《线性代数》

第二章: 矩阵

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.10.15

教学安排

可逆矩阵

推论 (2.30)

如果 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 $AB = E$ 或 $BA = E$, 则 A 可逆且 $B = A^{-1}$.

推论 (2.30)

如果 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 $AB = E$ 或 $BA = E$, 则 A 可逆且 $B = A^{-1}$.

推论 (2.31)

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是可逆的 n 阶方阵, 则乘积 $A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k$ 也是可逆的，其逆为 $(A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

推论 (2.30)

如果 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 $AB = E$ 或 $BA = E$, 则 A 可逆且 $B = A^{-1}$.

推论 (2.31)

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是可逆的 n 阶方阵, 则乘积 $A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k$ 也是可逆的，其逆为 $(A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

推论 (2.32)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 和 C 分别是 m 阶和 n 阶可逆方阵, 那么 $rankBAC = rankA$.

一些计算

- **例 2.33** 如果 $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，求 A^m.
- **例 2.34** 如果 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$，求 A^m.
- **例 2.35** 如果 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^m.

初等矩阵

- 单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵
- 对矩阵实施初等变换等于用初等矩阵乘以该矩阵

初等矩阵

- 单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵
- 对矩阵实施初等变换等于用初等矩阵乘以该矩阵
- I、II、III 型初等矩阵定义:
  (1) I 型初等矩阵 $F_{s,t}$: 单位矩阵的第 s 行与第 t 行交换
  (2) II 型初等矩阵 $F_{s,t}(\lambda)$: 单位矩阵的第 t 行的 λ 倍加到第 s 行
  (3) III 型初等矩阵 $F_s(\lambda)(\lambda \neq 0)$: 单位矩阵的第 t 行被乘以 λ.

初等矩阵

- 单位矩阵实施一次初等变换得到的矩阵
- 对矩阵实施初等变换等于用初等矩阵乘以该矩阵
- I、II、III 型初等矩阵定义:
  (1) I 型初等矩阵 $F_{s,t}$: 单位矩阵的第 s 行与第 t 行交换
  (2) II 型初等矩阵 $F_{s,t}(\lambda)$: 单位矩阵的第 t 行的 λ 倍加到第 s 行
  (3) III 型初等矩阵 $F_s(\lambda)(\lambda \neq 0)$: 单位矩阵的第 t 行被乘以 λ.
- 从单位矩阵的列的角度来看，I、II、III 型初等矩阵的等价定义？

初等矩阵

引理 (2.36)

(1) 初等矩阵都是可逆的：
$F_{s,t}^{-1} = F_{s,t}, \quad F_{s,t}(\lambda)^{-1} = F_{s,t}(-\lambda), \quad F_s(\lambda)^{-1} = F_s(-\lambda).$

(2) 初等矩阵的转置都是初等矩阵：
${}^tF_{s,t} = F_{s,t}, \quad {}^tF_{s,t}(\lambda) = F_{t,s}(\lambda), \quad {}^tF_s(\lambda) = F_s(\lambda)$

(3) 设 A 是 $n \times p$ 矩阵，那么
(i) A 的第 s 行与第 t 行交换得到：$F_{s,t}A$. *(I 型行初等变换)*
(ii) A 的第 t 行的 λ 倍加到第 s 行得到：$F_{s,t}(\lambda)A$. *(II 型行初等变换)*
(iii) 用非 0 的数 λ 乘以 A 的第 s 行得到：$F_s(\lambda)A$. *(III 型行初等变换)*

引理 (2.36)

(1) 初等矩阵都是可逆的:

$F_{s,t}^{-1} = F_{s,t}, \quad F_{s,t}(\lambda)^{-1} = F_{s,t}(-\lambda), \quad F_s(\lambda)^{-1} = F_s(-\lambda).$

(2) 初等矩阵的转置都是初等矩阵:

${}^tF_{s,t} = F_{s,t}, \quad {}^tF_{s,t}(\lambda) = F_{t,s}(\lambda), \quad {}^tF_s(\lambda) = F_s(\lambda)$

(3) 设 A 是 $n \times p$ 矩阵，那么

(i) A 的第 s 行与第 t 行交换得到: $F_{s,t}A$. (*I* 型行初等变换)

