《线性代数》

第六章: 复向量空间 $\mathbb{C}^n$

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.12.31

教学安排

1. 约当标准型

回顾

- 第 4-6 章主要讲的就是如何在方阵的相似类中寻找简单的矩阵.
- 这么做有何意义？

回顾

- 第 4-6 章主要讲的就是如何在方阵的相似类中寻找简单的矩阵.
- 这么做有何意义？
- (以可对角化为例) 若 $A = B^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)B$, 则 $A^k = ?$ 假设 $f(t) = t^m + at + a_0$, 那么

$$f(A) = B^{-1}\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n))B, \quad \det(f(A)) = ?$$

回顾

- 第 4-6 章主要讲的就是如何在方阵的相似类中寻找简单的矩阵.
- 这么做有何意义？
- (以可对角化为例) 若 $A = B^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)B$, 则 $A^k =?$ 假设 $f(t) = t^m + at + a_0$, 那么

$$f(A) = B^{-1}\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n))B, \quad \det(f(A)) =?$$

- 一些矩阵的相似类中有对角矩阵，一些没有
- 实数域中的对称矩阵和正交矩阵的情形已经圆满解决这个问题
- 复数域中这个问题可以得到最好的一般结果: 每个方阵的相似类中都有约当矩阵

约当块和约当矩阵

定义 (6.30)

设 λ 是复数，如下形式的 n 阶方阵 $J_n(\lambda)$ 称为以 λ 为特征值的 n 阶（上）约当（Jordan）块:

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

约当块和约当矩阵

定义 (6.30)

设 λ 是复数，如下形式的 n 阶方阵 $J_n(\lambda)$ 称为以 λ 为特征值的 n 阶（上）约当（Jordan）块:

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

约当矩阵就是一个分块对角矩阵

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

约当块和约当矩阵的价值

对任意的复系数多项式 $f(t)$ 有:

$$f(J_n(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda)/1! & f''(\lambda)/2! & \cdots & f^{(n-2)}(\lambda)/(n-2)! & f^{(n-1)}(\lambda)/(n-1)! \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda)/1! & \cdots & f^{(n-3)}(\lambda)/(n-3)! & f^{(n-2)}(\lambda)/(n-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda) & f'(\lambda)/1! \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

约当块和约当矩阵的价值

对任意的复系数多项式 $f(t)$ 有:

$$f(J_n(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda)/1! & f''(\lambda)/2! & \cdots & f^{(n-2)}(\lambda)/(n-2)! & f^{(n-1)}(\lambda)/(n-1)! \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda)/1! & \cdots & f^{(n-3)}(\lambda)/(n-3)! & f^{(n-2)}(\lambda)/(n-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda) & f'(\lambda)/1! \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

- 若能在方阵的相似类中找到约当矩阵，则对方阵的幂的计算和性质的讨论都很有价值

约当块和约当矩阵的价值

对任意的复系数多项式 $f(t)$ 有:

$$f(J_n(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda)/1! & f''(\lambda)/2! & \cdots & f^{(n-2)}(\lambda)/(n-2)! & f^{(n-1)}(\lambda)/(n-1)! \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda)/1! & \cdots & f^{(n-3)}(\lambda)/(n-3)! & f^{(n-2)}(\lambda)/(n-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) & f'(\lambda)/1! \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

- 若能在方阵的相似类中找到约当矩阵，则对方阵的幂的计算和性质的讨论都很有价值
- 约当矩阵 J 如果与方阵 A 相似，则称 J 是 A 的一个约当标准型

定理 (6.31)

设 A 是 n 阶复方阵，那么 A 有约当标准型，即存在 n 阶复可逆方阵 C 使得 $C^{-1}AC = J(A)$ 是约当矩阵. 如果不计约当块之间的置换，A 的标准型是唯一的.

