



普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、
强场激光物理、飞秒激光成丝。

<https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm>



例 试求半径为 R ，质量为 m 的均质薄圆盘，对过盘心且垂直于盘面的轴的转动惯量。

解 薄圆盘可以看成是许多半径不同的同心圆环的集合。

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}$$

薄圆盘的质量面密度

任取一半径为 r ，宽度 dr 的圆环。

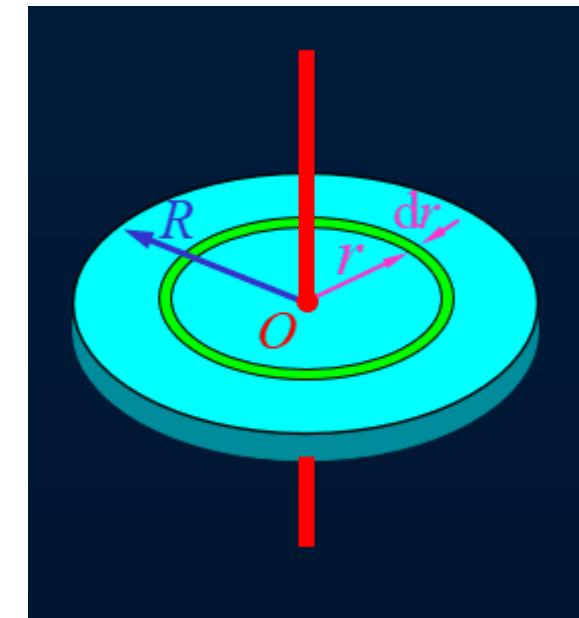
圆环的质量为： $dm = \sigma \cdot 2\pi r dr$

圆环对过盘心且垂直于盘面的轴的转动惯量为

$$dJ = r^2 dm = r^2 \cdot \sigma 2\pi r dr = 2\pi \sigma r^3 dr$$

则整个圆盘对该轴的转动惯量为

$$J = \int dJ = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{m}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$





常见刚体的转动惯量

刚体 (质量为 m)	转轴位置	转动惯量
细棒 (棒长为 l)	通过中心与棒垂直	$J_C = \frac{1}{12}ml^2$
	通过端点与棒垂直	$J_D = \frac{1}{3}ml^2$
细圆环 (半径为 R)	通过中心与环面垂直	$J_C = mR^2$
	直径	$J_x = J_y = \frac{1}{2}mR^2$
薄圆盘 (半径为 R)	通过中心与盘面垂直	$J_C = \frac{1}{2}mR^2$
	直径	$J_x = J_y = \frac{1}{4}mR^2$
空心圆柱 (内外半径为 R_1 和 R_2)	对称轴	$J_C = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$
球壳 (半径为 R)	中心轴	$J_C = \frac{2}{3}mR^2$
球体 (半径为 R)	中心轴	$J_C = \frac{2}{5}mR^2$

例 滑块A、重物B的质量分别为 m_1 和 m_2 ，用一轻绳相连，绳子跨过质量为 m_3 、半径为 r 的定滑轮C（可视为均质圆盘）。滑块A与水平桌面间的滑动摩擦系数为 μ_k ，滑轮与轴之间的摩擦可忽略不计，不可伸缩的轻绳与滑轮之间无相对滑动。

求若重物B下降时，滑块A的加速度 a 及绳中的张力。

解 受力分析，取如图所示的正方向

• 力矩分析

$$F_{T_1} \text{ 的力矩: } M_1 = -F_{T_1} r$$

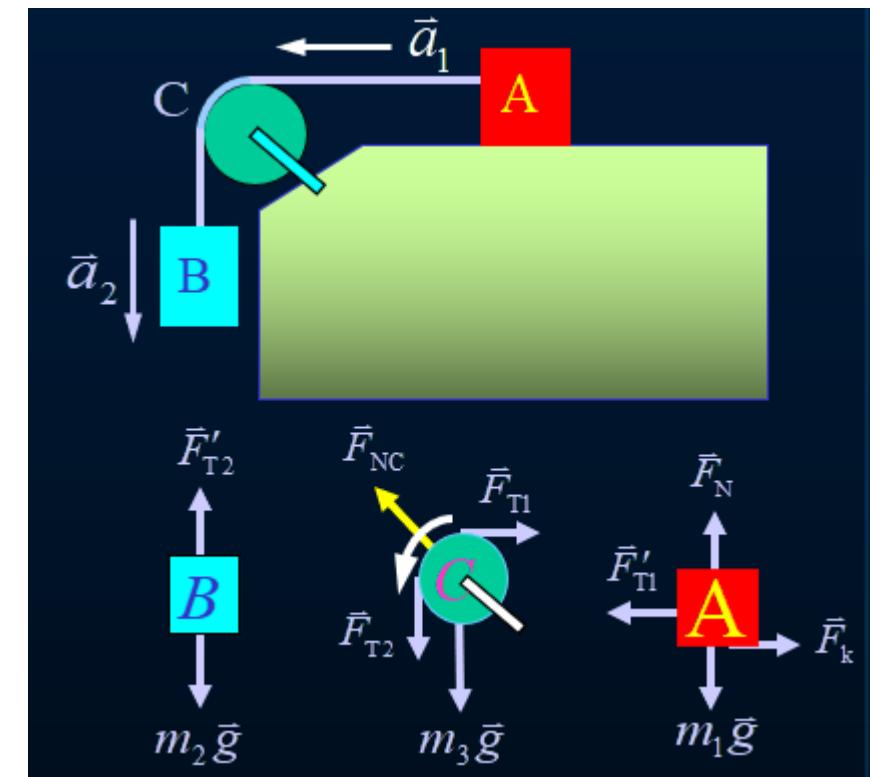
$$F_{T_2} \text{ 的力矩: } M_2 = F_{T_2} r$$

