hw_10(2)

习题5.3

2. 求 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ 使得列向量 $[1,1,1],[1,0,-1],[1,-1,0]$ 为矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$$

的特征向量。

解:

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\ v_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\ v_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\ v_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$
$Av_i=\lambda_i v_i$

对 v_1 :
$\lambda_1=3\quad a+b+c=3\quad d+e+f=3$

对 v_2 :
$a=c\quad d=f$

对 v_3 :
$a=b=c\quad d=e=f$

故，$a=b=c=d=e=f=1$

3. 求下列矩阵的特征值和相应的特征子空间以及该子空间的一个基。

(1)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -5 & 1 & 0\\ 3 & -6 & 1\end{pmatrix},$$

解:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$$

$$(A-I)x=0$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 0\\ 3 & -6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$$

故 $V_1=\{k[0,0,1]\mid k\in\mathbb{R}\}$

基：$[0,0,1]$

(3)

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

解:

$$\lambda = 1 \quad (A-I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_3 = -3x_2 \end{cases}$$

故 $V_1 = \{k[-3,1,-3] \mid k \in \mathbb{R}\}$

基 $[-3,1,-3]$

$$\lambda = 2$$

$$(A-2I)x = 0$$

$$x_1 = 2x_2 + 2x_3$$

故 $V_2 = \{k_1[2,1,0], k_2[2,0,1] \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$

基 $[2,1,0]$ $[2,0,1]$

4. 求下列矩阵的对角形和对角化变换矩阵：

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

解:

$$|A - \lambda I| = (\lambda - 4)^2$$

$$\lambda = 4$$

$$(A-4I)X = 0$$

$$P = [1,-1]$$

故不可对角化

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解:

同理

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1$$

$$\lambda = 0 \quad P_1 = [2, 2, 1]$$

$$\lambda = 1 \quad P_2 = [1, 1, 0]$$

$$\lambda = -1 \quad P_3 = [2, 1, 2]$$

对角形

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

变换矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

解:

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3$

$\lambda = 1 \quad P_1 = [-2, -1, 1]$

$\lambda = 3 \quad P_2 = [1, -1, 0]$

$P_3 = [-4, 0, 1]$

对角形 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

变换矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. 求矩阵

$$\begin{pmatrix} u & -1 & u \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征子空间，并利用定理5.17确定该矩阵是否能对角化。

解:

(1)

$|\lambda I-A|=(\lambda-1)\left[\lambda^2-(u+2)\lambda+(3u+1)\right]=0$

$\Delta=u\,(u-4)$

$\lambda_1=1$

$\lambda_2=\frac{(u+2)+\sqrt{u(u-8)}}{2}$

$\lambda_3=\frac{(u+2)-\sqrt{u(u-8)}}{2}$

(2)

① $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix} u-1 & -1 & u \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_2=x_3 \end{cases}$$

故 $V_1=\{k[-1,1,1] \mid k\in\mathbb{R}\}$

② $\lambda_{2,3}$(记作λ)

$$\begin{pmatrix} u-\lambda & -1 & u \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} x_1=[(u-\lambda)(3-\lambda)+3u-2]x_2 \\ x_3=\lambda x_2 \end{cases}$$

故 $V=\{k[(u-\lambda)(3-\lambda)+3u-2,1,\lambda] \mid k\in\mathbb{R}\}$

其中 λ 为 $\lambda^2-(u+2)\lambda+3u+1=0$ 的根

(3)

①$\Delta<0$
$u\in(0,8)$
不可在实数域对角化

②$\Delta>0$
$u\in(-\infty,0)\cup(8,+\infty)$
可以

③$\Delta=0$
$u=0,8$
不可以

6. 设 λ 是方阵 A 的特征值。证明

(1) λ^2 是方阵 A^2 的特征值。

解：

$Ax = \lambda x$

$$A^2x = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

故 λ^2 为 A^2 的特征值

(2) 更一般地，对任意正整数 k，λ^k 是 A^k 的特征值。

解：

$k = 1$ 时成立
若 $k = n$ 时成立

$$A^n x = \lambda^n x$$

当 $k = n + 1$ 时

$$A^{n+1}x = A(A^n x) = \lambda^n(Ax) = \lambda^{n+1}x$$

故成立

7. 设 A 是可逆方阵。证明：如果 λ 是 A 的特征值，那么 $\lambda \neq 0$ 且 λ^{-1} 是 A 的逆矩阵 A^{-1} 的特征值。

解：

若 $Ax = \lambda x$

$x = \lambda A^{-1}x$

$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$

故 λ^{-1} 为 A^{-1} 的特征值

若 $\lambda = 0$
$Ax = 0 \Rightarrow A$ 不可逆 矛盾

故 $\lambda \neq 0$