普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

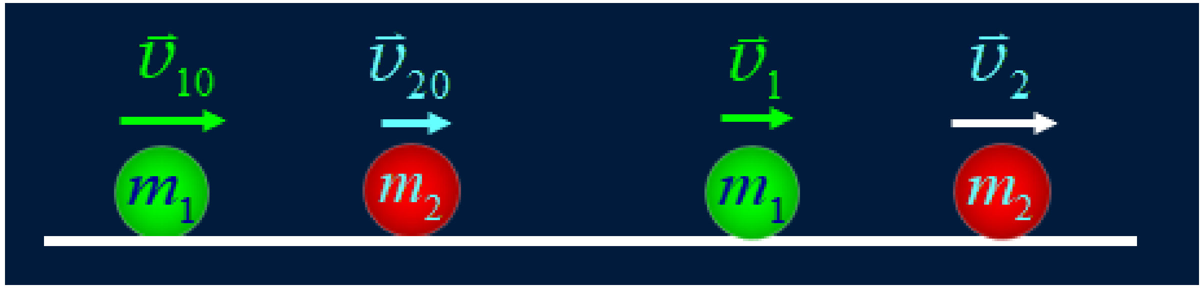
研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、强场激光物理、飞秒激光成丝。
https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm

◆完全弹性碰撞、非完全弹性碰撞、完全非弹性碰撞、恢复系数

- 完全弹性碰撞：碰撞前后，动量守恒，总动能不变。
- 非完全弹性碰撞：碰撞前后，动量守恒，总动能有改变（转化为热、声等能）。
- 完全非弹性碰撞：碰撞前后，动量守恒，总动能有改变，并以共同的速度运动。
- 恢复系数：碰撞后两球的分离速度与碰撞前两球的接近速度的比值。

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

完全弹性碰撞



系统动量守恒

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

系统动能守恒

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

可得

$$v_{10} - v_{20} = v_2 - v_1$$

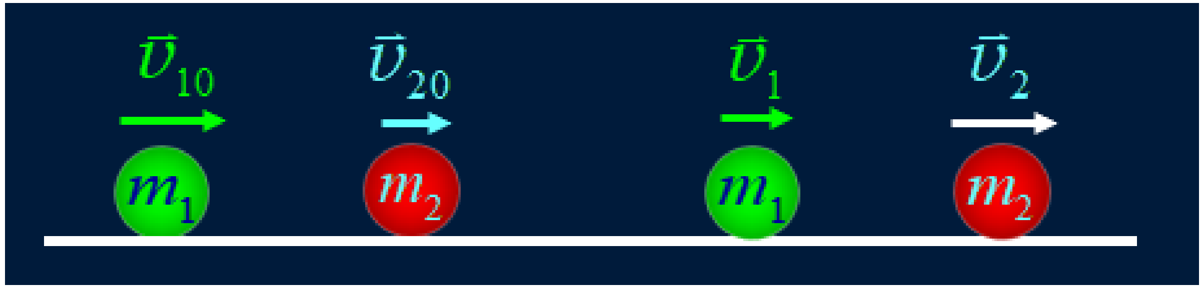
则

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{10} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{20}$$

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{10} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{20}$$

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{10} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{20}$$

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{10} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{20}$$



- 讨论

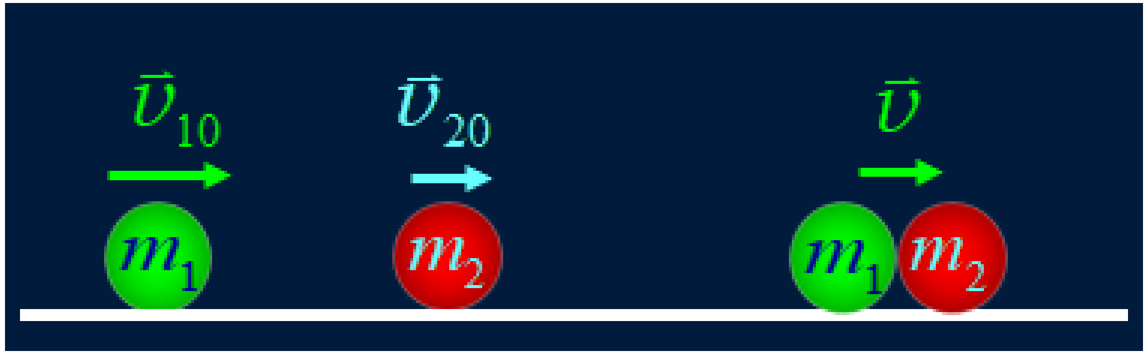
  - 完全弹性碰撞时 $e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 1$

  - 当$m_1 = m_2$时 $v_1 = v_{20}$， $v_2 = v_{10}$ —两球交换速度

  - 当$m_1 << m_2$ ， 且$v_{20} = 0$时 $v_1 \approx -v_{10}$， $v_2 \approx 0$

  - 当$m_1 >> m_2$， 且$v_{20} = 0$时 $v_1 \approx v_{10}$ ， $v_2 \approx 2v_{10}$

完全非弹性碰撞



系统动量守恒，且以共同速度运动，则

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v$$

可得

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

动能损失

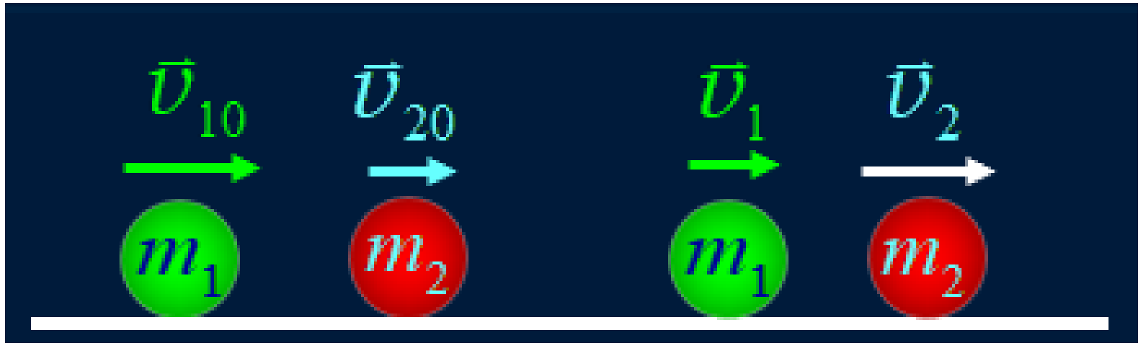
$$\Delta E = E_k - E_{k0}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2 (v_{10} - v_{20})^2}{m_1 + m_2} < 0$$