约当标准型的存在性和唯一性定理

定理 (6.31)

设 A 是 n 阶复方阵，那么 A 有约当标准型，即存在 n 阶复可逆方阵 C 使得 $C^{-1}AC = J(A)$ 是约当矩阵. 如果不计约当块之间的置换，A 的标准型是唯一的.

本节重点 - 如何求方阵 A 的约当标准型 $J(A)$ 以及对应的相似变换 C

代数重数 (algebraic multiplicity, gm) 和几何重数 (geometric multiplicity, gm)

- 代数重数：矩阵 A 的特征多项式 $\chi_A(t) = 0$ 的某个解的重复次数:

$$\chi_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1}(t - \lambda_2)^{n_2} \cdots (t - \lambda_p)^{n_p}$$

  $n_1, n_2, \ldots, n_p$ 对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ 的代数重数

- 几何重数: 矩阵 A 某个特征值 λ 对应的特征空间

$$E_A(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = \lambda x\} = \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$$

  即 $(A - \lambda E)$ 的零空间的维度

代数重数 (algebraic multiplicity, gm) 和几何重数 (geometric multiplicity, gm)

- 代数重数：矩阵 A 的特征多项式 $\chi_A(t)=0$ 的某个解的重复次数:

$$\chi_A(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\cdots(t-\lambda_p)^{n_p}$$

$n_1,n_2,\ldots,n_p$ 对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ 的代数重数

- 几何重数: 矩阵 A 某个特征值 λ 对应的特征空间

$$E_A(\lambda)=\{x\in\mathbb{C}^n \mid Ax=\lambda x\}=\ker(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$$

即 $(A-\lambda E)$ 的零空间的维度

- 练习一：比较矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$ 的代数重数和几何重数.

和定理

定理 (Sum Formula)

如果 $A = Diag(B, C)$, 那么 A 的代数重数和几何重数等于 B, C 的代数和几何重数之和, 即

$$am_A(\lambda) = am_B(\lambda) + am_C(\lambda); \quad gm_A(\lambda) = gm_B(\lambda) + gm_C(\lambda).$$

和定理

定理 (Sum Formula)

如果 $A = Diag(B, C)$, 那么 A 的代数重数和几何重数等于 B, C 的代数和几何重数之和, 即

$$am_A(\lambda) = am_B(\lambda) + am_C(\lambda); \quad gm_A(\lambda) = gm_B(\lambda) + gm_C(\lambda).$$

推论

如果 $J = Diag(J_{11}, J_{12}, \ldots, J_{ij})$, 那么有以下结论:

(a). $gm_J(\lambda) =$ 包含特征值 λ 的 *Jordan* 块的数量. *(*单个约当块的核空间维数是 *1.* 若有 n 个约当块包含 λ, 那么 $gm_J(\lambda) = n$.*)*

和定理

定理 (Sum Formula)

如果 $A = Diag(B, C)$, 那么 A 的代数重数和几何重数等于 B, C 的代数和几何重数之和, 即

$$am_A(\lambda) = am_B(\lambda) + am_C(\lambda); \quad gm_A(\lambda) = gm_B(\lambda) + gm_C(\lambda).$$

推论

如果 $J = Diag(J_{11}, J_{12}, \ldots, J_{ij})$, 那么有以下结论:

(a). $gm_J(\lambda) =$ 包含特征值 λ 的 *Jordan* 块的数量. *(*单个约当块的核空间维数是 *1.* 若有 n 个约当块包含 λ, 那么 $gm_J(\lambda) = n$.*)*

(b). $am_J(\lambda) =$ 包含特征值 λ 的 *Jordan* 块的尺寸之和. *(*若 n 个包含 λ 的约当块的尺寸分别为 $k_1 \times k_1$, $k_2 \times k_2$, ..., $k_m \times k_m$, 那么 $am_J(\lambda) = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$.*)*

