上海科技大学
ShanghaiTech University

普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、强场激光物理、飞秒激光成丝。
https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm

保守力场的势能

上海科技大学 ShanghaiTech University

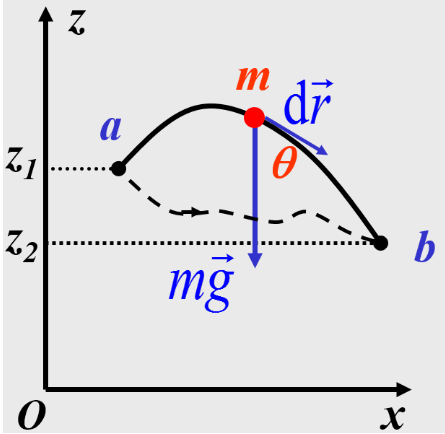
重力的功 $A_G = mgy_a - mgy_b = -(mgy_b - mgy_a)$

弹性力的功 $A_T = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2 = -(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2)$

万有引力的功 $A_w = -[(-\frac{Gmm_s}{r_b}) - (-\frac{Gmm_s}{r_a})]$

保守力的功可写成 $A_p = -(E_{pb} - E_{pa})$

对照动能定理 $A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$



➢结论：**位置函数E_p被称为质点的势能，则**

$$\boxed{E_{pb} - E_{pa} = -A_p}$$

在保守力场中，与保守力相关的势能增量等于保守力所作功的负值。

势能的讨论

- 只有在保守力的情况下才能引入势能的概念；对于非保守力，不存在势能的概念。

- 要确定保守力场中某一点势能，必须首先选定势能零点。

  保守场中质点在任一位置时的势能计算公式为

$$E_{pa} = \int_a^{b\,\text{（势能零点）}} \vec{F}_{\text{保}} \cdot d\vec{r}$$

  质点在任一位置时的势能等于质点从该位置经任意路径移动到势能零点时保守力所作的功。

- 势能的数值只有相对意义，但势能之差有绝对意义（势能的增量与势能零点的选择无关）；

- 势能为系统所有；　　从场的观点来看，势能属于保守力场。

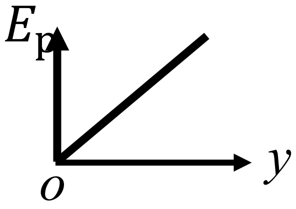
- 保守力的功与势能的关系：　$A_{\text{保}} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$

$$A_{\text{保}} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

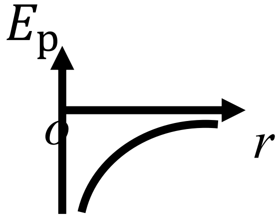
保守力在某一过程所作的功等于该过程的始末两个状态势能增量的负值

◆ 力学中常见势能的表达式

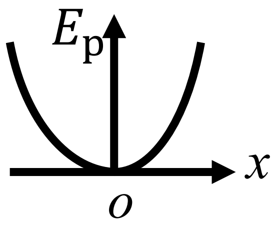
重力势能	$E_p = mgy$	**取地面为重力势能零点（即 $y = 0$ 处）**
万有引力势能	$E_p = -\dfrac{Gm_s m}{r}$	**取无穷远处为引力势能零点（即 $r = \infty$ 处）**
弹性势能	$E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$	**取弹簧自然长度时的端点为弹性势能零点（即 $x = 0$ 处）**



重力势能曲线



引力势能曲线



弹性势能曲线

已知势能，如何求(保守)力?

$$dA=\vec{F}_c\cdot d\vec{r}=-dE_p \qquad (1)$$

直角坐标系中，dEp的全微分

$$dE_p=\frac{\partial E_p}{\partial x}dx+\frac{\partial E_p}{\partial y}dy+\frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

$$=(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k})\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})$$

$$=(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k})\cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

比较(1)和(2)式

$$\vec{F}_c=-(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k})$$

$$F_x=-\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y=-\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z=-\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

上海科技大学 ShanghaiTech University

例　有一双原子分子由A、B两原子组成，设A原子位于坐标原点，B原子与A原子的间距为x，这两原子之间的作用力为分子力（分子力是保守力，可用势能来描述），且这两原子相互作用的势能函数可以表示为

$$E_{\mathrm{p}}(x)=\frac{a}{x^{3.4}}-\frac{b}{x^{2}}$$

式中a和b为正常数，x以m为单位，势能$E_{\mathrm{p}}(x)$以J为单位。

求　（1）势能 $E_{\mathrm{p}}(x)=0$ 时，$x=?$

（2）原子间的相互作用力和平衡位置。

解　（1）由 $\dfrac{a}{x^{3.4}}-\dfrac{b}{x^{2}}=0$ 　　解得 $x=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1.4}}$

