《线性代数》
第五章: $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.12.17

教学安排

1. 正交矩阵的典范式
2. 正交投影与最小二乘法
3. 复向量空间 $\mathbb{C}^n$
4. 若干概念和结论的概述

正交矩阵定义的算子

定理 (5.56)

设 A 是正交矩阵. 定义算子 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $X\to AX$. 则对 $\mathbb{R}^n$ 中任意的两个向量 X 和 Y, 有

$$(AX|AY)=(X|Y).$$

即算子 $\mathcal{A}$ 保持点积，从而保持长度和距离.

正交矩阵定义的算子

定理 (5.57)

设线性算子 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 保持点积，即对任意的 $X,Y\in\mathbb{R}^n$ 有 $(\mathcal{A}X|\,\mathcal{A}Y)=(X|\,Y)$. 那么 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准基下的矩阵 A 是正交矩阵，从而对任意的 $X\in\mathbb{R}^n$ 有 $\mathcal{A}X=AX$, 其中 A 是正交矩阵.

正交矩阵定义的算子

引理 (5.58)

设 A 是正交矩阵.
(1) 如果 λ 是 A 的特征值，那么 $\lambda = 1$ 或 -1.
(2) 如果 X, Y 是特征向量，且 $AX = X, AY = -Y$, 那么 X 和 Y 正交，即 $(X|Y) = 0$.

正交矩阵定义的算子

引理 (5.58)

设 A 是正交矩阵.
(1) 如果 λ 是 A 的特征值，那么 $\lambda = 1$ 或 -1.
(2) 如果 X, Y 是特征向量，且 $AX = X, AY = -Y$, 那么 X 和 Y 正交，即 $(X|Y) = 0$.

引理 (5.59)

假设 A 是 n 阶正交矩阵，定义线性算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, X \to AX$. 那么 $\mathcal{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

二阶正交矩阵

引理 (5.60)

假设 A 是二阶正交矩阵，$\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $X\to AX$ 是相应的线性算子.

(1) 如果 $\det A=1$，那么存在角 θ 使得 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. 从而 $\mathcal{A}$ 是绕原点的旋转，旋转角度是 θ.

(2) 如果 $\det A=-1$，那么存在角 θ 使得 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$, 并且

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\cdot A\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

从而 $\mathcal{A}$ 是关于一条直线的反射，该直线与 x 轴的夹角是 $\theta/2$.

正交矩阵的典范式定理

定理 (5.61)

设 A 是 n 阶正交矩阵，那么存在 n 阶正交矩阵 B 使得

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \cos\theta_r & -\sin\theta_r & & \\ & & & \sin\theta_r & \cos\theta_r & & \\ & & & & & I_k & \\ & & & & & & -I_l \end{pmatrix},$$

$2r+k+l=n$, 其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r$ 均不是 π 的整数倍, I_k 和 I_l 分别是 k 阶和 l 阶单位矩阵.

推论 (5.62)

设 A 是正交矩阵，假设其特征多项式有如下因式分解:

$$\chi_A(t) = (t^2 - 2a_1 t + 1)(t^2 - 2a_2 t + 1)\cdots(t^2 - 2a_r t + 1)\cdot(t-1)^k(t+1)^l,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 的绝对值都是小于 1 的正数. 取 θ_i' 使得 $\cos\theta_i' = a_i$, 那么 A 的典范式如上述定理的 $B^{-1}AB$, 其中 $\theta_i = \theta_i'$ 或 $2\pi - \theta_i'$.

例 (5.63)

求正交矩阵 $A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\ -6 & 3 & 2\\ 2 & 6 & -3\end{pmatrix}$ 的一个典范式.

习题 5.7

1. 证明: 如果欧式空间 $\mathbb{R}^n$中的两个向量 u 和 v 的长度相同, 那么存在保距线性算子把 u 映到 v.

2. 设 u_1, ..., u_k和 v_1, ..., v_k 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两组向量. 证明: 存在保距线性算子把 u_i 映到 v_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) 的充要条件是 $(u_i \mid u_j) = (v_i \mid v_j)$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$.

