《线性代数》

第三章: 行列式

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.10.22

教学安排

1. 行列式与平行四边形的面积
2. 平行六面体的有向体积与行列式

一个富有启发的例子

- 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的第一行和第二行是行向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中的元素
- 以这两个向量为邻边可形成一个平行四边形
- 这个平行四边形中的点的集合可以如何表示？

一个富有启发的例子

- 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的第一行和第二行是行向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中的元素
- 以这两个向量为邻边可形成一个平行四边形
- 这个平行四边形中的点的集合可以如何表示？
- $\mathbb{R}^2$ 中的元素既可看作坐标平面的点，亦可看作向量

二阶行列式与平行四边形的面积

定理 (3.1)

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

的绝对值是坐标平面（即 $\mathbb{R}^2$）中以向量 (a, b) 和向量 (c, d) 为相邻边的平行四边形的面积.

二阶行列式与平行四边形的面积

- 如何理解行列式的值的正与负？

二阶行列式与平行四边形的面积

- 如何理解行列式的值的正与负？
- 一阶行列式的值就是线段的有向距离
- 二阶行列式的值就是平行四边形的有向面积

二阶行列式与平行四边形的面积

- 如何理解行列式的值的正与负？
- 一阶行列式的值就是线段的有向距离
- 二阶行列式的值就是平行四边形的有向面积
- 练习一：求给定四个顶点 $(-2,1),(4,2),(9,-5),(3,-6)$ 的平行四边形的面积

求出给定顶点的平行四边形的面积:

1. (0,0), (3,5), (6,4), (9,9).
2. (0,0), (-2, 3), (4,-5), (2,-2).
3. (-2,1), (4,2), (9,-5), (3,-5).
4. (0,-2), (5,-2), (-3.1), (2,1).

平行六面体的有向体积

- 行向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 个向量 $A_1, \cdots, A_n$ 构建了平行六面体

$$\Delta(A_1, \cdots, A_n) = \{x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n | 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \cdots, n\}$$

- $\Delta(A_1, \cdots, A_n)$ 的体积与矩阵 $A = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$ 的行列式密切相关

平行六面体的有向体积

- 行向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 个向量 $A_1, \cdots, A_n$ 构建了平行六面体

$$\Delta(A_1, \cdots, A_n) = \{x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n | 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \cdots, n\}$$

- $\Delta(A_1, \cdots, A_n)$ 的体积与矩阵 $A = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$ 的行列式密切相关
- $n = 1$, Δ 是线段，其长度是？
- $n = 2$, Δ 是平行四边形，其面积是？
- $n = 3$, Δ 是平行六面体，其体积是？
- $n > 1$, 如何定义 Δ 的方向？

平行六面体的有向体积

- 平行六面体 Δ 称为非退化的，如果它不落在一个 $n-1$ 维的线性子空间内，即向量 $A_1, \cdots, A_n$ 线性无关

平行六面体的有向体积

- 平行六面体 Δ 称为非退化的，如果它不落在一个 $n-1$ 维的线性子空间内，即向量 $A_1, \cdots, A_n$ 线性无关
- 非退化的 Δ 的定向有正和负两种，即 $o(\Delta)=1$ 或 -1, 依赖 $A_1, \cdots, A_n$ 的顺序; 退化的 Δ，$o(\Delta)=0$

平行六面体的有向体积

- 平行六面体 Δ 称为非退化的，如果它不落在一个 $n-1$ 维的线性子空间内，即向量 $A_1, \cdots, A_n$ 线性无关
- 非退化的 Δ 的定向有正和负两种，即 $o(\Delta)=1$ 或 -1, 依赖 $A_1, \cdots, A_n$ 的顺序; 退化的 Δ，$o(\Delta)=0$
- 称非退化的 Δ 为正向，如果它能连续非退化地变形到 $\Delta(E_1, \cdots, E_n)$，否则为负向

