《线性代数》

第四章: 向量空间 $\mathbb{R}^n$

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.11.19

教学安排

1. 双线性型和二次型

双线性映射

定义 (4.45)

函数:$f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的双线性型（或双线性函数），如果它满足如下双线性条件:

$$f(au+bv,w)=af(u,w)+bf(v,w),$$
$$f(w,au+bv)=af(w,u)+bf(w,v),$$

$u,v,w\in\mathbb{R}^n,\ a,b\in\mathbb{R}.$

双线性映射

定义 (4.45)

函数:$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的双线性型（或双线性函数），如果它满足如下双线性条件:

$$f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w),$$
$$f(w, au + bv) = af(w, u) + bf(w, v),$$

$u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- 把 $\mathbb{R}^n$ 换成子空间 U，如何定义？

双线性映射

定义 (4.45)

函数:$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的双线性型（或双线性函数），如果它满足如下双线性条件:

$$f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w),$$
$$f(w, au + bv) = af(w, u) + bf(w, v),$$

$u, v, w \in \mathbb{R}^n,\ a, b \in \mathbb{R}.$

- 把 $\mathbb{R}^n$ 换成子空间 U，如何定义？
- $\mathbb{R}^n$（或子空间 U）上的点积是双线性函数吗？

双线性型在基下的矩阵

- 设 f 是 U 上的双线性型，$u_1, u_2, \cdots, u_s$ 是 U 的基，则 $\forall x, y \in U$,

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij} x_i y_j, \quad \text{其中 } f_{ij} = f(u_i, u_j).$$

双线性型在基下的矩阵

- 设 f 是 U 上的双线性型，$u_1, u_2, \cdots, u_s$ 是 U 的基，则 $\forall x, y \in U$,

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij} x_i y_j, \quad \text{其中 } f_{ij} = f(u_i, u_j).$$

- s 阶方阵 $F = (f_{ij})$ 称为双线性型 f 在基 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 下的矩阵. 命 $X = [x_1, \cdots, x_s]$, $Y = [y_1, \cdots, y_s]$，则

$$f(x, y) = {}^t XFY.$$

双线性型在基下的矩阵

- 设 f 是 U 上的双线性型，$u_1, u_2, \cdots, u_s$ 是 U 的基，则 $\forall x, y \in U$,
$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij} x_i y_j, \quad \text{其中 } f_{ij} = f(u_i, u_j).$$
- s 阶方阵 $F = (f_{ij})$ 称为双线性型 f 在基 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 下的矩阵. 命 $X = [x_1, \cdots, x_s]$, $Y = [y_1, \cdots, y_s]$，则
$$f(x, y) = {}^{t}XFY.$$
- 双线性型由它的矩阵完全确定

双线性型在不同基下的矩阵的联系

- 双线性型的主要目标：寻找适当的基使得 F 尽可能简单

双线性型在不同基下的矩阵的联系

- 双线性型的主要目标：寻找适当的基使得 F 尽可能简单
- 需考虑其在不同基下的矩阵的联系，得到矩阵共有的性质（与基的选取无关）

双线性型在不同基下的矩阵的联系

- 双线性型的主要目标：寻找适当的基使得 F 尽可能简单
- 需考虑其在不同基下的矩阵的联系，得到矩阵共有的性质（与基的选取无关）
- 设从基 $u_1, \cdots, u_s$ 到基 $u'_1, \cdots, u'_s$ 的转换矩阵是 A，则

$$f(x, y) = {}^tX' \cdot {}^tAFA \cdot Y' = {}^tX'F'Y'$$

双线性型在不同基下的矩阵的联系

- 双线性型的主要目标：寻找适当的基使得 F 尽可能简单
- 需考虑其在不同基下的矩阵的联系，得到矩阵共有的性质（与基的选取无关）
- 设从基 $u_1, \cdots, u_s$ 到基 $u'_1, \cdots, u'_s$ 的转换矩阵是 A, 则

$$f(x,y) = {}^tX' \cdot {}^tAFA \cdot Y' = {}^tX'F'Y'$$

定理 (4.47)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的双线性型. 那么 f 在 U 的基 (u_i) 和 U 的基 (u'_i) 下的矩阵 F 和 F' 之间有如下的联系:

$$F' = {}^tAFA$$

双线性型在不同基下的矩阵的联系

定义 (4.48)