• 列动力学方程

$$\text{对滑块A: } F'_{T_1} - F_k = m_1 a_1$$

$$F_N - m_1 g = 0$$

$$F_k = \mu_k F_N$$



对重物B

$$m_2 g - F'_{T2} = m_2 a_2$$

对滑轮C

$$M = F_{T2} r - F_{T1} r = J\beta$$

$$J = \frac{1}{2} m_3 r^2 \text{ (均质圆盘)}$$

且 $a_1 = a_2 = a = \beta r$

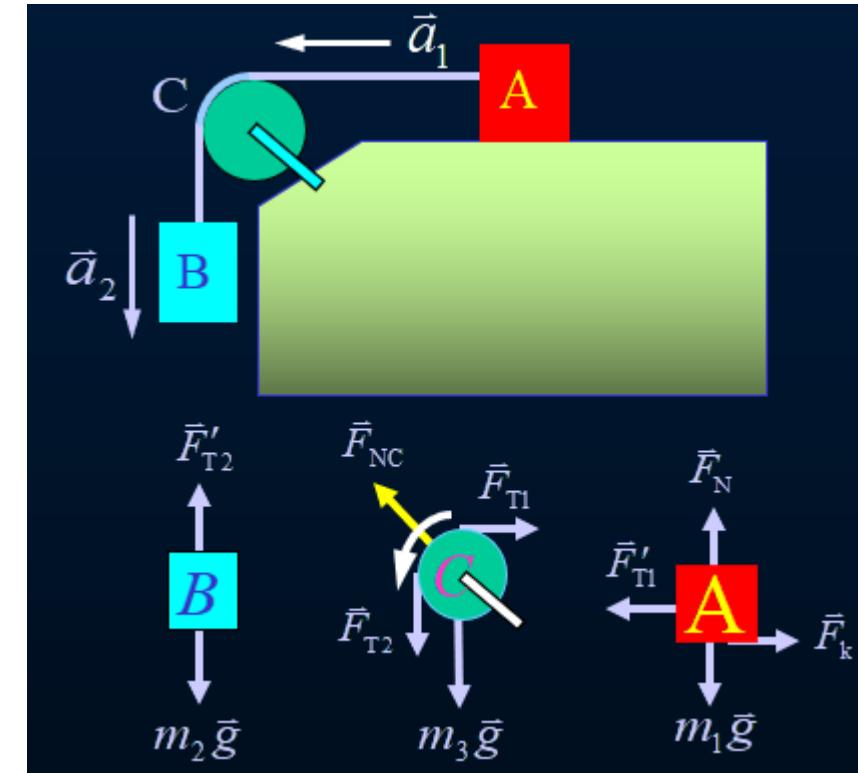
$$F_{T1} = F'_{T1}, \quad F_{T2} = F'_{T2}$$

求解以上方程，得

$$a = \frac{m_2 - \mu_k m_1}{m_1 + m_2 + m_3/2} g$$

$$F_{T1} = \frac{(\mu_k + 1)m_2 + \mu_k m_3/2}{m_1 + m_2 + m_3/2} m_1 g,$$

$$F_{T2} = \frac{(\mu_k + 1)m_1 + m_3/2}{m_1 + m_2 + m_3/2} m_2 g$$



例如图，一钟摆由长度为 l ，质量为 m_1 的均质细杆和固定在其一端的质量为 m_2 的摆球（可以看作质点）构成。钟摆可绕过杆另一端的固定轴无摩擦地摆动，开始时把它放置于水平位置，并处于静止状态，然后让它自由下落。

求放手后钟摆摆到 θ 角位置时的角加速度 β 和角速度 ω 。取垂直纸面向外为正方向

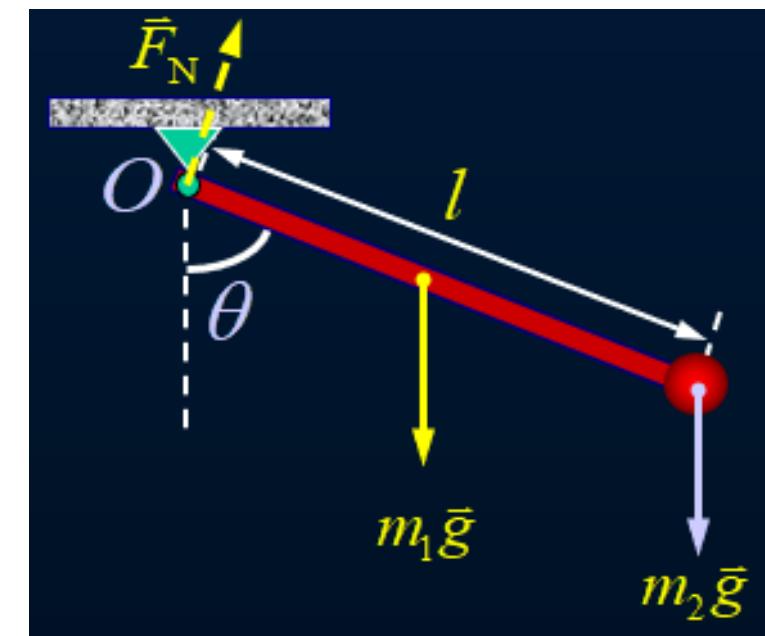
解 受力分析如图

钟摆所受的合外力矩（重力的力矩）

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 \\ &= -m_1 g \frac{l}{2} \sin\theta - m_2 g l \sin\theta \end{aligned}$$

