hw_7(1)

习题4.1

1. 设 E_1, E_2, E_3 是列向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的标准基。

(1) 证明：向量组 $E_1, E_1+2E_2, E_1+2E_2+3E_3$ 和向量组 $E_1-E_2+E_3, E_2-E_3, E_3$ 都是 $\mathbb{R}^3$ 的基。

解：

$$
\begin{aligned}
&\text{设} aE_1 + b(E_1+2E_2) + c(E_1+2E_2+3E_3) = 0 \\
&\quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b+2c=0 \\ 3c=0 \end{cases} \\
&a=b=c=0 \\
&\text{故 } E_1, E_1+2E_2, E_1+2E_2+3E_3 \text{ 线性无关，为 } \mathbb{R}^3 \text{ 的基} \\
&\text{设 } a(E_1-E_2+E_3) + b(E_2-E_3) + cE_3 = 0 \\
&\quad \begin{cases} a=0 \\ -a+b=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \\
&a=b=c=0 \\
&\text{故 } E_1-E_2+E_3, E_2-E_3, E_3 \text{ 线性无关，为 } \mathbb{R}^3 \text{ 的基}
\end{aligned}
$$

(2) 求从基 $E_1, E_1+2E_2, E_1+2E_2+3E_3$ 到基 $E_1-E_2+E_3, E_2-E_3, E_3$ 的转换矩阵，以及从基 $E_1-E_2+E_3, E_2-E_3, E_3$ 到基 $E_1, E_1+2E_2, E_1+2E_2+3E_3$ 的转换矩阵。

解：

$$
\begin{aligned}
T_{B\to A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
T_{A\to B} = T_{B\to A}{}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}
$$

(3) 假设向量 X 在基 $E_1, E_1+2E_2, E_1+2E_2+3E_3$ 下的坐标列向量是 $[2,-1,5]$，求 X 在基 $E_1-E_2+E_3, E_2-E_3, E_3$ 下的坐标列向量。

解:

$$T_1\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&3\\0&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\14\\23\end{pmatrix}$$

4. 叙述和证明定理4.7的行向量空间的版本。

解:

行向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 u 在基 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 下的坐标行向量为 $X=(x_1,\cdots,x_n)$，在基 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 下的坐标行向量为 $Y=(y_1,\cdots,y_n)$，那么其中T是从基 $A_1, A_2, \cdots, A_n$到基 $B_1, B_2, \cdots, B_n$的转换矩阵

证明:

$u = X(A_1, A_2, \cdots, A_n) = Y(B_1, B_2, \cdots, B_n)$

$(B_1, B_2, \cdots, B_n) = (A_1, A_2, \cdots, A_n)T$

得

$X(A_1, A_2, \cdots, A_n) = Y(A_1, A_2, \cdots, A_n)T$

$X = YT$

5. 设 $a_1=(3,5), a_2=(-2,6), b_1=(\cos\theta,\sin\theta), b_2=(-\sin\theta,\cos\theta)$。利用习题1很容易知道向量组 a_1, a_2 和向量组 b_1, b_2 都是 $\mathbb{R}^2$ 的基。求从基 a_1, a_2 到基 b_1, b_2 的转换矩阵 T。

解:

$$T=A^{-1}B$$

$$=\begin{pmatrix}3&-2\\5&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=\frac{1}{28}\begin{pmatrix}6\cos\theta+2\sin\theta&-6\sin\theta+2\cos\theta\\-5\cos\theta+3\sin\theta&5\sin\theta+3\cos\theta\end{pmatrix}$$

6. 向量组 $a_1=(5,-2), a_2=(3,1)$ 和向量组 $b_1=(3,-2), b_2=(-3,4)$ 均是行向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的基。求向量 $u=(7,-5)$ 在这两个基下的坐标行向量。

解:

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}1&2\\-3&5\end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = (7, -5)A^{-1} = \frac{1}{11}(7, -5)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = (2, -1)$$

$$X_2 = (7, -5)B^{-1} = \frac{1}{6}(7, -5)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = (\frac{13}{6}, -\frac{1}{6})$$