《线性代数》

第四章: 向量空间 $\mathbb{R}^n$

曾鹏程
（zengpch@shanghaitech.edu.cn）

2025.11.5

教学安排

1. 基、坐标、转换矩阵
2. 子空间

一些回忆

- 本节的向量空间 $\mathbb{R}^n$ 是列向量空间
- 什么是向量空间的一个基？
- 标准基？

- 本节的向量空间 $\mathbb{R}^n$ 是列向量空间
- 什么是向量空间的一个基？
- 标准基？

命题 (4.1)

(1) 向量空间 $\mathbb{R}^n$ 每个基都含有 n 个向量.
(2) 向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中任何线性无关的 n 个向量都构成一个基.

判断一组向量是否为基

命题 (4.2)

列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的基与可逆实矩阵之间有自然的对应:
列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的基 $\longleftrightarrow$ 可逆实矩阵

- 通过判断矩阵是否可逆来判定一组向量是否为基
- 方法包含计算矩阵的秩、行列式是否为 0 等
- **例 4.3** 判断一组向量是否为基?

坐标与转换矩阵

- 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，则 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_n\mathbf{a}_n.$$

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为 $\mathbf{x}$ 关于基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 的坐标，该坐标唯一确定

坐标与转换矩阵

- 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，则 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_n\mathbf{a}_n.$$

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为 $\mathbf{x}$ 关于基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 的坐标，该坐标唯一确定
- 同一个向量对不同基有不同的坐标，如何知道不同坐标之间的联系？

坐标与转换矩阵

- 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，则 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_n\mathbf{a}_n.$$

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为 $\mathbf{x}$ 关于基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 的坐标，该坐标唯一确定
- 同一个向量对不同基有不同的坐标，如何知道不同坐标之间的联系？
- 考虑不同基之间的联系

坐标与转换矩阵

- 设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，则 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_n\mathbf{a}_n.$$

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为 $\mathbf{x}$ 关于基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 的坐标，该坐标唯一确定
- 同一个向量对不同基有不同的坐标，如何知道不同坐标之间的联系？
- 考虑不同基之间的联系
- 设 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的另一个基，则有

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)T,$$

T 称为基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 到基 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ 的转换矩阵

转换矩阵

定理 (4.4)

(1) 列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的不同的基之间的转换矩阵是可逆的.
(2) 任何阶可逆方阵都出现在列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的从一个给定的基到另一个基的转换矩阵中.

转换矩阵

定理 (4.4)

(1) 列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的不同的基之间的转换矩阵是可逆的.
(2) 任何阶可逆方阵都出现在列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的从一个给定的基到另一个基的转换矩阵中.

例 4.5 确定基 $\mathbf{a}_1 = [3,5], \mathbf{a}_2 = [-2,6]$ **到基** $\mathbf{b}_1 = [\cos\theta, \sin\theta]$,$\mathbf{b}_2 = [-\sin\theta, \cos\theta]$ **的转换矩阵**

转换矩阵

定理 (4.6)

设向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 和向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ 分别是列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个基，T 为前者到后者的转换矩阵. 记矩阵 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$, 那么

$$B = AT, \quad \text{即} \quad T = A^{-1}B.$$

转换矩阵

定理 (4.6)

设向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 和向量组 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ 分别是列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的两个基， T 为前者到后者的转换矩阵. 记矩阵 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$, 那么

$$B = AT, \quad \text{即} \quad T = A^{-1}B.$$

重新计算例 4.5 中的转换矩阵？

转换矩阵联系一个向量在不同基下的坐标

定理 (4.7)

设列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{u}$ 在基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 下的坐标列向量为 X, 在基 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ 下的坐标列向量为 Y， T 为第一个基到第二个基的转换矩阵，那么
$$Y = T^{-1}X.$$

转换矩阵联系一个向量在不同基下的坐标

定理 (4.7)

设列向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{u}$ 在基 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 下的坐标列向量为 X, 在基 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ 下的坐标列向量为 Y， T 为第一个基到第二个基的转换矩阵， 那么

$$Y = T^{-1}X.$$

例 4.8 向量组 $\mathbf{a}_1 = [2, -3], \mathbf{a}_2 = [1, 5]$ 和向量组 $\mathbf{b}_1 = [4\ 1]$,$\mathbf{b}_2 = [7\ \ -3]$ 均是 $\mathbb{R}^2$ 的基. 求向量 $\mathbf{u} = [6, -5]$ 在这两个基下的坐标.