方阵 $F, F' \in M_s(\mathbb{R})$ 称为合同的，如果存在可逆方阵 $A \in M_s(\mathbb{R})$ 使得

$$F' = {}^tAFA$$

双线性型在不同基下的矩阵的联系

定义 (4.48)

方阵 $F, F' \in M_s(\mathbb{R})$ 称为合同的，如果存在可逆方阵 $A \in M_s(\mathbb{R})$ 使得

$$F' = {}^tAFA$$

- 合同关系是方阵之间的一个等价关系
- 双线性型 f 在不同基下的矩阵是合同的，合同的矩阵有相同的秩

双线性型在不同基下的矩阵的联系

定义 (4.48)

方阵 $F, F' \in M_s(\mathbb{R})$ 称为合同的，如果存在可逆方阵 $A \in M_s(\mathbb{R})$ 使得

$$F' = {}^tAFA$$

- 合同关系是方阵之间的一个等价关系
- 双线性型 f 在不同基下的矩阵是合同的，合同的矩阵有相同的秩
- 这些矩阵的秩称为 f 的秩
- 非退化双线性型 f： $\operatorname{rank} f = s = \dim U$

对称双线性型和斜对称双线性型

- 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，称双线性型 $f\colon U\times U\to\mathbb{R}$ 是对称的如果 $\forall x,\ y\in U,\ f(x,y)=f(y,x)$；是斜对称的如果 $f(x,y)=-f(y,x)$

对称双线性型和斜对称双线性型

- 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，称双线性型 $f\colon U \times U \to \mathbb{R}$ 是对称的如果 $\forall x, y \in U$, $f(x, y) = f(y, x)$; 是斜对称的如果 $f(x, y) = -f(y, x)$
- 举一个对称或斜对称双线性型的例子？

对称双线性型和斜对称双线性型

- 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，称双线性型 $f\colon U\times U\to\mathbb{R}$ 是对称的如果 $\forall x,\ y\in U,\ f(x,y)=f(y,x)$; 是斜对称的如果 $f(x,y)=-f(y,x)$
- 举一个对称或斜对称双线性型的例子？
- 对称方阵与斜对称方阵的定义: ${}^tA=A$; ${}^tA=-A$

对称双线性型和斜对称双线性型

- 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，称双线性型 $f\colon U\times U\to\mathbb{R}$ 是对称的如果 $\forall x, y\in U$, $f(x,y)=f(y,x)$; 是斜对称的如果 $f(x,y)=-f(y,x)$
- 举一个对称或斜对称双线性型的例子？
- 对称方阵与斜对称方阵的定义: ${}^tA=A$; ${}^tA=-A$
- 双线性型是（斜）对称的当且仅当它在任意基下的矩阵是（斜）对称的

对称双线性型和斜对称双线性型

- 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，称双线性型 $f\colon U \times U \to \mathbb{R}$ 是对称的如果 $\forall x, y \in U$, $f(x, y) = f(y, x)$; 是斜对称的如果 $f(x, y) = -f(y, x)$
- 举一个对称或斜对称双线性型的例子？
- 对称方阵与斜对称方阵的定义: ${}^tA = A$; ${}^tA = -A$
- 双线性型是（斜）对称的当且仅当它在任意基下的矩阵是（斜）对称的
- 任意的方阵（双线性型）都可以写成对称方阵（对称双线性型）和斜对称方阵（斜对称双线性型）的和

二次型的定义

定义 (4.49)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的双线性型. 定义函数 $q: U \to \mathbb{R}$:

$$q(x) = f(x, x).$$

称它为相伴于 f 的二次型（或二次函数），它是 f 给出的二次型.

二次型的定义

定义 (4.49)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的双线性型. 定义函数 $q: U \to \mathbb{R}$:

$$q(x) = f(x, x).$$

称它为相伴于 f 的二次型（或二次函数），它是 f 给出的二次型.

- 不同的双线性型可以给出相同的二次型

二次型的定义

定义 (4.49)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的双线性型. 定义函数 $q: U \to \mathbb{R}$:

$$q(x) = f(x, x).$$

称它为相伴于 f 的二次型（或二次函数），它是 f 给出的二次型.

