

《线性代数》

第六章: 复向量空间 \mathbb{C}^n

曾鹏程

(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.12.24

- 1 \mathbb{C}^n 上的点积
- 2 埃尔米特矩阵的对角化
- 3 酉矩阵的对角化

\mathbb{C}^n 上的点积定义

- 集合 $\mathbb{C}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$ 赋予加法和数乘运算后, 称为向量空间

\mathbb{C}^n 上的点积定义

- 集合 $\mathbb{C}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$ 赋予加法和数乘运算后, 称为向量空间
- 能否直接把 \mathbb{R}^n 上的点积定义用到 \mathbb{C}^n ?

\mathbb{C}^n 上的点积定义

- 集合 $\mathbb{C}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$ 赋予加法和数乘运算后, 称为向量空间
- 能否直接把 \mathbb{R}^n 上的点积定义用到 \mathbb{C}^n ?

定义 (6.3)

在 \mathbb{C}^n 中两个向量 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ 和 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 的点积是

$$(z|w) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k.$$

命题 (6.4)

(1) 点积是共轭对称的: $(z|w) = \overline{(w|z)}$.

(2) 点积是一个半线性的:

$$(au + bv|w) = a(u|w) + b(v|w)$$

$$(z|au + bv) = \bar{a}(z|u) + \bar{b}(z|v)$$

(3) $(u|u) > 0$, 如果 $u \neq 0$.

\mathbb{C}^n 上的点积性质

- 带点积的向量空间 \mathbb{C}^n 称为埃米尔特空间/埃氏空间/酉空间
- 埃氏空间中向量 v 的长度:

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)}$$

- 对复数 λ 有: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

\mathbb{C}^n 上的点积性质

- 带点积的向量空间 \mathbb{C}^n 称为埃米尔特空间/埃氏空间/酉空间
- 埃氏空间中向量 v 的长度:

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)}$$

- 对复数 λ 有: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- 如何证明埃氏空间的柯西-施瓦茨不等式:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

\mathbb{C}^n 上的点积性质

- 带点积的向量空间 \mathbb{C}^n 称为埃米尔特空间/埃氏空间/酉空间
- 埃氏空间中向量 v 的长度:

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)}$$

- 对复数 λ 有: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- 如何证明埃氏空间的柯西-施瓦茨不等式:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

- 埃氏空间的三角不等式:

$$\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

\mathbb{C}^n 上的点积性质

- 带点积的向量空间 \mathbb{C}^n 称为埃米尔特空间/埃氏空间/酉空间
- 埃氏空间中向量 v 的长度:

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)}$$

- 对复数 λ 有: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- 如何证明埃氏空间的柯西-施瓦茨不等式:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

- 埃氏空间的三角不等式:

$$\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

- 柯西-施瓦茨不等式和三角不等式的坐标形式?

\mathbb{C}^n 上的点积性质

- 带点积的向量空间 \mathbb{C}^n 称为埃米尔特空间/埃氏空间/酉空间
- 埃氏空间中向量 v 的长度:

$$\|v\| = \sqrt{(v|v)}$$

- 对复数 λ 有: $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- 如何证明埃氏空间的柯西-施瓦茨不等式:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

- 埃氏空间的三角不等式:

$$\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

- 柯西-施瓦茨不等式和三角不等式的坐标形式?
- 如何定义非零向量的夹角?

标准正交基

- 如何定义埃氏空间 \mathbb{C}^n 不变子空间？（对加法和数乘封闭）
- 如何定义埃氏空间 \mathbb{C}^n 的向量 u, v 正交？（ $(u|v) = 0$ ）

标准正交基

- 如何定义埃氏空间 \mathbb{C}^n 不变子空间？（对加法和数乘封闭）
- 如何定义埃氏空间 \mathbb{C}^n 的向量 u, v 正交？（ $(u|v) = 0$ ）

定理 (6.6)

设 U 是埃氏空间 \mathbb{C}^n 的线性子空间. 如果 U 中的非零向量 u_1, \dots, u_m 互相正交, 那么这些向量线性无关. 如果 $m = \dim U$, 那么这些向量构成 U 的一个正交基.

寻找标准正交基

定理 (6.7)

(正交化方法) 设 u_1, u_2, \dots, u_s 是埃氏空间 \mathbb{C}^n 的线性无关向量组, 那么存在互相正交的非零向量 v_1, v_2, \dots, v_s , 使得对每个 k , v_k 是 u_1, u_2, \dots, u_k 的线性组合.

