普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、强场激光物理、飞秒激光成丝。
https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm

1. 考试时间：**2025.11.17，10:15-12:15**，120分钟，允许使用计算器。

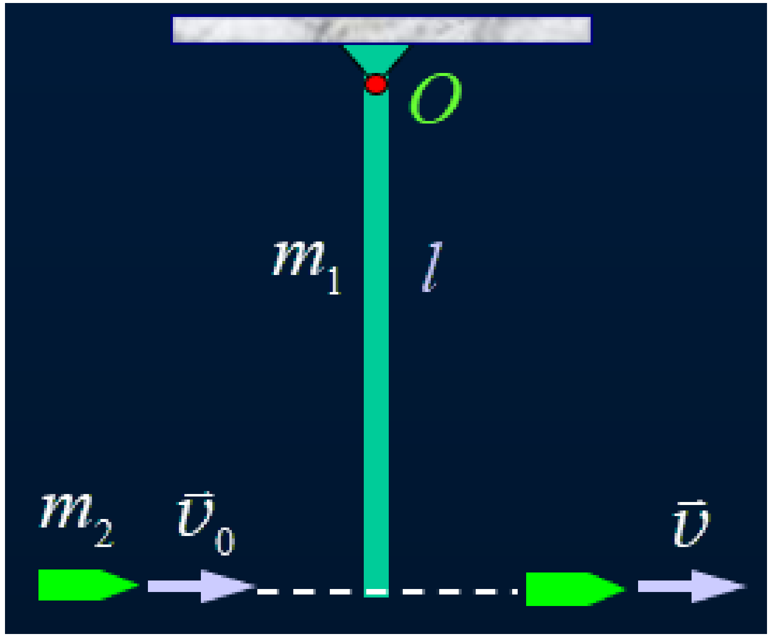
2. 考试地点：**信息学院1D104 & 信息学院1D106。**

3. 闭卷考试，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。

4. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为。

例 如图，一质量为m_1，长度为l的均质细棒，可绕过其顶端的光滑水平轴自由转动。质量为m_2的子弹以水平速度v_0射入静止的细棒下端，穿出后子弹的速度减小为$v_0/4$。

求 子弹穿出后棒所获得的角速度ω。



解 设子弹与细棒以初速v_0接触相碰时为起始状态，子弹以速度$v_0/4$穿出棒时为末状态（用两种不同的解法）。

(1)应用动量定理和角动量定理求解

设棒对子弹的阻力为F，对子弹应用动量定理

$$\int_0^t F\mathrm{d}t = m_2 \mathrm{v} - m_2 \mathrm{v}_0 = -\frac{3}{4} m_2 \mathrm{v}_0 \qquad (1)$$

子弹对细棒的冲击力为F',对细棒应用角动量定理

$$\int_0^t F' l \mathrm{d}t = J\omega \qquad (2)$$

$$\int_0^t F\mathrm{d}t = m_2\mathrm{v} - m_2\mathrm{v}_0 = -\frac{3}{4}m_2\mathrm{v}_0 \qquad (1)$$

$$\int_0^t F'l\mathrm{d}t = J\omega \qquad (2)$$

而 $F' = -F$ **且** $J = \frac{1}{3}m_1 l^2$ **则式(2)变为**

$$\int_0^t F\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}m_1 l\omega \qquad (3)$$

比较式(1)和式(3)可得

$$-\frac{1}{3}m_1 l\omega = -\frac{3}{4}m_2\mathrm{v}_0$$

$$\omega = \frac{9m_2\mathrm{v}_0}{4m_1 l}$$

(2) 应用系统角动量守恒定律求解

取子弹和细棒为一系统。在子弹射入棒端并从棒中穿出的过程中，子弹与细棒之间的作用力为内力，轴承上的作用力以及重力均不产生力矩，故系统所受合外力矩为零，系统角动量守恒。应用系统角动量守恒定律，有

$$m_2 l \mathrm{v}_0 = m_2 l \mathrm{v} + J\omega \qquad \text{且} \qquad J = \frac{1}{3} m_1 l^2$$

由此解得

$$\omega = \frac{m_2 l(\mathrm{v}_0 - \mathrm{v})}{J} = \frac{\frac{3}{4} m_2 l \mathrm{v}_0}{\frac{1}{3} m_1 l^2}$$