- 不同的双线性型可以给出相同的二次型
- 二次型和对称双线性型之间有一一对应: $q \to f_q$, f_q 称为 q 的极化

二次型的定义

定义 (4.50)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的对称双线性型. 设 q 是对称双线性型 f 给出的二次型，那么，二次型 q 的秩定义为 f 的秩：$\operatorname{rank} q = \operatorname{rank} f$. 二次型 q 在子空间的基 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 下的矩阵定义为 f 在这个基下的矩阵 F.

定义 (4.50)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的对称双线性型. 设 q 是对称双线性型 f 给出的二次型，那么，二次型 q 的秩定义为 f 的秩：$\operatorname{rank} q = \operatorname{rank} f$. 二次型 q 在子空间的基 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 下的矩阵定义为 f 在这个基下的矩阵 F.

练习一：写出双线性型或二次型的矩阵

1. $2x_1y_1 - x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$;
2. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$

二次型的典范式

如果对称双线性型 f 在某个基下的矩阵是对角的，那么 f 和它给出的二次型有如下形式：

$$f(x, y) = f_1 x_1 y_1 + \cdots + f_s x_s y_s, \tag{1}$$

$$q(x) = f_1 x_1^2 + \cdots + f_s x_s^2. \tag{2}$$

二次型的典范式

如果对称双线性型 f 在某个基下的矩阵是对角的，那么 f 和它给出的二次型有如下形式：

$$f(x, y) = f_1 x_1 y_1 + \cdots + f_s x_s y_s, \tag{1}$$

$$q(x) = f_1 x_1^2 + \cdots + f_s x_s^2. \tag{2}$$

- (1) 和 (2) 分别称为双线性型 f 和二次型 q 的一个典范式（或规范型）
- 相应的基称为 f 和 q 的典范基
- 在典范式中，非零系数的个数就是二次型 q 的秩

二次型的典范式

如果对称双线性型 f 在某个基下的矩阵是对角的，那么 f 和它给出的二次型有如下形式：

$$f(x,y) = f_1x_1y_1 + \cdots + f_sx_sy_s, \tag{1}$$

$$q(x) = f_1x_1^2 + \cdots + f_sx_s^2. \tag{2}$$

- (1) 和 (2) 分别称为双线性型 f 和二次型 q 的一个典范式（或规范型）
- 相应的基称为 f 和 q 的典范基
- 在典范式中，非零系数的个数就是二次型 q 的秩
- 双线性型和二次型的理论就是讲如何通过合同变换把一个对称矩阵化成对角矩阵

典范基的存在性

定理 (4.51)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间，f 是 U 上的对称双线性型．那么 f 有典范基．$\mathbb{R}^n$ 上的每个对称双线性型 f 都有典范基．

典范基的存在性

推论 (4.52)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间. 如果 U 上的二次型 q 的秩为 r, 那么存在 U 的基使得 q 有如下的典范式:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2,$$

$x = [x_1, x_2, \cdots, x_s]$ 为 X 在该基下的坐标.

典范基的存在性

推论 (4.52)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间. 如果 U 上的二次型 q 的秩为 r, 那么存在 U 的基使得 q 有如下的典范式:

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2,$$

$x = [x_1, x_2, \cdots, x_s]$ 为 X 在该基下的坐标.

推论 (4.53)

每个对称矩阵都合同于某个对角矩阵.

雅可比方法求典范式

- 双线性型和二次型的理论就是讲如何通过合同变换把一个对称矩阵化成对角矩阵
- 我们先尝试看看在特定情形下能否直接对角化

雅可比方法求典范式

- 双线性型和二次型的理论就是讲如何通过合同变换把一个对称矩阵化成对角矩阵
- 我们先尝试看看在特定情形下能否直接对角化
- 在某些情况下，可通过对称双线性型 f 在一个基下的矩阵直接写出相应的二次型 q 的典范式
- 先定义矩阵的 k 阶主子式

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1k} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1} & f_{k2} & \cdots & f_{kk} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq k \leq s. \quad \Delta_0 = 1.$$