恢复系数

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 0$$

非完全弹性碰撞



系统动量守恒

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$v_2 = v_1 + (v_{10} - v_{20})e$$

恢复系数 $e = \dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$

可得

$$v_1 = v_{10} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1+e)(v_{10} - v_{20})$$

$$v_2 = v_{20} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(1+e)(v_{10} - v_{20})$$

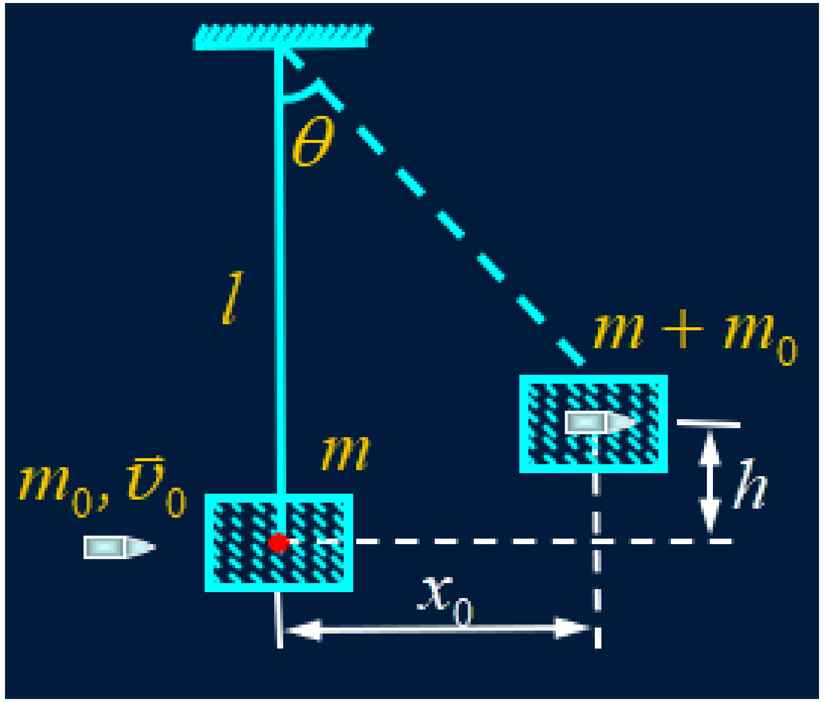
动能损失

$$\Delta E = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 - e^2)(v_{10} - v_{20})^2$$

例 如图冲击摆，质量为m的木块被悬挂在长度为l的细绳下端。一质量为m_0的子弹沿水平方向以速度v_0射中木块，并停留在其中，木块受到冲击而向斜上方摆动，当到达最高位置时，木块的水平位移为x_0。

求 子弹的速度v_0。



解 第一个过程 ， 完全非弹性碰撞

动量守恒 $m_0 \mathrm{v}_0 = (m_0 + m)\mathrm{v}$ (1)

第二个过程, 上摆

机械能守恒(取最低点为势能零点)

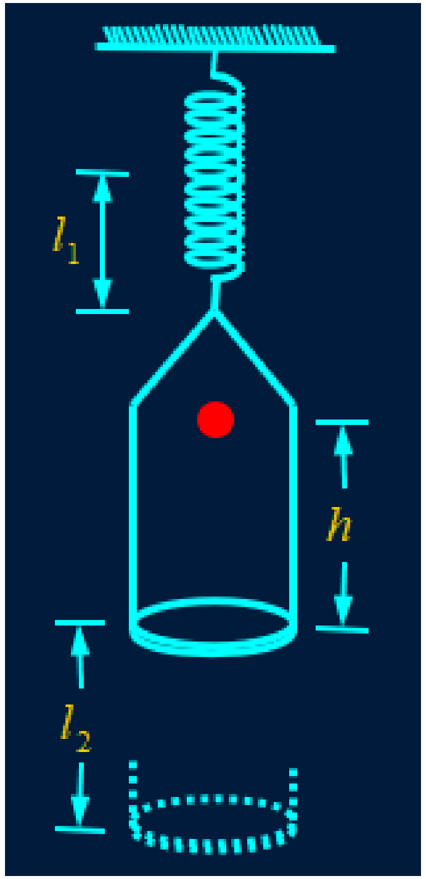
$$\frac{1}{2}(m_0 + m)\mathrm{v}^2 = (m_0 + m)gh \quad (2)$$

且有 $h = l - \sqrt{l^2 - x_0^2} = l(1 - \cos\theta)$

$$\mathrm{v}_0 = \frac{m_0 + m}{m_0}[2g(l - \sqrt{l^2 - x_0^2})]^{\frac{1}{2}} = \frac{m_0 + m}{m_0}[2gl(1 - \cos\theta)]^{\frac{1}{2}}$$

例 如图，用轻弹簧把质量为m的金属盘悬挂起来，静止在平衡位置，这时弹簧伸长了$l_1 = 10\mathrm{cm}$。现有一个质量与金属盘相同的橡皮泥从高于盘底 $h = 30\mathrm{cm}$处由静止自由下落到盘上。

求 此金属盘向下运动的最大距离l_2 。



解 泥球自由下落，落到盘底的速率为

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

泥球与盘碰撞(完全非弹性碰撞)，系统的动量守恒，设碰撞后的共同速度为v_2，则

$$mv_1 = (m+m)v_2$$

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

泥球和盘共同下降的过程

（弹簧、泥球、盘和地球组成的系统机械能守恒）

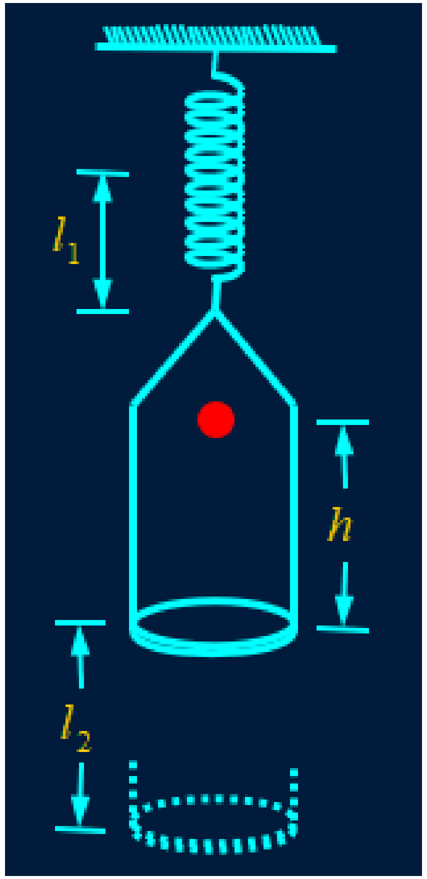
选弹簧的自然伸长端为弹性势能零点，以盘的最低点为重力势能零点，则

$$\frac{1}{2}(2m)v_2^2 + (2m)gl_2 + \frac{1}{2}kl_1^2 = \frac{1}{2}k(l_1 + l_2)^2$$