3. 设 w 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量. 对任何向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 命

$$\mathcal{R}_w(x) = x - 2\frac{(x \mid w)}{(w \mid w)}w.$$

证明:

(1) $\mathcal{R}_w(w) = -w$;

(2) $\mathcal{R}_w(u) = u$ 如果 $u \in \langle w \rangle^\perp$;

(3) $\mathcal{R}_w$ 是保距算子.

4. 求出下面的正交矩阵的典范式, 并求出把它们化成典范式的正交矩阵.

习题 5.7

(1) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, (2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

(4) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 12 \\ 12 & 3 & 4 \\ -4 & 12 & 3 \end{pmatrix}$, (5) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -12 \\ 3 & 12 & 4 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix}$,

(6) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

正交投影

- 对于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 U，每个补空间 W 都确定了一个投影映射：

$$\mathcal{P}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad u + w \to u, \quad \text{其中 } u \in U, w \in W.$$

正交投影

- 对于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 U，每个补空间 W 都确定了一个投影映射：

$$\mathcal{P}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad u + w \to u, \quad \text{其中}\, u \in U, w \in W.$$

- 正交投影：由 U 的正交补 $U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x \mid u) = 0, \forall u \in U\}$ 确定的投影.

正交投影

- 对于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 U，每个补空间 W 都确定了一个投影映射：

$$\mathcal{P}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad u+w \to u, \quad \text{其中}\, u \in U, w \in W.$$

- 正交投影：由 U 的正交补 $U^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x \mid u) = 0, \forall u \in U\}$ 确定的投影.
- 如果 $e_1, \cdots, e_k$ 是 U 的标准正交基，则正交投影 $\mathcal{P}_U$ 可描述如下：

$$\mathcal{P}_U:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad v \to \sum_{i=1}^{k} (v \mid e_i) e_i.$$

最小二乘解

定义 (5.64)

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 实矩阵，
$B=[b_1,\cdots,b_m]\in\mathbb{R}^m$, $\quad X=[x_1,\cdots,x_n]$. 线性方程组

$$AX=B$$

的最小二乘解 $X_0\in\mathbb{R}^n$ 就是使得 AX_0 与 B 的距离尽可能小的解，即

$$\|AX_0-B\|^2=\min_{X\in\mathbb{R}^n}\|AX-B\|^2.$$

最小二乘解

定义 (5.64)

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 实矩阵，
$B=[b_1,\cdots,b_m]\in\mathbb{R}^m$, $\quad X=[x_1,\cdots,x_n]$. 线性方程组

$$AX=B$$

的最小二乘解 $X_0\in\mathbb{R}^n$ 就是使得 AX_0 与 B 的距离尽可能小的解，即

$$\|AX_0-B\|^2=\min_{X\in\mathbb{R}^n}\|AX-B\|^2.$$

- 最小二乘解的几何意义？

最小二乘解

- 最小二乘解就是如下线性方程组的解：

$$(x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n-B\,|\,\mathbf{a}_i)=0,\quad i=1,\cdots,n,\quad \text{其中 } A=(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n).$$

最小二乘解

- 最小二乘解就是如下线性方程组的解：

$$(x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n-B\,|\,\mathbf{a}_i)=0,\quad i=1,\cdots,n,\quad \text{其中 } A=(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n).$$

- 以上方程组的解可以如何表示？

最小二乘解

- 最小二乘解就是如下线性方程组的解:

$$(x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n-B\,|\,\mathbf{a}_i)=0,\quad i=1,\cdots,n,\quad \text{其中 } A=(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n).$$

- 以上方程组的解可以如何表示？

例 5.65 实验观测到一个曲面 $z=f(x,y)$ 的一些取值如下:
$f(1,1)=-1.1,\quad f(1,2)=0.9,\quad f(2,1)=0.2,\quad f(2,2)=2.0,\quad f(3,1)=0.9,\quad f(3,2)=3.1$. 请用一个平面逼近该曲面，用最小二乘法确定相关参数.

