hw_12(1)

习题5.5

1. 求如下矩阵的特征多项式和极小多项式：

(1)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解：

① 特征多项式
$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$

② 验证极小多项式

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$(A - 2I)^3 = 0$$

故极小多项式为
$m(\lambda) = (\lambda - 2)^3$

2. 假设 $\mathbb{R}^3$上的线性算子 A 在标准基下的矩阵是$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$利用定理5.37把 $\mathbb{R}^3$分解成两个非平凡不变子空间的直和。

解：

特征多项式：
$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$

特征值：
$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$

特征空间：

$\lambda = 1$:
$E_1 = \ker(A - I) = \text{span}\{[1, 0, 0], [0, -1, 1]\}$

$\lambda = 2$:
$E_2 = \ker(A - 2I) = \text{span}\{[0, 1, 0]\}$

故
$\mathbb{R}^3 = \text{span}\{[1,0,0],[0,-1,1]\} \oplus \text{span}\{[0,1,0]\}$

3. 利用凯莱-哈密顿定理求如下矩阵的逆矩阵：

(1)

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

解：
特征多项式：
$f(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A = \lambda^2 - 11\lambda + 4$

由凯莱-哈密顿定理：
$A^2 - 11A + 4I = 0$

于是：
$A^{-1} = \frac{11}{4}I - \frac{1}{4}A$

代入计算：
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} \\ -1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

解：
特征多项式：
$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 1$

由凯莱-哈密顿定理：
$A^3 - 5A^2 + 6A - I = 0$

因此：
$A^{-1} = A^2 - 5A + 6I$

计算得：

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 计算：

(1)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{100}$$

解：

该矩阵为旋转矩阵：

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

因此：

$A^{100} = \begin{pmatrix} \cos 100\theta & -\sin 100\theta \\ \sin 100\theta & \cos 100\theta \end{pmatrix}$

(3)

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}^{50}$$

解：

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 16 & 12 \\ -8 & 20 & 12 \\ 8 & -16 & -8 \end{pmatrix} = 2A$$

故：

$A^{50} = 2^{49}A$

即：

$$A^{50} = 2^{50}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$