

# hw\_15(1)

## 习题6.6

1. 证明如果线性算子  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  有  $k$  维不变子空间, 那么它有  $n - k$  维不变子空间。

解:

设  $V$  为  $A$  的一个  $k$  维不变子空间

取  $V$  的一组基  $v_1, \dots, v_k$  并将其扩充成  $\mathbb{C}^n$  的一组基  $v_1, \dots, v_k, \dots, v_n$

由于  $V$  是  $A$  的不变子空间,  $Av_i \in V$

$$Av_i = \sum_{j=1}^k a_{ji}v_j$$

故在  $v_1, \dots, v_n$  下

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

$A_1$  为  $k$  阶矩阵,  $A_2$  为  $(n - k)$  阶矩阵

令  $W = \text{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ ,  $\dim W = n - k$

对任意  $w \in W$ ,

$w$  前  $k$  个分量为 0, 故  $Aw$  前  $k$  个分量也为 0

故  $Aw \in W$ ,  $W$  为  $A$  的不变子空间

故命题成立

2. 非零的 4 阶幂零方阵的约当标准形只有下面四个:

$$A_1 = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0), \quad A_2 = J_2(0) \oplus J_2(0),$$

$$A_3 = J_3(0) \oplus J_1(0), \quad A_4 = J_4(0).$$

下列矩阵都是幂零的, 它们各相似于哪个  $A_i$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解:

(1)

$$\det(tE - B_1) = t^4$$

$$t = 0, \quad \text{gm}_{B_1} = \dim B_1 = 3$$

故  $B_1 \sim A_1$

(2)

$$\det(tE - B_2) = t^4$$

$$t = 0, \quad \text{gm}_{B_2} = \dim B_2 = 2$$

$$\text{rank } B_2^k = \begin{cases} 4 & k = 0 \\ 2 & k = 1 \\ 1 & k = 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

$$N(0, 1) = 4 - 4 + 1 = 1$$

$$N(0, 2) = 2 - 2 + 0 = 0$$

$$N(0, 3) = 1 - 0 + 0 = 1$$

故  $B_2 \sim A_3$

(3)

$$\det(tE - B_3) = t^4$$

$$t = 0, \quad \text{gm}_{B_3} = \dim B_3 = 1$$

故  $B_3 \sim A_4$

(4)

$$\det(tE - B_4) = t^4$$

$$t = 0, \quad \text{gm}_{B_4} = \dim B_4 = 2$$

$$\text{rank } B_4^k = \begin{cases} 4 & k = 0 \\ 2 & k = 1 \\ 1 & k = 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

$$N(0, 1) = 1$$

$$N(0, 2) = 0$$

$$N(0, 3) = 1$$

故  $B_4 \sim A_3$

### 3.

(1) 如果矩阵的特征多项式为  $(t + 3)^2(t - 2)^3$ , 它的约当标准形有哪些可能?

解:

$$t = -3 \quad J_2(-3) \text{ 或 } J_1(-3) \oplus J_1(-3)$$

$$t = 2 \quad J_3(2) \text{ 或 } J_1(2) \oplus J_2(2) \text{ 或 } J_1(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(2)$$

故 6 种 ( $2 \times 3$  排列组合)

(2) 如果矩阵的特征多项式为  $(t + 3)(t - 2)^3$ , 以  $-3$  为特征值的特征空间的维度是 1, 以  $2$  为特征值的特征空间的维度是 2, 这个矩阵的约当标准形有哪些可能?

解:

$$t = -3 \quad J_1(-3)$$

$$t = 2 \quad J_1(2) \oplus J_2(2)$$

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. 求出下列矩阵的约当标准形:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

解:

$$\det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 3 & -9 \\ -4 & t+7 & -8 \\ -6 & 7 & t-7 \end{vmatrix} = (t-1)(t+7)(t-7) + 3 \cdot 8 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 7 - 24(t+7) + 12(t-7) + 56(t-1) \\ = (t+1)^2(t-3)$$

$$\text{gm}_A(-1) = \dim(A + E) = 1$$

$$t = -1 \quad J_2(-1)$$

$$t = 3 \quad J_1(3)$$

$$J(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix},$$

解:

$$\det(tE - A) = (t-1)^3$$

$$\text{gm}_A(1) = \dim(A - E) = 1$$

故

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 10 & 6 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解:

$$\det(tE - A) = t^3(t+1)$$

$$\text{gm}_A(0) = \dim A = 1$$

$$t = 0 \quad J_3(0)$$

$$t = -1 \quad J_1(-1)$$

$$J(A)=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix}$$