

# 《线性代数》

## 第五章: $\mathbb{R}^n$ 上的线性算子

曾鹏程  
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.12.10

# 教学安排

① 凯莱-哈密顿定理

② 实对称矩阵的对角化

# 利用凯莱-哈密顿定理计算逆算子或逆矩阵

## 命题 (5.38)

(1). 设  $\mathcal{A}$  是  $\mathbb{R}^n$  上的线性算子, 特征多项式是

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$ . 那么  $\mathcal{A}$  可逆当且仅当特征多项式的常数项  $\chi_n$  不为 0. 这时候

$$\mathcal{A}^{-1} = -\chi_n^{-1}(\mathcal{A}^{n-1} + \chi_1 \mathcal{A}^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} \mathcal{E}).$$

(2). 将 (1) 中的  $\mathcal{A}$  换成  $n$  阶方阵  $A$ , 结论同样成立. 此时

$$A^{-1} = -\chi_n^{-1}(A^{n-1} + \chi_1 A^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} E).$$

# 利用凯莱-哈密顿定理计算逆算子或逆矩阵

## 命题 (5.38)

(1). 设  $\mathcal{A}$  是  $\mathbb{R}^n$  上的线性算子, 特征多项式是

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \cdots + \chi_{n-1} t + \chi_n$ . 那么  $\mathcal{A}$  可逆当且仅当特征多项式的常数项  $\chi_n$  不为 0. 这时候

$$\mathcal{A}^{-1} = -\chi_n^{-1}(\mathcal{A}^{n-1} + \chi_1 \mathcal{A}^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} \mathcal{E}).$$

(2). 将 (1) 中的  $\mathcal{A}$  换成  $n$  阶方阵  $A$ , 结论同样成立. 此时

$$A^{-1} = -\chi_n^{-1}(A^{n-1} + \chi_1 A^{n-2} + \cdots + \chi_{n-1} E).$$

例 5.39 利用上述命题求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  和  $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

的逆矩阵.

# 利用凯莱-哈密顿定理计算多项式在方阵处的值

- 凯莱-哈密顿定理：线性算子  $\mathcal{A}$  的特征多项式零化该线性算子
- $\mathcal{A}$  的极小多项式：在零化线性算子  $\mathcal{A}$  的非零多项式中次数最小的那个
- $\mathcal{A}$  的极小多项式  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  是  $\mathcal{A}$  的特征多项式  $\chi_{\mathcal{A}}$  的因子
- 将线性算子  $\mathcal{A}$  换成方阵  $A$ ，以上结论依然成立

# 利用凯莱-哈密顿定理计算多项式在方阵处的值

- 设  $A$  是方阵,  $f(t)$  是多项式, 带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

$r(t)$  次数小于  $\chi_A(t)$ .

# 利用凯莱-哈密顿定理计算多项式在方阵处的值

- 设  $A$  是方阵,  $f(t)$  是多项式, 带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

$r(t)$  次数小于  $\chi_A(t)$ .

- 根据凯莱-哈密顿定理,  $f(A) = r(A)$

# 利用凯莱-哈密顿定理计算多项式在方阵处的值

- 设  $A$  是方阵,  $f(t)$  是多项式, 带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

$r(t)$  次数小于  $\chi_A(t)$ .

- 根据凯莱-哈密顿定理,  $f(A) = r(A)$
- 如何用待定系数法确定余项  $r(t)$ ?

# 利用凯莱-哈密顿定理计算多项式在方阵处的值

- 设  $A$  是方阵,  $f(t)$  是多项式, 带余除法给出

$$f(t) = q(t)\chi_A(t) + r(t),$$

$r(t)$  次数小于  $\chi_A(t)$ .

- 根据凯莱-哈密顿定理,  $f(A) = r(A)$
- 如何用待定系数法确定余项  $r(t)$ ?

**例 5.40 & 5.41** 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ . 求  $A^m$  和  $B^m$ .

# 凯莱-哈密顿定理与不变子空间

- 实数域上的多项式可以分解成次数不超过 2 的多项式的乘积
- 实数域上的向量空间一般有非平凡的不变子空间

- 实数域上的多项式可以分解成次数不超过 2 的多项式的乘积
- 实数域上的向量空间一般有非平凡的不变子空间

## 定理 (5.35)

向量空间  $\mathbb{R}^n$  上的线性算子一定有一维或者二维的不变子空间.

