



普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、
强场激光物理、飞秒激光成丝。

<https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm>



$$y = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \phi \right]$$



◆ 简谐波波函数的其它形式

将 $k = 2\pi/\lambda$ 、 $uT = \lambda$ 、 $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ 代入

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

有

$$\begin{cases} y(x,t) = A \cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A \cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut - x) + \varphi_0] \end{cases}$$

若波沿轴负向传播时，则有波函数

$$\begin{cases} y(x,t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_0) \\ y(x,t) = A \cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A \cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut + x) + \varphi_0] \end{cases}$$





例 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，已知其波函数为

$$y = 0.04 \cos \pi(50t - 0.10x) \text{ m}$$

- 求 (1) 波的振幅、波长、周期及波速；
(2) 质点振动的最大速度.

解 (1) a. 比较法(与标准形式比较)

标准形式 $y(x,t) = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0]$

波函数为 $y = 0.04 \cos 2\pi(\frac{50}{2}t - \frac{0.10}{2}x)$

比较可得 $A = 0.04 \text{ m}$ $T = \frac{2}{50} \text{ s} = 0.04 \text{ s}$
 $\lambda = \frac{2}{0.10} \text{ m} = 20 \text{ m}$ $u = \frac{\lambda}{T} = 500 \text{ m/s}$



b. 分析法 (由各量物理意义, 分析相位关系)

振幅

$$A = y_{\max} = 0.04 \text{ m}$$

波长

$$\pi(50t - 0.10x_1) - \pi(50t - 0.10x_2) = 2\pi$$

$$\lambda = x_2 - x_1 = 20 \text{ m}$$

周期

$$\pi(50t_2 - 0.10x) - \pi(50t_1 - 0.10x) = 2\pi$$

$$T = t_2 - t_1 = 0.04 \text{ s}$$

波速

$$u = \frac{\lambda}{T} = 500 \text{ m/s}$$

(2) 质点振动的最大速度.

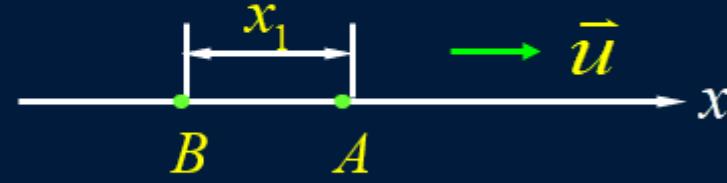
$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.04 \times 50\pi \sin \pi(50t - 0.10x)$$

$$v_{\max} = 0.04 \times 50\pi = 6.28 \text{ m/s} \neq u$$

例 如图, 已知 A 点的振动方程为: $y_A = A \cos[4\pi(t - \frac{1}{8})]$

在下列情况下试求波函数:

(1) 以 A 为原点;



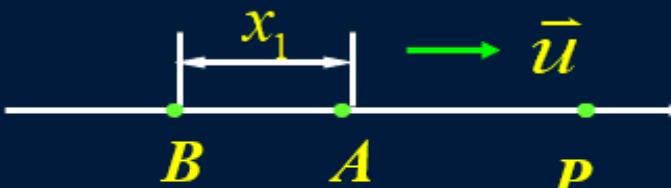
(2) 以 B 为原点;

(3) 若 u 沿 x 轴负向, 以上两种情况又如何?

解 (1) 在 x 轴上任取一点 P , 该点

振动方程为:

$$y_P = A \cos[4\pi(t - \frac{x}{u} - \frac{1}{8})]$$

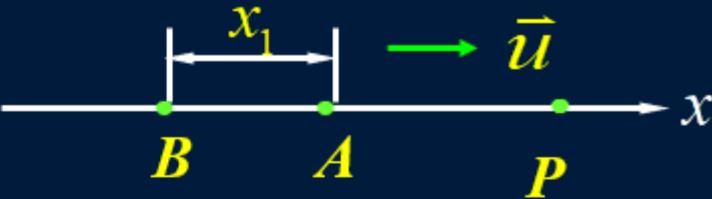


波函数为:

$$y(x, t) = A \cos[4\pi(t - \frac{x}{u} - \frac{1}{8})]$$

(2) 以 **B** 为原点

$$y_A = A \cos[4\pi(t - \frac{1}{8})]$$

**B** 点振动方程为: $y_B(t) = A \cos[4\pi(t + \frac{x_1}{u} - \frac{1}{8})]$ **波函数为:** $y(x, t) = A \cos[4\pi(t + \frac{x_1}{u} - \frac{x}{u} - \frac{1}{8})]$

$$= A \cos[4\pi(t - \frac{x - x_1}{u} - \frac{1}{8})]$$

(3) 以 **A** 为原点: $y(x, t) = A \cos[4\pi(t + \frac{x}{u} - \frac{1}{8})]$ 以 **B** 为原点: $y(x, t) = A \cos[4\pi(t + \frac{x - x_1}{u} - \frac{1}{8})]$



平面波的波动微分方程

由 $y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

知
$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \end{array} \right\} \quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

说明

- (1) 上式是一切平面波所满足的微分方程 (正、反传播)；
- (2) 不仅适用于机械波，也适用于电磁波、热传导、化学中的扩散等过程；
- (3) 若物理量是在三维空间中以波的形式传播，波动方程为

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$



机械波的类型： 波前形状

波线：用有向直线表示波的传播方向

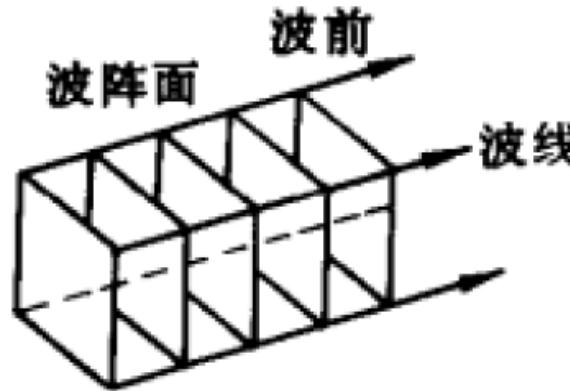
波阵面：某一时刻波的前方达到的相位相同的各点构成的连续的面，又称**波前 (wave front)**