定理

如果 $A = Diag(B, C)$, 那么

(a). $\chi_A(t) = \chi_B(t) \cdot \chi_C(t)$

(b). $E_A(\lambda) = E_B(\lambda) \oplus E_C(\lambda)$

特征多项式和特征空间的变换不变性

定理

如果 $B = C^{-1}AC$, 那么

(a). $\chi_B(t) = \chi_A(t)$, $E_A(\lambda) = CE_B(\lambda) = \{Cv : v \in E_B(\lambda)\}$(相似矩阵的特征子空间线性同构, 但是不相同)

(b). $am_B(\lambda) = am_A(\lambda)$; $gm_B(\lambda) = gm_A(\lambda)$

特征多项式和特征空间的变换不变性

定理

如果 $B = C^{-1}AC$, 那么

(a). $\chi_B(t) = \chi_A(t)$, $E_A(\lambda) = CE_B(\lambda) = \{Cv : v \in E_B(\lambda)\}$(相似矩阵的特征子空间线性同构，但是不相同)

(b). $am_B(\lambda) = am_A(\lambda)$; $gm_B(\lambda) = gm_A(\lambda)$

练习二：确定阶次小于等于 3 的方阵的所有 Jordan 标准型

有关几何重数和代数重数与约当块关系的总结

属于特征值 λ 的 Jordan 块的个数等于 λ 的特征子空间的维数:

$$N(\lambda) = gm_A(\lambda) = \dim \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$$

- 几何重数等于该特征值对应的 Jordan 块的个数，而不是 Jordan 块的大小（大小和 = 代数重数）
- 可对角化的矩阵 (每个几何重数 = 代数重数) 的 Jordan 块都是 1×1 的块，从而个数等于代数重数，也等于几何重数
- 代数重数之和 $\geq$ 几何重数之和
- 现已解决各个特征值对应 Jordan 块的个数问题，接下来是对应 Jordan 块的大小问题

广义特征空间

定义

设 A 是 $n \times n$ 矩阵. $k \geq 1$ 是一个整数，那么 A 的 k 重广义特征空间定义为:

$$E_A^k(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda E)^k x = 0\} = \ker (A - \lambda E)^k$$

广义特征空间

定义

设 A 是 $n \times n$ 矩阵. $k \geq 1$ 是一个整数，那么 A 的 k 重广义特征空间定义为:

$$E_A^k(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda E)^k x = 0\} = \ker (A - \lambda E)^k$$

- $\dim E_A^k(\lambda) = n - \operatorname{rank} (A - \lambda E)^k$
- $E_A^1(\lambda) = E_A(\lambda) \subset E_A^2(\lambda) \subset \cdots \subset E_A^k(\lambda)$
- $gm_A^1(\lambda) = gm_A(\lambda) \leq gm_A^2(\lambda) \leq \cdots \leq gm_A^k(\lambda)$

广义特征空间

定义

设 A 是 $n \times n$ 矩阵. $k \geq 1$ 是一个整数，那么 A 的 k 重广义特征空间定义为:

$$E_A^k(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda E)^k x = 0\} = \ker (A - \lambda E)^k$$

- $\dim E_A^k(\lambda) = n - \operatorname{rank}(A - \lambda E)^k$
- $E_A^1(\lambda) = E_A(\lambda) \subset E_A^2(\lambda) \subset \cdots \subset E_A^k(\lambda)$
- $gm_A^1(\lambda) = gm_A(\lambda) \leq gm_A^2(\lambda) \leq \cdots \leq gm_A^k(\lambda)$
- k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda)$ 在 $J(A)$ 中出现的次数 $N(\lambda, k)$ 由 $gm_A^k(\lambda)$ 的二阶差分确定:

$$\begin{aligned} N(\lambda, k) =& (gm_A^k(\lambda) - gm_A^{k-1}(\lambda)) - (gm_A^{k+1}(\lambda) - gm_A^k(\lambda)) \\ =& \operatorname{rk}(A - \lambda E)^{k-1} - 2\operatorname{rk}(A - \lambda E)^k + \operatorname{rk}(A - \lambda E)^{k+1} \end{aligned}$$

- $k \geq am_A(\lambda)$ 时，$\operatorname{rk}(A - \lambda E)^k = n - am_A(\lambda)$

练习三

例 (1)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 的约当标准型.