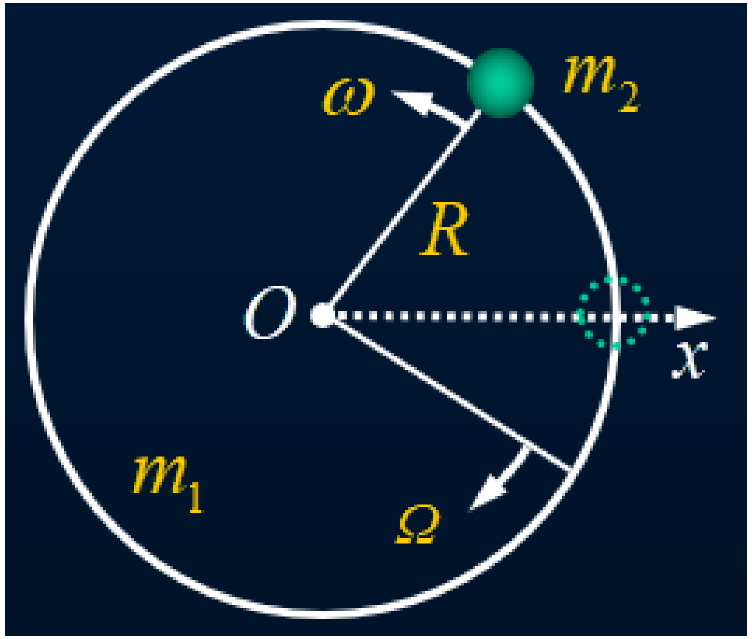
所以

$$\omega = \frac{9 m_2 \mathrm{v}_0}{4 m_1 l}$$

例 如图，一个质量为m_1，半径为R 的圆形水平转台可绕通过其中心的光滑竖直轴转动。质量为m_2的人站在转台的边缘，开始时，人和转台都相对于地面静止。

求 当人沿转台边缘走完一周时，转台对地面转过的角度。

解 取人和转台作为系统。系统所受合外力矩为零，系统角动量守恒。



人和转台对轴的转动惯量为

$$J_{人} = m_2 R^2$$

$$J_{台} = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

设人和转台对地的角速度分别为ω和Ω，则

$$J_{人}\omega - J_{台}\Omega = 0$$

以θ和Θ分别表示人和转台对地的角坐标，则

$$m_2 R^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} m_1 R^2 \frac{\mathrm{d}\,\Theta}{\mathrm{d}t} \Rightarrow m_2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} m_1 \mathrm{d}\Theta$$

两边积分，有

$$\int_0^{\theta} m_2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{\Theta} \frac{1}{2} m_1 \mathrm{d}\Theta \Rightarrow m_2 \theta = \frac{1}{2} m_1 \Theta$$

