hw_5(2)

习题3.2

6. n 阶行列式展开式中斜对角线（也称次对角线）元素的乘积有怎样的正负号?

解： 次对角线元素乘积 $a_{1n}\cdots a_{n1}$

$e(\sigma)=\frac{n(n-1)}{2}$，故符号为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

7. 利用行列式的定义计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解： $\det A=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{e(\sigma)}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}=a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

8. 利用行列式的定义计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解： $\det A=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\varepsilon(\sigma)}a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}=0$

9. 设

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

计算下面的行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

解： $\det A=1\times 2\times\frac{1}{2}=1$

(2) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$,

解: $\det A = 1$

(3) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解: $\det A = 1$

10. 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是 n 阶方阵. 在下述情况下比较 $\det A$ 和 $\det B$.

(1) $b_{ij} = 2^{j-i} a_{ij}$;

解: (1) $b_{ij} = 2^{j-i} a_{ij}$

表示 B 为 A 的第 i 行乘 2^{-i}，第 j 列乘 2^j

$\det B = \left(\prod_{i=1}^{n} 2^{-i}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} 2^{j}\right)\det A = \det A$

(2) $b_{ij} = a_{n+1-i,j}$;

解: $b_{ij} = a_{n+1-i,j}$

表示 B 为 A 行反序排列

$e(\sigma) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} e(\sigma)$

$\det B = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A$

(3) $b_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}$.

解: (3) $b_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}$

表示 B 为 A 行列反序排列

$\det B = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det A = \det A$