《线性代数》

第二章: 矩阵

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.9.24

教学安排

1. 行和列的向量空间

2. 矩阵的秩

前言

- 回顾：借助矩阵、利用消元法求解线性方程组更加简便
- 当未知元数量很大时，求解仍旧很困难
- 例 1.22: 求解由斐波拉契数列构造的线性方程组
- 初等变换的本质针对的是 $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, b_i), i = 1, \cdots, m$
- 对有序数组做数乘、加法运算，则进入向量空间的世界
- 本章将探讨主未知元个数 r 的含义，并深入认识矩阵结构及线性方程组的结构

向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的定义

定义 (2.1)

赋予集合 $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ 以下运算:

$$\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n),$$
$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n),$$

称 $\mathbb{R}^n$ 为向量空间.

向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的定义

定义 (2.1)

赋予集合 $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ 以下运算：

$$\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n),$$
$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n),$$

称 $\mathbb{R}^n$ 为向量空间.

- $\mathbb{R}^n$ 的元素为长 n 的向量； λ 为实数或纯量
- 该定义的两个运算满足八个性质
- 矩阵的行向量空间与列向量空间

向量之间的线性关系

设 $X_1, X_2, \cdots, X_k \in \mathbb{R}^n$, $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$.

- 什么是向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的一个线性组合？

向量之间的线性关系

设 $X_1, X_2, \cdots, X_k \in \mathbb{R}^n$, $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$.

- 什么是向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的一个线性组合？
- 称非空子集 U 为 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间: 如果 U 中任意两个向量的所有线性组合都在 U 中

向量之间的线性关系

设 $X_1, X_2, \cdots, X_k \in \mathbb{R}^n$, $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$.

- 什么是向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的一个线性组合？
- 称非空子集 U 为 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间：如果 U 中任意两个向量的所有线性组合都在 U 中
- 如果 V 是 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 所有线性组合形成的集合，则 V 是否为 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间？

向量之间的线性关系

设 $X_1, X_2, \cdots, X_k \in \mathbb{R}^n$, $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$.

- 什么是向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的一个线性组合？
- 称非空子集 U 为 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间: 如果 U 中任意两个向量的所有线性组合都在 U 中
- 如果 V 是 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 所有线性组合形成的集合，则 V 是否为 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间？
- 是！且由 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 张成:

$$\langle X_1, X_2, \cdots, X_k \rangle = \{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k | \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

向量之间的线性关系

设 $X_1, X_2, \cdots, X_k \in \mathbb{R}^n$, $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$.

- 什么是向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的一个线性组合？
- 称非空子集 U 为 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间: 如果 U 中任意两个向量的所有线性组合都在 U 中
- 如果 V 是 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 所有线性组合形成的集合，则 V 是否为 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间？
- 是！且由 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 张成:

$$\langle X_1, X_2, \cdots, X_k \rangle = \{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k | \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

- 例 2.3: 行向量空间 $\mathbb{R}^n$ 由 n 个单位向量张成

线性相关与线性无关

- 可以利用向量的线性组合定义
- 称 $\mathbb{R}^n$ 的向量 (组)$X_1, X_2, \cdots, X_k$ 线性相关，如果存在不全为 0 的实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 使得

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k = 0.$$

- 可以利用向量的线性组合定义
- 称 $\mathbb{R}^n$ 的向量 (组)$X_1, X_2, \cdots, X_k$ 线性相关，如果存在不全为 0 的实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 使得

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k = 0.$$

- 如果 $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k = 0$ 蕴含 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, 则称 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 线性无关

- 可以利用向量的线性组合定义
- 称 $\mathbb{R}^n$ 的向量 (组)$X_1, X_2, \cdots, X_k$ 线性相关，如果存在不全为 0 的实数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 使得

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k = 0.$$

- 如果 $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k = 0$ 蕴含 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, 则称 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 线性无关
- 例 2.4: 判断向量组是线性相关还是线性无关

一些简单结论

引理 (2.5)

(1) 如果向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 中的一部分向量是线性相关的，那么 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 是线性相关的.
(2) 如果向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 线性无关，那么向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的任何部分向量是线性无关的.
(3) 如果向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 中某一个向量是零向量，那么如果向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 线性相关.
(4) 任何非零向量线性无关.

一些简单结论

引理 (2.6)

向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k (k \geq 2)$ 线性相关当且仅当其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

一些简单结论

引理 (2.6)

向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k (k \geq 2)$ 线性相关当且仅当其中至少有一个向量是其余向量的线性组合.

