《线性代数》

第五章: $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.11.26

教学安排

1. 第四章剩余部分
2. 从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的线性映射
3. 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射
4. 可对角化矩阵

关于第四章的应用

具体应用场景例子有:

- 转换矩阵: 比如在3D 游戏中, 一个转换矩阵就能让成千上万个顶点（角色、场景）统一完成移动或旋转。不再需要为每个点单独计算, 效率极高
- 点积: 在机器学习中, 数据（如图片）被看作高维向量。点积能快速衡量它们的相似度, 是许多 AI 算法（如分类、推荐）的核心基础
- 双线性形式: 在工程和物理中, 它是描述能量、应力等物理量的天然数学语言, 帮助我们基于物理定律（如能量最小原理）来建立模型

线性代数是现代科学的“通用语言”, 相关概念是理解高级领域的基石, 比如

- 量子力学: 系统状态就是向量空间中的向量
- 数据压缩（如 JPEG）: 核心是把图片从一种表示转换到另一种更高效的表示, 这正是“基变换

正定（半正定）二次型

定理 (4.60)

假设实二次型在某个基下的矩阵的主子式 Δ_k, $1 \le k \le s$ 都是非零的，那么二次型的负惯性指数等于下面数列的变号数（变号是指相邻两项正负号不同）：

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s.$$

正定（半正定）二次型

定理 (4.60)

假设实二次型在某个基下的矩阵的主子式 $\Delta_k, 1 \le k \le s$ 都是非零的，那么二次型的负惯性指数等于下面数列的变号数（变号是指相邻两项正负号不同）：

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s.$$

定理 (4.61)

实二次型是正定的当且仅当它（在任意基下）的矩阵的主子式都是正的.

常见问题：求典范式和判断正定与否

- 求二次型或对称双线性型的典范式？
- 判断二次型或对称矩阵是否为正定的？

- 求二次型或对称双线性型的典范式？
- 判断二次型或对称矩阵是否为正定的？

例 4.62 判断 λ 取什么值时二次型
$q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 是正定的?

常见问题：求典范基

- 配方法比较繁琐
- 利用初等变换，具体思路？

常见问题：求典范基

- 配方法比较繁琐
- 利用初等变换，具体思路？
- 设二次型或对称双线性型在某个基 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 下的矩阵是 $F = (f_{ij})$. 考虑三种情形：
  1. $f_{11} \neq 0$

常见问题：求典范基

- 配方法比较繁琐
- 利用初等变换，具体思路？
- 设二次型或对称双线性型在某个基 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 下的矩阵是 $F = (f_{ij})$. 考虑三种情形：
    1. $f_{11} \neq 0$
    2. $f_{11} = 0$ 但某个 $f_{kk} \neq 0$

常见问题：求典范基

- 配方法比较繁琐
- 利用初等变换，具体思路？
- 设二次型或对称双线性型在某个基 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 下的矩阵是 $F = (f_{ij})$. 考虑三种情形：
  1. $f_{11} \neq 0$
  2. $f_{11} = 0$ 但某个 $f_{kk} \neq 0$
  3. F 对角线上的值都为 0

常见问题：求典范基

- 配方法比较繁琐
- 利用初等变换，具体思路？
- 设二次型或对称双线性型在某个基 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 下的矩阵是 $F = (f_{ij})$. 考虑三种情形：
  1. $f_{11} \neq 0$
  2. $f_{11} = 0$ 但某个 $f_{kk} \neq 0$
  3. F 对角线上的值都为 0

例 4.63 三维列向量空间 $\mathbb{R}^3$ 上的双线性型 $f(x, y)$ 在标准基下有如下形式:
$f(x, y) = 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + 6x_2y_3 + 3x_3y_1 + 6x_3y_2 + 10x_3y_3.$
求其典范基和典范式.

