普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、强场激光物理、飞秒激光成丝。
https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm

保守力场的势能

重力的功 $A_G = mgy_a - mgy_b = -(mgy_b - mgy_a)$

弹性力的功 $A_T = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2 = -(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2)$

万有引力的功 $A_W = -[(-\frac{Gmm_s}{r_b}) - (-\frac{Gmm_s}{r_a})]$

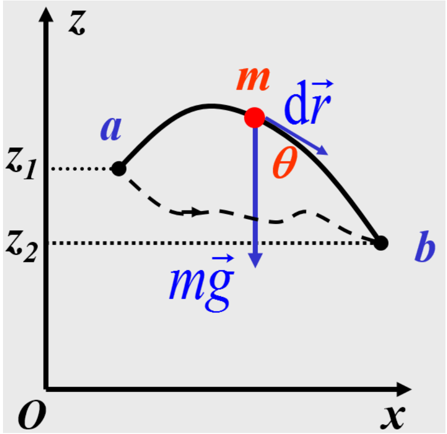
保守力的功可写成 $A_p = -(E_{pb} - E_{pa})$

对照动能定理 $A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

➤结论：位置函数E_p被称为质点的势能，则

$$\boxed{E_{pb} - E_{pa} = -A_p}$$

在保守力场中，与保守力相关的势能增量等于保守力所作功的负值。



势能的讨论

- 只有在保守力的情况下才能引入势能的概念；对于非保守力，不存在势能的概念。

- 要确定保守力场中某一点势能，必须首先选定势能零点。

  保守场中质点在任一位置时的势能计算公式为

$$E_{pa}=\int_{a}^{b\text{（势能零点）}}\vec{F}_{\text{保}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

  质点在任一位置时的势能等于质点从该位置经任意路径移动到势能零点时保守力所作的功。

- 势能的数值只有相对意义，但势能之差有绝对意义（势能的增量与势能零点的选择无关）；

- 势能为系统所有；　　从场的观点来看，势能属于保守力场。

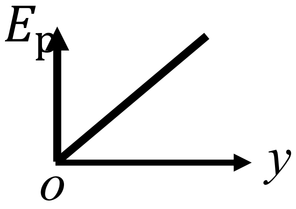
- 保守力的功与势能的关系：　$A_{\text{保}}=-(E_{p2}-E_{p1})=-\Delta E_{p}$

$$A_{保}=-(E_{p2}-E_{p1})=-\Delta E_p$$

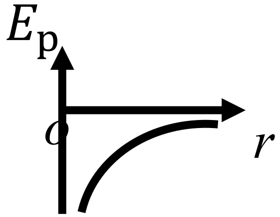
保守力在某一过程所作的功等于该过程的始末两个状态势能增量的负值

◆ 力学中常见势能的表达式

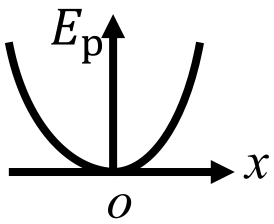
重力势能	$E_p = mgy$	取地面为重力势能零点（即$y=0$处）
万有引力势能	$E_p = -\dfrac{Gm_s m}{r}$	取无穷远处为引力势能零点（即$r=\infty$处）
弹性势能	$E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$	取弹簧自然长度时的端点为弹性势能零点（即$x=0$处）



重力势能曲线



引力势能曲线



弹性势能曲线

已知势能，如何求(保守)力?

$$\mathrm{d}A = \vec{F}_c \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}E_\mathrm{p} \quad (1)$$

直角坐标系中，dEp的全微分

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k})$$

$$= \left(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad (2)$$

比较(1)和(2)式

$$\vec{F}_c = -\left(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}$$

例　有一双原子分子由A、B两原子组成，设A原子位于坐标原点，B原子与A原子的间距为x，这两原子之间的作用力为分子力（分子力是保守力，可用势能来描述），且这两原子相互作用的势能函数可以表示为

$$E_{\mathrm{p}}(x)=\frac{a}{x^{3.4}}-\frac{b}{x^{2}}$$

式中a和b为正常数，x以m为单位，势能$E_{\mathrm{p}}(x)$以J为单位。

求　(1) 势能 $E_{\mathrm{p}}(x)=0$ 时，$x=?$

(2) 原子间的相互作用力和平衡位置。

机械能定理（功能原理）

从动能定理出发 $\boxed{A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{kb} - E_{ka}}$

$$A = A_{保守力} + A_{非保守力} = A_{非保守力} - \Delta E_P$$

$$\therefore A_{非保守力} = \Delta E_P + \Delta E_K$$

$$= (E_{Pb} + E_{Kb}) - (E_{Pa} + E_{Ka})$$

若 $A_{非保守力} = 0$ $\quad E_{Pb} + E_{Kb} = E_{Pa} + E_{Ka}$

如果 非保守力做的功不为0， 那么a b两处的机械能不相等 ！ ！

质点系：一个到几个

质点系的动能定理

质点动能定理 $A_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$　　其中　$A_i = A_{ie} + A_{iI}$　　（内力，外力）

