delta y_t \\
 &= \sum_{1 \leq s \leq p} \Delta x_s \left(\sum_{1 \leq t \leq q} f(\xi_{i_s}, \eta_{i_t}) \Delta y_t \right) \\
 \text{或} &= \sum_{1 \leq t \leq q} \Delta y_t \left(\sum_{1 \leq s \leq p} f(\xi_{i_s}, \eta_{i_t}) \Delta x_s \right)
 \end{aligned}$$

即, 当划分无限加细时, 有

$$\sum_i f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \rightarrow \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad \text{或} \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

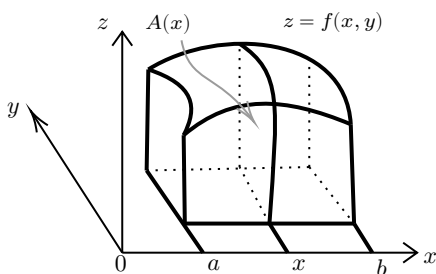
故此时 $\iint_D f(x, y) dx$ 的计算可转化为累次积分进行, 只要相关可积性得到保障.

定理 1.4.1 设 $f(x, y)$ 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上可积, 若积分 $h(x) = \int_c^d f(x, y) dy$

对每个 $x \in [a, b]$ 存在, 则 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b h(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

代之严格证明, 我们给出其直观解释. 我们知道 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 可解释为以 D 为底、曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱面的体积 V . 但它也可看做是被平行于 y - z 平面的一系列平面所截的曲边梯形“堆叠”而成.



由上图, 截面积 $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, 故所求体积

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

同理, 若 $\forall y \in [c, d]$, 积分 $\int_a^b f(x, y) dx$ 都存在, 则 $f(x, y)$ 先对 x , 再对 y 的累次积分 $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$ 也存在, 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

若 $f \in R([a, b]), g \in R([c, d])$, 则 $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x)g(y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y) dy \right) dx$

$$= \int_a^b f(x) \left(\int_c^d g(y) dy \right) dx = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right)$$

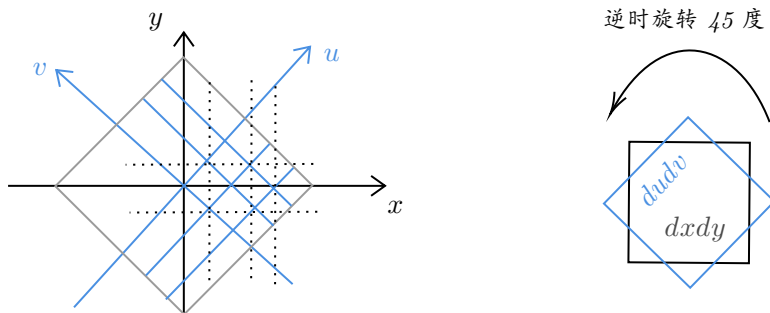
例 1.4.1
$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} xy e^{x^2+y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (xy e^{x^2} e^{y^2}) dy =$$

$$\left(\int_0^1 x e^{x^2} dx \right) \left(\int_0^1 y e^{y^2} dy \right) = \left(\int_0^1 x e^{x^2} dx \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} dx^2 \right)^2 = \frac{(e-1)^2}{4}$$

例 1.4.2 对积分 $\iint_{|x|+|y| \leq 1} e^{x+y} dx dy$, 可通过旋转 $\frac{\pi}{4}$, 将积分区域变换为标准的矩形

区域, 从而求解, 即利用
$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ v = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$
 此时 $e^{x+y} = e^{\sqrt{2}u}$, 而由于只是旋

转了 45° , 故 $x-y$ 坐标系中的面积微元 $dx dy$ 同 $u-v$ 坐标系中的面积微元 $du dv$ 是相同的 (旋转不改变面积, 亦不改变无穷小面元) .

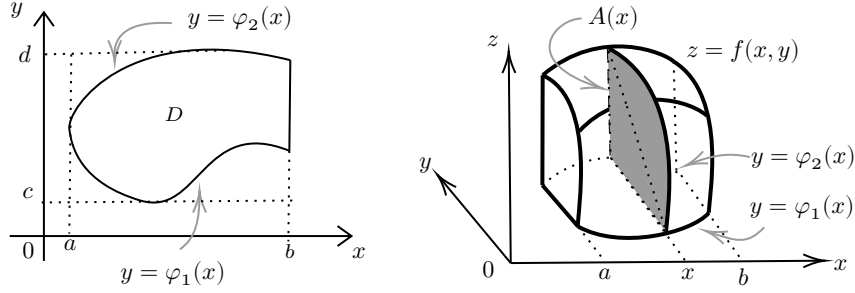


$$\begin{aligned} \iint_{|x|+|y| \leq 1} e^{x+y} dx dy &= \iint_{[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]^2} e^{\sqrt{2}u} du dv = \left(\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} e^{\sqrt{2}u} du \right) \left(\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} dv \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} e^{\sqrt{2}u} d(\sqrt{2}u) \times \sqrt{2} = e^{\sqrt{2}u} \Big|_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} = e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

或可利用例 1.3.4 中的结论 $\iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(t) dt$, 直接化为一元积分解得

$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} e^{x+y} dx dy = \int_{-1}^1 e^t dt = e - \frac{1}{e}$$

2. D 为 x -型正则区域, 即假设 $D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$, 其中 $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a, b]$. 这种区域的特点是: 平行于 y -轴且穿过 D 内部的直线与 D 的边界的交点不多于两个.



对该种区域类型, 利用求体积的“截面堆积法”, 先求得 x 点处平行于 y - z 平面的截面面积为 $A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$, 然后将截面面积“堆积”成体积, 即

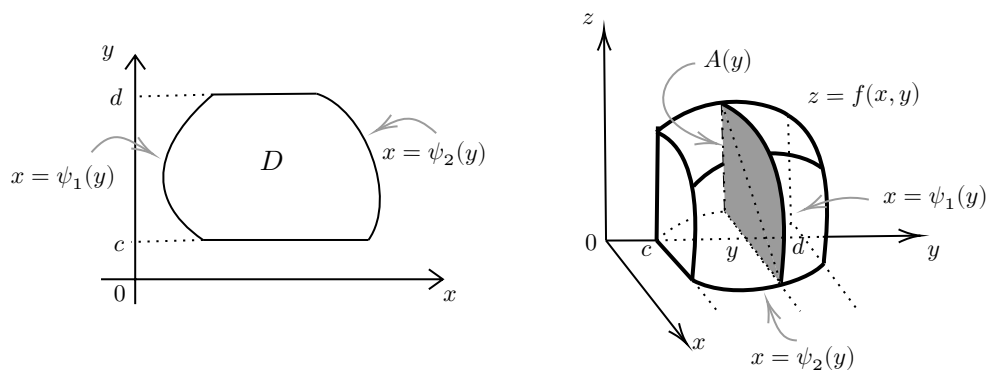
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b A(x) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned}$$

这也可看成是“累次积分”, 即先对 y 积分 (或将 y -“积出”), 然后再对 x -积分. 应用的关键在于确定 x -型正则区域的两条边界曲线.

当然我们可以直接证明上面的公式. 设 $c = \min_{a \leq x \leq b} \varphi_1(x)$, $d = \max_{a \leq x \leq b} \varphi_2(x)$. 则 D 位于闭矩形 $\tilde{D} := [a, b] \times [c, d]$ 之中. 构造函数 $\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in \tilde{D} \setminus D \end{cases}$ 从而

$$\begin{aligned} \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy &= \int_c^{\varphi_1(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^d \tilde{f}(x, y) dy \\ &= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \implies \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(x, y) dx dy \\ &\quad \underline{\underline{\text{按矩形区域上的累次积分}}} \int_a^b dx \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \end{aligned}$$

3. D 为 y -型正则区域, 即假设 $D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$, 其中 $\psi_1, \psi_2 \in C[c, d]$. 这种区域的特点是: 平行于 x -轴且穿过 D 内部的直线与 D 的边界的交点不多于两个.

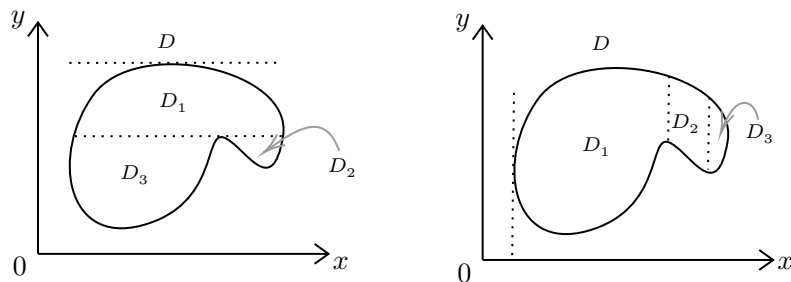


对该种区域类型, 利用求体积的“截面堆积法”, 先求得 y 点处平行于 xz 平面的截面面积为 $A(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$, 然后将截面面积“堆积”成体积, 即

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_c^d A(y) dy = \\ &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \end{aligned}$$

这也可看成是“累次积分”, 即先对 x 积分 (或将 x “积出”), 然后再对 y 积分. 应用的关键在于确定 y -型正则区域的两条边界曲线.

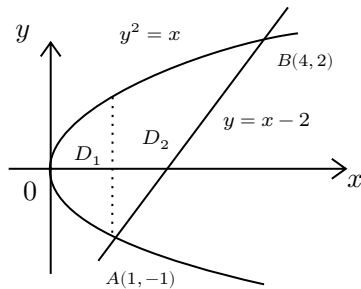
4. D 为一般有界闭区域, 此时可将趋于划分为若干个不相交的 x -型区域和 y -型区域的并, 然后利用积分的区域可加性分别计算后再相加.



比如, 上面是对区域 D 的两种划分, 左边是划分为三个 y -型正则区域的不相交并; 右边划分为三个 x -型正则区域的不相交并.

例 1.4.3 计算二重积分 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 由抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $y = x - 2$ 所围成.

解: 如下图, 将区域 D 分为 x -型区域 D_1 和 D_2 的不相交并: $D = D_1 \sqcup D_2$.



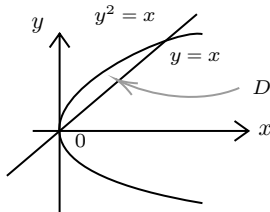
其中 $D_1 = \{(x, y) \mid -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1\}$; $D_2 = \{(x, y) \mid x - 2 \leq y \leq \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4\}$, 故

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} xy dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy dy = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 x \frac{y^2}{2} \Big|_{x-2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= 0 + \frac{1}{2} \int_1^4 x(x - (x-2)^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^4 (-4x + x^2 - x^3) dx = \frac{25}{8} \end{aligned}$$

如果不划分, 而将 D 看成 y -型区域, 则 $D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq y + 2, -1 \leq y \leq 2\}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx = \int_{-1}^2 y \frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^{y+2} dy = \int_{-1}^2 y \frac{(y+2)^2 - y^4}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (4y + 4y^2 + y^3 - y^5) dy = \frac{1}{2} \left(2y^2 + \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{6}y^6 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{25}{8} \end{aligned}$$

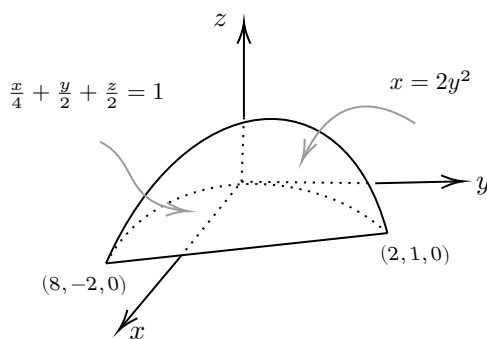
例 1.4.4 计算 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 由直线 $y = x$ 和抛物线 $x = y^2$ 所围成.



解：如果先对 y 积分，由于 $\frac{\sin y}{y}$ 没有初等函数作为其原函数，故此尝试不通，须将区域 D 看成 y -型区域（即先积 x ，后积 y ）： $D = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq y; 0 \leq y \leq 1\}$ ，从而

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} y(1-y) dy \\ &= \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy = -\cos y \Big|_0^1 + \int_0^1 y d \cos y \\ &= 1 - \cos 1 + y \cos y \Big|_0^1 - \sin y \Big|_0^1 = 1 - \sin 1 \end{aligned}$$

例 1.4.5 求抛物柱面 $x = 2y^2$ ，平面 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ 和 $z = 0$ 所围立体的体积.

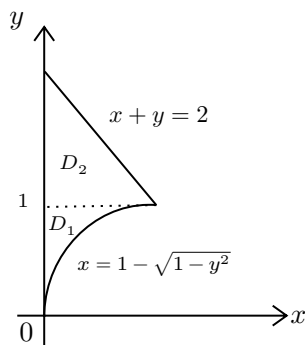


解：所求体积可看成是以平面 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ 为顶，以 xy 平面上由直线 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ 和抛物线 $x = 2y^2$ 所围成的区域 D 为底的曲顶柱面的体积. 故体积为

$$\begin{aligned} \iint_D \left(2 - y - \frac{x}{2}\right) dx dy &= \int_{-2}^1 dy \int_{2y^2}^{4-2y} \left(2 - y - \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \int_{-2}^1 (4 - 4y - 3y^2 + 2y^3 + y^4) dy = \frac{81}{10} \end{aligned}$$

例 1.4.6 交换 $\int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx$ 的积分次序.

解：题中累次积分的写法表明它计算的是 f 沿 y -型区域 D 的积分，该区域当 $y \in [0, 1]$ 时，由曲线 $x = 0$ 和 $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$ 围成，当 $y \in [1, 2]$ 时，由曲线 $x = 0$ 和 $x = 2 - y$ 围成. 据此，可作出区域 D 的草图如下



即将积分表达为 $\iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$ 了, 那现在将区域看成是 x -型的, 则可描述为

$$D = \{(x, y) \mid \sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq 2-x; 0 \leq x \leq 1\}$$

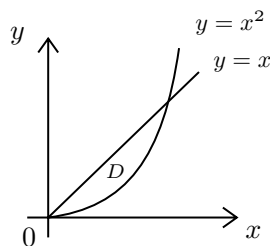
则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{2-x} f(x, y) dy$$

例 1.4.7 设 $f(x) \in C[0, 1]$, 证明

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^y f(x) dx = \int_0^1 (e^x - e^{x^2}) f(x) dx$$

证明: 左边是在 $e^y f(x)$ 在 y -型区域 $D = \{(x, y) \mid y \leq x \leq \sqrt{y}; 0 \leq y \leq 1\}$ 上的积分, 如下图所示.



将 D 看成 x -型区域, 它可描述为 $D = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$, 故

$$\iint_D e^y f(x) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x e^y f(x) dy = \int_0^1 (e^x - e^{x^2}) f(x) dx \quad \square$$

例 1.4.8 计算 $I = \iint_D (y + x^3 y^2) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

解: 注意到被积区域 D 关于 y 轴对称, 且 $x^3 y^2$ 在变换 (关于 y -轴的反射): $x \mapsto -x$ 下改变符号, 故这一项在 D 上的积分必为零, 从而

$$\begin{aligned} I &= \iint_D y dx dy \xrightarrow{y \text{ 在 } x \mapsto -x} 2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} y dx = 2 \int_0^2 y \sqrt{4-y^2} dy \\ &= -\frac{2}{3} (4-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

上例中体现出的利用对称性计算积分的原则可总结如下:

1. 当积分区域 D 关于 x 轴对称时

(a) 若 $f(x, -y) = -f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$;

(b) 若 $f(x, -y) = f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_{1/2}} f(x, y) d\sigma$, 其中 $D_{1/2}$ 是区域 D 在 x 轴上侧 (或下侧) 的部分.

2. 当积分区域 D 关于 y 轴对称时

(a) 若 $f(-x, y) = -f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$;

(b) 若 $f(-x, y) = f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_{1/2}} f(x, y) d\sigma$, 其中 $D_{1/2}$ 是区域 D 在 y 轴左侧 (或右侧) 的部分.

3. 当积分区域 D 关于原点对称时, 若 $f(-x, -y) = -f(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$;

4. 当积分区域 D 关于 x -轴, y -轴都对称时, 若 $f(-x, y) = f(x, y) = f(x, -y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \iint_{D_{1/4}} f(x, y) d\sigma$$

其中 $D_{1/4} := \{(x, y) \in D \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ 是区域 D 在第一象限中的部分.

利用好这些对称性, 有时能非常有效地减少计算量.

1.5 二重积分的变换代换

其实我们在例 1.3.4 和例 1.4.2 中已经引入了利用变量代换计算二重积分的思路了. 其核心要点是:

对 $\iint_D f(x,y)dx dy$, 如果 D 在 x - y 坐标系表达复杂, 而通过合适的坐标变换 (比如例 1.4.2 中的旋转变换) $T: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, 使得 D 在 u - v 坐标系下的表达简单, 从而方便积分计算.