格拉姆行列式

- 什么是格拉姆行列式？
- $\det\left((\mathbf{a}_i \,|\, \mathbf{a}_j)\right) = \det({}^tAA)$

格拉姆行列式

- 什么是格拉姆行列式？
- $\det\left((\mathbf{a}_i \mid \mathbf{a}_j)\right) = \det({}^tAA)$

定理 (5.66)

欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ 线性无关当且仅当它的格拉姆行列式不等于 *0*.

习题 5.8

对下面给定的 A 和 B, 求线性方程组 $AX = B$ 的最小二乘解.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3. (1) 用最小二乘法求出一个拟合下面数据的直线方程.

x	-1	0	1	2
y	0	1	3	9

(2) 在坐标平面上画出(1)中的数据给出的点和所求的直线.

4. 用最小二乘法求出拟合上一题的数据的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 并对 $x = -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 在坐标平面上画出二次函数的点, 然后作出二次函数的概略图.

5. 用最小二乘法求出拟合下面点的圆方程: $(-1, -2)$, $(0, 2.4)$, $(1.1, -4)$, $(2.4, -1.6)$. 在坐标平面上画出这些点和所求的圆.

复向量空间线性代数的核心应用

为什么需要复数？

复数 $z = a + bi$ 同时编码了**幅度**（模）和**相位**（辐角），对应波动与旋转的本质特征。

1. **信号处理与通信**
   - **傅里叶分析**：$e^{i\omega t}$ 统一正余弦
   - **调制技术**：QAM 在复平面编码数据
   - **滤波设计**：复频率响应描述系统
2. **量子力学（基础语言）**
   - 量子态：复希尔伯特空间中的向量
   - 概率幅：复数，概率 = 模平方
   - 演化：酉矩阵（复空间旋转）
3. **电气工程**
   - 交流电路相量法：$Z = R + iX$
   - 化微分方程为代数方程
4. **控制理论**
   - 系统稳定性：极点复平面位置决定
   - 左半平面 = 稳定，右半 = 不稳定
5. **图形学与机器人**
   - 四元数（复数扩展）表示三维旋转
   - 避免万向节锁，插值平滑
6. **机器学习新前沿**
   - 复数神经网络处理相位数据
   - 脑电、MRI 信号直接处理

- 复数: $a + bi,\ a, b \in \mathbb{R};\ i = \sqrt{-1}$
- 复数之间的运算法则有哪些？
- 复数集合 $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ 称为复数域

复平面

- 把复数 $z = a + bi$ 和实平面的点 (a, b) 等同
- z 的模长 $|z|$ 如何定义？
- z 的辐角 φ 如何定义？

复平面

- 把复数 $z = a + bi$ 和实平面的点 (a, b) 等同
- z 的模长 $|z|$ 如何定义？
- z 的辐角 φ 如何定义？
- 利用模长和辐角，z 有如下的三角形式:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

棣莫弗公式

命题 (6.1)

设 z 和 z' 是复数，则

(1) $|zz'| = |z||z'|$, $\quad |\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$;

(2) $\arg zz' = \arg z + \arg z'$;

(3) $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z'$.

设复数 z 和 z' 的辐角分别为 φ 和 φ', 则有

1. $zz' = |z||z'|[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$
2. $\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]$

棣莫弗公式

推论 (6.2)

设 z 是复数，其辐角为 φ, n 为任意整数，则

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

棣莫弗公式

推论 (6.2)

设 z 是复数，其辐角为 φ, n 为任意整数，则

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

- 如果 $z \neq 0$, 那么 z 有 n 个 n 次方根:

$$|z|^{1/n}(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

棣莫弗公式

推论 (6.2)

设 z 是复数，其辐角为 φ, n 为任意整数，则

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

- 如果 $z \neq 0$, 那么 z 有 n 个 n 次方根:

$$|z|^{1/n}(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

- 1 的 n 次单位根是什么？

棣莫弗公式

推论 (6.2)

设 z 是复数，其辐角为 φ, n 为任意整数，则

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

- 如果 $z \neq 0$, 那么 z 有 n 个 n 次方根:

$$|z|^{1/n}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

- 1 的 n 次单位根是什么？
- 1 的 n 次单位根 v.s. n 次本原根？

共轭

复数 $z=a+bi$ 的共轭是 $a-bi$, 记作 $\bar{z}$

1. $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$;
2. $\overline{zz'}=\bar{z}\overline{z'}$;
3. $\bar{\bar{z}}=z$;
4. $z+\bar{z}=2a$; $\quad z\bar{z}=|z|^2$;
5. $\bar{z}=z$ 当且仅当 z 为实数;
6. $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$.

