《线性代数》

第三章: 行列式

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.10.29

教学安排

1. 行列式的进一步性质
2. 行列式的应用

行列式按一行或一列的元素展开

定义 (3.13)

矩阵 $A=(a_{ij})$ 去掉第 i 行和第 j 列得到的矩阵的行列式记作 M_{ij}，称为矩阵 A 的阵元 (a_{ij}) 的余子式. 数值 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为阵元 a_{ij} 的代数余子式.

行列式按一行或一列的元素展开

定义 (3.13)

矩阵 $A = (a_{ij})$ 去掉第 i 行和第 j 列得到的矩阵的行列式记作 M_{ij}，称为矩阵 A 的阵元 (a_{ij}) 的余子式. 数值 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为阵元 a_{ij} 的代数余子式.

定理 (3.14)

设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. 则有

$$det\, A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

行列式按一行或一列的元素展开

命题 (3.15)

设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. 则有

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij} det\, A,$$
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \delta_{ij} det\, A.$$

准三角方阵的行列式

一个方阵称为准三角的，如果它或其转置具有形式

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

，其中 $A_{11}, \cdots, A_{kk}$ 均是方阵.

一个方阵称为准三角的，如果它或其转置具有形式

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$$，其中 $A_{11}, \cdots, A_{kk}$ 均是方阵.

命题（3.9）有如下推广：

命题 (3.16)

假设矩阵具有上面准三角的形式，那么

$$det\,A = det\,A_{11} \cdot det\,A_{22} \cdot \cdots \cdot det\,A_{kk}.$$

行列式函数与矩阵乘法是相容的

定理 (3.17)

设是 A, B 是 n 阶方阵，那么

$$det\,(AB) = det\,A \cdot det\,B$$

例子

例 3.18 计算 n 阶行列式

$$A_n = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

例 3.19 计算范德蒙德行列式

$$\Delta_n = \Delta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

例 3.20 命 $\mathbf{p}_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$. 计算行列式

$$D_n = D_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} n & \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_{n-1} \\ \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \cdots & \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 & \cdots & \mathbf{p}_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{p}_{n-1} & \mathbf{p}_n & \mathbf{p}_{n+1} & \cdots & \mathbf{p}_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

1. 整数 1653, 2581, 3451, 4582 可以被 29 整除. 利用行列式的性质(而非计算行列式值) 证明下面的四阶行列式值被 29 整除,

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. 不展开行列式而证明下列等式.

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

习题 3.3

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

3. 解方程:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0.$$

4. 按第二列展开计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

5. 本题给出定理3.17另一个证明. 设 A 和 B 分别是 r 阶和 s 阶方阵, I_r 和 I_s 分别是 r 阶和 s 阶单位矩阵, C 是 $r\times s$ 矩阵. 证明

(1) $\det\begin{pmatrix} C & I_r \\ I_s & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{rs}$.

(2) $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & I_r \\ I_s & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\det\begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{rs}\det A\det B$.

(4) 假设$r=s$, 则 $\begin{pmatrix} I_r & -B \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ A & AB \end{pmatrix}$.

(5) 假设 $r=s$, 则有 $\det(AB)=\det A\cdot\det B$.

6. 设 A 和 B 是 n 阶方阵, 证明:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\cdot\det(A-B).$$

7. 设 A, B, C, D 均为 n 阶方阵, A 可逆, I 是 n 阶单位矩阵.

(1) 求矩阵 X, Y 使得下式成立

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

然后证明

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

(2) 如果 $AC = CA$, 证明

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

8. 设 X 和 Y 分别是 $n \times k$ 矩阵和 $k \times n$ 矩阵, I_r 是 r 阶单位矩阵. 证明:

$$\det(I_n + XY) = \det(I_k + YX).$$

9. 借助初等变换计算行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$, (2) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

习题 3.3

$$(3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}, \qquad (4)\ \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

10. 命

$$H_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

证明: $H_n = a_n H_{n-1} + H_{n-2}$. 当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 时, 求出 H_n.

11. 证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

的值为 $n+1$.

12. 计算行列式的值:

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -n+1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(2) $\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$.

13. 利用方阵乘积的行列式公式计算行列式.

(1) 通过矩阵的平方求其行列式: $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$.

(2) 通过分解方阵求其行列式: $\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \cdots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{pmatrix}$.

可逆矩阵的行列式判别准则

定理 (3.21)

方阵 $A = (a_{ij})$ 可逆当且仅当其行列式不为 0. 如果 n 阶方阵 A 可逆，那么

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

且

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

推论 (3.22)

方阵的行（或列）向量线性相关当且仅当其行列式为 *0*.

练习一： 回顾四点共圆的充要条件？

定理 (3.23)

如果线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

的系数矩阵可逆，那么它有唯一解，解公式如下：

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

矩阵的子式与矩阵的秩的联系

- 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，其处于第 $i_1,\cdots,i_k$ 行和第 $j_1,\cdots,j_k$ 列的交叉处的元素形成的方阵 $\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{pmatrix}$，称为 A 的一个 k 阶子阵
- 该子阵的行列式称为 A 的一个 k 阶子式，记作 $M\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$
- 子式 $\tilde{M}$ 称为 M 的上级，如果 M 是由 $\tilde{M}$ 去掉某一行和某一列得到的

矩阵的子式与矩阵的秩的联系

引理 (3.24)

设 A 为 $m \times n$ 矩阵. 命 $r = min\{m, n\}$. 那么 A 的秩为 r 当且仅当 A 有一个 r 阶子式不为零.