当然, 在变换 T 下, 除了区域 D 的描述改变了, 同时函数 $f(x,y)$ 也变为 u,v 的函数 $f(x(u,v), y(u,v))$, 而更关键的是, 要计算面积微元 $d\sigma$ 的改变, 即须知 $d\sigma$ 在 u - v 坐标下的表达式. 我们在例 1.4.2 中计算出: 对平面上旋转 45° 的变换, $d\sigma$ 从 $dx dy$ 变为 $du dv$, 即本质上是不变的, 事实上, 任何旋转变换不改变面积微元的形式, 这当然是易于理解的, 因为面积在旋转下是不变的.

下面我们考虑一般情形, 首先对容许的变换类型做些说明.

自然的要求是, T 把 u - v 平面上的某有界闭区域 D' 连续地变为 x - y 平面上的给定有界闭区域 D , 且 T 须是从 D' 到 D 的“一一对应”, 即 D 中的任意点在 D' 下都有原象——即逆映射 T^{-1} 存在; 不存在 D' 中不同两点被 T 映为 D 中同一点这种情形.

如果 T 满足上面的要求, 并假定 T 是可微且有连续的一阶偏导数, 则变换在无穷小层面, 即其微分

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

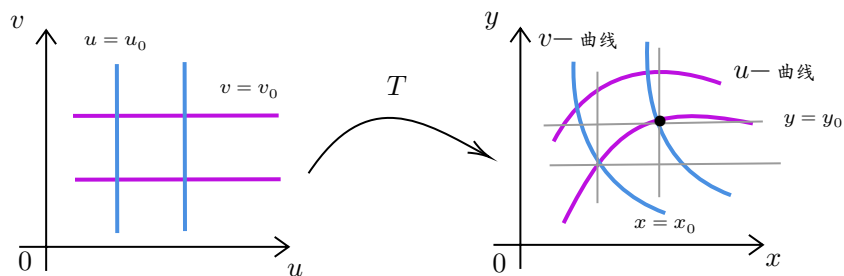
也得是个一一对应才行, 即变换的 *Jacobi* 矩阵 \mathbf{J} 处处可逆, 也就是说

$$\det(\mathbf{J}) = J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

由于 T 是一一对应, 故 D 上任意一点 p , 既可用位移的 (x,y) 坐标来标记它, 也可由唯一的 (u,v) 坐标来加以标记.

几何上来看, 原来在 x - y 坐标系中是利用坐标曲线网 $x = \text{常数}; y = \text{常数}$ 来赋予

点以坐标的, 比如点 $p_0(x_0, y_0)$ 就是坐标曲线 $x = x_0$ 和 $y = y_0$ 的唯一交点.



由于 T 是一一对应, 故存在唯一 (u_0, v_0) , 使得 $T(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$, 即

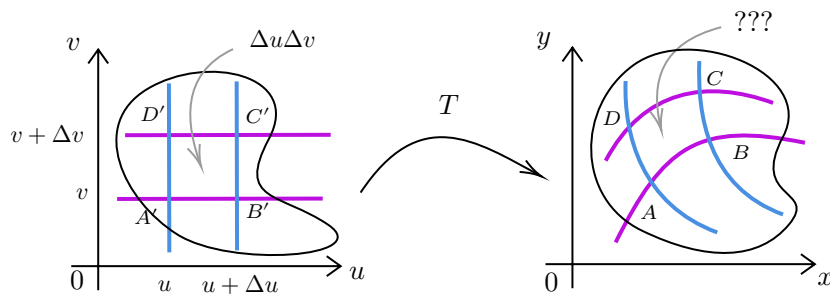
$$\begin{cases} x(u_0, v_0) = x_0 \\ y(u_0, v_0) = y_0 \end{cases}$$

这表明 $u-v$ 平面上的直线 $u = u_0$ 和 $v = v_0$ 被 T 一一地映为 $x-y$ 平面上的

$$u\text{-曲线: } \begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \end{cases} \quad \text{和} \quad v\text{-曲线: } \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \end{cases}$$

它们在 $x-y$ 坐标中交于唯一一点 p_0 , 如此便赋予 p_0 以坐标 (u_0, v_0) . 换言之, 我们在 $x-y$ 平面上通过 u -曲线和 v -曲线这两族曲线来界定 (坐标化) 平面上点的位置, 故这两族曲线称为是坐标曲线族, 而如此赋予的点的坐标称为是点的曲线坐标.

下面让我们推导 u, v 坐标下的面积微元表达式.



在 uv 平面上分别用平行于 u -轴和 v -轴的直线族将 D' 划分为小矩形块, 其中一个典型小矩形, 设其顶点分别为

$$A'(u, v), \quad B'(u + \Delta u, v), \quad C'(u + \Delta u, v + \Delta v), \quad D'(u, v + \Delta v)$$

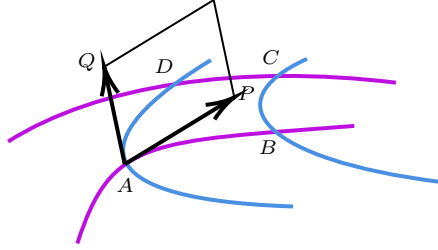
其面积显然为 $dudv$. 经由坐标映射, 该小矩形映为 xy 平面上的小曲边四边形, 且

相应顶点分别为 $A(x(u, v), y(u, v))$, $B(x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v))$

$$C(x(u + \Delta u, v + \Delta v), y(u + \Delta u, v + \Delta v)), \quad D(x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v))$$

下计算该曲边小四边形在一阶近似下的面积，即面积微元。

当 $\Delta u, \Delta v$ 取得足够小时，由于 T 可微，故对应曲边小四边形可近似看作是平行四边形——由过顶点 A 的两条坐标曲线在 A 处的切向量所张成的无穷小平行四边形。



$$\widehat{AB} \approx \overrightarrow{AP} = (x_u(u, v)\Delta u, y_u(u, v)\Delta u)$$

$$\widehat{AD} \approx \overrightarrow{AQ} = (x_v(u, v)\Delta v, y_v(u, v)\Delta v)$$

则 \overrightarrow{AP} 和 \overrightarrow{AQ} 长成的有向无穷小平行四边形的面积为

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u(u, v)\Delta u & y_u(u, v)\Delta u & 0 \\ x_v(u, v)\Delta v & y_v(u, v)\Delta v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u(u, v)\Delta u & y_u(u, v)\Delta u \\ x_v(u, v)\Delta v & y_v(u, v)\Delta v \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\xrightarrow{\text{转置不改变行列式}} \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \mathbf{k} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u \Delta v \mathbf{k}$$

从而知其面积的大小为

$$|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v = |J| \Delta u \Delta v$$

从而得到面积微元为 $d\sigma = |J|dudv$. 故的二重积分换元公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| dudv$$

注记 1.5.1 我们推导了面积微元 $d\sigma$ 在不同坐标下的转换关系： $dx dy = |J| du dv$ ，所以 *Jacobi* 行列式是作为坐标变化下无穷小面积的变化比例因子出现的。

由于区域 D 是 uv 平面上区域 D' 在 T 之下的象 (image), 即 $D = T(D')$, 故上换元公式可写为

$$\begin{aligned}\iint_{T(D')} f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv \\ &= \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix} du dv\end{aligned}$$

当然, 如果方便写出 T 的逆变换 T^{-1} : $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ 则由于 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$, 故 *Jacobi* 因子也可按 $J = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}$ 计算.

证明: 由于 T 可逆, 故在微分层面也可逆, 即在 $\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$ 中的 *Jacobi* 矩阵是可逆的, 从而 $[du \ dv]^T = \mathbf{J}^{-1}[dx \ dy]^T$, 其中 \mathbf{J}^{-1} 由下给出

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{而我们知道 } \det(\mathbf{J})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \quad \square$$

注记 1.5.2 事实上, 若 *Jacobi* 行列式 J 仅在区域 D' 内个别点或个别曲线上为零时, 上面的换元公式仍然成立. 这是由于, 对二重积分, 我们改变函数在至多有限条 (面积为零) 的曲线上的值是不改变其可积性及其值的, 只需通过极限手段绕开这些 “有问题” 的点或曲线即可.

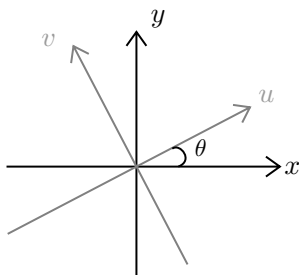
例 1.5.1 我们回头看例 1.4.2 中的积分 $\iint_{|x|+|y|\leq 1} e^{x+y} dx dy$, 可通过旋转 $\frac{\pi}{4}$, 将积分区域变换为标准的矩形区域, 从而求解, 即利用 $\begin{cases} u = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ v = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$ 此时 $e^{x+y} = e^{\sqrt{2}u}$, 该变换的 *Jacobi* 行列式为

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{vmatrix} = 1 \quad \implies \quad du dv = dx dy$$

和我们先前直观得到的结果是一致的. 一般地, 考虑坐标变化

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

即 xy 坐标系是 uv 坐标系通过**顺时针旋转** θ 角得到的, 或 uv 坐标系是 xy 坐标系通过**逆时针旋转** θ 角得到的.



该变换的 *Jacobi* 矩阵是 $\mathbf{J} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. 其行列式为变换的 *Jacobi* 因子 $|J| = |\det(\mathbf{J})| = 1$. 故 $dxdy = dudv$.

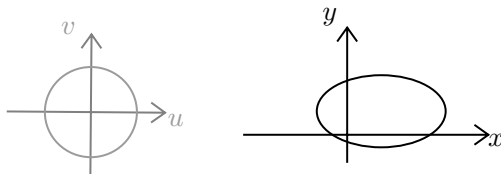
例 1.5.2 计算椭圆 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 所围区域的面积.

解: 记 D 为椭圆所围区域, 做变量替换 $\begin{cases} u = (x-x_0)/a \\ v = (y-y_0)/b \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_0 + au \\ y = y_0 + bv \end{cases}$, 则在 $u-v$ 坐标下, 区域 D 变为 uv 平面上的单位圆

$$D' = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 = 1\}$$

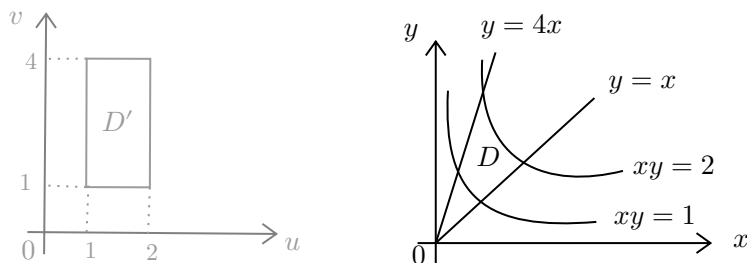
而变换的 *Jacobi* (行列式) 为 $J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$, 故变换的 *Jacobi* 因子为 $|J| = ab$, 从而 $dxdy = ab dudv$

$$\text{Area}(D) = \iint_D dxdy = \iint_{D'} |J| dudv = ab \iint_{D'} dudv = \pi ab$$



例 1.5.3 计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 为由曲线 $xy = 1, xy = 2, y = x$ 和 $y = 4x$ 在第一象限所围成的区域.

解: 做变换 $\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases}$, 其 *Jacobi* 矩阵为 $\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{bmatrix}$



从 xy 平面到 uv 平面的变换的矩阵 \mathbf{J} 为上矩阵的逆矩阵, 其行列式为上矩阵行列式的倒数, 即

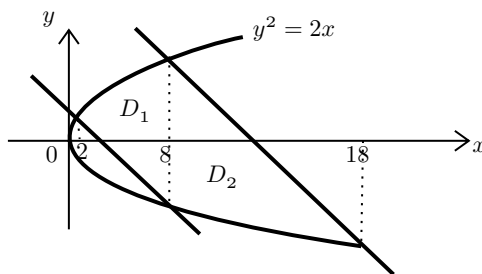
$$J = \det(\mathbf{J}) = \frac{1}{2y/x} = \frac{x}{2y}$$

故变换的 *Jacobi* 因子为 $|J| = \left| \frac{x}{2y} \right| = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}$, 从而 $dx dy = |J| du dv = \frac{du dv}{2v}$.

区域 D 被变为 uv 平面上的矩形 $D' = [1, 2] \times [1, 4]$, 由此可得

$$\iint_D xy dx dy = \iint_{D'} u \frac{du dv}{2v} = \int_1^2 u du \int_1^4 \frac{dv}{2v} = \left(\frac{u^2}{2} \Big|_1^2 \right) \left(\frac{\ln v}{2} \Big|_1^4 \right) = \frac{3}{2} \ln 2$$

例 1.5.4 计算 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 由 $y^2 = 2x, x+y=4$ 和 $x+y=12$ 围成.



解: 如图, 得益于两直线与抛物线的两个点有相同的 x 坐标 8, 故利用 $x = 8$ 可将 D 划分为两部分 D_1 和 D_2 . 它们都是 x -型正则区域, 描述如下

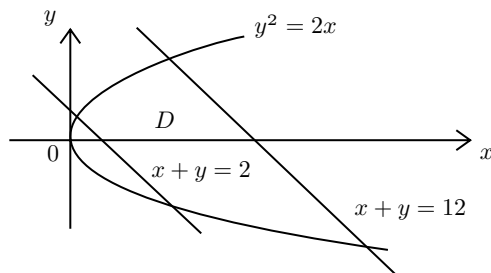
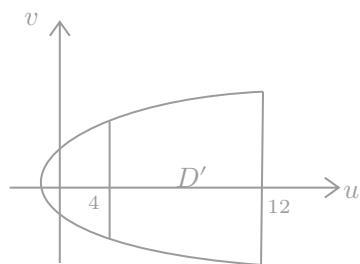
$$D_1 = \{(x, y) \mid 4 - x \leq y \leq \sqrt{2x}, 2 \leq x \leq 8\};$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid -\sqrt{2x} \leq y \leq 12 - x, 8 \leq x \leq 18\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{故 } \iint_D (x+y) dx dy &= \iint_{D_1} (x+y) dx dy + \iint_{D_2} (x+y) dx dy \\
 &= \int_2^8 dx \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y) dy + \int_8^{18} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y) dy \\
 &= \int_2^8 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{4-x}^{\sqrt{2x}} dx + \int_8^{18} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-\sqrt{2x}}^{12-x} dx \\
 &= \int_2^8 \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x^{3/2} + x - 8 \right) dx + \int_8^{18} \left(\sqrt{2}x^{3/2} - x - \frac{x^2}{2} + 72 \right) dx \\
 &= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{5}x^{5/2} + \frac{x^2}{2} - 8x \right) \Big|_2^8 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}x^{5/2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 72x \right) \Big|_8^{18} \\
 &= \frac{8^3 - 2^3}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{5}(18^{5/2} - 2^{5/2}) + 572 = \frac{504}{6} + \frac{18^2 \times 12 - 16}{5} + 572 \\
 &= \frac{252}{3} + \frac{3872}{5} + 572 = \frac{8156}{15}
 \end{aligned}$$

上面计算虽然直截了当，当显然太过繁琐，故我们寻求恰当的换元来简化计算。

$$\text{剪切} \begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases} \text{ 将 } D \text{ 变为 } D' := \left\{ (u, v) \mid \begin{array}{l} 4 \leq u \leq 12 \\ -1 - \sqrt{2u+1} \leq v \leq -1 + \sqrt{2u+1} \end{array} \right\}$$



剪切变换不改变体积，这可从变换的行列式看出，即

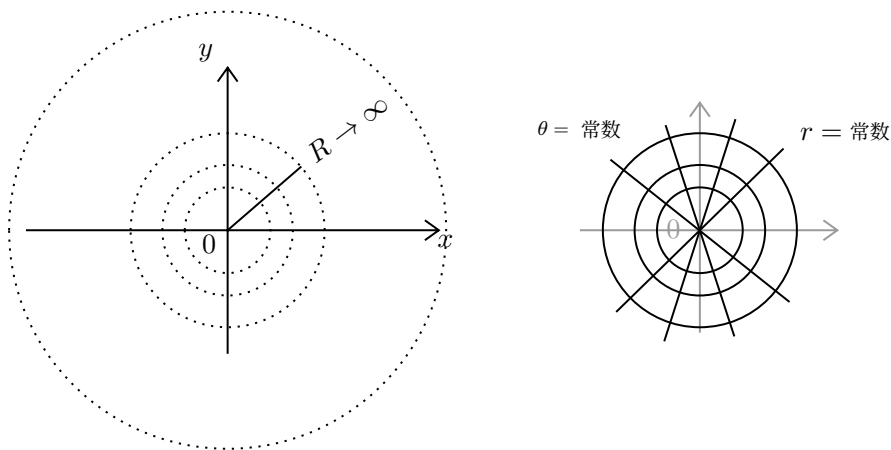
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \implies dx dy = du dv \implies$$

$$\iint_D (x+y) dx dy = \iint_{D'} u du dv = \int_4^{12} u du \int_{-1-\sqrt{2u+1}}^{-1+\sqrt{2u+1}} dv = \int_4^{12} 2u\sqrt{2u+1} du = \frac{8156}{15}$$

例 1.5.5 我们计算著名的泊松 (Poisson) 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. 被积函数没有初等函数作为其原函数, 故不能用牛顿-莱布尼茨公式. 但当计算其平方时, 会发现另一片天地.

