《线性代数》

第一章: 线性方程组

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.9.17

教学安排

1. 课程介绍
2. 线性方程组初步
3. 齐次线性方程组
4. 矩阵初步
5. 低阶行列式

课程介绍

- 课程名称：线性代数 I （Linear Algebra I）
- 学分/学时：4/64
- 授课语言：中文
- 参考教材：《线性代数》，席南华著，2025.6 出版
- 教学内容：前六章

课程介绍

- 课程名称：线性代数 I （Linear Algebra I）
- 学分/学时：4/64
- 授课语言：中文
- 参考教材：《线性代数》，席南华著，2025.6 出版
- 教学内容：前六章
- 考核方式：平时成绩 30% + 期中考试 30% + 期末考试 40%
- 平时成绩：作业 20% + 随堂测试 (共 6 次，取 top4 总成绩) 10%

课程介绍

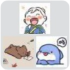
- 课程名称：线性代数 I （Linear Algebra I）
- 学分/学时：4/64
- 授课语言：中文
- 参考教材：《线性代数》，席南华著，2025.6 出版
- 教学内容：前六章
- 考核方式：平时成绩 30% + 期中考试 30% + 期末考试 40%
- 平时成绩：作业 20% + 随堂测试 (共 6 次，取 top4 总成绩) 10%
- 学习要求：定义弄清楚，定理搞明白，证明得会，计算要擅长

课程介绍

- 课程名称：线性代数 I （Linear Algebra I）
- 学分/学时：4/64
- 授课语言：中文
- 参考教材：《线性代数》，席南华著，2025.6 出版
- 教学内容：前六章
- 考核方式：平时成绩 30% + 期中考试 30% + 期末考试 40%
- 平时成绩：作业 20% + 随堂测试 (共 6 次，取 top4 总成绩) 10%
- 学习要求：定义弄清楚，定理搞明白，证明得会，计算要擅长
- 一些建议：1）抽象问题具像化/具体化，复杂问题简单化；2）使用大语言模型辅助学习（多角度理解）；3）在理解的基础上把重要结论当数学常识记忆

助教

付邦正、颜纪龙



群聊：线代I 2025秋

该二维码7天内(9月18日前)有效，重新进入将更新

第一章：线性方程组前言

- 线性代数：由解线性方程组发展而来的数学理论

第一章：线性方程组前言

- 线性代数：由解线性方程组发展而来的数学理论
- 一个趣味题：一百和尚，一百馒头，大和尚一人分三个，小和尚三人分一个，问大小和尚各有多少？

第一章：线性方程组前言

- 线性代数：由解线性方程组发展而来的数学理论
- 一个趣味题：一百和尚，一百馒头，大和尚一人分三个，小和尚三人分一个，问大小和尚各有多少？
- 当未知元个数和方程个数不一致，尤其当未知元个数很大时，如何解？

- 线性代数：由解线性方程组发展而来的数学理论
- 一个趣味题：一百和尚，一百馒头，大和尚一人分三个，小和尚三人分一个，问大小和尚各有多少？
- 当未知元个数和方程个数不一致，尤其当未知元个数很大时，如何解？
- 为了有效解决实际问题，我们有必要进行线性方程组的理论探讨

线性方程与线性方程组

- **线性方程**：$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

线性方程与线性方程组

- 线性方程： $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$
- 线性方程组： n 个未知数、m 个方程

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{1}
$$

线性方程与线性方程组

- 线性方程：$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$
- 线性方程组：n 个未知数、m 个方程

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{1}
$$

- 在线性方程组中**本质的是系数、常数以及它们所在位置**
- 系数、常数项和未知元等取值范围为实数
- 一“个”解
- 例 1.1：某数组是某方程组的一个解

阶梯型方程组和高斯消元法

- 为了求出方程组（1）的解，需判断是否有解，若有解，有多少？
- 例 1.2：通过三个阶梯型方程组看出解的类型

阶梯型方程组和高斯消元法

- 为了求出方程组（1）的解，需判断是否有解，若有解，有多少？
- 例 1.2：通过三个阶梯型方程组看出解的类型
- 消元法（有序消去未知元）可以把线性方程组化成阶梯型方程组：