当$x\rightarrow\infty$时，上述方程也能成立

则 $x\rightarrow\infty$ 也是一个解。

（2）保守力等于相关势能梯度的负值，即

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(x)}{\mathrm{d}x} \Leftarrow E_\mathrm{p}(x) = \frac{a}{x^{3.4}} - \frac{b}{x^2}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a}{x^{3.4}} - \frac{b}{x^2}\right) = \frac{3.4a}{x^{4.4}} - \frac{2b}{x^3}$$

平衡位置，$F_x = 0$

由 $$\frac{3.4a}{x^{4.4}} - \frac{2b}{x^3} = 0$$

解得 $$x = \left(\frac{1.7a}{b}\right)^{\frac{1}{1.4}}$$ （平衡位置）

$x = \infty$（舍去）

机械能定理（功能原理）

上海科技大学 ShanghaiTech University

从动能定理出发 $\boxed{A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{kb} - E_{ka}}$

$$A = A_{保守力} + A_{非保守力} = A_{非保守力} - \Delta E_P$$

$$\therefore A_{非保守力} = \Delta E_P + \Delta E_K$$

$$= (E_{Pb} + E_{Kb}) - (E_{Pa} + E_{Ka})$$

若 $A_{非保守力} = 0$ $\quad E_{Pb} + E_{Kb} = E_{Pa} + E_{Ka}$

如果 非保守力做的功不为0， 那么a b两处的机械能不相等 ！！

质点系：一个到几个

质点系的动能定理

质点动能定理 $A_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$ 其中 $A_i = A_{ie} + A_{iI}$ （内力，外力）

对系统内所有质点求和 $\sum_i A_{ie} + \sum_i A_{iI} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$

$$\boxed{A_{外} + A_{内} = \Delta E_k}$$

质点系的动能定理：外力的总功与内力的总功之代数和等于质点系动能的增量

质点系的功能原理

上海科技大学 ShanghaiTech University

$$A_{内} = A_{保守内力} + A_{非保守内力}$$

$$\therefore A_{外} + (A_{保守内力} + A_{非保守内力}) = E_{kb} - E_{ka}$$

而 $$A_{保守内力} = -(E_{Pb} - E_{Pa})$$

$$A_{外} + A_{非保守内力} = (E_k + E_p)_b - (E_k + E_p)_a$$

$$E = E_k + E_p$$ ——机械能

故 $$\boxed{A_{外} + A_{非保守内力} = \Delta E}$$

功能原理：质点系机械能的增量等于外力的功和非保守内力的功的总和。

质点系的机械能守恒定律

系统的功能原理

$$A = A_{外} + A_{非保内} = E_b - E_a$$

当 $A = A_{外} + A_{非保内} = 0$

则 $\boxed{E = E_k + E_p = 恒量}$ **(质点系的机械能守恒定律)**

如果系统中只有保守内力作功，而其它内力和外力都不作功，或作功的总和始终为零，则系统总机械能保持不变。

应用功能原理或机械能守恒定律解题步骤

(1) 选取研究对象。

(2) 分析受力和守恒条件。

判断是否满足机械能守恒条件，如不满足，则应用功能原理求解。

(3) 明确过程的始、末状态。

需要选定势能的零势能位置。

(4) 列方程。

(5) 解方程，求出结果。

(6) 讨论解的物理意义。

例　如图，放在倾角为α 的斜面上的质量为m的木块，由静止自由下滑，与劲度系数为k的轻弹簧发生碰撞，木块将弹簧最大压缩了x m。设木块与斜面之间的摩擦系数为μ。

求　开始碰撞时木块速率v为多大?