当人在转台上走动一周时，人对转台走过2π，对地走过

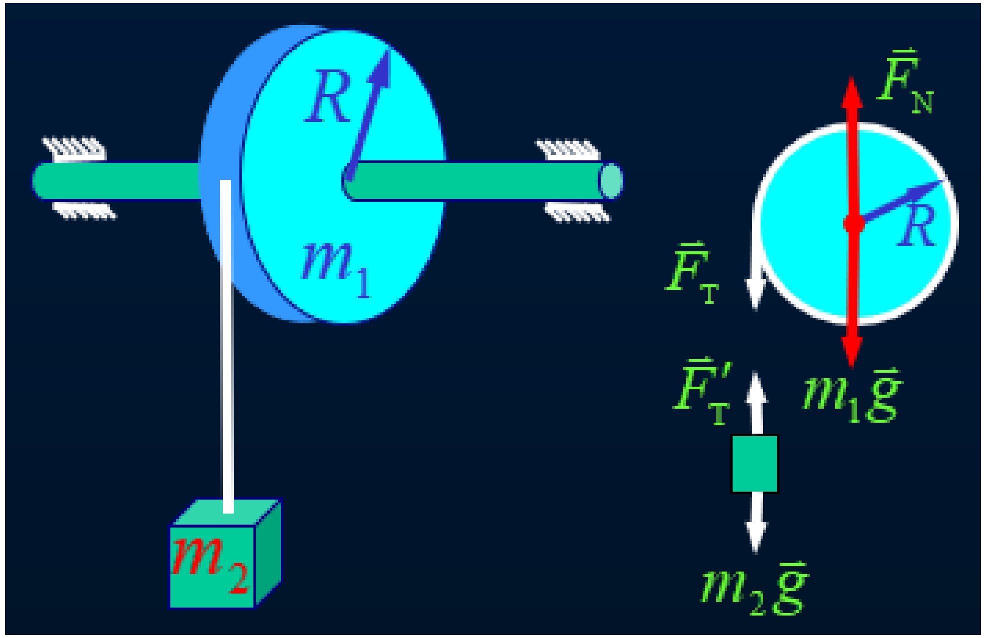
$$\theta = 2\pi - \Theta$$

则得 $$\Theta = \frac{4\pi m_2}{m_1 + 2m_2}$$

例 **如图，一质量为m_1、半径为R的定滑轮（可视为均质圆盘），滑轮上绕着轻绳，轻绳一端系一质量为m_2的物体。若滑轮轴承处的摩擦力矩可忽略不计。**

求 **物体由静止下落高度h时，物体的速度和定滑轮的角加速度。**

解 **定滑轮和物体的受力如图**



设物体的初速度为v_0，物体下降距离h时，物体的速度为v，定滑轮的角速度为ω，其转过的角位移为$\Delta\theta$。

由动能定理，对定滑轮有

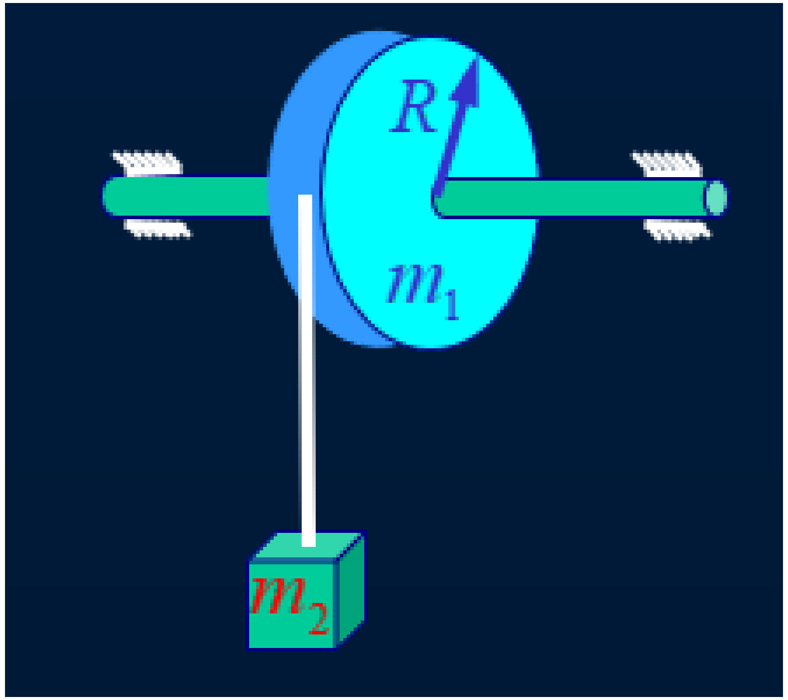
$$F_T R\Delta\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

由质点动能定理，对物体有 $m_2gh - F'_T h = \frac{1}{2}m_2 v^2 - \frac{1}{2}m_2 v_0^2$

线量与角量的关系

$$h = R\Delta\theta \qquad \mathrm{v} = R\omega$$

且 $F_{\mathrm{T}} = F'_{\mathrm{T}}$ ， $J = \frac{1}{2}m_1R^2$



联立求解并代入初始条件，即 $t=0$时，$v_0=0$，$\omega_0=0$

物体由静止下落高度h时的速度为 $\mathrm{v} = 2\sqrt{\frac{m_2gh}{m_1+2m_2}}$

将上式对时间求导，得定滑轮的角加速度

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{m_2g}{m_1+2m_2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{h}}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

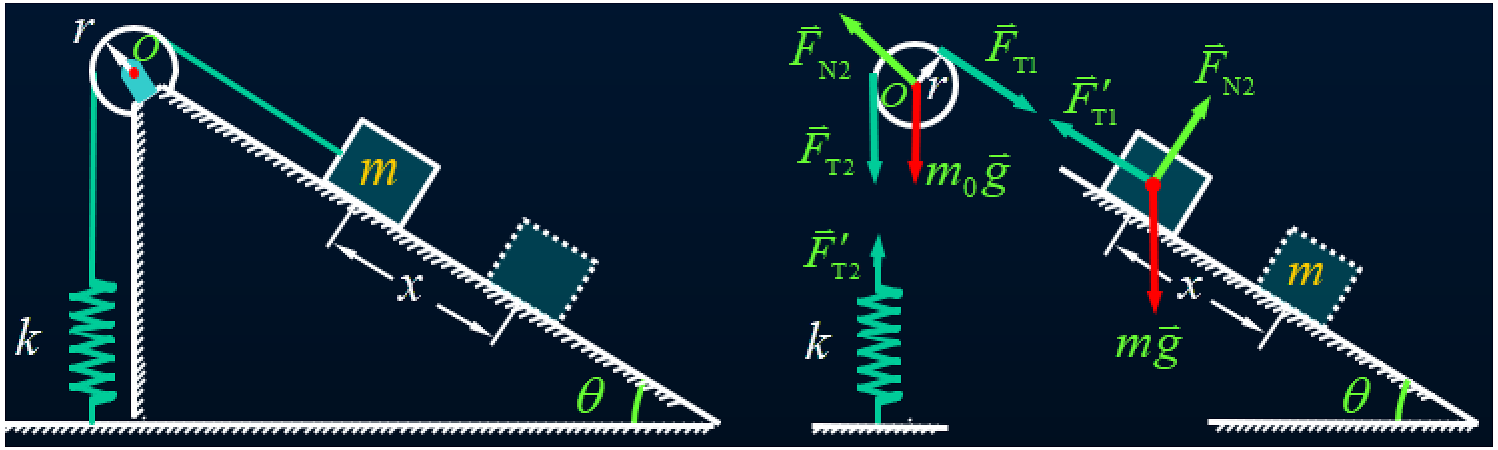
由于 $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = R\omega$ **，则有** $\beta = \frac{2m_2g}{(m_1+2m_2)R}$