各向同性介质中，波线与波阵面**垂直**

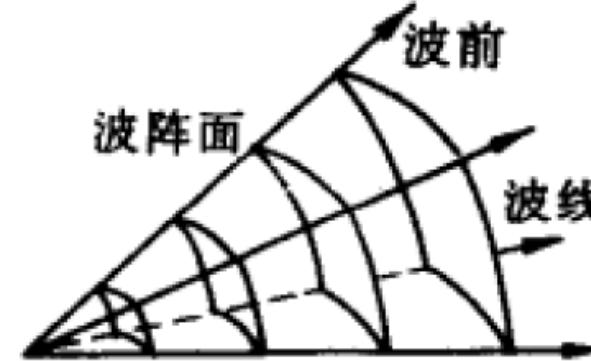
- 若波阵面为平面，称为**平面波**
- 若波阵面为球面，称为**球面波**
- 若波阵面为柱面，称为**柱面波**



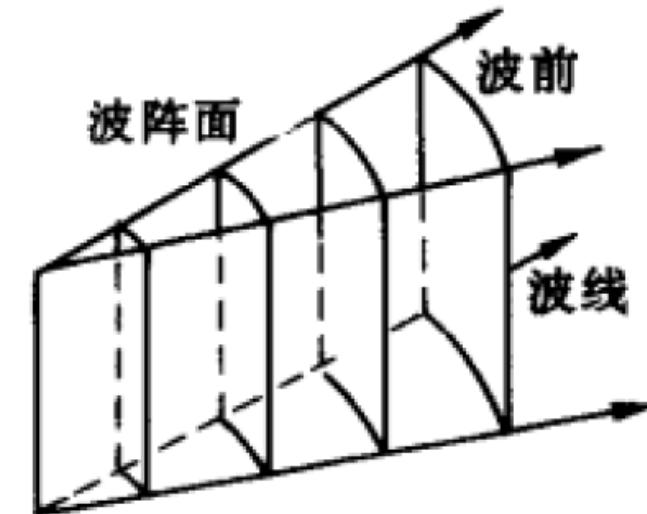
机械波的类型：波前形状



平面波



球面波



柱面波

波速 u : 波阵面沿波线的推进速度 (相位传播)

t, Ψ

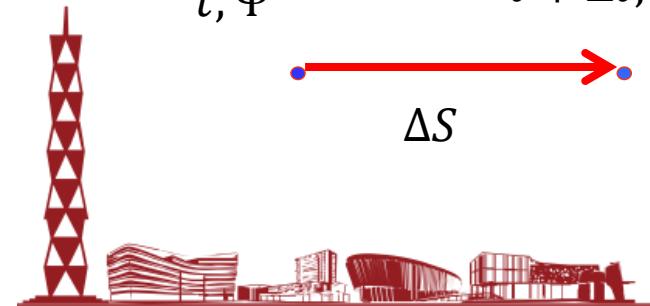
$t + \Delta t, \Psi$



ΔS

$$u = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

机械波的速度决定于媒质的弹性和密度



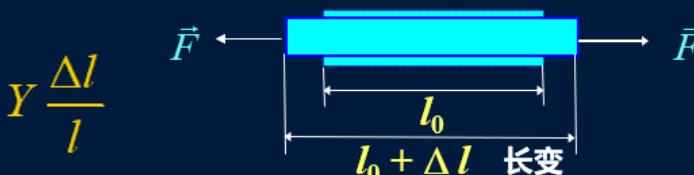
波速：亦称相速度，其大小主要决定于媒质的性质，与波的频率无关。

例：a. 拉紧的绳子或弦线中横波的波速为：

$$u_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \left\{ \begin{array}{l} T - \text{张力} \\ \mu - \text{线密度} \end{array} \right.$$

b. 均匀细棒中，纵波的波速为：

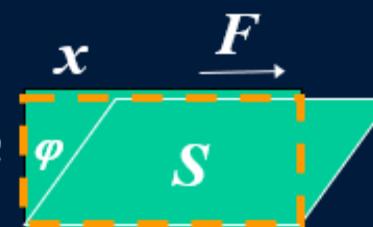
$$u_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y - \text{杨氏模量} \\ \rho - \text{棒的密度} \end{array} \right.$$



