hw_3 (1)

习题2.2

4.本题给出矩阵行秩等于列秩的另一个证明，不用行初等变换.设 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 的行秩为 r，列秩为 s.取 A 的 r 个线性无关的行向量 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$.这 r 个行向量形成一个 $r \times n$ 矩阵 $\tilde{A}$.设 $\tilde{A}$ 的列秩为 t，$\tilde{a}_{j_1}, \tilde{a}_{j_2}, \ldots, \tilde{a}_{j_t}$ 是 $\tilde{A}$ 的列向量的极大线性无关组.证明：

(1) $t \leq r$.

解： 令 $\tilde{A}$ 的列向量都是如下 r 个列向量的线性组合
$e_1=[1,0,\cdots,0],\ldots,e_r=[0,\cdots,0,1]$
由引理2.10知 $\tilde{A}$ 的列秩 $t \leq r$

(2) 矩阵 A 的任何一个列向量 a_j 都是列向量 $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t}$ 的线性组合，从而 $s \leq t \leq r$，即列秩不超过行秩.（提示：利用 A 的任一行向量都是 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ 的线性组合.）

解： $\because \tilde{a_{j_1}}, \ldots, \tilde{a_{j_t}}$ 在 $\tilde{A}$ 中是极大线性无关组
$\therefore \exists b_{jk}, \text{s.t. } \tilde{a_j}=\sum_{k=1}^t b_{jk} \tilde{a_{j_k}}$
分量形式：$a_{ij}=\sum_{k=1}^t b_{jk} a_{ij_k}$

同时，A 的任一行向量都是 $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ 的线性组合

故，$\exists c_{il}, \text{s.t. } A_i=\sum_{l=1}^r c_{il} A_{i_l}$
分量形式：$a_{ij}=\sum_{l=1}^r c_{il} a_{i_l j}$
$=\sum_{l=1}^r c_{il}\left(\sum_{k=1}^t b_{jk} a_{i_l j_k}\right)$
$=\sum_{k=1}^t b_{jk} a_{i_l j_k}$

$a_j=\sum_{k=1}^t b_{jk} a_{j_k}$

$\therefore A$ 的任意列向量 a_j 是 $a_{j_1}, \ldots, a_{j_t}$ 的线性组合

故 $s \leq t$
由 (1)，$s \leq t \leq r$

(3) 把 A 的行作为列，得到如下 $n \times m$ 矩阵，称为 A 的转置（矩阵），

$$
{}^tA=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\
a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

有 $r_c({}^tA)=r_r(A)$，$r_r({}^tA)=r_c(A)$.

结合(2)与(3)便知 $s \leq r$，$r \leq s$，所以 $r=s$.

解： $\because {}^tA$ 为 A 的转置矩阵
$\therefore {}^tA$ 的行向量为 A 的列向量

${}^tA$ 的列向量为 A 的行向量
$\therefore r_c({}^tA)=r_r(A)$，$r_r({}^tA)=r_c(A)$

结合(2)与(3)便知 $s \leq r$，$r \leq s$，所以 $r=s$

习题2.3

1. 判断下面的映射哪些是线性映射.如果是，确定线性映射的矩阵.

(1) $[a, b] \rightarrow [b, a]$

解：(1) 是

矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $[a, b] \rightarrow [b, 0]$

解： 是

矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $[a, b] \rightarrow [a^2, b^2]$

解： 不是

(7) $[a, b] \rightarrow [a, 1]$

解：不是

(9) $[a, b] \rightarrow [a - b, a + b]$

解：是

矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(11) $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] \rightarrow [a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1]$

解：是

矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

(13) $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] \rightarrow [a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}, a_1 + a_2 + \cdots + a_n]$

解：是

矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$