hw_6(2)

习题3.4

1. 求下列矩阵的伴随矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

解： $A^{\vee} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

解： $A^{\vee} = \begin{pmatrix} 109 & -40 & -41 & -50 \\ 113 & -92 & -79 & 38 \\ -41 & 74 & 7 & 16 \\ -13 & 16 & 47 & 20 \end{pmatrix}$

2. 求上一题中各矩阵的逆矩阵.

解： (1) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^{\vee} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(3) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^{\vee} = \begin{pmatrix} \frac{109}{306} & -\frac{20}{153} & -\frac{41}{306} & -\frac{25}{153} \\ \frac{113}{306} & -\frac{46}{153} & -\frac{79}{306} & \frac{19}{153} \\ -\frac{41}{306} & \frac{37}{153} & \frac{7}{306} & \frac{8}{153} \\ -\frac{13}{306} & \frac{8}{153} & \frac{47}{306} & \frac{10}{153} \end{pmatrix}$

3. 假设 n 阶方阵 A 在各处的值都是整数，$\det A = 1$.证明 A^{-1} 在各处的值是整数.

解： $A^{\vee} = \det A \cdot A^{-1} = A^{-1}$

$\because A$ 在各处的值为整数

$\therefore A^{\vee}$ 在各处的值为整数

$\therefore A^{-1}$ 在各处的值为整数

4. 利用推论 3.22 确定下列向量组是否线性相关.

(1) $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$, $(2,3,-1)$.

解: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$\therefore$ 不线性相关。

(3) $(1,0,0,0,1)$, $(1,1,0,0,0)$, $(1,0,1,0,1)$, $(1,1,0,1,1)$, $(0,1,0,1,0)$.

解: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore$ 线性相关。

5. 假设 a, b, c, d 是非零实数，求解下列线性方程组:

$$ax - by - az + bu = 1$$
$$bx + ay - bz - au = 0$$
$$cx - dy + cz - du = 0$$
$$dx + cy + dz + cu = 0$$

解: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -b & -a & b \\ 0 & a & -b & -a \\ 0 & -d & c & -d \\ 0 & c & d & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix}} = \dfrac{a}{2(a^2+b^2)}$

$y = -\frac{b}{2(a^2+b^2)}$

$z = -\frac{a}{2(a^2+b^2)}$

$u = \frac{b}{2(a^2+b^2)}$

6. 设 A 是 $n \geq 2$ 阶方阵，$A^{\vee}$ 是其伴随矩阵.证明：

(1) $({}^{t}A)^{\vee} = {}^{t}(A^{\vee})$,

解： $A_{ij}^{\vee} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}(A))$

$({}^{t}A)_{ij}^{\vee} = (-1)^{j+i} \det(M_{ji}(A))$

${}^{t}(A^{\vee})_{ij} = ({}^{t}A)_{ji}^{\vee} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}(A))$

$\therefore ({}^{t}A)^{\vee} =^{t} (A^{\vee})$

(3) $\det A^{\vee} = (\det A)^{n-1}$,

解： $A \cdot A^{\vee} = (\det A)E$

$\det A \cdot \det A^{\vee} = (\det A)^{n}$

1° 若 $\det A \neq 0$，则 $\det A^{\vee} = (\det A)^{n-1}$

2° 若 $\det A = 0$，分两种情况：

① $\operatorname{rank} A < n-1$，则 $\operatorname{rank} A^{\vee} = 0$，故 $\det(A^{\vee}) = (\det A)^{n-1} = 0$;

② $\operatorname{rank} A = n-1$，则 $\operatorname{rank} A^{\vee} = 1$，故 $\det(A^{\vee}) = (\det A)^{n-1} = 0$。

$\therefore$ 综上，$\det(A^{\vee}) = (\det A)^{n-1}$。

(5) 如果 B 是另一个 n 阶矩阵，有 $(A \cdot B)^{\vee} = B^{\vee} \cdot A^{\vee}$.

解： $(AB) \cdot (AB)^{\vee} = (\det(AB))E$

$(AB) \cdot (B^{\vee}A^{\vee}) = A(B \cdot B^{\vee})A^{\vee}$

$= A(\det B \cdot E)A^{\vee}$

$= \det B \cdot A \cdot A^{\vee} = \det(AB) \cdot E$

$= (AB) \cdot (B^{\vee}A^{\vee})$

$\therefore (AB)^{\vee} = B^{\vee}A^{\vee}$

8. 证明：齐次线性方程组只有零解当且仅当系数矩阵的秩等于方程组中未知元的个数. 特别，当方程组的中方程的个数等于未知元的个数时，方程组只有零解当且仅当系数矩阵的行列式不等于零.

解： 先证充分性：

当 $\operatorname{rank} A = n$ 时，

$\dim S = n - \operatorname{rank} A = 0$

故方程只有零解。

再证必要性：

当 $\dim S=0$ 时，

$\operatorname{rank} A=n-\dim S=n$

特别：

当 $m=n$ 时，

零解 $\iff \operatorname{rank} A=n \iff \det A\neq 0$

故结论成立

9. 假设齐次线性方程组 $\begin{aligned}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n-1,1}x_1+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0\end{aligned}$ 的系数矩阵的秩为 $n-1$，那么

(1) 它的基础解系由一个向量组成；

解： $\dim S=n-\operatorname{rank} A=1$

故基础解系由一个向量组成。

(2) $D=[D_1,-D_2,\ldots,(-1)^{n-1}D_n]$ 形成方程组的一个基础解系，其中 D_i 是系数矩阵去掉第 i 列得到的矩阵的行列式.于是方程组的任意解的形式为 λD.

解： 取该方程的系数矩阵，最后一行添加之前的任意一行，得矩阵 A'。

$\det A'=0$

按最后一行展开：

$\det A'=\sum_{i=1}^{n}a_{ni}M_{ni}=0$

即 $\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(-1)^{n+i}D_i=0$

$\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(-1)^{i-1}D_i=0$

故 $x_i=(-1)^{i-1}D_i$ 对任意行成立。

因此，D 为基础解系，$\lambda $为任意解。

10. 设 A 是 $r\times n$ 矩阵，秩为 r 且 $r\leq n-2$.利用 A 的一些 r 阶子式和 0 给出齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个非零解.

解：

取线性无关的 r 列构成 r 阶子式：

$B=[A_{i_1},\ \ldots,\ A_{i_r}]$

存在列向量 A_j 不在 $\{A_{i_1},\ \ldots,\ A_{i_r}\}$ 中

$A_j=\sum_{k=1}^{r}a_kA_{i_k}$

取 $a_i = \frac{\det C_i}{\det B}, \quad x_i = \det C_i, \quad x_j = -\det B$

其中 C_i 为 B 的第 i 列替换为 A_j 后得到的矩阵。

$A\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{r} x_k A_{i_k} + x_j A_j = 0$

故得到一个非零解