hw_4 (1)

习题2.4

1. 判断下面的矩阵是否可逆，如果可逆，求其逆矩阵

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

解： 可逆
A_1, A_2 线性无关
$\text{rank}A = 2$
故 A 可逆

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

解： (3) 可逆
A_1, A_2, A_3 线性无关
$\text{rank}A = 3$
故 A 可逆

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

解： 可逆
A_1, A_2, A_3, A_4 线性无关
$\text{rank}A = 4$
故 A 可逆

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

解： 可逆
A_1, A_2, A_3, A_4 线性无关
$\text{rank}A = 4$
故 A 可逆

2. 利用等式

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

计算 $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^6$.

解: $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^6$

$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 729 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 128 & 2187 \\ 320 & 5103 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 10039 & -3990 \\ 23275 & -9246 \end{pmatrix}$

3. 验证：如果 $ad - bc \neq 0$，那么矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是 $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. 如果 $ad - bc = 0$，A 的逆矩阵是否存在?

解:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{2,1}(-\frac{c}{a})} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

故 A 为退化的，故 A 不可逆

4. 证明任意二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 满足关系式 $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E$. 如果 $ad - bc \neq 0$，利用这个关系式求 A 的逆.

解:

证明：$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$(a+d)A - (ad-bc)E$

$= \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = A^2$，故等式成立

由 $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E$

得 $A = (a+d)E - (ad-bc)A^{-1}$

$A^{-1}=\frac{(a+d)E-A}{ad-bc}$

$=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

5. 证明如果有大于2的整数 m 使得 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m=0$，则 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2=0$.

解： 若 $\operatorname{rank}A=2$

则 A 可逆，则 $A^m\neq 0$，矛盾

若 $\operatorname{rank}A=0$
则 $A=0$，$A^m=0$

若 $\operatorname{rank}A=1$
则 $A^2=cA$

$A^m=c^{m-1}A=0$
$c^{m-1}=0$
$A^2=cA=0$

6. 称方阵 A 是对称（相应地，斜对称）的如果 ${}^tA=A$（相应地，${}^tA=-A$）.证明：如果对称（相应地，斜对称）矩阵 A 可逆，那么其逆矩阵 A^{-1} 也是对称的（相应地，斜对称）.

解：

(1) ${}^tA=A$
${}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1}=A^{-1}$

(2)${}^tA=-A$
${}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1}$