1. 设 E_1, E_2, E_3 是列向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的标准基.

(1) 证明: 向量组 E_1, E_1+2E_2, $E_1+2E_2+3E_3$ 和向量组 $E_1-E_2+E_3$, E_2-E_3, E_3 都是 $\mathbb{R}^3$ 的基.

(2) 求从基 E_1, E_1+2E_2, $E_1+2E_2+3E_3$ 到基 $E_1-E_2+E_3$, E_2-E_3, E_3 的转换矩阵, 以及从基 $E_1-E_2+E_3$, E_2-E_3, E_3 到基 E_1, E_1+2E_2, $E_1+2E_2+3E_3$ 的转换矩阵.

(3) 假设向量 X 在基 E_1, E_1+2E_2, $E_1+2E_2+3E_3$ 下的坐标列向量是 $[2,-1,5]$, 求 X 在基 $E_1-E_2+E_3$, E_2-E_3, E_3 下的坐标列向量.

2. 叙述和证明命题4.2的行向量空间的版本.

3. 叙述和证明定理4.6的行向量空间的版本.

4. 叙述和证明定理4.7的行向量空间的版本.

5. 设 $\mathbf{a}_1=(3,5)$, $\mathbf{a}_2=(-2,6)$, $\mathbf{b}_1=(\cos\theta,\sin\theta)$, $\mathbf{b}_2=(-\sin\theta,\cos\theta)$. 利用习题1很容易知道向量组 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ 和向量组 $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 的基. 求从基 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ 到基 $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ 的转换矩阵 T.

6. 向量组 $\mathbf{a}_1=(5,-2)$, $\mathbf{a}_2=(3,1)$ 和向量组 $\mathbf{b}_1=(3,-2)$, $\mathbf{b}_2=(-3,4)$ 均是行向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的基. 求向量 $\mathbf{u}=(7,-5)$ 在这两个基下的坐标行向量.

回顾线性子空间

- 本节的向量空间 $\mathbb{R}^n$ 可以是行或列向量空间
- 线性子空间的定义？

回顾线性子空间

- 本节的向量空间 $\mathbb{R}^n$ 可以是行或列向量空间
- 线性子空间的定义？
- 往后将线性子空间简称子空间

回顾线性子空间

- 本节的向量空间 $\mathbb{R}^n$ 可以是行或列向量空间
- 线性子空间的定义？
- 往后将线性子空间简称子空间

命题 (4.9)

设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 $V \subseteq U$，那么 $\dim V \leq \dim U$，等号成立当且仅当 $U = V$.

回顾线性子空间

命题 (4.10)

设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，那么 $U \cap V$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

命题 (4.10)

设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，那么 $U \cap V$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

例 4.11 三维空间 $\mathbb{R}^3$ 的 xy 平面和 yz 平面都是线性子空间，它们的交是 y 轴，也是线性子空间.

回顾线性子空间

命题 (4.10)

设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，那么 $U \cap V$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

例 4.11 三维空间 $\mathbb{R}^3$ 的 xy 平面和 yz 平面都是线性子空间，它们的交是 y 轴，也是线性子空间.

练习一: 两个子空间的并集一定是子空间吗？

和

定义 (4.12)

所有形如 $u+v$, $u \in U$, $v \in V$ 的向量形成的集合称为子空间 U 和 V 的和，记作 $U+V$.

和

定义 (4.12)

所有形如 $u+v$, $u\in U$, $v\in V$ 的向量形成的集合称为子空间 U 和 V 的和，记作 $U+V$.

- 类似地，可以定义有限个子空间的和：$U_1+\cdots+U_k$
- $U_1+\cdots+U_k$ 是含诸 U_i 的最小子空间

和

定义 (4.12)

所有形如 $u+v,\ u\in U,\ v\in V$ 的向量形成的集合称为子空间 U 和 V 的和，记作 $U+V$.

- 类似地，可以定义有限个子空间的和：$U_1+\cdots+U_k$
- $U_1+\cdots+U_k$ 是含诸 U_i 的最小子空间
- **例 4.13** 讨论 $\mathbb{R}^3$ 中的 x 轴、y 轴、z 轴构造的和.