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy \\ &\stackrel{\text{累次积分化为重积分}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \end{aligned}$$

其中 $D_R := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 为半径为 R 的圆盘.



为计算圆盘 D_R 上的积分, 我们转为使用极坐标 (polar coordinates) $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ 对应坐标曲线如上右图所示. 该变换的 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

故 $dx dy = |J| dr d\theta = r dr d\theta$. 从而

$$\begin{aligned} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^R = \pi (1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \pi \end{aligned}$$

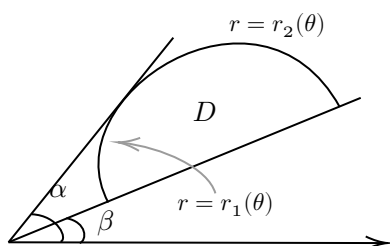
从而知 Poisson 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. 它在概率论中有重要应用.

由于极坐标比较常用，我们将极坐标下的积分计算规则总结如下：

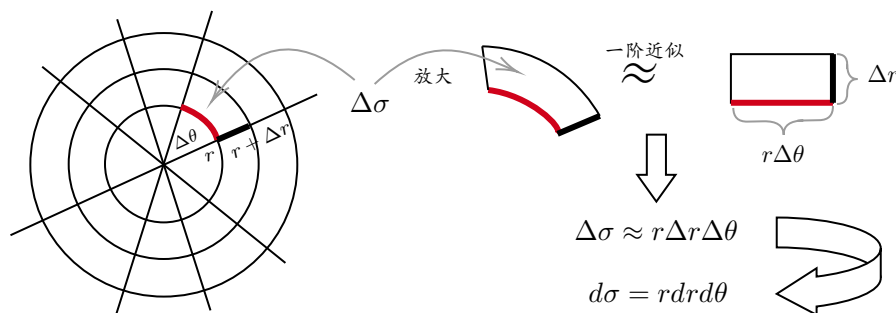
$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy \stackrel{\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}}{=} \iint_{D_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

如果区域在极坐标下可以描述为 $D_{r\theta} := \{(r, \theta) \mid r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ ，则

$$\iint_{D_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$



注记 1.5.3 极坐标下的面积微元为 $d\sigma = r dr d\theta$ ，除了用计算 *Jacobi* 行列式外，还可以由下图直观看出。



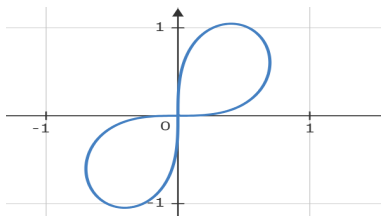
例 1.5.6 求曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$ ($a, b, c > 0$) 所围图形的面积.

分析：在 xy 坐标下很难看出该曲线的形状，也不易将 y 以 x 直接表示. 为看出其图形特征，我们引入广义极坐标

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$$

与通常的极坐标相比,唯一的差别是多了尺度因子 a, b , 所以在广义坐标下, 图形的基本形态是不变的, 比如曲线是否闭合等.

解: 在广义极坐标下, 曲线的方程为 $r^2 = \frac{ab}{c^2} \sin \theta \cos \theta$, 由此可绘制其图形如下所示.



图形是斜“8”字型. 且关于原点对称的 (反映在 r 开平方根后的 \pm 两分支, 绘图时, 若 r 为负, 则作角度变换 $\theta \mapsto \theta + \pi$), 故只需求第一象限中图形的面积, 其方程描述为

$$D_{\text{第一象限}} = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{ab}{c^2} \sin \theta \cos \theta} \right\}$$

又变换的 *Jacobi* 行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr \implies dxdy = |J|drd\theta = abrdrd\theta$$

由此可知曲线围成的面积为

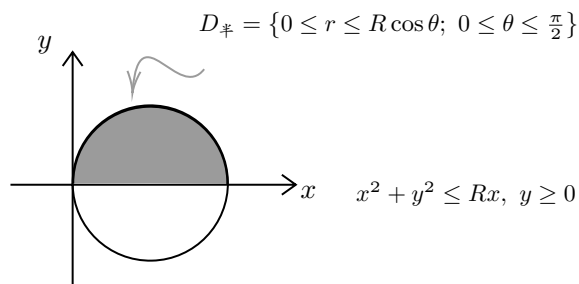
$$\begin{aligned} 2 \iint_{D_{\text{第一象限}}} dxdy &= 2 \iint_{D_{\text{第一象限}}} abrdrd\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2} \sin \theta \cos \theta}} abrd r \\ &= \frac{a^2 b^2}{c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{a^2 b^2}{2c^2} \end{aligned}$$

例 1.5.7 求球体 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被圆柱体 $x^2 + y^2 = Rx$ 所割下部分的体积 V .

解: 由对称性, 所求体积是以 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 为顶, 以圆盘 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq Rx\}$ 为底的曲顶柱面. 由对称性, 我们只需求出它在第一卦限中的体积, 然后四倍之即可. 故其体积为

$$V = 4 \iint_{\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq Rx; y \geq 0\}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy$$

考虑到被积函数及被积区域的特征, 我们尝试在极坐标下计算

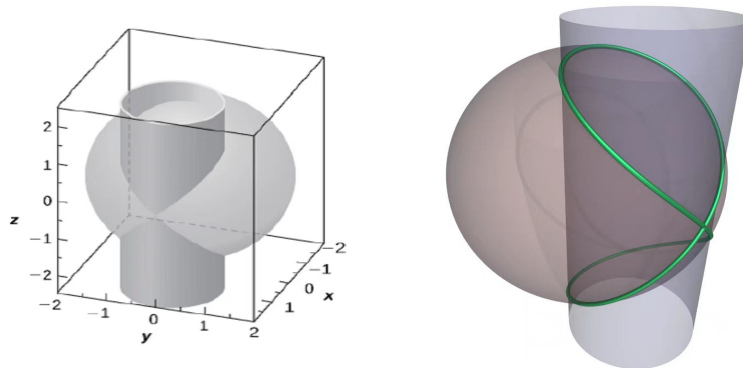


$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint_{D_{\#}} \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \sqrt{R^2 - r^2} r dr \stackrel{r=R \cos \theta}{=} \\
 &= \frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)
 \end{aligned}$$

注记 1.5.4 若用两柱面 $x^2 + y^2 = \pm Rx$ 割球体 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则球体抛出所割下部分体积后的剩余体积为

$$\frac{4\pi R^3}{3} - 2V = \frac{16}{9} R^3$$

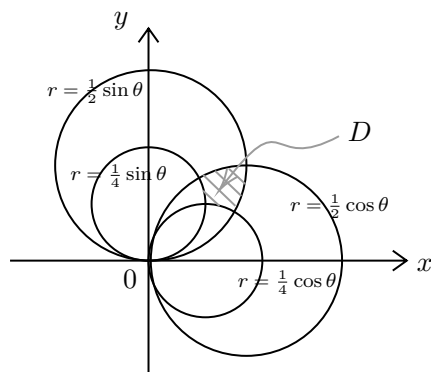
即一个由部分球面和部分圆柱面所围的立体的体积与 π 无关, 否认了有球面作为曲面所围立体体积必与 π 有关的猜想. 这个体积由意大利数学家 Viviani 最早发现, 且圆柱与球面的交线称为 Viviani 曲线.



例 1.5.8 计算 $\iint_D \frac{1}{xy} dx dy$, 其中 D 由下给出

$$D := \left\{ (x, y) \mid 2 \leq \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \leq 4 \right\}$$

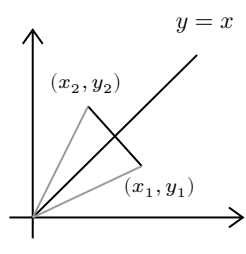
解: 区域 D 的草图如下



显然, 利用极坐标问题会简化. 在极坐标 (r, θ) 下, 区域可描述为

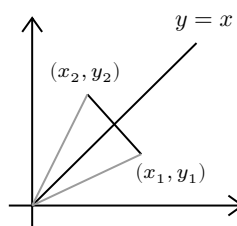
$$D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{1}{4} \cos \theta \leq r \leq \frac{1}{2} \cos \theta; \frac{1}{4} \sin \theta \leq r \leq \frac{1}{2} \sin \theta; \arctan \frac{1}{2} \leq \theta \leq \arctan 2 \right\}$$

注意到 D 关于 $y = x$ 对称, 被积函数 $\frac{1}{xy}$ 的图像关于 $y = x$ 也是对称的



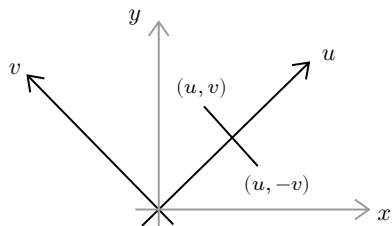
$$\begin{aligned} \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{y_1+y_2}{2} &\implies x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \\ (x_1 - y_1)^2 = (y_2 - x_2)^2 &\implies \underline{x_1^2 + y_1^2} - 2x_1y_1 = \underline{x_2^2 + y_2^2} - 2x_2y_2 \\ &\implies x_1y_1 = x_2y_2 \end{aligned}$$

或考虑旋转变换



$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v \end{aligned}$$

旋转 45 度



则对称变换 $(x_1, y_1) \mapsto (x_2, y_2)$ 变为 $(u, v) \mapsto (u, -v)$, 而 xy 变为 $\frac{u^2 - v^2}{2}$, 它在 $(u, v) \mapsto (u, -v)$ 下显然是不变的.

$$\text{从而所求面积为 } \iint_D \frac{1}{xy} dx dy = 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{1}{4} \cos \theta}^{\frac{1}{2} \sin \theta} \frac{r dr}{r \cos \theta \cdot r \sin \theta} =$$

$$2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \ln \frac{\frac{1}{2} \sin \theta}{\frac{1}{4} \cos \theta} d\theta = 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan \theta} \ln (2 \tan \theta) d \tan \theta = \ln^2 2$$

例 1.5.9 计算积分 $I = \iint_{D: x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy$

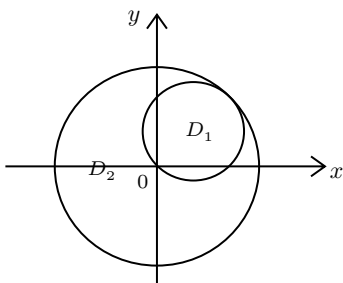
解：本题的特殊之处是被积函数带绝对值符号，需分类讨论，由此会对被积区域有一定约束，需综合考量. 记

$$f(x, y) := \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2$$

注意到，它可转化为

$$f(x, y) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 - \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2$$

当 $f(x, y) \geq 0$ 时， (x, y) 位于单位圆盘和圆 $f(x, y) = 0$ 内部的公共区域上，记该公共区域为 D_1 ，并记 $D_2 := D \setminus D_1$ ，则 f 在 D_2 上为负.



$$\text{那么 } I = \iint_D |f(x, y)| dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \xrightarrow[\text{积分不容易}]{\text{直接在 } D_2 \text{ 上}}$$

$$= 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy - \iint_D f(x, y) dx dy = I_1 - I_2$$

注意到 D 关于 $y = x$ 对称，而 $x + y$ 在对称操作下改变符号（可按上例，相像旋转之后， $x + y$ 就变成 $\sqrt{2}u$ 了）从而它在 D 上的积分为零，故

$$I_2 = - \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \xrightarrow{\text{利用极坐标}} - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{另一方面, } I_1 = 2 \iint_{D_1} \left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 - \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right) dx dy$$

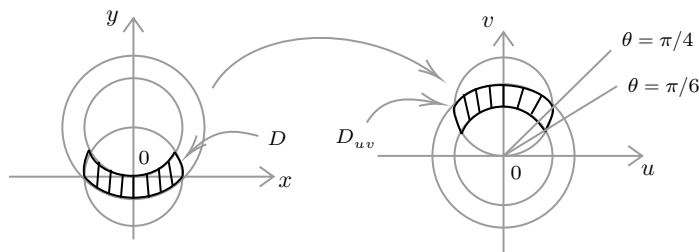
$$\underline{\underline{\begin{cases} x - \frac{1}{2\sqrt{2}} = r \cos \theta \\ y - \frac{1}{2\sqrt{2}} = r \sin \theta \end{cases}}} = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - r^2 \right) r dr = 4\pi \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64} \right)$$

从而

$$I = I_1 - I_2 = 4\pi \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64} \right) + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{16}$$

例 1.5.10 计算 $\iint_D (3x^3 + x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1) dx dy$, 其中 D 为下区域

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + (y-1)^2 \leq 2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$



解: 积分区域关于 y -轴对称, 故 $3x^3 + 2x$ 在 D 上的积分为零. 为简化计算, 令 $u = x, v = 1 - y$, 妙的是, 在 u, v 坐标下, $x^2 + y^2 - 2y + 1 = u^2 + v^2$, 而 $dx dy = du dv$. 故所求积分变为

$$\iint_{D_{uv}} (u^2 + v^2) du dv$$

被积区域变为 $D_{uv} := \{(u, v) \mid 1 \leq u^2 + v^2 \leq 2; u^2 + (v-1)^2 \leq 1\}$. 利用对称性

$$\iint_{D_{uv}} (u^2 + v^2) du dv = 2 \iint_{D_{uv}^{\text{第一象限}}} (u^2 + v^2) du dv$$

$$\begin{aligned} \text{用极坐标 } \begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases} \text{ 所求积分为 } & 2 \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r^3 dr + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^3 dr \\ & = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2^4 \cos^4 \theta}{4} d\theta + \frac{3\pi}{8} = \frac{7\pi}{12} + \frac{7\sqrt{3}}{8} - 2 \end{aligned}$$

1.6 三重积分的计算——累次积分法

对三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$, 如利用平行于坐标平面的三组平面划分 Ω 进行定义和计算, 则常将之记为 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$. 其几何意义是以三维空间中区域 Ω 为“底”, 以四维中的三维图形 $z = f(x, y, z)$ 为“顶”的曲顶的四维柱面的体积.

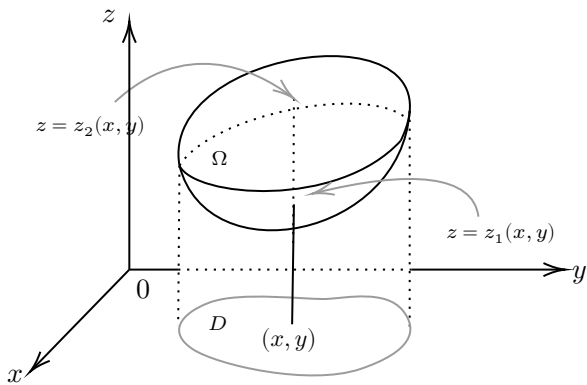
如同 $\iint_D dx dy$ 表示底 D 的面积, 同理 $\iiint_{\Omega} dx dy dz$ 表示底 Ω 的体积.

虽然无法想象四维图像, 但关于二重积分处理的三维几何直觉可顺延到高一维情景, 便可根据积分区域 Ω 的特征设计出不同的积分策略(求体积策略)出来. 不管是多少维的积分, 计算时要义都是: 高维积分通过累次积分转变为低维积分, 最终总会划归为一些列一维定积分求解的.

“3=2+1”模式: 类似于二维积分区域时的 x 和 y 型正则区域, 如果三维积分区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 是以曲面 $S_1: z = z_1(x, y)$ 为底, 曲面 $S_2: z = z_2(x, y)$ 为顶, 而侧面为母线平行于 z 轴的柱面所围成的区域, 那么若 Ω 在 xy -平面上的投影区域为 D , 则 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

我们称可如此表示的区域为 xy 型正则区域 (简称 xy 型区域), 如下图所示



则按“累次积分”的精神, 先固定 $(x, y) \in D$, 将 $f(x, y, z)$ 视为 z 的函数, 对 z 积分 (或先将变量 z 积掉), 得到二元函数

$$F(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

从几何上来说, 这相当于得到了所求“四维体积”的“二维截面”的面积 (因为

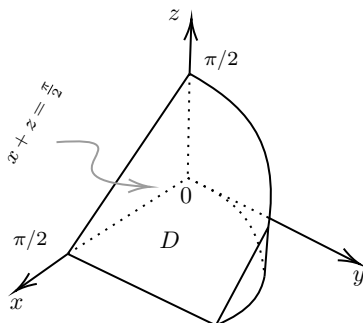
对三维图形 $f(x, y, z)$ ，则为了得到“四维体积”，需对这些“二维截面”在二维区域 D 上堆叠，即 $\iint_D F(x, y) dx dy$. 也就是说

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz\end{aligned}$$

当然上面的二重积分可按之前的累次模式继续划归为定积分计算.