钟摆系统的总转动惯量

$$J = J_1 + J_2 = \frac{1}{3}m_1 l^2 + m_2 l^2$$



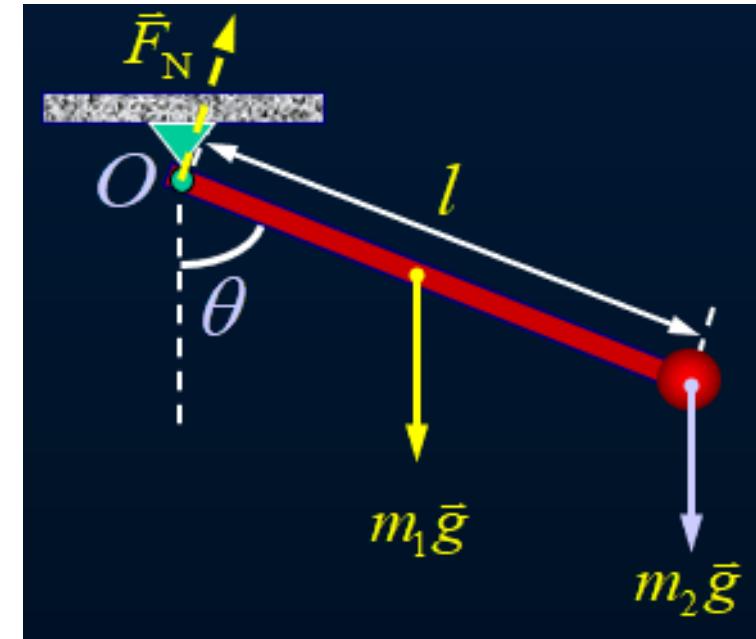
由刚体定轴转动定律，有

$$-m_1g\frac{l}{2}\sin\theta - m_2gl\sin\theta = (\frac{1}{3}m_1l^2 + m_2l^2)\beta$$

$$\beta = -\frac{3(m_1 + 2m_2)g\sin\theta}{2(m_1 + 3m_2)l}$$

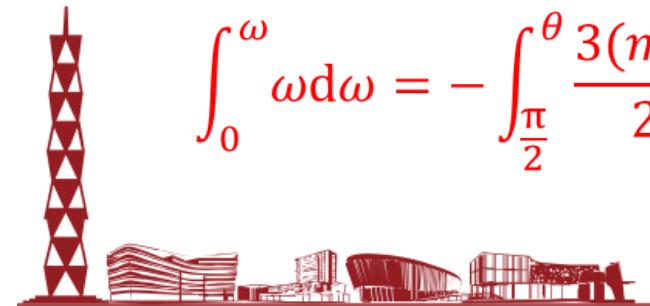
而 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

$$\beta = -\frac{3(m_1 + 2m_2)g\sin\theta}{2(m_1 + 3m_2)l}$$



$$\int_0^\omega \omega d\omega = - \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta \frac{3(m_1 + 2m_2)g\sin\theta}{2(m_1 + 3m_2)l} d\theta$$

$$\omega = -\sqrt{\frac{3(m_1 + 2m_2)g\cos\theta}{(m_1 + 3m_2)l}}$$





主要内容：

1. 刚体绕定轴转动的转动动能
2. 力矩的功
3. 刚体绕定轴转动的动能定理
4. 刚体的重力势能
5. 含有刚体的力学系统的机械能守恒定律



在刚体上任取一质点 P_i

质点 P_i 的动能为

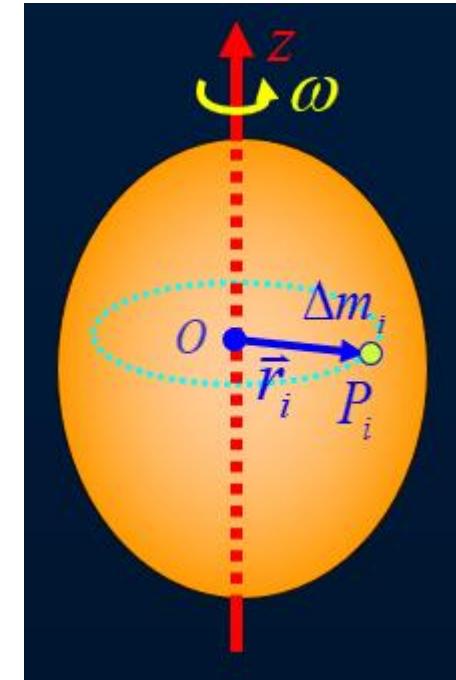
$$E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

对刚体上所有质点的动能求和

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

(刚体绕定轴转动的转动动能)



讨论

- 刚体绕定轴转动的动能就是组成刚体所有质点的动能之和；
- 与质点的动能相比较，可看出转动惯量 J 的地位对应于质点的质量 m ，说明 J 是刚体绕定轴转动惯性大小的量度。