定义 (4.12)

所有形如 $u+v,\ u\in U,\ v\in V$ 的向量形成的集合称为子空间 U 和 V 的和，记作 $U+V$.

- 类似地，可以定义有限个子空间的和：$U_1+\cdots+U_k$
- $U_1+\cdots+U_k$ 是含诸 U_i 的最小子空间
- **例 4.13** 讨论 $\mathbb{R}^3$ 中的 x 轴、y 轴、z 轴构造的和.

定理 (4.14)

设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 那么

$$dim\,(U+V)=dim\,U+dim\,V-dim\,U\cap V.$$

子空间的线性无关

定义 (4.15)

如果等式 $u+v=0$, $u\in U$, $v\in V$ 蕴含 $u=v=0$, 则称子空间 U, V 线性无关. 否则, 称这些子空间线性相关.

子空间的线性无关

定义 (4.15)

如果等式 $u+v=0$, $u\in U$, $v\in V$ 蕴含 $u=v=0$, 则称子空间 U, V 线性无关. 否则, 称这些子空间线性相关.

定理 (4.16)

两个子空间 U 和 V 线性无关当且仅当 $U\cap V=\mathbf{0}$.

直和与补空间

- 线性无关的子空间 U, V 的和称为它们的直和，记作 $U \oplus V$
- $\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V$

直和与补空间

- 线性无关的子空间 U, V 的和称为它们的直和，记作 $U \oplus V$
- $\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V$

定理 (4.17)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的 s 维子空间，那么存在 $\mathbb{R}^n$ 的 $n-s$ 维子空间 V 使得 $\mathbb{R}^n = U \oplus V$. U 和 V 称为互补的子空间.

直和与补空间

- 线性无关的子空间 U, V 的和称为它们的直和，记作 $U \oplus V$
- $\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V$

定理 (4.17)

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的 s 维子空间，那么存在 $\mathbb{R}^n$ 的 $n-s$ 维子空间 V 使得 $\mathbb{R}^n = U \oplus V$. U 和 V 称为互补的子空间.

例 4.18 $\mathbb{R}^3$ 是 x 轴和 yz 平面的直和.

定义 (4.19)

如果等式 $u_1 + \cdots + u_k = 0$, $u_i \in U_i$ 蕴含 $u_i = \cdots = u_k = 0$, 则称这些子空间线性无关. 否则, 称这些子空间线性相关.

定义 (4.19)

如果等式 $u_1 + \cdots + u_k = 0$, $u_i \in U_i$ 蕴含 $u_i = \cdots = u_k = 0$, 则称这些子空间线性无关. 否则, 称这些子空间线性相关.

例 4.20 举例说明存在三个线性相关的子空间，其中任意两个的交集都是零向量空间

多个子空间的线性无关与直和

定义 (4.19)

如果等式 $u_1 + \cdots + u_k = 0$, $u_i \in U_i$ 蕴含 $u_i = \cdots = u_k = 0$, 则称这些子空间线性无关. 否则, 称这些子空间线性相关.

例 4.20 举例说明存在三个线性相关的子空间，其中任意两个的交集都是零向量空间

定理 (4.21)

如果子空间 $U_1, \cdots, U_k$ 线性无关，则

$$dim\,(U_1 + \cdots + U_k) = dim\,U_1 + \cdots + dim\,U_k$$

关于子空间中的基的坐标

- 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，任取 V 的一个基 $v_1, \cdots, v_r$, 则 V 中的向量 u 可以写成

$$u = (v_1, \cdots, v_r)[x_1, \cdots, x_r],$$

$x_1, \cdots, x_r$ 称为 u 关于基 $v_1, \cdots, v_r$ 的坐标.

- 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，任取 V 的一个基 $v_1, \cdots, v_r$, 则 V 中的向量 u 可以写成
$$u = (v_1, \cdots, v_r)[x_1, \cdots, x_r],$$
$x_1, \cdots, x_r$ 称为 u 关于基 $v_1, \cdots, v_r$ 的坐标.
- **例 4.22** 命 $V = \{(x_1, x_2, x_3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0)\}$, 给定其一个基: $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 1, -1)$. 求 $u = (2, -3, 1) \in V$ 关于这个基的坐标列向量.

习题 4.2

1. 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, u_1, ..., u_r 和 v_1, ..., v_r 是 V 的两个基.