弹簧的劲度系数为 $k = \dfrac{mg}{l_1}$

而 $v_2 = \sqrt{\dfrac{gh}{2}}$ ， $l_1 = 10\text{cm}$

则 $l_2^2 - 20l_2 - 300 = 0 \Rightarrow l_2 = 30\text{cm}$



刚体

主要内容：

1. 刚体模型
2. 刚体的运动形式

刚体的运动形式

1. 刚体模型

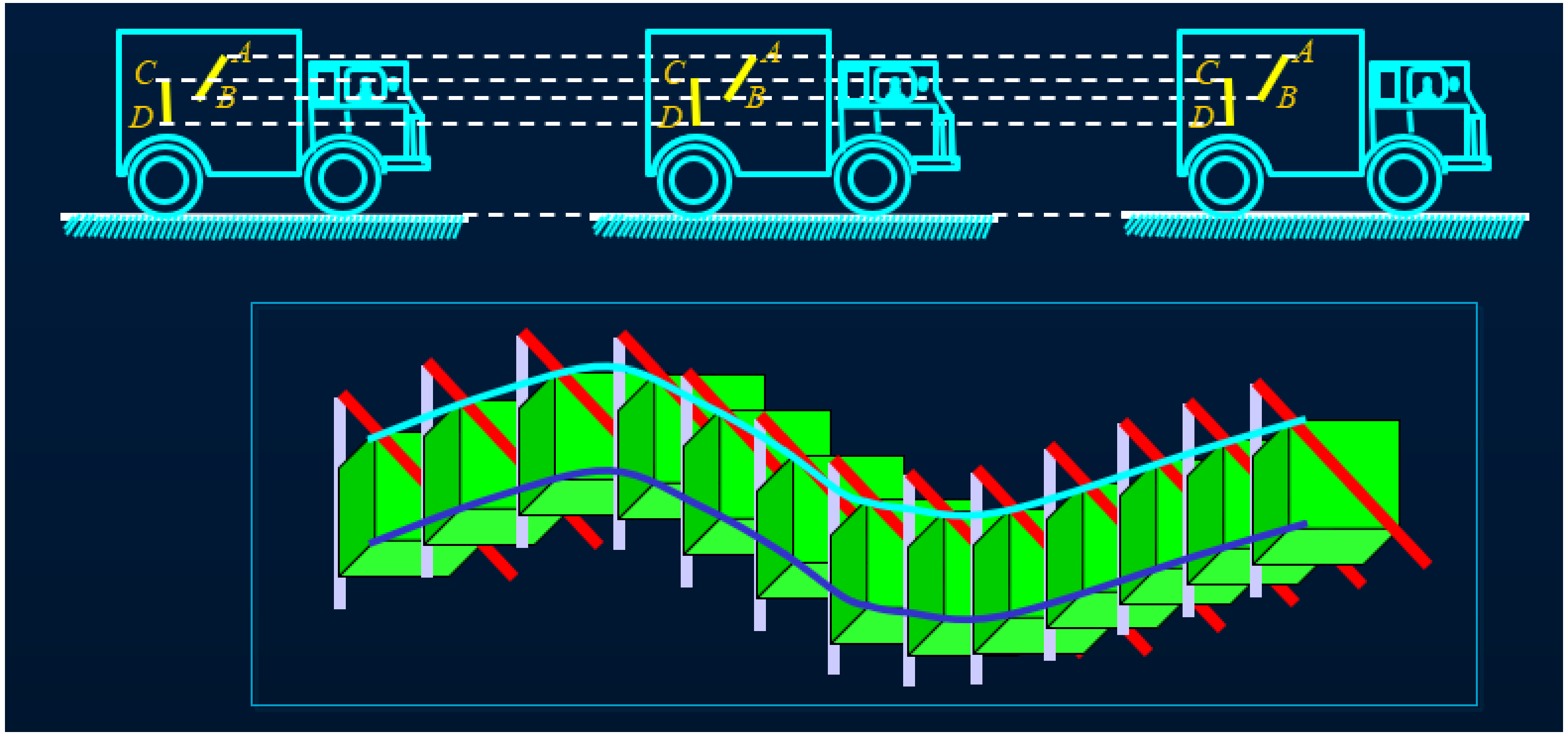
刚体：在力的作用下，大小和形状都始终保持不变的物体。

- 说明

- 刚体和质点一样是一种理想模型；
- 刚体可以看成是由无数质点构成的质点组；
- 刚体无论在多大的力作用下或刚体无论作何运动，刚体中任意两质点间的距离保持不变。

2. 刚体的平动

平动：刚体运动时，若在其内部所作的任何一条直线，在运动中都始终保持与自身平行的运动形式。



说明

- 刚体作平动时，刚体上各点的轨迹可以是直线，也可以是曲线；
- 刚体作平动时，刚体上所有质点都具有相同的位移、速度和加速度；
- 刚体的平动运动可用一个点的运动描述；通常用刚体的质心。

