hw_11(2)

习题5.4

2. 设 A 和 B 是 n 阶方阵. 假设 $\det A = \det B$，$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. 证明：在 $n = 2$ 时，A 和 B 的特征多项式相等. 但当 $n > 2$ 时这个结论不成立.

解:

当 $n = 2$ 时
特征多项式

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - (trA)\lambda + \det A$$

$$P_B(\lambda) = \lambda^2 - (trB)\lambda + \det B$$

故

$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$$

当 $n > 2$

反例:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^3$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)\lambda = \lambda^3 - \lambda$$

故不成立

3. 设 A 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子. 证明：如果 $V_1, \ldots, V_m$ 是 A 的不变子空间，那么这些子空间的和与交都是 A 的不变子空间.

解:
(1) 和空间 $S = \sum_{i=1}^{m} V_i$

设 $s \in S$

$$s = v_1 + \cdots + v_m, \quad v_i \in V_i$$

$$As = Av_1 + \cdots + Av_m$$

因为 v_i 为不变子空间，$v_i \in V_i$

故 $Av_i \in V_i$

故 As 为分别属于 $V_1, \cdots, V_m$ 的向量之和

故 $As \in \sum_{j=1}^m V_j = S$

成立

(2) 交空间 $W = \bigcap_{i=1}^m V_i$

设 $w \in W$

对于 $i = 1, \cdots, m$

因为 V_i 为 A 的不变子空间

故 $Aw \in V_i$

故 $Aw \in \bigcap_{i=1}^m V_i = W$

成立

4. 设 A, B 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子. 证明：如果 $AB = BA$，那么对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$，$\ker(\lambda\mathcal{E} - A)$ 是 B 的不变子空间.

解:

令 $V_\lambda = \ker(\lambda E - A)$

设 $v \in V_\lambda$

故 $Av = \lambda v$
$A(Bv) = (AB)v = (BA)v= (BA)v$
$= B(Av) = B(\lambda v)= B(\lambda v) = \lambda(Bv)= \lambda(Bv)$
故 $A(Bv) = \lambda(Bv)$
$Bv \in \ker(\lambda E - A)$
故成立

6. 设 A 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子，其平方是恒等算子. 证明：

(1) 对任意的向量 $v \in \mathbb{R}^n$，向量 $v - Av$ 是零向量或以 -1 为特征值的特征向量.

解:

令 $w = v - Av$
$Aw = A(v - Av)= Av - A^2v$
$= Av - v = -(v - Av)= -w$

故 $Aw = -w$

$w \neq 0$ 则 w 是以 -1 为特征值的特征向量
$w = 0$ 则为零向量

(2) $\mathbb{R}^n$ 是特征空间 $\mathbb{R}^n_1$ 和 $\mathbb{R}^n_{-1}$ 的直和.

解:

$$v=\frac{1}{2}(v+Av)+\frac{1}{2}(v-Av)$$

令 $u=\frac{1}{2}(v+Av)$
$w=\frac{1}{2}(v-Av)$

$$Au=\frac{1}{2}(Av+A^2v)=\frac{1}{2}(Av+v)=u\quad u\in V_1$$

$$Aw=\frac{1}{2}(Av-A^2v)=\frac{1}{2}(Av-v)=-w\quad w\in V_{-1}$$

故 $\mathbb{R}^n=V_1+V_{-1}$

设 $x\in V_1\cap V_{-1}$

$$\begin{cases}Ax=x\\Ax=-x\end{cases}$$

故 $x=0$
$V_1\cap V_{-1}=\{0\}$

综上 $\mathbb{R}^n=V_1\oplus V_{-1}$

10. 设 A,B 是 n 实阶方阵，且 $AB=BA$，B幂零，证明: $\det(tI-(A+B))=\det(tI-A)$.

解:

故 $A'=P^{-1}AP$ ，$B'=P^{-1}BP$ 为上三角矩阵

B B' 幂零，故对于 B', $b_{ii}=0$

$$(A+B)'=P^{-1}(A+B)P=A'+B'=A'$$

$$\det(tI-(A+B))=\det(tI-P^{-1}(A+B)P)=\det(tI-(A+B)')$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(t-(a_{ii}+b_{ii}))=\prod_{i=1}^{n}(t-a_{ii})=\det(tI-A')$$

由于相似矩阵有相同的特征多项式
$\det(tI-A')=\det(tI-A)$

故 $\det(tI-(A+B))=\det(tI-A)$

12. 方阵 A 和 tA 是否有相同的特征向量? 是否有相同的特征值?

解:

设 v 是 A 的特征向量，特征值 λ，即 $Av=\lambda v$

(1) 特征向量

$$(tA)v = t(Av) = (t\lambda)v$$

$t \neq 0$ 时，特征向量相同
$t = 0$ 时，一般不同

(2) 特征值

tA 的特征值为 $t\lambda$

当 $\lambda = 0$ 或 $t = 1$ 时相同
否则不同

14. 假设向量空间 $\mathbb{R}^3$ 上的线性算子在标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

求该线性算子的所有的不变子空间.

解:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

特征值

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

对于 $\lambda_1 = 1$

$$(I - A)v = 0$$

特征向量

$$v_1 = [-2, -2, 1]$$

特征子空间

$$V_1 = \{k[-2, -2, 1] \mid k \in \mathbb{R}\}$$

对于 $\lambda_2 = 2$

同理

特征向量

$$v_2 = [1, 1, 0] \quad v_3 = [-1, 0, 1]$$

特征子空间

$$V_2 = \{k_1[1, 1, 0] + k_2[-1, 0, 1] \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$$

故不变子空间为:

$\{0\}, \mathbb{R}^3, L_1 = \{k[-2, -2, 1] \mid k \in \mathbb{R}\}$,
$V_2 = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$

及其所有过原点的直线，L_1 和 V_2 中任意一条直线所张成的平面