

《线性代数》

第五章: \mathbb{R}^n 上的线性算子

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.12.3

教学安排

- 1 可对角化矩阵
- 2 线性算子的不变子空间
- 3 凯莱-哈密顿定理

特征向量与特征多项式

- 方程 $AX = \lambda X$, $X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ 可写成:

$$(A - \lambda E)X = 0, \quad X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- 上述方程有非零解意味着系数矩阵 $A - \lambda E$ 的秩 $\leq n - 1$.
- 反过来, 若系数矩阵 $A - \lambda E$ 的秩 $\leq n - 1$, 则上述方程有非零解

特征向量与特征多项式

- 方程 $AX = \lambda X$, $X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ 可写成:

$$(A - \lambda E)X = 0, \quad X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- 上述方程有非零解意味着系数矩阵 $A - \lambda E$ 的秩 $\leq n - 1$.
- 反过来, 若系数矩阵 $A - \lambda E$ 的秩 $\leq n - 1$, 则上述方程有非零解
- 系数矩阵 $A - \lambda E$ 的秩 $\leq n - 1$ 当且仅当 $\det(A - \lambda E) = 0$.

特征向量与特征多项式

定理 (5.17)

设 A 是 n 阶方阵, 数 λ 是 A 的特征值当且仅当 λ 是如下方程的解:

$$\det(A - tE) = 0, \quad t \text{ 是未知元.}$$

特征向量与特征多项式

定理 (5.17)

设 A 是 n 阶方阵, 数 λ 是 A 的特征值当且仅当 λ 是如下方程的解:

$$\det(A - tE) = 0, \quad t \text{ 是未知元.}$$

定义 (5.18)

设 A 是 n 阶方阵, 多项式 $\det(tE - A) = (-1)^n \det(A - tE)$ 称为 A 的特征多项式, 记作 $\chi_A(t)$.

特征向量与特征多项式

命题 (5.19)

方阵具有不同特征值的特征向量线性无关. 对线性算子, 也有相同的结论

特征向量与特征多项式

命题 (5.19)

方阵具有不同特征值的特征向量线性无关. 对线性算子, 也有相同的结论

推论 (5.20)

如果 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 那么 A 可对角化到 $\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

特征向量与特征多项式

- A 对应于特征值 λ 的特征（子）空间：

$$\mathbb{R}_\lambda^n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \lambda X\}$$

- 利用命题 5.19，用特征子空间的语言重述定理 5.16？

特征向量与特征多项式

- A 对应于特征值 λ 的特征（子）空间：

$$\mathbb{R}_\lambda^n = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \lambda X\}$$

- 利用命题 5.19，用特征子空间的语言重述定理 5.16？

定理 (5.21)

设 A 是 n 阶方阵，那么 A 可对角化当且仅当 A 的特征子空间的维数和是 n 。这时，列向量空间 \mathbb{R}^n 是 A 的所有的特征子空间的和，而且这些子空间的和是直和。

判断方阵能否对角化

- 求解方阵的特征多项式得到特征值
- 对每个 λ , 求方程 $(A - \lambda E)X = 0$ 的解空间
- 将不同解空间所取的基合起来得到一组线性无关的向量

判断方阵能否对角化

- 求解方阵的特征多项式得到特征值
- 对每个 λ , 求方程 $(A - \lambda E)X = 0$ 的解空间
- 将不同解空间所取的基合起来得到一组线性无关的向量
 - 如果这组向量是 \mathbb{R}^n 的一个基, 则 A 可对角化, 对角矩阵某个特征值出现的次数就是这个特征值对应的解空间的维数
 - 如果这组向量不是 \mathbb{R}^n 的一个基, 那么 A 不可对角化

判断方阵能否对角化

定理 (5.22)

设 A 是 n 阶方阵, 列向量空间 \mathbb{R}^n 的基 X_1, X_2, \dots, X_n 由 A 的特征向量构成, $AX_i = \lambda_i X_i$. 命 B 为以 X_1, X_2, \dots, X_n 为列向量的矩阵, 那么 B 是可逆的, 且对任意的正整数 k , $B^{-1}A^k B = \text{diag}\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}$.