由于这种方法是先在穿过柱状区域内平行于坐标轴的线段上积分，然后再在坐标平面上的投影区域上积分，故称为柱线法或坐标面投影法. 另一方面，这是先一重积分，再二重积分的累次积分（“先后二”），即二重积分里套定积分，故也称为三重积分的“3 = 2 + 1”计算模式. 类似还可讨论 yz 和 xz 型正则区域的情形. 此处从略.

例 1.6.1 计算 $I = \iiint_{\Omega} y \cos(x + z) dx dy dz$. 其中 Ω 是由抛物柱面 $y = \sqrt{x}$ 及平面 $y = 0, z = 0, x + z = \pi/2$ 所围成的区域.

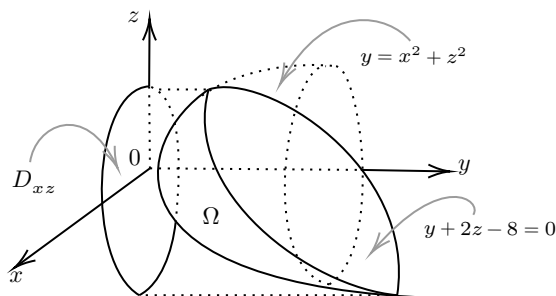


解： Ω 在 xy -平面上的投影区域为 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$ (x -型区域)，且 Ω 可按下表示为 xy -型区域

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2} - x, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned}\text{故 } I &= \iint_D \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y \cos(x + z) dz \right) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x + z) dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y(1 - \sin x) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} x(1 - \sin x) dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 1.6.2 计算抛物面 $y = x^2 + z^2$ 与平面 $y + 2z - 8 = 0$ 所围成的立体 Ω 的体积.



解：如上，绘制处区域 Ω 的草图后，发现将其看成 xz -型比较便利，为此，先求 Ω 在 xz -平面上的投影区域 D_{xz} . 联立两曲面方程

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

得到其相交曲线方程，消去 y ，得到的关于 x, z 的方程便是曲线在 xz 上的投影曲线，即投影区域 D_{xz} 的边界曲线

$$\partial D_{xz} = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 + 2z - 8 = 0\}$$

其所围区域，即 D_{xz} ，则由下描述

$$D_{xz} = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 + 2z - 8 \leq 0\} = \{(x, z) \mid x^2 + (z+1)^2 \leq 9\}$$

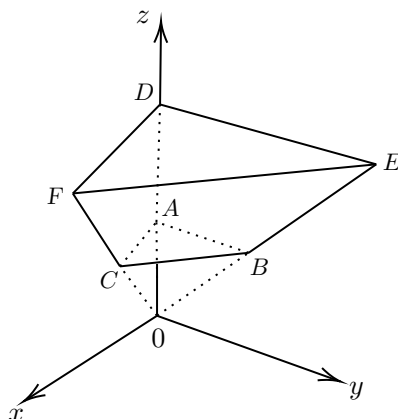
而区域 Ω 可描述为 xz -型，如下

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - 2z; (x, y) \in D_{xz}\}$$

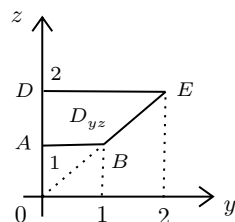
从而 Ω 的体积可计算为

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{D_{xz}} dz dx \int_{x^2+z^2}^{8-2z} dy = \\ &= \iint_{D_{xz}} (8 - 2z - (x^2 + z^2)) dz dx = \iint_{D_{xz}} (9 - x^2 - (z+1)^2) dz dx \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (9 - r^2) r dr = \frac{81}{2} \pi \end{aligned}$$

例 1.6.3 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{\rho^2}$ 其中 ρ 是点 (x, y, z) 到 x 轴的距离, 即 $\rho^2 = y^2 + z^2$, Ω 是以棱台, 其六个顶点为 $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 1, 1)$, $D(0, 0, 2)$, $E(0, 2, 2)$, $F(2, 2, 2)$.



解: 由上图所示, 将 Ω 看成 yz -型区域比较适宜, 此时底面 (Ω 在 yz -平面上的投影) D_{yz} 为梯形 $ABED$. 其描述为



$$D_{yz} = \{(y, z) \mid 0 \leq y \leq z; 1 \leq z \leq 2\}$$

容易计算得到平面 $ACDF$ 的方程是 $x = y$; 而平面 $BCFE$ 的方程为 $y = z$. 由此可看出, 过底面 D_{yz} 上点 (y, z) , 且垂直于底面的直线只与平面 $ACEF$ 相交, 而与平面 $BCFE$ 不相交, 从而可将 Ω 描如下

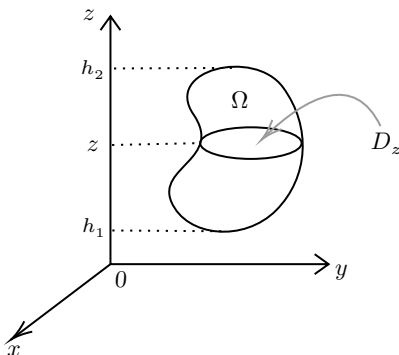
$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq y; (y, z) \in D_{yz}\}$$

故有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{1}{y^2 + z^2} dx dy dz &= \iint_{D_{yz}} dy dz \int_0^y \frac{dx}{y^2 + z^2} = \iint_{D_{yz}} \frac{y}{y^2 + z^2} dy dz \\ &= \int_1^2 dz \int_0^z \frac{y}{y^2 + z^2} dy = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln \frac{2z^2}{z^2} dz = \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

"3 = 1 + 2" 模式: 当区域满足某些特征时, 三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 可按定积分里套二重积分 (“先二后一”) 的累次积分来计算, 故该法也称为 "3 = 1 + 2" 计算模式.

不难推测, 此时区域 Ω 介于某个变量, 比如 z 的某个取值范围之内: $h_1 \leq z \leq h_2$, 亦即区域 Ω 介于 (平行于 xy 的) 平面 $z = h_1$ 和 $z = h_2$ 之间.



换言之, 对固定的 $z \in [h_1, h_2]$, 我们需先 “积掉” 变量 x, y 后, 最后进行 z -定积分, 而这意味着, 对 $\forall z \in [h_1, h_2]$, z -平面: 过 $(0, 0, z)$ 且平行于 xy -平面的平面, 截 Ω 成二维截面 D_z . 若下积分存在, 且由之定义的函数 $F(z)$ 本身也可积

$$F(z) := \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

则三重积分等于 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz =$

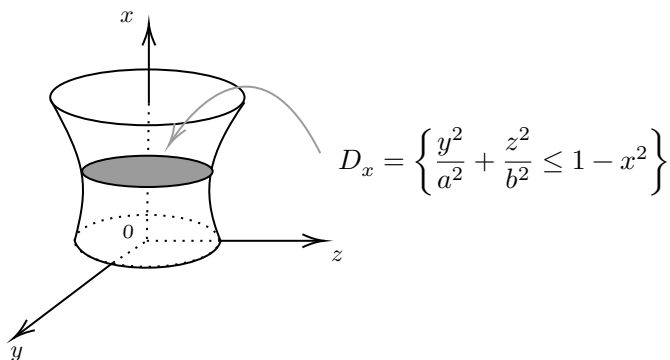
$$\int_{h_1}^{h_2} \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz = \int_{h_1}^{h_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

若 Ω 如上, 则称其为 z -型区域. 同理, 对 x -型和 y -型区域, 类似的考察可写出相应的堆叠截面的积分方式. 这种先二重后一重的积分模式也称为截面法或坐标轴投影法.

例 1.6.3' 对例 1.6.3 中的积分, 其积分区域可写成 z -型区域. 首先, $z = z$ 截面是等腰直角三角形区域 $D_z := \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq z, 0 \leq x \leq y\}$, 而区域 Ω 介于平面 $z = 1$ 和 $z = 2$ 之间, 从而

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{y^2 + z^2} dx dy dz = \int_1^2 dz \iint_{D_z} \frac{dx dy}{y^2 + z^2} = \int_1^2 \int_0^z dy \int_0^y \frac{dx}{y^2 + z^2} = \frac{\ln 2}{2}$$

例 1.6.4 计算积分 $\iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz$, 其中 Ω 由 $x=0$, $x=1$, $x^2+1=\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}$ 所围成.



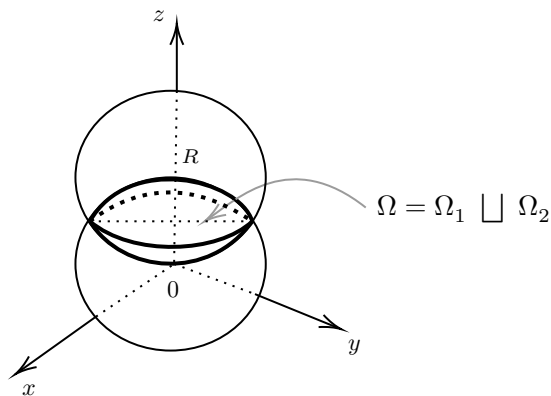
解: 如上图所示, 区域 Ω 介于 $x=0$ 和 $x=1$ 之间, 而 $x=x$ 截面 D_x 如上描述. 从而

$$\iiint_{\Omega} (x+y) dx dy dz = \int_0^1 dx \iint_{D_x} (x+y) dy dz$$

但由于截面 D_x 关于原点对称, 故 y 在其上的积分为零, 从而上积分简化为

$$\int_0^1 dx \iint_{D_x} x dy dz = \int_0^1 x \text{Area}(D_x) dx = \int_0^1 \pi ab x (1+x^2) dx = \frac{3\pi ab}{4}$$

例 1.6.5 求 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 为两球 $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, $x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz$ 的公共部分.



$$\Omega_1 = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \\ 0 \leq z \leq \frac{R}{2} \end{cases}$$

$$\Omega_2 = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \\ \frac{R}{2} \leq z \leq R \end{cases}$$

解：如上图把区域 Ω 分为不相交并： $\Omega_1 \sqcup \Omega_2$ ，用 $z = z$ 截之，其于 Ω_1 上截得的圆 D_z^1 面积为 $\pi(2Rz - z^2)$ ；在 Ω_2 上截得的圆 D_z^2 面积为 $\pi(R^2 - z^2)$ 。故所求积分

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \iiint_{\Omega_1} z^2 dx dy dz + \iiint_{\Omega_2} z^2 dx dy dz = \int_0^{\frac{R}{2}} dz \iint_{D_z^1} z^2 dx dy + \\ &+ \int_{\frac{R}{2}}^R dz \iint_{D_z^2} z^2 dx dy = \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \text{Area}(D_z^1) dz + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 \text{Area}(D_z^2) dz \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} \pi z^2 (2Rz - z^2) dz + \int_{\frac{R}{2}}^R \pi z^2 (R^2 - z^2) dz = \left(\frac{1}{2} \pi R z^4 - \frac{1}{5} \pi z^5 \right) \Big|_0^{\frac{R}{2}} + \\ &+ \left(\frac{1}{3} \pi R^2 z^3 - \frac{1}{5} \pi z^5 \right) \Big|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{59}{480} \pi R^5 \end{aligned}$$

例 1.6.6 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dx dy dz$ ，其中 Ω 为椭球体： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 。

解：不急于求解，先充分利用对称性。积分区域关于三个坐标面都是对称的，且 $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ 中的项 $2xy, 2xz, 2yz$ 当在（关于坐标轴的对称）变换 $x \mapsto -x, y \mapsto -y, z \mapsto -z$ 下是改变符号的，故它们在 Ω 上的积分为零。从而

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \underbrace{\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz}_{I_1} + \underbrace{\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz}_{I_2} + \underbrace{\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz}_{I_3}$$

对 I_1 ，由于被积函数是 x^2 ，故考虑用 $x = x$ 平面截 Ω 比较适宜，即将 Ω 视作 x -型区域。所截椭圆方程及区域 Ω 可描述为

$$D_x := \left\{ (y, z) \mid \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}; \quad \Omega = \{-a \leq x \leq a, (y, z) \in D_x\}$$

故 $I_x \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \int_0^a x^2 dx \iint_{D_x} dy dz = 2 \int_0^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4}{15} \pi a^3 bc$ 。又据对称性，

知 $I_2 = \frac{4}{15} \pi ab^3 c, I_3 = \frac{4}{15} \pi abc^3$ 。从而

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4}{15} \pi abc (a^2 + b^2 + c^2)$$

1.7 三重积分的计算——变量替换法；柱面坐标和球面坐标

如同对二重积分进行换元处理，类似地，对三重积分，我们有

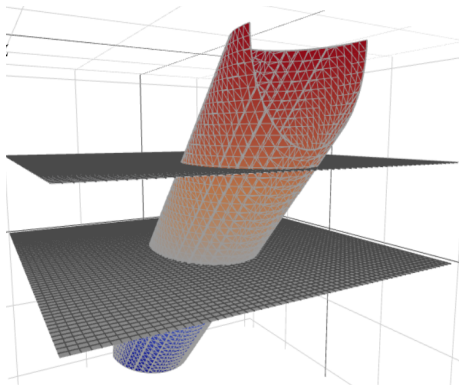
定理 1.7.1 设变换 $T: \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$ 是从 uvw -空间中的有界闭区域 Ω' 到 xyz -空间中的有界闭区域 Ω 的一个连续一对一映射（可放松为除在至多有限个曲面上不一对一的映射），也就是说变换的 *Jacobi* 行列式在 Ω' 不为零，即

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0, (u, v, w) \in \Omega' \text{ (或在低维子集上不为零)}$$

则若 $f(x, y, z) \in C(\Omega)$ ，那么有如下积分换元公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

例 1.7.1 计算 $\iiint_{\Omega} (y-z) \arctan z dx dy dz$ ，其中区域 Ω 由曲面 $x^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 = R^2$ 和平面 $z=0, z=h$ 所围成.



解：所给区域是倾斜圆柱被两平行平面所截部分，可按截面法直接求解. $\forall z \in [0, h]$ ，区域 Ω 的 $z=z$ 截面是椭圆 $D_z: x^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 = R^2$. 故按照“3=1+2”，有

$$\iiint_{\Omega} (y-z) \arctan z dx dy dz = \int_0^h dz \iint_{D_z} (y-z) \arctan z dx dy \stackrel{D_z \text{ 关于 } y\text{-轴对称}}{=}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^h \arctan z \, dz \int_{z-\sqrt{2}R}^{z+\sqrt{2}R} (y-z) \, dy \int_0^{\sqrt{R^2 - \frac{1}{2}(y-z)^2}} dx \\
&= 2 \int_0^h \arctan z \, dz \int_{z-\sqrt{2}R}^{z+\sqrt{2}R} (y-z) \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}(y-z)^2} \, dy \stackrel{\frac{y-z}{\sqrt{2}}=:w}{=} \\
&= 2 \int_0^h \arctan z \, dz \underbrace{\int_{-R}^R (\sqrt{2}w) \sqrt{R^2 - w^2} \sqrt{2} \, dw}_0 = 0
\end{aligned}$$

利用变量替换：令 $\begin{cases} x = u \\ y - z = \sqrt{2}v \\ z = w \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} x = u \\ y = \sqrt{2}v + z \\ z = w \end{cases}$ 故变换的 *Jacobi* 行列式为

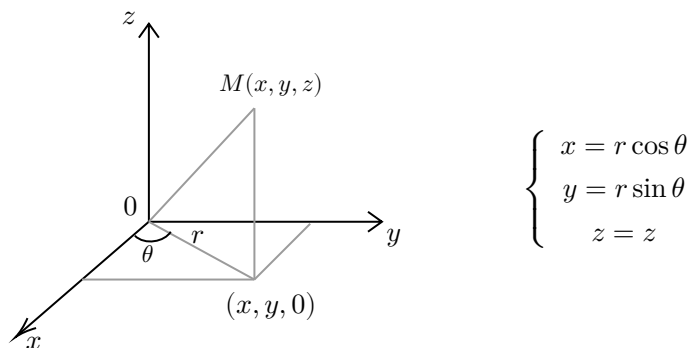
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2}$$

且在 u, v, w 下，区域 Ω 可描述为 $\Omega = \{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 \leq R^2, 0 \leq w \leq h\}$ ，从而

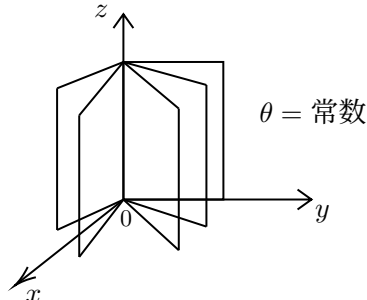
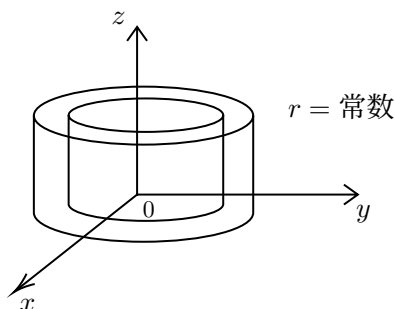
$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} (y-z) \arctan z \, dx dy dz &= \int_0^h dw \iint_{u^2+v^2 \leq R^2} \sqrt{2}v \arctan w \sqrt{2} \, du dv \\
&= 2 \int_0^h \arctan w \, dw \iint_{u^2+v^2 \leq R^2} v \, du dv \stackrel{\text{对称性}}{=} 0
\end{aligned}$$

处理三重积分时，较常用的坐标系是柱面坐标系和球坐标系，下面我们分别介绍。

柱面坐标： \mathbb{R}^3 中的点 $M(x, y, z)$ 投影到 xy -平面上的点 $(x, y, 0)$ 用极坐标表示便得到了点的柱面坐标 (*cylindrical coordinate*): (r, θ, z) ，其图示及其与直角坐标的关系见下图



柱面坐标 (r, θ, z) 的坐标曲面族分别为 $r = \text{常数}$, $\theta = \text{常数}$, $z = \text{常数}$. 其中, $r = \text{常数}$ 是圆柱面, 故名柱面坐标系.