引理 (2.7)

(1) 如果向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 线性无关，而 $X_1, X_2, \cdots, X_k, X$ 线性相关，那么 X 是 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的线性组合.

(2) 如果向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 线性无关，而 X 不能表示成 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的线性组合，那么 $X_1, X_2, \cdots, X_k, X$ 线性无关.

定义 (2.8)

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，V 中的向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 称为 V 的 (一个) 基，如果该向量组线性无关且 V 中每一个向量 X 可表示成

$$X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r.$$

定义 (2.8)

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，V 中的向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 称为 V 的 (一个) 基，如果该向量组线性无关且 V 中每一个向量 X 可表示成

$$X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r.$$

- 系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是唯一确定的
- 这些系数称为 X 关于基 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 的坐标

定义 (2.8)

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，V 中的向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 称为 V 的 (一个) 基，如果该向量组线性无关且 V 中每一个向量 X 可表示成

$$X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_r X_r.$$

- 系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是唯一确定的
- 这些系数称为 X 关于基 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 的坐标
- 例 2.9: （1）$\mathbb{R}^n$ 的标准基 $E_1, \cdots, E_n$；
  (2) 向量组 $E_1 + \lambda_2 E_2, E_2 + \lambda_3 E_3, \cdots, E_{n-1} + \lambda_n E_n$ 也是基吗？

引理 (2.10)

设 $Y_1, \cdots, Y_s$ 都是向量 $X_1, \cdots, X_r \in \mathbb{R}^n$ 的线性组合.
(1) 如果 $s > r$, 那么 $Y_1, \cdots, Y_s$ 线性相关.
(2) 如果 $Y_1, \cdots, Y_s$ 线性无关，那么 $s \leq r$.

引理 (2.10)

设 $Y_1, \cdots, Y_s$ 都是向量 $X_1, \cdots, X_r \in \mathbb{R}^n$ 的线性组合.
(1) 如果 $s > r$, 那么 $Y_1, \cdots, Y_s$ 线性相关.
(2) 如果 $Y_1, \cdots, Y_s$ 线性无关，那么 $s \leq r$.

练习一：假设向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 线性无关，判断向量组
$Y_1 = X_1 + X_2, \cdots, Y_{k-1} = X_{k-1} + X_k, Y_k = X_k + X_1$ 是否线性相关？

$\mathbb{R}^n$ 线性子空间的基和维数

定理 (2.11)

设 V 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的非零线性子空间，那么
(1) V 有基，其所有基所含向量个数一样，这个数不超过 n，称为线性子空间 V 的维数，记作 $dim V$.
(2) V 中的任何一组线性无关的向量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 均可扩充为 V 的一个基.
(3) 如果 V 的维数是 r，那么 V 中任何 $r+1$ 个向量都线性相关.
(4) 如果 V 的维数是 r，那么 V 中任何 r 个线性无关的向量形成 V 的一个基.

向量组的秩

- $V = \{0\}$ 的维数定义为 0
- $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的秩 (rank) 定义为该向量组张成的线性子空间的维数，即

$$\mathrm{rank}\{X_1, X_2, \cdots, X_k\} = \dim \langle X_1, X_2, \cdots, X_k \rangle$$

向量组的秩

- $V = \{0\}$ 的维数定义为 0
- $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的秩 (rank) 定义为该向量组张成的线性子空间的维数，即

$$\text{rank}\{X_1, X_2, \cdots, X_k\} = \dim \langle X_1, X_2, \cdots, X_k \rangle$$

- 向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的 (一个) 线性无关组？

向量组的秩

- $V = \{0\}$ 的维数定义为 0
- $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的秩 (rank) 定义为该向量组张成的线性子空间的维数，即

$$\text{rank}\{X_1, X_2, \cdots, X_k\} = \dim \langle X_1, X_2, \cdots, X_k \rangle$$

- 向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的 (一个) 线性无关组？
- 向量组 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的 (一个) 极大线性无关组？

命题 (2.12)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的向量组，含有非零向量，那么

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的极大线性无关组存在，且 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的任意极大线性无关组都是线性子空间 $< X_1, X_2, \cdots, X_k >$ 的基

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 所有的极大线性无关组含有的向量个数一样

(3) $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 任意的线性无关组可以扩充为 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的极大线性无关组