判断方阵能否对角化

定理 (5.22)

设 A 是 n 阶方阵, 列向量空间 \mathbb{R}^n 的基 X_1, X_2, \dots, X_n 由 A 的特征向量构成, $AX_i = \lambda_i X_i$. 命 B 为以 X_1, X_2, \dots, X_n 为列向量的矩阵, 那么 B 是可逆的, 且对任意的正整数 k , $B^{-1}A^k B = \text{diag}\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}$.

例 5.23 & 5.24 分别将矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ 和矩阵

$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ 对角化 (求出特征值、特征向量以及对角形).

习题 5.3

1. 设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列. 证明: 对角矩阵 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 和对角矩阵 $\text{diag}(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_n})$ 相似.
2. 求 a, b, c, d, e, f 使得列向量 $[1, 1, 1], [1, 0, -1], [1, -1, 0]$ 为矩阵
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$
 的特征向量.
3. 求下列矩阵的特征值和相应的特征子空间以及该子空间的一个基.

习题 5.3

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. 求下列矩阵的对角形和对角化变换矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (6) \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

习题 5.3

$$(7) \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. 求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征子空间, 并利用定理5.17确定

该矩阵是否能对角化.

6. 设 λ 是方阵 A 的特征值. 证明

(1) λ^2 是方阵 A^2 的特征值.

(2) 更一般地, 对任意正整数 k , λ^k 是 A^k 的特征值.

7. 设 A 是可逆方阵. 证明: 如果 λ 是 A 的特征值, 那么 $\lambda \neq 0$ 且 λ^{-1} 是 A 的逆矩阵 A^{-1} 的特征值.

8. 证明: 如果 λ^2 是线性算子 \mathcal{A}^2 的特征值, 那么 λ 和 $-\lambda$ 中有一个是 \mathcal{A} 的特征值. (提示: 利用等式 $\mathcal{A}^2 - \lambda^2 \mathcal{E} = (\mathcal{A} + \lambda \mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})$.)

每个方阵都可以对角化吗？

- 希望对尽可能多的矩阵知道是否能对角化
- 并不是每个方阵都可以对角化

每个方阵都可以对角化吗？

- 希望对尽可能多的矩阵知道是否能对角化
- 并不是每个方阵都可以对角化
- **练习：**分别通过直接计算和利用特征向量的理论证明 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 无法对角化

每个方阵都可以对角化吗？

- 希望对尽可能多的矩阵知道是否能对角化
- 并不是每个方阵都可以对角化
- **练习：**分别通过直接计算和利用特征向量的理论证明 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 无法对角化
- 后者更简洁 — 理论的价值
- 在相似类中找到比较简单的矩阵，本质是寻找一个基，使得线性算子在该基下的矩阵尽可能简单和容易计算

线性算子的行列式、特征多项式和迹

- 相似的矩阵有相同的行列式，该值称为 \mathcal{A} 的行列式，记为 $\det \mathcal{A}$

线性算子的行列式、特征多项式和迹

- 相似的矩阵有相同的行列式，该值称为 \mathcal{A} 的行列式，记为 $\det \mathcal{A}$
- 相似的矩阵有相同的特征多项式，该多项式定义为 \mathcal{A} 的特征多项式，记作 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$

线性算子的行列式、特征多项式和迹

- 相似的矩阵有相同的行列式，该值称为 \mathcal{A} 的行列式，记为 $\det \mathcal{A}$
- 相似的矩阵有相同的特征多项式，该多项式定义为 \mathcal{A} 的特征多项式，记作 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$
- 方阵 $A = (a_{ij})$ 的迹定义为对角线的全体元素之和. 如果 A 是 \mathcal{A} 在某个基下的矩阵，则定义

$$\operatorname{tr} \mathcal{A} = \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