刚体在合外力作用下绕定轴转动而发生角位移时，则力矩对刚体作了功。

角位移 $d\theta$, 元路程 ds , 元位移 $d\vec{r}$
力 \vec{F} 在元路程 ds 上的元功

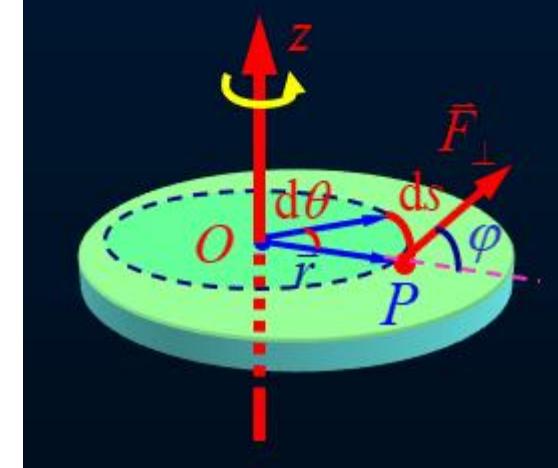
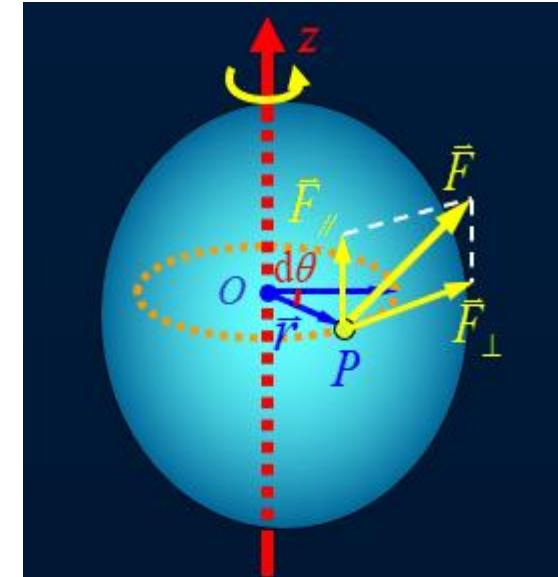
$$dA = \vec{F}_\perp \cdot d\vec{r} = F_\perp \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) ds$$

$$= F_\perp r \sin \phi d\theta \quad \leftarrow \quad M = F_\perp r \sin \phi$$

$$dA = M d\theta$$

- 力矩的元功：力矩和元角位移的乘积
- 刚体从 θ_1 转到 θ_2 的过程中，力矩对刚体所作的功

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$



➤ 讨论

- 力矩所作的功实质上就是力所作的功在刚体转动情况下的表现形式。

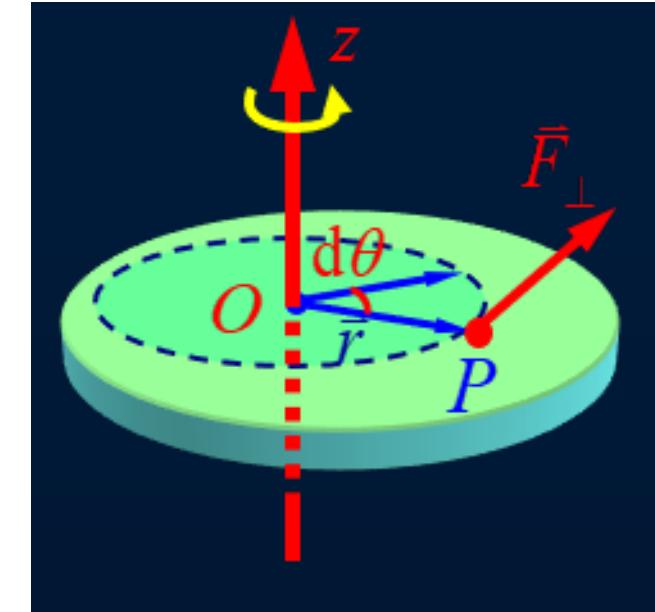
- 力矩的功表达式中的 $M = \sum_i M_i$
即 M 为作用在刚体上各外力的合外力矩。

- 力矩的功的正负

当力矩与角速度同号(或同方向)时，力矩的功为正值；当力矩与角速度异号(或反方向)时，力矩的功为负值。

- 力矩的功率

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{Md\theta}{dt} = M\omega$$



转动定律 $M = J\beta$

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = J\omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

设在合外力矩 M 的作用下

$$dA = M d\theta = J\omega d\omega$$

$$dA = d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) \quad (\text{刚体绕定轴转动动能定理的微分形式})$$

当绕定轴转动的刚体在外力作用下，角速度从 t_1 时刻的 ω_1 改变为 t_2 时刻的 ω_2 时，合外力矩对刚体所作的功为

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$$

$$A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 \quad (\text{刚体绕定轴转动的动能定理})$$



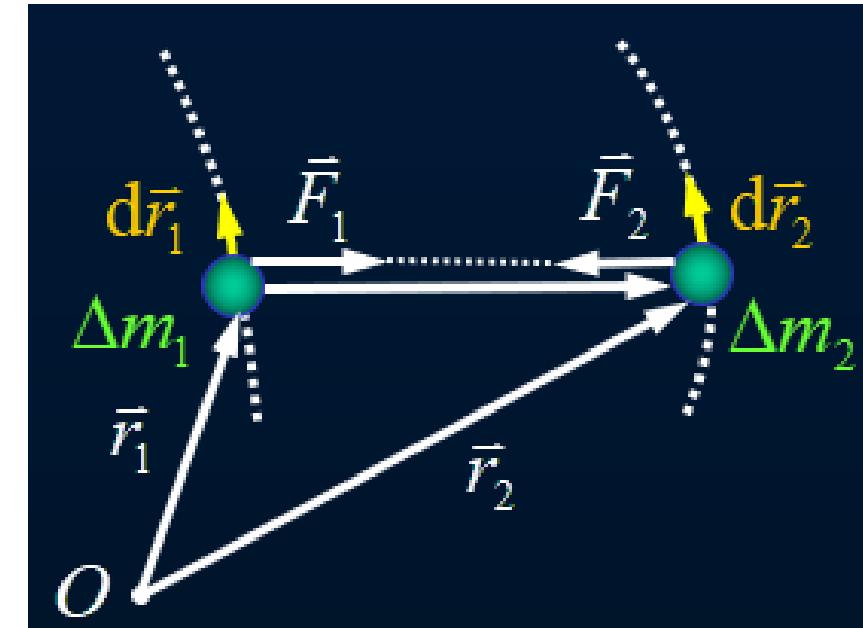
合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体始、末两个状态转动动能的增量。