对系统内所有质点求和　$\sum_i A_{ie} + \sum_i A_{iI} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$

$$\boxed{A_{外} + A_{内} = \Delta E_k}$$

质点系的动能定理：外力的总功与内力的总功之代数和等于质点系动能的增量

质点系的功能原理

$$A_{内} = A_{保守内力} + A_{非保守内力}$$

$$\therefore A_{外} + (A_{保守内力} + A_{非保守内力}) = E_{kb} - E_{ka}$$

$$\text{而} \quad A_{保守内力} = -(E_{Pb} - E_{Pa})$$

$$A_{外} + A_{非保守内力} = (E_k + E_p)_b - (E_k + E_p)_a$$

$$E = E_k + E_p \text{ ——机械能}$$

$$\text{故} \quad \boxed{A_{外} + A_{非保守内力} = \Delta E}$$

功能原理：质点系机械能的增量等于外力的功和非保守内力的功的总和。

质点系的机械能守恒定律

系统的功能原理

$$A = A_{外} + A_{非保内} = E_b - E_a$$

当 $A = A_{外} + A_{非保内} = 0$

则 $\boxed{E = E_k + E_p = 恒量}$ (质点系的机械能守恒定律)

如果系统中只有保守内力作功，而其它内力和外力都不作功，或作功的总和始终为零，则系统总机械能保持不变。

应用功能原理或机械能守恒定律解题步骤

(1) 选取研究对象。

(2) 分析受力和守恒条件。

判断是否满足机械能守恒条件，如不满足，则应用功能原理求解。

(3) 明确过程的始、末状态。

需要选定势能的零势能位置。

(4) 列方程。

(5) 解方程，求出结果。

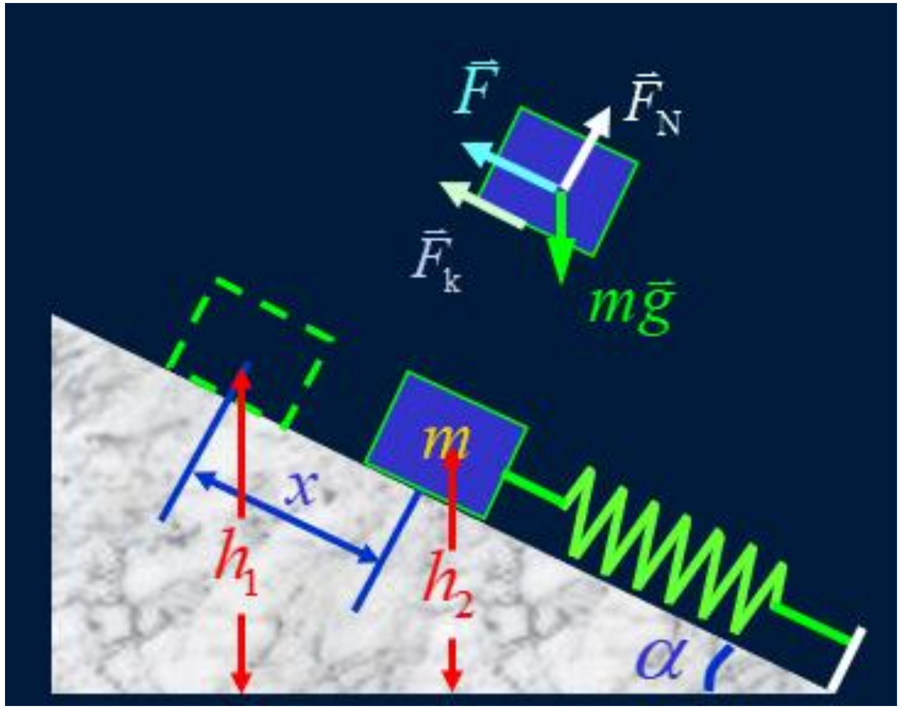
(6) 讨论解的物理意义。

例　如图，放在倾角为α 的斜面上的质量为m的木块，由静止自由下滑，与劲度系数为k的轻弹簧发生碰撞，木块将弹簧最大压缩了x m。设木块与斜面之间的摩擦系数为μ。

求　开始碰撞时木块速率v为多大?