常见问题：求典范基

- 配方法比较繁琐
- 利用初等变换，具体思路？
- 设二次型或对称双线性型在某个基 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 下的矩阵是 $F = (f_{ij})$. 考虑三种情形：
  1. $f_{11} \neq 0$
  2. $f_{11} = 0$ 但某个 $f_{kk} \neq 0$
  3. F 对角线上的值都为 0

例 4.63 三维列向量空间 $\mathbb{R}^3$ 上的双线性型 $f(x, y)$ 在标准基下有如下形式:
$f(x, y) = 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + 6x_2y_3 + 3x_3y_1 + 6x_3y_2 + 10x_3y_3.$
求其典范基和典范式.

例 4.64 针对例 4.62 的二次型在某基下的矩阵 $F, (\lambda = 4)$，求出变换矩阵 A 使得 ${}^tAFA$ 为对角矩阵，然后求出方阵 P 使得 $F = {}^tPP$.

常见问题：判断两个对称矩阵是否合同

- 先求出两个矩阵的对角合同矩阵
- 比较两个对角矩阵对角线上的正负值的个数
- 两个对称矩阵合同当且仅当两对角矩阵对角线上的正负值的个数分别相等
- 若两对称矩阵主子式都不为零，则可使用雅可比方法

常见问题：判断两个对称矩阵是否合同

- 先求出两个矩阵的对角合同矩阵
- 比较两个对角矩阵对角线上的正负值的个数
- 两个对称矩阵合同当且仅当两对角矩阵对角线上的正负值的个数分别相等
- 若两对称矩阵主子式都不为零，则可使用雅可比方法

例 4.65 判断 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 9 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ 是否合同？

线性算子

线性算子在各个领域中的具体应用场景:

- 计算机图形学与几何变换 (旋转、缩放、剪切、反射)
- 微分与积分: 函数空间上的线性算子
- 量子力学: 态空间上的算子
- 数据科学与降维: 投影与特征分解 (投影算子、协方差算子、主成分分析)
- 线性系统与控制理论(状态转移矩阵)

$\mathbb{R}^2$ 上的线性算子

- 线性算子/线性变换：从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射
- 对一个线性算子 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，存在唯一的二阶方阵 A 使得 $\varphi(X) = AX$

$\mathbb{R}^2$ 上的线性算子

- 线性算子/线性变换：从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射
- 对一个线性算子 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，存在唯一的二阶方阵 A 使得 $\varphi(X) = AX$

命题 (5.1)

映射

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [f(x, y), g(x, y)]$$

是线性的当且仅当 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 都是 x, y 的齐次线性多项式，即存在实数 a, b, c, d 使得

$$f(x, y) = ax + by, \quad g(x, y) = cx + dy.$$

平面线性算子的若干例子

- 伸缩变换 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [ax, ay]$
- 关于 x 轴的反射: $\mathcal{R}_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [x, -y]$
- 关于 x 轴的投影: $\mathcal{P}_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [x, 0]$
- 平面上的水平剪切变换: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [x + ay, y]$
- 平面上的挤压变换: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [ax, by]$

平面线性算子的若干例子

- 伸缩变换 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [ax, ay]$
- 关于 x 轴的反射: $\mathcal{R}_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [x, -y]$
- 关于 x 轴的投影: $\mathcal{P}_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [x, 0]$
- 平面上的水平剪切变换: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [x + ay, y]$
- 平面上的挤压变换: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [x, y] \to [ax, by]$
- 平面上绕原点旋转角度 θ 的变换
- 关于直线 l 的反射 $\mathcal{R}_l$
- 沿着直线 l 垂直方向投影到 l 的投影 $\mathcal{P}_l$

1. 对行向量空间 $\mathbb{R}^2$ 表述命题 5.1 并给出证明.

2. 下面关于 $\mathcal{T}(x,y)$ 的公式定义了映射 $\mathcal{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. 判断各小题的映射是否为线性变换. 如果是, 确定变换的矩阵.

