

《线性代数》

第五章: \mathbb{R}^n 上的线性算子

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.12.10

① 凯莱-哈密顿定理

② 实对称矩阵的对角化

利用凯莱-哈密顿定理计算逆算子或逆矩阵

命题 (5.38)

(1). 设 \mathcal{A} 是 \mathbb{R}^n 上的线性算子, 特征多项式是 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$. 那么 \mathcal{A} 可逆当且仅当特征多项式的常数项 χ_n 不为 0. 这时候

$$\mathcal{A}^{-1} = -\chi_n^{-1}(\mathcal{A}^{n-1} + \chi_1 \mathcal{A}^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} \mathcal{E}).$$

(2). 将 (1) 中的 \mathcal{A} 换成 n 阶方阵 A , 结论同样成立. 此时

$$A^{-1} = -\chi_n^{-1}(A^{n-1} + \chi_1 A^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} E).$$

利用凯莱-哈密顿定理计算逆算子或逆矩阵

命题 (5.38)

(1). 设 \mathcal{A} 是 \mathbb{R}^n 上的线性算子, 特征多项式是 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$. 那么 \mathcal{A} 可逆当且仅当特征多项式的常数项 χ_n 不为 0. 这时候

$$\mathcal{A}^{-1} = -\chi_n^{-1}(\mathcal{A}^{n-1} + \chi_1 \mathcal{A}^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} \mathcal{E}).$$

(2). 将 (1) 中的 \mathcal{A} 换成 n 阶方阵 A , 结论同样成立. 此时

$$A^{-1} = -\chi_n^{-1}(A^{n-1} + \chi_1 A^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} E).$$

例 5.39 利用上述命题求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

利用凯莱-哈密顿定理计算多项式在方阵处的值

- 凯莱-哈密顿定理：线性算子 \mathcal{A} 的特征多项式零化该线性算子
- \mathcal{A} 的极小多项式：在零化线性算子 \mathcal{A} 的非零多项式中次数最小的那个
- \mathcal{A} 的极小多项式 $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ 是 \mathcal{A} 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的因子
- 将线性算子 \mathcal{A} 换成方阵 A ，以上结论依然成立

利用凯莱-哈密顿定理计算多项式在方阵处的值

- 设 A 是方阵, $f(t)$ 是多项式, 带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

$r(t)$ 次数小于 $\chi_A(t)$.

利用凯莱-哈密顿定理计算多项式在方阵处的值

- 设 A 是方阵, $f(t)$ 是多项式, 带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

$r(t)$ 次数小于 $\chi_A(t)$.

- 根据凯莱-哈密顿定理, $f(A) = r(A)$

利用凯莱-哈密顿定理计算多项式在方阵处的值

- 设 A 是方阵, $f(t)$ 是多项式, 带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

$r(t)$ 次数小于 $\chi_A(t)$.

- 根据凯莱-哈密顿定理, $f(A) = r(A)$
- 如何用待定系数法确定余项 $r(t)$?

利用凯莱-哈密顿定理计算多项式在方阵处的值

- 设 A 是方阵, $f(t)$ 是多项式, 带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

$r(t)$ 次数小于 $\chi_A(t)$.

- 根据凯莱-哈密顿定理, $f(A) = r(A)$
- 如何用待定系数法确定余项 $r(t)$?

例 5.40 & 5.41 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. 求 A^m 和 B^m .

凯莱-哈密顿定理与不变子空间

- 实数域上的多项式可以分解成次数不超过 2 的多项式的乘积
- 实数域上的向量空间一般有非平凡的不变子空间

凯莱-哈密顿定理与不变子空间

- 实数域上的多项式可以分解成次数不超过 2 的多项式的乘积
- 实数域上的向量空间一般有非平凡的不变子空间

定理 (5.35)

向量空间 \mathbb{R}^n 上的线性算子一定有一维或者二维的不变子空间.

