hw_9(1)

习题4.4

1. 写出下列双线性型或二次型的矩阵。

(2) $-x_1y_1+2x_1y_2-3x_1y_3+2x_2y_1+5x_2y_2+4x_2y_3-3x_3y_1+4x_3y_3-6x_3y_3$。

解:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\2&5&4\\-3&0&-2\end{pmatrix}$$

(4) $x_1^2+2x_2^2-x_3^2-x_4^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_2x_4-6x_3x_4$。

解:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&2&-1&1\\0&-1&-1&-3\\0&1&-3&-1\end{pmatrix}$$

3.

(1) 运用雅克比方法把双线性型化成典范式:

$$f(x,y)=x_1y_1-x_1y_2+x_1y_3-x_2y_1+x_2y_2+2x_2y_3+x_3y_1+2x_3y_2+x_3y_3.$$

解:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&3&0\end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&3&-9\end{pmatrix}$$

$$A_{diag}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-18\end{pmatrix}$$

$$f(x,y)=x_1'y_1'+x_2'y_2'-18x_3'y_3'$$

(2) 命 $X=[x_1,x_2,x_3]$, $X'=[x_1',x_2',x_3']$, $Y=[y_1,y_2,y_3]$, $Y'=[y_1',y_2',y_3']$。求变换矩阵 A 使得在变换 $X=AX'$, $Y=AY'$ 下 $f(x,y)$ 具有典范形式，即具有形式 $a_1x_1'y_1'+a_2x_2'y_2'+a_3x_3'y_3'$，其中 a_1，a_2，a_3 是实数。

解:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$A^T\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-18\end{pmatrix}$$

4. 运用雅克比方法判断下面两个矩阵是否合同:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&-1\\3&-1&3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&3&0\\3&1&1\\0&1&5\end{pmatrix}.$$

解:

$A:\Delta_1=1>0\quad\Delta_2=-4<0\quad\Delta_3=-25<0$

$B:\Delta_1=1>0\quad\Delta_2=-8<0\quad\Delta_3=-41<0$

故合同

5. 设 $A_1,A_2,...,A_k$ 是方阵。证明：分块对角矩阵 $\operatorname{diag}(A_1,A_2,...,A_n)$ 是(斜)对称矩阵当且仅当所有的 A_i 都是(斜)对称矩阵。

解:

先证充分性

$A_i^T=A_i \implies A^T=diag(A_1^T,\cdots,A_n^T)=diag(A_1,\cdots,A_n)=A$

再证必要性

$A^T=diag(A_1^T,A_2^T,\cdots,A_n^T)$

$A^T=A$, 故 $A_i^T=A_i$

故成立