hw_10(2)

习题5.1

4. 证明下面的映射 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的线性变换并求出其矩阵

(3) 先做关于 x 轴的反射, 再做以直线 $y=x$ 为轴的反射.

解:

$R_x=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$R_{y=x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$T=R_{y=x}R_x=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

故为线性变换，矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(4) 先做 y 轴的反射, 再绕原点旋转角度 $\frac{\pi}{4}$.

解:

$R_y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$R_{\frac{\pi}{4}}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ $T=R_{\frac{\pi}{4}}\cdot R_y=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

故 T为线性变换，矩阵 $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

习题5.2

1. 下面关于 $T(x,y)$ 的公式定义了映射 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. 判断各小题的映射是否为：(i) 单射，(ii) 满射，(iii) 可逆映射.

(6) $T(x,y)=[2^x,2^y]$,

解:

(i) 是

(ii) 不是

(iii) 不是

(10) $T(x, y) = [3x + 2y, 5x - 6y]$.

解:

(i) 是
(ii) 是
(iii) 是

2. 下面关于 $T(x, y, z)$ 的公式定义了线性映射 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. (i) 求出这些线性映射的核, (ii) 求出这些线性映射的像, (iii) 判断这些线性映射是否可逆.

(5) $T[x, y, z] = [x + y, y + z, z + x]$,

解:

(i) $\{0\}$

(ii) $\mathbb{R}^3$

(iii) 可逆

(6) $T(x, y, z) = [x - y, y - z, z - x]$.

解:

(i) $\left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) $\{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 + u_2 + u_3 = 0\}$

(iii) 不可逆

4. 设 $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是线性算子(也称为线性变换)，定义为 $A(x, y) = (-x, y)$.

(1) 求 A 在标准基下的矩阵 A;

解:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 求 A 在基 $u_1=(1,1)$, $u_2=(-1,1)$ 下的矩阵 B;

解:

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(3) 求从基 u_1, u_2 到基 $v_1=(2,1)$, $v_2=(1,0)$ 的转换矩阵 S，再通过计算 $S^{-1}BS$ 求出 A 在基 v_1, v_2 下的矩阵.

解:

$$S=U^{-1}V=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A_v=S^{-1}BS=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & -1\end{pmatrix}$$

(4) 求从标准基到基 v_1, v_2 的转换矩阵 T，再通过计算 $T^{-1}AT$ 求出 A 在基 v_1, v_2 下的矩阵. 比较(3)和(4)的计算的繁简并回顾例4.8的解题方法.

解:

(4)

$$T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A_v=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & -1\end{pmatrix}$$

4. 定义线性算子 $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 如下

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2-x_3\\ 2x_2-x_1-x_3\\ 2x_3-x_1-x_2\end{pmatrix}$$

(1) 求 A 在标准基下的矩阵.

解:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

(2) 确定从标准基到基 $u_1 = [1,1,0], u_2 = [1,0,1], u_3 = [0,1,1]$ 的转换矩阵 T.

解:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 求 A 在基 u_1, u_2, u_3 下的矩阵.

解:

$$A_u = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. 命 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. 定义线性算子 $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. 求 A 在基 $v_1 = [1,1,1], v_2 = [1,2,0], v_3 = [0,-2,1]$ 下的矩阵.

解:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. 证明: 如果方阵 A 与 B 相似, E 是同阶的单位矩阵, 那么 $E+A$ 与 $E+B$ 相似.

解:

$$E + B = E + T^{-1}AT$$

$$= T^{-1}ET + T^{-1}AT$$

$$= T^{-1}(E+A)T$$

故相似

10. (1) 证明如下两个 n 阶方阵是相似的：

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

解:

取 $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T^{-1}AT = B$ 故相似

12. 设方阵 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 分别与方阵 $B_1, B_2, \ldots, B_k$ 相似，

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}$$

证明：A 与 B 相似.

解:

$$B_i = P_i^{-1} A_i P_i$$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & P_k \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} P_1^{-1}A_1P_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & P_k^{-1}A_kP_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & B_k \end{pmatrix} = B$$

故相似