c. 固体介质中传播的横波速率由下式给出：

$$u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad G: \text{切变弹性模量}$$

$$\frac{F}{S} = G \frac{x}{h}$$

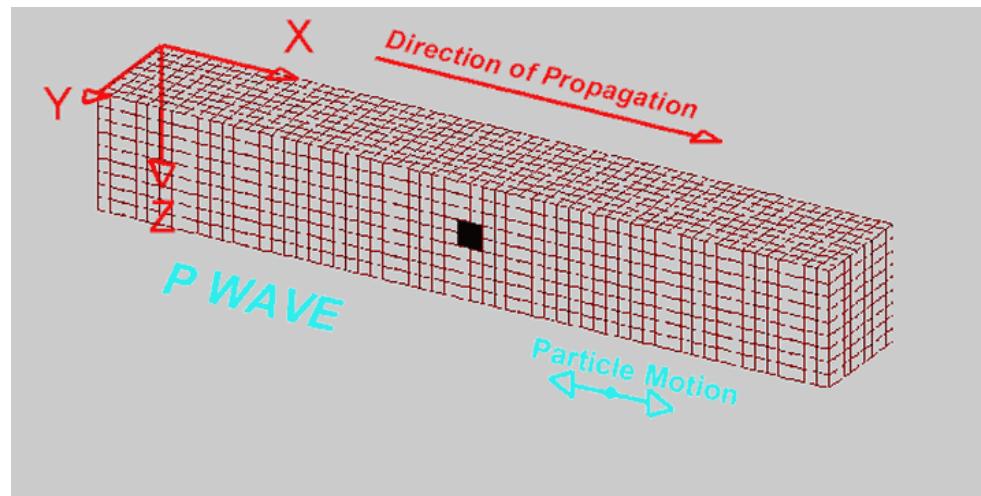


由于: $G < Y$, 固体中 $u_{\text{横波}} < u_{\text{纵波}}$

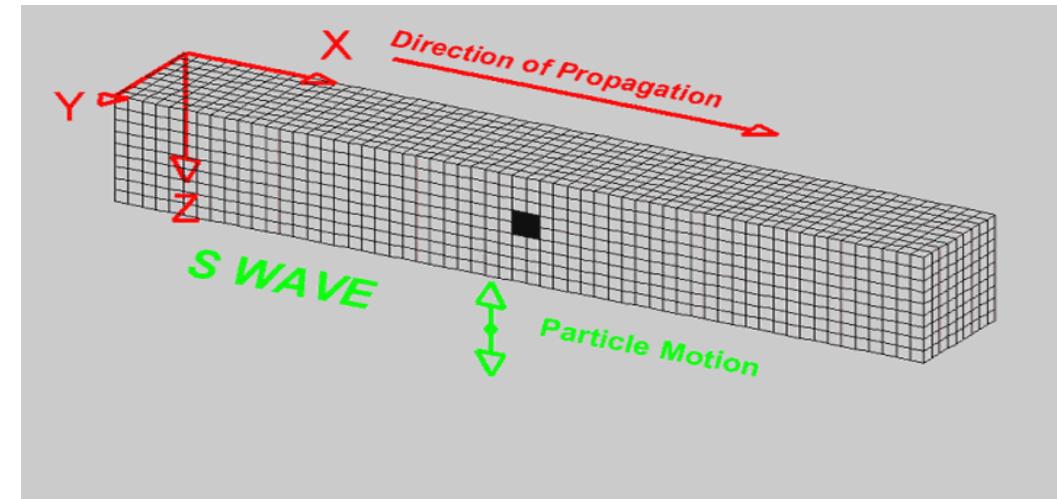
江苏盐城市大丰区海域发生5.0级地震，南京、上海等地有震感

来源：央视网 | 2021年11月17日 14:21:02

中国地震台网正式测定：11月17日13时54分在江苏盐城市大丰区海域（北纬33.50度，东经121.19度）发生5.0级地震，震源深度17千米。震中距最近海岸线45公里，距盐城市97公里，距南京市276公里，距上海市254公里。地震造成江苏盐城、南通等地震感强烈，江苏南京、上海等地亦有震感。



上下颠簸（纵波）

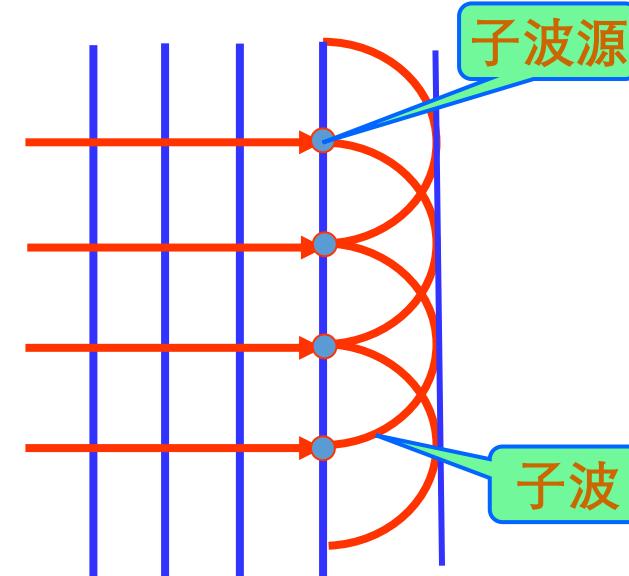
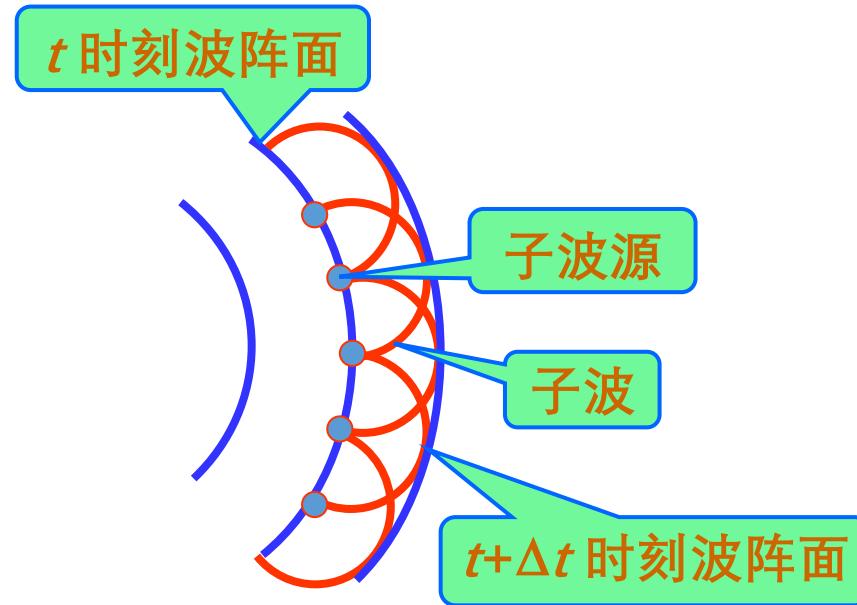


左右晃动（横波）



惠更斯原理

波动传到的各点都可以看作是发射子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波波阵面的包络面就决定新的波阵面。

