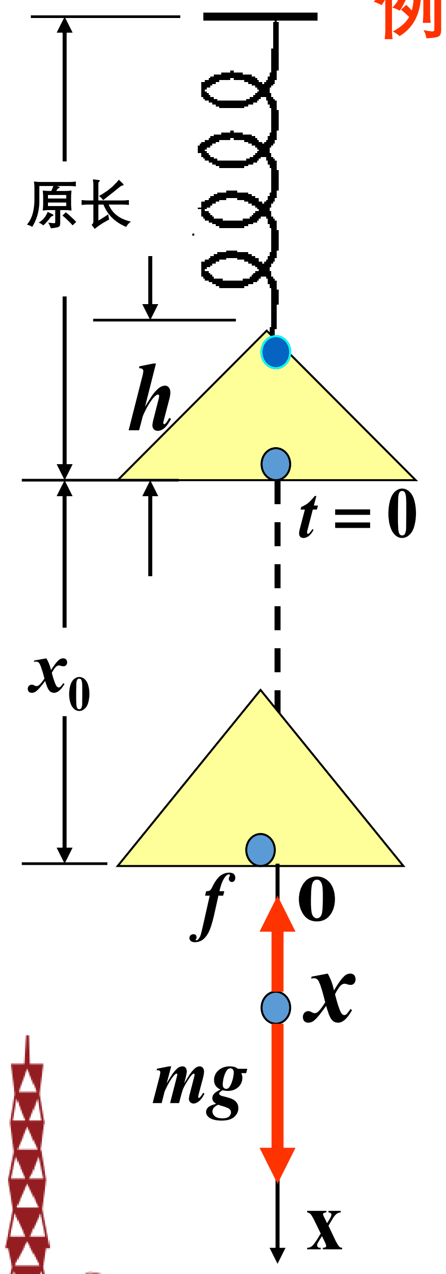
普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

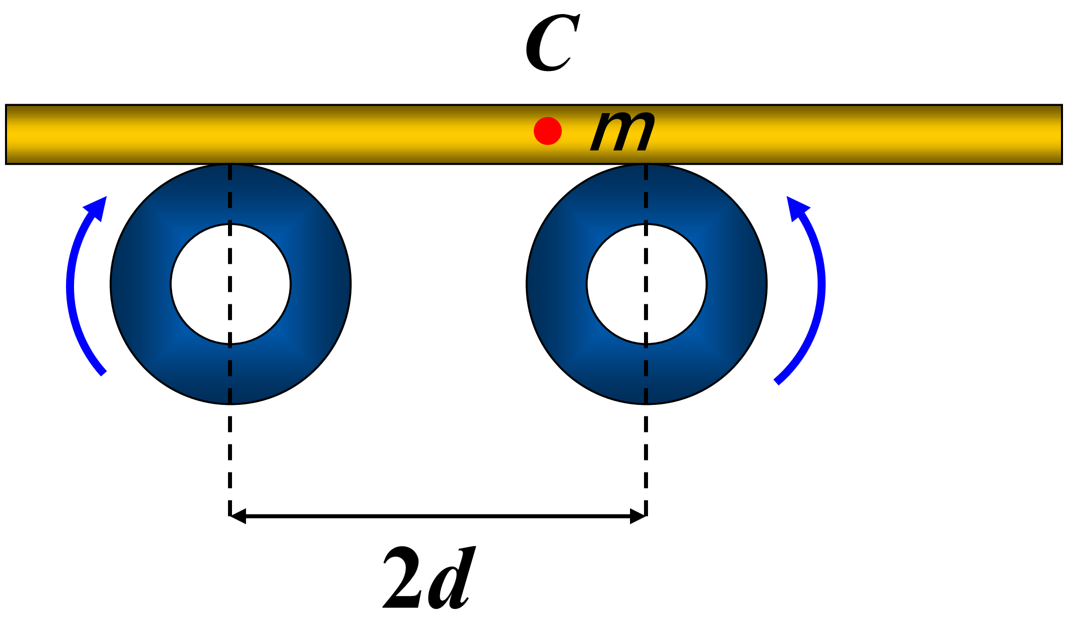
研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、强场激光物理、飞秒激光成丝。
https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm

例2.将天平盘子挂在一个倔强系数为k的弹簧下端,有一质量为m的物体, 从离盘高为h处自由下落至盘中后不再跳离盘子,因此盘子和物体一起开始运动(**盘和弹簧的质量忽略**),问(1)是否为谐振动? （2）求振动时的周期T 振幅 A 位相 φ 及振动方程。



例3. 两轮的轴互相平行，相距 $2d$，两轮转速相同而方向相反，将质量为 m 的一根匀质杆搁在两轮上，杆与轮的摩擦系数为μ，若杆子的质心 C 起初距一轮较近（如图）。

证明: 杆作谐振动并求周期。



上海科技大学 ShanghaiTech University

同方向同频率谐振动的合成

1. 解析法

分振动：
$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

合振动：

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$= \underbrace{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}_{A\cos\varphi}\cos\omega t - \underbrace{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}_{A\sin\varphi}\sin\omega t$$

$$\boxed{x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \qquad \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