练习三

例 (1)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 的约当标准型.

例 (2)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的约当标准型.

小结: 求任意方阵 A 约当标准型 $J(A)$ 的计算方法

- 求 A 的特征多项式，得到 A 的所有特征值
- 对每个特征值 λ, 求出 $\mathrm{rk}\,(A-\lambda E)$, 确定 $J(A)$ 中以 λ 为特征值的约当块的个数:

$$N(\lambda) = gm_A(\lambda) = n - \mathrm{rk}\,(A-\lambda E)$$

  (注： λ 的代数重数是 λ 出现在 $J(A)$ 对角线上的次数，等于以 λ 为特征值的约当块的阶数和.)
- 求出每个特征值对应的各阶 $\mathrm{rk}\,(A-\lambda E)^k$, $k \leq am_A$. 然后求出 k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda)$ 在 $J(A)$ 中出现的次数:

$$N(\lambda, k) = \mathrm{rk}\,(A-\lambda\, E)^{k-1} - 2\mathrm{rk}\,(A-\lambda\, E)^{k} + \mathrm{rk}\,(A-\lambda\, E)^{k+1}$$

小结: 求任意方阵 A 约当标准型 $J(A)$ 的计算方法

- 求 A 的特征多项式，得到 A 的所有特征值
- 对每个特征值 λ, 求出 $\mathrm{rk}\,(A-\lambda E)$, 确定 $J(A)$ 中以 λ 为特征值的约当块的个数:

$$N(\lambda) = gm_A(\lambda) = n - \mathrm{rk}\,(A-\lambda E)$$

(注：λ 的代数重数是 λ 出现在 $J(A)$ 对角线上的次数，等于以 λ 为特征值的约当块的阶数和.)

- 求出每个特征值对应的各阶 $\mathrm{rk}\,(A-\lambda E)^k$, $k \leq am_A$. 然后求出 k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda)$ 在 $J(A)$ 中出现的次数:

$$N(\lambda, k) = \mathrm{rk}\,(A-\lambda\, E)^{k-1} - 2\mathrm{rk}\,(A-\lambda\, E)^{k} + \mathrm{rk}\,(A-\lambda\, E)^{k+1}$$

接下来，如何求出算子:$\mathcal{A}:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\quad X \to AX$ 的约当基？即求出矩阵 C，使得 $C^{-1}AC = J(A)$?

求约当基

- 基本思路: $C^{-1}AC = J \quad \Longrightarrow AC = CJ$
- 设 $C = (v_1, \dots, v_n)$, 则 $AC = (Av_1, \dots, Av_n), \quad CJ = (v_1, \dots, v_n)J$
- 求解多个方程时，必须保证所有解 $v_1, \dots, v_n$ 线性无关, 最后可通过 $AC = CJ$ 验证.

求约当基

- 基本思路: $C^{-1}AC = J \implies AC = CJ$
- 设 $C = (v_1, \ldots, v_n)$, 则 $AC = (Av_1, \ldots, Av_n)$, $\quad CJ = (v_1, \ldots, v_n)J$
- 求解多个方程时，必须保证所有解 $v_1, \ldots, v_n$ 线性无关, 最后可通过 $AC = CJ$ 验证.

例 (3)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ 的 *Jordan* 标准型及其相似变换矩阵 C

求约当基

- 基本思路：$C^{-1}AC = J \quad \Longrightarrow AC = CJ$
- 设 $C = (v_1, \ldots, v_n)$，则 $AC = (Av_1, \ldots, Av_n)$，$\quad CJ = (v_1, \ldots, v_n)J$
- 求解多个方程时，必须保证所有解 $v_1, \ldots, v_n$ 线性无关，最后可通过 $AC = CJ$ 验证.