由于坐标变换的 *Jacobi* 行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

故得到柱面坐标下的积分计算公式如下

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz}$$

通常, 若 $\Omega' = \{(r, \theta, z) \mid z_1(r, \theta) \leq z \leq z_2(r, \theta); (r, \theta) \in D_{r\theta}\}$, 则

$$\iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz = \iint_{D_{r\theta}} r dr d\theta \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz$$

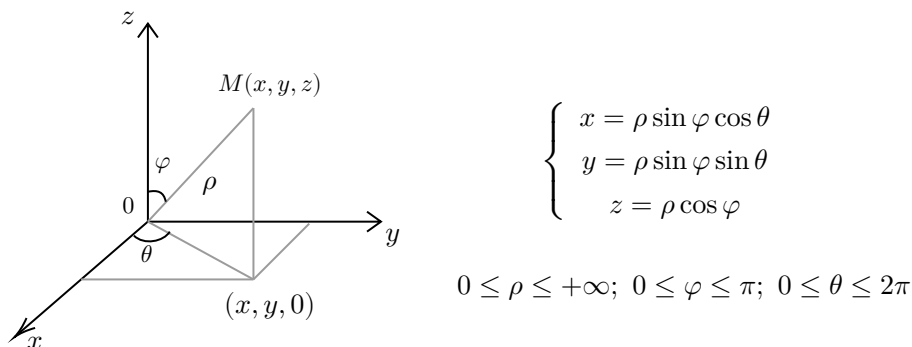
若 $D_{r\theta} = \{(r, \theta) \mid r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta); \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2\}$, 则进一步有

$$\iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr d\theta \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz$$

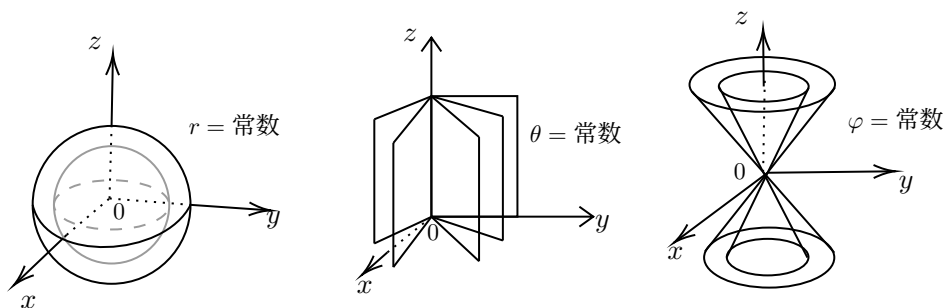
当然, 如果知道区域 D 介于平面 $z = z_1$ 和 $z = z_2$ 之间, 且 z -截面 D_z 可方便用 r, θ 加以表述, 则

$$\iiint_{\Omega'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz = \int_{z_1}^{z_2} dz \iint_{D_z} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta$$

球面坐标系：设 $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ，与柱面坐标不同，我们记 ρ 为点 M 到坐标原点的距离； φ 为位置向量 \overrightarrow{OM} 相对于 z 轴正向的夹角； θ 为 M 在 xy -平面上的投影点 (x, y) 相对于正 x -轴的倾角 ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)。则任意 $M(x, y, z) (\neq \mathbf{0})$ ，都有唯一的三元数组 (ρ, φ, θ) 与之对应，称为点 M 的球坐标 (spherical coordinate)。



球坐标系的三族坐标曲面 $\rho = \text{常数}$ ； $\theta = \text{常数}$ ； $\varphi = \text{常数}$ 的示意图如下，注意到 $\rho = \text{常数}$ 给出一族同心圆，故该坐标系得名球面坐标系。



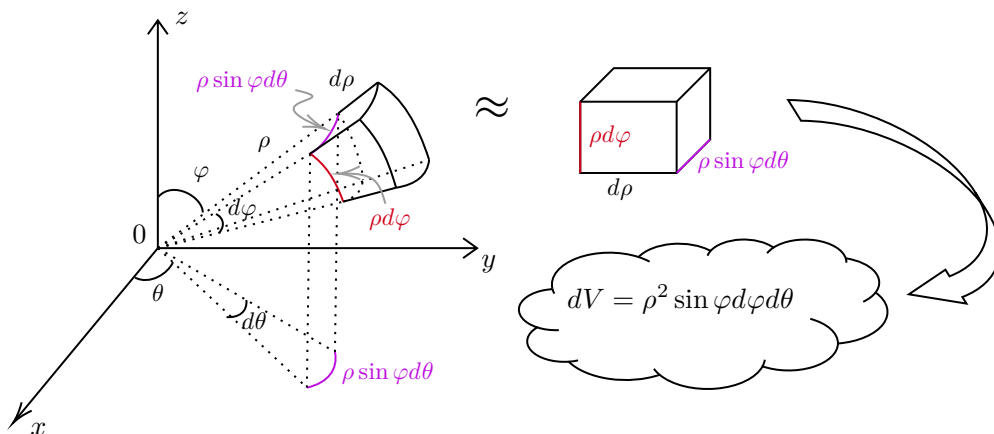
由于坐标变换的 *Jacobi* 行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi$$

故得到球面坐标下的积分计算公式如下

$$\boxed{\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta}$$

球面坐标下的体积微元 $dV = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$ 可由下图直观可见



若 $\Omega' := \{(\rho, \varphi, \theta) \mid \rho_1(\varphi, \theta) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi, \theta), \varphi_1(\theta) \leq \varphi \leq \varphi_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, 则

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega'} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi, \theta)}^{\rho_2(\varphi, \theta)} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho \end{aligned}$$

例 1.7.2 计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, 其中 Ω 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = h$ 所围的闭区域.

解: 利用柱面坐标 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ 在此变换下 Ω 对应于 $r\theta z$ 空间的区域

$$\Omega' = \{(r, \theta, z) \mid r^2 \leq z \leq h, 0 \leq r \leq \sqrt{h}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

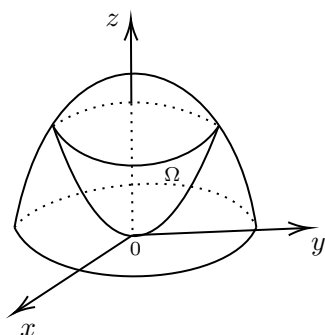
$$\text{则 } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} r^2 r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{h}} r^3 dr \int_{r^2}^h dz = \frac{\pi}{6} h^3$$

例 1.7.3 计算 $\iiint_{\Omega} z dV$, 其中 Ω 由曲面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 与 $x^2 + y^2 = 3z$ 围成.

解: 两曲面的交线方程为

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

故交线在 xy -平面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$.



则 Ω 在柱面坐标下表示为 $D_{r\theta} = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{3}\}$, 则

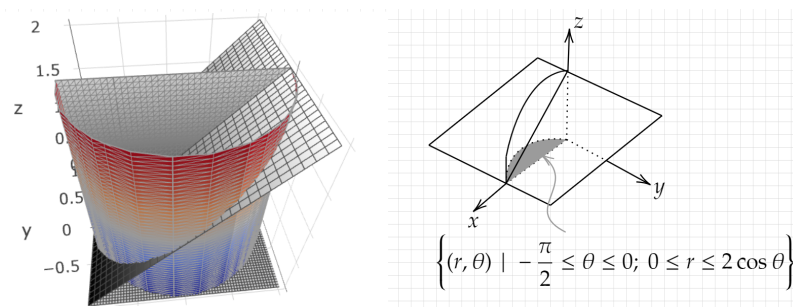
$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dV &= \iint_{D_{r\theta}} r dr d\theta \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} z dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} z dz \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r}{2} \left(4 - r^2 - \frac{r^4}{9} \right) dr = \pi \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{54} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{13}{4} \pi \end{aligned}$$

例 1.7.4 将累次积分 $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 dy \int_0^x f(x, y, z) dz$ 在柱面坐标下化为累次积分.

解: 由上累次积分的形式, 可看出积分区域 Ω 介于平面 $x=0$ 和 $x=2$ 之间, 但对给定的 x , 变量 y 介于 $-\sqrt{2x-x^2}$ 和 0 之间, 从而知道 Ω 在 xy -平面上的投影区域为

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq 0\}$$

而 z 介于平面 $z=0$ 和平面 $z=x$ 之间. 由此可判断积分区域是半圆柱 $\{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy}\}$ 被平面 $z=0$ 和 $z=x$ 所截部分. 如下图



其中底面 D_{xy} 在平面极坐标下的表示为

$$D_{r\theta} = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos \theta; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \right\}$$

在柱面坐标 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ 下, 区域 $\Omega' = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq z \leq r \cos \theta, (r, \theta) \in D_{r\theta}\}$.

故

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{2 \cos \theta} f dr \int_0^{r \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz$$

例 1.7.5 计算单位球 $\Omega := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 的体积.

解: 利用球坐标, 所求体积计算为

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^1 = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

例 1.7.6 求椭球体 $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ 的体积.

解: 引入广义球坐标: $\begin{cases} x = a\rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = b\rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = c\rho \cos \varphi \end{cases}$, 则 Ω 变为

$$\Omega' = \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

且变换的 *Jacobi* 行列式为 $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = abc\rho^2 \sin \varphi$, 故 $\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dV$

$$= \iiint_{\Omega'} abc\rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = abc \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{4\pi}{3} abc$$

例 1.7.7 求几何体 $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 \leq ax \ (a, b, c > 0) \right\}$ 的体积.

解：在广义极坐标 $\begin{cases} x = a\rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = b\rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = c\rho \cos \varphi \end{cases}$ 下，区域 Ω 的边界曲面为

$$\partial\Omega' = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \mid \rho^3 = a^2 \sin \varphi \cos \theta, 0 \leq \varphi \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

上面 θ 的范围是由 $x \geq 0$ 这一隐形条件决定的，则 Ω 本身可表示为

$$\Omega' := \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq \sqrt[3]{a^2 \sin \varphi \cos \theta}, 0 \leq \varphi \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

而变换的 *Jacobi* 矩阵为 $J = abc\rho^2 \sin \varphi$ ，从而所求体积为

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega'} abc\rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = abc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{a^2 \sin \varphi \cos \theta}} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{a^3 bc}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi a^3 bc}{3} \end{aligned}$$

例 1.7.8 求曲面 $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$ 所围立体的体积.

解：由曲面方程知 $y \geq 0$ ，故所围立体位于 xz -坐标平面一侧的四个卦限里头. 由于曲面方程在 $x \mapsto -x$ 和 $z \mapsto -z$ 下都是不变的. 故它所围成的区域关于 yz -平面和 xy -平面都是对称的，故我们只需计算所围立体在第一卦限 ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) 中的体积，然后四倍之即可.

在球坐标下，所围立体在第一卦限的部分可表示为

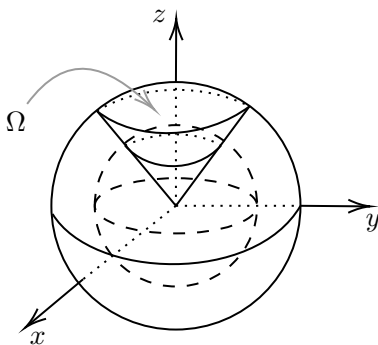
$$\Omega = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \sqrt[3]{\frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \text{vol}(\Omega) &= 4 \iiint_{\Omega} dV = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} d\varphi = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} d\varphi \\ &\stackrel{t=\tan \varphi}{=} \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

例 1.7.9 设 $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ 由 $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ 所围, 计算 f 关于区域 Ω 的积分平均值

$$\frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

解: 区域 Ω 是介于两球面之间的圆锥内部. 其示意图如下



在球坐标下, $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$, 区域 Ω 表示为

$$\Omega' = \{(\rho, \varphi, \theta) \mid 2 \leq \rho \leq 4; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

故

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Omega'} \rho^3 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_2^4 \rho^3 d\rho \\ &= 2\pi \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \frac{\rho^4}{4} \Big|_2^4 = 60\pi(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

而区域 Ω 的体积 $\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega'} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta =$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_2^4 \rho^2 d\rho = 2\pi \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \frac{\rho^3}{3} \Big|_2^4 = \frac{56\pi(2 - \sqrt{2})}{3}$$

故

$$\frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \frac{45}{16}$$

例 1.7.10 设 $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$, 其中 f 连续, 且 $f(1) = 1$, 计算 $F'(1)$.

解: 在球坐标下, $f(x^2+y^2+z^2) = f(\rho^2)$, 积分区域为

$$\Omega = \{(\rho, \varphi, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq t, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } F(t) &= \iiint_{\Omega} f(\rho^2) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^t f(\rho^2) \rho^2 d\rho = 4\pi \int_0^t f(\rho^2) \rho^2 d\rho \end{aligned}$$

由于 f 连续, 故 $F(t)$ 可导, 且

$$F'(t) = 4\pi \frac{d}{dt} \int_0^t f(\rho^2) \rho^2 d\rho = 4\pi t^2 f(t^2)$$

从而 $F'(1) = 4\pi f(1) = 4\pi$.

例 1.7.11 计算 $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$

解: 这里的主要问题是积函数在单位球的边界 $S^2: x^2+y^2+z^2=1$ 上是奇异的 (无穷大), 即 I 是反常重积分, 按照一元时的处理思路, 只需用极限手段逼近. 记

$$\Omega_{\epsilon} := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq \epsilon\} \quad \forall \epsilon < 1$$

则 $I_{\epsilon} = \iiint_{\Omega_{\epsilon}} \dots$ 是有意义的, 利用球坐标, 它可化为

$$I_{\epsilon} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\epsilon} \frac{\rho^2 d\rho}{(1-\rho^2)^p} = 4\pi \int_0^{\epsilon} \frac{\rho^2 d\rho}{(1-\rho^2)^p}$$

$$\text{故 } I = \lim_{\epsilon \rightarrow 1} I_{\epsilon} = 4\pi \int_0^1 \frac{\rho^2 d\rho}{(1-\rho^2)^p} \stackrel{r=\sin t}{=} 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{1-2p} t dt$$

$$= 2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right) = \begin{cases} \text{收敛} & 1-p > 0 \\ \text{发散} & 1-p \leq 0 \end{cases}$$

1.8 一般 n 重积分的计算及趣例 (*)

首先, 二重和三重积分的换元公式可推广到一般 n -重积分的形式.

定理 1.8.1 设

$$T: \begin{cases} x_1 = x_1(y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ x_n = x_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

是从 y_i -空间 \mathbb{R}^n (坐标为 y_i) 中某具有分片光滑边界的有界闭区域 Ω' 到 x_i -空间 \mathbb{R}^n (坐标为 x_i) 中具有分片光滑边界的有界闭区域 Ω 的一个一一映射, 即 $T^{-1}(\Omega) = \Omega'$. 且 $x_i(y_1, \dots, y_n)$ 都具有连续偏导数, 则有 (其中 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.)