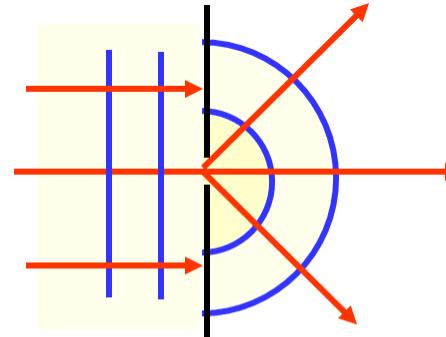


波动现象：衍射

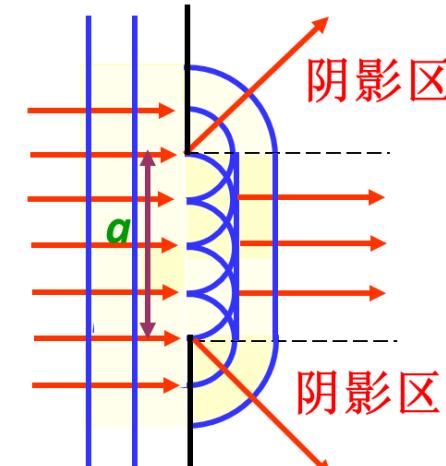
1. 现象

波传播过程中当遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘而传播的现象——衍射。

2. 作图（可用惠更斯原理作图）



(1) $a \ll \lambda$

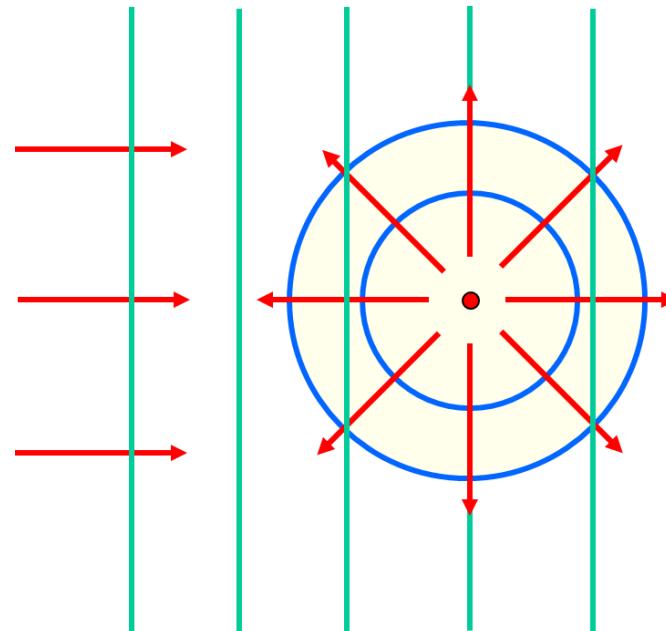


(2) $a \sim \lambda$



波动现象：散射

当波在传播途中遇到球形小颗粒时，波将以小颗粒为球心发射球面子波，使波向各个方向散开，这一现象称为**散射**。



波动现象：折射

用作图法求出折射波的传播方向

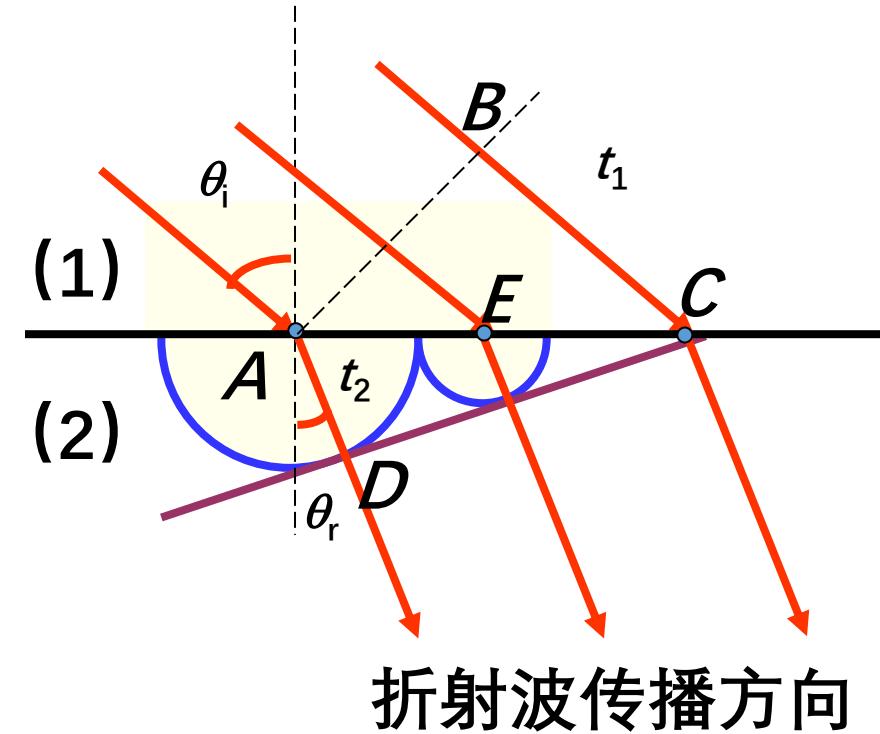
$$BC = u_1(t_2 - t_1)$$

$$AD = u_2(t_2 - t_1)$$

由图可得波的折射定律：

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{u_1}{u_2}$$

θ_i —入射角， θ_r —折射角。

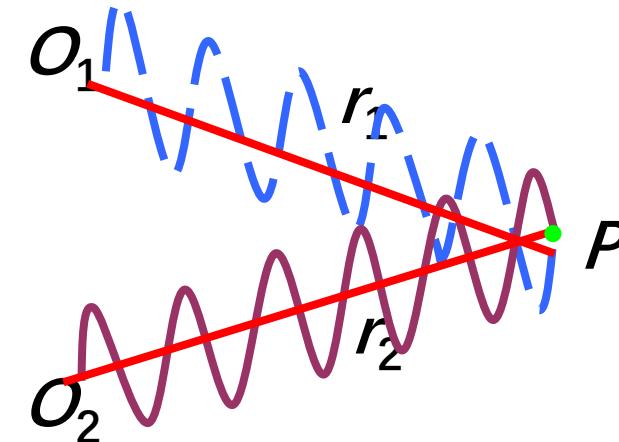


波的干涉现象

- 基于波的独立传播和叠加原理

相干条件：频率相同，振动方向相同，相位差恒定

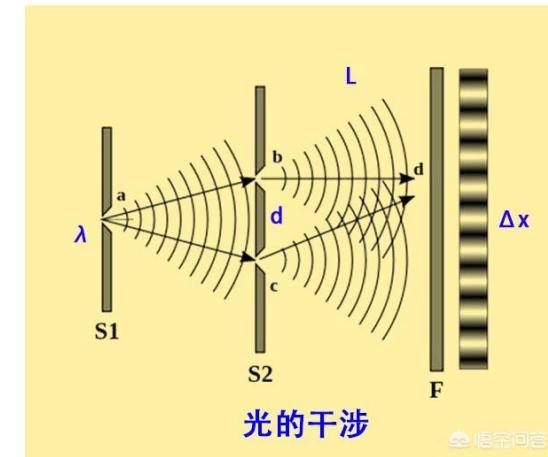
两相干波在空间相遇，某些点的振动始终加强另一些点的振动始终减弱，即出现干涉现象。



$$\text{设 } y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1)$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - kr_2)$$

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$





波的干涉现象

其中 $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - k(r_1 - r_2)$$