3. 刚体的转动

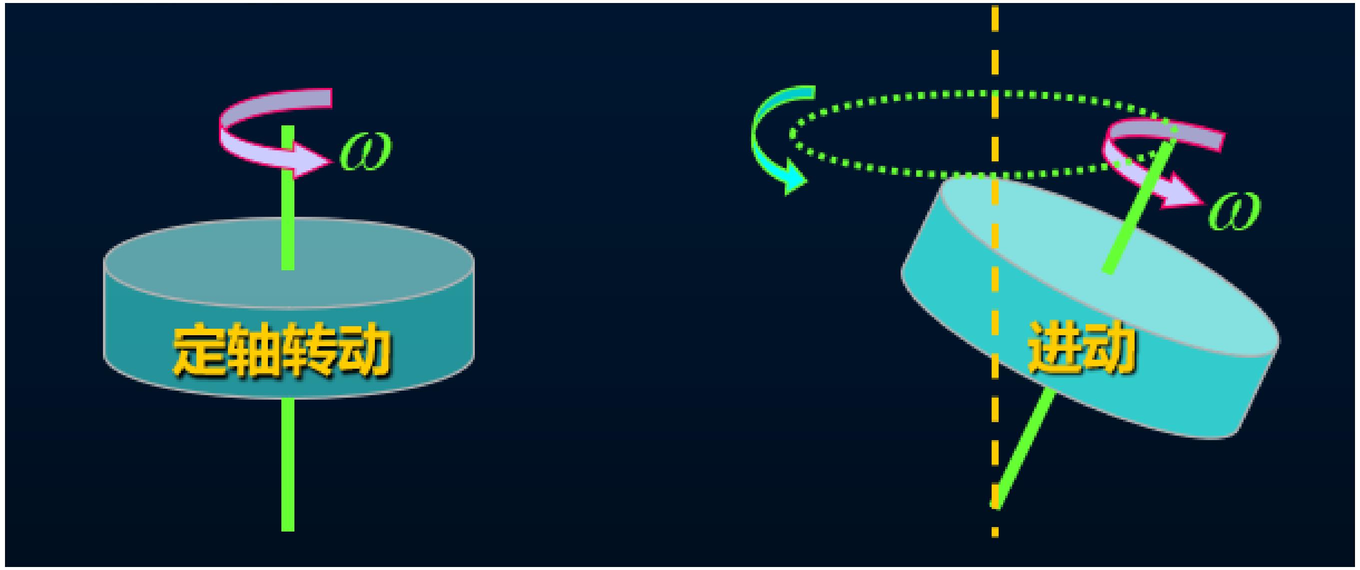
转动: **刚体上的各质点都绕同一直线作圆周运动的运动形式。**

转动轴: **刚体转动围绕的那条直线**(转轴可以是固定的或变化的)。

定轴转动: **转轴在所选参考系中固定不动的转动。**

非定轴转动: **转轴位置随时间变化的转动。**

定点转动: **在运动过程中，刚体上某一点始终保持不动的运动形式。** —— **进动**



描述刚体定轴转动的物理量

上海科技大学
ShanghaiTech University

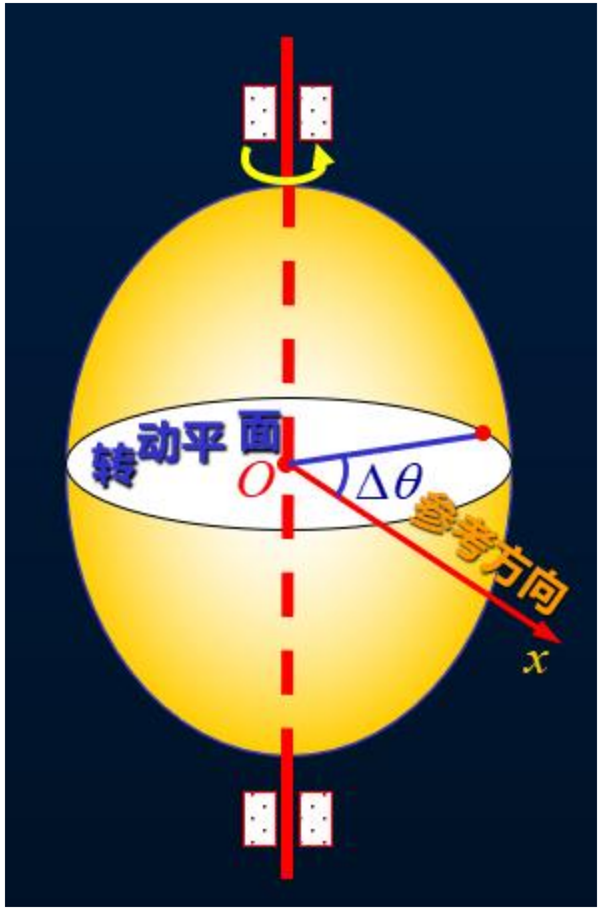
定轴转动时，刚体上各质点都绕固定轴作圆周运动，在任意时刻其上各质点的位移、速度、加速度(线量)各不相同。

刚体定轴转动的角量描述：

角坐标、角位移
角速度、角加速度

运动学中讲过的角坐标、角位移、角速度、角加速度等概念，以及有关公式都可适用于刚体的定轴转动。

转动平面：**刚体上垂直于固定轴的任意平面。**



- **角坐标θ**

任选刚体上的任意点P点为参考点

刚体定轴转动的运动方程

$$\theta = \theta(t)$$

- 角位移$\Delta\theta$

若P在t和Δt后的角坐标为θ_1和θ_2，则

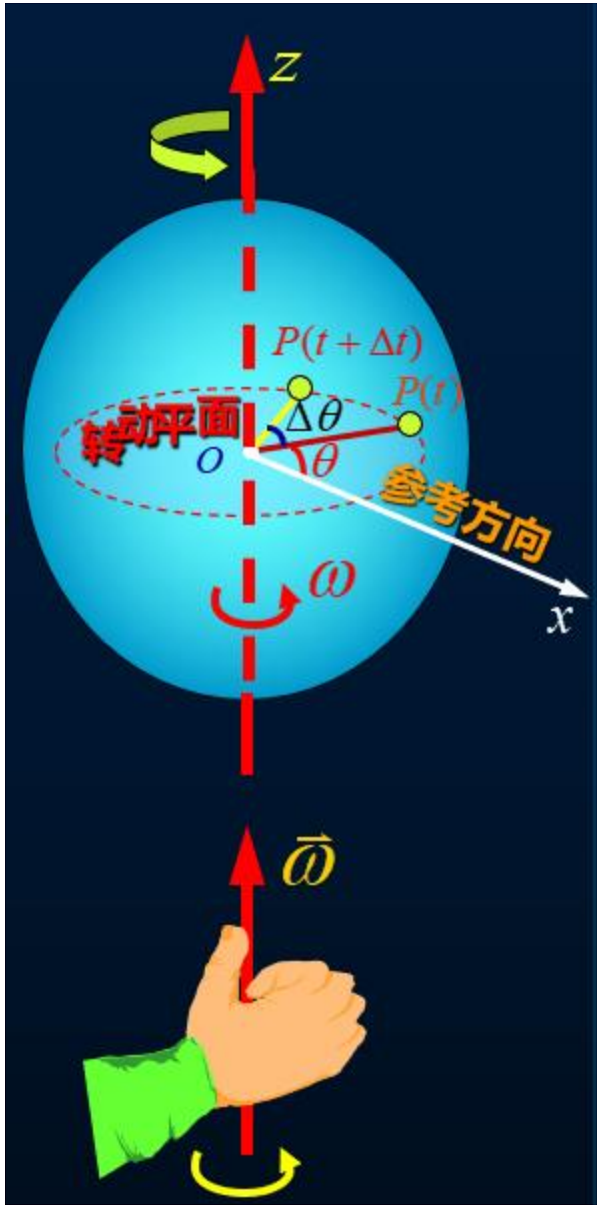
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