例 (3)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ 的 *Jordan* 标准型及其相似变换矩阵 C

例 (4)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的 *Jordan* 基和 *Jordan* 标准型.

求约当基 (一般情形)

构造广义特征向量链: 对特征值 λ, 若其代数重数 $am(\lambda)$ 大于几何重数 $gm(\lambda)$, 则存在大小 > 1 的 Jordan 块. 每个 Jordan 块对应一个广义特征向量链:$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ 满足:

$$
\begin{aligned}
&1.(A-\lambda E)v_1 = 0 \quad (v_1\text{是特征向量})\\
&2.(A-\lambda E)v_2 = v_1\\
&3.\cdots\\
&4.(A-\lambda E)v_r = v_{r-1}
\end{aligned}
$$

确定好 Jordan 块结构后, 从最大块开始找链. 对每个大小为 r 的 Jordan 块:

1. 选一个向量 $v_r \in \ker((A-\lambda E)^r) \setminus \ker((A-\lambda E)^{r-1})$ (最高阶广义特征向量)
2. 定义链: $(A-\lambda E)v_k = v_{k-1}$, $k = 1, \ldots, r$

- 关键点：不同链的向量必须线性无关，特别是特征向量部分．当有多个 Jordan 块时，从最大块开始找链，确保新链的 v_1（特征向量）与已有的特征向量线性无关 — 可通过在 $\ker((A-\lambda E)^r)$ 中选向量时，使其与已选链张成的空间补来保证．

求约当基 (一般情形)

- 关键点：不同链的向量必须线性无关，特别是特征向量部分. 当有多个 Jordan 块时，从最大块开始找链，确保新链的 v_1（特征向量）与已有的特征向量线性无关 — 可通过在 $\ker((A-\lambda E)^r)$ 中选向量时，使其与已选链张成的空间补来保证.
- **求例 (2)**、**例 (4)** 的约当基？

特征多项式

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$$

- 特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$，代数重数 $n_1, \ldots, n_k$
- $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$
- Cayley-Hamilton 定理：$\chi_A(A) = 0$

特征多项式与极小多项式

特征多项式

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$$

- 特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$，代数重数 $n_1, \ldots, n_k$
- $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$
- Cayley-Hamilton 定理：$\chi_A(A) = 0$

极小多项式

$$\mu_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$$

- $1 \leq r_i \leq n_i$，最小首一多项式使 $\mu_A(A) = 0$
- 与特征多项式有相同的特征根，由 A 唯一确定，且 $\mu_A(\lambda) \mid \chi_A(\lambda)$
- r_i 反映 Jordan 块结构 (λ_i 对应的最大 Jordan 块的尺寸)

设特征值 λ_i 对应 t_i 个 Jordan 块：

$$J(\lambda_i, s_1), \dots, J(\lambda_i, s_{t_i})$$

多项式	指数含义	Jordan 解释
$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$	代数重数 n_i	$\sum_{j=1}^{t_i} s_j$（总大小）
$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$	极小多项式指数 r_i	$\max\{s_1, \dots, s_{t_i}\}$（最大块）

与 Jordan 标准型的关联

设特征值 λ_i 对应 t_i 个 Jordan 块：

$$J(\lambda_i, s_1), \ldots, J(\lambda_i, s_{t_i})$$

多项式	指数含义	Jordan 解释
$(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$	代数重数 n_i	$\sum_{j=1}^{t_i} s_j$（总大小）
$(\lambda - \lambda_i)^{r_i}$	极小多项式指数 r_i	$\max\{s_1, \ldots, s_{t_i}\}$（最大块）

关键关系

- $r_i = n_i \Leftrightarrow$ 只有一个 Jordan 块
- $r_i = 1 \Leftrightarrow$ 所有块为 1×1（可对角化）
- $n_i - r_i$ 反映小 Jordan 块的尺寸信息

通过多项式判断 Jordan 块结构

1.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A = (x-2)^3$, $\mu_A = (x-2)^2$
- 判断约当块数 (or 几何重数: $\dim\ker(A-2E)$) ?

