hw_8(1)

习题4.3

1. 设 $X \in \mathbb{R}^n$ 的长度是 6，向量 $Y \in \mathbb{R}^n$ 有如下性质：对任意纯量 a, b，向量 $aX + bY$ 与向量 $4bX - 9aY$ 正交。求 Y 和 $2X + 3Y$ 的长度。

解：$(aX + bY) \cdot (4bX - 9aY) = 0$

$4ab\|X\|^2 + (4b^2 - 9a^2)(X \cdot Y) - 9ab\|Y\|^2 = 0$

$X \cdot Y = 0$

$$4\|X\|^2 - 9\|Y\|^2 = 0$$

故 $\|Y\| = 4$

$$\|2X + 3Y\| = \sqrt{4\|X\|^2 + 12(X \cdot Y) + 9\|Y\|^2}$$

$$= \sqrt{4 \times 36 + 0 + 9 \times 16} = \sqrt{144 + 144} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

3. 设 X, Y, Z 是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量，满足以下性质：$\|X\| = \|Z\| = 5$, $\|Y\| = 1$, $\|X - Y + Z\| = \|X + Y + Z\|$。如果 X 和 Y 的夹角是 $\frac{\pi}{8}$，求 Y 和 Z 的夹角。

解：两边平方展开

$$\|X - Y + Z\|^2 = \|X + Y + Z\|^2$$

$$-2(X \cdot Y + Z \cdot Y) = 2(X \cdot Y + Z \cdot Y)$$

$$Y \cdot (X + Z) = 0$$

$$X \cdot Y = 5 \cos \frac{\pi}{8}$$

$$Y \cdot Z = -5 \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\cos \theta = -\cos \frac{\pi}{8}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{8}$$

4. 设 X, Y, Z 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量。如果 X 与 Z 的夹角和 Y 与 Z 的夹角相等，证明 Z 与向量 $\|Y\|X - \|X\|Y$ 正交。

解:

$$X \cdot Z = \|X\|\|Z\| \cos\theta$$

$$Y \cdot Z = \|Y\|\|Z\| \cos\theta$$

$$(\|Y\|X - \|X\|Y) \cdot Z = \|Y\|(X \cdot Z) - \|X\|(Y \cdot Z)$$

$$= \|Y\|\|X\|\|Z\| \cos\theta - \|X\|\|Y\|\|Z\| \cos\theta = 0$$

故正交

5. 令 θ 为 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $(1, 1, \ldots, 1)$ 和向量 $(1, 2, \ldots, n)$ 的夹角。求当 $n \to \infty$ 时 θ 的极限值。

解:

$$\cos\theta = \frac{(1, 1, \ldots, 1) \cdot (1, 2, \ldots, n)}{\|(1, 1, \ldots, 1)\| \cdot \|(1, 2, \ldots, n)\|}$$

$$= \frac{1 + 2 + \cdots + n}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故当 $n \to \infty$ 时
$\theta \to \frac{\pi}{6}$

7. 设 U 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，V 是 U 的子空间。

(1) 给出 V 在 U 中的正交补 $V_U^\perp$ 的定义。

解:

$$V_U^\perp = \{u \in U : u \cdot v = 0 \text{ 对所有 } v \in V\}$$

(2) 证明 $U = V \oplus V_U^\perp$。

解: 取 $u \in U$
u 在 V 上投影为 u'

$$u = u' + (u - u')$$

$$u' \in V, \quad u - u' \in V_U^\perp$$

故 $U=V+V_U^{\perp}$
若 $\lambda\in V\cap V_U^{\perp}$，则 $\lambda\in V$ 且与 V 内所有向量正交
故 $\lambda\cdot\lambda=0$，$\lambda=0$
交集为零向量，故为直和

$$U=V\oplus V_U^{\perp}$$

9. 设 $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1+x_2+2x_3+x_4=0\}$ 是行向量欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的子空间，V 是 U 的由 $(1,0,0,-1)$ 张成的子空间。

(1) 求 V 在 U 中的正交补。

解:
$u\cdot(1,0,0,-1)=0$

$$\begin{cases}x_1=x_4\\x_1+x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$$

故 $u=t_1(1,-2,0,1)+t_2(0,-2,1,0)$

故 $V_U^{\perp}$ 为由 $(1,-2,0,1),(0,-2,1,0)$ 张成的子空间

(2) 求 V 在 $\mathbb{R}^4$ 中的正交补。

解: 故 $V^{\perp}$ 为由 $(1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$ 张成的子空间

10. 保持上一题的记号。

(1) 求 U 的一个标准正交基;

解:
U 的标准正交基为:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right),\quad\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right),\quad\left(-\frac{\sqrt{42}}{42},-\frac{\sqrt{42}}{42},-\frac{2\sqrt{42}}{42},\frac{\sqrt{42}}{7}\right)$$

(2) 把 (1) 中的基扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基。

解: 增加 $\left(\frac{\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7},\frac{2\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$

(3) 用 (2) 中的标准正交基构造一个四阶正交矩阵。

解： 正交矩阵：

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{42}}{42} & \frac{\sqrt{7}}{7} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{42}}{42} & \frac{\sqrt{7}}{7} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{42}}{21} & \frac{2\sqrt{7}}{7} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{42}}{7} & \frac{\sqrt{7}}{7} \end{pmatrix}$$