hw_13(1)

习题5.7

1. 证明：如果欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量 u 和 v 的长度相同，那么存在保距线性算子把 u 映到 v。

解:

当 $u=v$，必然存在保距算子。

当 $u\neq v$，
令 $w=u-v$

定义

$$R_w(x)=x-2\frac{(x\mid w)}{(w\mid w)}w$$

计算:

$$R_w(u)=u-2\frac{(u\mid u-v)}{|u-v|^2}(u-v)$$

$$=u-2\frac{||u||^2-(u\mid v)}{||u||^2+||v||^2-2(u\mid v)}(u-v)$$

$$=u-u+v=v$$

验证 R_w 是保距算子:
对任意 $x\in\mathbb{R}^n$，设

$$x=x_\perp+\alpha w,\quad x_\perp\in\langle w\rangle^\perp$$

则

$$R_w(x)=x_\perp-\alpha w$$

$$||R_w(x)||^2=||x_\perp||^2+\alpha^2||w||^2=||x||^2$$

故 R_w 为保距线性算子。

2. 设 $u_1,\ldots,u_k$ 和 $v_1,\ldots,v_k$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两组向量。证明：存在保距线性算子把 u_i 映到 v_i ($i=1,2,\ldots,k$) 的充要条件是

$$(u_i\mid u_j)=(v_i\mid v_j),\quad 1\le i,j\le k.$$

解:

先证必要性
若 $\exists A$ 使得 u_i 映到 v_i，则

$$(u_i\mid u_j)=(Au_i\mid Au_j)=(v_i\mid v_j)$$

再证充分性

对任意 $x=\sum_{i=1}^{k} a_i u_i \in U$，定义

$$T_0(x)=\sum_{i=1}^{k} a_i v_i \in V$$

若 $x=0$，则对任意 j，有

$$\left(\sum a_i u_i \mid u_j\right)=\sum a_i (u_i \mid u_j)=\sum a_i (v_i \mid v_j)=\left(\sum a_i v_i \mid v_j\right)=0$$

故 $y=0$，T_0 定义良好。

令 $t_1=\sum a_i u_i, t_2=\sum b_j u_j$，则

$$(T_0 t_1 \mid T_0 t_2)=\left(\sum a_i v_i \mid \sum b_j v_j\right)=\left(\sum a_i u_i \mid \sum b_j u_j\right)=(t_1 \mid t_2)$$

故 T_0 为 U 上的保距线性算子。

取 $U^\perp$ 和 $V^\perp$ 上的一组正交规范基，任取一个保距线性算子 $T_1: U^\perp \to V^\perp$，定义

$$T(x+y)=T_0(x)+T_1(y), \quad x \in U, y \in U^\perp$$

故 T 成立。

综上，原命题成立。

3. 设 w 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量。对任何向量 $x \in \mathbb{R}^n$，定义

$$\mathcal{R}_w(x)=x-2\frac{(x \mid w)}{(w \mid w)}w.$$

证明：

(1) $\mathcal{R}_w(w)=-w$;

解：

$$R_w(w)=w-2w=-w$$

(2) $\mathcal{R}_w(u)=u$ 如果 $u \in \langle w \rangle^\perp$;

解：
若 $u \in \langle w \rangle^\perp$，则

$$R_w(u)=u-0=u$$

(3) $\mathcal{R}_w$ 是保距算子。

解:
同 1 中证明。

4. 求出下面的正交矩阵的典范式，并求出把它们化成典范式的正交矩阵。

(1)

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

解:
计算特征多项式:

$$\chi_A(t)=\det(tE-A)=\begin{vmatrix} t-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & t-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & t-\frac{2}{3} \end{vmatrix}=t^3-2t^2+2t-1=(t-1)(t^2-t+1)$$

令 $B=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \cos\theta=\frac{1}{2}$

则

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

当 $t=1$，解方程 $(A-E)X=0\ \ X_1=[1,1,1]$
$X_2=[1,-1,0], \quad X_3=[1,1,-2]$

故

$$T=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

(2)

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

解:
计算特征多项式:

$$\chi_A(t)=\det(tE-A)=t^3-t^2-t+1=(t-1)^2(t+1)$$

令

$$B=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad \cos\theta=\frac{1}{2}\times 2=1$$

则

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

当 $t=-1$，解方程 $(A+E)X=0$ $X_1=[1,-2,1]$
$X_2=[1,0,-1],\quad X_3=[1,1,1]$

故

$$T=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$