hw_4 (2)

习题2.3

4. 对任意的 $m \times s$ 矩阵 A 和 $s \times n$ 矩阵 B，证明：$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - s \leq \operatorname{rank}(AB)$

解： 构建分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rank} M = \operatorname{rank}(AB) + s$$

对 M 进行初等行变换

$$M = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} AB & 0 \\ -B & E_s \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & E_s \end{pmatrix}$$

故

$$\operatorname{rank} M \geq \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - s \leq \operatorname{rank}(AB)$$

5. 证明：如果三个 n 阶方阵的乘积为 0，那么它们的秩的和不超过 $2n$

解： 令 $ABC = 0$

由习题4可知

$$\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} C - n \leq \operatorname{rank} ABC = 0$$

$$\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} C \leq n$$

又 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leq \operatorname{rank} AB$

故 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C \leq 2n$

习题2.4

1. 判断下面的矩阵是否可逆，如果可逆，求其逆矩阵

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$

解： 可逆

逆矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{24} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

解： 不可逆

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

解： 可逆

逆矩阵 $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (n阶方阵)

解： 可逆

逆矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

7. 求下列方阵的逆矩阵：

$\begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & G \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & D & B \\ F & G & C \end{pmatrix}$, 其中 A, D, F 是可逆方阵.

解： (1)

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} & A^{-1}(BD^{-1}G - C)F^{-1} \\ 0 & D^{-1} & -D^{-1}GF^{-1} \\ 0 & 0 & F^{-1} \end{pmatrix}$$

(2)

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} F^{-1}(GD^{-1}B - C)A^{-1} & -F^{-1}GD^{-1} & F^{-1} \\ -D^{-1}BA^{-1} & D^{-1} & 0 \\ A^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. 设 A 和 B 是方阵.证明如果 $E+AB$ 可逆，那么 $E+BA$ 可逆.

解： 令$X=E-B(E+AB)^{-1}A$

$X(E+BA)=E+BA-B(E+AB)^{-1}A-B(E+AB)^{-1}ABA$

又$\because (E+AB)^{-1}(E+AB)=E$

$(E+AB)^{-1}AB=E-(E+AB)^{-1}$

$(E+AB)^{-1}ABA=A-(E+AB)^{-1}A$

故 $X(E+BA)=E+BA-B\cdot A=E$

故 $X=(E+BA)^{-1}$

故 $E+BA$ 可逆，且 $(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A$

习题2.5

1. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&4&3\\-2&5&3\\2&-4&-4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

(1) 证明 $AX=0$ 只有零解.

解： $A=\begin{pmatrix}-1&4&3\\-2&5&3\\2&-4&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&4&3\\0&1&-1\\0&4&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&4&3\\0&1&-1\\0&0&6\end{pmatrix}$

$6\neq 0$，故只有零解

(2) 对 $\lambda=1,2,-3$，分别求线性方程组 $(A-\lambda E)X=0$ 的一个基础解系.（本题的解将在第五章的例5.22中用到.）

解： ① $\lambda=1$

$A-E=\begin{pmatrix}-2&4&3\\-2&4&3\\2&-4&-5\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_2\\x_2\\0\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

故 $[2,1,0]$ 构成一个基础解系。

② $\lambda = 2$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故 $[-3, -3, 1]$ 构成一个基础解系。

③ $\lambda = -3$

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 8 & 3 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

故 $[1, 1, -2]$ 构成一个基础解系。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(1) 求线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系.

解： $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故 $[-1, -1, 1]$ 构成一个基础解系

(2) 求线性方程组 $(A - E)X = 0$ 的一个基础解系.（本题的解将在第五章的例5.23中用到.）

解： $A - E = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故 $[2, 1, 0]$, $[\frac{3}{2}, 0, 1]$ 构成一个基础解系

3. 对下面的线性方程组求通解和一个基础解系，

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$

$3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0$

$x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0$

$5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0$

解: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{pmatrix}$

$Ax=0$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3+x_4+5x_5\\-2x_3-2x_4-6x_5\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

故 $[1,-2,1,0,0]^T$, $[1,-2,0,1,0]^T$, $[5,-6,0,0,1]^T$ 构成一个基础解系

4. 对下面的线性方程组求通解和相伴的齐次方程组的一个基础解系，

$12x_1+9x_2+3x_3+10x_4=13$

$4x_1+3x_2+x_3+2x_4=3$

$8x_1+6x_2+2x_3+5x_4=7$

解: $A=\begin{pmatrix}12&9&3&10\\4&3&1&2\\8&6&2&5\end{pmatrix}$

$Ax=\begin{pmatrix}13\\3\\7\end{pmatrix}$

通解:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-3x_2-x_3}{4}\\x_2\\x_3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$Ax=0$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}x_2-\frac{1}{4}x_3\\x_2\\x_3\\0\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

故 $[-\frac{3}{4},1,0,0]$, $[-\frac{1}{4},0,1,0]$ 构成一个基础解系

5. 分析下列带参数的线性方程组的可解性，在线性方程组可解时求出通解.

(1)

$-6x_1+8x_2-5x_3-x_4=9$
$-2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1$
$-3x_1+5x_2+4x_3+2x_4=3$
$-3x_1+7x_2+17x_3+7x_4=\lambda$

解： 当$\lambda\neq 0$ 无解

当$\lambda=0$ 有解

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}-\frac{19}{2}x_3-\frac{7}{2}x_4\\\frac{3}{2}-\frac{13}{2}x_3-\frac{5}{2}x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\\frac{3}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-\frac{19}{2}\\-\frac{13}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\-\frac{5}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

(2)

$2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5$
$4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7$
$6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9$
$\lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11$

解： 当 $\lambda=8$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\2x_1-2x_4+4\\-2x_4+3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\3\\0\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

当 $\lambda\neq 8$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4-2x_4\\3-2x_4\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\3\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}$$