(4) 如果 $X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_r}$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的极大线性无关组，那么

$$r = rank\{X_1, X_2, \cdots, X_k\} = dim\,\langle X_1, X_2, \cdots, X_k\rangle \leq k.$$

习题 2.1

1. 计算线性组合 $2X_1+5X_2-3X_3$, 其中

$$X_1=(3,1,2,-2),\quad X_2=(1,4,-3,5),\quad X_3=(7,4,1,-9).$$

2. 解向量方程: $3(X_1-X)+2(X_2+X)=5(X_3+X)$, 其中

$$X_1=(2,5,1,3),\quad X_2=(10,1,5,10),\quad X_3=(4,1,-1,1).$$

3. 判断下列向量组是否线性无关, 并计算这些向量组的秩.

(1) $X_1=(1,2,3),\quad X_2=(2,-1,3)$;

(2) $X_1=(2,3,-1),\ X_2=(3,5,2),\ X_3=(-2,4,1)$;

(3) $X_1=(4,-5,2,6),\quad X_2=(2,-2,1,3),\ X_3=(6,-3,3,9)$,;

(4) $X_1=(4,-5,2,6),\quad X_2=(2,-2,1,3),\quad X_3=(5,-3,3,9),\quad X_4=(4,-1,5,6)$.

4. 假设向量 X_1, X_2, ..., X_k 线性无关. 判断下列向量组是否线性相关, 并计算这些向量组的秩.

(1) $Y_1=3X_1+2X_2+X_3+X_4,\quad Y_2=2X_1+5X_2+3X_3+2X_4,\quad Y_3=3X_1+4X_2-X_3+2X_4$.

(2) $Y_1=X_1+X_2,\quad Y_2=X_2+X_3,\quad Y_3=X_3+X_4,\quad \ldots,\quad Y_{k-1}=X_{k-1}+X_k$, $Y_k=X_k+X_1$.

(3) $Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_2 - X_3$, $Y_3 = X_3 - X_4$, ..., $Y_{k-1} = X_{k-1} - X_k$, $Y_k = X_k - X_1$.

5. 求 λ 使得向量 $(7, -2, \lambda)$ 是向量 $(2, 3, 5)$, $(3, 7, 8)$, $(1, -6, 1)$ 的线性组合.

6. 证明在 $\mathbb{R}^n$ 中, 第一个坐标和最后一个坐标相等的向量全体是一个线性子空间.

7. 证明有 n 个未知元的齐次线性方程组的解集是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间.

8. 设 U 与 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间. 集合 $U \cup V$ 张成的线性子空间称为 U 与 V 的和, 记做 $U + V$. 证明

(1) $U + V = \{u + v \mid u \in U,\ v \in V\}$;

(2) $U \cap V = 0$ 当且仅当对任意的 $x \in U + V$, 存在唯一的 $u \in U$ 和唯一的 $v \in V$ 使得 $x = u + v$. 这时称 $U + V$ 为直和, 记作 $U \oplus V$.

(3) $U + V$ 是直和当且仅当如果 $u + v = 0$, $u \in U$, $v \in V$, 则 $u = v = 0$.

9. 设 U 与 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间. 证明: 如果 $U \cap V = 0$, 则 $\dim(U+V) = \dim U + \dim V$.

10. 证明 $\mathbb{R}^n$ 中的线性子空间的任一个基都可以扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的基.

习题 2.1

11. 秩的概念其实可以对 $\mathbb{R}^n$ 的任意非空子集 S 定义. 首先, 所有线性组合 $\alpha_1 Y_1 + \cdots + \alpha_i Y_i$, 其中 Y_1, ..., $Y_i \in S$, $i \in \mathbb{N}$, α_1, ..., $\alpha_i \in \mathbb{R}$, 形成的集合是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间, 称为由 S 张成的线性子空间, 记作 $\langle S \rangle$. 然后定义 S 的秩为 $\operatorname{rank} S = \dim \langle S \rangle$.

设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, S 中的向量组 X_1, ..., X_r 称为 S 的极大线性无关组如果这些向量线性无关, 而对于任意的 $X \in S$, 向量组 X_1, ..., X_r, X 线性相关.

设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 含有非零向量. 证明:

(1) S 中的极大线性无关向量组存在, 且 S 中的任意极大线性无关组是线性子空间 $\langle S \rangle$ 的基.

(2) S 中的任意线性无关向量组均可以扩充为 S 中的极大线性无关组.