平行六面体的有向体积

- 平行六面体 Δ 称为非退化的，如果它不落在一个 $n-1$ 维的线性子空间内，即向量 $A_1, \cdots, A_n$ 线性无关
- 非退化的 Δ 的定向有正和负两种，即 $o(\Delta)=1$ 或 -1, 依赖 $A_1, \cdots, A_n$ 的顺序; 退化的 Δ，$o(\Delta)=0$
- 称非退化的 Δ 为正向，如果它能连续非退化地变形到 $\Delta(E_1, \cdots, E_n)$，否则为负向
- Δ 的有向体积可以看成是向量 $A_1, \cdots, A_n$ 的函数:

$$D[A_1, \cdots, A_n] = o(\Delta) V_\Delta$$

其中 $V_\Delta =$ 底面体积 $\cdot$ 高

有向体积的性质

- (D1) 有向体积 $D[A_1,\cdots,A_n]$ 是向量 $A_1,\cdots,A_n$ 的多重线性函数:
  如果 $A_i=\lambda A_i'+\mu A_i''$, 那么

$$\begin{aligned}D[A_1,\cdots,A_{i-1},A_i,A_{i+1},\cdots,A_n]=&\lambda D[A_1,\cdots,A_{i-1},A_i',A_{i+1},\cdots,A_n]\\&+\mu D[A_1,\cdots,A_{i-1},A_i'',A_{i+1},\cdots,A_n]\end{aligned}$$

有向体积的性质

- (D1) 有向体积 $D[A_1, \cdots, A_n]$ 是向量 $A_1, \cdots, A_n$ 的多重线性函数: 如果 $A_i = \lambda A_i' + \mu A_i''$, 那么

$$\begin{aligned} D[A_1, \cdots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \cdots, A_n] =& \lambda D[A_1, \cdots, A_{i-1}, A_i', A_{i+1}, \cdots, A_n] \\ &+ \mu D[A_1, \cdots, A_{i-1}, A_i'', A_{i+1}, \cdots, A_n] \end{aligned}$$

- (D2) 如果 $A_1, \cdots, A_n$ 线性相关，则 $D[A_1, \cdots, A_n] = 0$

有向体积的性质

- (D1) 有向体积 $D[A_1, \cdots, A_n]$ 是向量 $A_1, \cdots, A_n$ 的多重线性函数: 如果 $A_i = \lambda A_i' + \mu A_i''$, 那么

$$\begin{aligned} D[A_1, \cdots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \cdots, A_n] =& \lambda D[A_1, \cdots, A_{i-1}, A_i', A_{i+1}, \cdots, A_n] \\ &+ \mu D[A_1, \cdots, A_{i-1}, A_i'', A_{i+1}, \cdots, A_n] \end{aligned}$$

- (D2) 如果 $A_1, \cdots, A_n$ 线性相关，则 $D[A_1, \cdots, A_n] = 0$
- (D2') 斜对称性:

$$D[A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_j, \cdots, A_n] = -D[A_1, \cdots, A_j, \cdots, A_i, \cdots, A_n]$$

有向体积的性质

- (D1) 有向体积 $D[A_1,\cdots,A_n]$ 是向量 $A_1,\cdots,A_n$ 的多重线性函数: 如果 $A_i=\lambda A_i'+\mu A_i''$, 那么

$$\begin{aligned} D[A_1,\cdots,A_{i-1},A_i,A_{i+1},\cdots,A_n] =&\lambda D[A_1,\cdots,A_{i-1},A_i',A_{i+1},\cdots,A_n] \\ &+\mu D[A_1,\cdots,A_{i-1},A_i'',A_{i+1},\cdots,A_n] \end{aligned}$$

- (D2) 如果 $A_1,\cdots,A_n$ 线性相关，则 $D[A_1,\cdots,A_n]=0$
- (D2') 斜对称性:

$$D[A_1,\cdots,A_i,\cdots,A_j,\cdots,A_n]=-D[A_1,\cdots,A_j,\cdots,A_i,\cdots,A_n]$$