讨论

- 刚体中一对内力所作功的代数和为

$$\begin{aligned} dA_{\text{内}} &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 \\ &= -\vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 \\ &= \vec{F}_2 \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) \\ &= \vec{F}_2 \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

内力的功不影响刚体的转动动能。

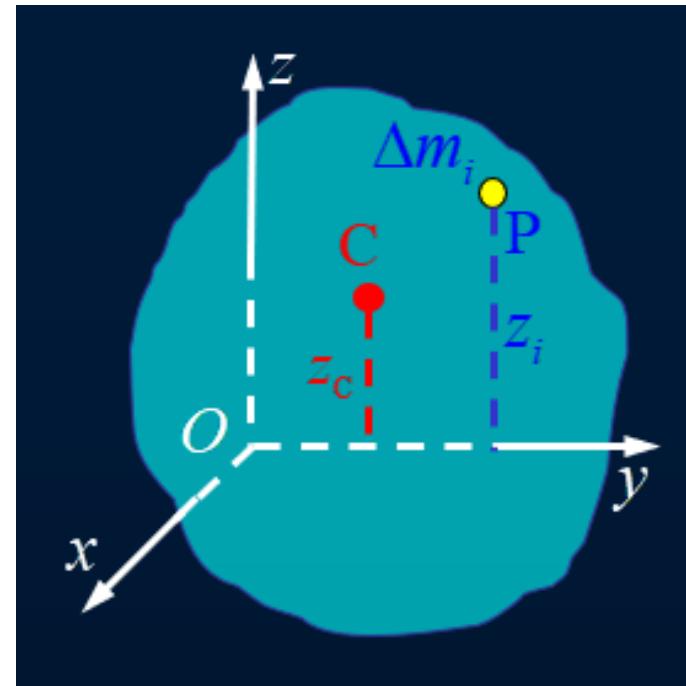


以 xOy 平面为重力势能零参考面

$$E_{p_i} = \Delta m_i g z_i$$

对刚体中所有质点的势能求和

$$\begin{aligned} E_p &= \sum \Delta m_i g z_i = g \sum \Delta m_i z_i \\ &= (mg) \frac{\sum \Delta m_i z_i}{m} \\ &= mg z_C \end{aligned}$$



若以 h_C 表示质心到零势能面的高度，则刚体的重力势能为

$$E_p = mgh_C$$

➤ 结论：刚体重力势能与其质量全部集中在质心上的质点具有的重力势能相同。





当 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = 0$ 时，有

$$E = E_k + E_p = \text{恒量}$$

(系统的机械能守恒定律)

对含有刚体的力学系统，若在运动过程中，只有保守内力作功，而外力和非保守内力都不作功，或作功的总和始终为零，则该系统的机械能守恒。

力学系统的机械能应包括

- 质点的动能、重力势能，弹性势能；
- 平动刚体的平动动能、重力势能；
- 定轴转动刚体的转动动能、重力势能，即

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_C$$



例如图，一质量为 m ，长度为 l 的均质细杆，可绕通过其一端 O 且与杆垂直的光滑水平轴转动。若将此杆在水平位置时由静止释放。

求当杆转到与水平方向成角 $\theta = \pi/6$ 时的角速度。

解 本题可以有几种不同的解法。

(1) 应用刚体绕定轴转动定律求解。

根据转动定律，有

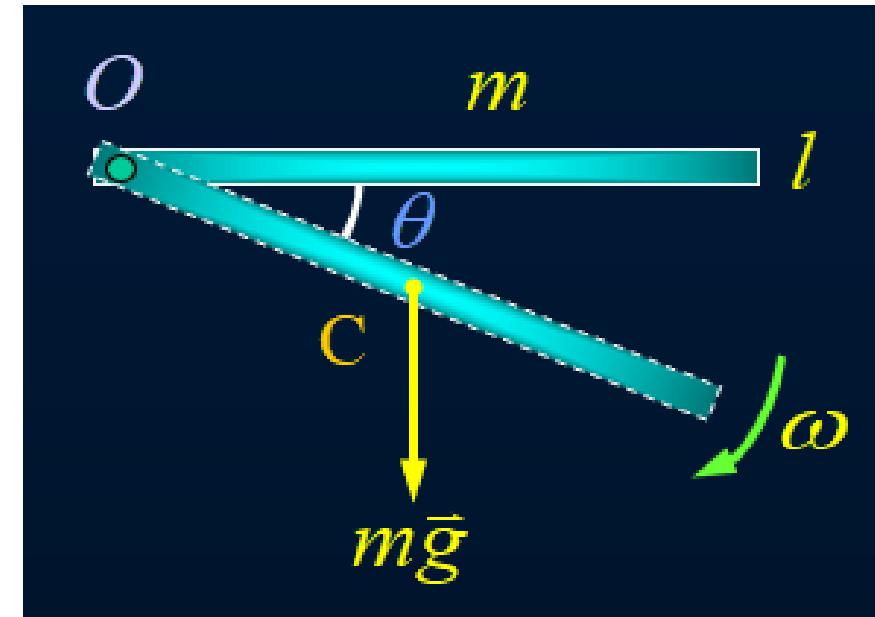
$$mg \frac{l}{2} \cos\theta = (\frac{1}{3}ml^2)\beta$$

$$\frac{g}{2} \cos\theta = \frac{l}{3} \frac{d\omega}{dt}$$

(式中 ω 、 θ 、 t 均为变量)

