hw_2 (2)

习题2.1

3. 判断下列向量组是否线性无关，并计算这些向量组的秩.

2)$X_1=(2,3,-1),\quad X_2=(3,5,2),\quad X_3=(-2,4,1)$

解： 设 $aX_1+bX_2+cX_3=0$

$$\begin{cases}2a+3b-2c=0\\3a+5b+4c=0\\-a+2b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3&-2\\0&1&14\\0&0&10\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a=b=c=0$

$\therefore$ 线性无关
$\mathrm{rank}\{X_1,X_2,X_3\}=3$

4)
$X_1=(4,-5,2,6),\quad X_2=(2,-2,1,3),\quad X_3=(5,-3,3,9),\quad X_4=(4,-1,5,6)$

解： (4)设 $aX_1+bX_2+cX_3+dX_4=0$

$$\begin{cases}4a+2b+5c+4d=0\\-5a-2b-3c-d=0\\2a+b+3c+5d=0\\6a+3b+9c+6d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}4&2&5&4\\0&2&13&16\\0&0&1&6\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a=b=c=d=0$

$\therefore$ 线性无关
$\mathrm{rank}\{X_1,X_2,X_3,X_4\}=4$

4.假设向量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 线性无关。判断下列向量组是否线性相关，并计算这些向量组的秩.

1)$Y_1=3X_1+2X_2+X_3+X_4,$

$Y_2=2X_1+5X_2+3X_3+2X_4,$

$Y_3=3X_1+4X_2-X_3+2X_4$

解： 设 $\alpha_1Y_1+\alpha_2Y_2+\alpha_3Y_3=0$

$$\begin{cases} 3\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0 \\ 2\alpha_1+5\alpha_2+4\alpha_3=0 \\ \alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

线性无关

$\operatorname{rank}\{Y_1,Y_2,Y_3\}=3$

3) $Y_1=X_1-X_2,\quad Y_2=X_2-X_3,\quad Y_3=X_3-X_4,\cdots,$

$\quad Y_{k-1}=X_{k-1}-X_k,\quad Y_k=X_k-X_1$

解： 设 $\alpha_1Y_1+\alpha_2Y_2+\cdots+\alpha_kY_k=0$

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_k=0 \\ \alpha_2-\alpha_1=0 \\ \vdots \\ \alpha_k-\alpha_{k-1}=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k$

$\therefore$存在非零解

$\therefore$线性相关

$\operatorname{rank}\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_k\}=k-1$

8. 设 U 与 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间。集合 $U\cup V$ 张成的线性子空间称为 U 与 V 的和，记作 $U+V$.

证明：(1) $U+V=\{u+v\mid u\in U,\ v\in V\}$;

解： 设 $W=\{u+v\mid u\in U,v\in V\}$

先证 $W\subseteq U+V$ **:**

$U+V$ 为 $U\cup V$ 张成的线性子空间

$u,v(u\in U,v\in V)$ 的任意线性组合属于 $U+V$

故$W\subseteq U+V$

再证 $U+V\subseteq W$ **:**

设 U 的一组基为 $u_1,u_2,\cdots,u_k$
V 的一组基为 $v_1,v_2,\cdots,v_l$
设 $u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_ku_k$
$v=\beta_1v_1+\beta_2v_2+\cdots+\beta_lv_l$

$au+bv=a\alpha_1u_1+a\alpha_2u_2+\cdots+a\alpha_ku_k+b\beta_1v_1+b\beta_2v_2+\cdots+b\beta_lv_l\in U+V$

$\exists u' \in U, u' = au$
$\exists v' \in V, v' = bv$

故 $au + bv = u' + v'$
则 $U + V \subseteq W$

综上 $U + V = W = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$

(2) $U \cap V = \{0\}$ 当且仅当对任意的 $x \in U + V$，存在唯一的 $u \in U$ 和唯一的 $v \in V$ 使得 $x = u + v$. 这时称 $U + V$ 为直和，记作 $U \oplus V$.

解： **先证充分性**
假设不存在唯一 u, v 使得 $x = u + v$
则 $x = u + v = u' + v'$

$u - u' = v' - v$
$\because u - u' \in U$
$\because v' - v \in V$
$\therefore u - u', v' - v \in U \cap V$
$\because U \cap V = \{0\}$ 矛盾
$\therefore$ 充分性成立

再证必要性
取 $x \in U \cap V$
$\because -x \in U \cap V$
$\because 0 \in U + V$
$\quad 0 = 0 + 0$

由充分性可知 $x = -x = 0$
故 $U \cap V = \{0\}$，必要性成立

综上，$U \cap V = \{0\}$ 当且仅当对任意的 $x \in U + V$，存在唯一的 $u \in U$ 和唯一的 $v \in V$ 使得 $x = u + v$.