# 凯莱-哈密顿定理与不变子空间

- 实数域上的多项式可以分解成次数不超过 2 的多项式的乘积
- 实数域上的向量空间一般有非平凡的不变子空间

## 定理 (5.35)

向量空间  $\mathbb{R}^n$  上的线性算子一定有一维或者二维的不变子空间.

## 定理 (5.36)

假设线性算子  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的特征多项式能分解成两个正次数的实系数多项式的乘积，那么  $A$  有非平凡的不变子空间.

## 定理 (5.37)

设线性算子  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的特征多项式  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  是两个互素的多项式  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  的乘积. 定义

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \xi(\mathcal{A})u = 0\}, \quad V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \eta(\mathcal{A})v = 0\}.$$

那么

- (1)  $U$  和  $V$  都是  $\mathcal{A}$  的不变子空间, 而且  $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ .
- (2)  $\xi(\mathcal{A})$  在  $V$  上的限制是可逆的,  $\eta(\mathcal{A})$  在  $U$  上的限制是可逆的.

## 习题 5.5

1. 求如下矩阵的特征多项式和极小多项式:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. 假设  $\mathbb{R}^3$  上的线性算子  $\mathcal{A}$  在标准基下的矩阵是  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 利用定理5.37把  $\mathbb{R}^3$  分解成两个非平凡不变子空间的直和.

3. 利用凯莱-哈密顿定理求如下矩阵的逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. 计算:

$$(1) \left( \begin{array}{cc} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right)^{100}; \quad (2) \left( \begin{array}{cc} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{array} \right)^{66}; \quad (3) \left( \begin{array}{ccc} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{array} \right)^{50}.$$

5. 证明: 线性算子  $\mathcal{A}$  是幂零的当且仅当其特征多项式没有非零根.

# 实对称方阵与点积

- 结合不变子空间理论和欧式空间的点积理论可以得到：**实对称矩阵可以通过正交矩阵对角化**

# 实对称方阵与点积

- 结合不变子空间理论和欧式空间的点积理论可以得到：**实对称矩阵可以通过正交矩阵对角化**
- 令  $X = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $Y = [y_1, \dots, y_n]$ . 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 那么  $AX \in \mathbb{R}^n$ . 则有

$$(AX| Y) = (X| {}^t AY)$$

# 实对称方阵与点积

- 结合不变子空间理论和欧式空间的点积理论可以得到：**实对称矩阵可以通过正交矩阵对角化**
- 令  $X = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $Y = [y_1, \dots, y_n]$ . 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 那么  $AX \in \mathbb{R}^n$ . 则有

$$(AX| Y) = (X| {}^t AY)$$

## 命题 (5.42)

设  $A$  是  $n$  阶实对称方阵,  $\mathbb{R}^n$  是列向量空间. 那么对任意的  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$(AX| Y) = (X| AY)$$

# 实对称方阵与点积

引理 (5.43)

设  $A$  是实对称矩阵，则算子  $\mathcal{A}$  的不变子空间的正交补也是  $\mathcal{A}$  的不变子空间。

# 实对称方阵与点积

## 引理 (5.43)

设  $A$  是实对称矩阵，则算子  $\mathcal{A}$  的不变子空间的正交补也是  $\mathcal{A}$  的不变子空间。

## 引理 (5.44)

设  $A$  是对称矩阵，则算子  $\mathcal{A}$  有一维不变子空间。

# 实对称矩阵的对角化

定理 (5.45)

设  $A$  是实对称矩阵，那么存在正交矩阵  $B$  使得  $B^{-1}AB$  为对角矩阵.

# 实对称矩阵的对角化

## 定理 (5.45)

设  $A$  是实对称矩阵, 那么存在正交矩阵  $B$  使得  $B^{-1}AB$  为对角矩阵.

## 推论 (5.46)

设  $A$  是  $n$  阶对称实方阵.

- (1)  $A$  的特征多项式  $\chi_A(t)$  能分解成一次实多项式的乘积.
- (2) 如果  $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$ , 那么  $A$  可通过正交矩阵对角化到  $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

# 求定理 5.45 中的正交矩阵 $B$

## 定理 (5.47)

设  $A$  实  $n$  阶对称实方阵, 那么

- (1)  $A$  的特征子空间的维数和是  $n$ , 从而  $\mathbb{R}^n$  是  $A$  的特征子空间的直和.
- (2)  $A$  的特征子空间互相正交.

