hw_14(2)

习题6.4

2. 确定 λ 取什么值时下面的埃尔米特二次函数是正定的：

$$x_1\bar{x}_1 + ix_1\bar{x}_2 - i\bar{x}_1x_2 + \lambda x_2\bar{x}_2.$$

解：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & \lambda \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1 > 0$
$\Delta_2 = \det A = \lambda - 1 > 0$

当 $\lambda > 1$ 时，该埃尔米特矩阵正定。

3. 设 f 是 $\mathbb{C}^n$ 的 s 维子空间 V 上的埃尔米特型，它在某个基下的矩阵是 $F = (f_{ij})$。证明：f 给出的埃尔米特二次型是正定的当且仅当 F 的主子式（定义见§4.4 第五部分）$\Delta_1, ..., \Delta_n$ 都是正的；而且雅克比方法适用。

解：
先证必要性：

若 f 是正定的，则对于 V 中任意非零向量 x，有 $f(x,x) > 0$。

令 V_k 为由前 k 个基向量张成的子空间，则 f 在 V_k 上的限制仍是正定的，且其矩阵表示为 F_k。

因为正定矩阵的特征值全为正实数，而行列式等于特征值之积，故

$$\Delta_k = \det(F_k) > 0$$

后证充分性：

已知 $\Delta_k > 0$，雅克比方法可用（可通过配方法证明）。
系数为

$$d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

则可将二次型化为

$$f(x,x) = \sum_{i=1}^{s} d_i |y_i|^2$$

由于 $d_i > 0$，且 $\sum |y_i|^2 > 0$（对非零 x），故 $f(x,x) > 0$

因此 f 正定。

习题6.5

通过酉矩阵将下列酉矩阵对角化：

2. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2+i \\ 2+i & 2 \end{pmatrix}$

解：

$$\det(tE-A)=\begin{vmatrix} t-\frac{2}{3} & \frac{2-i}{3} \\ \frac{-2-i}{3} & t-\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$=\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2+i}{3}\cdot\frac{2-i}{3}$$

$$=t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}+\frac{5}{9}$$

$$=t^2-\frac{4}{3}t+1=0$$

$$t=\frac{\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}-4}}{2}=\frac{2}{3}\pm\sqrt{-\frac{5}{9}}=\frac{2\pm\sqrt{5}\,i}{3}$$

$$t_1=\frac{2+\sqrt{5}\,i}{3},\quad (A-t_1E)x=0,\quad X_1=[-2+i,\ \sqrt{5}\,i]$$

$$t_2=\frac{2-\sqrt{5}\,i}{3},\quad (A-t_2E)x=0,\quad X_2=[\sqrt{5}\,i,\ -2-i]$$

$$B=\frac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix} -2+i & \sqrt{5}\,i \\ \sqrt{5}\,i & -2-i \end{pmatrix}$$

$$B^*AB=\mathrm{diag}(t_1,t_2)$$

4. $\begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

解：

$$\det(tE-A)=\begin{pmatrix} t-\cos\theta & -i\sin\theta \\ -i\sin\theta & t-\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$=(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta$$

$$=t^2-2\cos\theta\, t+1=0$$

$$t=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2}=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

$$t_1=\cos\theta+i\sin\theta,\quad (A-t_1E)x=0,\quad X_1=[1,\ 1]$$

$$t_2=\cos\theta-i\sin\theta,\quad (A-t_2E)x=0,\quad X_2=[1,\ -1]$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$B^{*}AB=\mathrm{diag}(t_1,t_2)$$

6. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1-i & 3+i & -2\\ -3-i & -1-i & -2i\\ -2i & -2 & -2+2i\end{pmatrix}$

解:

$$\det(tE-A)=(t-i)(t-1)(t+1)=0$$

$$t_1=i,\quad t_2=1,\quad t_3=-1$$

$$t_1=i,\quad (A-iE)x=0,\quad X_1=[1,\ i,\ -1+i]$$

$$t_2=1,\quad (A-E)x=0,\quad X_2=[1,\ 1+i,\ -i]$$

$$t_3=-1,\quad (A+E)x=0,\quad X_3=[1-i,\ -1,\ i]$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i\end{pmatrix}$$

$$B^{*}AB=\mathrm{diag}(i,1,-1)$$