凯莱-哈密顿定理与不变子空间

- 实数域上的多项式可以分解成次数不超过 2 的多项式的乘积
- 实数域上的向量空间一般有非平凡的不变子空间

定理 (5.35)

向量空间 \mathbb{R}^n 上的线性算子一定有一维或者二维的不变子空间.

定理 (5.36)

假设线性算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的特征多项式能分解成两个正次数的实系数多项式的乘积, 那么 \mathcal{A} 有非平凡的不变子空间.

凯莱-哈密顿定理与不变子空间

定理 (5.37)

设线性算子 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 是两个互素的多项式 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的乘积. 定义

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \xi(\mathcal{A})u = 0\}, \quad V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \eta(\mathcal{A})v = 0\}.$$

那么

- (1) U 和 V 都是 \mathcal{A} 的不变子空间, 而且 $\mathbb{R}^n = U \oplus V$.
- (2) $\xi(\mathcal{A})$ 在 V 上的限制是可逆的, $\eta(\mathcal{A})$ 在 U 上的限制是可逆的.

习题 5.5

1. 求如下矩阵的特征多项式和极小多项式:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. 假设 \mathbb{R}^3 上的线性算子 \mathcal{A} 在标准基下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 利用定

理5.37把 \mathbb{R}^3 分解成两个非平凡不变子空间的直和.

3. 利用凯莱-哈密顿定理求如下矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. 计算:

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{100}; \quad (2) \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{66}; \quad (3) \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}^{50}.$$

5. 证明: 线性算子 \mathcal{A} 是幂零的当且仅当其特征多项式没有非零根.

实对称方阵与点积

- 结合不变子空间理论和欧式空间的点积理论可以得到：**实对称矩阵可以通过正交矩阵对角化**

实对称方阵与点积

- 结合不变子空间理论和欧式空间的点积理论可以得到：**实对称矩阵可以通过正交矩阵对角化**
- 令 $X = [x_1, \dots, x_n]$, $Y = [y_1, \dots, y_n]$. 设 A 是 n 阶方阵, 那么 $AX \in \mathbb{R}^n$. 则有

$$(AX | Y) = (X | {}^tAY)$$

实对称方阵与点积

- 结合不变子空间理论和欧式空间的点积理论可以得到：**实对称矩阵可以通过正交矩阵对角化**
- 令 $X = [x_1, \dots, x_n]$, $Y = [y_1, \dots, y_n]$. 设 A 是 n 阶方阵, 那么 $AX \in \mathbb{R}^n$. 则有

$$(AX | Y) = (X | {}^tAY)$$

命题 (5.42)

设 A 是 n 阶实对称方阵, \mathbb{R}^n 是列向量空间. 那么对任意的 $X, Y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$(AX | Y) = (X | AY)$$

引理 (5.43)

设 A 是实对称矩阵, 则算子 \mathcal{A} 的不变子空间的正交补也是 \mathcal{A} 的不变子空间.

实对称方阵与点积

引理 (5.43)

设 A 是实对称矩阵, 则算子 \mathcal{A} 的不变子空间的正交补也是 \mathcal{A} 的不变子空间.

引理 (5.44)

设 A 是对称矩阵, 则算子 \mathcal{A} 有一维不变子空间.

实对称矩阵的对角化

定理 (5.45)

设 A 是实对称矩阵, 那么存在正交矩阵 B 使得 $B^{-1}AB$ 为对角矩阵.

实对称矩阵的对角化

定理 (5.45)

设 A 是实对称矩阵, 那么存在正交矩阵 B 使得 $B^{-1}AB$ 为对角矩阵.

推论 (5.46)

设 A 是 n 阶对称实方阵.

- (1) A 的特征多项式 $\chi_A(t)$ 能分解成一次实多项式的乘积.
- (2) 如果 $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$, 那么 A 可通过正交矩阵对角化到 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

求定理 5.45 中的正交矩阵 B

定理 (5.47)

设 A 实 n 阶对称实方阵, 那么

- (1) A 的特征子空间的维数和是 n , 从而 \mathbb{R}^n 是 A 的特征子空间的直和.
- (2) A 的特征子空间互相正交.