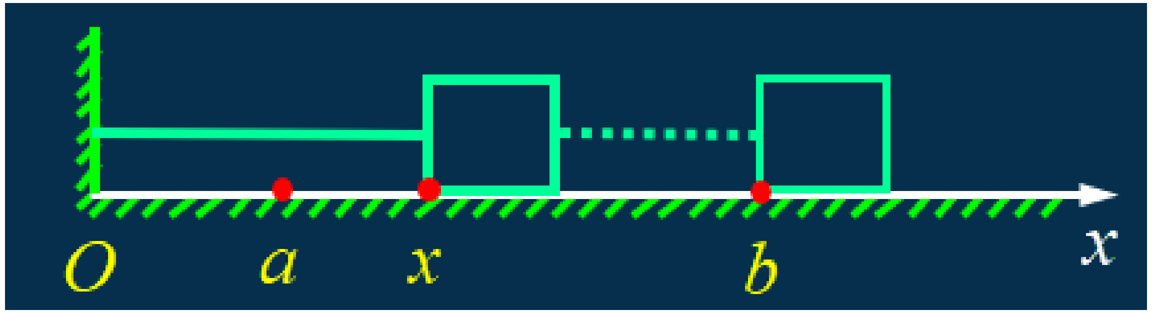
受力如图，设碰撞时及压缩最大时木块高度分别为h_1、h_2

选水平面为重力势能零点、选弹簧的自然长度端为弹性势能零点



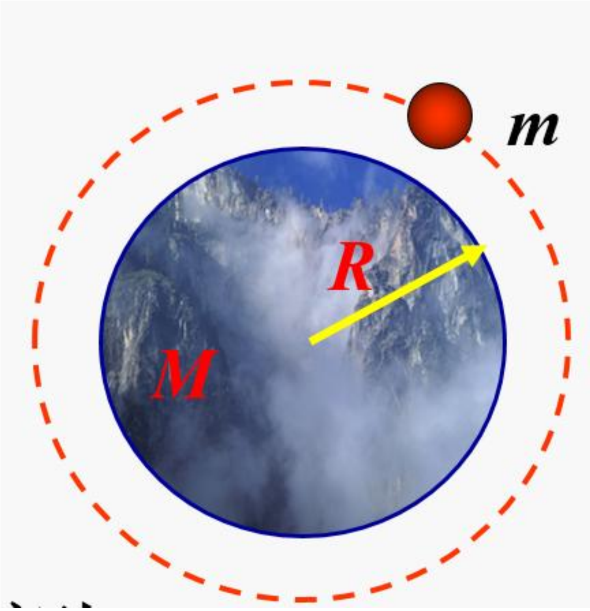
例 质量为m的滑块置于粗糙水平桌面上，并系于橡皮绳的一端，橡皮绳的另一端系于墙上。橡皮绳原长为a，处于拉伸状态的橡皮绳相当于劲度系数为k的弹簧。滑块与桌面的摩擦系数为μ。现将滑块向右拉伸至橡皮绳长为b后再由静止释放。

求 滑块撞击墙时的速度多大？



例：计算第一宇宙速度

已知：地球半径为R，质量为M，卫星质量为m。要使卫星在距地面h 高度绕地球作匀速圆周运动，求其发射速度。



例：计算第二宇宙速度

宇宙飞船脱离地球引力而必须具有的发射速度。

（1） 脱离地球引力时，飞船的动能必须大于或等于零。

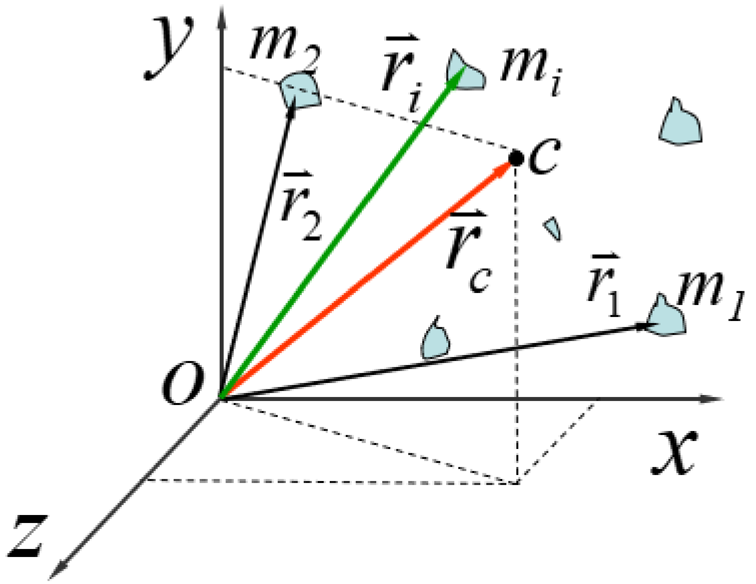
（2） 脱离地球引力处，飞船的引力势能为零。

质心系 – 几个到无穷多个

质心

质心：质心是与质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。

由n个质点组成的质点系，其质心的位置：



$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_i\vec{r}_i + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots + m_i + \ldots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m'}$$

➢对质量离散分布的物系：

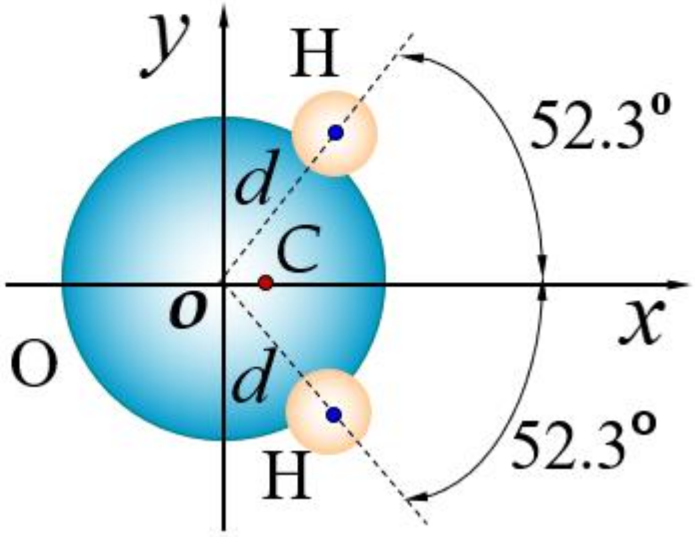
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m'} \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m'} \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m'}$$

