《线性代数》

第四章: 向量空间 $\mathbb{R}^n$

曾鹏程
(zengpch@shanghaitech.edu.cn)

2025.11.12

教学安排

1. 点积

回顾

- 中学解析几何关于点积的定义

回顾

- 中学解析几何关于点积的定义
- 点积蕴含了长度的定义，如 $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- 更一般地，$[d(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$

回顾

- 中学解析几何关于点积的定义
- 点积蕴含了长度的定义，如 $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- 更一般地，$[d(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$
- 利用几何法和点积计算长度可以得到

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \varphi$$

回顾

- 中学解析几何关于点积的定义
- 点积蕴含了长度的定义，如 $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- 更一般地，$[d(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$
- 利用几何法和点积计算长度可以得到

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \varphi$$

- $\mathbb{R}^3$ 的点积类似，那能否推广到 $\mathbb{R}^n$？

$\mathbb{R}^n$ 中的点积定义

定义 (4.23)

$\mathbb{R}^n$ 中两个向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ 的点积是:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

(列向量空间的点积定义一样;使用记号 $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ 代替 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$)

点积性质

命题 (4.24)

(1) 对称：$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$
(2) 双线性：
对第一个变量线性：$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}|\mathbf{y}) = a(\mathbf{u}|\mathbf{y}) + b(\mathbf{v}|\mathbf{y})$
对第二个变量线性：$(\mathbf{x}|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a(\mathbf{x}|\mathbf{u}) + b(\mathbf{x}|\mathbf{v})$

点积性质

命题 (4.24)

(1) 对称：$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$
(2) 双线性：
对第一个变量线性：$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}|\mathbf{y}) = a(\mathbf{u}|\mathbf{y}) + b(\mathbf{v}|\mathbf{y})$
对第二个变量线性：$(\mathbf{x}|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a(\mathbf{x}|\mathbf{u}) + b(\mathbf{x}|\mathbf{v})$

- 带点积的向量空间 $\mathbb{R}^n$ 称为欧式空间
- 欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的向量 $\mathbf{v}$ 的长度或范数定义：$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}$

点积性质

命题 (4.24)

(1) 对称：$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$
(2) 双线性：
对第一个变量线性：$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}|\mathbf{y}) = a(\mathbf{u}|\mathbf{y}) + b(\mathbf{v}|\mathbf{y})$
对第二个变量线性：$(\mathbf{x}|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a(\mathbf{x}|\mathbf{u}) + b(\mathbf{x}|\mathbf{v})$

- 带点积的向量空间 $\mathbb{R}^n$ 称为欧式空间
- 欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的向量 $\mathbf{v}$ 的长度或范数定义：$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}$
- 任何非零向量都和一个单位向量成比例

点积性质

命题 (4.24)

(1) 对称：$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$
(2) 双线性：
对第一个变量线性：$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}|\mathbf{y}) = a(\mathbf{u}|\mathbf{y}) + b(\mathbf{v}|\mathbf{y})$
对第二个变量线性：$(\mathbf{x}|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a(\mathbf{x}|\mathbf{u}) + b(\mathbf{x}|\mathbf{v})$

- 带点积的向量空间 $\mathbb{R}^n$ 称为欧式空间
- 欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的向量 $\mathbf{v}$ 的长度或范数定义：$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}$
- 任何非零向量都和一个单位向量成比例
- 单位球面和单位球

点积性质

定理 (4.25)

(柯西-施瓦茨不等式) 对欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的任意两个向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$, 有

$$|(\mathbf{u}|\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

点积性质

定理 (4.25)

(柯西-施瓦茨不等式) 对欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的任意两个向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$, 有

$$|(\mathbf{u}|\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

可以用来定义向量间的夹角

点积性质

定义 (4.26)

欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个非零向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的夹角 φ 有下式定义:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

点积性质

定义 (4.26)

欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个非零向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的夹角 φ 有下式定义：

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

- $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 中有一个是零向量，则无夹角
- 若点积 $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = 0$, 则称两向量正交，记作 $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$
- 非零向量正交等价于夹角为 $\pi/2$

点积与初等几何

- 勾股定理
- 菱形对角线互相垂直
- 平行四边形等式

点积与初等几何

- 勾股定理
- 菱形对角线互相垂直
- 平行四边形等式

命题 (4.27)

(三角不等式) 对欧式空间的向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，有

$$\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

标准正交基

定义 (4.28)

欧式空间的基 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 称为正交的如果基中的向量互相正交. 进一步，如果基中的向量都是单位向量，这个基称为标准（或规范）正交基.

定义 (4.28)

欧式空间的基 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ 称为正交的如果基中的向量互相正交. 进一步，如果基中的向量都是单位向量，这个基称为标准（或规范）正交基.

- 子空间的标准正交基的定义？
- 如何从正交基得到标准正交基？

向量正交的性质

定理 (4.29)

设 U 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 U 中的非零向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ 互相正交，那么这些向量线性无关. 如果 $k = dim\, U$, 那么这些向量构成 U 的一个正交基.