变量代换

$$\frac{g}{2} \cos\theta = \frac{l}{3} \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{3} \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$



分离变量后两边积分，有

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \frac{3g}{2l} \int_0^\theta \cos\theta d\theta$$

由此得 $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin\theta}$

即当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时 $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$

(2) 应用刚体绕定轴转动的动能定理求解

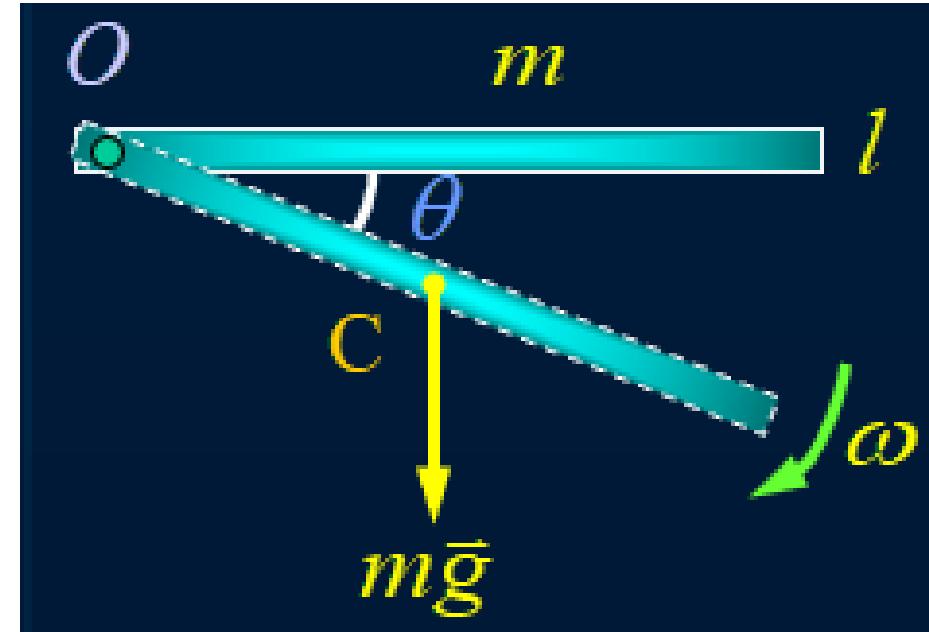
只有重力矩在作功，根据动能定理，有

$$A = \int_0^\theta mg \frac{l}{2} \cos\theta d\theta = \frac{1}{2} J \omega^2 - 0$$

$$mg \frac{l}{2} \sin\theta = \frac{1}{6} ml^2 \omega^2$$

由此得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin\theta}$$



(3) 应用系统机械能守恒定律求解

摩擦力不计，只有重力作功，故系统机械能守恒。

取细杆的水平位置为重力势能零点

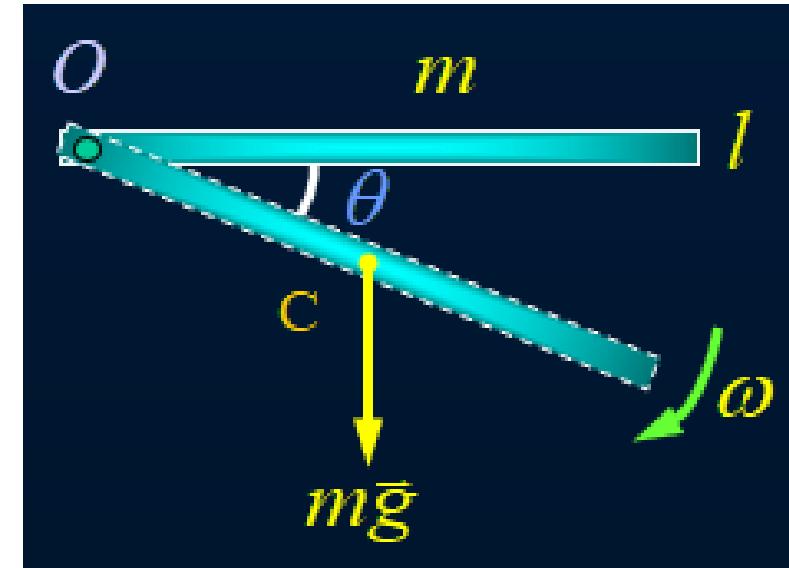
则有

$$\frac{1}{2}J\omega^2 - mg \frac{l}{2} \sin\theta = 0$$

由此解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin \theta}$$

即当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时 $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$