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\Omega'} f(x_1(\mathbf{y}), \dots, x_n(\mathbf{y})) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 \cdots dy_n$$

在例 1.7.5 中我们计算了三维单位球的体积是 $\frac{4\pi}{3}$. 下面将该结果推广到一般 n -维.

例 1.8.1 计算 n -维单位球体 $B_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ 的体积.

解: 三维时, 利用球坐标容易求解, 这是因为球坐标的形式与三维球面的参数化相协. 推广时, 自然希望对 n -维球面有自然的参数方式, 并由此得到高维球面坐标.

$x^2 + y^2 = r^2$
 $x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
 $x = r \sin \varphi \cos \theta$
 $y = r \sin \varphi \sin \theta$
 $z = r \cos \varphi$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2$
 ???

除 r 之外, 需三个角度参数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, 使得 $r \sin \varphi_1$ 为从 4 维投影到上 3 维球中的径向长度, 从而转化为上情形, 即

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1 \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ x_4 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_3^2 + x_4^2 &= r^2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= r^2 \sin^2 \varphi_1 + r^2 \cos^2 \varphi_1 = r^2 \end{aligned}$$

由此，一般的递归模式便明了了。

比如 $n = 5$ 时，对 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = r^2$ ，除 r 外，需要 4 个角度参数 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ 。那么 $r \sin \varphi_1$ 就是投影到 4 维球中的径向长度，从而化归到 $n = 4$ 时的情形，即

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1 \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ x_4 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_4 \\ x_5 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_4 \end{cases} \quad 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi_1, \dots, \varphi_3 \leq \pi, 0 \leq \varphi_4 \leq 2\pi$$

由此递归下去，我们可得一般的 \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) 上的球坐标

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1 \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ \dots \\ x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots + \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1} \\ x_n = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots + \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \end{cases}$$

其中 $0 \leq r \leq +\infty$, $0 \leq \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \leq \pi$, $0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi$ 。该变换的 *Jacobi* 行列式为

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}$$

则在球坐标下， n -维单位球 B_n 可表示为

$$\Omega_n = \{(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \leq \pi, 0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi\}$$

从而 n -维单位球 B_n 的体积可计算为

$$\begin{aligned} V_n &:= \text{vol}(B_n) = \int_{B_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{\Omega_n} r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin^2 \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2} dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-2} d\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^1 r^{n-1} dr \right) \left(\int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \right) \cdots \left(\int_0^\pi \sin^2 \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \right) \cdot \\
&\cdot \left(\int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \right) = \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!}, & n = 2m \\ \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)!!} & n = 2m+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

注意，在上面的计算中我们用到了如下公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2} & n = 2m \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} & n = 2m+1 \end{cases}$$

自然地，我们希望知道半径为 R 的 n -维球

$$B_n(R) := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$$

的体积. 除在球坐标下直接积分为，也可考虑相似变换如下

$$x_1 = Rx'_1, x_2 = Rx'_2, \dots, x_n = Rx'_n$$

则将 $B_n(R)$ 转化为 $B_n = B_n(1)$. 该变换的 *Jacobi* 行列式为

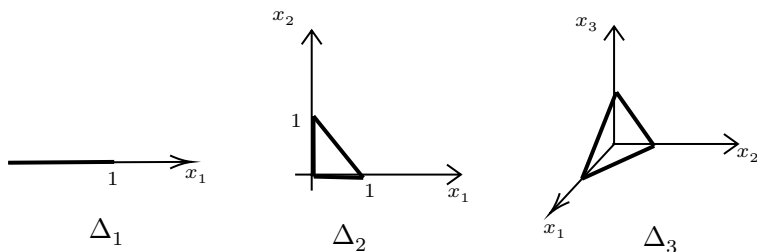
$$J = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(x'_1, \dots, x'_n)} = R^n$$

故

$$\begin{aligned}
\text{vol}(B_n(R)) &= \int_{B_n(R)} dx_1 \cdots dx_n = \int_{B_n(1)} |J| dx'_1 \cdots dx'_n = \\
R^n \text{vol}(B_n) &= \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!} R^{2m}, & n = 2m \\ \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)!!} R^{2m+1}, & n = 2m+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

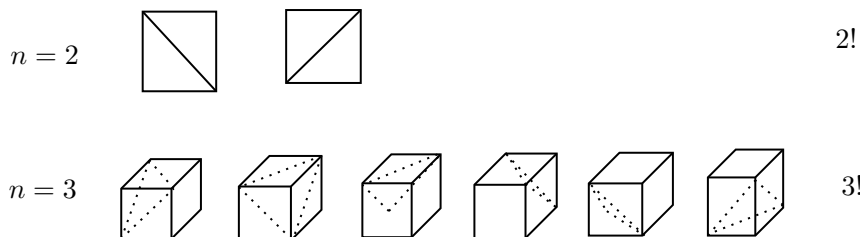
例 1.8.2 计算如下标准单纯形 (simplex) 的体积.

$$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$$



猜测: 记 Δ_n 的体积为 V_n , 则由上图, 显然有 $V_1 = 1$; $V_2 = \frac{1}{2}$; $V_3 = \frac{1}{6}$. 自然要问: 有无规律可寻?

不难发现, Δ_2 是 \mathbb{R}^2 中单位正方形之半, 而 Δ_3 是 \mathbb{R}^3 中单位立方体之六分之一. 其中奥妙也不难发现: 单纯形 Δ_n 是 \mathbb{R}^n 中 n -个“基点” $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, \dots, 1)$ 相互连接后的面与诸坐标面所围的立体.



而在一个 n 维单位“立方体”中, 得到标准单纯形的方式有 $n!$, 故由对称性, 单纯形的体积应是 $\frac{1}{n!}$, 即 $V_n = \frac{1}{n!}$.

证明: 根据标准单纯形的描述, 直接用累次积分比较适宜

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{\Delta_n} \dots \int dx_1 \dots dx_n = \int_0^1 dx_n \int_{\Delta_{n-1}(1-x_n)} \dots \int dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \frac{V_{n-1}(1-x_n) := \text{vol}(\Delta_{n-1}(1-x_n))}{\int_0^1 V_{n-1}(1-x_n) dx_n} \xrightarrow{\text{做相似变换}} \\ V_{n-1}(1) \int_0^1 (1-x_n)^{n-1} dx_n &= \frac{V_{n-1}}{n} \implies V_n = \frac{V_{n-1}}{n} = \frac{V_{n-2}}{n(n-1)} = \dots = \frac{V_1}{n!} = \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

记 $\Delta_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq a\}$

做标度变化（或相似变换），易知其体积为 $\frac{a^n}{n!}$ 。又注意到，如将对称性考虑其中，则不难看出上面单纯性亦可描述如下

$$\Delta_1 : 0 \leq x_1 \leq 1; \quad \Delta_2 : 0 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1; \quad \Delta_3 : 0 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1$$

$$\text{一般地} \quad \Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1 \leq 1\}$$

在该表示下，其面积为 $1/n!$ 就更容易理解了，因为在 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 的任意置换下， Δ_n 的形状是不变的，只是描述其的顶点字母变换了而已，而总共有 $n!$ 种可能置换。

函数的泰勒展开中会出现阶乘因子，下面通过在单纯形上的积分给之以诠释。

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x_1) dx_1 \quad a < x_1 < x$$

$$f'(x_1) = f'(a) + \int_a^{x_1} f''(x_2) dx_2 \quad a < x_2 < x_1$$

$$f''(x_2) = f''(a) + \int_a^{x_2} f'''(x_3) dx_3 \quad a < x_3 < x_2$$

... ..

$$f^{(n)}(x_n) = f^{(n)}(a) + \int_a^{x_n} f^{(n+1)}(x_{n+1}) dx_{n+1} \quad a < x_{n+1} < x_n$$

从最后一个式子开始逐次代入前一式，得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x \left(f'(a) + \int_a^{x_1} f''(x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \left(\int_a^{x_1} f''(x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \iint_{a < x_2 < x_1 < x} \left(f''(a) + \int_a^{x_3} f'''(x_3) dx_3 \right) dx_2 dx_1 \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^n \int \dots \int_{a < x_k < \dots < x_1 < x} f^{(k)}(a) dx_k \dots dx_1}_{T_n(x)} + \underbrace{\int \dots \int_{a < x_{n+1} < \dots < x_1 < x} f^{(n+1)}(x_{n+1}) dx_{n+1} \dots dx_1}_{R_n(x)} \end{aligned}$$

通过坐标平移: $\{a < x_k < \cdots < x_1 < x\}$ 得体积为 $V_k(x-a) = \frac{(x-a)^k}{k!}$, 从而

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \int \cdots \int_{a < x_k < \cdots < x_1 < x} f^{(k)}(a) dx_k \cdots dx_1 = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

此即 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 n -阶泰勒多项式, 且其在 $x=a$ 附近近似 $f(x)$ 的误差为

$$R_n(x) = \int \cdots \int_{a < x_{n+1} < \cdots < x_1 < x} f^{(n+1)}(x_{n+1}) dx_{n+1} \cdots dx_1$$

由此看出, 若 $|f^{(n+1)}(x_{n+1})| \leq M$, 则对误差项可做如下估计

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \int \cdots \int_{a < x_{n+1} < \cdots < x_1 < x} f^{(n+1)}(x_{n+1}) dx_{n+1} \cdots dx_1 \right| \\ &\leq M \left| \int \cdots \int_{a < x_{n+1} < \cdots < x_1 < x} dx_{n+1} \cdots dx_1 \right| = M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

注记 1.8.1 上面计算积分时实际上将积分区域描述中的 " $<$ " 全都改写成 " \leq " 了, 这不影响可积性及积分值, 因为这相当于是在被积区域内多添了几个点, 而被积函数假定是有界可积的 (即考虑的积分都不是反常的). 当然如果积分是反常的, 那么函数在反常点发散的程度 (阶) 将深刻影响积分的属性, 下面的例子对此有进一步阐发.

例 1.8.3 考察单位圆盘 $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上函数 $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{p}{2}}}$ 的积分.

解: 原点 $(0, 0)$ 是函数的奇异点, 所以在积分 f 时需绕开该点, 即考察去心单位圆盘

$$D_\epsilon := \{(x, y) \mid \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

引入极坐标, 则它可描述为 $D'_\epsilon = \{(r, \theta) \mid \epsilon \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 故

$$\iint_{D_\epsilon} f(x, y) dx dy = \iint_{D'_\epsilon} \frac{1}{r^p} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\epsilon^1 \frac{dr}{r^{p-1}} = 2\pi \int_\epsilon^1 \frac{dr}{r^{p-1}}$$

这是通常反常积分, 易见 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}} dx dy = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-p}, & p < 2 \\ \text{发散}, & p \geq 2 \end{cases}$

注记 1.8.2 特别地，我们看到，如果 $p = 1$ ，则经过极坐标变换后，积分就转化为

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy = \iint_{(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]} \frac{1}{r} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr = 2\pi$$

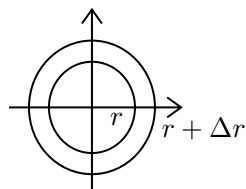
“奇性”就这么表观地消失了。当然，我们得探明表象背后的根由。表面上来看，是由于极坐标下的面积微元 $d\sigma = r dr d\theta$ 中多出了各 *Jacobi*（面积拉伸）因子： r 导致的，但该 *Jacobi* 因子的出现也反应了极坐标本身的某种奇性！

即 $r = 0$ 时坐标变换的 *Jacobi* 行列式为零，也就是说，在 $r = 0$ （即坐标原点）处，从极坐标 (r, θ) 到笛卡尔坐标 (x, y) 的变换不是一对一的。直观上，这是不难理解的，因为在原点处，虽然 $r = 0$ 是确定的，但 θ 却是“模棱两可”的，即它可以取 $[0, 2\pi]$ 中的任意值，这就破坏了点和其坐标表示之间的唯一对应性要求。

当然，因为只是在一个孤立点处有歧义，这并不影响极坐标的整体有效性。特别地，如果考虑极坐标下的积分，如果被积函数（以极坐标描述）在定义区域上本身是有界连续的，那么即便定义区域内包含“奇异点” $(0, \theta)$ ，但由于它是孤立点，根本不改变积分的可积性及其积分值。严格来说，处理时需先“挖去”原点处的一个微小圆盘，在该圆盘外积分有意义，再令微半径趋于零，并考察积分的极限即可。显然，只要被积函数在原点附近有界连续，则极限一定存在。故我们无须一再重复这一过程，在实际应用中只需默许其有效性。

由此可见，面积微元 $d\sigma = r dr d\theta$ 中的 r 本身就是 $r = 0$ 处的坐标“奇性”表征，那么，上面的计算表明： $p = 1$ 时被积函数在原点处的奇异性恰好“抵消”了坐标在原点处的奇异性，从而有了反常性的表观消失！

注记 1.8.3 有意思的是，上积分表明： $\frac{1}{r}$ 在圆盘上的积分给出的是圆盘的边界圆的周长。从直观上来说，1 在圆盘 D 上积分给出的圆盘的面积，而圆盘面积是由不同半径的小圆环的面积“堆积”而成的，即



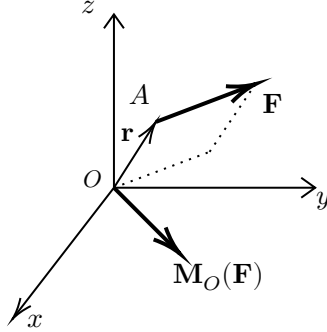
$$\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \Delta r + o(\Delta r)^2$$

则积分 $\iint_D \frac{d\sigma}{r}$ 可解释为：这些小圆环面积的“加权堆积”——在 (r, θ) 处以 $\frac{1}{r}$ 为权重，故所积实际上是 $\frac{1}{r} \cdot 2\pi r \Delta r = 2\pi \Delta r$ 的“堆积”。从而 $\iint_D \frac{d\sigma}{r}$ 就是圆盘边界圆 ∂D 的面积，即 $2\pi \times$ 半径。

2 重积分的物理应用

2.1 重心

O 是空间一固定点, 设力 \mathbf{F} 作用于点 A , 且 A 相对于 O 的径矢为 \mathbf{r} , 即 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$, 则 \mathbf{F} 对 A 的力矩为 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

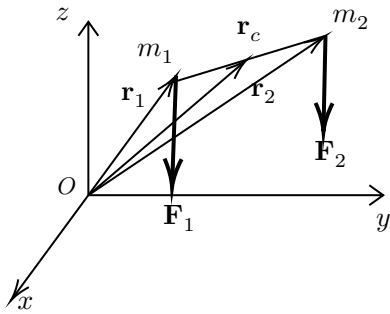


显然, 力矩衡量力对绕定点 O 转动的作用效果的. 为了衡量力对绕定轴转动刚体的作用效果, 我们需要力对轴的矩的概念.

比如力 \mathbf{F} 相对于 z 轴的 (一阶静力) 矩衡量在 \mathbf{F} 的作用下, A 绕 z 转动的效力, 显然, 只有垂直于 z 轴的力 \mathbf{F}_{xy} (即 \mathbf{F} 在 xy -平面上的投影) 才有效力, 故将其定义为

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{xy})$$

同理可定义 $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y$. 考虑两个质点的系统, 设其质量分别为 m_1, m_2 , 则其所受重力为 $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{g}$ ($i = 1, 2$).



$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \times \mathbf{r}_2 = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \times \mathbf{r}_C$$

该系统的重心定义为唯一的点, 使得其径矢 \mathbf{r}_C 满足如下方程

$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \times \mathbf{r}_2 = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \times \mathbf{r}_C$$

即将两力矩之和等效为合力相对于重心的力矩. 由于重力方向是一致的, 且由于各力矩方向亦一致, 从而有

$$F_1 \mathbf{r}_1 + F_2 \mathbf{r}_2 = (F_1 + F_2) \mathbf{r}_C \implies \mathbf{r}_C = \frac{F_1 \mathbf{r}_1 + F_2 \mathbf{r}_2}{F_1 + F_2}$$

同理, 对 k 个质点的系统 (质量分别为 $m_i, i = 1, \dots, k$), 则其重心的径矢 \mathbf{r}_C 为

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i F_i \mathbf{r}_i}{\sum_i F_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

设 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\mathbf{r}_C = (x_C, y_C, z_C)$, 则重心坐标为

$$x_C = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i}, \quad z_C = \frac{\sum_i z_i m_i}{\sum_i m_i}$$

其中 $\sum_i x_i F_i$ 为质点系对 yz 平面的一阶矩, 同理 $\sum_i y_i F_i$ 和 $\sum_i z_i F_i$ 分别为质点系对 xz 平面和 xy 平面的一阶矩.