➢对质量连续分布的物体：

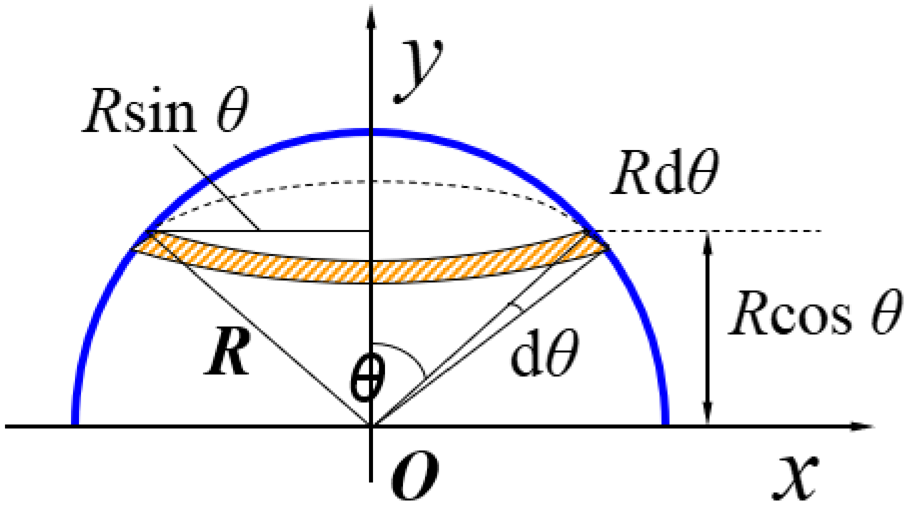
$$x_C = \frac{1}{m'}\int x\mathrm{d}m, \quad y_C = \frac{1}{m'}\int y\mathrm{d}m, \quad z_C = \frac{1}{m'}\int z\mathrm{d}m$$

对密度均匀、形状对称的物体，质心在其几何中心．

例1 水分子H_2O的结构如图．每个氢原子和氧原子中心间距离均为$d=1.0\times10^{-10}$ m，氢原子和氧原子两条连线间的夹角为$\theta=104.6^{\circ}$．求水分子的质心．



例2　求半径为 R 的匀质半薄球壳的质心



质心运动定理

质心的位矢：

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m'}$$

$$m'\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

上式两边对时间 t 求一阶导数，得质心的速度、动量

$$m'\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$m'\vec{\mathrm{v}}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

再对时间 t 求一阶导数，得质心的加速度

$$m'\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i\right)}{\mathrm{d}t}$$

牛顿第二定律的动量描述：$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\mathrm{ex}}$

$$\vec{F}^{\mathrm{ex}} = m' \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}_C}{\mathrm{d}t} = m' \vec{a}_C$$

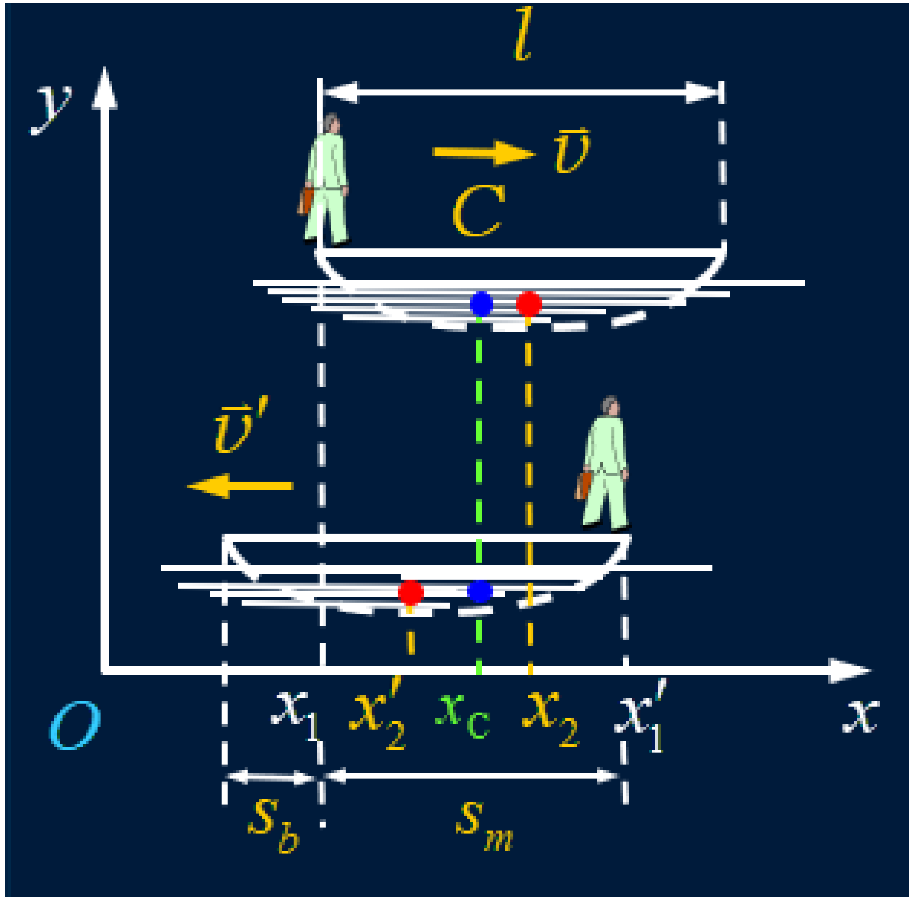
质心运动定理：作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以质心的加速度。

质心参考系：物体系的质心在其中静止的平动参考系，多数情况下，质心选为质心系的原点。

$$\vec{r}_{\mathrm{c}} \equiv 0 \rightarrow \vec{v}_{\mathrm{c}} = 0 \rightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$

零动量系

例：一长$l = 4m$，质量$m_1 = 150kg$ 的船，静止在湖面上。现有一质量$m_2 = 50kg$ 的人，从船头走到船尾，如图所示。求：人和船相对于湖岸各移动的距离。（设水对船的阻力忽略不计）