主要内容：

1. 刚体绕定轴转动的角动量定理
2. 角动量守恒定律
3. 角动量守恒定律在工程技术上的应用



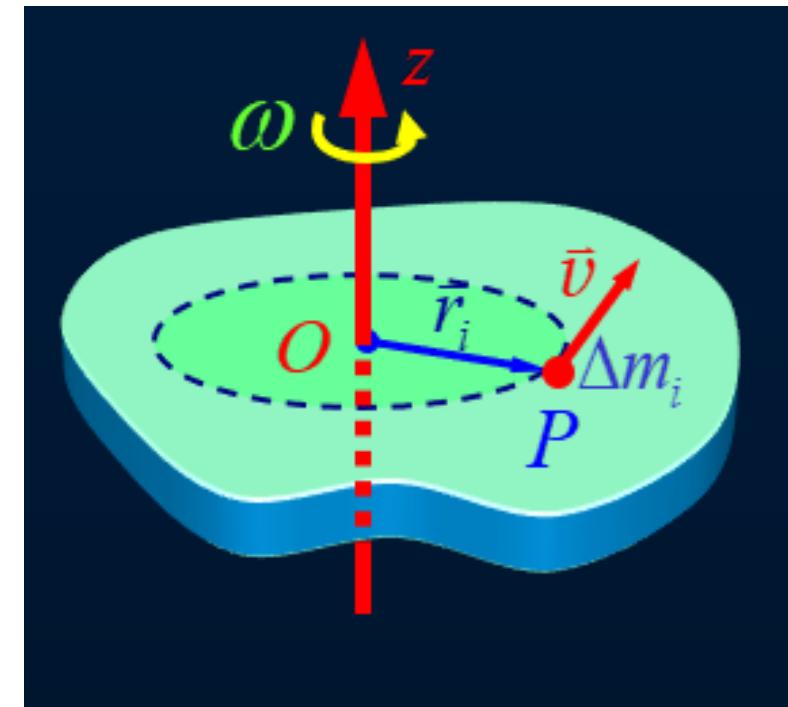
- ◆ 刚体绕定轴转动的角动量
在刚体上任取一质点P
质点P对z轴的角动量为

$$L_i = \Delta m_i v_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$\begin{aligned} L &= \sum_i L_i = \sum_i \Delta m_i v_i r_i \\ &= \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega \end{aligned}$$

$$L = J\omega$$

(刚体绕定轴转动的角动量)



- 刚体的角动量是描述刚体绕定轴转动状态的物理量；
- 角动量 $L=J\omega$ 与质点动量 $p=m v$ 相对应。



◆ 刚体绕定轴转动的角动量定理

将刚体的角动量对时间求导

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega)$$

刚体对确定轴的转动惯量不变，则

$$\frac{dL}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} = J\beta$$

$$M = \frac{d}{dt}(J\omega)$$

(刚体定轴转动的角动量定理)

作用在绕定轴转动刚体上的合外力矩等于刚体对该轴的角动量对时间的导数。

➤ 说明：可以证明，此式也适用于在物体转动过程中， J 发生变的过程，而 $M = J\beta$ 仅适用于转动惯量不变的过程。





积分形式的角动量定理

$$M = \frac{d(J\omega)}{dt} \quad \rightarrow \quad Mdt = d(J\omega) \quad (Mdt \text{为元冲量矩})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = \int_{J\omega_1}^{J\omega_2} d(J\omega) = J\omega_2 - J\omega_1 \quad (\int_{t_1}^{t_2} Mdt \text{ 为冲量矩})$$

(定轴转动角动量定理的积分形式)

定轴转动刚体在某段时间内所受合外力矩的冲量矩等于刚体在同一时间内角动量的增量。

说明：可以证明，对转动惯量 J 可变化的质点系或非刚体，在定轴转动时，角动量定理仍成立，即有

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$$



当 $M = 0$ 时，有 $J\omega = \text{常量}$ (角动量守恒定律)

当作用在定轴转动物体上的合外力矩为零时，物体在运动过程中的角动量保持不变。

➤ 讨论

- 角动量守恒不仅适用于刚体，也同样适用于非刚体。

(1) 对于刚体角动量守恒时，转动惯量和角速度均保持不变，刚体绕定轴作匀角速转动；

(2) 对非刚体，角动量守恒时，转动惯量和角速度同时改变，但两者乘积不变：当 J 变大时，角速度变小；当 J 变小时，角速度变大。





花样滑冰运动员通过改变身体姿态（转动惯量）来改变转速

- 角动量守恒不仅适用于宏观物体，也同样适用于天体运动和微观粒子的运动。



高处落下的猫

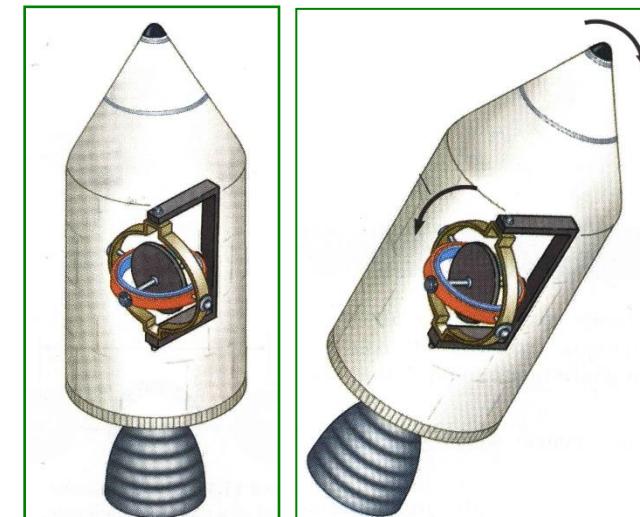
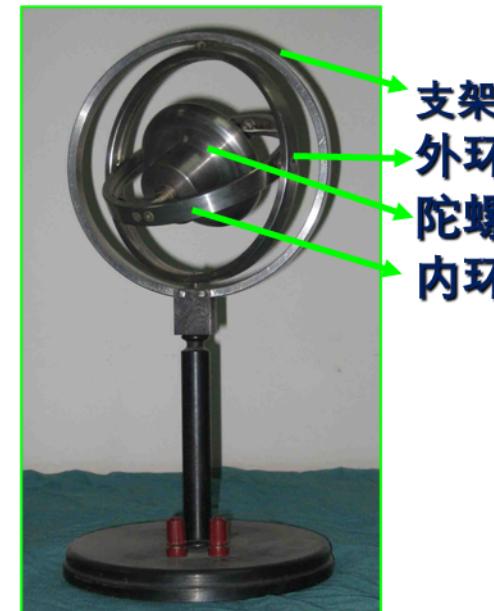


