hw_13(2)

习题5.8

1. 对下面给定的 A 和 B，求线性方程组 $AX = B$ 的最小二乘解。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

解:

$${}^tAA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{pmatrix}$$

$${}^tAB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

解方程组:

$$\begin{pmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

得解:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

故

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. (1) 用最小二乘法求出一个拟合下面数据的直线方程。

$$\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 & 3 & 9 \end{array}$$

解:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad {}^tAB = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix}$$

解方程组:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix}$$

得解:

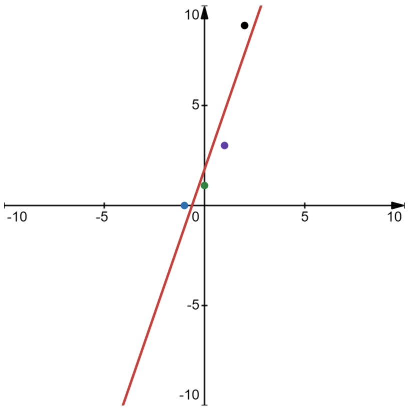
$$x_1 = 2.9, \quad x_2 = 1.8$$

故拟合直线为:

$$y = 2.9x + 1.8$$

(2) 在坐标平面上画出(1)中的数据给出的点和所求的直线。

解:



4. 用最小二乘法求出拟合上一题的数据的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$，并对 $x = -1, 0, 1, 2$ 在坐标平面上画出二次函数的点，然后作出二次函数的概略图。

解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

计算:

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad {}^tAB = \begin{pmatrix} 39 \\ 21 \\ 13 \end{pmatrix}$$

解方程组:

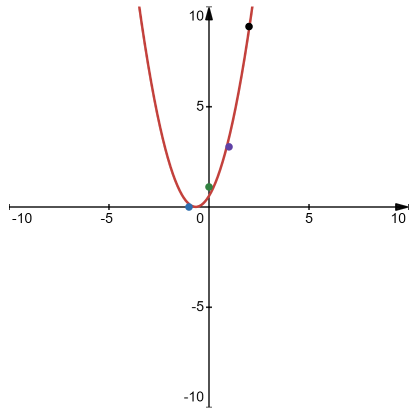
$$\begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 21 \\ 13 \end{pmatrix}$$

得解:

$$a = 1.25, \quad b = 1.65, \quad c = 0.55$$

故拟合曲线为:

$$y = 1.25x^2 + 1.65x + 0.55$$



习题6.1

3. 设 A 和 B 是 n 阶实方阵。证明：

$$\overline{\det(A+iB)}=\det(A-iB).$$

（横线表示复共轭。）

解：
A,B 均为实方阵

$$\overline{\det(A+iB)}=\det(\overline{A+iB})=\det(A-iB)$$

4. 设 A 和 B 是 n 阶实方阵，

$$C=\begin{pmatrix}A & B\\ -B & A\end{pmatrix}\in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

借助复数域上的初等变换证明

$$\det C=|\det(A+iB)|^2.$$

解：

$$\det C=\begin{vmatrix}A & B\\ -B & A\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}A+iB & B\\ -B+iA & A\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}A+iB & B\\ 0 & A-iB\end{vmatrix}$$

$$=\det(A+iB)\cdot\overline{\det(A+iB)}=|\det(A+iB)|^2$$

因此

$$\det C=|\det(A+iB)|^2$$

6. 证明

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(a_0+\varepsilon^k a_1+\varepsilon^{2k}a_2+\cdots+\varepsilon^{(n-1)k}a_{n-1}\right),$$

其中 ε 是 1 的 n 次本原根。

解:

令

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$X_k = \left[1,\ \varepsilon^k,\ \ldots,\ (\varepsilon^k)^{n-1}\right]$$

则有

$$AX_k = f(\varepsilon^k)X_k$$

即

$$(tE-A)X_k = 0 \quad \text{当且仅当} \quad t = f(\varepsilon^k)$$

所以

$$\left(f(\varepsilon^k)E - A\right)X_k = 0$$

令 $t_k = f(\varepsilon^k)$，则 t_k 是矩阵 A 的特征值。

故行列式

$$|A| = \prod_{k=0}^{n-1} t_k = \prod_{k=0}^{n-1}\left(a_0 + a_1\varepsilon^k + \cdots + a_{n-1}\varepsilon^{(n-1)k}\right)$$