解　受力如图，设碰撞时及压缩最大时木块高度分别为h_1、h_2

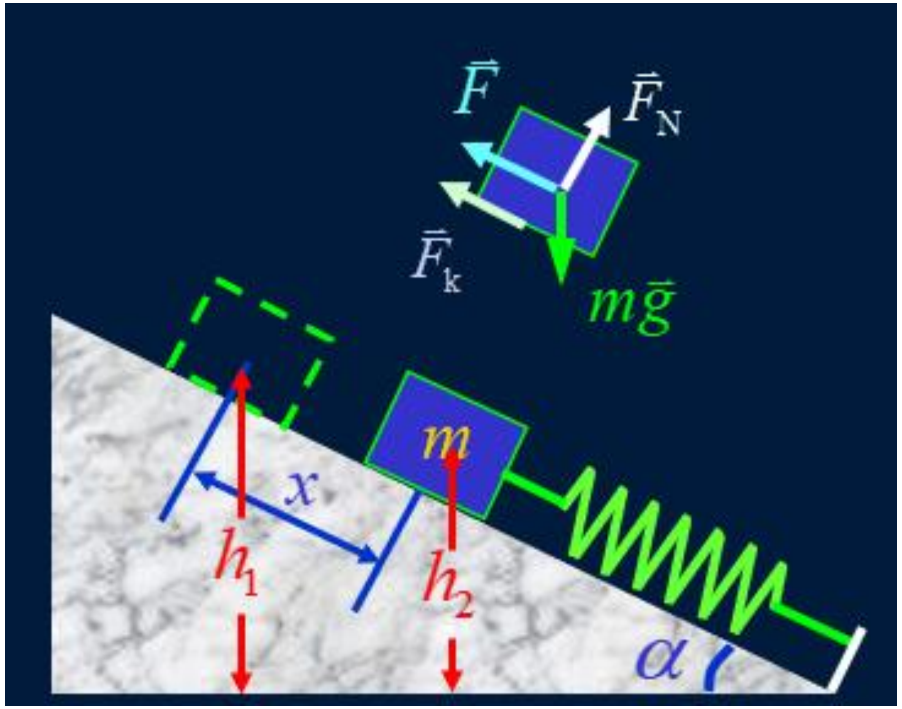
选水平面为重力势能零点、选弹簧的自然长度端为弹性势能零点

则
$$A_{摩擦力} = -(\mu mg\cos\alpha)x$$

$$= \left(mgh_2 + \frac{1}{2}kx^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv^2 + mgh_1\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{kx^2 + 2\mu mgx\cos\alpha - 2mg(h_2 - h_1)}{m}}$$

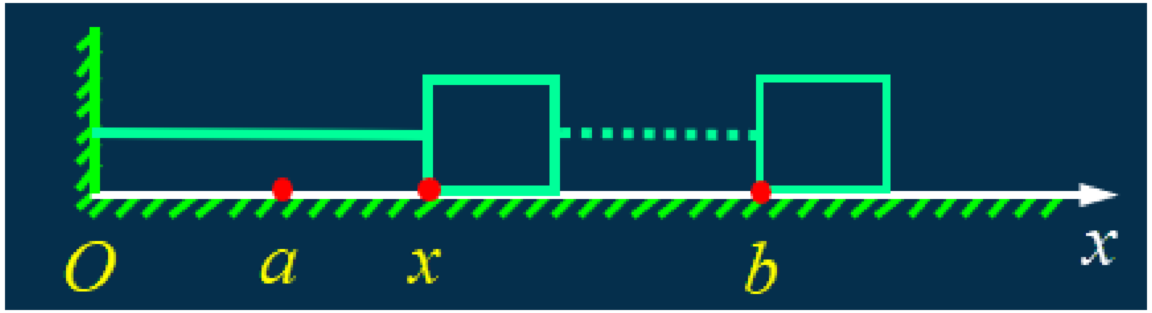
$$= \sqrt{\frac{kx^2 + 2\mu mgx\cos\alpha - 2mgx\sin\alpha}{m}}$$



上海科技大学 ShanghaiTech University

例　质量为m的滑块置于粗糙水平桌面上，并系于橡皮绳的一端，橡皮绳的另一端系于墙上。橡皮绳原长为a，处于拉伸状态的橡皮绳相当于劲度系数为k的弹簧。滑块与桌面的摩擦系数为μ。现将滑块向右拉伸至橡皮绳长为b后再由静止释放。