(3) $U + V$ 是直和当且仅当如果 $u + v = 0$, $u \in U$, $v \in V$，则 $u = v = 0$.

解： 先证充分性：
$\because U + V$ 为直和，$\therefore U \cap V = \{0\}$
$\because u + v = 0$
$\therefore u = -v$
$\therefore u, -v \in U \cap V$
故 $u = 0 = v$，充分性成立

再证必要性：
取任意 $x \in U \cap V$
$x \in U, x \in V$
$x + (-x) = 0$
故 $x = -x = 0$
故 $U \cap V = \{0\}$ 即 $U + V$ 为直和，必要性成立

综上，$U + V$ 是直和当且仅当如果 $u + v = 0$, $u \in U$, $v \in V$，则 $u = v = 0$.

9. 证明：如果 $U \cap V = \{0\}$，则 $\dim(U+V) = \dim U + \dim V$。

解： 设 U 的一组基为 $u_1, u_2, \cdots, u_k$
V 的一组基为 $v_1, v_2, \cdots, v_l$

设 $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k \in U$
$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_l v_l \in V$

令 $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_k, v_1, v_2, \cdots, v_l\}$
$u + v = 0, u = -v$
$\because u \in U, v \in V, U \cap V = \{0\}$
$\therefore u = v = 0$
$\therefore \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_l = 0$

$\therefore B$ 线性无关

$\exists u \in U, v \in V$

取 $w = au + bv = a\alpha_1 u_1 + a\alpha_2 u_2 + \cdots + a\alpha_k u_k$
则 $W \subset U + V$，可用 B 线性表达得出
故 B 为 $U + V$ 的一组基
$\dim(U+V) = k + l = \dim U + \dim V$

10. 证明 $\mathbb{R}^n$ 中的线性子空间的任一个基都可以扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的基.

解： 令 $V = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$
如果 $V = \mathbb{R}^n$，则 V 的基为 $\mathbb{R}^n$ 的基
否则，取 $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n \setminus V$，那么 $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ 线性无关
如果这 $k+1$ 个向量张成 $\mathbb{R}^n$，那么这些向量形成 $\mathbb{R}^n$ 的基
否则，可以继续添加向量得到线性无关向量组，有限步后得到 $\mathbb{R}^n$ 的基

习题2.2

1. 如同行的情况，交换矩阵 A 的两列称为I型列初等变换，把某一列的某个倍数加到另一列称为II型列初等变换。证明：

(1) 列初等变换不改变矩阵的秩。

解： 设 B 是由 A 经有限次列初等变换得到的矩阵

① 列秩

如果列初等变换是 I 型的，那么 B 是从 A 交换某两列的位置而得到
于是 B 的列向量全体与 A 的列向量全体是一样的，从而这两个向量组的秩 也是一样的，故这两个矩阵的列秩是一样的，所以 I 型列初等变换不改变列秩

如果列初等变换是 II 型的，那么存在 $1 \le s \neq t \le m$，$\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $b_s = a_s + \lambda a_t$，而 $b_i = a_i$ 如果 $i \neq s$
注意 $a_s = b_s - \lambda a_t$，从而 $a_1, \cdots, a_m$ 的线性组合也是 $b_1, \cdots, b_m$ 的线性组合，反之亦然
所以这两组向量分别张成的子空间是一样的，即 $\langle b_1, \cdots, b_m \rangle = \langle a_1, \cdots, a_m \rangle$，特别，这两组向量张成的子空间的维数是一样的. 故 II 型列初等变换也不改变列秩

② 行秩

根据命题 2.12（4），$A_1, \cdots, A_n$ 中的极大线性无关组所含的向量个数就是 A 的行秩
$B_1, \cdots, B_n$ 中的极大线性无关组所含的向量个数就是 B 的行秩

不妨设 $A_1, \cdots, A_r$ 是 $A_1, \cdots, A_n$ 的极大线性无关组。设 $A_1, \cdots, A_r \in \mathbb{R}^m$
下证：$\lambda_1 B_1 + \cdots + \lambda_r B_r = 0$ 蕴含$\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r = 0$，从而 $A_1, \cdots, A_r$ 的线性无关性蕴含 $B_1, \cdots, B_r$ 的线性无关性