寻找标准正交基

定理 (6.7)

(正交化方法) 设 u_1, u_2, \dots, u_s 是埃氏空间 \mathbb{C}^n 的线性无关向量组, 那么存在互相正交的非零向量 v_1, v_2, \dots, v_s , 使得对每个 k , v_k 是 u_1, u_2, \dots, u_k 的线性组合.

寻找标准正交基

定理 (6.7)

(正交化方法) 设 u_1, u_2, \dots, u_s 是埃氏空间 \mathbb{C}^n 的线性无关向量组, 那么存在互相正交的非零向量 v_1, v_2, \dots, v_s , 使得对每个 k , v_k 是 u_1, u_2, \dots, u_k 的线性组合.

- $v_1 = u_1$, $v_{i+1} = u_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{(u_{i+1}|v_k)}{(v_k|v_k)} v_k$, $i = 2, \dots, s-1$; 可单位化.
- 任取子空间 U 的一个基, 可通过该方法得到 U 的一个标准正交基

埃氏空间 \mathbb{C}^n 的线性子空间 U 的正交补:

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n \mid (v \mid u) = 0, \forall u \in U\}$$

正交补

埃氏空间 \mathbb{C}^n 的线性子空间 U 的正交补:

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{C}^n \mid (v \mid u) = 0, \forall u \in U\}$$

定理 (6.8)

设 U 是埃氏空间 \mathbb{C}^n 的子空间, U^\perp 是它的正交补, 那么

$$\mathbb{C}^n = U \oplus U^\perp, \quad U^{\perp\perp} = U.$$

标准正交基的计算

设 u_1, u_2, \dots, u_s 是埃氏空间 \mathbb{C}^n 的线性子空间 U 的标准正交基, 则 $\forall x, y \in U$ 有:

- ① $x = \sum_{i=1}^s (x | u_i) u_i$
- ② $(x | y) = \sum_{i=1}^s (x | u_i) (u_i | y)$
- ③ $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^s |(x | u_i)|^2$

酉矩阵

- 满足以下条件的矩阵 A 称为酉矩阵：

$$A^* \cdot A = E,$$

其中 $A^* = {}^t\bar{A}$ 是 A 的共轭转置.

- 满足以下条件的矩阵 A 称为酉矩阵：

$$A^* \cdot A = E,$$

其中 $A^* = {}^t\bar{A}$ 是 A 的共轭转置.

- 酉矩阵其实是埃氏空间 \mathbb{C}^n 中的一组标准正交基到另一组标准正交基的转换矩阵，类似于欧式空间的正交矩阵

- 满足以下条件的矩阵 A 称为酉矩阵：

$$A^* \cdot A = E,$$

其中 $A^* = {}^t\bar{A}$ 是 A 的共轭转置.

- 酉矩阵其实是埃氏空间 \mathbb{C}^n 中的一组标准正交基到另一组标准正交基的转换矩阵，类似于欧式空间的正交矩阵

定理 (6.10)

- (1) n 阶复方阵 A 是酉矩阵当且仅当它的列向量形成埃氏空间 \mathbb{C}^n 中的标准正交基.
- (2) n 阶复方阵 A 是酉矩阵当且仅当它的行向量形成埃氏空间 \mathbb{C}^n 中的标准正交基.

- 实的酉矩阵就是正交矩阵
- $\det A^* = ?$
- $|\det A| = ?$
- n 阶酉矩阵的逆和乘积是否仍是酉矩阵？

定理 (6.11)

- (1) 埃氏空间 \mathbb{C}^n 的标准正交基之间的转换矩阵是酉矩阵.
- (2) 任何 n 阶酉矩阵都是埃氏空间 \mathbb{C}^n 的标准正交基之间的转换矩阵.
- (3) 设 A 是 n 阶酉矩阵, u_1, u_2, \dots, u_n 是 \mathbb{C}^n 的标准正交基, 向量组 $(v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_n)A$, 则 v_1, v_2, \dots, v_n 是 \mathbb{C}^n 的标准正交基
- (4) n 阶酉矩阵的逆和乘积都是酉矩阵

习题 6.3

1. 把下面的向量组扩充为埃尔米特空间的正交基:

(1) $(1, 1 - i, 2), (2, -1 + 3i, 1 - i);$

(2) $(-i, 2, -2 - i), (4 - i, -i, i).$

2. 运用正交化方法找出埃氏空间 \mathbb{C}^4 的子空间的一个标准正交基:

(1) $\langle (2, 1, -i, 1), (1, -i, 2, 0), (-i, 0, 1, -i) \rangle;$

(2) $\langle (0, 1 - i, 2, 0), (1, 0, 2, i), (1 - i, -1, 0, -i) \rangle.$

3. 在 \mathbb{C}^3 中找出子空间 $\langle (0, 1 + 2i, -i), (1, -1, 2 - i) \rangle$ 的正交补.