求　滑块撞击墙时的速度多大？



解　取坐标系如图

设滑块撞墙时的速度为v

受力分析　　$b \to a$:　$F = -k(x-a)$ ，$F_{\mathrm{k}} = \mu mg$

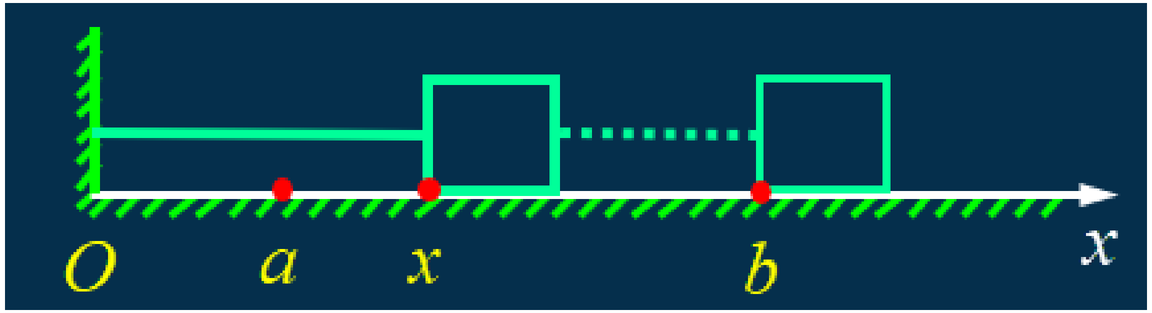
$a \to O$:　$F_{\mathrm{k}} = \mu mg$

方法1：　对全过程应用动能定理

$$A = \int_b^a F\cos\theta \mathrm{d}x - \mu mgb = \int_b^a [-k(x-a)]\mathrm{d}x - \mu mgb = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \theta = 0$$

由此解得　$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(b-a)^2 - 2\mu gb}$$

方法2：



对滑块运动的全过程应用功能原理，取橡皮绳自然长度的a点为势能零点。

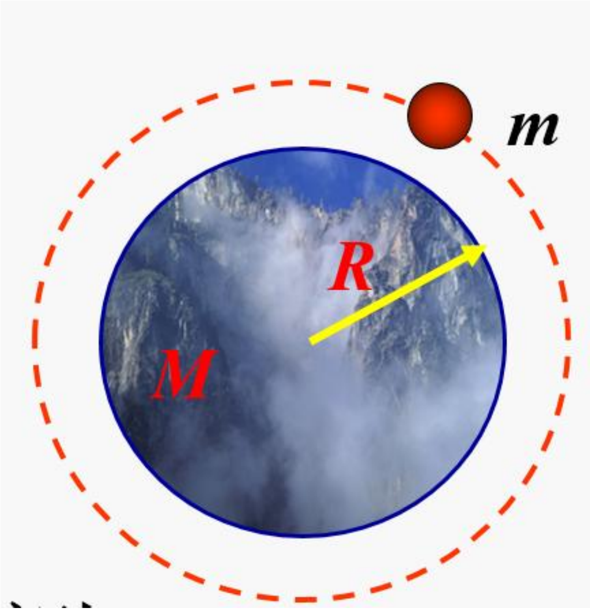
则有 $$A_{外} = -\mu mgb = \frac{1}{2}m\text{v}^2 - \frac{1}{2}k(b-a)^2$$

由此解得 $$\text{v} = \sqrt{\frac{k}{m}(b-a)^2 - 2\mu gb}$$

在功能原理中，以势能增量的负值来代替弹性力的功，可以避免繁杂的积分运算，使求解过程大为简化。

例：计算第一宇宙速度

已知：地球半径为R，质量为M，卫星质量为m。要使卫星在距地面h 高度绕地球作匀速圆周运动，求其发射速度。



解： 设发射速度为v_1，绕地球的运动速度为v。

机械能守恒： $\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R+h}$

万有引力提供向心力： $G\frac{Mm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$

$\because \quad h << R$

得： $v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \frac{GM}{R+h}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{gR(2 - \frac{R}{R+h})}$

$$\boxed{v_1 \approx \sqrt{gR} = 7.9 \times 10^3 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

第一宇宙速度

$G\frac{Mm}{R^2} = mg, \qquad GM = gR^2$

例：计算第二宇宙速度

宇宙飞船脱离地球引力而必须具有的发射速度。

（1） 脱离地球引力时，飞船的动能必须大于或等于零。

（2） 脱离地球引力处，飞船的引力势能为零。

由机械能守恒： $\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{Mm}{R} = E_{k\infty} + E_{p\infty} = 0$

得：

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1 = 11.2 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