线性算子的行列式、特征多项式和迹

- 相似的矩阵有相同的行列式，该值称为 \mathcal{A} 的行列式，记为 $\det \mathcal{A}$
- 相似的矩阵有相同的特征多项式，该多项式定义为 \mathcal{A} 的特征多项式，记作 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$
- 方阵 $A = (a_{ij})$ 的迹定义为对角线的全体元素之和。如果 A 是 \mathcal{A} 在某个基下的矩阵，则定义

$$\operatorname{tr} \mathcal{A} = \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

- 线性算子 \mathcal{A} 的所有矩阵有相同的迹，它不依赖定义中所选取的基和相应的矩阵

线性算子的特征值

- 回顾线性算子的特征值和特征向量
- 特征向量与方阵的可对角化密切相关

线性算子的特征值

- 回顾线性算子的特征值和特征向量
- 特征向量与方阵的可对角化密切相关

定理 (5.25)

纯量 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是线性算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的特征值当且仅当 λ 是 \mathcal{A} 的特征多项式

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$$

的根.

线性算子的特征值

- 回顾线性算子的特征值和特征向量
- 特征向量与方阵的可对角化密切相关

定理 (5.25)

纯量 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是线性算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的特征值当且仅当 λ 是 \mathcal{A} 的特征多项式

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$$

的根.

- 纯量 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是线性算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的特征值当且仅当线性算子 $t\mathcal{E} - \mathcal{A}$ 是退化的
- $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$

- 线性算子可能不存在特征值、特征向量和特征子空间

不变子空间

- 线性算子可能不存在特征值、特征向量和特征子空间
- 将特征向量的条件 $Au = \lambda u$ 适当放宽，得到不变子空间的概念
- 不变子空间对于在方阵的相似类中寻找简单矩阵十分重要

不变子空间

- 线性算子可能不存在特征值、特征向量和特征子空间
- 将特征向量的条件 $Au = \lambda u$ 适当放宽, 得到不变子空间的概念
- 不变子空间对于在方阵的相似类中寻找简单矩阵十分重要

定义 (5.26)

设 A 是 \mathbb{R}^n 上的线性算子. \mathbb{R}^n 的线性子空间 V 称为 A 的不变子空间, 如果对于 V 中的任意向量 v , 都有 $Av \in V$. 记 $AV = \{Ax \mid x \in V\}$, 则 $AV \subset V$.

不变子空间

- 线性算子可能不存在特征值、特征向量和特征子空间
- 将特征向量的条件 $Au = \lambda u$ 适当放宽, 得到不变子空间的概念
- 不变子空间对于在方阵的相似类中寻找简单矩阵十分重要

定义 (5.26)

设 A 是 \mathbb{R}^n 上的线性算子. \mathbb{R}^n 的线性子空间 V 称为 A 的不变子空间, 如果对于 V 中的任意向量 v , 都有 $Av \in V$. 记 $AV = \{Ax \mid x \in V\}$, 则 $AV \subset V$.

举出一些不变子空间的例子?

定理 (5.30)

(1). 线性算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在某个基下的矩阵具有分块对角的形式:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

当且仅当 \mathbb{R}^n 是两个 \mathcal{A} 不变子空间 V 和 W 的直和.

(2). (1) 可以推广到 k 个不变子空间的情形. 若每个子空间的维数都为 1, 则分块对角矩阵就是对角矩阵.

不变子空间与特征多项式的分解

定理 (5.31)

设 \mathbb{R}^n 的子空间 V 是线性算子 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的不变子空间. 假设 \mathcal{A} 在 V 的某个基下的矩阵是 A_1 , 那么方阵 A_1 的特征多项式 $\chi_{A_1}(t)$ 整除 \mathcal{A} 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$.

不变子空间与特征多项式的分解

定理 (5.31)

设 \mathbb{R}^n 的子空间 V 是线性算子 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的不变子空间. 假设 \mathcal{A} 在 V 的某个基下的矩阵是 A_1 , 那么方阵 A_1 的特征多项式 $\chi_{A_1}(t)$ 整除 \mathcal{A} 的特征多项式 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$.