例 如图，系统由静止开始释放，释放时弹簧处于自然状态。已知滑轮半径为 $r = 0.3\text{m}$ ，转动惯量为 $J = 0.5\text{kg}\cdot\text{m}^2$。滑块的质量为 $m = 2\text{kg}$ ，斜面倾角为 $\theta = 37^0$ ，弹簧的劲度系数为 $k = 20\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ 。滑块与斜面、滑轮与轴承之间的摩擦均可忽略不计，轻绳不可伸长。

求 (1) 当滑块沿斜面滑下 1.0m时，它的速率多大?

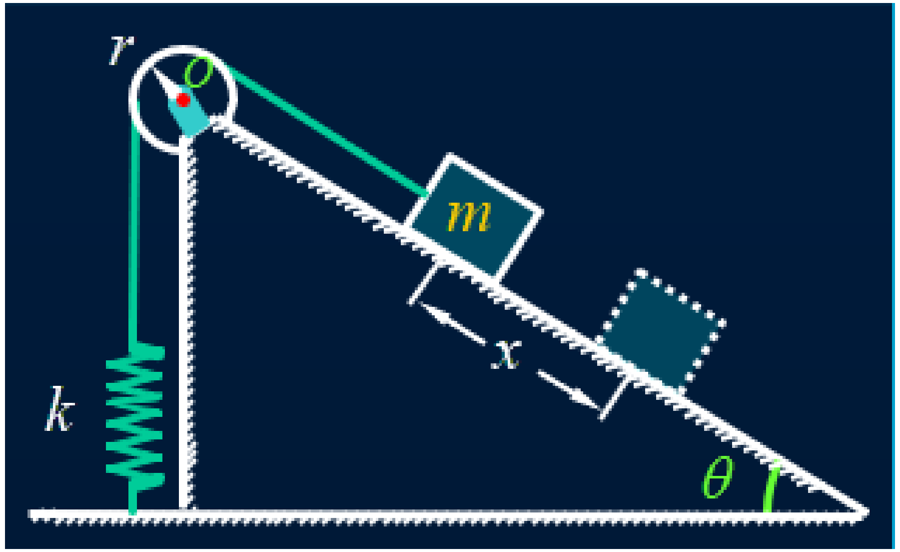
(2) 滑块沿斜面将下滑多远?

(3) 当滑块速率达到最大值时，它已滑下多远?



取弹簧、滑轮、滑块、斜面和地球为研究系统，经分析知系统机械能守恒。

取滑块的初始位置为重力势能零点，弹簧自然长度点为弹性势能零点。



设滑块沿斜面下滑距离为x时的速率为v，则

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}kx^2-mgx\sin\theta=0$$

$$\omega=\mathrm{v}/r$$

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{\mathrm{v}}{r}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2-mgx\sin\theta=0$$

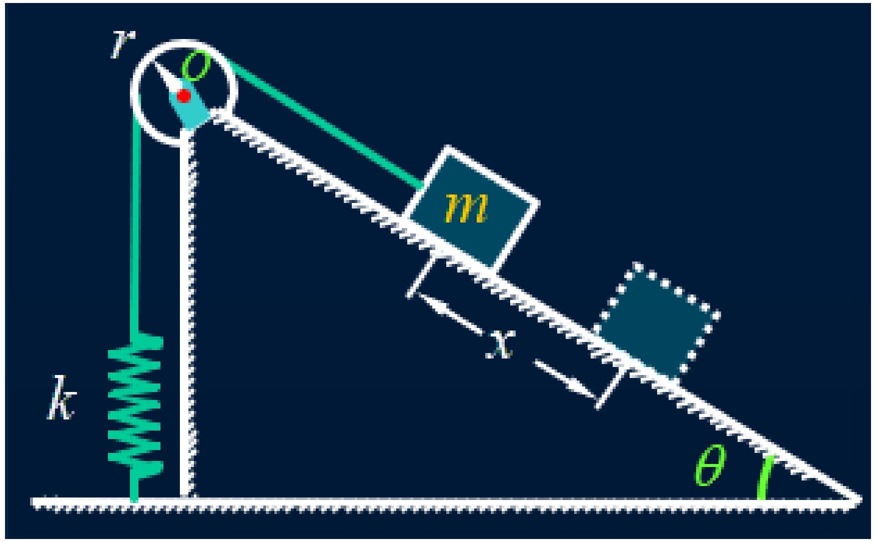
$$\mathrm{v}=\sqrt{\frac{2mgx\sin\theta-kx^2}{m+J/r^2}}$$

