hw_6(1)

习题3.3

2. 不展开行列式而证明下列等式。

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

解:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & a-b & c(b-a) \\ 0 & a-c & b(c-a) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a-b & c(b-a) \\ a-c & b(c-a) \end{vmatrix} \\ &= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix} \\ &= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & c-b \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

解:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & a-c & a^2-c^2 \end{vmatrix} \\ &= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 1 & a+c \end{vmatrix} \\ &= (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} 1 & a+b \\ 0 & c-b \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

解:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 0 & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & b^2+ab+a^2 \\ c+a & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ca)$$

$$= (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

3. 解方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

解：

4. 按第二列展开计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

解：

8. 设 X 和 Y 分别是 $n \times k$ 矩阵和 $k \times n$ 矩阵，I_r 是 r 阶单位矩阵。证明：

$$\det(I_n + XY) = \det(I_k + YX)$$

解： $\begin{pmatrix} I_n & -X \\ Y & I_k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_n & -X \\ 0 & I_k + YX \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} I_n & -X \\ Y & I_k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} I_n + XY & 0 \\ Y & I_k \end{pmatrix}$

$\det(I_n) \cdot \det(I_k + YX) = \det(I_k + YX)$

$= \det(I_n + XY) \cdot \det(I_k) = \det(I_k + YX)$

故原式成立。

9. 借助初等变换计算行列式：

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$$

解： (1) 原式 $=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -3 & -5 & -19 \end{vmatrix}=-335$

(2)

$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$$

解： 原式 $=\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 0 & -\frac{83}{8} & \frac{35}{8} & \frac{31}{8} & \frac{45}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{2174}{83} & \frac{36}{83} & -\frac{310}{83} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37596}{1067} & \frac{205}{231} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{56341} \end{vmatrix}$

$=24\cdot\left(-\frac{83}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2174}{83}\right)\cdot\left(-\frac{37596}{1067}\right)\cdot\left(-\frac{25}{56341}\right)$

$=100$

(3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

解：

$$
原式 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}
$$

$$
= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (b+a)(b^2+ab+a^2) & (c+a)(c^2+ac+a^2) & (d+a)(d^2+ad+a^2) \end{vmatrix}
$$

$$
= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)
$$

(4)

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}
$$

解：

$$
原式 = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 3 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}
$$

$$
= a \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & a & 1 \\ 6 & 1 & a \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}
$$

$$
= a \cdot (a^3 - 7a) - 6(a^2 - 1) = a^4 - 13a^2 + 6
$$

10. 命 $H_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}$

证明：$H_n = a_n H_{n-1} + H_{n-2}$。当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 时，求出 H_n。

解： 10. 按最后一列展开

$$
H_n = a_n H_{n-1} + (-1)^{2n} H_{n-2}
$$

$$
= a_n H_{n-1} + H_{n-2}
$$

当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 时，

$$H_1 = 1, \quad H_2 = 2$$

$$H_n = H_{n-1} + H_{n-2}$$

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

11. 证明 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值为 $n+1$。

解： 设 $D_n =$ 原式

$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$

$D_1 = 2, \quad D_2 = 3$

$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$

故 $D_n = n + 1$

12. 计算行列式的值：

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & 0 \end{vmatrix}$$

解：

$$原式 = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = n!\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n!$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$$

解:

$\Rightarrow I_n + [a_1, \ldots, a_n] \cdot [1, \ldots, 1]^\top + [1, \ldots, 1] \cdot [b_1, b_2, \ldots, b_n]$

由 8

原式 $= 1 + \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$

13. 利用方阵乘积的行列式公式计算行列式。

(1) 通过矩阵的平方求其行列式:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

解: 设 $A =$ 原式 $A \cdot A^T = (a^2+b^2+c^2+d^2)I$ $\det(A)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$
$\det(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

(2) 通过分解方阵求其行列式:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{pmatrix}$$

解:

(3) $\Rightarrow [\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n](\cos\beta_1, \ldots, \cos\beta_n) + [\sin\alpha_1, \ldots, \sin\alpha_n](\sin\beta_1, \ldots, \sin\beta_n)$

当 $n > 2$, $\quad \det(A) = 0$

当 $n = 1$, $\quad \det(A) = \cos(\alpha_1 - \beta_1)$

当 $n = 2$, $\quad \det(A) = \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin(\beta_2 - \beta_1)$