hw_5(1)

习题3.1

1.求出给定顶点的平行四边形的面积：

2.$(0,0)$, $(-2,3)$, $(4,-5)$, $(2,-2)$

解： $S=\left|\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & -5\end{vmatrix}\right|=2$

4.$(0,-2)$, $(5,-2)$, $(-3,1)$, $(2,1)$

解： $S=\begin{vmatrix}5 & 0\\ -3 & 3\end{vmatrix}=15$

习题3.2

1. 求一个在原点且相邻顶点是 $(2,3,1)$, $(-1,0,4)$, $(3,-2,5)$ 的平行六面体的体积.

解： $V=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 4\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix}=69$

2.

(1) 说明为什么下面两式都是 xy 平面上过两点 (a_1,b_1), (a_2,b_2) 的直线的方程.

$\begin{vmatrix}x-a_1 & y-b_1\\ a_2-a_1 & b_2-b_1\end{vmatrix}=0,$

$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ a_1 & b_1 & 1\\ a_2 & b_2 & 1\end{vmatrix}=0$

解： ① $(x-a_1)(b_2-b_1)=(a_2-a_1)(y-b_1)$ 为直线两点式，是该直线方程

② $\begin{vmatrix}x & y & 1\\ a_1 & b_1 & 1\\ a_2 & b_2 & 1\end{vmatrix}=0$

$x(b_1-b_2)-y(a_1-a_2)+(a_1b_2-a_2b_1)=0$

$(x-a_1)(b_2-b_1)=(a_2-a_1)(y-b_1)$

同理

(2) 对 $\mathbb{R}^3$ 中过三个不同点的平面叙述并证明相应的结论.

解: 对 $\mathbb{R}^3$ 中过三个不同点的平面唯一

证明：设三个点 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2) 和 (x_3, y_3, z_3)，设平面方程
$Ax + By + Cz + D = 0$
矩阵
$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}$$
三点不共线，则
$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 与 $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ 线性无关

故秩为 3，只有一组解，该平面唯一

(3) 对 xy 平面上不共线的三个点的圆叙述并证明相应的结论.

解: 对 xy 平面上不共线的三个点的圆唯一

证明：设三个点 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2) 和 (x_3, y_3, z_3)，圆方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & -x_1^2 - y_1^2 \\ x_2 & y_2 & 1 & -x_2^2 - y_2^2 \\ x_3 & y_3 & 1 & -x_3^2 - y_3^2 \end{pmatrix}$$
同理，秩为3，只有唯一解

3. 从定义3.6出发证明行列式函数 $\det$ 满足性质(D1), (D2'), (D3), 即：是行向量的多重线性函数，交换两行的位置改变行列式值的符号，单位矩阵的行列式值为 1.

解: (D1)

$\det A = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{e(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$

$\det[\ldots, ar_i + br_j, \ldots] = a \det[\ldots, r_i, \ldots] + b \det[\ldots, r_j, \ldots]$

故 (D1) 成立

(D2)

$\det A = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(n)n}$

由于 i, j 项互换，逆序数改变 $e(\sigma') = e(\sigma) \pm 1$，$(-1)^{e(\sigma')} = -(-1)^{e(\sigma)}$ 导致符号改变，
$\det A' = -\det A$

(D3)

$\det E = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{e(\sigma)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$

$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = 1$，其他项为 0，故 $\det E = 1$

4. 求出四阶行列式 $\det(a_{ij})$ 展开式中包含 a_{23} 且带正号的项.

解： 4.

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

包含 a_{23} 且带正号的项:

$(1,3,4,2)$: $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$

$(2,3,1,4)$: $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$

$(4,3,2,1)$: $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

5. n 阶行列式展开式中主对角线元素的乘积有怎样的正负号?

解： 主对角线元素乘积 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

$e(\sigma) = 0$

故符号为正