矩阵的秩的定义

考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

定义 (2.13)

矩阵 A 的行向量 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 张成的 ($\mathbb{R}^n$ 的) 线性子空间称为 A 的行空间，记作 $V_r(A)$ 或 V_r，其维数称为 A 的行秩，记作 $r_r(A)$，即 $r_r(A) = \dim V_r(A)$.

类似地，列向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ 张成的 ($\mathbb{R}^m$ 的) 线性子空间称为 A 的列空间，记作 $V_c(A)$ 或 V_c，其维数称为 A 的列秩，记作 $r_c(A)$，即 $r_c(A) = \dim V_c(A)$.

矩阵初等变换不影响行秩与列秩

引理 (2.14)

如果 B 是由矩阵 A 经过有限次行初等变换得到的矩阵，则

(1) $r_r(B) = r_r(A)$,

(2) $r_c(B) = r_c(A)$.

矩阵行秩与列秩相等

定理 (2.15)

矩阵 A 的行秩和列秩相等. 这个数称为 A 的秩，记作 $rankA$ 或 $rk(A)$ 或 $r(A)$.

矩阵行秩与列秩相等

定理 (2.15)

矩阵 A 的行秩和列秩相等. 这个数称为 A 的秩, 记作 $rankA$ 或 $rk(A)$ 或 $r(A)$.

问题: 如何求矩阵的秩?

线性方程组的可解性准则

命题 (2.16)

线性方程组化为阶梯型后主未知元的个数等于原方程组的系数矩阵的秩，所以主未知元的个数不依赖原方程组化为阶梯型的方式.

线性方程组的可解性准则

命题 (2.16)

线性方程组化为阶梯型后主未知元的个数等于原方程组的系数矩阵的秩，所以主未知元的个数不依赖原方程组化为阶梯型的方式.

定理 (2.17)

线性方程组有解当且仅当其系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等.

线性方程组的可解性准则

命题 (2.16)

线性方程组化为阶梯型后主未知元的个数等于原方程组的系数矩阵的秩，所以主未知元的个数不依赖原方程组化为阶梯型的方式.

定理 (2.17)

线性方程组有解当且仅当其系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等.

问题：如何利用向量空间重新认识线性方程组（给出上述定理的另外一种证明）？

1. 如同行的情况, 交换矩阵 A 的两列称为I型列初等变换, 把某一列的某个倍数加到另一列称为II型列初等变换. 证明:

(1) 列初等变换不改变矩阵的秩.

(2) 联合使用行初等变换和初等列变化可以把矩阵化成如下形式

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}\cdots\tilde{a}_{rr} \neq 0$, r 就是矩阵的秩.

2. 计算下列矩阵的秩.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) $$\begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, (x \text{ 是变量}),$$

(5) $$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & x & 3 & \cdots & n-1 & 1 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}, (x \text{ 是变量}).$$

3. 证明若 $a_0 \neq 0$, 则方阵

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n-1} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩为 n.

习题 2.2

4. 本题给出矩阵行秩等于列秩的另一个证明, 不用行初等变换. 设 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 的行秩为 r, 列秩为 s. 取 A 的 r 个线性无关的行向量 A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_r}. 这 r 个行向量形成一个 $r \times n$ 矩阵 $\tilde{A}$. 设 $\tilde{A}$ 的列秩为 t, $\tilde{\mathbf{a}}_{j_1}$, $\tilde{\mathbf{a}}_{j_2}$, ..., $\tilde{\mathbf{a}}_{j_t}$, 是 $\tilde{A}$ 的列向量的极大线性无关组. 证明:

(1) $t \leqslant r$.

(2) 矩阵 A 的任何一个列向量 $\mathbf{a}_j$ 都是列向量 $\mathbf{a}_{j_1}$, $\mathbf{a}_{j_2}$, ..., $\mathbf{a}_{j_t}$ 的线性组合, 从而 $s \leqslant t \leqslant r$, 即列秩不超过行秩. (提示: 利用 A 的任一行向量都是 A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_r} 的线性组合.)

(3) 把 A 的行作为列, 得到如下 $n \times m$ 矩阵, 称为 A 的转置(矩阵),

$$
{}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},
$$

有 $r_c({}^tA) = r_r(A)$, $r_r({}^tA) = r_c(A)$.

结合(2) 与(3) 便知 $s \leqslant r$, $r \leqslant s$, 所以 $r = s$.