(参 数)

$$\mathrm{v}=\sqrt{3.1x-2.6x^2}$$

任意位置时滑块的速率为

$$v = \sqrt{3.1x - 2.6x^2}$$



(1) 当$x = 1.0$m时，速率为

$$v = \sqrt{3.1x - 2.6x^2} = 0.7\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

(2) 当$x = x_{max}$时，滑块速率为零

$$v = \sqrt{3.1x - 2.6x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{max} = 1.2\mathrm{m}$$

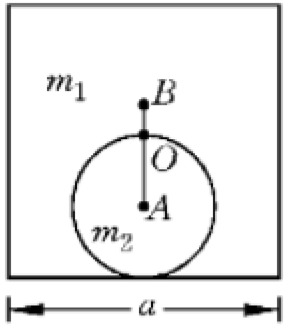
(3) 当滑块速率达到最大值时，有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{3.1 - 5.2x}{2\sqrt{3.1x - 2.6x^2}} = 0$$

则当$x = 0.6$ m 时，速率为 $v_{max} = 0.96\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

例题10

有一正立方体铜块，边长为 a。今在其下半部中央挖去一截面半径为 $a/4$ 的圆柱形洞 求剩余铜块的质心位置。



解 如图 3.11 所示为垂直于圆柱洞轴线而前后等分铜块的平面。由质量分布的对称性可知，铜块的质心应在此平面内通过圆洞中心的竖直线上。完整铜块的质心应在正立方体中心 O 处。把挖去的铜柱塞回原处，其质心应在其中心 A 处。挖去铜柱后剩余铜块的质心应在 AO 连线上，设在 B 处。由于挖去的铜柱塞回后铜块复归完整，由此完整铜块的质心定义应有

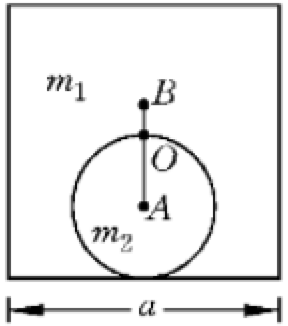


图 3.11 习题 3.13 解用图

$$m_1 BO = m_2 AO$$

其中 $m_2 = \pi\left(\frac{a}{4}\right)^2 a\rho$ 为铜柱的质量，$m_1 = a^3\rho - m_2 = a^3\left(1-\frac{\pi}{16}\right)\rho$ 为挖去铜柱后剩余铜块的质量（ρ 为铜的密度）。

将 m_1 和 m_2 代入上式可得

$$BO = \frac{m_2}{m_1}AO = \frac{\pi/16}{1-\pi/16}\times AO = \frac{\pi a}{4\times(16-\pi)}$$

$$= 0.061a$$

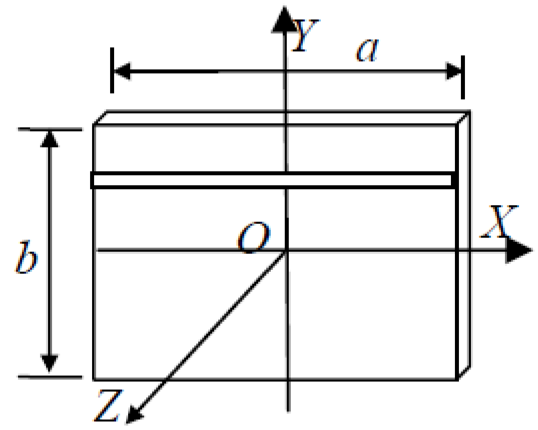
即剩余铜块的质心在正方体中心上方 $0.061a$ 处。

例23 一矩形均匀薄板，边长为 a 和 b，质量为 M，中心 O 取为原点，坐标系 $OXYZ$ 如图所示．试证明：

（1）薄板对 OX 轴的转动惯量为

$$I_{OX}=\frac{1}{12}Mb^2;$$

（2）薄板对 OZ 轴的转动惯量为 $I_{OZ}=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$.