(ii) A 的第 t 行的 λ 倍加到第 s 行得到: $F_{s,t}(\lambda)A$. (*II* 型行初等变换)

(iii) 用非 *0* 的数 λ 乘以 A 的第 s 行得到: $F_s(\lambda)A$. (*III* 型行初等变换)

练习一：设 B 是 $q \times n$ 矩阵，则 $BF_{s,t}, BF_{s,t}(\lambda), BF_s(\lambda)$ 分别代表 B 经过什么变换得到的矩阵？

初等矩阵

- 现设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵，经过有限次 I 型和 II 型行初等变换、I 型和 II 型列初等变换以及 III 型初等变换可以化成:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初等矩阵

- 现设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵，经过有限次 I 型和 II 型行初等变换、I 型和 II 型列初等变换以及 III 型初等变换可以化成:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 等价地，存在 m 阶初等矩阵 $P_1, \cdots, P_c$ 和 n 阶初等矩阵 $Q_1, \ldots, Q_d$ 使得

$$P_c P_{c-1} \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_d = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初等矩阵

- 现设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵，经过有限次 I 型和 II 型行初等变换、I 型和 II 型列初等变换以及 III 型初等变换可以化成:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 等价地，存在 m 阶初等矩阵 $P_1, \cdots, P_c$ 和 n 阶初等矩阵 $Q_1, \ldots, Q_d$ 使得

$$P_c P_{c-1} \cdots P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_d = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 如果 A 是可逆 n 阶方阵，那么 $A = ?$

初等矩阵

定理 (2.37)

(1) 可逆矩阵是初等矩阵的乘积.

(2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $rankA = r$, 那么存在可逆 m 阶方阵 S 和可逆 n 阶方阵 T 使得

$$A = S \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T,$$

其中 I_r 为 r 阶单位矩阵，三个 0 分别表示 $r \times (n-r), (m-r) \times r, (m-r) \times (n-r)$ 的零矩阵.

逆矩阵的计算

- 设 A 是非退化矩阵，$A = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$, Q_i 均为初等矩阵. 命 $P_i = Q_i^{-1}$, 则有 $A^{-1} = P_k \cdots P_2 P_1$. 于是,

$$P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = E.$$

逆矩阵的计算

- 设 A 是非退化矩阵，$A = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$，Q_i 均为初等矩阵．命 $P_i = Q_i^{-1}$，则有 $A^{-1} = P_k \cdots P_2 P_1$．于是，

$$P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = E.$$

- 同时对 A 和 E 做行初等变换，把 A 变成 E 时，E 就变成了 A^{-1}:

$$(A|E) \xrightarrow{P_1} (P_1 A|P_1 E) \xrightarrow{P_2} \cdots \xrightarrow{P_k} (P_k \cdots P_2 P_1 A|P_k \cdots P_2 P_1 E) = (E|A^{-1})$$

逆矩阵的计算

- 设 A 是非退化矩阵，$A = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$，Q_i 均为初等矩阵．命 $P_i = Q_i^{-1}$，则有 $A^{-1} = P_k \cdots P_2 P_1$．于是，

$$P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = E.$$

- 同时对 A 和 E 做行初等变换，把 A 变成 E 时，E 就变成了 A^{-1}:

$$(A|E) \xrightarrow{P_1} (P_1 A | P_1 E) \xrightarrow{P_2} \cdots \xrightarrow{P_k} (P_k \cdots P_2 P_1 A | P_k \cdots P_2 P_1 E) = (E|A^{-1})$$

- 练习二：如何通过同时对 A 和单位矩阵 E 实施列初等变换求 A^{-1}？

求逆矩阵

- **例 2.38** 设 $a \neq b$, 求 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ 的逆.

求逆矩阵

- **例 2.38**　设 $a \neq b$, 求 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ 的逆.
- **例 2.39**　求 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆.

习题 2.4

1. 判断下面的矩阵是否可逆，如果可逆，求其逆矩阵

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -8 & -12 \end{pmatrix},$$

$$(3)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (4)\ \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(5)\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (6)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(7)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad (8)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (n \text{ 阶方}$$

阵).