设 $\varphi_2 = \varphi_1$ $\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$

►当 $r_2 - r_1 = \pm n\lambda$, $n = 0, 1, 2 \dots$

$$A = A_1 + A_2 \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$
 相长

►当 $r_2 - r_1 = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}$, $n = 0, 1, 2 \dots$

$$A = |A_1 - A_2| \quad I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

相消



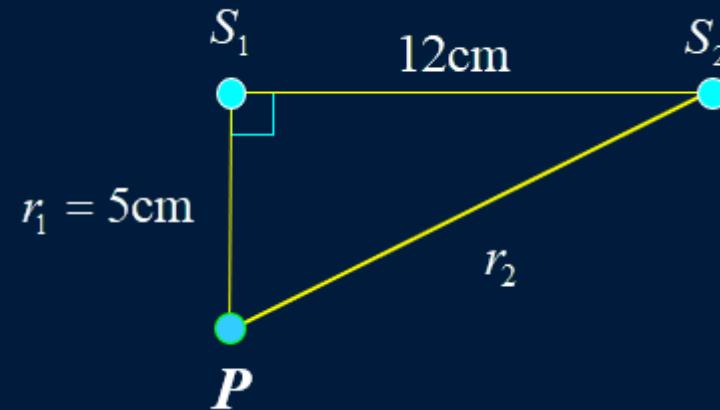
例 S_1 、 S_2 为两相干波源，它们的振幅皆为10 cm,频率为75 Hz.

已知两波源的相位差为 2π ，波速为 $15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 试确定两列波到达 P 点(见图)时相干的结果.

解

$$\lambda = \frac{u}{v} = \frac{15}{75} \text{ m} = 0.2 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{12^2 + 5^2} \text{ m} = 13 \text{ m}$$



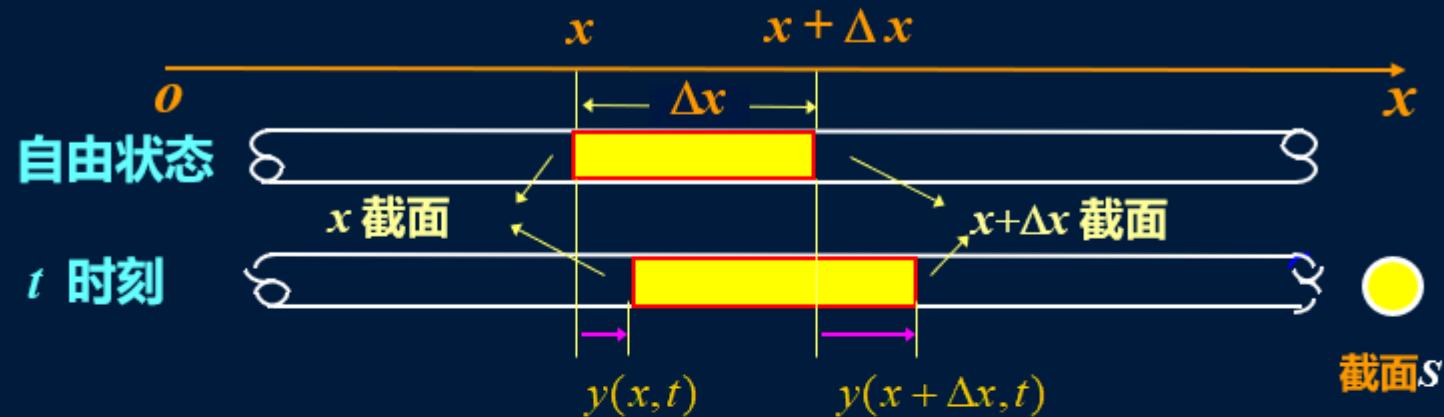
两列波到达 P 点的相位差为

$$\Delta\phi = (\varphi_2 - \varphi_1) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = 2\pi - 2\pi \frac{8}{0.2} = -78\pi$$

相位差为 π 的偶数倍，故 P 点两波干涉相长.