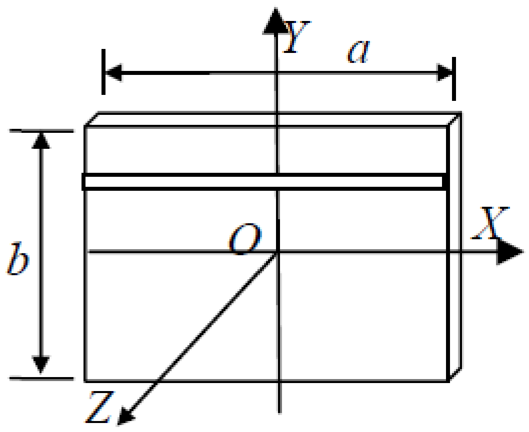


[证明] 薄板的面积为 $S = ab$，
质量面密度为 $\sigma = M/S$.

（1）在板上取一长为 a，宽为 $\mathrm{d}y$ 的矩形元，其面积为 $\mathrm{d}S = a\mathrm{d}y$，
其品质为 $\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S$，
绕 X 轴的转动惯量为 $\mathrm{d}I_{OX} = y^2\mathrm{d}m = \sigma a y^2 \mathrm{d}y$，
积分得薄板对 OX 轴的转动惯量为

$$I_{OX} = \sigma a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \mathrm{d}y = \sigma a \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-b/2}^{b/2}$$

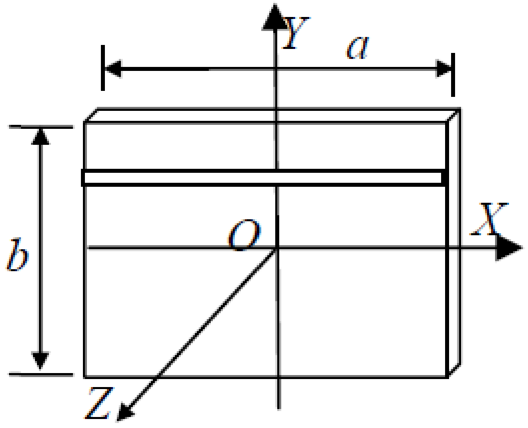
$$= \frac{1}{12}\sigma a b^3 = \frac{1}{12} M b^2.$$



同理可得薄板对 OY 轴的转动惯量为

$$I_{OY} = \frac{1}{12} M a^2.$$

方法二：垂直轴定理．在板上取一品质元 dm，绕 OZ 轴的转动惯量为 $\mathrm{d}I_{OZ} = r^2\mathrm{d}m$．由于 $r^2 = x^2 + y^2$，所以 $\mathrm{d}I_{OZ} = (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \mathrm{d}I_{OY} + \mathrm{d}I_{OX}$,



因此板绕 OZ 轴的转动惯量为

$$I_{OZ} = I_{OY} + I_{OX} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2).$$

垂直轴定理

若我们要求一个刚体薄片关于一条与其垂直的轴（称为**垂直轴**）的转动惯量 I，我们可以在薄片上取两个互相垂直且与垂直轴相交的轴并分别计算薄片关于这两条轴的转动惯量 I_x 和 I_y . 这样就有

$$I = I_x + I_y \qquad (3)$$

$$I_x \approx \int y^2 dm \,, \qquad I_y \approx \int x^2 dm,$$

要证明该式，我们建立空间直角坐标系，令垂直轴与 z 轴重合，另外两条轴分别与 x 轴和 y 轴重合. 把刚体看做质点系，令质点 m_i 的坐标为 $(x_i, y_i, 0)$

$$I = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_x + I_y \qquad (4)$$

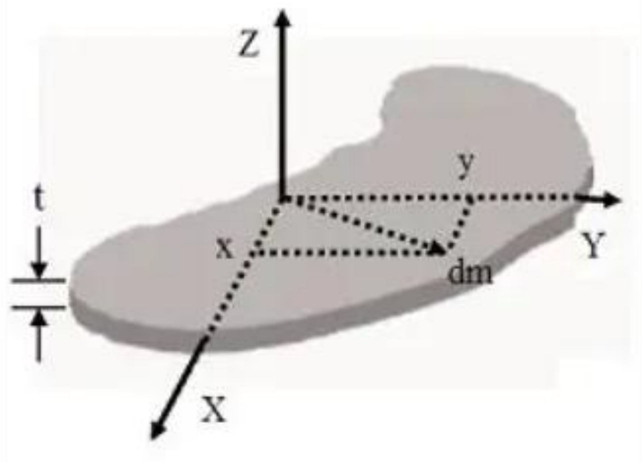
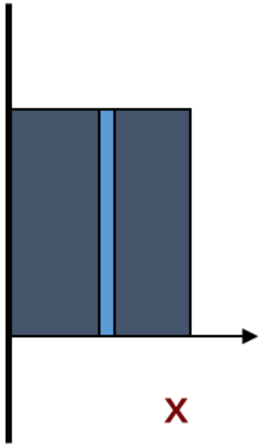


图1. 厚度很薄的薄片

3. 质量为M的均匀正方形薄板，边长为L，可自由地绕一铅垂边旋转。一质量为m、速度为v的小球垂直于板面撞在它的对边上。设碰撞是完全弹性的，问碰撞后板和小球将怎样运动?

