hw_8(2)

习题4.3

11. 设 $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ 是行向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的 $n-1$ 个向量，它们张成的子空间记作 U。用例4.40的思想构造 U 的正交补。

解:

将 $A_1, \ldots, A_{n-1}$ 按行排成矩阵 A

$$U^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

12. 求如下线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{aligned}$$

的解空间的正交补。

解:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$$

$$Ax = 0$$

$$x = t_1(1, 0, -8, 7) + t_2(0, 1, 6, -5)$$

故 $U^{\perp}$ 为 $(1, 0, -8, 7)$ 与 $(0, 1, 6, -5)$ 张成的子空间

13. 如果实方阵的列向量都是非零的且相互正交的，证明它是可逆的并求其逆矩阵。

解:

① 正交且非零，则互相线性无关，满秩，故可逆

②

$$A^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\|a_1\|^2}, \frac{1}{\|a_2\|^2}, \ldots, \frac{1}{\|a_n\|^2}\right) A^T$$

14. 运用正交化方法，求出 $\mathbb{R}^4$ 中由向量 $(1,2,1,3)$, $(4,1,1,1)$, $(3,1,1,0)$ 张成的线性子空间的一个标准正交基。

解:

$$w_1 = v_1 = (1,2,1,3)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \left(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 = \left(-\frac{19}{185}, \frac{87}{185}, \frac{61}{185}, -\frac{72}{185}\right)$$

故标准正交基为:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,1,3)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{111}}(10,-1,1,-3)$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{16835}}(-19,87,61,-72)$$

15. 把向量 $X_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1)$ 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的标准正交基。

解:

$$u_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1)$$

$$u_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$u_3 = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$u_4 = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

16. 设 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 是方阵。证明：分块对角矩阵 $\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ 是正交矩阵当且仅当所有的 A_i 都是正交矩阵。

解:

16. 先证充分性

$$B^T B = I = \operatorname{diag}(I_1, \ldots, I_k)$$

$$B_i^T B_i = I_i$$

故 B_i 是正交矩阵

再证必要性

$$B_i^T B_i = I_i$$

$$B^T B = \operatorname{diag}(B_1^T B_1, \ldots, B_k^T B_k) = \operatorname{diag}(I_1, \ldots, I_k) = I$$

故 B 是正交矩阵

17. 运用正交化方法证明：任意的非退化矩阵 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ 都可以分解成 $A = BC$ 的形式，其中 B 是正交矩阵，C 是上三角矩阵，且 $\det A = \pm \det C$。

解： 正交化得一组正交向量 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\beta_1 \cdot \beta_1}\beta_1$$

$$\beta_n = \alpha_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_n \cdot \beta_k}{\beta_k \cdot \beta_k}\beta_k$$

令

$$b_k = \frac{\beta_k}{\|\beta_k\|}, \quad B = [b_1, \ldots, b_n], \quad B^T B = I$$

又

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^{j} c_{kj} b_k$$

$$c_{kj} = b_k \cdot \alpha_j, \quad C = (c_{kj})$$

故 $A = BC$

$$\det A = \det B \cdot \det C$$

$$= \pm \det C$$

18. 对如下三个矩阵求出分解 BC，其中 B 是正交矩阵，C 是上三角矩阵。

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

解：

$$
B=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{11}}{11} & \frac{\sqrt{681}}{341} & -\frac{2\sqrt{6882}}{3441} & -\frac{10\sqrt{111}}{111} \\ -\frac{3\sqrt{11}}{11} & \frac{5\sqrt{682}}{682} & \frac{7\sqrt{6882}}{2294} & -\frac{\sqrt{111}}{37} \\ \frac{\sqrt{11}}{11} & \frac{13\sqrt{682}}{682} & -\frac{67\sqrt{6882}}{6882} & \frac{\sqrt{111}}{111} \\ 0 & \frac{\sqrt{682}}{31} & -\frac{22\sqrt{6882}}{3441} & \frac{\sqrt{111}}{111} \end{pmatrix}
$$

$$
C=\begin{pmatrix} \sqrt{11} & \frac{20\sqrt{11}}{11} & -\frac{\sqrt{11}}{11} & -\frac{9\sqrt{11}}{11} \\ 0 & \frac{\sqrt{682}}{11} & \frac{53\sqrt{682}}{682} & -\frac{20\sqrt{682}}{341} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6882}}{62} & -\frac{22\sqrt{6882}}{3441} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{111}}{111} \end{pmatrix}
$$

19. 证明下面的矩阵是正交矩阵（注意如果 a 是有理数则(1)和(2)中的矩阵在各处的值都是有理数）。

(2)

$$
\frac{1}{a^2+a+1}\begin{pmatrix} a+1 & a & a(a+1) \\ -a(a+1) & a+1 & a \\ a & a(a+1) & -a-1 \end{pmatrix},\quad a\text{ 是任意实数。}
$$

解:

$$
M^TM=\frac{1}{(a^2+a+1)^2}\cdot(a^2+a+1)^2I=I
$$

故为正交矩阵