波的能量和能量密度(以匀质细杆中简谐纵波为例)



设纵波 $y = A \cos(\omega t - kx)$ 沿 x 方向传播, 取微元 $\Delta m = \rho S \Delta x$

则微元的动能为 $E_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \Delta m (\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2} \rho S \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$

由杨氏模量的定义和胡克定律 $F = YS \frac{\Delta y}{\Delta x} = k \Delta y$

微元的势能为 $E_p = \frac{1}{2} k (\Delta y)^2 = \frac{1}{2} \frac{YS}{\Delta x} (\Delta y)^2 = \frac{1}{2} YS \Delta x (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2 =_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} YS \Delta x (\frac{\partial y}{\partial x})^2$

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad k = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{2} YS \Delta x A^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2} \rho S \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) = E_k$$



❖ **微元的机械能为** $E = E_k + E_p = \rho S \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$

❖ **能量密度** $w = \frac{W}{S \Delta x} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$

平均能量密度 $\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$

➤ 讨论

(1) 在波的传播过程中，媒质中任一质元的动能和势能是同步变化的，即 $E_k = E_p$ ，与简谐弹簧振子的振动能量变化规律是不同的。

(2) 质元机械能随时空周期性变化，仍是一波动过程，表明质元在波传播过程中不断吸收和放出能量；因此，波动过程也是能量的传播过程。



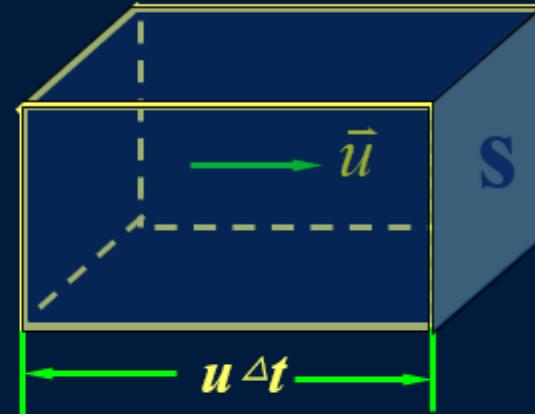
能流密度

能流：单位时间内通过某一截面的波动能量.

$$P = \frac{w u \Delta t S}{\Delta t} = w u S$$

在一个周期中的平均能流为

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \bar{w} u S$$

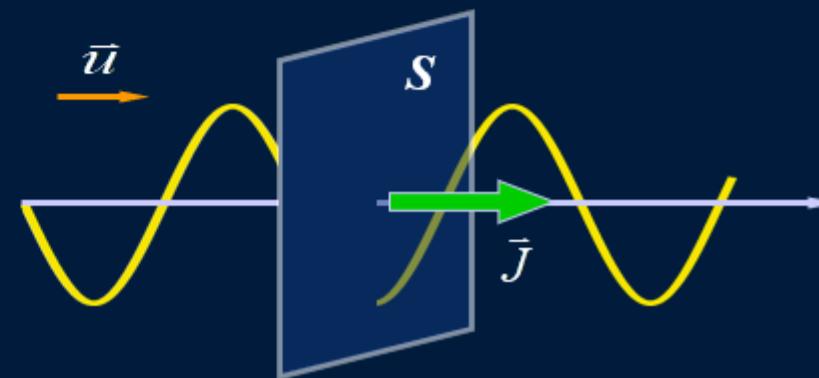


能流密度：通过垂直于波线截面单位面积上的能流.

大小: $J = \frac{dP}{dS} = w u$

方向: 波的传播方向

矢量表示式: $\vec{J} = w \vec{u}$



波的强度：一个周期内能流密度大小的平均值.

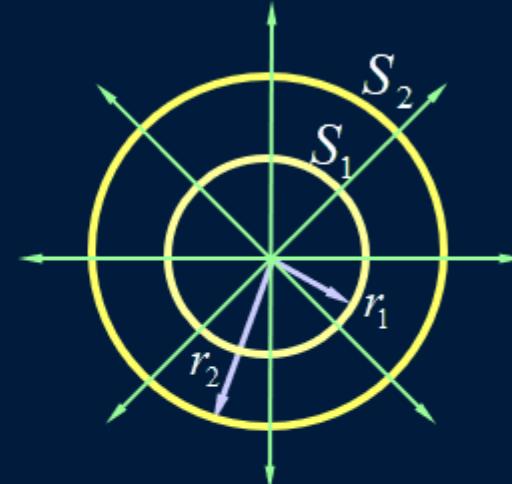
$$I = \bar{J} = \frac{1}{T} \int_0^T J dt = \frac{u}{T} \int_0^T w dt = u \bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u \propto A^2$$

❖ 球面波的振幅 (介质**不吸收能量**)

由 $\frac{1}{2} \rho A_1^2 \omega^2 u S_1 = \frac{1}{2} \rho A_2^2 \omega^2 u S_2$

得 $A_1^2 \cdot 4\pi r_1^2 = A_2^2 \cdot 4\pi r_2^2$

$$A_1 r_1 = A_2 r_2$$



令 $Ar = A_0 r_0$ (A_0 为离原点 (波源) r_0 距离处波的振幅)

则球面简谐波的波函数为

$$y(r, t) = \frac{A_0 r_0}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r - r_0}{u} \right) + \phi_0 \right]$$

球面波的振幅随 r 增大而减小.





驻波和驻波的形成

两列等振幅相干波相向传播时叠加形成驻波.