更一般地, 若物体是连续体, 则将其细分, 每一微小部分等效为质量为 m_i 的质点, 则可按上公式计算其重心坐标. 特别地, 若物体的质量分别是均匀的 (即其质量密度 μ 为常数), 则利用微元法, 可知其重心坐标为

$$x_C = \frac{\iiint_{\Omega} x dV}{vol(\Omega)}, \quad y_C = \frac{\iiint_{\Omega} y dV}{vol(\Omega)}, \quad z_C = \frac{\iiint_{\Omega} z dV}{vol(\Omega)}$$

若质量分布不均匀, 即密度 $\mu(x, y, z)$ 非常数, 则有

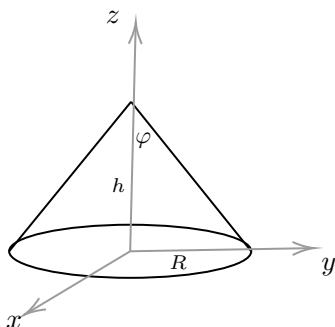
$$x_C = \frac{\iiint_{\Omega} x \mu(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV}, \quad y_C = \frac{\iiint_{\Omega} y \mu(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV}, \quad z_C = \frac{\iiint_{\Omega} z \mu(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV}$$

其中 $\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV$ 为物体的总质量.

重心是物体上的确定点, 不依赖坐标系的选取. 若物体形状具有对称性, 且质量分布均匀, 则重心位于对称轴上. 在实际计算中充分利用对称性可大大简化计算.

例 2.1.1 计算半径为 R , 高为 h 的均匀圆锥体的重心.

解：按下图，设重心位置为 (x_C, y_C, z_C) ，由对称性 $x_C = y_C = 0$ 。下计算 z_C 。



$$\begin{aligned}
 z_C &= \frac{\iiint_{\Omega} z dV}{\iiint_{\Omega} dV} = \frac{\int_0^h z dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h-z}{h}R} r dr}{\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{h-z}{h}R} r dr} = \frac{\int_0^h \pi z \left(\frac{h-z}{h}R\right)^2 dz}{\int_0^h \pi \left(\frac{h-z}{h}R\right)^2 dz} \\
 &= \frac{\int_0^h z(h-z)^2 dz}{\int_0^h (h-z)^2 dz} = \frac{\left(\frac{h^2 z^2}{2} - \frac{2}{3} h z^3 + \frac{z^4}{4}\right) \Big|_0^h}{\frac{(z-h)^3}{3} \Big|_0^h} = \frac{\frac{h^4}{12}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{h}{4}
 \end{aligned}$$

故圆锥的重心坐标为 $(0, 0, \frac{h}{4})$ ，它与锥底半径 R 的大小无关。

例 2.1.2 设有一半径为 R 的球体， P_0 是球表面上的一点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比（设比例常数为 $k > 0$ ），求此球体的重心位置。

解：以球心为原点建立坐标系，使 P_0 点位于 x 轴的正半轴上，即 P_0 的坐标为 $(R, 0, 0)$ ，则根据题意，球体上任意一点 $P(x, y, z)$ 处的密度为 $\mu(x, y, z) = k((x-R)^2 + y^2 + z^2)$ 。

设质心为 (x_C, y_C, z_C) ，则由对称性知 $y_C = z_C = 0$ ，而 $x_C = \frac{\iiint_{\Omega} \mu x dV}{\iiint_{\Omega} \mu dV}$ ，其中

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} \mu dV &= \iiint_{\Omega} k((x-R)^2 + y^2 + z^2) dV = \\
 &= k \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV - 2kR \iiint_{\Omega} x dV + kR^2 \iiint_{\Omega} dV \stackrel{\substack{\text{对称性} \\ \text{球坐标}}}{=} \\
 8k \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho^4 \sin \varphi d\varphi - 0 + kR^2 \cdot \frac{4\pi R^3}{3} &= \frac{4k\pi R^5}{5} + \frac{4k\pi R^5}{3} = \frac{32}{15} k\pi R^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \mu x dV &= k \iiint_{\omega} ((x-R)^2 + y^2 + z^2) x dV \\
&= k \underbrace{\iiint_{\Omega} x(x^2 + y^2 + z^2) dV}_{=0} - 2kR \iiint_{\Omega} x^2 dV + kR^2 \underbrace{\iiint_{\Omega} x dV}_{=0} = -2kR \iiint_{\Omega} x^2 dV \\
&\stackrel{\text{对称性}}{=} -\frac{2kR}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV = -\frac{2kR}{3} \cdot \frac{4\pi R^5}{5} = -\frac{8k\pi R^6}{15}
\end{aligned}$$

故 $x_C = -\frac{R}{4}$, 从而重心坐标为 $(-\frac{R}{4}, 0, 0)$.

2.2 相对运动与质心运动的分离, 折合质量

上小节在静力学意义下界定了重心概念, 它也叫质量中心, 或简称质心 (*center of mass*). 本小节简单说明其动力学意义, 即其在多体运动的描述中的应用.

两体运动: 设质量 m_1 和 m_2 在相互作用力下运动 (无其它外力), 则根据牛顿第二定律, 有

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_2$$

其中 $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. 将两式相加, 得

$$\frac{d^2(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)}{dt^2} = \mathbf{0} \quad \xrightarrow{\mathbf{r}_C := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}} \quad \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \mathbf{0}$$

称 \mathbf{r}_C 为两体的质心坐标. 由此可见, 在无外力作用的两体问题中, 其质心做自由等速运动. 此外, 将两运动方程中的第二个除 m_2 , 然后减去第一个除 m_1 , 可得两物体的相对坐标 $\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ 的运动方程, 即

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_2$$

折合质量 μ 通过

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

加以定义的, 并称 $\mathbf{a} := \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ 为物体 2 相对物体 1 的加速度. 则 $\mathbf{F} := \mathbf{F}_2$ 看看成是物体 1 对物体 2 的作用力.

那么, 上式为 $\mathbf{F} = \mu \mathbf{a}$, 并将其解释为: 视物体 1 “不动”, 另一相对该物体的运动

可等效于（在两物体间相互作用力下的）单体运动，只是质量 m_2 须“折合”为质量 μ . 从而将两体运动分离为质心运动和相对运动的叠加. 当物体 1 的质量远大于物体 2 的质量时（比如太阳相对于地球），则质心坐标与物体 1 的坐标几近重合，且折合质量就是物体 2 的质量，故此时相对运动是主要考察因素.

2.3 转动惯量

上节的重心（质心）是通过所谓“一阶矩”来加以定义的. 即对一质点系，设其质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n ，可定义该质点系对某平面、某轴或某点的 k -阶矩 (k -th moment)，即各质量 m_i 与它到某平面、某轴或某点距离 r_i 的 k 次幂乘积的和 $\sum_{i=1}^n r_i^k m_i$.

特别地，零阶矩就是系统总质量 $m = \sum_{i=1}^n m_i$ ；一阶矩就是系统对平面、轴或点的静力矩，而系统重心（质心）则为对各坐标平面的一阶矩除总质量

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}$$

我们现在考虑二阶矩及其物理意义，二阶矩也称为惯性矩 (*moment of inertia*) . 在 xyz 直角坐标系中，下面分别为质点系对 yz 平面，对 x 轴及对原点的惯性矩

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 m_i, \quad \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i, \quad \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) m_i$$

而 $\sum_{i=1}^n y_i z_i m_i$ 称为质点系对 x 轴的离心矩.

如果物体是连续分布的质量，设其质量密度为 $\mu(x, y, z)$ ，则利用微元法，可求该物体的相应惯性矩，只需将相应求和转化为“连续和”——积分的形式，比如

$$\iiint_{\Omega} x^2 \mu(x, y, z) dV, \quad \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dV, \quad \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dV$$

定义 12.3.1 设刚体（即运动时物体上任意两点间的距离恒等）占据 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ，其密度函数为 $\mu(x, y, z)$ ，则它绕 x 轴、 y 轴、 z 轴及坐标原点的转动惯量 (*moment of inertia*) 定义为物体相对 x 轴、 y 轴、 z 轴及坐标原点的惯性矩. 即

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dV, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2) \mu(x, y, z) dV$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dV, \quad I_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dV$$

特别地, 如果刚体占据的是平面区域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$, 设其密度函数为 $\mu(x, y)$, 则它相对 x 轴、 y -轴和原点的转动惯量分别为

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) d\sigma \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) d\sigma$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) d\sigma = I_x + I_y$$

例 12.3.1 求半径为 R , 高为 H 的均匀圆柱体对底面直接的转动惯量.

解: 以圆柱体的底面为 xOy 平面, 圆柱的对称轴为 z 轴建立直角坐标系, 则所求转动惯量 I 为

$$I = I_x = I_y \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \mu(x^2 + y^2 + 2z^2) dV$$

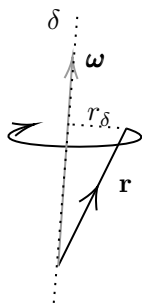
$$\stackrel{\mu \text{ 为常数}}{=} \frac{\mu}{2} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV + \mu \iiint_{\Omega} z^2 dV \stackrel{\text{利用柱坐标}}{=}$$

$$= \frac{\mu}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr \int_0^H dz + \int_0^H z^2 dz \iint_{D_z} dx dy$$

$$= \frac{\pi \mu R^4 H}{4} + \frac{\pi \mu R^2 H^3}{3}$$

2.4 转动惯量的张量属性 (*)

先考虑纯转动刚体的动能, 设刚体绕空间中的某轴 δ 转动, 其上任一点的转动速度为 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, 其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为转动角速度, \mathbf{r} 为该点的径矢. 记 r_{δ} 为点到转动轴的距离.



则该刚体转动的动能为 $T = \sum \Delta T$, 其中动能微元

$$\Delta T = \frac{1}{2} \Delta m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r_\delta^2 \mu(x, y, z) \Delta V$$

故刚体转动动能为

$$T = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \omega^2 r_\delta^2 \mu(x, y, z) dV = \frac{1}{2} I_\delta \omega^2$$

其中 $I_\delta = \iiint_{\Omega} r_\delta^2 \mu(x, y, z) dV$ 为刚体对转动轴 δ 的转动惯量 (或惯性矩) .

由此可知, 转动惯量之于转动物体相当于质量之于移动物体.

一般地, 任何刚体运动可分解为其上任一点的移动和绕过该点 (转动中心) 的某轴 (转动轴) 的转动. 转动轴可随时间变化, 但恒通过转动中心.

设转动角速度为 $\boldsymbol{\omega}$, 其方向沿转动轴方向. 刚体上任一点的速度是它相对于转动中心的速度 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ 与质心速度 \mathbf{v} 的和, 故对质量微元 dm , 其动能为

$$dT = \frac{dm}{2} (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \frac{dm}{2} (v^2 + 2\mathbf{v} \bullet (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2)$$

故刚体运动的总动能为

$$T = \iiint_{\Omega} dT = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 + M \mathbf{v} \bullet (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C) + T_\omega$$

其中 $M = \iiint_{\Omega} dm$ 为刚体总质量, $\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \mathbf{r} dm$ 为质心坐标矢量. 而

$$T_\omega = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \bullet (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm$$

利用矢量恒等式

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = \mathbf{a} \bullet (|\mathbf{b}|^2 \mathbf{a} - \mathbf{b}(\mathbf{b} \bullet \mathbf{a}))$$

得到刚体转动动能的如下表达

$$T_\omega = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \bullet (r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \bullet \boldsymbol{\omega})) dm$$

由于 $\boldsymbol{\omega}(r^2\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \bullet \boldsymbol{\omega})) = r^2\boldsymbol{\omega} \bullet \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \bullet \mathbf{r}(r\omega \cos \theta)$

$$= r^2\omega^2 - r^2\omega^2 \cos^2 \theta = r^2\omega^2 \sin^2 \theta = \omega^2 r_\delta^2$$

即

$$T_\omega = \frac{1}{2}I_\delta \omega^2 \quad \text{其中} \quad I_\delta = \iiint_{\Omega} r_\delta^2 \mu(x, y, z) dV$$

便得到了一开始的表达式. 而我们之所以将其用矢量运算表达成看似更复杂的形式, 是为了考察其坐标分量下的表达, 即坐标分量在坐标系变换下 (即线性空间的基变换下) 的规则属性, 由此可看出转动惯量的张量 (*tensor*) 属性.

在物理中, 选择合适的坐标系 (参考系) 不仅利于计算, 更能以此彰显物理实质, 物理规律虽不依赖参考系的选择 (广义协变), 但在某些特殊参考系的选择下更容易看清其背后机理. 如同对一个线性算子, 选择恰当的基使其矩阵表示更简单些, 则更易明察算子的作用方式.

比如, 若选择以刚体质心为原点的坐标系, 则质心的位矢 $\mathbf{r}_C = \mathbf{0}$, 从而刚体运动的总动能的表达式可简化为

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}M\mathbf{v}^2}_{\text{质心移动动能}} + T_\omega$$

其中 $T_\omega = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \bullet (r^2\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \bullet \boldsymbol{\omega})) dm = \frac{1}{2}I_\delta \omega^2$ 为刚体转动所获动能.

下面我们构造一种新的量 (二阶张量), 使 T_ω 可表达为该张量的分量构成的二阶 (实对称) 矩阵的二次型 (以 $\boldsymbol{\omega}$ 为变量).

给出 \mathbb{R}^3 中任何一组标准正交基 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, 即满足 $\mathbf{u}_i \bullet \mathbf{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$,

设 $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{r} 在该基下的坐标分别为

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbf{u}_i \quad \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) = \sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{u}_i$$

从而 $\boldsymbol{\omega} \bullet (r^2\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \bullet \boldsymbol{\omega})) = r^2 \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 - \sum_{j=1}^3 \left(\omega_j r_j \left(\sum_{i=1}^3 r_i \omega_i \right) \right) \xrightarrow{\text{插入 } \delta_{ij} \text{ 写成统一格式}}$

$$= r^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \omega_i \delta_{ij} \omega_j - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \omega_i r_i r_j \omega_j = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \omega_i (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \omega_j$$

对之积分, 得

$$\begin{aligned} T_{\omega} &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \bullet (r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \bullet \boldsymbol{\omega})) dm = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} (\omega_i (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \omega_j) dm \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \omega_i \underbrace{\left(\iiint_{\Omega} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dm \right)}_{\mathcal{J}_{ij}} \omega_j \stackrel{\mathcal{J} = [\mathcal{J}_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}}{=} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \frac{\mathcal{J}}{2} \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{J}_{ij} := \iiint_{\Omega} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dm$, $1 \leq i, j \leq 3$. 这六个数构成了 3×3 阶矩阵 \mathcal{J} ,

$$\begin{aligned} \text{称为转动惯量矩阵, 则有 } T &= \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} \omega_i \omega_j, \text{ 且 } T_{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} \omega_i \omega_j = \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{J}_{11} \omega_1^2 + \mathcal{J}_{22} \omega_2^2 + \mathcal{J}_{33} \omega_3^2 + 2\mathcal{J}_{12} \omega_1 \omega_2 + 2\mathcal{J}_{13} \omega_1 \omega_3 + 2\mathcal{J}_{23} \omega_2 \omega_3) \end{aligned}$$

是 ω_i 的二次型.

注记 12.4.1 若取坐标为 (x, y, z) , 则

$$\mathcal{J}_{11} = \iiint_{\Omega} [(x^2 + y^2 + z^2) - x^2] dm = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dm = I_x$$

$$\text{同理 } \mathcal{J}_{22} = I_y, \mathcal{J}_{33} = I_z, \text{ 且 } \mathcal{J}_{12} = \mathcal{J}_{21} = -\iiint_{\Omega} xy dm; \mathcal{J}_{13} = \mathcal{J}_{31} = -\iiint_{\Omega} xz dm;$$

$$\mathcal{J}_{23} = \mathcal{J}_{32} = -\iiint_{\Omega} yz dm.$$

张量属性: 我们知道, 向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ 在单位正交基 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 下有坐标 (v_1, v_2, v_3) , 即

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + v_3 \mathbf{u}_3 = (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 + (\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}_3) \mathbf{u}_3$$

且在基变化下, 其坐标分量按特定规则变化. 即考虑另一组基 $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$, 设基变换矩阵 (3 阶可逆方程) $P = [p_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$ 由下关系给出

$$[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}'_1 \ \mathbf{u}'_2 \ \mathbf{u}'_3] P \iff \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^3 p_{ji} \mathbf{u}'_j \quad i = 1, 2, 3$$

设 (v'_1, v'_2, v'_3) 为向量 \mathbf{v} 在 $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ 下的坐标, 则由于向量 \mathbf{v} 本身不依赖其坐

标描述方式, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^3 v'_i \mathbf{u}'_i &\iff [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{u}'_1 \ \mathbf{u}'_2 \ \mathbf{u}'_3] \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} \\ \implies [\mathbf{u}'_1 \ \mathbf{u}'_2 \ \mathbf{u}'_3] P \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} &= [\mathbf{u}'_1 \ \mathbf{u}'_2 \ \mathbf{u}'_3] \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即坐标变换规则为 $v'_i = \sum_{j=1}^3 p_{ij} v_j$. 坐标分量的这一变换规则可看成是具有三分量的 \mathbf{v} 之所以是向量的刻画属性. 同理, 我们希望将在基下具有 9 个分量的量 \mathcal{J} 用其分量在基变换下的规则来刻画.