冲量

由牛顿第二定律 $\vec{F}=\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ 有 $\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$

$\vec{F}$ 是随时间而变的，但 $\mathrm{d}t$ 时间内，可认为 $\vec{F}$ 恒定不变。

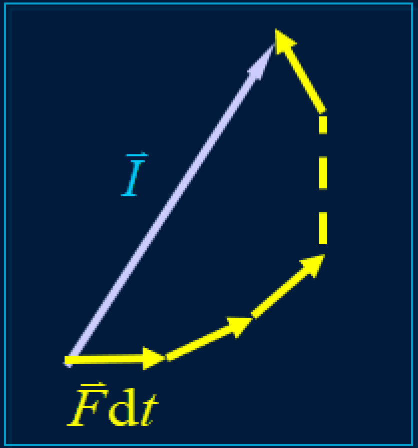
冲量：作用力与作用时间的乘积。

（反映力对时间的累积效应）

元冲量： $\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\mathrm{d}t$

力在t_1到t_2时间内的冲量为

$$\vec{I}=\int \mathrm{d}\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$$



冲量 $\vec{I}$ 的方向是元冲量的矢量和（ $\sum_i \vec{F}_i\mathrm{d}t$ ）的方向。

动量

牛顿运动定律 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$

质点的运动状态 $\vec{p}=m\vec{v}$ （状态量）

动量：运动质点的质量与其速度的乘积。

- 动量是矢量，方向为速度方向。
- 动量的分量式为 $\begin{cases} p_x = m v_x \\ p_y = m v_y \\ p_z = m v_z \end{cases}$
- 动量与动能数量上的关系为 $E_\mathrm{k}=\dfrac{p^2}{2m}$

质点的动量定理

上海科技大学
ShanghaiTech University

牛顿运动定律 $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$

$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}(m\vec{v})$ （动量定理微分形式）

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}\mathrm{d}(m\vec{v})=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$ （动量定理积分形式）

作用在质点上的合力在某一时间内的冲量等于质点在同一时间内动量的增量。

➢ 讨论

- 由动量定理可知，作用在质点上的合力的冲量由质点的始末状态决定而与中间过程无关。因此，**动量定理对打击、碰撞等问题特别有效。**

质点的动量定理分量形式、平均冲力

上海科技大学 ShanghaiTech University

- 一般情况下，要利用动量和冲量在坐标系中的分量式进行动量定理的计算。

直角坐标系中动量定理的分量形式

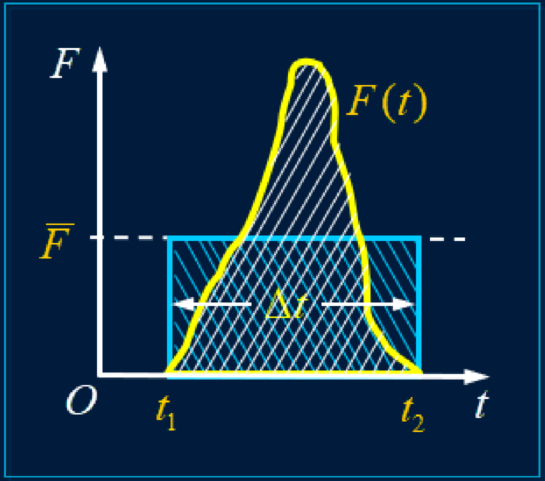
$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = m\upsilon_{2x} - m\upsilon_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = m\upsilon_{2y} - m\upsilon_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = m\upsilon_{2z} - m\upsilon_{1z} \end{cases}$$

冲量的分量只改变自己方向上的动量

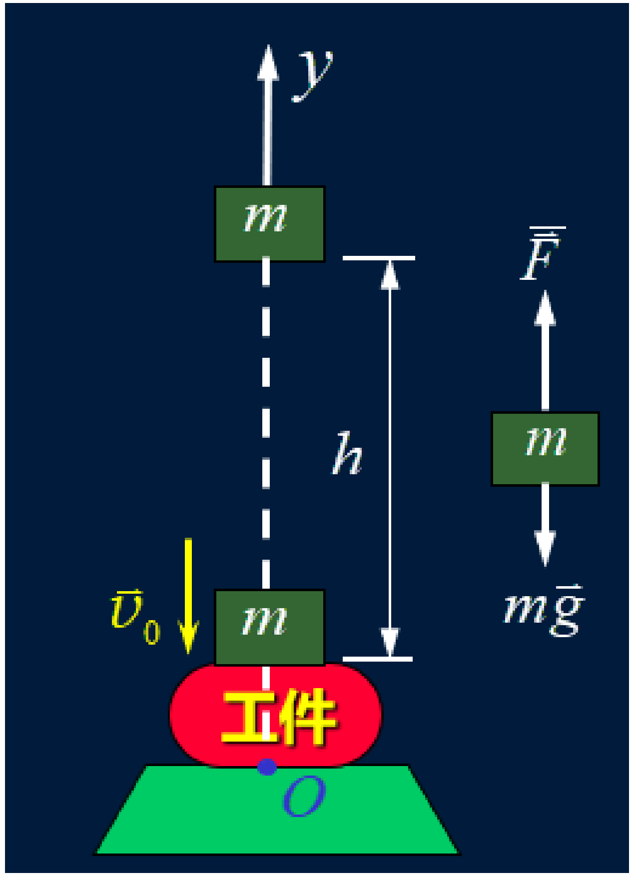
- 在碰撞、冲击等问题中，力的作用时间很短，且力的变化又复杂时，常引入**平均冲力**

