hw_1

练习 1.8

(1) 下面两个线性方程组的未知元数量均大于方程的数量, 把它们化成阶梯形方程组, 从而判断它们是否为确定的.

(a)

$$\begin{cases} 2x+3y-z & =-5, \\ 3x-y+4z & =6; \end{cases}$$

解:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-5 \\ 11y-11z=-27 \end{cases}$$

$\therefore$ 不确定

(b)

$$\begin{cases} x+2y-z+w & =-3, \\ 4x-3y+2z+3w & =4, \\ 2x-7y+4z+w & =8. \end{cases}$$

解:

$$\begin{cases} x+2y-z+w=-3 \\ 11y-6z+w=-16 \\ 0=-2 \end{cases}$$

$\therefore$ 不确定

(3) 举例说明方程的数量大于或等于未知元的数量时，方程组可以是无解，有很多解，或只有唯一解。

解: 无解:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=3 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

多解:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$$

唯一解:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=3 \\ x+2y=3 \end{cases}$$

练习 1.10

(1) 判断下列方程组是否是确定的（即是否有解且解是唯一的）：

$$\begin{cases} x-3y+4z=-4 \\ 3x-7y+7z=-8 \\ -4x+6y-z=7 \end{cases}$$

解:

$$\begin{cases} x-3y+4z=-4 \\ 2y-5z=4 \\ 0=1 \end{cases}$$

∴ 不确定

(2) 对 (1) 中线性方程组相伴的齐次线性方程组讨论其解。

解:

$$\begin{cases} x-3y+4z=0 \\ 3x-7y+7z=0 \\ -4x+6y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+4z=0 \\ 2y-5z=0 \end{cases}$$

∴ 有无穷解

(3) 如果方程组 (1.1) 是确定的，证明它相伴的齐次线性方程组 (1.3) 只有零解。举例说明反之不对。

解: 证明: 设 (1.1) 的解为 $s_1,...,s_n$。
若 (1.3) 存在非零解 $\xi_1,...,\xi_n$， 由定理 1.9.(3)
$s_1+\xi_1,...,s_n+\xi_n$ 为 (1.1) 的解，与 (1.1) 是确定的矛盾。
所以 (1.3) 只有零解。

举例: 原方程组

$$\begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

齐次方程组
$\begin{cases} x=0 \\ x=0 \end{cases}$只有零解，原方程组无解

练习 1.14 判断下列线性方程组是否有解，在有解时求出它的解：

(1)
$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$$

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

∴ 无解

(2)
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

解:

$$\begin{cases} \lambda = 1 & \text{无穷解} \\ \lambda = 0 & x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2} \\ \lambda = -2 & \text{无解} \\ \lambda \neq 0, 1, -2 & x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+2} \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} x + 5y - 2z = -7 \\ -3x + y + 9z - 5w = 9 \\ 4x - 8y - z + 7w = 0 \end{cases}$$

解: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 & -7 \\ -3 & 1 & 9 & -5 & 9 \\ 4 & -8 & -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 16 & 3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 无穷解

练习 1.15

在平面上引进直角坐标系，求:

(1) 直线 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 和 $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 的交点;

解:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix}$$

$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}$
$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$

所以交点为 $\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}\right)$

练习 1.21 利用命题 1.16 或命题 1.17 求解下列方程组:

(1)

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$$

$\therefore x_1 = \frac{12-7}{20-14} = \frac{5}{6}$
$x_2 = \frac{5-6}{20-14} = -\frac{1}{6}$

(2)

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=4 \\ -x_1+2x_3=1 \\ 3x_1+x_2=1 \end{cases}$$

$\therefore\ x_1=\frac{1\times(0-2)+1\times(0-1)+3\times6}{-2-1+1\times8}=-\frac{1}{15}$
$x_2=\frac{1\times(0-2)+1\times(0-1)+3\times6}{-2-1+1\times8}=\frac{6}{5}$
$x_3=\frac{1\times(0-1)+1\times(3-4)+3\times3}{15}=\frac{7}{15}$

习题 1.5

1. 求实系数二次多项式 $f(x)$ 使得 $f(1)=8$, $f(-1)=2$, $f(2)=14$.

解： 设 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=8 \\ f(-1)=a-b+c=2 \\ f(2)=4a+2b+c=14 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases}$$

$\therefore\ f(x)=x^2+3x+4$

2. 求实系数三次多项式 $f(x)$ 使得 $f(-2)=1$, $f(-1)=3$, $f(1)=13$, $f(2)=33$.

解： 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq0)$

$$\begin{cases} f(-2)=-8a+4b-2c+d=1 \\ f(-1)=-a+b-c+d=3 \\ f(1)=a+b+c+d=13 \\ f(2)=8a+4b+2c+d=33 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=4 \\ d=5 \end{cases}$$

$\therefore\ f(x)=x^3+3x^2+4x+5$

3. 计算下列行列式：

(2)

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

解： 原式 = $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

(4)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

解： 原式 = $3 \times (25-6) - 4 \times (10-1) - 2 \times (12-5)$

$= 3 \times 19 - 4 \times 9 - 2 \times 7$
$= 57 - 36 - 14 = 7$

(6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$$ (i为虚数单位，即 $i^2 = -1$)

解： 原式 = $1 \times (1-1) + (1-i)(-1-i)$

$= -1 - i + i - 1$
$=$ -2