## 推论 (5.48)

设  $A$  实  $n$  阶对称实方阵.

- (1) 每个特征子空间取一个标准正交基, 合起来就是  $\mathbb{R}^n$  的标准正交基.
- (2) 以 (1) 中的标准正交基中向量为列向量得到矩阵  $B$ , 那么  $B$  是正交矩阵, 而且  $A$  通过  $B$  对角化.
- (3) 记  $B$  的列向量  $b_1, b_2, \dots, b_n$  如果  $Ab_i = \lambda_i b_i$ , 那么

$$B^{-1}AB = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

# 求定理 5.45 中的正交矩阵 $B$

推论 5.48 告诉我们如何把一个实对称矩阵  $A$  对角化：

- ① 解特征多项式求出特征值
- ② 对每个特征值，求出对应线性方程组的一个基础解系，并通过正交化方法得到对应特征子空间的标准正交基
- ③ 按列向量合并所有标准正交基，得到正交矩阵

# 求定理 5.45 中的正交矩阵 $B$

## 例 (5.49)

找出一个正交矩阵  $B$  使得对称矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -6 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$  通过矩阵  $B$  对角化.

## 例 (5.50)

找出一个正交矩阵  $B$  使得对称矩阵  $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$  通过矩阵  $B$  对角化.

# 对双线性型和二次型的应用

## 定理 (5.51)

设  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  的线性子空间,  $f$  是  $U$  上的对称双线性型. 那么  $f$  有典范标准正交基. 特别, 向量空间  $\mathbb{R}^n$  上的每个对称双线性型  $f$  都有典范标准正交基.

# 对双线性型和二次型的应用

## 推论 (5.52)

设  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  的  $s$  维线性子空间,  $q(x)$  是  $U$  上的二次型. 那么存在  $U$  的标准正交基, 在这个基下,  $q(x)$  有如下形式:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2,$$

其中  $x = [x_1, x_2, \dots, x_s] \in U$  是  $X$  在这个基下的坐标列向量,  
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  是二次型  $q(x)$  在  $U$  的任何一个标准正交基下的矩阵的特征值.

# 对双线性型和二次型的应用

## 推论 (5.53)

设  $q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  是的二次齐次多项式，那么存在  $n$  阶正交矩阵  $T$  使得做变量替换  $x = Ty$  后有

$$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ,  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ .

## 定理 (5.54)

实对称矩阵  $A$  是正定（或半正定的）的当且仅当其特征值都是正数（或非负的）.

# 主轴定理的几何意义

- 推论 5.53 又称为主轴定理: 化二次型到主轴上
- 主轴定理的几何意义: 通过直角坐标的变换 (保距变换), 可以把二次多项式方程中的二次型部分化成典范式
- 从而更容易确定曲面的类型

例 5.55 确定二次曲线  $19x_1^2 + 4x_1x_2 + 16x_2^2 - 212x_1 + 104x_2 = 356$  的类型并画出大概图形.

## 习题 5.6

1. 找出对角化下面矩阵的一个正交矩阵.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad (3) \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$(4) \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}.$$

2. 求正交矩阵  $T$  使得变量替换  $x = Ty$  把下面的二次型化成典范式. (提示: 写出二次型的矩阵, 找出把这个矩阵对角化的正交矩阵, 根据定理5.51的证明, 它就是要求的  $T$ .)

## 习题 5.6

(1)  $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2,$

(2)  $x_1x_2$

(3)  $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2,$

(4)  $34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2,$

(5)  $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3,$

(6)  $3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$

(7)  $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3,$

(8)  $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3,$

(9)  $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4.$

3. 确定下面二次曲线的类型并画出其大概图形.

(1)  $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 5 = 0,$

(2)  $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 5x_1 = 0,$

## 习题 5.6

$$(3) 9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 52x_1 + 14x_2 = 6,$$

$$(4) 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1 - x_2 - 4 = 0,$$

$$(5) x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 3 = 0,$$

$$(6) x_1x_2 + x_1 - 2x_2 - 2 = 0.$$