向量正交的性质

定理 (4.29)

设 U 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 U 中的非零向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ 互相正交，那么这些向量线性无关. 如果 $k = dim\, U$, 那么这些向量构成 U 的一个正交基.

命题 (4.30)

如果 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ 正交与 $\mathbf{v}$, 那么任何线性组合 $a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_k\mathbf{u}_k$ 和 $\mathbf{v}$ 正交.

正交补

- 命题（4.30）引出向量 $\mathbf{v}$ 与子空间 U 正交的定义
- 所有正交于欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集 Y 的向量形成 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间

正交补

- 命题（4.30）引出向量 $\mathbf{v}$ 与子空间 U 正交的定义
- 所有正交于欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集 Y 的向量形成 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间

定义 (4.31)

设 U 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间. 所有正交于 U 的向量形成的子空间称为 U 的正交补，记作 $U^{\perp}$.

例 4.32 尝试分别在 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中找互为正交补的子空间

寻找标准正交基

- 标准正交基对计算点积甚是方便
- 标准正交基的几何含义就是直角坐标系
- 如何从 U 的任何一个基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s$ 构造标准正交基？

寻找标准正交基

- 标准正交基对计算点积甚是方便
- 标准正交基的几何含义就是直角坐标系
- 如何从 U 的任何一个基 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s$ 构造标准正交基？
- 格拉姆-施密特正交化

寻找标准正交基

定理 (4.33)

(正交化方法) 设 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的线性无关向量组，那么存在互相正交的非零向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$, 使得对每个 k, v_k 是 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ 的线性组合.

寻找标准正交基

定理 (4.33)

(正交化方法) 设 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的线性无关向量组，那么存在互相正交的非零向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$，使得对每个 k，v_k 是 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ 的线性组合.

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{u}_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \frac{(\mathbf{u}_{i+1}|\mathbf{v}_k)}{(\mathbf{v}_k|\mathbf{v}_k)}\mathbf{v}_k, \quad i = 2, \ldots, s-1$；可单位化.
- 任取子空间 U 的一个基，可通过该方法得到 U 的一个标准正交基

寻找标准正交基

定理 (4.33)

(正交化方法) 设 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的线性无关向量组，那么存在互相正交的非零向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$, 使得对每个 k, v_k 是 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ 的线性组合.

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{u}_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \frac{(\mathbf{u}_{i+1}|\mathbf{v}_k)}{(\mathbf{v}_k|\mathbf{v}_k)} \mathbf{v}_k, \quad i = 2, \ldots, s-1$；可单位化.
- 任取子空间 U 的一个基，可通过该方法得到 U 的一个标准正交基

例 4.36：利用上述方法对习题 4.2 中 2.(1) 子空间 U 的一个基实施正交化方法，得到一个标准正交基.

正交化方法的推论

推论 (4.34)

设 A 是 $n \times s$ 实矩阵，秩为 s. 那么存在 $n \times s$ 实矩阵 B 和 s 阶实方阵 C 使得 $A = BC$，B 的列向量都是单位向量且相互正交，C 是可逆上三角矩阵.

正交化方法的推论

推论 (4.34)

设 A 是 $n \times s$ 实矩阵，秩为 s. 那么存在 $n \times s$ 实矩阵 B 和 s 阶实方阵 C 使得 $A = BC$，B 的列向量都是单位向量且相互正交，C 是可逆上三角矩阵.

例 4.37 对矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 求出矩阵 B 和 C 使得 $A = BC$ 且 B 的列向量都是互相正交的单位向量，C 是上三角方阵.

正交化方法的推论

推论 (4.35)

设 U 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，那么 U 中任何标准正交向量组都可以扩充为该子空间的标准正交基. 特别，$\mathbb{R}^n$ 中任何标准正交向量组都可以扩充为该空间的标准正交基.

正交化技巧的应用

定理 (4.38)

设 U 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $U^\perp$ 是它的正交补，那么

$$\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp, \quad U^{\perp\perp} = U.$$

例 4.39 求正交补的计算可归结为解线性方程组，要点是把定义方程理解为点积.

例 4.40 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中两个向量. 若该两个向量线性无关，则它们张成的子空间的正交补由两者的叉积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 张成.

正交矩阵

- 基变换的几何含义是坐标变换，希望基变换保持向量的长度和两个非零向量的角度
- 考虑标准正交基变到标准正交基（直角坐标系变到直角坐标系）
- 正交基的转换矩阵十分重要
- 这种特殊的转换矩阵有什么特点？

定义 (4.41)

称方阵 A 为正交矩阵，如果它的转置 ${}^tA$ 是其逆矩阵，即

$${}^tAA = E, \quad \text{或等价地}\ A\,{}^tA = E.$$

定理 (4.42)

(1)n 阶方阵 A 是正交矩阵当且仅当它的列向量形成欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.
(2)n 阶方阵 A 是正交矩阵当且仅当它的行向量形成欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.