习题 2.4

2. 利用等式

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

计算 $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^6$.

3. 验证：如果 $ad - bc \neq 0$，那么矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是 $\dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
如果 $ad - bc = 0$，A 的逆矩阵是否存在?

4. 证明任意二阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 满足关系式

$$A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E.$$

如果 $ad - bc \neq 0$，利用这个关系式求 A 的逆.

习题 2.4

5. 证明如果有大于 2 的整数 m 使得 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^m = 0$, 则 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = 0$.

6. 称方阵 A 是对称(相应地, 斜对称) 的如果 ${}^tA = A$ (相应地, ${}^tA = -A$). 证明: 如果对称(相应地, 斜对称) 矩阵 A 可逆, 那么其逆矩阵 A^{-1} 也是对称的(相应地, 斜对称).

7. 求下列方阵的逆矩阵:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & G \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & D & B \\ F & G & C \end{pmatrix},$$

其中 A, D, F 是可逆方阵.

8. 设 A 和 B 是方阵. 证明如果 $E + AB$ 可逆, 那么 $E + BA$ 可逆.

9. 对同阶方阵 A 和 B, 其交换子定义为 $[A, B] = AB - BA$. 现设 C 也是同阶方阵. 证明

(1) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$;

(2) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.

回顾线性方程组的解

- 利用矩阵乘法重新描述线性方程组：

$$AX = B$$

A 为系数矩阵，$X = [x_1, \cdots, x_n]$ 是未知元列向量，$B = [b_1, \cdots, b_n]$ 为常数项列向量

回顾线性方程组的解

- 利用矩阵乘法重新描述线性方程组：

  $$AX = B$$

  A 为系数矩阵，$X = [x_1, \cdots, x_n]$ 是未知元列向量，$B = [b_1, \cdots, b_n]$ 为常数项列向量
- 如果 A 非退化，则方程组有唯一解：$X = A^{-1}B$

回顾线性方程组的解

- 利用矩阵乘法重新描述线性方程组：

$$AX = B$$

  A 为系数矩阵，$X = [x_1, \cdots, x_n]$ 是未知元列向量，$B = [b_1, \cdots, b_n]$ 为常数项列向量
- 如果 A 非退化，则方程组有唯一解：$X = A^{-1}B$
- 回顾齐次线性方程组的解与一般线性方程组的解的关系？

回顾线性方程组的解

- 利用矩阵乘法重新描述线性方程组：

$$AX = B$$

  A 为系数矩阵，$X = [x_1, \cdots, x_n]$ 是未知元列向量，$B = [b_1, \cdots, b_n]$ 为常数项列向量
- 如果 A 非退化，则方程组有唯一解：$X = A^{-1}B$
- 回顾齐次线性方程组的解与一般线性方程组的解的关系？
- 对于齐次线性方程组，其解集是一个向量空间的线性子空间，称为方程组的解空间

解空间

定理 (2.40)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $X = [x_1, \cdots, x_n]$ 是未知元列向量， $AX = 0$ 的解空间 S 的维数与 A 的秩有如下的联系：

$$dimS + rankA = n.$$

解空间

- 线性映射: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 其核定义为:

$$\mathrm{ker}\varphi = \{X \in \mathbb{R}^n | \varphi(X) = 0\}$$

- 其像定义为:

$$\mathrm{im}\varphi = \{\varphi(X) | X \in \mathbb{R}^n\}.$$

解空间

- 线性映射: $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 其核定义为:

$$\mathrm{ker}\varphi=\{X\in\mathbb{R}^n|\varphi(X)=0\}$$

- 其像定义为:

$$\mathrm{im}\varphi=\{\varphi(X)|X\in\mathbb{R}^n\}.$$

命题 (2.41)

设 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是线性映射，那么它的核 $ker\varphi$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，它的像 $im\varphi$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的线性子空间.

命题 (2.42)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 定义列向量空间的线性映射 $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, X \to AX$. 那么

(1) 方程 $AX = 0$ 的解空间 S 就是线性映射 φ 的核，即 $S = ker\varphi_A$.