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t = \bar{\vec{F}}(t_2 - t_1)$$

$$\bar{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{I}}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1}$$

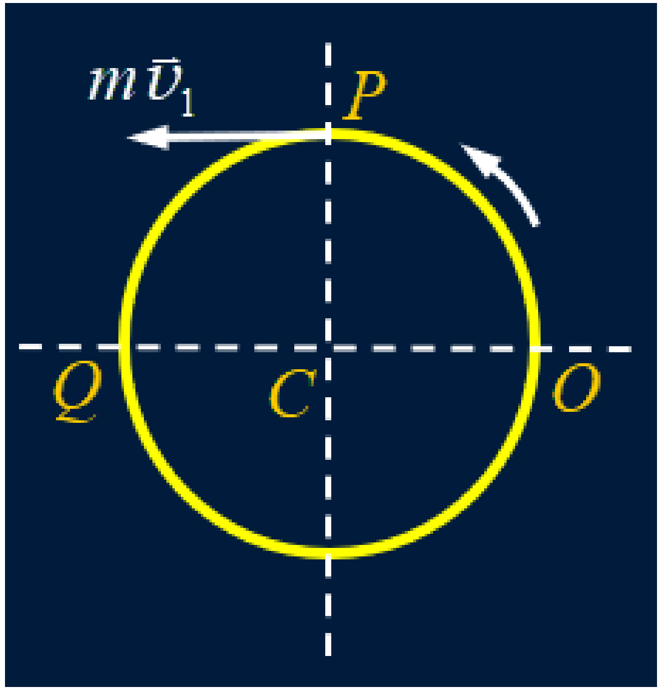


例：一质量为m =1000kg的蒸汽锤从高度为h =1.5m的地方由静止下落，锤与被加工的工件的碰撞时间为 t =0.01s，且锤与工件碰撞后的末速度为零。求：蒸汽锤对工件的平均冲击力



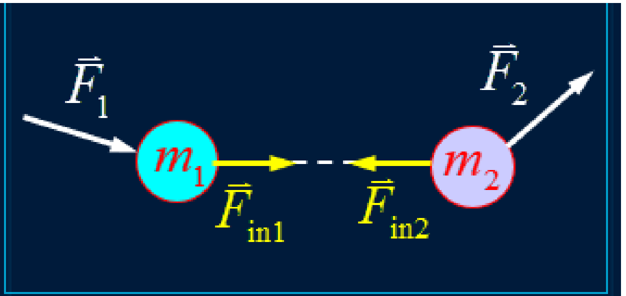
例：一质点受合力作用，合力为 $\vec{F}=10t\vec{i}+2(2-t)\vec{j}+3t^2\vec{k}$
质点从静止开始在2s内所受合力的冲量和质点在2s末的动量。

例：如图所示，一质量为m = 1kg的质点，沿半径为R = 2m的圆周运动。取O点为自然坐标的原点，质点在自然坐标中的运动方程为 $s = \frac{1}{2}\pi t^2$ (SI)。



质点系的动量定理

外力：$\vec{F}_1$ ，$\vec{F}_2$ 内力：$\vec{F}_{\text{in1}}$ ，$\vec{F}_{\text{in2}}$



t_1 时刻,两质点的速度分别为 $\vec{v}_{11}$ ，$\vec{v}_{21}$

t_2 时刻,两质点的速度分别为 $\vec{v}_{12}$ ，$\vec{v}_{22}$

对质点系中的各质点应用动量定理

对质点1，有 $$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{\text{in1}})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_{12}-m_1\vec{v}_{11}$$

对质点2，有 $$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{\text{in2}})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_{22}-m_2\vec{v}_{21}$$

两式相加，得

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_{\text{in1}}+\vec{F}_{\text{in2}})\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_{12}+m_2\vec{v}_{22})-(m_1\vec{v}_{11}+m_2\vec{v}_{21})$$

其中 $\vec{F}_{\text{in1}} = -\vec{F}_{\text{in2}}$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_{12} + m_2\vec{v}_{22}) - (m_1\vec{v}_{11} + m_1\vec{v}_{21})$$

推广到n个质点的质点系，有

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_i \mathrm{d}t = (\sum_i m_i\vec{v}_{i2}) - (\sum_i m_i\vec{v}_{i1})$$

或 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (质点系动量定理)

系统所受合外力的冲量等于质点系总动量的增量

动量守恒定律

上海科技大学 ShanghaiTech University

根据系统的动量定理可知： $\Sigma \vec{F}_i = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma \vec{p}_i$

当合外力 $\Sigma \vec{F}_i = 0$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma \vec{p}_i = 0$

$\boxed{\Sigma \vec{p}_i = \Sigma m_i \vec{v}_i = \text{常矢量}}$ （质点系的动量守恒定律）

质点系所受合外力为零时，质点系的总动量保持不变。

- 讨论

- 若系统的合外力不为零，但可能合外力在某一方向的分量等于零，则该方向的总动量守恒。

当 $\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma m_i v_{ix} = $ 常量

当 $\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma m_i v_{iy} = $ 常量

当 $\Sigma F_{iz} = 0$ $\Sigma m_i v_{iz} = $ 常量

(动量守恒定律在直角坐标系中的分量式)