- 角速度

平均角速度 $\bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

瞬时角速度 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

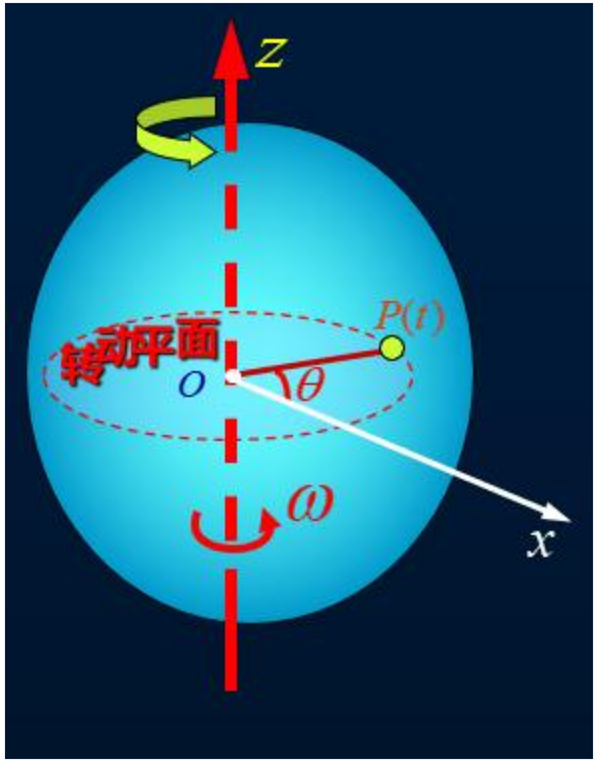
- **刚体转动的角速度矢量** $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$



角加速度

(瞬时) 角加速度

$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

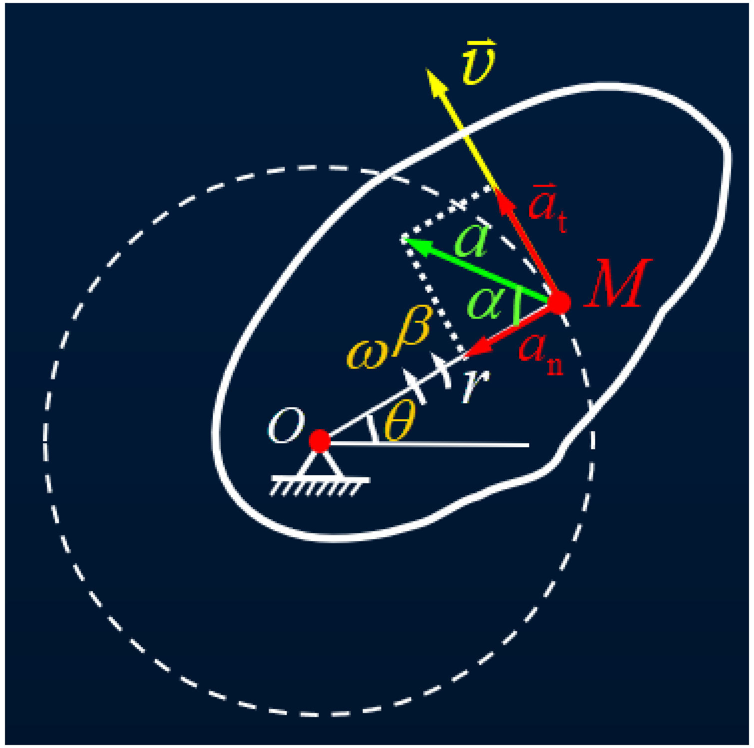


- **刚体转动的角加速度矢量** $\vec{\beta}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

在一般刚体运动中，角加速度矢量和角速度矢量一般不沿同一方向。

定轴转动刚体上一点的速度和加速度与角量的关系

刚体内各质点具有相同的角位移、角速度、角加速度，但由于各质点离转轴的距离和方向各不相同，所以刚体内各个质点的位移、速度、加速度（线量)各不相同。



$$v = \omega r$$

$$a_t = r\beta$$

$$a_n = \omega^2 r = \omega v$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

- M点的线速度、切向加速度沿圆轨迹的切线，指向由ω、β的正负确定。
- 刚体转动时，如果ω和β同号，刚体转动是加速的；如果ω和β异号，刚体转动是减速的。

- **第一类问题** —— **微分问题**

已知刚体转动运动方程$\theta=\theta(t)$，求角速度ω、角加速度β

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

- **第二类问题** —— **积分问题**

已知角速度或角加速度及初始条件，求转动运动方程$\theta=\theta(t)$

$$\omega=\omega_0+\int_0^t\beta\mathrm{d}t \qquad \theta=\theta_0+\int_0^t\omega\mathrm{d}t$$

- **对于刚体绕定轴匀变速转动，角加速度$\beta=$常量，有**

$$\omega=\omega_0+\beta t \qquad \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2 \qquad \omega^2={\omega_0}^2+2\beta(\theta-\theta_0)$$

例 电动机转子作定轴转动，开始时它的角速度$\omega_0=0$，经150s其转速达到12000r/min，已知转子的角加速度β与时间t的平方成正比。

求 在这段时间内，转子转过的圈数。

解 根据题意，设 $\beta = kt^2$ （k为比例常量）

由角加速度的定义，有 $$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = kt^2$$

分离变量并积分，有 $$\int_0^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_0^{t} kt^2\, dt$$

t 时刻转子的角速度为 $$\omega = \frac{1}{3}kt^3$$

当t =150s，转子的角速度为 $$\omega = \frac{2\pi \times 12000}{60}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 400\pi\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

则有 $$k = \frac{3\omega}{t^3} = \frac{3\times 400\pi}{150^3}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-4} = 10^{-3}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-4}$$

$$k=\frac{3\omega}{t^3}=\frac{3\times 400\pi}{150^3}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-4}=10^{-3}\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-4}$$

由此得 $\omega=\frac{1}{3}\times 10^{-3}\cdot t^3$

由角速度的定义 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ **，得转子在150s内转过的角度为**

$$\theta=\int_0^{150}\frac{1}{3}\times 10^{-3}\cdot t^3\mathrm{d}t = 4.219\times 10^4\ \mathrm{rad}$$

