hw_15(2)

习题6.6

5.

(1) 验证矩阵

$$A=\begin{pmatrix}6&2&-2\\-2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6&2&2\\-2&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

有相同的特征多项式；

解:

$$\begin{aligned}\chi_A(t)&=|tE-A|\\&=(t-2)^2(t-4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_B(t)&=|tE-B|\\&=(t-2)^2(t-4)\end{aligned}$$

故相同

(2) 求出它们的极小多项式；

解:
$(A-2E)(A-4E)=0$
故 $m_A(t)=(t-2)(t-4)$

$(B-2E)(B-4E)\neq 0$
故 $m_B(t)=(t-2)(t-4)^2$

(3) 求出它们的约当标准形。

解:

$$J_A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$J_B=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

6. 设 A 是 n 阶复方阵。证明：A 是幂零的当且仅当 $\mathrm{tr}(A^k) = 0$，$1 \le k \le n$。

解：

先证必要性
A为幂零，$t_1 = \cdots = t_n = 0$，$\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(J(A)^k) = 0$

再证充分性
$\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(J(A)^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_n^k = 0$
故 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
故A为幂零

7. 如果线性算子 $\mathcal{A}$ 的约当标准形只有一个约当块，确定 $\mathcal{A}$ 的所有不变子空间。

解：

令

$$J_A = \begin{pmatrix} t & 1 & & \\ & t & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & t \end{pmatrix}$$

设对应的一组约当基为 $e_1, \cdots, e_n$

$$(A - tE)e_1 = 0$$

$$(A - tE)e_k = e_{k-1}$$

令 $B = A - tE$

$$V_0 = \{0\}, \quad V_k = \ker B^k, \quad V_n = V$$

故 A 的所有不变子空间为 $V_0, V_1, \cdots, V_n$

14. 如果线性算子 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1, \ldots, e_n$ 下的矩阵是

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \quad (2)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求出 $\mathcal{A}$ 的一个约当基和 $\mathcal{A}$ 在约当基下的矩阵。

解：

(1)

$$\chi(t) = (t-2)(t^2 - 4t - 14)$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 2 + 3\sqrt{3}, \quad t_3 = 2 - 3\sqrt{3}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 3\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$t_1 = 2$, $(A - 2E)X = 0$

$$X_1 = [-2, 1, 0]$$

$t_2 = 2 + 3i$,

$$X_2 = \left[\frac{1}{3} + \sqrt{3}, \frac{4}{3}, 1\right]$$

$t_3 = 2 - 3i$,

$$X_3 = \left[\frac{1}{3} - \sqrt{3}, \frac{4}{3}, 1\right]$$

(2)

$$\chi(t) = (t-1)^4, \quad t = 1$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - E)v_2 = v_1, \quad (A - E)v_4 = v_3$$

$$v_2 = [0, 0, 0, 1], \quad v_1 = [1, 1, 0, 0]$$

$$v_4 = [0, 1, 1, 0], \quad v_3 = [0, 0, 1, 1]$$