hw_2 (1)

1. 计算线性组合 $2X_1 + 5X_2 - 3X_3$，其中 $X_1 = (3, 1, 2, -2), \quad X_2 = (1, 4, -3, 5), \quad X_3 = (7, 4, 1, -9)$.

解: 原式 = $(-10, 10, -14, 48)$

2. 解向量方程：$3(X_1 - X) + 2(X_2 + X) = 5(X_3 + X)$ 其中 $X_1 = (2, 5, 1, 3), \quad X_2 = (10, 1, 5, 10), \quad X_3 = (4, 1, -1, 1)$.

解: $3(X_1 - X) + 2(X_2 + X) = 5(X_3 + X)$

$3X_1 - 3X + 2X_2 + 2X = 5X_3 + 5X$

$6X = 3X_1 + 2X_2 - 5X_3$

$6X = (24, 12, 18, 24)$

$\therefore X = (1, 2, 3, 4)$

5. 求 λ 使得向量 $(7, -2, \lambda)$ 是 $(2, 3, 5)$, $(3, 7, 8)$, $(1, -6, 1)$ 的线性组合.

解: 设 $(7, -2, \lambda) = a(2, 3, 5) + b(3, 7, 8) + c(1, -6, 1)$

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 7 \\ 3a + 7b - 6c = -2 \\ 5a + 8b + c = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 30 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

$\therefore \lambda = 15$

6. 证明在 $\mathbb{R}^n$ 中，第一个坐标和最后一个坐标相等的向量全体是一个线性子空间.

解: 设该集合 $V = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_n\}$
设 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$，$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in V$，

$\alpha u + \beta v = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \cdots, \alpha u_n + \beta v_n)$

$\because u_1 = u_n, v_1 = v_n$

$\therefore \alpha u_1 + \beta v_1 = \alpha u_n + \beta v_n$

$\therefore \alpha u + \beta v \in V$

$\therefore V$ 中任意两个向量的所有线性组合都在 V 中

$\therefore V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间

7. 证明有 n 个未知元的齐次线性方程组的解集是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间.

解: 设该集合 $V = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为齐次线性方程组的解 $\}$

设 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$，$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in V$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha u + \beta v = (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \cdots, \alpha u_n + \beta v_n)$

$\because u, v$都为齐次线性方程组的解

$\therefore$ 由定理1.9可知，$\alpha u + \beta v$ 也为齐次线性方程组的解

$\alpha u + \beta v \in V$

$\therefore$ 中任意两个向量的所有线性组合都在 V 中

$\therefore V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间