考虑方程 $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r = 0$ 和方程 $\lambda_1 B_1 + \cdots + \lambda_r B_r = 0$，写成分量的形式是：

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1r}\lambda_r = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + \cdots + a_{mr}\lambda_r = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} b_{11}\lambda_1 + \cdots + b_{1r}\lambda_r = 0 \\ \vdots \\ b_{m1}\lambda_1 + \cdots + b_{mr}\lambda_r = 0 \end{cases} \quad (2)$$

方程组 (1) 的系数矩阵的行向量是 $A_1, \cdots, A_r$
方程组 (2) 的系数矩阵的行向量是 $B_1, \cdots, B_r$
由于 B 是 A 经过列初等变换得到的，所以 $B_1, \cdots, B_r$ 是 $A_1, \cdots, A_r$ 经过列初等变换得到的
根据定理 4.3 的两个方程组等价，所以有相同的解集
向量$A_1, \cdots, A_r$线性无关意味着第一个方程组只有零解，从而第二个方程组只有零解，所以$B_1, \cdots, B_r$线性无关
$r_r(B) \ge r_r(A)$，同理 $r_r(A) \ge r_r(B)$

故行秩不变

(2) 联合使用行初等变换和初等列变化可以把矩阵化成如下形式

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22}\cdots\tilde{a}_{rr} \neq 0$, r 就是矩阵的秩。

解： 由定理1.12可知，通过行初等变换矩阵可以化成阶梯形，即

$$A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_{1i_1}&\cdots&a_{1i_2}&\cdots&a_{1i_r}\\0&\cdots&0&0&\cdots&a_{2i_2}&\cdots&a_{2i_r}\\0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&a_{3i_r}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&a_{ri_r}\\0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

其中 $a_{1i_1},a_{2i_2},a_{3i_3},\dots,a_{ri_r}\neq 0$，$r$ 为矩阵的秩。
通过 I 型列初等变换，可交换全 0 列，得

$$\begin{pmatrix}a_{1i_1}&\cdots&a_{1i_2}&\cdots&a_{1i_r}&0&\cdots&0\\0&\cdots&a_{2i_2}&\cdots&a_{2i_r}&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&\cdots&a_{3i_r}&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&\cdots&a_{ri_r}&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

依次用第j列减去 第$j-1$列$\times\frac{a_{1i_j}}{a_{1i_{j-1}}}$，即可获得所需形式。

2. 计算下列矩阵的秩。

将下列矩阵设为A

(1)

$$\begin{pmatrix}2&5&6&-1&1\\-4&3&5&2&0\\3&2&7&1&8\end{pmatrix}$$

解：

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2&5&6&-1&1\\0&13&17&0&2\\0&0&135&65&19\end{pmatrix}$$
$\text{rank } A=3$

(2)

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

解:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 20 & 45 & 5 & -47 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} A = 3$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解: 设该矩阵行列数均为 n

考察方程 $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_n A_n = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \\ \lambda_n + \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

故

$\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4 = \cdots = (-1)^{n-1}\lambda_n$

① 当 n 为奇数,

$\lambda_1 = (-1)^{n-1}\lambda_n = \lambda_n$

由 $\lambda_n + \lambda_1 = 0$ 得 $2\lambda_1 = 0$

故 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

故行向量线性无关,秩为 n

② 当 n 为偶数,

$\lambda_1 = (-1)^{n-1}\lambda_n = -\lambda_n$

由 $\lambda_n + \lambda_1 = 0$ 得 $\lambda_n - \lambda_n = 0$ 恒成立

故方程可存在非零解,故行向量线性相关,秩为 $n-1$

$\therefore$ 综上 $\operatorname{rank} A = \begin{cases} n & n \text{ 为奇数} \\ n-1 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, (x \text{ 是 变 量})$$

解:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 0 & -1-2x & x+2 & 1 \\ 0 & -3x+10 & x-3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \operatorname{rank} A = \begin{cases} 2 & x = 3 \\ 3 & x \neq 3 \end{cases}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & x & 3 & \cdots & n-1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}, (x \text{ 是 变 量})$$

解:

当 $x = 1, 2, \ldots, n$

$A_x = A_{x+1}$, 故行向量线性相关，秩为 n

当 $x \neq 1, 2, \ldots, n$
对前 n 行，可整理出阶梯形

同时第 $n+1$ 行与前 n 行线性无关，故行向量线性无关，秩为 $n+1$

$$\therefore \text{综上} \operatorname{rank} A = \begin{cases} n & x = 1, 2, \cdots, n \\ n+1 & x \neq 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$