雅可比方法求典范式

定理 (4.54)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的 s 线性子空间, f 是子空间 U 上的对称双线性型， F 是它在某个基下的矩阵. 如果 F 的主子式 $\Delta_1, \cdots, \Delta_s$ 均不为 0，那么存在 U 的基使得 f 和它给出的二次型 q 在这个基下有典范式

$$f(x,y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}x_1y_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}x_2y_2 + \cdots + \frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}}x_sy_s, \tag{3}$$

$$q(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}x_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}}x_s^2. \tag{4}$$

定理 (4.54)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的 s 线性子空间，f 是子空间 U 上的对称双线性型，F 是它在某个基下的矩阵。如果 F 的主子式 $\Delta_1, \cdots, \Delta_s$ 均不为 0，那么存在 U 的基使得 f 和它给出的二次型 q 在这个基下有典范式

$$f(x, y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} x_1 y_1 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2 y_2 + \cdots + \frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}} x_s y_s, \tag{3}$$

$$q(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} x_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}} x_s^2. \tag{4}$$

练习二： 求 $q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的典范式 $(\lambda \neq 2)$

配方法求典范式

- 二次型是向量坐标的二次函数：$q(x) = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij} x_i x_j$.
- 直接通过配方法把二次函数化成仅含有平方项的二次函数
- 具体来说，先把含 x_1 的项合并，若 $f_{11} \neq 0$，把这些项配成平方项，则 $q(x) = \frac{1}{f_{11}} x_1'^2 + q_1(x_2', \cdots, x_s')$. 然后把把含 x_2' 的项合并，继续做变量替换，直至 $q(x)$ 化成只含变元平方项的二次函数

配方法求典范式

- 二次型是向量坐标的二次函数：$q(x) = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij} x_i x_j$.
- 直接通过配方法把二次函数化成仅含有平方项的二次函数
- 具体来说，先把含 x_1 的项合并，若 $f_{11} \neq 0$, 把这些项配成平方项，则 $q(x) = \frac{1}{f_{11}} x_1'^2 + q_1(x_2', \cdots, x_s')$. 然后把把含 x_2' 的项合并，继续做变量替换，直至 $q(x)$ 化成只含变元平方项的二次函数
- 若 $f_{11} = 0$, 如何变换？

配方法求典范式

- 二次型是向量坐标的二次函数：$q(x) = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij}x_ix_j$.
- 直接通过配方法把二次函数化成仅含有平方项的二次函数
- 具体来说，先把含 x_1 的项合并，若 $f_{11} \neq 0$, 把这些项配成平方项，则 $q(x) = \frac{1}{f_{11}}x_1'^2 + q_1(x_2', \cdots, x_s')$. 然后把把含 x_2' 的项合并，继续做变量替换，直至 $q(x)$ 化成只含变元平方项的二次函数
- 若 $f_{11} = 0$, 如何变换？
- 变量替换的本质是什么？

配方法求典范式

- 二次型是向量坐标的二次函数: $q(x) = \sum_{i,j=1}^{s} f_{ij}x_i x_j$.
- 直接通过配方法把二次函数化成仅含有平方项的二次函数
- 具体来说，先把含 x_1 的项合并，若 $f_{11} \neq 0$, 把这些项配成平方项，则 $q(x) = \frac{1}{f_{11}}x_1'^2 + q_1(x_2', \cdots, x_s')$. 然后把把含 x_2' 的项合并，继续做变量替换，直至 $q(x)$ 化成只含变元平方项的二次函数
- 若 $f_{11} = 0$, 如何变换？
- 变量替换的本质是什么？

练习三：利用配方法求练习二中
$q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的典范式（没有限制 $\lambda \neq 2$）.

惯性定律

- 二次型的典范式 $q(x) = f_1 x_1^2 + \cdots + f_s x_s^2$ 中的诸系数不唯一
- 经过适当变换，上述典范式可以取成如下标准型：

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_t^2 - x_{t+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

惯性定律

- 二次型的典范式 $q(x) = f_1 x_1^2 + \cdots + f_s x_s^2$ 中的诸系数不唯一
- 经过适当变换，上述典范式可以取成如下标准型：

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_t^2 - x_{t+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

- r 是二次型的秩，不依赖基的选取，t 是否依赖基的选取？

惯性定律

- 二次型的典范式 $q(x) = f_1 x_1^2 + \cdots + f_s x_s^2$ 中的诸系数不唯一
- 经过适当变换，上述典范式可以取成如下标准型：

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_t^2 - x_{t+1}^2 - \cdots - x_r^2.$$

- r 是二次型的秩，不依赖基的选取，t 是否依赖基的选取？

定理 (4.55)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的 s 维线性子空间, q 是 U 上的二次型，那么在上述标准型中，整数 t 和 r 都仅依赖 q, 不依赖典范基的选取.