定理 (5.32)

设 \mathbb{R}^n 是线性算子 \mathcal{A} 的不变子空间 V_1, \dots, V_k 的直和, \mathcal{A} 在 V_i 的某个基下的矩阵是 A_i . 那么

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{A_1}(t) \chi_{A_2}(t) \cdots \chi_{A_k}(t)$$

习题 5.4

1. 设 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是向量空间 \mathbb{R}^n 上的线性算子, C 是方阵, λ 是实数. 证明如下关于算子迹的结论.

$$(1) \operatorname{tr}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \operatorname{tr} \mathcal{A} + \operatorname{tr} \mathcal{B}, \quad (2) \operatorname{tr}(\lambda \mathcal{A}) = \lambda \operatorname{tr} \mathcal{A}, \quad (3) \operatorname{tr} C = \operatorname{tr} {}^t V.$$

2. 设 A 和 B 是 n 阶方阵. 假设 $\det A = \det B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. 证明: 在 $n = 2$ 时, A 和 B 的特征多项式相等. 但当 $n > 2$ 时这个结论不成立.

3. 设 \mathcal{A} 是向量空间 \mathbb{R}^n 上的线性算子. 证明: 如果 V_1, \dots, V_m 是 \mathcal{A} 的不变子空间, 那么这些子空间的和与交都是 \mathcal{A} 的不变子空间.

4. 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 是向量空间 \mathbb{R}^n 上的线性算子. 证明: 如果 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, 那么对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ker(\lambda \mathcal{E} - \mathcal{A})$ 是 \mathcal{B} 的不变子空间.

5. 证明: 如果 \mathcal{A} 是可逆线性算子, 那么 \mathcal{A} 的不变子空间也是 \mathcal{A}^{-1} 的不变子空间. 特别, \mathcal{A} 的特征向量也是 \mathcal{A}^{-1} 的特征向量.

6. 设 \mathcal{A} 是向量空间 \mathbb{R}^n 上的线性算子, 其平方是恒等算子. 证明:

(1) 对任意的向量 $v \in \mathbb{R}^n$, 向量 $v - \mathcal{A}v$ 是零向量或以 -1 为特征值的特征向量.

(2) \mathbb{R}^n 是特征空间 \mathbb{R}_1^n 和 \mathbb{R}_{-1}^n 的直和.

习题 5.4

7. 设 \mathcal{A} 是向量空间 \mathbb{R}^n 上的幂等线性算子(即 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$). 证明:

(1) $\mathcal{B} = \mathcal{E} - \mathcal{A}$ 也是幂等线性算子, 而且 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, $\mathcal{E} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$;

(2) $\text{im } \mathcal{A}$ 是 \mathcal{A} 的以 1 为特征值的特征空间 \mathbb{R}_1^n , $\ker \mathcal{A}$ 是 \mathcal{A} 的以 0 为特征值的特征空间;

(3) $\ker \mathcal{A} = \text{im } \mathcal{B}$;

(4) $\mathbb{R}^n = \text{im } \mathcal{A} \oplus \ker \mathcal{A} = \text{im } \mathcal{A} \oplus \text{im } (\mathcal{E} - \mathcal{A})$.

8. 更一般地, 设 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{m-1}$ 是向量空间 \mathbb{R}^n 上的幂等线性算子, 且相互正交(即 $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j\mathcal{A}_i = \mathcal{O}$ 如果 $i \neq j$). 证明:

(1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_{m-1}$ 是幂等线性算子, 且 $\mathcal{A}\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i\mathcal{A} = \mathcal{A}_i$, $1 \leq i \leq m-1$.

(2) 置 $\mathcal{A}_m = \mathcal{E} - \mathcal{A}$, 则有 $\mathcal{A}_m\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i\mathcal{A}_m = \mathcal{O}$, $1 \leq i \leq m-1$.

(3) $\mathbb{R}^n = \text{im } \mathcal{A}_1 \oplus \text{im } \mathcal{A}_2 \oplus \dots \oplus \text{im } \mathcal{A}_m$.