- (D3) 平行六面体 $\Delta(E_1,E_2,\cdots,E_n)$ 的有向体积 $D(E_1,E_2,\cdots,E_n)=1$

排列的反序

- 整数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的排列个数 $n!$, 其集合记作 P_n
- 排列 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 中的数对 (σ_i, σ_j) 称为 σ 的一个反序：如果 $i < j$ 且 $\sigma_i > \sigma_j$
- 排列 σ 的反序总数记为：$e(\sigma)$
- 排列 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 的相伴排列（逆排列）$\sigma' = \sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_n'$ 定义：如果 $\sigma_i = k$, 那么 $\sigma_k' = i$

排列的反序

- 整数 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的排列个数 $n!$, 其集合记作 P_n
- 排列 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 中的数对 (σ_i, σ_j) 称为 σ 的一个反序：如果 $i < j$ 且 $\sigma_i > \sigma_j$
- 排列 σ 的反序总数记为：$e(\sigma)$
- 排列 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 的相伴排列（逆排列）$\sigma' = \sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_n'$ 定义：如果 $\sigma_i = k$, 那么 $\sigma_k' = i$
- σ' 相伴的排列 σ'' 是什么？
- σ 的反序和 σ' 的反序是否一一对应？

排列的反序

- 排列 $\sigma \in P_n$ 的反序总数 $e(\sigma)$ 等于相伴排列 σ' 的反序总数 $e(\sigma')$

排列的反序

- 排列 $\sigma \in P_n$ 的反序总数 $e(\sigma)$ 等于相伴排列 σ' 的反序总数 $e(\sigma')$
- **例 3.3** 数 1，2，3，4 的排列 4312 的反序以及相伴排列分别是什么？

排列的反序

- 排列 $\sigma \in P_n$ 的反序总数 $e(\sigma)$ 等于相伴排列 σ' 的反序总数 $e(\sigma')$
- **例 3.3** 数 1，2，3，4 的排列 4312 的反序以及相伴排列分别是什么？
- 如何求排列 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 的相伴排列（逆排列）$\sigma' = \sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_n'$？

排列的反序

- 排列 $\sigma \in P_n$ 的反序总数 $e(\sigma)$ 等于相伴排列 σ' 的反序总数 $e(\sigma')$
- **例 3.3** 数 1，2，3，4 的排列 4312 的反序以及相伴排列分别是什么？
- 如何求排列 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 的相伴排列（逆排列）$\sigma' = \sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_n'$？
- 记 $e(\sigma)_k$ 为排列 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 中在 k 前面且比 k 大的数的个数，则 $e(\sigma) = e(\sigma)_1 + e(\sigma)_2 + \cdots + e(\sigma)_n$

排列的反序

- 排列 $\sigma \in P_n$ 的反序总数 $e(\sigma)$ 等于相伴排列 σ' 的反序总数 $e(\sigma')$
- **例 3.3** 数 1，2，3，4 的排列 4312 的反序以及相伴排列分别是什么？
- 如何求排列 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 的相伴排列（逆排列）$\sigma' = \sigma_1'\sigma_2'\cdots\sigma_n'$？
- 记 $e(\sigma)_k$ 为排列 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ 中在 k 前面且比 k 大的数的个数，则 $e(\sigma) = e(\sigma)_1 + e(\sigma)_2 + \cdots + e(\sigma)_n$

命题 (3.4)

从 σ 变到 $\sum_{n-1} = 1234\cdots n$ 的过程中，交换了位置的数对的个数是 $e(\sigma) = e(\sigma)_1 + e(\sigma)_2 + \cdots + e(\sigma)_n$.

