hw_10(1)

习题4.4

2.

(1) 对列向量空间 $\mathbb{R}^2$ 上的双线性型 $f(x,y)=x\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}y$ 求典范基。

解:

$$q(x)=2x_1^2+3x_1x_2+3x_2^2$$

$$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{5}{2}x_2^2$$

$$y_1=x_1+\frac{1}{2}x_2$$

$$y_2=x_2$$

$$y=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$p^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$$

$$x=p_y\quad p=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$$

典范基由 p 的列向量组成

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

$$p^TAp=\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

(2) 对列向量空间 $\mathbb{R}^3$ 上的双线性型 $f(x,y)=x\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\-1&1&3\end{pmatrix}y$ 求典范基。

解:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\-1&1&3\end{pmatrix}$$

$$q(x)=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+2x_3)^2-2x_3^2$$

$$y=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$p^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\quad\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$p^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

10. 证明下面的对称矩阵是正定的，然后把它们分解成形式 ${}^tP\cdot P$，其中 P 是方阵。

$$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}4&-2&2\\-2&10&2\\2&2&5\end{pmatrix}.$$

解:

（1）

正定:
一阶 $2>0$
二阶 $\det A=3>0$
故正定

$$P=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$$

$$P^T=\begin{pmatrix}a&0\\b&c\end{pmatrix}$$

$$A=P^TP$$

$$P=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}$$

(2) 正定
一阶 $4>0$
二阶 $36>0$
三阶 $\det B=108>0$

故正定

$$P=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\end{pmatrix}$$

$$P^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

$$P^TP = B$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

13. 设 A 是实对称矩阵，E 是同阶单位矩阵，ε 是充分小的实数。证明方阵 $E + \varepsilon A$ 是正定的。

解:

存在正交矩阵 Q

$$A = QBQ^T$$

$$B = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

$$E + \epsilon A = E + \epsilon QBQ^T$$

$$= Q(I + \epsilon B)Q^T$$

$$I + \epsilon B = diag(1 + \epsilon\lambda_1, \ldots, 1 + \epsilon\lambda_n)$$

由于 Q 满足 $Q^TQ = QQ^T = I$

不仅变正定性

故 $E + \epsilon A$ 正定 $\iff$ $I + \epsilon B$ 正定

又 $1 + \epsilon\lambda_i > 0$

取 $|\epsilon| < \frac{1}{\max_i |\lambda_i|}$

$$1 + \epsilon\lambda_i > 0$$

故 $I + \epsilon B$ 正定

故 $E + \epsilon A$ 正定

14. 设 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 是方阵，

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

证明：A 是(斜)对称的当且仅当 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 都是(斜)对称的。

解:

(1) 对称性

先证必要性

$$A^T = A = \begin{pmatrix} A_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k^T \end{pmatrix}$$

$$A_i^T = A_i$$

故每个 A_i 对称

再证充分性

$$A_i^T = A_i$$

$$A^T = \begin{pmatrix} A_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k^T \end{pmatrix} = A$$

故 A 对称

(2) 斜对称性 同理

15. 设方阵 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 分别与方阵 $B_1, B_2, \ldots, B_k$ 合同，

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}$$

证明：A 与 B 合同。

解:

$$B_i = P_i^T A_i P_i$$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k \end{pmatrix}$$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} P_1^T A_1 P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2^T A_2 P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_k^T A_k P_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix} = B$$

故 A 与 B 合同

习题5.1

1. 对行向量空间 $\mathbb{R}^2$ 表述命题 5.1 并给出证明。

命题 (5.1)

映射

$$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad [x,y]\to[f(x,y),g(x,y)]$$

是线性的当且仅当 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 都是 x,y 的齐次线性多项式，即存在实数 a,b,c,d 使得

$$f(x,y)=ax+by,\quad g(x,y)=cx+dy.$$

解:

映射

$$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\quad [x,y]\to[f(x,y),g(x,y)]$$

是线性的当且仅当 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 都是关于 x,y 的齐次线性多项式，即存在实数 a,b,c,d 使得

$$f(x,y)=ax+by\quad g(x,y)=cx+dy$$

证明：
先证必要性

$$\varphi(\alpha[x_1,y_1]+\beta[x_2,y_2])=\alpha\varphi([x_1,y_1])+\beta\varphi([x_2,y_2])$$

取 $e_1=[1,0],e_2=[0,1]$

$$\varphi(e_1)=[a,c]\quad \varphi(e_2)=[b,d]$$

$$[x,y]=xe_1+ye_2$$

$$\varphi([x,y])=\varphi(xe_1+ye_2)=x\varphi(e_1)+y\varphi(e_2)=x[a,c]+y[b,d]=[ax+by,cx+dy]$$

$$f(x,y)=ax+by,g(x,y)=cx+dy$$

f,g 为齐次线性多项式

再证充分性

$$f(x,y)=ax+by\quad g(x,y)=cx+dy$$

$$\varphi(\alpha[x_1,y_1]+\beta[x_2,y_2])=\varphi([\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2])$$

$$=[a(\alpha x_1+\beta x_2)+b(\alpha y_1+\beta y_2),\quad c(\alpha x_1+\beta x_2)+d(\alpha y_1+\beta y_2)]$$

$$=[\alpha(ax_1+by_1)+\beta(ax_2+by_2),\quad \alpha(cx_1+dy_1)+\beta(cx_2+dy_2)]$$

$$=\alpha\varphi([x_1,y_1])+\beta\varphi([x_2,y_2])$$

故 φ 为线性映射

综上，成立

2. 下面关于 $T(x, y)$ 的公式定义了映射 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$。判断各小题的映射是否为线性变换。如果是，确定变换的矩阵。

(2) $T(x, y) = [x, -y]$,

解:
满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(4) $T(x, y) = [x, x]$,

解:
满足

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(6) $T(x, y) = [2^x, 2^y]$,

解:
不满足

(8) $T(x, y) = [x + 1, y + 1]$,

解:
不满足