

hw_14(1)

习题6.3

1. 把下面的向量组扩充为埃尔米特空间的正交基:

$$(2) \quad (-i, 2, -2-i), (4-i, -i, i).$$

解:

设 (a, b, c) 满足以下方程组:

$$\begin{cases} ai + 2b + (-2+i)c = 0 \\ a(4+i) + bi - ci = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } a = 1, \quad b = -10 + 2i, \quad c = -9 - 2i$$

$$\text{故为: } (-i, 2, -2-i), (4-i, -i, i), (1, -10+2i, -9-2i)$$

2. 运用正交化方法找出埃氏空间 \mathbb{C}^4 的子空间的一个标准正交基:

$$(1) \quad \langle (2, 1, -i, 1), (1, -i, 2, 0), (-i, 0, 1, -i) \rangle;$$

解:

$$u_1 = v_1 = (2, 1, -i, 1)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{(v_2|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 = \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{7}i, -\frac{2}{7} - \frac{8}{7}i, \frac{13}{7} + \frac{2}{7}i, -\frac{2}{7} - \frac{1}{7}i \right)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{(v_3|u_1)}{(u_1|u_1)}u_1 - \frac{(v_3|u_2)}{(u_2|u_2)}u_2 = \left(-\frac{294+490i}{1813}, \frac{392+1372i}{1813}, \frac{-203+49i}{1813}, \frac{245-1225i}{1813} \right)$$

标准化得标准正交基:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{7}}(2, 1, -i, 1)$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{259}}(3-2i, -2-8i, 13+2i, -2-i)$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3963844}}(-294-490i, 392+1372i, -203+49i, 245-1225i)$$

3. 在 \mathbb{C}^3 中找出子空间 $\langle (0, 1+2i, -i), (1, -1, 2-i) \rangle$ 的正交补。

解:

设 $\mathbf{x} = (a, b, c)$ 满足以下方程组:

$$\begin{cases} (1-2i)b + ic = 0 \\ a - b + (2+i)c = 0 \end{cases}$$

令 $a = -2 - 4i$, $b = 1$, $c = 2 + i$

故为: $U^\perp = \langle (-2 - 4i, 1, 2 + i) \rangle$

4. 验证下面的矩阵是酉矩阵:

(1)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix},$$

解:

$$A^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

故 A 是酉矩阵。

(3)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix},$$

解:

$$B^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$BB^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

故 B 是酉矩阵。

习题6.4

1. 验证下面的矩阵是埃尔米特矩阵, 并通过酉矩阵将下面的埃尔米特矩阵对角化:

$$(3) \begin{pmatrix} 5 & 1+5i \\ 1-5i & 6 \end{pmatrix},$$

解:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 1-5i \\ 1+5i & 6 \end{pmatrix} = A$$

由于 $A^* = A$, 故 A 是埃尔米特矩阵。

$$\det(tE - A) = t^2 - 11t + 4 = 0$$

$$t = \frac{11 \pm \sqrt{105}}{2}$$

当 $t_1 = \frac{11 + \sqrt{105}}{2}$ 时, 解 $(A - t_1 E)\mathbf{X} = 0$, 得特征向量

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2 + 10i}{1 + \sqrt{105}}, 1 \end{bmatrix}$$

当 $t_2 = \frac{11 - \sqrt{105}}{2}$ 时, 解 $(A - t_2 E)\mathbf{X} = 0$, 得特征向量

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2 + 10i}{1 - \sqrt{105}}, 1 \end{bmatrix}$$

构造酉矩阵 B , 其列为归一化后的特征向量:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\frac{2(1+5i)}{1+\sqrt{105}}}{\sqrt{\frac{4(1+5i)^2}{(1+\sqrt{105})^2} + 1}} & \frac{\frac{2(1+5i)}{1-\sqrt{105}}}{\sqrt{\frac{4(1+5i)^2}{(1-\sqrt{105})^2} + 1}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{4(1+5i)^2}{(1+\sqrt{105})^2} + 1}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{4(1+5i)^2}{(1-\sqrt{105})^2} + 1}} \end{pmatrix}$$

则有:

$$B^{-1}AB = \text{diag}(t_1, t_2)$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

解:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 2 & -i \\ 1 & i & 2 \end{pmatrix} = A$$

由于 $A^* = A$, 故 A 是埃尔米特矩阵。

$$\det(tE - A) = (t - 2)(t - 2 - \sqrt{2})(t - 2 + \sqrt{2})$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 2 + \sqrt{2}, \quad t_3 = 2 - \sqrt{2}$$

对应特征向量:

当 $t_1 = 2$ 时, 解 $(A - 2E)\mathbf{X} = 0$, 得特征向量

$$\mathbf{X}_1 = (1, -i, 1)$$

当 $t_2 = 2 + \sqrt{2}$ 时, 解 $(A - (2 + \sqrt{2})E)\mathbf{X} = 0$, 得特征向量

$$\mathbf{X}_2 = \left(1, -i(\sqrt{2}-1), 1 \right)$$

当 $t_3 = 2 - \sqrt{2}$ 时, 解 $(A - (2 - \sqrt{2})E)\mathbf{X} = 0$, 得特征向量

$$\mathbf{X}_3 = \left(1, -i(\sqrt{2}+1), 1 \right)$$

构造酉矩阵 B , 其列为归一化后的特征向量:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{-i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}} & \frac{-i(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

则有:

$$B^{-1}AB = \text{diag}(t_1, t_2, t_3)$$