动量守恒定律

1. 系统的总动量守恒并不意味着系统内各个质点的动量不变，而是指系统动量总和不变；

2. 内力的作用：内力不改变系统的总动量，但可以改变系统中各质点的动量，使系统的总动量在系统各质点间的分配发生变化；

3. 动量守恒定律是自然界的普遍定律之一，对于宏观物体和微观粒子都适用。

应用动量定理和动量守恒定律解题步骤

(1) 选取研究对象。

(2) 分析受力。

判断是否满足合外力为零，或是否沿某一方向合外力投影的代数和为零，或是否合外力远小于内力？若满足这类条件，就应用动量守恒定律求解，否则就应用动量定理求解。

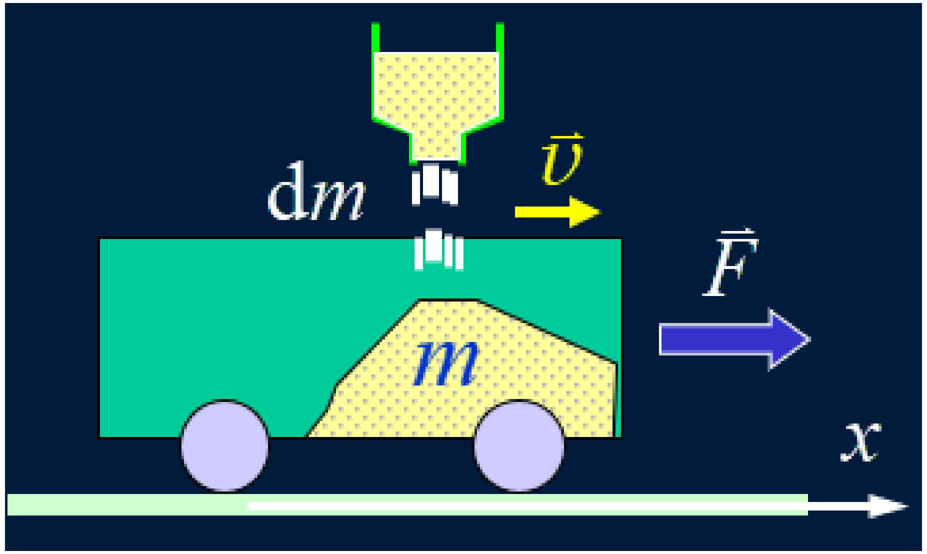
(3) 确定过程。

需要考虑一定的时间间隔或一个过程。

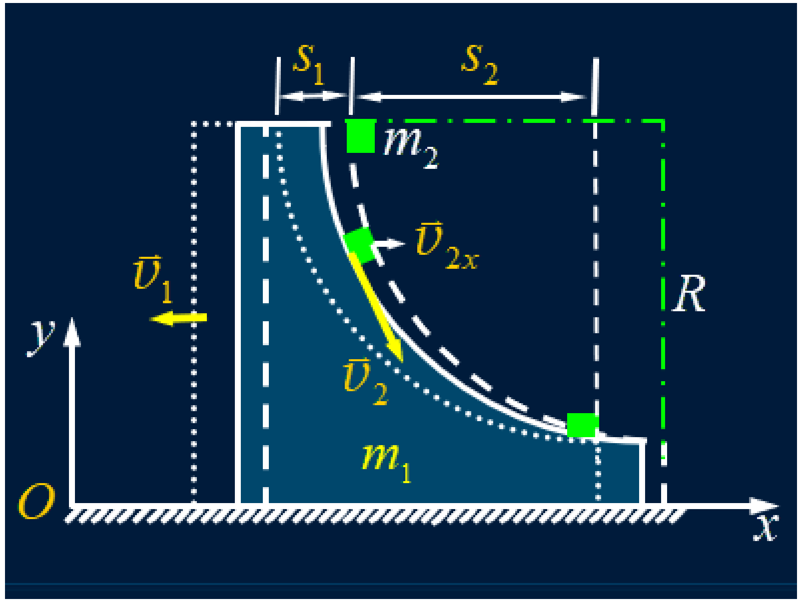
(4) 列方程求解。

要选取适当的坐标系，一般要列出动量定理或动量守恒定律方程的分量式。

例：一装沙车以速率v = 3m/s从沙斗下通过，每秒钟落入车厢的沙为 m = 500kg，如果使车厢的速率保持不变，应用多大的牵引力？(设车与轨道的摩擦不计)



例：一个有1/4圆弧滑槽、半径为R的大物体质量为m_1，停在光滑的水平面上，另一质量为m_2的小物体从圆弧滑槽顶点由静止下滑。求：当小物体m_2滑到底时，大物体m_1在水平面上移动的距离。



上海科技大学
ShanghaiTech University

火箭是一种自带燃料和助燃剂的太空飞行器，它依靠燃料燃烧喷出的气体所产生的反冲推力向前推进。设不计地球引力和空气阻力。

设各量如图。图中$\mathrm{d}m<0$，且 $\vec{\mathrm{v}}$、$\vec{\mathrm{v}}+\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}$、$\vec{u}$
三个速度均为相对于地面参考系的速度

