hw_9(2)

习题4.4

6. 举例说明：

(1) 正定矩阵 (a_{ij}) 可以在某些 (i,j) 处的值 a_{ij} 是负的；

解:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 实对称矩阵 $A=(a_{ij})$ 所有的值都是正的，但 A 不是正定的。

解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. 证明：实二次型

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad a_{ij}=a_{ji},$$

是半正定的当且仅当对任意的指标 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, k 阶行列式 $\det(a_{i_r i_t})$ 是非负的。

解:

实二次型 $q(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij}=a_{ji}$ 半正定 $\Leftrightarrow x^TAx \ge 0,\ \forall x \in R^n$

先证必要性

设取向量 $x=(0,\cdots,0,x_{i_1},\cdots,x_{i_k},0,\cdots,0)$

$$x^TAx = (x_i \cdots x_{i_k})(a_{i_r i_i}) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{pmatrix} \ge 0$$

故所有子矩阵 $(a_{i_r i_t})$ 特征值的非负，其行列式亦非负

再证充分性:

若所有主子矩阵行列式、非负，则所有主子式对应的特征值的非负
因此整个矩阵为半正定矩阵

故 $x^TAx \ge 0,\ \forall x$

8. 已知实二次型 $f(x) = ax_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2$ 的秩为 2，

(1) 写出二次型所对应的矩阵 A, 并求参数 a;

解:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$rankA = 2, \quad \det\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$a = 1$$

(2) 把二次型化成标准形。

解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

前 2×2 块 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 秩为 1, 为

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$$

故标准形 $f = y_1^2 + 3y_2^2$

$$y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_3$$

9. 实二次型

$$\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

在 λ 取什么值时是负定的。

解:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \lambda < 0$$

$$\Delta_2 = -2\lambda - 1 > 0$$

$$\Delta_3 = 5\lambda + 3 < 0$$

故 $\lambda \in (-\infty, -\frac{3}{5})$

11. 证明正定矩阵的对角线上的值都是正的

解:

设 A 为正定矩阵，则对所有非零向量 x 有

$$x^T A x > 0$$

令 $x = e_i$ (第 i 个标准基向量)
则 $e_i^T A e_i = a_{ii} > 0$

故矩阵所有对角线元素均为正