因而转子在这一段时间内转过的圈数为

$$N=\frac{\theta}{2\pi} = 6.718\times 10^3\ \mathrm{r}$$

刚体绕定轴转动定律

主要内容：

1. 力矩

2. 刚体绕定轴转动定律

3. 转动惯量

4. 定轴转动定律的应用

上海科技大学 ShanghaiTech University

力的大小、力的方向和力的作用线相对于转轴的位置是决定刚体转动效果的重要因素。

- 若刚体所受力 $\vec{F}$ 在转动平面内

力臂： $d = r\sin\phi$

力 $\vec{F}$ 对转轴z的力矩: $M_z = \pm Fd \quad = \pm Fr\sin\phi$

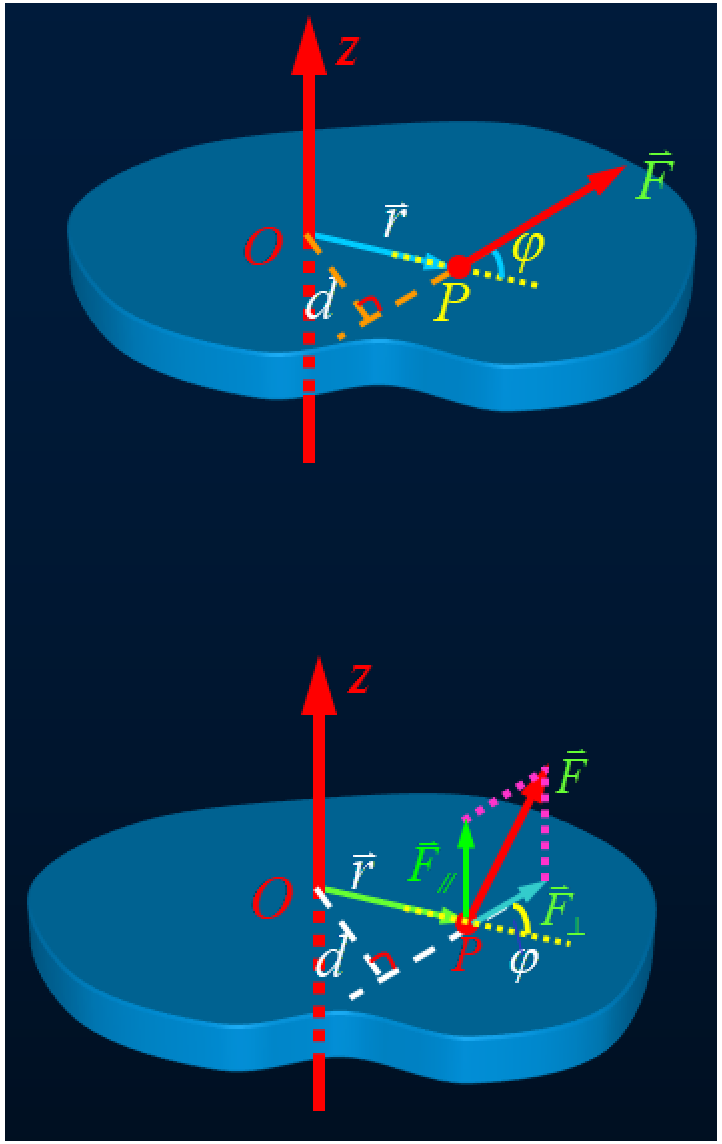
- 若刚体所受力 $\vec{F}$ 不在转动平面内

平行于转轴 $\vec{F}_{//}$ 分量不能使刚体发生转动

在定轴转动中，只有$\vec{F}_{\perp}$起作用

力对转轴z的力矩

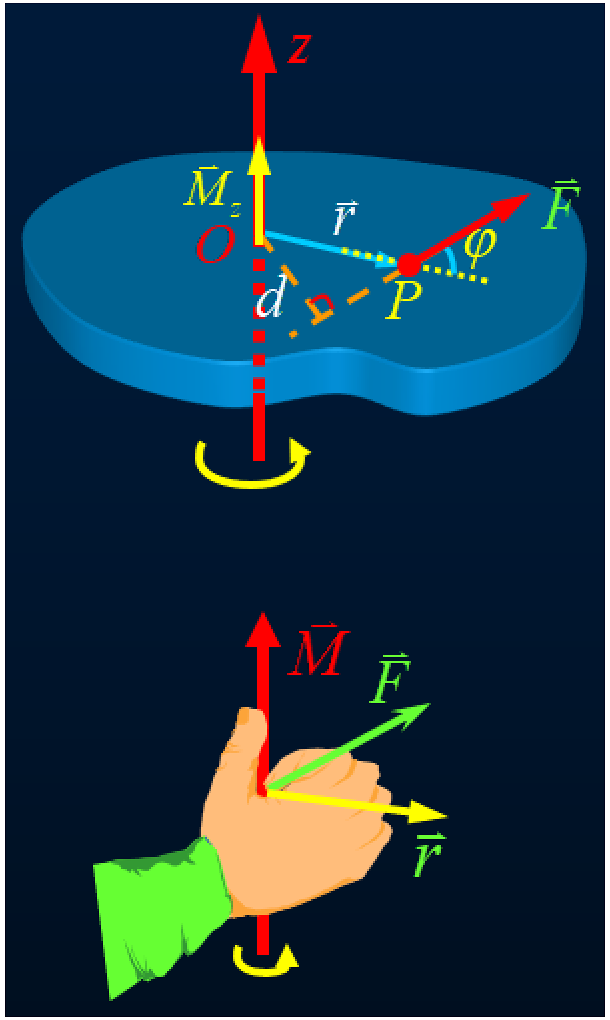
$$M_z = \pm F_{\perp}d \quad = \pm F_{\perp}r\sin\phi$$