(2) 矩阵 A 的列空间 $V_c = \langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$ 等于 φ_A 的像集，即

$$V_c = im\varphi_A = \{AX | X \in \mathbb{R}^n\}.$$

命题 (2.42)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 定义列向量空间的线性映射
$\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, X \to AX$. 那么

(1) 方程 $AX = 0$ 的解空间 S 就是线性映射 φ 的核，即 $S = ker\varphi_A$.

(2) 矩阵 A 的列空间 $V_c = \langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$ 等于 φ_A 的像集，即

$$V_c = im\varphi_A = \{AX | X \in \mathbb{R}^n\}.$$

练习三：证明: 若矩阵乘积 $X_{m\times n}Y_{n\times p} = 0$, 则 $\mathrm{rank}Y \le n - \mathrm{rank}X$

解空间的基础解系

- 线性方程组 $AX = 0$ 的解空间的任意一个基都称为方程组的一个基础解系
- 假设 A 通过行初等变换换成了阶梯形 C，方程组的主未知元是 $x_1, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r}$，其余未知元 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_{n-r}}$ 是自由变量
- 对自由变量 x_{j_k} 取值 1，其余自由变量取值 0，可以得到 $CX = 0$ 的一个解 ξ_k
- $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 构成 $CX = 0$ 的解空间的一个基础解系．Why?

解空间的基础解系

- 线性方程组 $AX=0$ 的解空间的任意一个基都称为方程组的一个基础解系
- 假设 A 通过行初等变换换成了阶梯形 C，方程组的主未知元是 $x_1, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r}$，其余未知元 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_{n-r}}$ 是自由变量
- 对自由变量 x_{j_k} 取值 1，其余自由变量取值 0，可以得到 $CX=0$ 的一个解 ξ_k
- $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 构成 $CX=0$ 的解空间的一个基础解系. Why?

命题 (2.43)

线性方程组 $CX=0$ 的基础解系 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 也是线性方程组 $AX=0$ 的基础解系. 该基础解系也称为规范基础解系.

例 2.44 求如下线性方程组的通解和基础解系:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\
3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 74x_4 &= 0, \\
4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\
3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

求线性方程组的解

例 2.44 求如下线性方程组的通解和基础解系：

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\
3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 74x_4 &= 0, \\
4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\
3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

注意：从通解的向量形式很容易得到齐次线性方程组的一个基础解系.

例 2.45 求如下线性方程组的通解和一个特解：

$$
\begin{aligned}
6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5&=1,\\
3x_1+2x_2-2x_3+x_4&=-7,\\
9x_1+6x_2+x_3+3x_4+2x_5&=2,\\
3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5&=3.
\end{aligned}
$$

习题 2.5

1. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ -2 & 5 & 3\\ 2 & -4 & -4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

(1) 证明 $AX=0$ 只有零解.

(2) 对 $\lambda=1,\ 2,\ -3$, 分别求线性方程组 $(A-\lambda E)X=0$ 的一个基础解系.

(本题的解将在第五章的例5.22中用到.)

2、设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 3\\ -2 & 5 & 3\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

习题 2.5

(1) 求线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系.
(2) 求线性方程组 $(A-E)X=0$ 的一个基础解系.
(本题的解将在第五章的例5.23中用到.)

3. 对下面的线性方程组求通解和一个基础解系,

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=0,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5&=0,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5&=0,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5&=0. \end{aligned}$$

4. 对下面的线性方程组求通解和相伴的齐次方程组的一个基础解系,

$$\begin{aligned} 12x_1+9x_2+3x_3+10x_4&=13,\\ 4x_1+3x_2+x_3+2x_4&=3,\\ 8x_1+6x_2+2x_3+5x_4&=7. \end{aligned}$$

习题 2.5

5. 分析下列带参数的线性方程组的可解性, 在线性方程组可解时求出通解.

(1)

$$\begin{aligned} -6x_1+8x_2-5x_3-x_4&=9,\\ -2x_1+4x_2+7x_3+3x_4&=1,\\ -3x_1+5x_2+4x_3+2x_4&=3,\\ -3x_1+7x_2+17x_3+7x_4&=\lambda. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4&=5,\\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4&=7,\\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4&=9,\\ \lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4&=11. \end{aligned}$$