推论 (4.56)

(1) 任何 s 阶实对称矩阵 A 都合同于 $\begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $0 \le t \le r \le s$，且 r, t 由 A 唯一确定.

(2) 如果 A 是对角矩阵，对角线上有 t 个正数，$r-t$ 个负数，那么 A 与上面的对角矩阵合同.

推论 (4.56)

(1) 任何 s 阶实对称矩阵 A 都合同于 $\begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $0 \le t \le r \le s$，且 r, t 由 A 唯一确定.
(2) 如果 A 是对角矩阵，对角线上有 t 个正数，$r-t$ 个负数，那么 A 与上面的对角矩阵合同.

- r, t 是实二次型中的重要不变量，分别称为 q 的惯性指数和正惯性指数.
- $r-t$: q 的负惯性指数; 整数对 $(t, r-t)$(或 $2t-r$): 符号差;

推论 (4.56)

(1) 任何 s 阶实对称矩阵 A 都合同于 $\begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $0 \leq t \leq r \leq s$，且 r, t 由 A 唯一确定.

(2) 如果 A 是对角矩阵，对角线上有 t 个正数，$r-t$ 个负数，那么 A 与上面的对角矩阵合同.

- r, t 是实二次型中的重要不变量，分别称为 q 的惯性指数和正惯性指数.
- $r-t$: q 的负惯性指数; 整数对 $(t, r-t)$(或 $2t-r$): 符号差;

例 4.57：求二次型 $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3$ 的符号差

正定（半正定）二次型

定义 (4.58)

实二次型 $q: U \to \mathbb{R}$ 称为正定的，如果对任意非零 $x \in U$ 有 $q(x) > 0$;
半正定的，如果对任意的 $x \in U$ 有 $q(x) \geq 0$;
负定的，如果对任意非零 $x \in U$ 有 $q(x) < 0$;
半负定的，如果对任意的 $x \in U$ 有 $q(x) \leq 0$;
不定的，如果它在某些向量取正值，某些向量取负值.

正定（半正定）二次型

定义 (4.58)

实二次型 $q : U \to \mathbb{R}$ 称为正定的，如果对任意非零 $x \in U$ 有 $q(x) > 0$;
半正定的，如果对任意的 $x \in U$ 有 $q(x) \geq 0$;
负定的，如果对任意非零 $x \in U$ 有 $q(x) < 0$;
半负定的，如果对任意的 $x \in U$ 有 $q(x) \leq 0$;
不定的，如果它在某些向量取正值，某些向量取负值.

- 注意以上定义和基的选取无关
- 如果 $s = \dim U$, 以上对应的标准型分别是什么？

正定（半正定）二次型

定义 (4.58)

实二次型 $q: U \to \mathbb{R}$ 称为正定的，如果对任意非零 $x \in U$ 有 $q(x) > 0$;
半正定的，如果对任意的 $x \in U$ 有 $q(x) \geq 0$;
负定的，如果对任意非零 $x \in U$ 有 $q(x) < 0$;
半负定的，如果对任意的 $x \in U$ 有 $q(x) \leq 0$;
不定的，如果它在某些向量取正值，某些向量取负值.

- 注意以上定义和基的选取无关
- 如果 $s = \dim U$, 以上对应的标准型分别是什么？
- **练习四：** 求二次型 $q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的标准型

正定（半正定）二次型

定义 (4.58)

实二次型 $q: U \to \mathbb{R}$ 称为正定的，如果对任意非零 $x \in U$ 有 $q(x) > 0$;
半正定的，如果对任意的 $x \in U$ 有 $q(x) \geq 0$;
负定的，如果对任意非零 $x \in U$ 有 $q(x) < 0$;
半负定的，如果对任意的 $x \in U$ 有 $q(x) \leq 0$;
不定的，如果它在某些向量取正值，某些向量取负值.