通过多项式判断 Jordan 块结构

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   - $\chi_A = (x-2)^3$, $\mu_A = (x-2)^2$
   - 判断约当块数 (or 几何重数: $\dim\ker(A-2E)$) ?
2. $$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   - $\chi_B = (x-2)^3$, $\mu_B = (x-2)^3$
   - 判断约当块数 (or 几何重数:$\dim\ker(A-2E)$) ?

特征多项式与极小多项式的重数关系决定 Jordan 结构

比较 χ_A 和 m_A 的因式重数，可推断 Jordan 块的数量和大小分布:

核心对应关系

重数关系	Jordan 结构信息
$r_i = n_i$	λ_i 对应单个 $m \times m$ Jordan 块
$1 < r_i < n_i$	最大 Jordan 块尺寸为 r_i，存在多个 Jordan 块
$r_i = 1$	所有 Jordan 块为 1×1（可对角化部分）

特征多项式与极小多项式的重数关系决定 Jordan 结构

比较 χ_A 和 m_A 的因式重数，可推断 Jordan 块的数量和大小分布:

核心对应关系

重数关系	**Jordan 结构信息**
$r_i = n_i$	λ_i 对应单个 $m \times m$ Jordan 块
$1 < r_i < n_i$	最大 Jordan 块尺寸为 r_i，存在多个 Jordan 块
$r_i = 1$	所有 Jordan 块为 1×1（可对角化部分）

完全确定的充分条件

Jordan 标准型完全确定 $\Longleftrightarrow$ 对每个特征值 λ_i，满足以下条件之一:

- $r_i = n_i$（单个 Jordan 块）
- $r_i = 1$ 且 n_i 任意（完全可对角化）
- $n_i - r_i = 1$（此时只能为 r 和 1 的组合）

特征多项式与极小多项式的重数关系决定 Jordan 结构

比较 χ_A 和 m_A 的因式重数，可推断 Jordan 块的数量和大小分布:

核心对应关系

重数关系	Jordan 结构信息
$r_i = n_i$	λ_i 对应单个 $m \times m$ Jordan 块
$1 < r_i < n_i$	最大 Jordan 块尺寸为 r_i，存在多个 Jordan 块
$r_i = 1$	所有 Jordan 块为 1×1（可对角化部分）

完全确定的充分条件

Jordan 标准型完全确定 $\iff$ 对每个特征值 λ_i，满足以下条件之一:

- $r_i = n_i$（单个 Jordan 块）
- $r_i = 1$ 且 n_i 任意（完全可对角化）
- $n_i - r_i = 1$（此时只能为 r 和 1 的组合）

一般情况

若 $r_i < n_i$ 且 $n_i - r_i > 1$，则 Jordan 结构不唯一，需要几何重数或其他信息进一步确定具体分拆。

拓展 – 通过史密斯标准型方法求 Jordan 标准型

1. 构造特征矩阵 $\lambda E - A$
2. 用初等变换化 $\lambda E - A$ 为史密斯标准型
3. 分解不变因子，提取初等因子 (弄清楚行列式因子、不变因子和初等因子的概念)
4. 由初等因子构造 Jordan 块与 Jordan 标准型

习题 6.6

1. 证明如果线性算子 $\mathcal{A}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 有 k 维不变子空间, 那么它有 $n-k$ 维不变子空间.

2. 非零的 4 阶幂零方阵的约当标准形只有下面四个:

$$A_1=J_2(0)\dotplus J_1(0)\dotplus J_1(0),\qquad A_2=J_2(0)\dotplus J_2(0),$$
$$A_3=J_3(0)\dotplus J_1(0),\qquad A_4=J_4(0).$$

下列矩阵都是幂零的, 它们各相似于哪个A_i:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&2&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&7&0&0\end{pmatrix}.$$

习题 6.6

3. (1) 如果矩阵的特征多项式为$(t+3)^2(t-2)^3$, 它的约当标准形有哪些可能?