(1) $\mathcal{T}[x,y]=[y,x]$, (2) $\mathcal{T}(x,y)=[x,-y]$,

(3) $\mathcal{T}[x,y]=[0,x]$, (4) $\mathcal{T}(x,y)=[x,x]$,

(5) $\mathcal{T}[x,y]=[x^2,y^3]$, (6) $\mathcal{T}(x,y)=[2^x,2^y]$,

(7) $\mathcal{T}[x,y]=[1,x]$, (8) $\mathcal{T}(x,y)=[x+1,y+1]$,

(9) $\mathcal{T}[x,y]=[x-y,x+y]$, (10) $\mathcal{T}(x,y)=[3x+2y,5x-6y]$.

3. 给出一个非线性映射 $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 使得对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和 $X\in\mathbb{R}^2$ 有 $\varphi(aX)=aX$.

4. 证明下面的映射 $\mathcal{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的线性变换并求出其矩阵.

(1) $\mathcal{T}$ 先绕原点旋转角度 $3\pi/4$, 再做关于 y 轴的反射.

(2) $\mathcal{T}$ 先做关于 y 轴的反射, 再做关于 x 轴的反射.

(3) $\mathcal{T}$ 先做关于 x 轴的反射, 再做以直线 $x=y$ 为轴的反射.

(4) $\mathcal{T}$ 先做关于 x 轴的反射, 再绕原点旋转角度 $\pi/4$.

5. 证明上一题的小题(2)和(3)中的变换都是绕原点的旋转变换并确定旋转的角度.

$\mathbb{R}^n$ 上的线性算子

记号：

- $\mathcal{A}: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的线性算子
- $\mathcal{A}u$: 向量 $u \in \mathbb{R}^n$ 的像 $\mathcal{A}(u)$
- $u_1, \ldots, u_n$: $\mathbb{R}^n$ 的基，简记为 (u_i)
- X: 向量 u 在 (u_i) 下的坐标列向量

记号：

- $\mathcal{A}: \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的线性算子
- $\mathcal{A}u$: 向量 $u \in \mathbb{R}^n$ 的像 $\mathcal{A}(u)$
- $u_1, \ldots, u_n$: $\mathbb{R}^n$ 的基，简记为 (u_i)
- X: 向量 u 在 (u_i) 下的坐标列向量

问题：

- 如何定义 $\mathcal{A}$ 在基 (u_i) 下的矩阵？
- $\mathcal{A}u$ 在基 (u_i) 下的坐标列向量是什么？

线性算子的核与像

- 恒等映射：$\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, u \to u$
- 可逆算子: $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = \varepsilon$
- 线性算子 $\mathcal{A}$ 的像：$\operatorname{im}\mathcal{A} = \{\mathcal{A}u | u \in \mathbb{R}^n\}$
- 线性算子 $\mathcal{A}$ 的核：$\ker\mathcal{A} = \{u \in \mathbb{R}^n | \mathcal{A}u = \mathbf{0}\}$

定理 (5.10)

设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性算子，那么

(1) 线性算子 $\mathcal{A}$ 的核与像 $im\mathcal{A}$ 均是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间.

(2) 线性映射 φ 的核的维数与像的维数之和是 $n = dim\,\mathbb{R}^n$:

$$dim\,ker\mathcal{A} + dim\,im\mathcal{A} = dim\,\mathbb{R}^n.$$

(3)$\mathcal{A}$ 是可逆的（即非退化的）当且仅当 $ker\,\mathcal{A}=\mathbf{0}$，即当且仅当 $\mathcal{A}$ 是单射.

(4)$\mathcal{A}$ 是可逆的（即非退化的）当且仅当 $im\,\mathcal{A}=\mathbb{R}^n$，即当且仅当 $\mathcal{A}$ 是满射.

定理 (5.10)

设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性算子，那么
(1) 线性算子 $\mathcal{A}$ 的核与像 $im\mathcal{A}$ 均是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间.
(2) 线性映射 φ 的核的维数与像的维数之和是 $n=dim\,\mathbb{R}^n$:

$$dim\,ker\mathcal{A}+dim\,im\mathcal{A}=dim\,\mathbb{R}^n.$$

(3)$\mathcal{A}$ 是可逆的（即非退化的）当且仅当 $ker\,\mathcal{A}=\mathbf{0}$，即当且仅当 $\mathcal{A}$ 是单射.
(4)$\mathcal{A}$ 是可逆的（即非退化的）当且仅当 $im\,\mathcal{A}=\mathbb{R}^n$，即当且仅当 $\mathcal{A}$ 是满射.