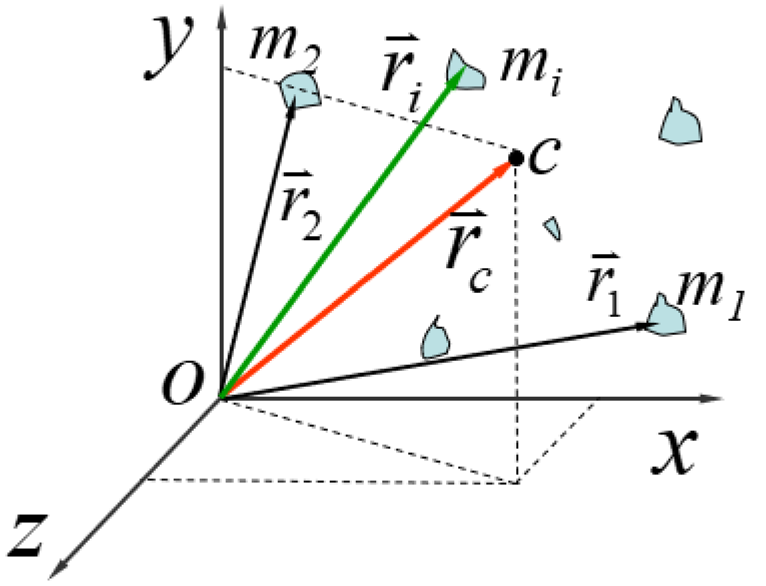
质心系 – 几个到无穷多个

质心

质心：质心是与质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。

由n个质点组成的质点系，其质心的位置：

$$\vec{r}_C=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_i\vec{r}_i+\ldots}{m_1+m_2+\ldots+m_i+\ldots}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{m'}$$



➢对质量离散分布的物系：

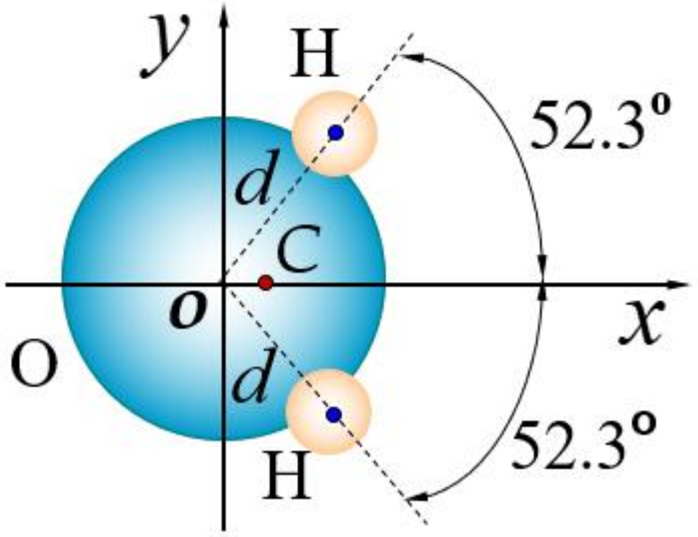
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m'} \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m'} \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m'}$$

➢对质量连续分布的物体：

$$x_C = \frac{1}{m'}\int x\mathrm{d}m, \quad y_C = \frac{1}{m'}\int y\mathrm{d}m, \quad z_C = \frac{1}{m'}\int z\mathrm{d}m$$

对密度均匀、形状对称的物体，质心在其几何中心．

例1 水分子H_2O的结构如图．每个氢原子和氧原子中心间距离均为$d=1.0\times10^{-10}$ m，氢原子和氧原子两条连线间的夹角为$\theta=104.6^\circ$．求水分子的质心．



解

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum m_i}=\frac{m_{\mathrm{H}} d \sin 37.7^{\circ}+m_{\mathrm{O}}\times 0+m_{\mathrm{H}} d \sin 37.7^{\circ}}{m_{\mathrm{H}}+m_{\mathrm{O}}+m_{\mathrm{H}}}$$