4. 验证下面的矩阵是酉矩阵.

(1) $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix},$ (2) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2+3i & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-3i \end{pmatrix},$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix},$ (4) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}.$

5. 正交矩阵是酉矩阵, 从正交矩阵也可以构造不是正交矩阵的酉矩阵. 验证下面的矩阵是酉矩阵, 它们都是§4.3节习题19的矩阵的简单演变.

(1) $\frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 2a & (a^2-1)i \\ (a^2-1)i & 2a \end{pmatrix},$ a 是任意实数.

习题 6.3

$$(2) \frac{1}{a^2 + a + 1} \begin{pmatrix} a+1 & ai & a(a+1) \\ a(a+1)i & (a+1) & -ai \\ a & a(a+1)i & -a-1 \end{pmatrix}, \quad a \text{ 是任意实数.}$$

$$(3) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4i \\ -4 & 2i & 2 & -1 \\ -2 & -4i & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2i \end{pmatrix}, \quad (4) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} i & 1 & -3i & 5 \\ -5 & 3i & -1 & -i \\ -i & 1 & 5i & 3 \\ 3 & 5i & 1 & -i \end{pmatrix}.$$

6. 设 V 是欧氏空间或埃氏空间, 其中的两个基 e_1, \dots, e_n 和 v_1, \dots, v_n 互称为对偶基, 如果

$$(e_i | v_j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

证明: 对任何基 e_1, \dots, e_n , 对偶基存在且唯一.

7. 设 A_1, A_2, \dots, A_k 是复方阵,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_k \end{pmatrix}.$$

埃尔米特 (Hermitian) 矩阵

- 埃尔米特矩阵是实对称矩阵在复数域上的推广
- 复方阵 A 的共轭转置等于 A , 即 ${}^t\bar{A} = A$, 则称之为埃米尔特矩阵

埃尔米特 (Hermitian) 矩阵

- 埃尔米特矩阵是实对称矩阵在复数域上的推广
- 复方阵 A 的共轭转置等于 A , 即 ${}^t\bar{A} = A$, 则称之为埃米尔特矩阵
- 埃米尔特矩阵可以通过酉矩阵对角化

埃尔米特 (Hermitian) 矩阵

- 埃尔米特矩阵是实对称矩阵在复数域上的推广
- 复方阵 A 的共轭转置等于 A , 即 ${}^t\bar{A} = A$, 则称之为埃米尔特矩阵
- 埃米尔特矩阵可以通过酉矩阵对角化
- 设 A 是 n 阶方阵, 那么 $AX \in \mathbb{C}^n$, 从而

$$(AX | Y) = (X | A^* Y)$$

- 当 A 是埃米尔特矩阵时, $(AX | Y) = (X | AY)$.

埃尔米特矩阵的性质

引理 (6.12)

设 A 是埃尔米特矩阵, 定义算子 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, X \rightarrow AX$. 那么:

- (1) 对任意 $X, Y \in \mathbb{C}^n$, 有 $(\mathcal{A}X | Y) = (X | \mathcal{A}Y)$.
- (2) 算子 \mathcal{A} 的特征值是实数.
- (3) 算子 \mathcal{A} 的不同特征值的特征向量正交.
- (4) 算子 \mathcal{A} 的不变子空间的正交补也是 \mathcal{A} 的不变子空间.

埃尔米特矩阵的对角化

定理 (6.13)

设 A 是埃尔米特矩阵, 那么存在酉矩阵 B 使得 $B^{-1}AB$ 为对角矩阵.

埃尔米特矩阵的对角化

定理 (6.13)

设 A 是埃尔米特矩阵, 那么存在酉矩阵 B 使得 $B^{-1}AB$ 为对角矩阵.