问题：$\mathbb{R}^n=\ker\mathcal{A}\oplus\operatorname{im}\mathcal{A}$?

相似矩阵

- 考虑线性算子在不同基下的矩阵之间的联系
- 已知 (u_i) 和 (v_i) 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个基，前者到后者的转换矩阵是 T. 若线性算子 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 在基 (u_i) 下的矩阵是 A, 那么在基 (v_i) 下的矩阵是什么？

相似矩阵

- 考虑线性算子在不同基下的矩阵之间的联系
- 已知 (u_i) 和 (v_i) 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个基，前者到后者的转换矩阵是 T. 若线性算子 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 在基 (u_i) 下的矩阵是 A, 那么在基 (v_i) 下的矩阵是什么？

定义 (5.11)

称方阵 B 和方阵 A 是相似的，记作 $B\sim A$, 如果存在可逆矩阵 T 使得 $B=T^{-1}AT$.

相似矩阵

- 方阵的相似关系是等价关系，具备自反性，对称性和传递性

相似矩阵

- 方阵的相似关系是等价关系，具备自反性，对称性和传递性
- 两个矩阵在一个等价类中当且仅当它们相似
- 在相似类（或等价类）中寻找简单的矩阵是一个重要的问题

相似矩阵

- 方阵的相似关系是等价关系，具备自反性，对称性和传递性
- 两个矩阵在一个等价类中当且仅当它们相似
- 在相似类（或等价类）中寻找简单的矩阵是一个重要的问题
- 若矩阵 A 与一个对角矩阵相似，那么计算 A 的幂变得非常简单，甚至可计算方阵 A 的多项式

相似矩阵

- 方阵的相似关系是等价关系，具备自反性，对称性和传递性
- 两个矩阵在一个等价类中当且仅当它们相似
- 在相似类（或等价类）中寻找简单的矩阵是一个重要的问题
- 若矩阵 A 与一个对角矩阵相似，那么计算 A 的幂变得非常简单，甚至可计算方阵 A 的多项式
- 判断一个矩阵是否与对角矩阵相似不容易
- 可利用线性算子这种语言和工具

相似矩阵

定理 (5.12)

设 $\mathcal{A}$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子，$u_1, \cdots, u_n$ 和 $v_1, \ldots, v_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个基，从基 (u_i) 到基 (v_i) 的转换矩阵是 T.

(1) 如果 $\mathcal{A}$ 在基 $u_1, \cdots, u_n$ 下的矩阵是 A, 那么 $\mathcal{A}$ 在基 $v_1, \cdots, v_n$ 下的矩阵是 $T^{-1}AT$.

(2) 线性算子 $\mathcal{A}$ 在不同基下的矩阵全体形成一个相似类.

习题 5.2

1. 下面关于 $\mathcal{T}(x,y)$ 的公式定义了映射 $\mathcal{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. 判断各小题的映射是否为: (i) 单射, (ii) 满射, (iii) 可逆映射.

(1) $\mathcal{T}[x,y]=[y,x]$, (2) $\mathcal{T}(x,y)=[x,-y]$,

(3) $\mathcal{T}[x,y]=[0,x]$, (4) $\mathcal{T}(x,y)=[x,x]$,

(5) $\mathcal{T}[x,y]=[x^2,y^3]$, (6) $\mathcal{T}(x,y)=[2^x,2^y]$,

(7) $\mathcal{T}[x,y]=[1,x]$, (8) $\mathcal{T}(x,y)=[x+1,y+1]$,

(9) $\mathcal{T}[x,y]=[x-y,x+y]$, (10) $\mathcal{T}(x,y)=[3x+2y,5x-6y]$.