平行六面体的有向体积公式

定理 (3.5)

行向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的向量 $A_1, \cdots, A_n$ 构建的定向平行六面体 $\Delta(A_1, \cdots, A_n)$ 的有向体积由如下公式给出:

$$D[A_1, \cdots, A_n] = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{e(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n},$$

其中 a_{ij} 是向量 A_i 的第 j 个分量.

平行六面体的有向体积公式

定义 (3.6)

n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式定义为

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in P_n}(-1)^{e(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n}.$$

行列式的若干性质

定理 (3.7)

方阵 A 的行列式与其转置 ${}^tA$ 的行列式相等： $detA = det\,{}^tA$.

命题 (3.8)

$detA = \sum_{\sigma\in P_n}(-1)^{e(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n} = \sum_{\sigma\in P_n}(-1)^{e(\sigma)}a_{\sigma_1 1}a_{\sigma_2 2}\cdots a_{\sigma_n n}$

行列式的若干性质

- 行列式作为方阵的行（列）向量的函数，有性质 (D1),(D2),(D2'),(D3)，可进一步推出以下性质 (D4-D6)
- (D4) I 型行初等变换和 I 型列初等变换改变行列式的符号
- (D5) II 型行初等变换和 II 型列初等变换不改变行列式的值
- (D6) 把某一行或某一列乘一个非零数 λ（III 型行初等变换和 III 型列初等变换），变换后的方阵的行列式等于 λ 乘以原来方阵的行列式

行列式的若干性质

命题 (3.9)

三角矩阵的行列式的值等于矩阵的对角线上所有的值的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

命题 (3.10)

如果 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则 $detA = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

行列式的若干性质

推论 (3.11)

如果 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ 的第 j 列（或第 i 行）的元素除 a_{ij} 外都为 0，那么

$$detA=(-1)^{i+j}a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

广义行列式函数

- 有向体积的性质（D3）仅起到明确单位的作用
- 如果（D1）满足，(D2) 和（D2'）是等价的
- 一个函数：$f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 称为广义行列式函数，如果 f 满足性质 (D1) 和 (D2'), 即 f 作为方阵的行向量的函数是多重线性的，斜对称的

定理 (3.12)

设 $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是广义行列式函数，那么 $f(A) = (detA)f(E)$

习题 3.2

1. 求一个在原点且相邻顶点是 (2,3,1), (-1,0,4), (3,-2,5) 的平行六面体的体积.

2. (1) 说明为什么下面两式都是 xy 平面上过两点 (a_1, b_1), $(a_2, b_2$ 的直线的方程.

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) 对 $\mathbb{R}^3$ 中过三个不同点的平面叙述并证明相应的结论.

(3) 对 xy 平面过不共线的三个点的圆叙述并证明相应的结论.

3. 从定义3.6出发证明行列式函数 det 满足性质(D1), (D2'), (D3), 即: 是行向量的多重线性函数, 交换两行的位置改变行列式值得符号, 单位矩阵的行列式值为 1.

4. 求出四阶行列式 $\det(a_{ij})$ 展开式中包含 a_{23} 且带正号的项.

5. n 阶行列式展开式中主对角线元素的乘积有怎样的正负号?

6. n 阶行列式展开式中斜对角线(也称次对角线) 元素的乘积有怎样的正负号?

习题 3.2

7. 利用行列式的定义计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8. 利用行列式的定义计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

习题 3.2

9. 设 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 计算下面的行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, (2) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$,

(3) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

10. 设 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 是 n 阶方阵. 在下述情况下比较 $\det A$ 和 $\det B$.

(1) $b_{ij} = 2^{j-i} a_{ij}$; (2) $b_{ij} = a_{n+1-i,j}$, (3) $b_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j}$.

Quiz 2:

1. (10 points) 姓名:　　　　　　学号:
2. (5 points) 求 $n \times n$ 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.
3. (5 points) 证明: $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 1 的充分必要条件是 $A = \alpha\beta$, 其中 α 和 β 分别是 $m \times 1$ 和 $1 \times n$ 的非零矩阵.