- 对于刚体的定轴转动，力矩M_z

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}$$

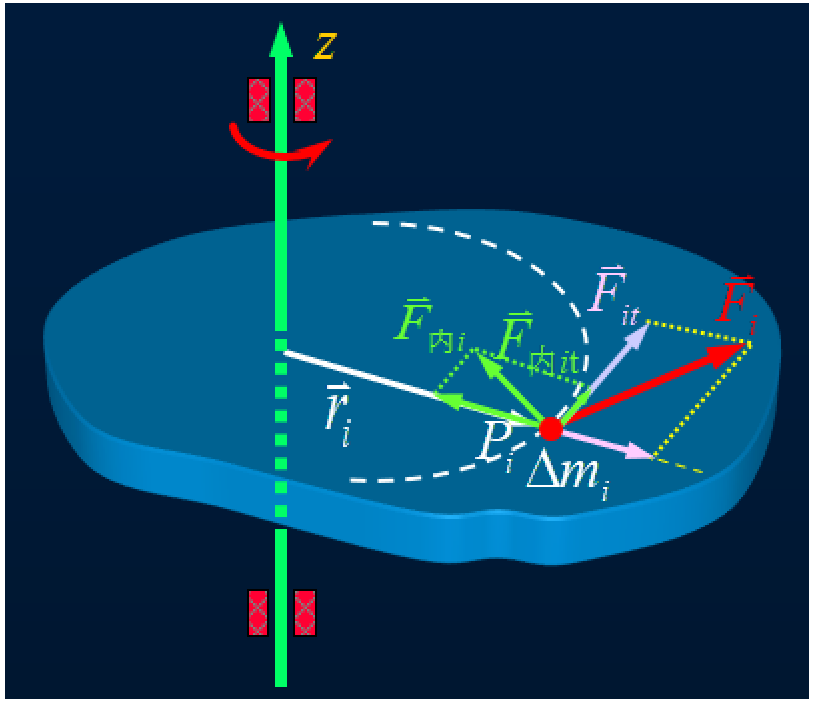
方向：满足右手螺旋法则。



刚体绕定轴转动定律

对P_i： $\vec{F}_i+\vec{F}_{内i}=\Delta m_i\vec{a}_i$

$\vec{F}_i$ **和** $\vec{F}_{内i}$ **的法向分力作用线通过转轴，其力矩为零。**



切向： $F_{it}+F_{内it}=\Delta m_i a_{it}$

$$=\Delta m_i r_i\beta$$

两边同乘以 r_i： $F_{it}r_i+F_{内it}r_i=\Delta m_i r_i{}^2\beta$

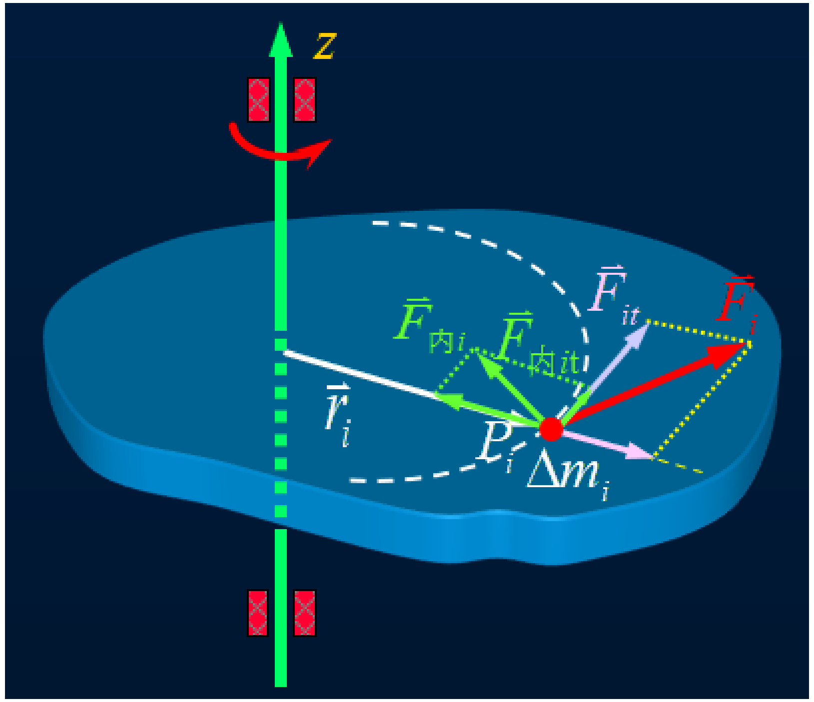
对刚体中所有质点求和 $\sum_i F_{it}r_i+\sum_i F_{内it}r_i=\sum_i \Delta m_i r_i{}^2\beta$

其中内力的力矩之和为 $\sum_i F_{内it}r_i=0$

所以 $\sum_i F_{it}r_i=\sum_i \Delta m_i r_i{}^2\beta$

合外力矩

$$M = \sum_i F_{it} r_i$$
$$= (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$$



刚体的转动惯量 $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$

$\boxed{M = J\beta}$ **(刚体定轴转动定律)**

作用在刚体上的合外力矩等于刚体对转轴的转动惯量与所获得的角加速度的乘积。

$$M = J\beta$$

上海科技大学 ShanghaiTech University

- 讨论

- 刚体定轴转动定律中的M是作用在刚体上的合外力矩；
- 刚体定轴转动定律是力矩的瞬时作用规律，也可以写成矢量关系式，即 $\vec{M} = J\vec{\beta}$
- 刚体定轴转动定律中的 $\vec{M}$、转动惯量 J 和角加速度 $\vec{\beta}$ 三个物理量都是相对于同一转轴而言的；
- 刚体定轴转动定律是刚体定轴转动动力学的基本方程，如同质点力学中的 $\vec{F} = m\vec{a}$ ；

力矩是使刚体改变转动状态的原因，是使刚体转动产生角加速度的原因。

- 刚体定轴转动定律仅适用于惯性系。

转动惯量

◆ 转动惯量的定义

刚体对某转轴的转动惯量 J 等于刚体内每个质点的质量与这个质点到该转轴垂直距离平方乘积之和。

◆ 计算转动惯量的基本公式

对质量离散分布的质点系 $J=\sum_i \Delta m_i {r_i}^2$

对质量连续分布的刚体 $J=\int r^2 \mathrm{d}m$

$$J=\begin{cases}\int_L r^2\lambda \mathrm{d}l & \text{质量线分布，}\lambda\text{为线密度(}\lambda=\frac{m}{L}\text{)} \\ \int_S r^2\sigma \mathrm{d}S & \text{质量面分布，}\sigma\text{为面密度(}\sigma=\frac{m}{S}\text{)} \\ \int_V r^2\rho \mathrm{d}V & \text{质量体分布，}\rho\text{为体密度(}\rho=\frac{m}{V}\text{)}\end{cases}$$