设两列分别沿 x 正方向和负方向传播的等振幅相干波为

$$y_1 = A \cos 2\pi(vt - \frac{x}{\lambda}), \quad y_2 = A \cos 2\pi(vt + \frac{x}{\lambda})$$

按叠加原理，合成波的波函数为

$$\begin{aligned} y = y_1 + y_2 &= A[\cos 2\pi(vt - \frac{x}{\lambda}) + \cos 2\pi(vt + \frac{x}{\lambda})] \\ &= (2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}) \cdot \cos 2\pi vt = A'(x) \cos \omega t \end{aligned}$$

► 讨论

(1) **波腹:** $\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 1 \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = k\pi \quad x = k \frac{\lambda}{2}$

波节: $\left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0 \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad x = (2k+1) \frac{\lambda}{4}$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$





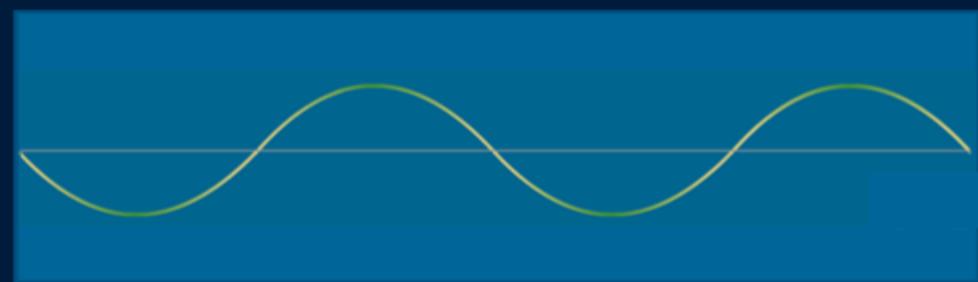
相邻两波腹之间的距离:

$$x_{k+1} - x_k = (k+1)\frac{\lambda}{2} - k\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

相邻两波节之间的距离:

$$x_{k+1} - x_k = [2(k+1)+1]\frac{\lambda}{4} - (2k+1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

(2) 所有波节点将媒质划分为长 $\lambda/2$ 的许多段，每段中各质点的振动振幅不同，但相位皆相同；而相邻段间各质点的振动相位相反；即驻波中不存在相位的传播.



绳上的驻波

设绳长为 L , 线密度为 μ , 张力为 F , 绳两端固定.

驻波条件: 在两端固定的绳

形成驻波的条件为

$$L = k \frac{\lambda_k}{2} \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

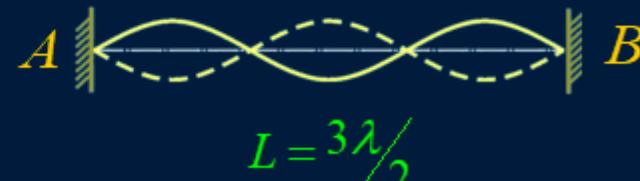
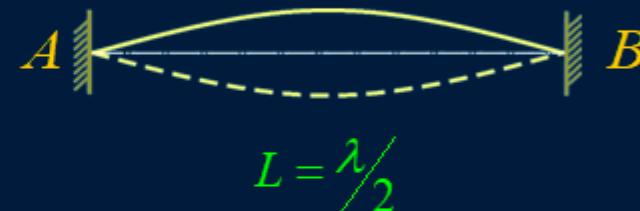
或 $\lambda_k = \frac{2L}{k} \quad k = 1, 2, 3 \dots$

由 $u = \sqrt{F / \mu}$ 有

$$\nu_k = \frac{k}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

ν_k 称为本正频率, ν_1 称为基频;

ν_2, ν_3, \dots 分别称为二次, 三次谐频等.





多普勒效应：由于观察者（接收器）或波源、或二者同时相对媒质运动，而使观察者接收到的频率与波源发出的频率不同的现象。

1. 波源静止，观察者运动

$$f' = \left(1 + \frac{v_o}{u}\right) f$$



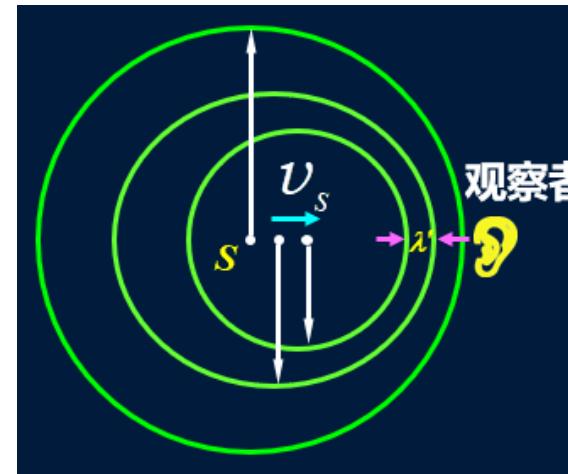
靠近 $v_o > 0$

远离 $v_o < 0$

观察者相对波源相向运动，频率增大；观察者相对波源远离运动，频率减小。

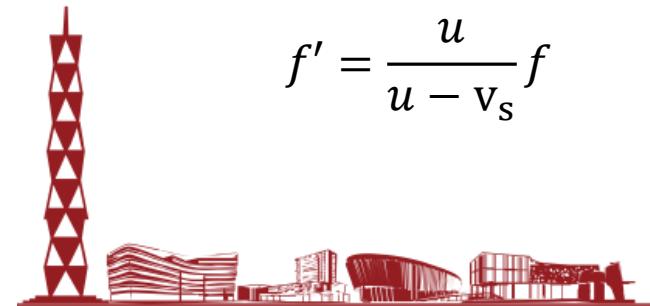
2. 观察者静止，波源运动

$$f' = \frac{u}{u - v_s} f$$



靠近 $v_s > 0$

远离 $v_s < 0$





3. 波源和观察者同时运动

$$f' = \frac{u + v_o}{u - v_s} f$$

(符号正负的选择与上述相同)