正交矩阵

- 两个 n 阶正交矩阵的乘积是否为正交矩阵？
- 正交矩阵的逆矩阵是否为正交矩阵？
- 正交矩阵的转置矩阵是否为正交矩阵？

例 4.43 举出常见的正交矩阵的例子

正交矩阵

定理 (4.44)

(1) 欧式空间中两个标准正交基之间的转换矩阵是正交矩阵.
(2) 如果 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基，T 是 n 阶正交矩阵，那么 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n)T$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.

正交矩阵的几何意义？

习题 4.3

1. 设 $X \in \mathbb{R}^n$ 的长度是 6, 向量 $Y \in \mathbb{R}^n$ 有如下性质: 对任意纯量 a, b, 向量 $aX + bY$ 与向量 $4bX - 9aY$ 正交. 求 Y 和 $2X + 3Y$ 的长度.

2. 在 $\mathbb{R}^3$ 中以 $(2, -1, 1)$, $(1, -3, -5)$, $(3, -4, -4)$ 为顶点形成一个三角形. 求这个三角形的三个角的余弦值.

3. 设 X, Y, Z 是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量, 满足以下性质: $\|X\| = \|Z\| = 5$, $\|Y\| = 1$, $\|X - Y + Z\| = \|X + Y + Z\|$. 如果 X 和 Y 的夹角是 $\pi/8$, 求 Y 和 Z 的夹角.

4. 设 X, Y, Z 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量. 如果 X 与 Z 的夹角和 Y 与 Z 的夹角相等, 证明 Z 与向量 $\|Y\|X - \|X\|Y$ 正交.

习题 4.3

5. 令 θ 为 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $(1,1,...,1)$ 和向量 $(1,2,...,n)$ 的夹角. 求当 $n\to\infty$ 时 θ 的极限值.

6. 用向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 和 $(\cos\beta,\sin\beta)$ 的点积推导三角恒等式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

7. 设 U 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, V 是 U 的子空间.

(1) 给出 V 在 U 中的正交补 $V_U^{\perp}$ 的定义.

(2) 证明 $U=V\oplus V_U^{\perp}$.

8. 设 U 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明: U 中两个标准正交基的转换矩阵是正交矩阵.

9. 设 $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,x_1+x_2+2x_3+x_4=0\}$ 是行向量欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的子空间, V 是 U 的由 $(1,0,0,-1)$ 张成的子空间.

(1) 求 V 在 U 中的正交补.

(2) 求 V 在 $\mathbb{R}^4$ 中的正交补.

10. 保持上一题的记号.

(1) 求 U 的一个标准正交基;

(2) 把(1)中的基扩充为为 $\mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基.

(3) 用(2)中的标准正交基构造一个四阶正交矩阵.

11. 设 A_1, A_2, ..., A_{n-1} 是行向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的 $n-1$ 个向量, 它们张成的子空间记作 U. 用例4.40 的思想构造 U 的正交补.

12. 求如下线性方程组

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\
3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0, \\
4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\
3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

的解空间的正交补.

13. 如果实方阵的列向量都是非零的且相互正交的, 证明它是可逆的并求其逆矩阵.

14. 运用正交化方法, 求出 $\mathbb{R}^4$ 中由向量 (1,2,1,3), (4,1,1,1), (3,1,1,0) 张成的线性子空间的一个标准正交基.

15. 把向量 $X_1 = \frac{1}{2}(1,-1,1,1)$ 扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的标准正交基.

16. 设 A_1, A_2, ..., A_k 是方阵. 证明: 分块对角矩阵 $\mathrm{diag}(A_1, A_2, ..., A_n)$ 是正交矩阵当且仅当所有的 A_i 都是正交矩阵.

习题 4.3

17. 运用正交化方法证明: 任意的非退化矩阵 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ 都可以分解成 $A=BC$ 的形式, 其中 B 是正交矩阵, C 是上三角矩阵, 且 $\det A=\pm\det C$.

18. 对如下三个矩阵求出分解 BC, 其中 B 是正交矩阵, C 是上三角矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

19. 证明下面的矩阵是正交矩阵(注意如果 a 是有理数则(1)和(2)中的矩阵在各处的值都是有理数).

(1) $\dfrac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} 2a & 1-a^2 \\ a^2-1 & 2a \end{pmatrix}$, a 是任意实数. (值得提一下的是, 当 $a>1$ 时, $2a$, a^2-1, a^2+1 是一个直角三角形的边长.)

(2) $\dfrac{1}{a^2+a+1}\begin{pmatrix} a+1 & a & a(a+1) \\ -a(a+1) & a+1 & a \\ a & a(a+1) & -a-1 \end{pmatrix}$, a 是任意实数.

(3) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, (4) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ -5 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.