推论 (5.48)

设 A 实 n 阶对称实方阵.

- (1) 每个特征子空间取一个标准正交基, 合起来就是 \mathbb{R}^n 的标准正交基.
- (2) 以 (1) 中的标准正交基中向量为列向量得到矩阵 B , 那么 B 是正交矩阵, 而且 A 通过 B 对角化.
- (3) 记 B 的列向量 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ 如果 $A\mathbf{b}_i = \lambda_i\mathbf{b}_i$, 那么

$$B^{-1}AB = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

求定理 5.45 中的正交矩阵 B

推论 5.48 告诉我们如何把一个实对称矩阵 A 对角化:

- ① 解特征多项式求出特征值
- ② 对每个特征值, 求出对应线性方程组的一个基础解系, 并通过正交化方法得到对应特征子空间的标准正交基
- ③ 按列向量合并所有标准正交基, 得到正交矩阵

求定理 5.45 中的正交矩阵 B

例 (5.49)

找出一个正交矩阵 B 使得对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -6 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 通过矩阵 B 对角化.

例 (5.50)

找出一个正交矩阵 B 使得对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ 通过矩阵 B 对角化.

对双线性型和二次型的应用

定理 (5.51)

设 U 是 \mathbb{R}^n 的线性子空间, f 是 U 上的对称双线性型. 那么 f 有典范标准正交基. 特别, 向量空间 \mathbb{R}^n 上的每个对称双线性型 f 都有典范标准正交基.

对双线性型和二次型的应用

推论 (5.52)

设 U 是 \mathbb{R}^n 的 s 维线性子空间, $q(x)$ 是 U 上的二次型. 那么存在 U 的标准正交基, 在这个基下, $q(x)$ 有如下形式:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2,$$

其中 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_s] \in U$ 是 x 在这个基下的坐标列向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是二次型 $q(x)$ 在 U 的任何一个标准正交基下的矩阵的特征值.

对双线性型和二次型的应用

推论 (5.53)

设 $q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ 是二次齐次多项式, 那么存在 n 阶正交矩阵 T 使得做变量替换 $x = Ty$ 后有

$$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$.

定理 (5.54)

实对称矩阵 A 是正定 (或半正定的) 的当且仅当其特征值都是正数 (或非负的) .

主轴定理的几何意义

- 推论 5.53 又称为主轴定理: 化二次型到主轴上
- 主轴定理的几何意义: 通过直角坐标的变换 (保距变换), 可以把二次多项式方程中的二次型部分化成典范式
- 从而更容易确定曲面的类型

例 5.55 确定二次曲线 $19x_1^2 + 4x_1x_2 + 16x_2^2 - 212x_1 + 104x_2 = 356$ 的类型并画出大概图形.

习题 5.6

1. 找出对角化下面矩阵的一个正交矩阵.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$(4) \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}.$$

2. 求正交矩阵 T 使得变量替换 $x = Ty$ 把下面的二次型化成典范式. (提示: 写出二次型的矩阵, 找出把这个矩阵对角化的正交矩阵, 根据定理5.51的证明, 它就是要求的 T .)

习题 5.6

(1) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$,

(2) x_1x_2

(3) $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$,

(4) $34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2$,

(5) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$,

(6) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

(7) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$,

(8) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$,

(9) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.

3. 确定下面二次曲线的类型并画出其大概图形.

(1) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 5 = 0$,

(2) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 5x_1 = 0$,

习题 5.6

$$(3) \ 9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 52x_1 + 14x_2 = 6,$$

$$(4) \ 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1 - x_2 - 4 = 0,$$

$$(5) \ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 3 = 0,$$

$$(6) \ x_1x_2 + x_1 - 2x_2 - 2 = 0.$$