- 注意以上定义和基的选取无关
- 如果 $s = \dim U$, 以上对应的标准型分别是什么？
- **练习四**：求二次型 $q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的标准型
- 对称双线性型和对称矩阵也有正定（半正定）的概念
- 正定的双线性型在某个基下的矩阵是单位矩阵

正定（半正定）二次型

定理 (4.59)

任意的正定矩阵具有如下形式:

$$F = {}^tA \cdot A,$$

其中 A 是非退化方阵. 反过来也成立.

- 二次型在某个基下的表达式为: $q(x) = \sum_{i,j} f_{ij}x_ix_j$，其中 $f_{ij} = f_{ji}$
- 能否通过这些系数 f_{ij} 直接判断 q 的正定性或其他性质？

1. 写出下列双线性型或二次型的矩阵.

(1) $2x_1y_1 - x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$.

(2) $-x_1y_1 + 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + 4x_2y_3 - 3x_3y_1 + 4x_3y_3 - 6x_3y_3$.

(3) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$.

(4) $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 6x_3x_4$.

2. (1) 对列向量空间 $\mathbb{R}^2$ 上的双线性型 $f(x,y) = {}^t x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y$ 求典范基.

(2) 对列向量空间 $\mathbb{R}^3$ 上的双线性型 $f(x,y) = {}^t x \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} y$ 求典范基.

3. (1) 运用雅克比方法把双线性型化成典范式:

$$f(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_3.$$

(2) 命 $X = [x_1, x_2, x_3]$, $X' = [x_1', x_2', x_3']$, $Y = [y_1, y_2, y_3]$, $Y' = [y_1', y_2', y_3']$. 求变换矩阵 A 使得在变换 $X = AX'$, $Y = AY'$ 下 $f(x,y)$ 具有典范形式, 即具有形式 $a_1x_1'y_1' + a_2x_2'y_2' + a_3x_3'y_3'$, 其中 a_1, a_2, a_3 是实数.

4. 运用雅克比方法判断下面两个矩阵是否合同:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. 设 A_1, A_2, ..., A_k 是方阵. 证明: 分块对角矩阵 $\mathrm{diag}(A_1, A_2, ..., A_n)$ 是(斜)对称矩阵当且仅当所有的 A_i 都是(斜)对称矩阵.

6. 举例说明:

(1) 正定矩阵 (a_{ij}) 可以在某些 (i, j) 处的值 a_{ij} 是负的;

(2) 实对称矩阵 $A = (a_{ij})$ 所有的值都是正的, 但 A 不是正定的.

7. 证明: 实二次型

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad a_{ij} = a_{ji},$$

是半正定的当且仅当对任意的指标 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, k 阶行列式 $\det(a_{i_r i_t})$ 是非负的.

8. 已知实二次型 $f(x) = ax_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2$ 的秩为 2,

(1) 写出二次型所对应的矩阵 A, 并求参数 a;

(2) 把二次型化成标准形.

习题 4.4

9. 实二次型

$$\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

在 λ 取什么值时是负定的.

10. 证明下面的对称矩阵是正定的, 然后把它们分解成形式 ${}^tP \cdot P$, 其中 P 是方阵.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

11. 证明正定矩阵的对角线上的值都是正的.

12. 设 A 是 n 阶斜对称实方阵, E 是 n 阶单位矩阵, λ 是复数. 如果 $\det(\lambda E - A) = 0$, 那么 λ 的实部为 0.

习题 4.4

13. 设 A 是实对称矩阵, E 是同阶单位矩阵, ε 是充分小的实数. 证明方阵 $E+\varepsilon A$ 是正定的.

14. 设 A_1, A_2, ..., A_k 是方阵,

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_k \end{pmatrix}.$$

证明: A 是(斜)对称的当且仅当 A_1, A_2, ..., A_k 都是(斜)对称的.

15. 设方阵 A_1, A_2, ..., A_k 分别与方阵 B_1, B_2, ..., B_k 合同,

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \mathbf{0} \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & B_k \end{pmatrix}.$$

证明: A 与 B 合同.