2. 下面关于 $\mathcal{T}(x,y,z)$ 的公式定义了线性映射 $\mathcal{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. (i) 求出这些线性映射的核, (ii) 求出这些线性映射的像, (iii) 判断这些线性映射是否可逆.

(1) $\mathcal{T}[x,y,z]=[z,y,x]$, (2) $\mathcal{T}(x,y,z)=[x,-y,0]$,

(3) $\mathcal{T}[x,y,z]=[3z,2y,x]$, (4) $\mathcal{T}(x,y,z)=[x,x+y,x+y+z]$,

(5) $\mathcal{T}[x,y,z]=[x+y,y+z,z+x]$, (6) $\mathcal{T}(x,y,z)=[x-y,y-z,z-x]$.

3. 设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是映射. 假设 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$. 证明对任意的非负整数 k, 有 $(\mathcal{AB})^k=\mathcal{A}^k\mathcal{B}^k$.

4. 设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是线性算子(也称为线性变换), 定义为 $\mathcal{A}(x,y)=(-x,y)$.

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵 A;

(2) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $u_1=(1,1)$, $u_2=(-1,1)$ 下的矩阵 B,

(3) 求从基 u_1, u_2 到基 $v_1=(2,1)$, $v_2=(1,0)$ 的转换矩阵 S, 再通过计算 $S^{-1}BS$ 求出 $\mathcal{A}$ 在基 v_1, v_2 下的矩阵.

(4) 求从标准基到基 v_1, v_2 的转换矩阵 T, 再通过计算 $T^{-1}AT$ 求出 $\mathcal{A}$ 在基 v_1, v_2 下的矩阵. 比较(3)和(4) 的计算的繁简并回顾例4.8 的解题方法.

4. 定义线性算子 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 如下

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2-x_3\\2x_2-x_1-x_3\\2x_3-x_1-x_2\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵.

(2) 确定从标准基到基 $u_1=[1,1,0]$, $u_2=[1,0,1]$, $u_3=[0,1,1]$ 的转换矩阵 T.

(3) 求 $\mathcal{A}$ 在基 u_1, u_2, u_3 下的矩阵.

5. 命 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. 定义线性算子 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. 求 $\mathcal{A}$ 在基 $v_1=[1,1,1]$, $v_2=[1,2,0]$, $v_3=[0,-2,1]$ 下的矩阵.

6. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, 其中 a 是非零实数.

(1) 通过直接计算证明 A, B, C 都是相似的.

(2) 利用定理5.12证明 A, B, C 都是相似的. 比较直接计算和利用定理5.12两个方法的优劣.

7. (1) 设方阵 A_1 与 B_1 相似, 方阵 A_2 与 B_2 相似. 证明分块对角矩阵 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ 与分块对角矩阵 $\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ 相似.

(2) 假设对 $i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, 方阵 A_i 与方阵 B_i 相似. 证明分块对角矩阵 $\mathrm{diag}\,(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ 与分块对角矩阵 $\mathrm{diag}\,(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ 相似.

8. 证明: 如果方阵 A 与 B相似, E 是同阶的单位矩阵, 那么 $E+A$ 与 $E+B$ 相似.

9. 假设 a 与 b 是不相等的实数, c 是任意实数. 证明矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 相似.

10. (1) 证明如下两个 n 阶方阵是相似的:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

习题 5.2

(2) 证明如下两个 n 阶方阵是相似的:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

其中 a 是非零实数.

11. 设 A 和 B 是同阶方阵且 A 可逆. 证明: AB 和 BA 相似.

12. 设方阵 A_1, A_2, ..., A_k 分别与方阵 B_1, B_2, ..., B_k 相似,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \mathbf{0} \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & B_k \end{pmatrix}.$$

证明: A 与 B 相似.

什么是可对角化

- 一个方阵可对角化：这个方阵与某个对角矩阵相似
- 如果方阵 A 与对角矩阵 D 相似，$B^{-1}AB = D$, 则称 D 是方阵 A 的（一个）对角形，B 是 A 的（一个）对角化过程矩阵
- 或者称 A 可对角化到 D, A 通过方阵 B 对角化到 D.