1. $t=0$ 时，振源发出第一个波，到达接收者的时间是 t_1

$$ut_1 + v_0 t_1 = d$$

$$t_1 = (d - v_0 t_1)/u$$

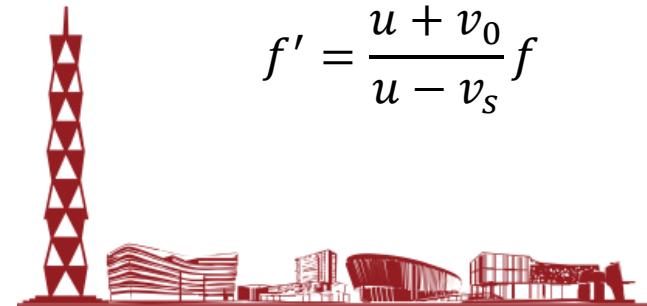
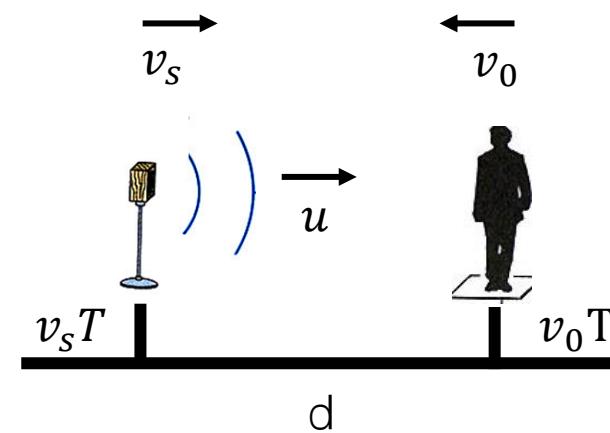
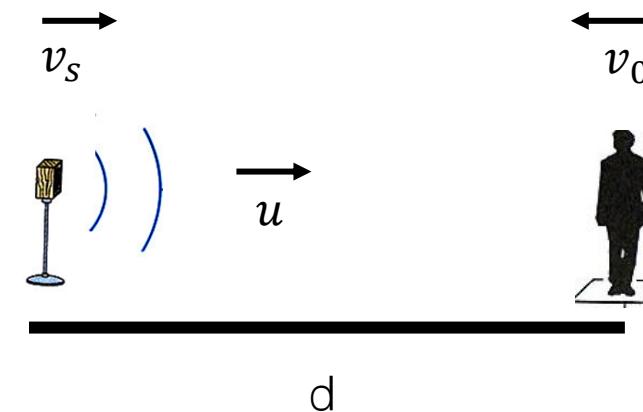
2. $t=T$ 时，振源发出第二个波，到达接收者的时间是 t_2

$$u(t_2 - T) + v_0(t_2 - T) = d - v_s T - v_0 T$$

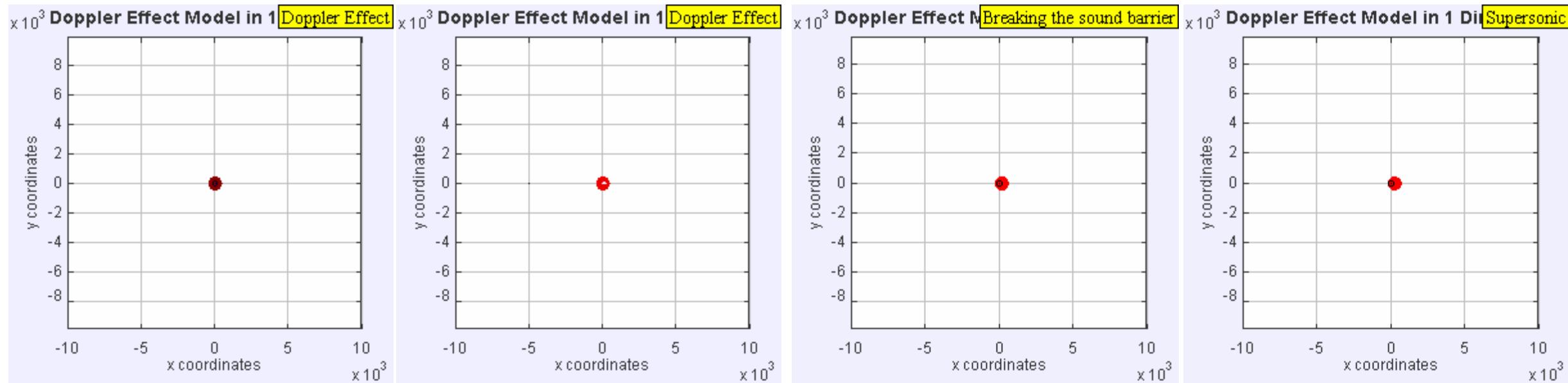
$$t_2 = T + (d - v_s T)/u - v_0 T/u$$

$$T' = \frac{u - v_s}{u + v_0} T$$

$$f' = \frac{u + v_0}{u - v_s} f$$



$$f' = \frac{u + v_0}{u - v_s} f$$



波源相对于介质静止

多普勒效应

“音障”

激波
(Shock Wave)

波源的速度超过了
介质中的波速，
超音速飞机





例 一固定的超声波波源发出频率为 $v_0=100 \text{ kHz}$ 的超声波. 当一汽车迎面驶来时, 在超声波所在处收到了从汽车反射回来的超声波其频率为 $v=110 \text{ kHz}$. 设声波的速度为 $u=330 \text{ m/s}$.
求 汽车的行驶速度.

解 汽车作为观察者接收到的频率

$$v' = \frac{u + v}{u} v_0 \quad f' = \left(1 + \frac{v_0}{u}\right) f$$

汽车反射波(作为波源发出)在空气中的频率

$$v'' = \frac{u}{u - v} v' = \frac{u + v}{u - v} v_0 \quad f'' = \frac{u}{u - v_s} f$$

汽车的行驶速度为

$$\begin{aligned} v &= \frac{v'' - v_0}{v'' + v_0} u = \frac{110 \times 10^3 - 100 \times 10^3}{110 \times 10^3 + 100 \times 10^3} \times 330 \text{ km/h} \\ &= 15.7 \text{ m/s} = 56.6 \text{ km/h} \end{aligned}$$