讨论

- **转动惯量J的物理意义：表示刚体在转动中惯性的大小的量度。** ——转动惯量J越大，转动状态越不容易改变。
- **影响转动惯量J大小的三个因素**

(1) **刚体的转轴位置：** 同一刚体依不同的转轴而有不同的J；

(2) **刚体的总质量：** 刚体的转动惯量与其自身的总质量成正比；

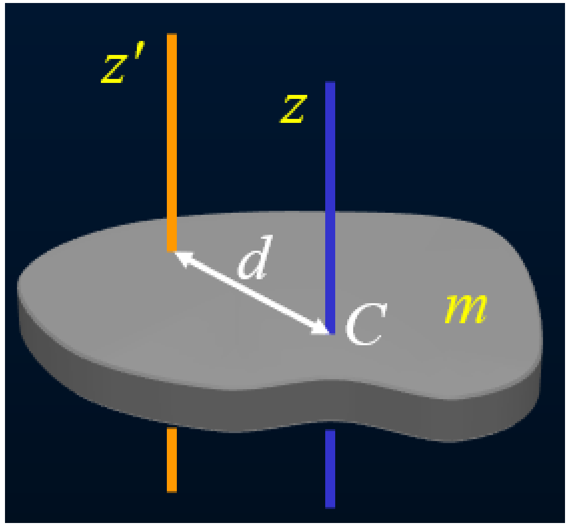
(3) **质量相对转轴的分布：** 转动惯量与其形状、大小和密度分布有关。

平行轴定理 $J = J_C + md^2$

$$I = I_0 + MR^2$$

平行轴定理

若我们已知刚体关于一个通过其质心的轴（称为**质心轴**）的转动惯量为 I_0， 那么我们可以通过平行轴定理简单地求出刚体关于另一个与质心轴平行的轴的转动惯量 I， 而无需重新算一次定积分． 令两个轴之间的距离为 R， 刚体质量为 M， 则计算公式为



$$I = I_0 + MR^2 \qquad (1)$$

要证明该式， 我们把刚体看做质点系， 令质心轴到质点 m_i 的垂直矢量为 $\mathbf{r}_i$， 平行轴到质心轴的垂直矢量为 $\mathbf{R}$， 则刚体关于平行轴的转动惯量为

$$I = \sum_i m_i (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i)^2 = R^2 \sum_i m_i + \sum_i m_i r_i^2 + 2\mathbf{R} \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_i \qquad (2)$$

由于质心轴经过刚体的质心， 上式最后一项中的求和为零 而右边第二项恰好是 I_0， 右边第一项中 $\sum_i m_i = M$， 立即可得式 1 .

质心参考系：质心系中质心坐标为0。

例 试求质量为m，长为l 的均质细杆对如下给定轴的转动惯量。

(1) 转轴垂直于杆并通过杆的中点；

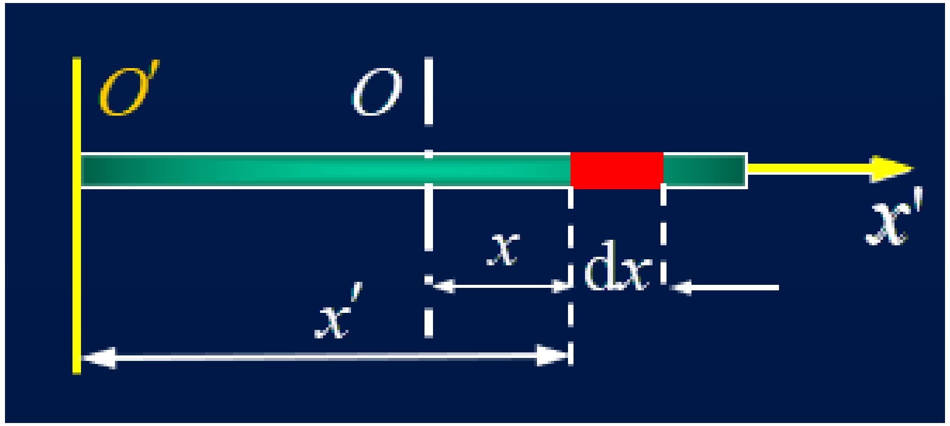
(2) 转轴垂直于杆并通过杆的一端。

解 (1) 取如图所示的坐标

在细杆上x 处取线元$\mathrm{d}x$

线元的质量为

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$



细杆对过中点的垂直转轴的转动惯量为

$$J = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \lambda \mathrm{d}x = \frac{1}{12}ml^2$$

(2) 以细杆的一端 O' 为坐标原点，取如图所示的坐标

则此时的转动惯量为：$J = \int_0^l x'^2 \lambda \mathrm{d}x' = \lambda \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3}ml^2$

- 平行轴定理　$J = J_C + md^2$

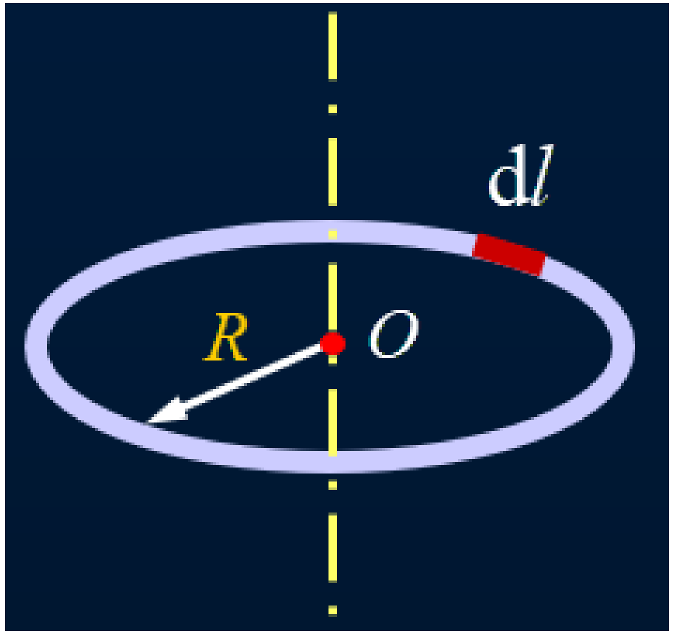
例 试求一质量为m，半径为R的均质细圆环对通过其中心且垂直于环面的转轴的转动惯量。

解 均质细圆环的质量线密度为

$$\lambda = \frac{m}{2\pi R}$$

在圆环上任取长度为$\mathrm{d}l$ 的线元，该线元的质量为

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l$$



由于圆环上各线元到转轴的距离均为R，所以圆环对该轴的转动惯量为

$$J = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda \mathrm{d}l = R^2 \lambda \int_0^{2\pi R} \mathrm{d}l = R^2 \frac{m}{2\pi R} \cdot 2\pi R = mR^2$$