可对角化的充要条件

定理 (5.13)

设 A 是 n 阶方阵，$\mathcal{A}$ 记作列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\quad X \to AX$. 那么 A 可对角化当且仅当 $\mathcal{A}$ 在某个基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 下的矩阵是对角矩阵，即存在数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathcal{A}X_1 = \lambda_1 X_1, \quad \mathcal{A}X_2 = \lambda_1 X_2, \quad \cdots, \quad \mathcal{A}X_n = \lambda_n X_n,$$

从而 A 可对角化到 $diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

可对角化的充要条件

定理 (5.13)

设 A 是 n 阶方阵，$\mathcal{A}$ 记作列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad X \to AX$. 那么 A 可对角化当且仅当 $\mathcal{A}$ 在某个基 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 下的矩阵是对角矩阵，即存在数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathcal{A}X_1 = \lambda_1 X_1, \quad \mathcal{A}X_2 = \lambda_1 X_2, \quad \cdots, \quad \mathcal{A}X_n = \lambda_n X_n,$$

从而 A 可对角化到 $diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

把含有未知量的等式看做方程:

$$\mathcal{A}X = \lambda X, \quad X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

可对角化的充要条件

定理 (5.13')

设 A 是 n 阶方阵，那么 A 可对角化当且仅当在列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中存在 n 个线性无关的向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和某些数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \quad AX_2 = \lambda_1 X_2, \quad \cdots, \quad AX_n = \lambda_n X_n,$$

从而 A 可对角化到 $diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

定理 (5.13')

设 A 是 n 阶方阵，那么 A 可对角化当且仅当在列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中存在 n 个线性无关的向量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和某些数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \quad AX_2 = \lambda_1 X_2, \quad \cdots, \quad AX_n = \lambda_n X_n,$$

从而 A 可对角化到 $diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

把含有未知量的等式看做方程：

$$AX = \lambda X, \quad X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

特征值和特征向量

定义 (5.14)

设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子. 称 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 X 为线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征向量 (eigenvector) 如果存在实数 λ 使得

$$\mathcal{A}X = \lambda X.$$

实数 λ 称为 $\mathcal{A}$ 的（对应与特征向量 X 的）特征值 (eigenvalue).

特征值和特征向量

定义 (5.14)

设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子. 称 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 X 为线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征向量 (eigenvector) 如果存在实数 λ 使得

$$\mathcal{A}X = \lambda X.$$

实数 λ 称为 $\mathcal{A}$ 的（对应与特征向量 X 的）特征值 (eigenvalue).

- 特征向量和特征值有时也分别称为本征向量和本征值
- 上述定义中的算子 $\mathcal{A}$ 可以换成矩阵 A，得到同样的定义

特征值和特征向量

定义 (5.14)

设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子. 称 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 X 为线性算子 $\mathcal{A}$ 的特征向量 (eigenvector) 如果存在实数 λ 使得

$$\mathcal{A}X = \lambda X.$$

实数 λ 称为 $\mathcal{A}$ 的（对应与特征向量 X 的）特征值 (eigenvalue).

- 特征向量和特征值有时也分别称为本征向量和本征值
- 上述定义中的算子 $\mathcal{A}$ 可以换成矩阵 A，得到同样的定义
- 定理（5.13'）用特征向量可以表述为：

定理 (5.16)

设 A 是 n 阶方阵，那么 A 可对角化当且仅当列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 有基由 A 的特征向量构成.

1. (10 points) 姓名: 学号:
2. (6 points) 四维列向量空间 $\mathbb{R}^4$ 上的二次型在标准基下有如下形式:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_4^2 + x_1x_2 + x_2x_4.$$

求其典范基和典范式.

3. (4 points) 在 n 维实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中，记

$$V = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\},$$

$$W = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 = a_2 = \cdots = a_n\}.$$

证明：$\mathbb{R}^n = V \oplus W$.