- 为了求出方程组（1）的解，需判断是否有解，若有解，有多少？
- 例 1.2：通过三个阶梯型方程组看出解的类型
- 消元法（有序消去未知元）可以把线性方程组化成阶梯型方程组：

$$\begin{aligned}
g_{11}x_1 + \quad \cdots \quad + g_{1n}x_n &= h_1 \\
g_{2k}x_k + \quad \cdots \quad + g_{2n}x_n &= h_2 \\
g_{3l}x_l + \quad \cdots \quad + g_{3n}x_n &= h_3 \\
&\vdots \\
g_{rs}x_s + \cdots \quad + g_{rn}x_n &= h_r \\
0 &= h_{r+1} \\
&\vdots \\
0 &= h_m
\end{aligned} \tag{2}$$

- $x_1, x_k, x_l \ \ldots, x_s$ 为主未知元；其余未知元为自由变量

解的类型判别

命题 (1.3)

(1). 方程组 *(2)* 有解当且仅当 $h_{r+1} = \cdots = h_m = 0.$
(2). 该方程组有唯一解当且仅当 $r = n$, 且 $h_{r+1} = \cdots = h_m = 0.$
(3). 该方程组有无穷多解当且仅当 $r < n$, 且 $h_{r+1} = \cdots = h_m = 0.$

方程组的初等变换

- 方程组（1）和方程组（2）的解是否一样？
- 这些变换分为两类：
  - I 型初等变换：交换两个方程位置，其余方程位置不变
  - II 型初等变换：某个方程的某个倍数加到另一个方程

方程组的初等变换

- 方程组（1）和方程组（2）的解是否一样？
- 这些变换分为两类：
  - I 型初等变换：交换两个方程位置，其余方程位置不变
  - II 型初等变换：某个方程的某个倍数加到另一个方程

定理 (1.4)

初等变换不改变方程组的解.

方程组等价

两个方程组如有相同的解或都无解，则等价.

推论 (1.5)

每个线性方程组都与一个阶梯型方程组等价.

方程组等价

两个方程组如有相同的解或都无解，则等价.

推论 (1.5)

每个线性方程组都与一个阶梯型方程组等价.

定理 (1.6)

一个线性方程组有解当且仅当它通过初等变换化成阶梯型后如果出现形如 $0 = h_t$ 的方程，则那些 h_t 全为 0.

方程组相容与确定

- 一个线性方程组方程组有解，则称为相容的；否则，不相容
- 若解唯一，则称为确定的.

方程组相容与确定

- 一个线性方程组方程组有解，则称为相容的；否则，不相容
- 若解唯一，则称为确定的.

定理 (1.7)

方程组 *(1)* 是确定的（有唯一解）当且仅当它通过初等变换化成阶梯型方程组 *(2)* 满足条件：$r = n$ 且 $h_{r+1} = \cdots = h_m = 0$.

练习1.8 (1) 下面两个线性方程组的未知元数量均大于方程的数量，把它们化成阶梯形方程组，从而判断它们是否确定的.

(a)
$$\begin{aligned} 2x+3y-z &= -5 \\ 3x-y+4z &= 6 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x+2y-z+w &= -3 \\ 4x-3y+2z+3w &= 4 \\ 2x-7y+4z+w &= 8 \end{aligned}$$

(2) 证明：如果一个线性方程组中的未知元数量大于方程的数量，那么这个方程组不能是确定的.

(3) 举例说明方程的数量大于或等于未知元的数量时，方程组可以是无解，有很多解，或只有唯一解.

齐次线性方程组的定义

- 称常数项为 0 的线性方程为齐次线性方程
- 齐次线性方程组：由齐次线性方程构成的线性方程组
- 与方程组（1）相伴的齐次线性方程组如下：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

- 齐次线性方程组总是相容的吗？
- 在线性代数中有特殊地位（有关其解集以及是否有非零解）

齐次线性方程组的解

定理 (1.8)

(1). 如果 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是方程组 *(3)* 的两个解，那么对于任意的数 a,b，数组 $a\xi_1+b\eta_1,\cdots,a\xi_n+b\eta_n$ 也是方程组（*3*）的解.
(2). 如果 $s_1,\cdots,s_n$ 和 $t_1,\cdots,t_n$ 是方程组 *(1)* 的两个解，那么 $s_1-t_1,\cdots,s_n-t_n$ 也是方程组 *(3)* 的解.
(3). 如果 $s_1,\cdots,s_n$ 是方程组 *(1)* 的一个解，$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是方程组 *(3)* 的一个解，那么 $s_1+\xi_1,\cdots,s_n+\xi_n$ 也是方程组 *(1)* 的解.
(4). 如果方程组 *(3)* 中方程的数量少于未知元的数量，即 $m<n$, 那么方程组 *(3)* 有非零解.

