hw_7(2)

习题4.2

2. 令 $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1+2x_2+3x_3-x_4=0\}$. 它是行向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

(1) 证明 $u_1=(2,-1,0,0)$, $u_2=(3,0,-1,0)$, $u_3=(1,0,0,1)$ 是 U 的一个基.

解:

$u_1,u_2,u_3\in U$

设 $au_1+bu_2+cu_3=0$

$$\begin{cases}2a+3b+c=0\\-a=0\\-b=0\\c=0\end{cases}$$

$a=b=c=0$, u_1,u_2,u_3 线性无关，故为 U 的一个基

(2) 证明 $v_1=(1,1,-1,0)$, $v_2=(1,1,0,3)$, $v_3=(1,0,1,4)$ 是 U 的一个基.

解:

$v_1,v_2,v_3\in U$

$av_1+bv_2+cv_3=0$

$$\begin{cases}a+b+c=0\\a+b=0\\-a+c=0\\3b+4c=0\end{cases}$$

$a=b=c=0$, v_1,v_2,v_3 线性无关，故为 U 的一个基

(3) 求从基 u_1,u_2,u_3 到基 v_1,v_2,v_3 的转换矩阵.

解:

$$\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\-1&0&1\\0&3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}v_1=t_{11}u_1+t_{21}u_2+t_{31}u_3\\v_2=t_{12}u_1+t_{22}u_2+t_{32}u_3\\v_3=t_{13}u_1+t_{23}u_2+t_{33}u_3\end{cases}$$

$$T=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&0&-1\\0&3&4\end{pmatrix}$$

(4) 求 $w=(1,1,1,6)\in U$ 在基 u_1,u_2,u_3 和基 v_1,v_2,v_3 下的坐标列向量.

解:

$W_u=(-1,-1,6)$

$W_v=(-1,2,0)$

3. 求下列向量张成的线性子空间的一个基和维数：$(1,1,1,1,0)$, $(1,1,-1,-1,-1)$, $(2,2,0,0,-1)$, $(1,1,5,5,2)$, $(1,-1,-1,0,0)$.

解:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\1&1&2&1&-1\\1&-1&0&5&-1\\1&-1&0&5&0\\0&-1&-1&2&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\0&-2&-2&4&-1\\0&-2&-2&4&-1\\0&-2&-2&4&-1\\0&-1&-1&2&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&1&1\\0&1&1&-2&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\dim A=3$

基：$(1,1,1,1,0)$
$(1,1,-1,-1,-1)$
$(1,-1,-1,0,0)$

5. 设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\dim(U+V)=1+\dim U\cap V$. 证明：$U+V$ 是这两个子空间中的一个，$U\cap V$ 是这两个子空间中的另一个.

解: 设 $\dim(U\cap V)=a, \dim U=a+t, \dim V=a+s$

$$\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$$

$$=1+\dim(U\cap V)$$

$$a+s+a+t-a=1+a$$

$$s+t=1$$

故 $s=1,t=0$ 或 $s=0,t=1$

若 $s=1,t=0, \dim U=a, \dim V=a+1$

$U\subset V$

故 $U=U\cap V, V=U+V$

若 $s=0,t=1,$ 同理, $U=U+V, V=U\cap V$

6. 证明：子空间 $U_1, U_2, \ldots, U_k$ 线性无关当且仅当

$$(U_1 + U_2 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i = 0, \quad 1 < i \leq k.$$

解： 先证充分性：$\Rightarrow$

当 $(U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i = 0$，$(1 < i \leq k)$
取各自任意向量，s.t. $u_1 + \cdots + u_k = 0$

$$-u_k = u_1 + \cdots + u_{k-1} \in U_k \cap (U_1 + \cdots + U_{k-1})$$

故 $u_k = 0$，同理，$u_1 = u_2 = \cdots = u_k = 0$

故线性无关

再证必要性：$\Leftarrow$

若线性无关
设 $x \in (U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i$

令 $x = u_i = u_1 + \cdots + u_{i-1}$

$$u_1 + \cdots + u_{i-1} - u_i = 0$$

故

$$u_1 = \cdots = u_{i-1} = u_i = 0$$

故

$$(U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i = 0$$

7. 设 U, V, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 下列等式是否成立?

$$U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W).$$

解：

7、不成立

$$U = \{(x, y) \mid x = y\}$$

$$V = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$U \cap (V + W) = U = \{(x, y) \mid x = y\}$$

$$(U \cap V) + (U \cap W) = \{0\}$$

8. 证明直和不满足消去律，即等式 $U \oplus V_1 = U \oplus V_2$ 并不意味着 $V_1 = V_2$.

解：$V_1 = \{(1,0)\}$

$V_2 = \{(0,1)\}$

$U = \{(1,1)\}$

$U \oplus V_1 = \mathbb{R}^2, U \oplus V_2 = \mathbb{R}^2$

但 $V_1 \neq V_2$

9. 找出子空间 $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ 和子空间 $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ 的和与交的一个基：

(1) $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (1,1,-1)$, $u_3 = (1,3,3)$,

$v_1 = (1,2,2)$, $v_2 = (2,3,-1)$, $v_3 = (1,1,-3)$;

解：

和的基：$\{(1,2,1),(1,1,-1),(1,2,2)\}$
交的基：$\{(3,5,1)\}$

10. 设 $u = (1,1,1,0)$, $v = (0,1,1,1)$, $w = (1,1,0,0)$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的向量.

(2) 证明不存在纯量 a, b, c 使得 $au + bv + cw = (1,2,3,4)$.

解：

$$\begin{cases} a+c=1 \\ a+b+c=2 \\ a+b=3 \\ b=4 \end{cases}$$

无解，故不存在

12. 判断 $[-4,-8,6,-5]$ 是否在 $[3,8,-5,2]$, $[-5,7,-8,-2]$, $[-9,6,3,-9]$ 张成的子空间中.

解：

设 $[-4,-8,6,-5] = a[3,8,-5,2] + b[-5,7,-8,-2] + c[-9,6,3,-9]$

$$\begin{cases} 3a-5b-9c=-4 \\ 8a+7b+6c=-8 \\ -5a-8b+3c=6 \\ 2a-2b-9c=-5 \end{cases}$$

无解

故不在