上海科技大学
ShanghaiTech University



解：板对铅垂边的转动惯量：

在距离铅垂边为x处，取小矩形：宽为dx,长为L的面元。

则 : $dm = \sigma ds = \sigma L dx$

$$I = \int x^2 dm = \int_o^L x^2 \sigma L dx = \frac{1}{3}\sigma L^4 = \frac{1}{3}ML^2$$

碰撞前后：

动能守恒：$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{6}ML^2\omega^2 \qquad (1)$

对铅垂轴角动量守恒：$mvL = mv'L + I\omega = mv'L + \frac{1}{3}ML^2\omega \qquad (2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \dfrac{6mv}{(3m+M)L} \\ v' = \dfrac{3m-M}{3m+M}v \end{cases}$$

8. 一截面为A的柱形桶内盛水的高度为H，底部有一小孔，水从这里流出。设水柱的最小截面积为S，求容器内只剩下一半水和水全部流完所需的时间t1和t2。

上海科技大学 ShanghaiTech University

解：由于随着水的高度h的变化，从桶底流出的水的速度不同，所以在dt时间内流出的水$dQ_V = vsdt = AVdt = Adh$也不同，故用积分形式求解。

设在t时刻，水面距桶底的高度为h，dt时间内水面下降dh

依伯努力方程有：$P_0 + \rho gh + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$

又：$VA = vs \quad \Rightarrow V = \frac{vs}{A}$ 所以有：$\rho gh + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{vs}{A}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho v^2$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{A^2}{A^2 - s^2}2gh}$$

又依连续性方程有 $:-Adh = vsdt = \sqrt{\frac{A^2}{A^2 - s^2}2ghsdt}$

变形得：$\frac{dh}{\sqrt{\frac{2gh}{A^2 - s^2}}} = -sdt \quad (1)$

若只剩一半水，h从$H \to \frac{H}{2}$,(1) 式两边积分：

$$\int_{H}^{H/2} \frac{dh}{\sqrt{\frac{2gh}{A^2 - s^2}}} = -\int_{0}^{t_1} s dt$$

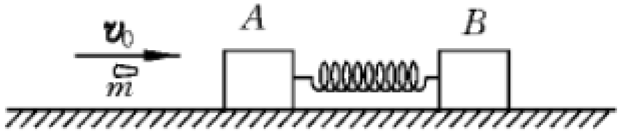
$$\therefore t_1 = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{2\left(A^2 - s^2\right)}{g}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{\frac{H}{2}}\right)$$

若全部流完，则h从$H \to 0$,(1) 式两边积分：

$$\int_{H}^{0} \frac{dh}{\sqrt{\frac{2gh}{A^2 - s^2}}} = -\int_{0}^{t_2} s dt \qquad \therefore t_2 = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{2\left(A^2 - s^2\right)}{g}}\sqrt{H}$$

例题13

如图 4.11 所示，一轻质弹簧劲度系数为 k，两端各固定一质量均为 M 的物块 A 和 B，放在水平光滑桌面上静止。今有一质量为 m 的子弹沿弹簧的轴线方向以速度 v_0 射入一物块而不复出，求此后弹簧的最大压缩长度。



解 由于子弹射入物块 A 所需时间甚短，当二者获得共同速度 V_0 时，弹簧长度几乎未变，而 B 尚未起动。由于 A 受水平弹力为零，所以子弹和 A 在子弹射入前后水平方向动量守恒，即

$$mv_0 = MV_0 + mV_0$$

由此得

$$V_0 = \frac{mv_0}{m+M}$$

此后弹簧将被压缩而 B 开始运动，当 B 的速度与 A 的速度相同时，弹簧将达到最大压缩长度 x_m。以 V 表示此时 A 与 B 的共同速度，则由动量守恒又可得

$$mv_0 = (M+m+M)V$$

由此得

$$V = \frac{mv_0}{2M+m}$$

在子弹进入 A 达到共同速度 V_0 到 A 和 B 达到共同速度 V 的过程中，整个系统的机械能守恒给出

$$\frac{1}{2}(m+M)V_0^2=\frac{1}{2}(2M+m)V^2+\frac{1}{2}kx_m^2$$

由此可解得

$$x_m=mv_0\left[\frac{M}{k(m+M)(m+2M)}\right]^{1/2}$$

例题14

证明：一个运动的小球与另一个静止的质量相同的小球作弹性的非对心碰撞后，它们将总沿互成直角的方向离开

证 以 $\boldsymbol{v}_{10}$ 表示一个小球的初速度，以 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 分别表示碰撞后此小球和另一小球的速度。在 $m_1=m_2$ 的情况下，对两球用动量守恒可得

$$\boldsymbol{v}_{10}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$$

此等式两侧都平方，得

$$v_{10}^2=v_1^2+2\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2+v_2^2$$