习题 5.4

9. 设 \mathcal{A} 是向量空间 \mathbb{R}^n 上的线性算子, 对某个正整数 k 有 $\operatorname{im} \mathcal{A}^k = \operatorname{im} \mathcal{A}^{k+1}$. 证明: 在这种情形有 $\mathbb{R}^n = \ker \mathcal{A}^p \oplus \operatorname{im} \mathcal{A}^p$ 是 \mathcal{A} 的两个不变子空间的直和.

10. 设 A, B 是 n 阶实方阵, 且 $AB = BA$, B 幂零. 证明: $\det(tE - (A + B)) = \det(tE - A)$.

11. 证明: 幂等实方阵 A (即 $A^2 = A$) 相似于分块对角矩阵 $\operatorname{diag}(I_r, 0)$, 其中 $r = \operatorname{rank} A$, I_r 是 r 阶单位矩阵. 利用这一结果证明: 对幂等实矩阵 A 有 $\operatorname{rank} A = \operatorname{tr} A$.

12. 方阵 A 和 tA 是否有相同的特征向量? 是否有相同的特征值?

13. 对三阶方阵 $A = (a_{ij})$, 证明其特征多项式中一次项的系数为 2 阶对称子式之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

习题 5.4

14. 假设向量空间 \mathbb{R}^3 上的线性算子在标准基下的矩阵是 $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

求该线性算子的所有的不变子空间.

15. 假设向量空间 \mathbb{R}^3 上的线性算子 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 在标准基下的矩阵分别是

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

求在 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 下均不变的所有子空间.

定理 (5.33)

线性算子 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ 是零算子, 即对于 \mathbb{R}^n 中任意向量 v , 有 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v = \mathcal{O}v = 0$.

凯莱-哈密顿定理

定理 (5.33)

线性算子 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ 是零算子, 即对于 \mathbb{R}^n 中任意向量 v , 有 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})v = \mathcal{O}v = 0$.

推论 (5.34)

设 A 是 n 阶方阵, 它的特征多项式是

$\chi_A(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$, 那么 $\chi_A(A) = 0$, 即

$$\chi_A(A) = A^n + \chi_1 A^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} A + \chi_n E = 0.$$

利用凯莱-哈密顿定理计算逆算子或逆矩阵

命题 (5.38)

(1). 设 \mathcal{A} 是 \mathbb{R}^n 上的线性算子, 特征多项式是 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$. 那么 \mathcal{A} 可逆当且仅当特征多项式的常数项 χ_n 不为 0. 这时候

$$\mathcal{A}^{-1} = -\chi_n^{-1}(\mathcal{A}^{n-1} + \chi_1 \mathcal{A}^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} \mathcal{E}).$$

利用凯莱-哈密顿定理计算逆算子或逆矩阵

命题 (5.38)

(1). 设 \mathcal{A} 是 \mathbb{R}^n 上的线性算子, 特征多项式是 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$. 那么 \mathcal{A} 可逆当且仅当特征多项式的常数项 χ_n 不为 0. 这时候

$$\mathcal{A}^{-1} = -\chi_n^{-1}(\mathcal{A}^{n-1} + \chi_1 \mathcal{A}^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} \mathcal{E}).$$

(2). 将 (1) 中的 \mathcal{A} 换成 n 阶方阵 A , 结论同样成立. 此时

$$A^{-1} = -\chi_n^{-1}(A^{n-1} + \chi_1 A^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} E).$$

利用凯莱-哈密顿定理计算逆算子或逆矩阵

命题 (5.38)

(1). 设 \mathcal{A} 是 \mathbb{R}^n 上的线性算子, 特征多项式是 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$. 那么 \mathcal{A} 可逆当且仅当特征多项式的常数项 χ_n 不为 0. 这时候

$$\mathcal{A}^{-1} = -\chi_n^{-1}(\mathcal{A}^{n-1} + \chi_1 \mathcal{A}^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} \mathcal{E}).$$

(2). 将 (1) 中的 \mathcal{A} 换成 n 阶方阵 A , 结论同样成立. 此时

$$A^{-1} = -\chi_n^{-1}(A^{n-1} + \chi_1 A^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} E).$$

例 5.39 利用上述命题求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.