命题 (3.25)

矩阵的秩等于其非零子式的阶数中的最大者.

命题 (3.26)

假设一个矩阵 A 的某个子式非零，但这个式子的任何上级都是 0，那么该子式的阶就是矩阵的秩.

习题 3.4

1. 求下列矩阵的伴随矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. (3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. 求上一题中各矩阵的逆矩阵.

3. 假设 n 阶方阵 A 在各处的值都是整数, $\det A = 1$. 证明 A^{-1} 在各处的值都是整数.

4. 利用推论3.22确定下列向量组是否线性相关.

(1) $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$, $(2,3,-1)$.

(2) $(1,-1,2,1)$, $(-1,2,-1,0)$, $(3,-1,1,0)$, $(1,0,0,1)$.

(3) $(1,0,0,1)$, $(1,1,0,0,0)$, $(1,0,1,0,1)$, $(1,1,0,1,1)$, $(0,1,0,1,0)$.

5. 假设 a, b, c, d 是非零实数, 求解下列线性方程组.

$$
\begin{aligned}
ax - by - az + bu &= 1\\
bx + ay - bz - au &= 0\\
cx - dy + cz - du &= 0\\
dx + cy + dz + cu &= 0
\end{aligned}
$$

6. 设 A 是 $n \geqslant 2$ 阶方阵, $A^\vee$ 是其伴随矩阵. 证明

(1) $({}^tA)^\vee = {}^t(A^\vee)$,

(2) $(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee$,

(3) $\det A^\vee = (\det A)^{n-1}$,

(4) $(A^\vee)^\vee = (\det A)^{n-2} A$ 如果 $n > 2$, $(A^\vee)^\vee = A$ 如果$n = 2$,

(5) 如果 B 是另一个 n 阶矩阵, 有 $(A \cdot B)^\vee = B^\vee \cdot A^\vee$.

7. 证明 n 阶方阵的伴随矩阵的秩只有三个可能: 0, 1, n.

8. 证明：齐次线性方程组只有零解当且仅当系数矩阵的秩等于方程组中未知元的个数. 特别, 当方程组的中方程的个数等于未知元的个数时, 方程组只有零解当且仅当系数矩阵的行列式不等于零.

9. 假设齐次线性方程组

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1,1}x_1 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0$$

的系数矩阵的秩为 $n-1$, 那么

(1) 它的基础解系由一个向量组成;

(2) $D = [D_1,\ -D_2,\ \ldots,\ (-1)^{n-1}D_n]$ 形成方程组的一个基础解系, 其中 D_i 是系数矩阵去掉第 i 列得到的矩阵的行列式. 于是方程组的任意解的形式为 λD.

10. 设 A 是 $r \times n$ 矩阵, 秩为 r 且 $r \leqslant n-2$. 利用 A 的一些 r 阶子式和 0 给出齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个非零解.

11. (比内特-柯西公式) 设 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 分别是 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵. 命 $C = AB$. 证明

(1) 如果 $n > m$, 则 $\det C = 0$.

习题 3.4

(2) 如果 $n \leqslant m$, 则

$$\det C = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant m} A_{i_1 i_2 \cdots i_n} B_{i_1 i_2 \cdots i_n},$$

其中 $A_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 是 A 的第 i_1, i_2, ..., i_n **列**形成的 n 阶行列式, $B_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 是 B 的第 i_1, i_2, ..., i_n **行**形成的 n 阶行列式. (提示: 行列式是行的多重线性函数.)

12. 设 A 和 B 分别是 $p \times n$ 矩阵和 $n \times k$ 矩阵, 它们各自由第 i_1, i_2, ..., i_m 行和第 j_1, j_2, ..., j_m 列交叉处元素形成的子式分别记作

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}, \qquad B\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}.$$

命 $C = AB$. 证明:

$$C\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix} = \sum_{1 < k_1 < k_2 < \cdots < k_m \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ k_1 & \cdots & k_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}$$

如果 $m \leqslant n$, $C\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix} = 0$ 如果 $m > n$.

13. (拉普拉斯定理) 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵. 其 k 阶子式 $M\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ (定义见小节三) 的余子式 $\bar{M}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 是 A 去掉第 i_1, i_2, ..., i_k 行和第 j_1, j_2, ..., j_k 列后得到的矩阵的行列式. 取定 i_1, i_2, ..., i_k, 则有

$$\det A=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n}(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}M\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\bar{M}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}.$$

14. 假设 A 是 n 阶可逆方阵, $X=(x_{ij})$ 是 n^2 个未知元形成的方阵. A 的逆矩阵 A^{-1} 是方程 $AX=E$ 的解. 该矩阵方程可以分解成 n 个列向量方程 $A\mathcal{X}_j=E_j$. 利用克拉默法则证明定理3.21中 A^{-1}的公式.