上海科技大学
ShanghaiTech University



◆ 陀螺仪与导航

- 陀螺仪：能够绕其对称轴高速旋转的厚重的对称刚体。
- 陀螺仪的特点：具有轴对称性和绕对称轴有较大的转动惯量。
- 陀螺仪的定向特性：由于不受外力矩作用，陀螺角动量的大小和方向都保持不变；无论怎样改变框架的方向，都不能使陀螺仪转轴在空间的取向发生变化。



◆ 直升机螺旋桨的设置



- 尾桨的设置：直升机发动后机身要在旋翼旋转相反方向旋转，产生一个向下的角动量。为了不让机身作这样的反向旋转，在机身尾部安装一个尾桨，尾桨的旋转在水平面内产生了一个推力，以平衡单旋翼所产生的机身扭转作用。





- 对转螺旋桨的设置：双旋翼直升机则无需尾桨，它在直立轴上安装了一对对转螺旋桨，即在同轴心的内外两轴上安装了一对转向相反的螺旋桨。工作时它们转向相反，保持系统的总角动量仍然为零。



例 一质量为 m , 长度为 l 的均质细杆可绕一水平轴自由转动。开始时杆子处于铅垂状态。现有一质量为 m_0 的橡皮泥以速度 v_0 与细杆在其 $3l/4$ 处发生完全非弹性碰撞且和杆子粘在一起。

- 求 (1) 碰撞后系统的角速度 ω ;
 (2) 碰撞后细杆能上摆的最大角度 θ_0 。

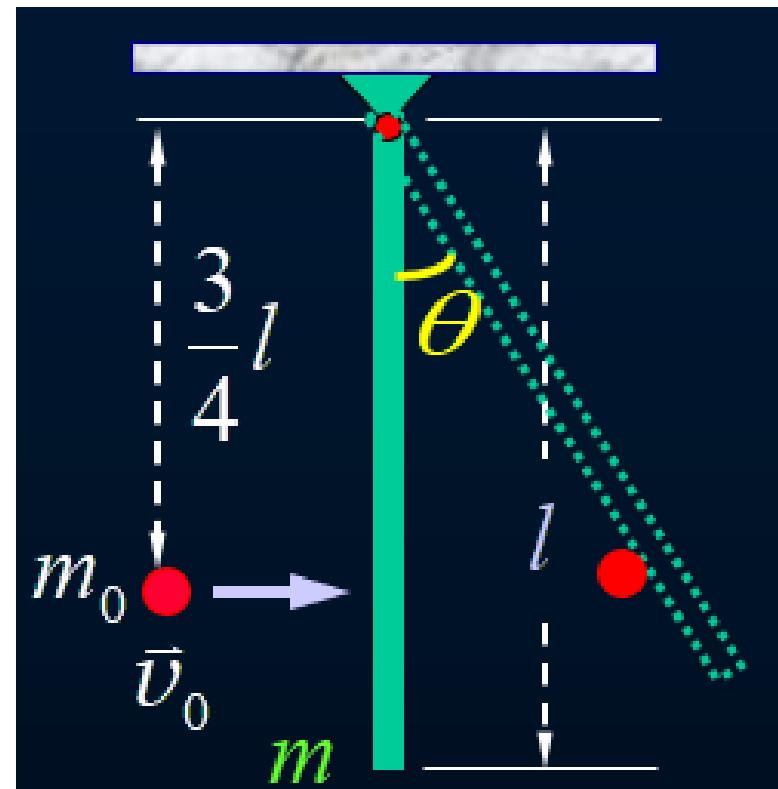
解(1)碰撞过程系统的合外力矩为零, 系统的角动量守恒

则有

$$J_{\text{泥}}\omega_0 = (J_{\text{杆}} + J_{\text{泥}})\omega$$

而 $J_{\text{泥}} = m_0(\frac{3}{4}l)^2$ $J_{\text{杆}} = \frac{1}{3}ml^2$

$$\omega = \frac{\frac{3}{4}m_0v_0}{\frac{9}{16}m_0l + \frac{1}{3}ml}$$



(2) 上摆过程机械能守恒，取细杆下端水平面为重力势能零点，则有

$$\frac{1}{2}(J_{\text{杆}} + J_{\text{泥}})\omega^2 + \frac{1}{4}lm_0g + \frac{1}{2}lmg$$

$$= m_0g(l - \frac{3}{4}l\cos\theta_0) + mg(l - \frac{1}{2}l\cos\theta_0)$$

$$\cos\theta_0 = \frac{(\frac{3}{4}m_0 + \frac{1}{2}m)(\frac{9}{16}m_0 + \frac{1}{3}m)gl - \frac{9}{16}m_0^2v_0^2}{(\frac{3}{4}m_0 + \frac{1}{2}m)gl}$$