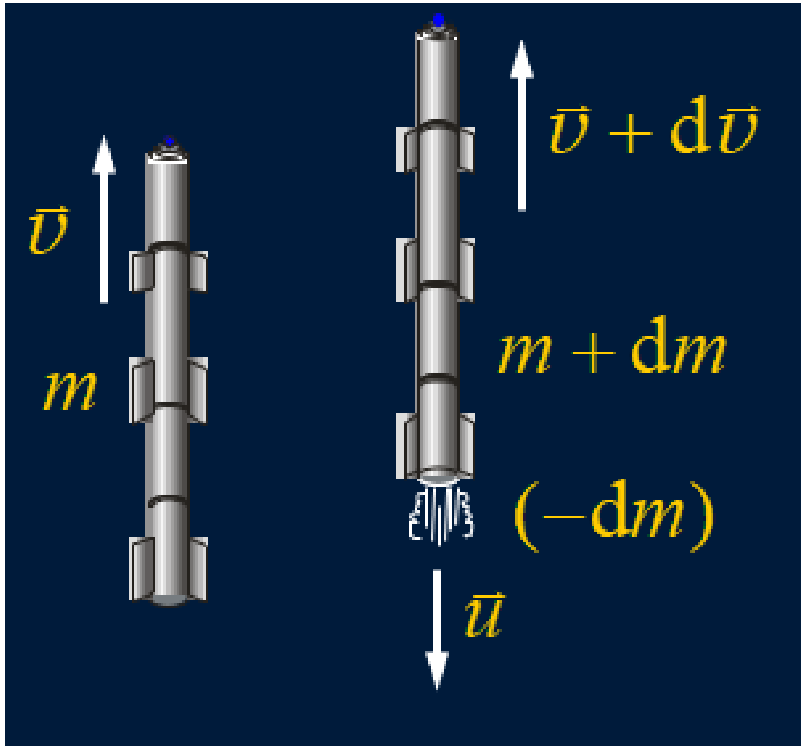
则在时间dt内，系统动量的增量为

$$\mathrm{d}\vec{p}=[(m+\mathrm{d}m)(\vec{\mathrm{v}}+\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}})+(-\mathrm{d}m)\vec{u}]-m\vec{\mathrm{v}}$$

$$=m\vec{\mathrm{v}}+(\mathrm{d}m)\vec{\mathrm{v}}+m\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}+(\mathrm{d}m)(\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}})-(\mathrm{d}m)\vec{u}-m\vec{\mathrm{v}}$$

略去二阶无穷小，则有

$$\mathrm{d}\vec{p}=m\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}-(\vec{u}-\vec{\mathrm{v}})\mathrm{d}m$$



设喷气出口的相对速度为 $\vec{v}_r$ ，即

$$\vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}$$

则系统动量的增量可表示为

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - \vec{v}_r dm$$

不计地球引力和空气阻力，火箭系统的动量守恒，即

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - \vec{v}_r dm = 0$$

取竖直向上作为x轴的正方向，则 $m dv - (-v_r) dm = 0$ $dv = -v_r \dfrac{dm}{m}$

设火箭发射时的质量为m_i，初速度为v_i，燃料耗尽时的质量为m_f，末速度为v_f

通常喷气出口速度v_r为常量，积分得 $v_f = v_i + v_r \ln \dfrac{m_i}{m_f}$

提高火箭速度的途径： (1) $v_r\uparrow$， (2) $\frac{m_i}{m_f}\uparrow$

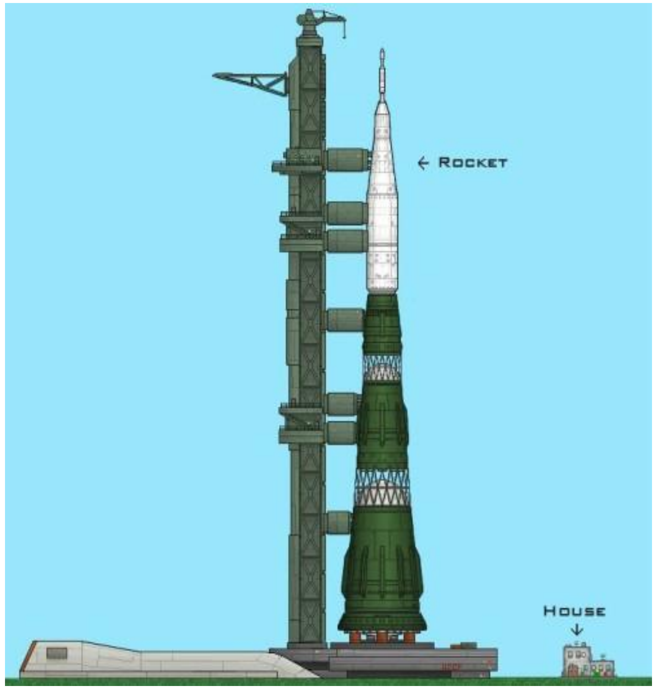
- 当 v_0 =0， v_r =2000 m/s 时，要达到第一宇宙速度 v_1=7.9 km/s，须 $\frac{m_i}{m_f}$=50
- 目前技术只有： v_r =2500 m/s， $\frac{m_i}{m_f}$ =10。

采用多级火箭技术： $v_1 = u\ln N_1$ $v_2 - v_1 = u\ln N_2$， $v_3 - v_2 = u\ln N_3$，⋯

$$\boxed{v = \sum_i u\ln N_i = u\ln(N_1N_2N_3\cdots)}$$

火箭发射的“沉重”代价

苏联N1运载火箭
火箭类型：五级重型运载火箭
直径17米，高度105 米
火箭重2735吨，低地轨道载荷：75吨



美国土星5号运载火箭
火箭类型：三级液体燃料重型运载火箭
高度110.6米,直径10.1米
质量3039吨，低地轨道载荷：119吨