hw_3 (2)

习题2.3

2. 计算：

(1)
$$\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & b\\0 & 1\end{pmatrix}$$

解： 原式 $=\begin{pmatrix}1 & a+b\\0 & 1\end{pmatrix}$

(2)
$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

解： 原式 $=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$

(3)
$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 0\\1 & -2 & 3 & 1\\2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\3 & 1 & 2\\5 & -1 & -3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\0 & 2 & -5\\4 & -1 & -7\end{pmatrix}$$

解： 原式 $=\begin{pmatrix}4-3+15+0 & 2-1-3+0 & -4-2-9+0\\2-6+15+2 & 1-2-3+1 & -2-4-9+3\\4+9+0+2 & 2+3-0+1 & -4+6+0+3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\0 & 2 & -5\\4 & -1 & -7\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}16 & -2 & -15\\13 & -3 & -12\\15 & 6 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\0 & 2 & -5\\4 & -1 & -7\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}20 & -2 & -18\\13 & -1 & -17\\19 & 5 & -2\end{pmatrix}$

(4)
$\begin{pmatrix}1 & a & c\\0 & 1 & b\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}^k$，其中 k 是任意正整数.

解： $\begin{pmatrix}1 & a & c\\0 & 1 & b\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I+N$

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}0&a&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}, N^3=0$

原式 $=(I+N)^k$

$=I+kN+\frac{k(k-1)}{2}N^2$

$=\begin{pmatrix}1&ka&kc+\frac{k(k-1)}{2}ab\\0&1&kb\\0&0&1\end{pmatrix}$

(5)

$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0\\&&&\cdots&\cdots&\cdots&\\0&0&0&\cdots&0&1&0\\0&0&0&\cdots&0&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0&0\end{pmatrix}^k$ ，其中 k 是任意正整数.

解: 当 $k>n$ 时，原式 $=0$

当 $k\le n$ 时，该矩阵 M 当 $j=i+k$ 时，$M_{ij}=1$，其余均为 0

(6)

$\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0&1\\1&0&0&\cdots&0&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&0\\&&&\cdots&\cdots&\cdots&\\0&0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}^n$ ，其中 n 是该矩阵的阶数.

解: 原式 $=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$

3. 设 A 和 B 是 $m\times n$ 矩阵.证明:

$\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B.$

解: 令 $C=A+B$

矩阵 A的秩等于其行向量 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的秩 ,即行向量中的极大线性无关组所含向量个数

矩阵B同理

设 $A_{i_1},\cdots,A_{i_r}$ 为 A 的行向量中的一个极大线性无关组
$B_{j_1},\cdots,B_{j_s}$ 为 B 的行向量中的一个极大线性无关组

那么 A 的任意行向量 A_i 都是 $A_{i_1},\cdots,A_{i_r}$ 的线性组合
B 的任意行向量 B_j 都是 $B_{j_1},\cdots,B_{j_s}$ 的线性组合

$C_i=A_i+B_i$ 是 $A_{i_1},\cdots,A_{i_r},B_{j_1},\cdots,B_{j_s}$ 的线性组合

故 $\mathrm{rank}C\le r+s=\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B$

6. 证明：如果 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 1，则存在高为 m 的列向量（$m\times 1$ 矩阵）B 和长为 n 的行向量（$1\times n$ 矩阵）C，使得 $A=BC$.

解： $\mathrm{rank}A=1$

取 A 的一个非零列向量为 B，任意列向量与 B 线性相关

$\exists C=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$，s.t. $a_j=B\cdot c_j$

故 $A=BC$

8. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，T 为 $s\times m$ 矩阵，S 为 $n\times t$ 矩阵.利用矩阵的分块乘法证明：TA 的行向量都是 A 的行向量的线性组合，AS 的列向量都是 A 的列向量的线性组合.由此得到定理2.25的证明的一个简单表述.

解：

8．将 A 分块为行向量的组合

$A=[r_1,r_2\ldots r_m]$

将 T 分块为行向量的组合

$T=[t_1,t_2\ldots t_s]$

TA 的第 i 行为 $t_iA=t_i[r_1,r_2\ldots r_m]$，为 A 的行向量的线性组合

同理，AS 的列向量为 A 的列向量的线性组合