- 证明思路可以参考定理 5.45 – 欧式空间中实对称矩阵的对角化版本
- 埃尔米特矩阵的对角化方法与实对称矩阵一样:
 - (i) 解特征多项式求出特征值;
 - (ii) 对每个特征值, 求出对应线性方程组的一个基础解系, 并通过正交化方法得到对应特征子空间的标准正交基;
 - (iii) 按列向量合并所有标准正交基, 得到酉矩阵, 原埃尔米特矩阵通过其对角化

埃尔米特矩阵的对角化

例 (6.14)

通过酉矩阵将埃尔米特矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2i & -1+i \\ -2i & 3 & -1-i \\ -1-i & -1+i & 1 \end{pmatrix}$ 对角化.

例 (6.15)

通过酉矩阵将埃尔米特矩阵 $A = \begin{pmatrix} 8 & -1-i & -1+5i \\ -1+i & 9 & 2+3i \\ -1-5i & 2-3i & -3 \end{pmatrix}$ 对角化.

半双线性型

- 复向量空间 \mathbb{C}^n 上的点积可以看成是 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ 的映射
- 这个映射是否是双线性型？
- 半双线性型的定义？
- 半双线性型的理论与双线性型类似
- 半双线性型 f 在基 (v_i) 下的矩阵 F 是什么？
- 基 (v_i) 到基 (v'_i) 的转换矩阵为 A ，则 f 在基 (v'_i) 下的矩阵 F' 是什么？
- 非退化半双线性型 f ？
- 埃尔米特型 vs. 斜埃尔米特型？埃尔米特矩阵 vs. 斜埃尔米特矩阵？

半双线性型与二次型

- 每个埃尔米特型 f 确定了一个埃尔米特二次型 q
- f 和 q 的典范式、典范基？典范标准正交基？

定理 (6.17)

设 U 是 \mathbb{C}^n 的线性子空间, f 是 U 上的埃尔米特型. 那么 f 有典范标准正交基. 特别, 向量空间 \mathbb{C}^n 上的每个埃尔米特型 f 都有典范标准正交基.

证明思路跟定理 5.51 – 欧式空间中对称双线性型的标准典范基定理 – 基本一致

推论 (6.18)

设 U 是 \mathbb{C}^n 的线性子空间, q 是 U 上的埃尔米特二次型, 秩为 r . 那么存在 U 的标准正交基使得 q 有如下的典范式:

$$q(x) = \lambda_1 |x_1|^2 + \cdots + \lambda_r |x_r|^2,$$

其中 x_1, x_2, \dots, x_s 是 x 在这个标准正交基下的坐标, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 是 $q(x)$ 在这个标准正交基的前 r 个向量的值, 也是 q 在任何一个标准正交基下的矩阵的非零特征值. 特别, $q(x)$ 是正定的 (或半正定的) 当且仅当 $q(x)$ 在一个标准正交基下的矩阵的特征值都是正的 (或非负的).

证明思路跟推论 4.52、推论 5.52 基本一致

推论 (6.19)

设 $q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i\bar{x}_j$ 是复二次函数, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ 那么存在 n 阶酉矩阵 T 使得做变量替换 $x = Ty$ 后有

$$q(x) = \lambda_1|y_1|^2 + \lambda_2|y_2|^2 + \cdots + \lambda_r|y_r|^2,$$

其中 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 是 n 阶方阵 (a_{ij}) 的非零特征值.

证明思路跟推论 5.53 基本一致

定理 (6.20)

设 A 是 n 阶埃尔米特矩阵, 则下面条件等价:

- (1) A 是正定的;
- (2) A 的特征值都是正的;
- (3) 存在可逆矩阵 n 阶方阵 P 使得 $A = P^* \cdot P$, 其中 $P^* = {}^t\bar{P}$

例 (6.21)

λ 取什么值时下面的埃尔米特二次函数是正定的:

$$x_1 \bar{x}_1 - (1 - i)x_1 \bar{x}_3 - (1 + i)\bar{x}_1 x_3 + 2\lambda x_2 \bar{x}_3 + 2\bar{\lambda} \bar{x}_2 x_3 + x_2 \bar{x}_2 + 5x_3 \bar{x}_3.$$

- 如何求埃尔米特二次型和埃尔米特型的典范基? 并对正定的埃尔米特矩阵 A 求出可逆矩阵 P 使得 $A = P^* \cdot P$?