(2) 如果矩阵的特征多项式为 $(t+3)^2(t-2)^3$, 以 -3 为特征值的特征空间的维数是 1, 以 2 为特征值的特征空间的维数是2, 这个矩阵的约当标准形有哪些可能?

4. 求出下列矩阵的约当标准形:

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix},\quad (2)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix},\quad (3)\begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 10 & 7 & -4 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (1) 验证矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

有相同的特征多项式;

(2) 求出它们的极小多项式;

(3) 求出它们的约当标准形.

6. 设 A 是 n 阶复方阵. 证明: A 是幂零的当且仅当 $\operatorname{tr}(A^k)=0,\ 1\leqslant k\leqslant n$.

7. 如果线性算子 $\mathcal{A}$ 的约当标准形只有一个约当块, 确定 $\mathcal{A}$ 的所有不变子空间.

8. 证明: 方阵 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 和它的转置 ${}^tA$ 相似.

9. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$ 的特征根都等于 1. 证明: 对任意非零整数 k, A 和 A^k 相似.

10. 证明: 对于矩阵 $A\in M_n(\mathbb{C})$, 等式 $A^m=E$ 成立当且仅当 A 可对角化且它的特征值都是 m 次单位根.

11. 把矩阵 $A=J_1(\lambda)+J_2(\mu)$, $\lambda\neq\mu$, 写成 $A=S+N$ 的形式, 其中 $S=\operatorname{diag}(\lambda,\mu,\mu)$, 也就是说

$$A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&1\\0&0&\mu\end{pmatrix},\qquad S=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\mu&0\\0&0&\mu\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

把 S 和 N 分别写成 A 的多项式 $s(A)$ 和 $m(A)$. (根据凯莱-哈密顿定理, 可以要求 $s(t)$ 和 $m(t)$ 的次数都不超过2, 按惯例, $A^0=E$.)

12. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的线性算子. 证明: 存在唯一的可对角化算子 $\mathcal{S}$ 和幂零算子 $\mathcal{N}$ 使得

$$\mathcal{A}=\mathcal{S}+\mathcal{N}, \qquad \mathcal{S}\mathcal{N}=\mathcal{N}\mathcal{S}.$$

而且, $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{N}$ 都可以表达成 $\mathcal{A}$ 的多项式. (可对角化算子也称为半单算子.)

13. 对任意正整数 k, 计算 $(J_n(\lambda))^k$.

14. 如果线性算子 $\mathcal{A}$ 在基 e_1, ..., e_n 下的矩阵是

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求出 $\mathcal{A}$ 的一个约当基和 $\mathcal{A}$ 在约当基下的矩阵.

15. 证明: 如果复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 满足关系 $\mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{B}$, 那么 $\mathcal{B}$ 是幂零的.

16. 解矩阵方程:

$$(1)\ X^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ X^2=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

17. 命$\mathscr{N}$为$M_n(\mathbb{C})$中的幂零矩阵全体, $\mathscr{U}$为$M_n(\mathbb{C})$ 中特征值都等于1的矩阵全体. 证明映射

$$\exp: \mathscr{N} \to \mathscr{U}, \quad A \to \exp A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{n-1}}{(n-1)!}$$

1. (10 points) 姓名:　　　　　学号:
2. (5 points) 求方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型及其所用的相似变换矩阵.

3. (5 points) 已知如下命题：若 A 和 B 分别是 $n \times k$ 矩阵和 $k \times n$ 矩阵，I_r 是 r 阶单位矩阵，则有 $\det(I_n + AB) = \det(I_k + BA)$.
（1）请利用该命题证明：若 X 和 Y 为两个复方阵，则 XY 与 YX 有相同的代数重数;
(2) XY 与 YX 是否有相同的几何重数？如有，请证明；如无，请给出反例. 进一步，从 Jordan 标准型的角度解释.