(1) 定义从基 (u_i) 到基 (v_i) 的转换矩阵;

(2) 证明这个转换矩阵是可逆的;

(3) 设向量 $u \in V$ 在基 (u_i) 下和在基 (v_i) 的坐标列向量分别是 X 和 Y. 利用基之间的转换矩阵给出 X 和 Y 之间的联系.

(提示: 参考上一节的有关讨论和结论以及证明.)

2. 命 $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\}$. 它是行向量空间 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

(1) 证明 $u_1 = (2, -1, 0, 0)$, $u_2 = (3, 0, -1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0, 1)$ 是 U 的一个基.

(2) 证明 $v_1 = (1, 1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, 3)$, $v_3 = (1, 1, 0, 4)$ 是 U 的一个基.

(3) 求从基 u_1, u_2, u_3 到基 v_1, v_2, v_3 的转换矩阵.

(4) 求 $w = (1, 1, 1, 6) \in U$ 在基 u_1, u_2, u_3 和基 v_1, v_2, v_3 下的坐标列向量.

3. 求下列向量张成的线性子空间的一个基和维数: (1,1,1,1,0), $(1, 1, -1, -1, \cdot$ $(2, 2, 0, 0, -1)$, $(1, 1, 5, 5, 2)$, $(1, -1, -1, 0, 0)$.

4. 如果 U_1, U_2, U_3 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明

$$\begin{aligned}\dim(U_1+U_2+U_3) \leqslant\ & \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 \\ & - \dim U_1\cap U_2 - \dim U_1\cap U_3 - \dim U_2\cap U_3 + \dim U_1\cap U_2\cap U_3.\end{aligned}$$

举例说明上式左端比右端小的情况可以发生.

5. 设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $\dim(U+V) = 1 + \dim U\cap V$. 证明: $U+V$ 是这两个子空间中的一个, $U\cap V$ 是这两个子空间中的另一个.

6. 证明: 子空间 U_1, U_2, ..., U_k 线性无关当且仅当

$$(U_1+U_2+\cdots+U_{i-1})\cap U_i = 0, \qquad 1 < i \leqslant k.$$

7. 设 U, V, W 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 下列等式是否成立?

$$U\cap(V+W) = (U\cap V)+(U\cap W).$$

8. 证明直和不满足消去律, 即等式 $U\oplus V_1 = U\oplus V_2$ 并不意味着 $V_1 = V_2$.

习题 4.2

9. 找出子空间 $\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ 和子空间 $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ 的和与交的一个基:

(1) $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 3, 3)$,

$v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (2, 3, -1)$, $v_3 = (1, 1, -3)$;

(2) $u_1 = (-1, 6, 4, 7, -2)$, $u_2 = (-2, 3, 0, 5, -2)$, $u_3 = (-3, 6, 5, 6, -5)$,

$v_1 = (1, 1, 2, 1, -1)$, $v_2 = (0, -2, 0, -1, -5)$, $v_3 = (2, 0, 2, 1, -3)$.

10. 设 $u = (1, 1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1, 1)$, $w = (1, 1, 0, 0)$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的.

(1) 求纯量 a, b, c 使得 $au + bv + cw = (1, 5, 3, 4)$.

(2) 证明不存在纯量 a, b, c 使得 $au + bv + cw = (1, 2, 3, 4)$.

11. 证明 $[9, -4, -4, 7]$ 在 $[8, -4, -3, 9]$, $[-4, 3, -2, -8]$, $[-7, 6, -5, -18]$ 张成的子空间中.

12. 判断 $[-4, -8, 6, -5]$ 是否在 $[3, 8, -5, 2]$, $[-5, 7, -8, -2]$, $[-9, 6, 3, -9]$ 张成的子空间中.

习题 4.2

Quiz 3:

1. (10 points) 姓名: 学号:
2. (5 points) 利用初等变换和行列式两种方法求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 的逆.
3. (5 points) 已知 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 3 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -3 & 4x & -2 \\ 2x+1 & 2 & 2x+1 & 1 \\ 2x & -4 & 4x & -2 \end{vmatrix}$,
   $g(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2x+1 & 3 \\ 5x+1 & -2 & 4x & -3 \\ 0 & 1 & 2x+1 & 2 \\ 2x & -2 & 4x & -4 \end{vmatrix}$, 求方程 $f(x) = g(x)$ 的根.