为了将转动惯量矩阵 \mathcal{J} 也按向量的方式加以表达, 即按其分量定义, 我们考虑由基 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 构造出的形式符号 $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j$, $1 \leq i, j \leq 3$. 并考虑由它们生成 (或张成) 的线性空间, 记为 \mathbb{R}^3 和 \mathbb{R}^3 的张量积, 即

$$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 = \text{span}\{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j\}_{1 \leq i, j \leq 3}$$

这是一个 9 维的线性空间, 刚好可以承载 \mathcal{J}_{ij} , 亦即, 我们将 \mathcal{J} 等同于张量积空间 $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ 的如下向量 (即二阶张量, 向量可看成是一阶张量), 称之为转动惯量张量

$$\mathcal{J} = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \quad \text{其中} \quad \mathcal{J}_{ij} = \iiint_{\Omega} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dm$$

在基变换下, $\{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j\}_{1 \leq i, j \leq 3}$ 变为 $\{\mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{u}'_j\}_{1 \leq i, j \leq 3}$, 并设在新基底下转动惯量张量 \mathcal{J} 的分量从 $\{\mathcal{J}_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq 3}$ 变为 $\{\mathcal{J}'_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq 3}$. 则由于张量 \mathcal{J} 本身不依赖于基底的选择, 故有不变式

$$\mathcal{J} = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}'_{ij} \mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{u}'_j$$

则因 $\mathbf{u}_i = \sum_{s=1}^3 p_{si} \mathbf{u}'_s$, $\mathbf{u}_j = \sum_{t=1}^3 p_{tj} \mathbf{u}'_t$, 将其代入上不变式后得到

$$\sum_{s,t=1}^3 \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} p_{si} p_{tj} \mathbf{u}'_s \otimes \mathbf{u}'_t = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}'_{ij} \mathbf{u}'_i \otimes \mathbf{u}'_j \xrightarrow{\text{调换指标}} \sum_{s,t=1}^3 \mathcal{J}'_{st} \mathbf{u}'_s \otimes \mathbf{u}'_t$$

从而得到转动惯量张量的坐标分量的变换规则为 $\mathcal{J}'_{st} = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} p_{si} p_{tj}$. 当然, 这从其分量的具体表达

$$\mathcal{J}'_{ij} = \iiint_{\Omega} (r'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j) dm$$

是很容易看出来的. 因为在坐标变换下, $r'_i = \sum_{s=1}^3 p_{is} r_s$; $r'_j = \sum_{t=1}^3 p_{jt} r_t$, 而 $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ 在正交坐标变换下 (此处选两组基都是单位正交基, 则两者直接的基变换矩阵 P 是正交矩阵, 而正交变换不改变向量的长度) 是不变的, 故

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'_{ij} &= \iiint_{\Omega} \left(r^2 \delta_{ij} - \sum_{s,t=1}^3 p_{is} p_{jt} r_s r_t \right) dm \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\sum_{s,t=1}^3 r^2 p_{is} p_{jt} \delta_{st} - \sum_{s,t=1}^3 p_{is} p_{jt} r_s r_t \right) dm = \sum_{s,t=1}^3 p_{is} p_{jt} \iiint_{\Omega} (r^2 \delta_{st} - r_s r_t) dm \\ &= \sum_{s,t=1}^3 \mathcal{J}_{st} p_{is} p_{jt} \xrightarrow{\text{调换指标}} \boxed{\mathcal{J}'_{st} = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} p_{si} p_{tj}} \end{aligned}$$

惯量椭球及惯量主轴: 记角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向为 ζ , 并记该方向上的单位方向为

$$\boldsymbol{\zeta} = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \mathbf{u}_i$$

其中 $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ 为该方向的方向余弦. 那么 $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\zeta}$, $\omega_i = \omega \zeta_i$, 从而转动动能为

$$T_{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} \omega^2 \zeta_i \zeta_j = \frac{1}{2} \mathcal{J} \omega^2$$

其中 $\mathcal{J} := \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} \zeta_i \zeta_j$ 为刚体绕转动轴 ζ 的转动惯量. 对方程两边除 ζ 后得

$$\sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} \frac{\zeta_i}{\sqrt{\zeta}} \frac{\zeta_j}{\sqrt{\zeta}} = 1 \xrightarrow{\rho_i := \frac{\zeta_i}{\sqrt{\zeta}}} \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{J}_{ij} \rho_i \rho_j = 1$$

这表明向量 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ 的末端是位于一个二次曲面上的. 显然, 当考虑的刚体是以中心为球心的均匀球时, 有对称性, 我们知道 $\mathcal{J}_{ij} = 0, i \neq j$, 而相对于三个坐标轴

的转动惯量都是相同的正数，即此时惯量矩阵为一个正常数乘三阶单位矩阵，此时对应的二次曲面是球面。

将一般刚体想象为由球面连续形变而得，则一般刚体对应的惯量矩阵的二次曲面将也是球面的连续形变，即椭球面。故称由下方方程描述的二次曲面为刚体的惯量椭球

$$\sum_{i,j=1}^3 J_{ij} \rho_i \rho_j = 1$$

它是 ρ 空间中的一个椭球。惯量椭球携带有关刚体转动的核心信息。正犹如转动惯量张量 \mathcal{J} 的坐标分量随坐标系的改变而按**确定规则**改变，但其本身是不依赖于坐标系的选择的。

既如此，则希望找到好的坐标系，使得在该坐标系下惯量张量的分量，即惯量矩阵 $\mathcal{J} = [J_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 3}$ 越简单越好，从而惯量椭球的方程也可以得到简化。

也就是说，我们要利用线性代数的主轴定理 (*principal axis theorem*) 来对角化惯量矩阵。即先求解惯量矩阵 \mathcal{J} 的特征方程

$$\det(\lambda \mathbb{I}_3 - \mathcal{J}) = 0$$

解得特征值为 $\lambda = J_1, J_2, J_3$ (可能有重复), 然后求出对应的特征向量 $\mathbf{v}_i, i = 1, 2, 3$, 即满足下式的非零向量

$$\mathcal{J} \mathbf{v}_i = J_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

然后利用格拉姆-施密特正交化，将 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 单位正交化为 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ ，且下方方程成立

$$\mathcal{J} \mathbf{w}_i = J_i \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

则在基 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ 下， \mathcal{J} 可以对角化为 $\text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ 。从而在该组基底，惯量椭球的方程可简化为

$$\frac{\rho_1^2}{a_1^2} + \frac{\rho_2^2}{a_2^2} + \frac{\rho_3^2}{a_3^2} = 1$$

其中 a_1, a_2, a_3 分别为第三条主轴的半轴长，它与 $J_i, i = 1, 2, 3$ 的关系为

$$J_i = \frac{1}{a_i^2}$$

因此之故，惯量椭圆的三条主轴 (\mathbf{w}_i 对应的方向)，也称为惯量主轴。

2.5 引力计算——拉普拉斯方程和泊松方程及其它 (*)

设物体占据空间闭区域 Ω , 且其密度为 $\mu(x, y, z)$, 另设有一质点 $P(x, y, z)$, 不妨设其质量为 $m = 1$, 下面讨论物体对质点 P 的引力.

利用微元法, 在物体上 $P'(x', y', z')$ 点处取一微元 dV , 其质量微元为 $dm = \mu(x', y', z')dV$, 则它对 P 产生的引力微元为

$$d\mathbf{F} = k \frac{dm}{r^2} \mathbf{r}^0 = k \frac{\mu(x', y', z')dV}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\stackrel{\mathbf{r}=(x'-x, y'-y, z'-z)}{=} k \frac{\mu(x', y', z')}{r^3} dV \cdot (x' - x, y' - y, z' - z)$$

其中 k 为引力常数. 从而引力微元在三个坐标方向的投影分别为

$$\begin{cases} dF_x = k \mu(x', y', z') \frac{(x' - x)}{r^3} dV \\ dF_y = k \mu(x', y', z') \frac{(y' - y)}{r^3} dV \\ dF_z = k \mu(x', y', z') \frac{(z' - z)}{r^3} dV \end{cases}$$

故物体对质点 P 产生的引力为

$$\begin{cases} F_x = k \iiint_{\Omega} \mu(x', y', z') \frac{(x' - x)}{r^3} dV \\ F_y = k \iiint_{\Omega} \mu(x', y', z') \frac{(y' - y)}{r^3} dV \\ F_z = k \iiint_{\Omega} \mu(x', y', z') \frac{(z' - z)}{r^3} dV \end{cases}$$

1. 当 P 在 Ω 外部时, 上积分是正常积分, 可直接求解.
2. 当 P 在 Ω 内部, 或其边界上时, 上积分在 P 点反常 (此时 $r = \infty$). 但可表明该反常积分是存在的, 从而符合物理要求的. 记

$$\Omega_{\epsilon}(P) := \{(x', y', z') \mid (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \leq \epsilon^2\}$$

为以 P 为球心, 半径为 ϵ (假设很小) 的小球, 从而

$$\iiint_{\Omega} \cdots = \iiint_{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}(P)} \cdots + \iiint_{\Omega_{\epsilon}(P)} \cdots$$

故只需考察 $\iiint_{\Omega_{\epsilon}(P)} \cdots$ 的收敛性. 设 μ_0 是 $\mu(x', y', z')$ 的一个上界, 则

$$\left| \frac{k \mu(x', y', z')(x' - x)}{r^3} \right| \leq \frac{k \mu_0}{r^2} = \frac{k \mu_0}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

$$\text{故得 } \left| \iiint_{\Omega_{\epsilon}(P)} \frac{k \mu(x', y', z')(x' - x)}{r^3} dV \right| \leq k \mu_0 \iiint_{\Omega_{\epsilon}(P)} \frac{dV}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

$$\frac{\begin{cases} x' = x + \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y' = y + \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z' = z + \rho \cos \varphi \end{cases}}{dV = \rho^2 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho} k \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\epsilon} \rho^2 \frac{1}{\rho^2} d\rho = 4\pi k \mu_0 \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

所以反常积分是收敛的. 为了简化计算, 注意到

$$\frac{x - x'}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}; \quad \frac{y - y'}{r} = \frac{\partial r}{\partial y}; \quad \frac{z - z'}{r} = \frac{\partial r}{\partial z}$$

又注意到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{x' - x}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{y' - y}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{z' - z}{r^3}$$

故公式 (2.5.1) 可写为

$$\begin{cases} F_x = k \iiint_{\Omega} \mu(x', y', z') \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) dV \\ F_y = k \iiint_{\Omega} \mu(x', y', z') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) dV \\ F_z = k \iiint_{\Omega} \mu(x', y', z') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dV \end{cases}$$

物质在点 $P(x, y, z)$ 处的引力势为 $U(x, y, z) = k \iiint_{\Omega} \frac{\mu(x', y', z')}{r} dV$. 可知, 引力是

$$\text{引力势的梯度, 即} \begin{cases} F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \iff \mathbf{F} = \nabla U \quad \text{下面我们推导引力势所满足的微}$$

分方程.

首先, 假设 U 有二阶偏导数, 则有

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = k \iiint_{\Omega} \mu(x', y', z') \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) dV \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = k \iiint_{\Omega} \mu(x', y', z') \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) dV \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = k \iiint_{\Omega} \mu(x', y', z') \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) dV \end{cases}$$

由于

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3(x' - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3(y' - y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3(z' - z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

故当 $P(x, y, z)$ 处于物体之外, 有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = 3 \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}{r^5} - \frac{3}{r^3} \equiv 0$$

故当 P 在物体 Ω 之外时, U 满足如下拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \iff \Delta U = 0$$

但当 P 位于物体 Ω 内部或其边界 $\partial\Omega$ 上时, 则由于被积函数出现 r^3 , 故积分发散, 所以上面的推理不再成立. 为了得到此时势函数所应满足的微分方程, 我们先对 Ω 是均匀球体的特殊情形做计算, 进而猜出一般情形的计算结果.

设 Ω 是以密度均匀 (设密度函数为常数 μ) 的半径为 R 的球. 建立坐标系, 使得球心就是坐标原点, 并使点 P 位于 z 轴上, 即 P 的坐标为 $(0, 0, z)$. 则对球内任一点 $P'(x', y', z')$, $r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + (z' - z)^2}$, 所求引力势为

$$\begin{aligned}
 U &= k\mu \iiint_{\Omega} \frac{dV}{r} = \mu \iiint_{\Omega} \frac{dV}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (z' - z)^2}} \xrightarrow{\text{利用球坐标}} \\
 &= k\mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2}{r} d\rho = 2\pi k\mu \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \varphi}} \\
 &\xrightarrow{\text{交换积分顺序}} 2\pi k\mu \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \varphi}} = \\
 &= 2\pi k\mu \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} \frac{d\sqrt{\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \varphi}}{\rho z} \\
 &= 2\pi k\mu \int_0^R \rho^2 d\rho \left(\int_0^{\pi} \frac{dr}{\rho z} \right)
 \end{aligned}$$

注意到, 当 φ 从 0 增长到 π 时, 若 $z > \rho$, 则 $r = \sqrt{\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \varphi}$ 从 $z - \rho$ 变为 $z + \rho$; 而若 $z < \rho$, 则 r 从 $\rho - z$ 变为 $\rho + z$. 从而

$$\int_0^{\pi} \frac{dr}{\rho z} = \begin{cases} \int_{z-\rho}^{z+\rho} \frac{dr}{\rho z} = \frac{2}{z}, & z > \rho \\ \int_{\rho-z}^{\rho+z} \frac{dr}{\rho z} = \frac{2}{\rho}, & z < \rho \end{cases} \Rightarrow$$

1. 当 P 在球外, 此时 $R \leq z$, 于是在积分区间 $[0, R]$ 上, 恒有 $\rho \leq z$, 从而

$$U = 2\pi k\mu \int_0^R \frac{2\rho^2}{z} d\rho = 4\pi k\mu \frac{R^3}{z} = k\mu \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{z} = \frac{km}{z}$$

其中 m 为球体的质量.

2. 当 P 在球内部时, 将积分区间 $[0, R]$ 分为两部分 $[0, R] = [0, z] \cup [z, R]$, 从而

$$U = 2\pi k\mu \int_0^z \frac{2\rho^2 d\rho}{z} + 2\pi k\mu \int_z^R \frac{2\rho^2 d\rho}{\rho} = 2\pi k\mu \left(R^2 - \frac{z^2}{3} \right)$$

由对称性 $F_x = F_y = 0$, 故只有 z -轴方向上的引力非零, 利用 $F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$ 计算可得

$$F_z = \begin{cases} -k\frac{m}{z^2}, & \text{当 } P \text{ 在球体外部, 即 } z > R \\ -k\frac{4}{3}\pi\mu z, & \text{当 } P \text{ 在球体内部, 即 } z < R \end{cases} \Rightarrow$$

从而有

$$\lim_{z \rightarrow R^+} F_z = -\frac{km}{R^2}, \quad \text{且} \quad \lim_{z \rightarrow R^-} F_z = -\frac{4}{3}\pi k\mu R = -k\frac{4\pi R^3}{3}\mu \frac{1}{R^2} = -\frac{km}{R^2}$$

故知引力变化具有连续性, 从而当 $z = R$, 即质点 P 在球体表面上时, 它所受球体的引力为 $-\frac{km}{R^2}$.

上计算表明: 对均匀球体而言, 对它外部一质点 P 的引力作用完全可由全部质量集中于其球心的质点对质点 P 的作用求得.

一般地, 上面的计算结果表明均匀球体所产生的引力势的表达式为

$$U(x, y, z) = \begin{cases} \frac{km}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \text{当 } P \text{ 在球外} \\ 2\pi k\mu \left(R^2 - \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) \right), & \text{当 } P \text{ 在球内} \end{cases}$$

函数 $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 显然满足拉普拉斯方程, 而当 P 在球内时, $U(x, y, z)$ 的上表达式满足的方程是

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi k\mu \quad \Leftrightarrow \quad \Delta U = -4\pi k\mu$$

这便是著名的泊松 (Poisson) 方程. 我们在下一章 (c.f. 第三讲附录一) 将看到, 该方程虽然是在均匀球体的情形下推出的, 但它具有一般性, 即对一般物体产生的引力势, 泊松方程对其也是成立的.