又由弹性碰撞前后动能守恒可得

$$v_{10}^2=v_1^2+v_2^2$$

此式和上式对比，可知

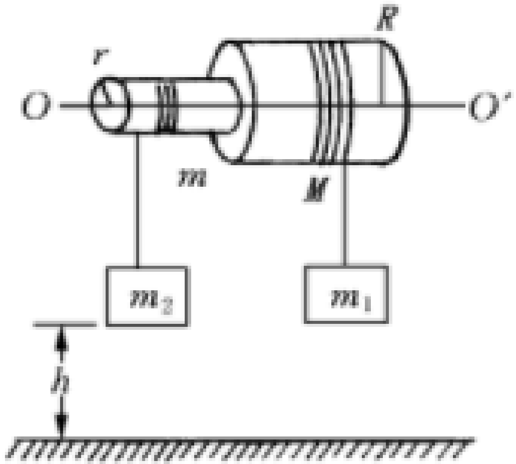
$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=v_1v_2\cos\theta=0$$

$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的标积为零，就说明二者方向的夹角 θ 总是 90°。

例题19 固定在一起的两个同轴均匀圆柱体可绕其光滑的水平对称轴 OO' 转动．设大小圆柱体的半径分别为 R 和 r，质量分别为 M 和 m．绕在两柱体上的细绳分别与物体 m_1 和 m_2 相连，m_1 和 m_2 则挂在圆柱体的两侧，如题3.12图所示．设 R =0.20m，r =0.10m，m =4 kg，M =10 kg，$m_1 = m_2$ =2 kg，且开始时 m_1，m_2 离地均为 h =2m．求：

(1) 柱体转动时的角加速度；

(2) 两侧细绳的张力．



解：设 a_1，a_2 和β 分别为 m_1，m_2 和柱体的加速度及角加速度

(1) m_1，m_2 和柱体的运动方程如下：

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \quad ①$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad ②$$

$$T_1' R - T_2' r = I\beta \quad ③$$

式中 $T_1' = T_1, T_2' = T_2, a_2 = r\beta, a_1 = R\beta$

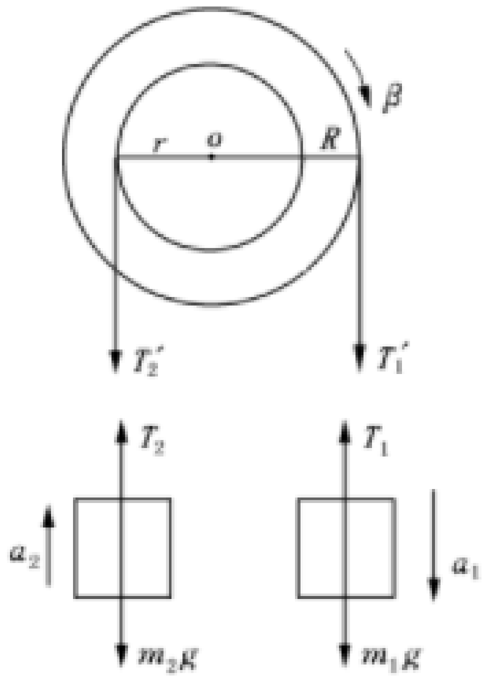
而
$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

由上式求得

$$\beta = \frac{Rm_1 - rm_2}{I + m_1 R^2 + m_2 r^2} g$$

$$= \frac{0.2\times 2 - 0.1\times 2}{\frac{1}{2}\times 10\times 0.20^2 + \frac{1}{2}\times 4\times 0.10^2 + 2\times 0.20^2 + 2\times 0.10^2}\times 9.8$$

$$= 6.13\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$



空心圆柱 (内外半径为R_1和R_2)	对称轴	$J_C = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$

(2) 由①式

$$T_2 = m_2 r\beta + m_2 g = 2\times 0.10\times 6.13 + 2\times 9.8 = 20.8\ \text{N}$$

由②式

$$T_1 = m_1 g - m_1 R\beta = 2\times 9.8 - 2\times 0.2.\times 6.13 = 17.1\ \text{N}$$