复数的初等几何

- 三角不等式
- 三点共线的充要条件
- 数量积
- 四点共圆的充要条件

1. 设 ε 是 1 的 n 次本原根. 证明 ε^k 是 1 的 n 次本原根当且仅当 k 与 n 互素. 找出 1 的所有的 24 次本原单位根.

2. 证明二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 的自同构只有恒等映射和映射 $f: a+b\sqrt{d} \to a-b\sqrt{d}$.

3. 设 A 和 B 是 n 阶实方阵. 证明: $\overline{\det(A+iB)} = \det(A-iB)$. (横线表示复共轭.)

4. 设 A 和 B 是 n 阶实方阵,

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

借助复数域上的初等变换证明

$$\det C = |\det(A+iB)|^2.$$

5. 设 $C=(c_{kl})$ 是 n 阶复方阵, $Z=[z_1,...,z_n]$ 是复未知数. 那么齐次线性方程组 $CZ=0$ 有非零解当且仅当 $\det C=a+ib=0$. 这个条件等价于两个方程 $a=0$ 和 $b=0$, 涉及到 $2n^2$ 个实数 a_{kl}, b_{kl}. 另一方面, 注意到 $c_{kl}=a_{kl}+ib_{kl}$ 和 $z_k=x_k+iy_k$, 可知齐次线性方程组 $CX=0$ 等价于一个含有 $2n$ 个实未知数 x_k, y_k 和 $2n$ 个方程的齐次线性方程组. 这时有非零解的条件是一个 $2n$ 阶实方阵的行列式等于零, 它是涉及到 a_{kl}, b_{kl} 的一个方程. 这两个条件: 有一个含两个方程, 另一个仅含一个方程, 为什么是一回事? (提示: 利用习题 3 与 4.)

6. 证明

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}(a_0 + \varepsilon^k a_1 + \varepsilon^{2k} a_2 + \cdots + \varepsilon^{(n-1)k} a_{n-1}),$$

其中 ε 是 1 的 n 次本原根.

与前五个章节的关联

- 第一章《线性方程组》：将系数 a_{ij} 的取值范围改为复数，则所有概念、结论无需任何改动，适用于复系数的线性方程组
- 第二章《矩阵》：将 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{C}$，则所有概念和结论都适用于复向量空间 $\mathbb{C}^n$，复系数矩阵和复系数的线性方程组
- 第三章《行列式》：除了实方阵行列式的几何意义外，其他都适用于复方阵

与前五个章节的关联

- 第一章《线性方程组》：将系数 a_{ij} 的取值范围改为复数，则所有概念、结论无需任何改动，适用于复系数的线性方程组
- 第二章《矩阵》：将 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{C}$，则所有概念和结论都适用于复向量空间 $\mathbb{C}^n$，复系数矩阵和复系数的线性方程组
- 第三章《行列式》：除了实方阵行列式的几何意义外，其他都适用于复方阵
- 第四章《向量空间 $\mathbb{R}^n$》：第 1、2 小节，将 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{C}$，所有概念和结论均成立；第 3、4 小节的点积和双线性型相关的概念和理论需要做改变
- 第五章《$\mathbb{R}^n$ 上的线性算子》：相关思想和方法可以直接用到向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上；除了$\mathbb{C}^n$ 上的线性算子总有一维不变子空间（即总有特征值和特征向量）；在复数域上每个方阵的相似类都含有一个约当矩阵

Quiz 5

1. (10 points) 姓名: 学号:
2. (6 points) 求方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   的特征多项式、特征值、每个特征值对应的特征向量和它的一个对角变换矩阵.
3. (4 points) 满足 $A^k = 0$ 的方阵称为幂零方阵，其中 k 是正整数. 证明：方阵 A 为幂零的充分必要条件是方阵 A 的特征值全为零.