习题 6.4

1. 验证下面的矩阵是埃尔米特矩阵, 并通过酉矩阵将下面的埃尔米特矩阵对角化.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 2-4i \\ 2+4i & 3 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 5 & 1+5i \\ 1-5i & 6 \end{pmatrix},$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 5 & i \\ -1 & -i & 3 \end{pmatrix}, \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

2. 确定 λ 取什么值时下面的埃尔米特二次函数是正定的:

$$x_1\bar{x}_1 + ix_1\bar{x}_2 - i\bar{x}_1x_2 + \lambda x_2\bar{x}_2.$$

3. 设 f 是 \mathbb{C}^n 的 s 维子空间 V 上的埃尔米特型, 它在某个基下的矩阵是 $F = (f_{ij})$. 证明: f 给出的埃尔米特二次型是正定的当且仅当 F 的主子式(定义见§4.4 第五部分) $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ 都是正的; 而且雅克比方法适用.

酉矩阵定义的算子

定理 (6.22)

设 A 是酉矩阵. 定义算子 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, X \rightarrow AX$. 则对 \mathbb{C}^n 中任意的两个向量 X 和 Y , 有

$$(AX | AY) = (X | Y).$$

即算子 \mathcal{A} 保持点积, 从而保持长度和距离.

酉矩阵定义的算子

定理 (6.23)

设线性算子 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 保持点积, 即对任意的 $X, Y \in \mathbb{C}^n$ 有 $(\mathcal{A}X | \mathcal{A}Y) = (X | Y)$. 那么 \mathcal{A} 在 \mathbb{C}^n 的标准基下的矩阵 A 是酉矩阵, 从而对任意的 $X \in \mathbb{C}^n$ 有 $\mathcal{A}X = AX$, 其中 A 是酉矩阵.

酉矩阵定义的算子

引理 (6.24)

设 A 是酉矩阵.

(1) 如果 λ 是 A 的特征值, 那么 λ 的模等于 1, 即 $|\lambda| = 1$.

(2) 如果 X, Y 分别是 A 的以 λ, μ 为特征值的特征向量, $\lambda \neq \mu$, 那么 X 和 Y 正交, 即 $(X|Y) = 0$.

酉矩阵定义的算子

引理 (6.24)

设 A 是酉矩阵.

(1) 如果 λ 是 A 的特征值, 那么 λ 的模等于 1, 即 $|\lambda| = 1$.

(2) 如果 X, Y 分别是 A 的以 λ, μ 为特征值的特征向量, $\lambda \neq \mu$, 那么 X 和 Y 正交, 即 $(X|Y) = 0$.

引理 (6.25)

假设 A 是 n 阶酉矩阵, 定义线性算子 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, X \rightarrow AX$. 那么 \mathcal{A} 的不变子空间的正交补也是 \mathcal{A} 的不变子空间.

酉矩阵的对角化

定理 (6.26)

设 A 是 n 阶酉矩阵, 那么存在 n 阶酉矩阵 B 使得 $B^{-1}AB$ 为对角矩阵, 而且对角线上的数的模都是 1.

酉矩阵的对角化方法与埃米尔特矩阵 (或实对称矩阵) 的对角化一样:

- ① 解酉矩阵的特征多项式求出特征值;
- ② 对每个特征值, 求出对应线性方程组的一个基础解系, 并通过正交化方法得到对应特征子空间的标准正交基;
- ③ 按列向量合并所有标准正交基, 得到酉矩阵, 原酉矩阵通过其对角化

酉矩阵的对角化

例 (6.27)

通过酉矩阵将酉矩阵 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+i & -1+i \end{pmatrix}$ 对角化.

例 (6.28)

通过酉矩阵将酉矩阵 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 对角化.

例 (6.29)

通过酉矩阵将酉矩阵 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{pmatrix}$ 对角化.

习题 6.5

通过酉矩阵将酉矩阵将如下酉矩阵对角化.

$$1. \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ -1+i & 1+i \end{pmatrix}, \quad 2. \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2+i \\ 2+i & 2 \end{pmatrix}, \quad 3. \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1+2i \\ 1+2i & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 5. \begin{pmatrix} i \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -i \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$6. \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1-i & 3+i & -2 \\ -3-i & -1-i & -2i \\ -2i & -2 & -2+2i \end{pmatrix}, \quad 7. \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3+i & -2i & 1+i \\ -2 & -2+2i & -2 \\ 1+i & -2i & -3+i \end{pmatrix}.$$