练习二

练习1.10 (1) 判断下列方程组是否是确定的(即是否有解且解是唯一的):

$$\begin{aligned} x-3y+4z&=-4\\ 3x-7y+7z&=-8\\ -4x+6y-z&=7 \end{aligned}$$

(2) 对(1)中线性方程组相伴的齐次线性方程组讨论其解.

(3) 如果方程组(1.1) 是确定的, 证明它相伴的的齐次线性方程组(1.3) 只有零解. 举例说明反之不对.

练习1.11 假设 $m=n$. 证明方程组(1.1) 是确定的当且仅当它相伴的齐次线性方程组(1.3) 只有零解.

矩阵的引入

- 一个线性方程组通过初等变换化成阶梯型方程组是对方程的系数和常数做一系列运算

矩阵的引入

- 一个线性方程组通过初等变换化成阶梯型方程组是**对方程的系数和常数做一系列运算**
- 系数矩阵 (基本矩阵)$A = (a_{ij})$ 和增广矩阵 $[A|b] = (a_{ij}|b_i)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

矩阵的引入

- 一个线性方程组通过初等变换化成阶梯型方程组是**对方程的系数和常数做一系列运算**
- 系数矩阵 (基本矩阵)$A=(a_{ij})$ 和增广矩阵 $[A|b]=(a_{ij}|b_i)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- I 型行初等变换 (或 I 型初等行变换): 交换两行位置
- II 型行初等变换 (或 II 型初等行变换): 一行的倍数加到另一行

行初等变换矩阵求解

定理 (1.12)

通过行初等变换矩阵可以化成阶梯型.

定理 (1.12)

通过行初等变换矩阵可以化成阶梯型.

例 (1.13)

a, b 取什么值时，线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2ax_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + bx_3 &= 4 \end{aligned} \tag{4}$$

有唯一解、无穷多解，且在无穷多解时求出解.

练习1.14 判断下列线性方程组是否有解, 在有解时求出它的解:

(1)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3 &= -1 \\ 2x_1+x_2-2x_3 &= 1 \\ x_1+x_2+x_3 &= 3 \\ x_1+2x_2-3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} \lambda x_1+x_2+x_3 &= 1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3 &= 1 \\ x_1+x_2+\lambda x_3 &= 1 \end{aligned}.$$

(3)
$$\begin{aligned} x+5y-2z &= -7 \\ -3x+y+9z-5w &= 9 \\ 4x-8y-z+7w &= 0 \end{aligned}$$

练习1.15 在平面上引进直角坐标系, 求:

(1) 直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 和 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 的交点;

(2) 求四点 $(x_i, y_i), i=1,2,3,4$, 共圆的充分必要条件.

低阶行列式

- 问题：能否通过矩阵或矩阵中的数以某种方式直接给出方程组的公式解？
- 考虑两个未知元的线性方程组：

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{5}$$

低阶行列式

- 问题: 能否通过矩阵或矩阵中的数以某种方式直接给出方程组的公式解？
- 考虑两个未知元的线性方程组:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{5}$$

- 定义矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的行列式为:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

低阶行列式

命题 (1.16)

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$(即系数矩阵行列式不为 0), 那么方程组 (5) 的解由如下公式给出:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

命题 (1.16)

如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$(即系数矩阵行列式不为 0), 那么方程组 (5) 的解由如下公式给出:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

问题: 如果是三元线性方程组且满足系数矩阵行列式不为 0，其解的公式如何？

练习三

练习1.18 证明

(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$.

(4) 利用命题1.16，从二元一次方程组(1.6) 的解的角度解释(2) 和(3) 中的等式.

练习1.19 对三阶方阵的行列式给出类似于练习1.18中的等式和问题并证明或回答它们.

练习三 (续)

练习1.20 观察并计算如下矩阵的行列式: $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

练习1.21 利用命题1.16或命题1.17求解下列方程组:

$$(1) \quad \begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad (2) \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + \quad +2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 \quad &= 1 \end{aligned} .$$

习题

1. 求实系数二次多项式 $f(x)$ 使得 $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.

2. 求实系数三次多项式 $f(x)$ 使得 $f(-2) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 13$, $f(2) = 33$.

3. 计算行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \qquad (3) \begin{vmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad (5) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \qquad (6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$$

(i 为虚数单位, 即 $i^2 = -1$.)