$$x_C=6.8\times10^{-12}\ \mathrm{m}$$

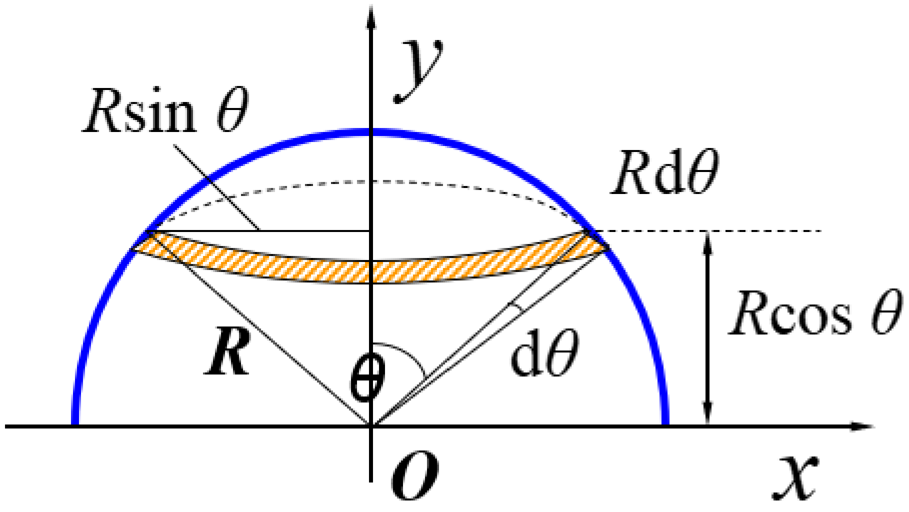
$$y_C=0$$

$$\vec{r}_C=6.8\times10^{-12}\ \mathrm{m}\vec{i}$$

例2　求半径为 R 的匀质半薄球壳的质心

解　选如图所示的坐标系．

在半球壳上取一如图圆环



- 圆环的面积　　$\mathrm{d}s = 2\pi R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta$

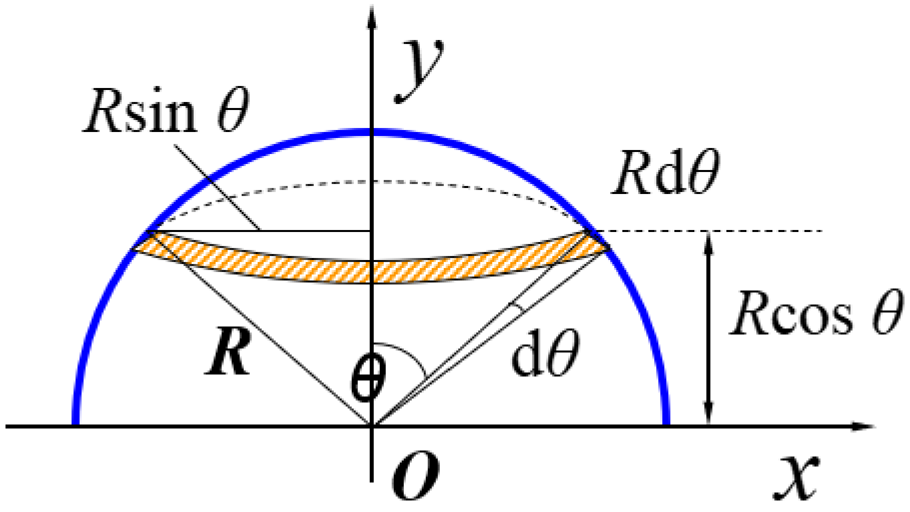
- 圆环的质量　　$\mathrm{d}m = \sigma 2\pi R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

由于球壳关于 y 轴对称，故 $x_c = 0$

$$y_C = \frac{1}{m'}\int y\mathrm{d}m = \frac{\int y\cdot\sigma 2\pi R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sigma 2\pi R^2}$$

$$y = R\cos\theta$$

$$y_C = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = R/2$$



其质心位矢： $\vec{r}_C = R/2\,\vec{j}$

质心运动定理

质心的位矢：

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m'}$$

$$m'\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

上式两边对时间 t 求一阶导数，得质心的速度、动量

$$m' \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$m'\vec{v}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

再对时间 t 求一阶导数，得质心的加速度

$$m'\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i)}{\mathrm{d}t}$$

牛顿第二定律的动量描述：$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\mathrm{ex}}$

$$\vec{F}^{\mathrm{ex}}=m'\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}_C}{\mathrm{d}t}=m'\vec{a}_C$$

质心运动定理： 作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以质心的加速度。

质心参考系： 物体系的质心在其中静止的平动参考系，多数情况下，质心选为质心系的原点。

$$\vec{r}_{\mathrm{c}}\equiv 0\rightarrow\vec{v}_{\mathrm{c}}=0\rightarrow\sum_i m_i\vec{v}_i'=0$$

零动量系