➢ 结论：合振动 x 仍是简谐振动

2. 旋转矢量法

分振动

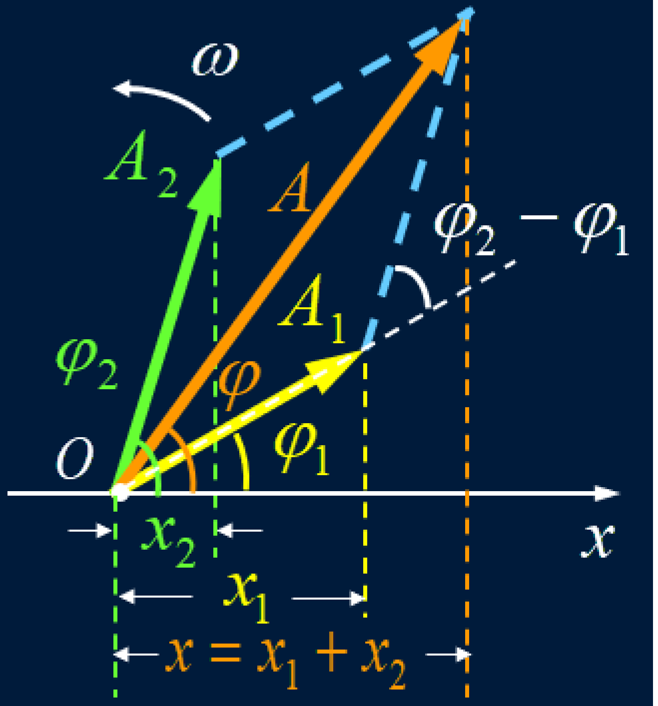
$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

合振动

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$



➢ 结论：**与解析法求得的结果一致，方法直观、简捷.**

上海科技大学 ShanghaiTech University

➢ 讨论：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(1)若两分振动同相,即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi$ $(k=0,1,2,\ldots)$,

则 $A=A_1+A_2$，两分振动相互加强，当 $A_1=A_2$ 时，$A=2A_1$,

(2)若两分振动反相,即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi$ $(k=0,1,2,\ldots)$,

则$A=|A_1-A_2|$，两分振动相互减弱，当 $A_1=A_2$ 时, $A=0$.

3. *n* 个同方向同频率谐振动的合成

例 设有 *n* 个同方向、同频率、振幅 *a* 相同、初相差依次为一常量ε的谐振动，它们的振动分别为

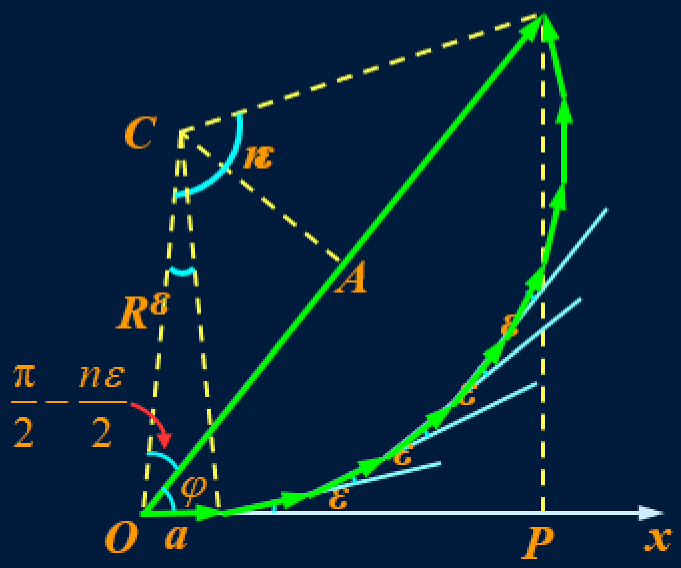
$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \varepsilon)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\varepsilon)$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$x_n = a\cos[(\omega t + (n-1)\varepsilon]$$



求 **合振动的振动方程.**

解 $x = \sum x_n = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$a = 2R\sin\frac{\varepsilon}{2} \qquad A = 2R\sin\frac{n\varepsilon}{2}$$

$$A = a\frac{\sin n\varepsilon/2}{\sin\varepsilon/2} \qquad \varphi = \frac{1}{2}(\pi - \varepsilon) - \frac{1}{2}(\pi - n\varepsilon) = \frac{n-1}{2}\varepsilon$$

上海科技大学 ShanghaiTech University

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = a\frac{\sin\frac{n\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\cos[\omega t+\frac{(n-1)\varepsilon}{2}]$$

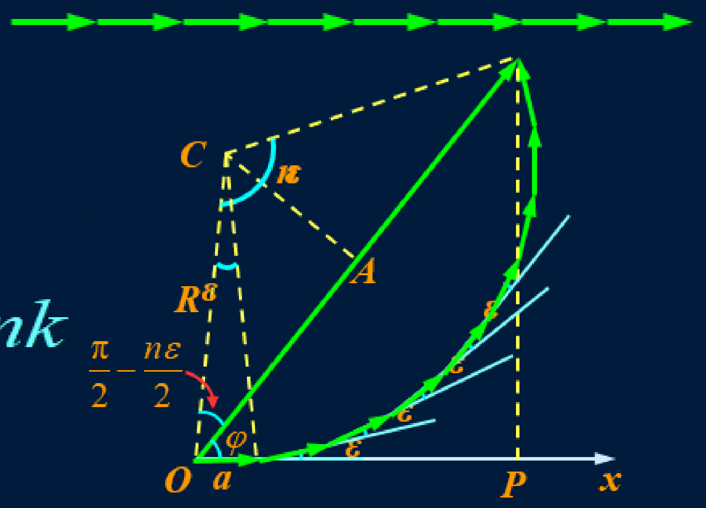
➢ **讨论:**

极大值: $\varepsilon = 2k\pi$

$A = na$

极小值: $\varepsilon = \dfrac{2k'\pi}{n}, \quad k' \neq nk$

$A = 0$



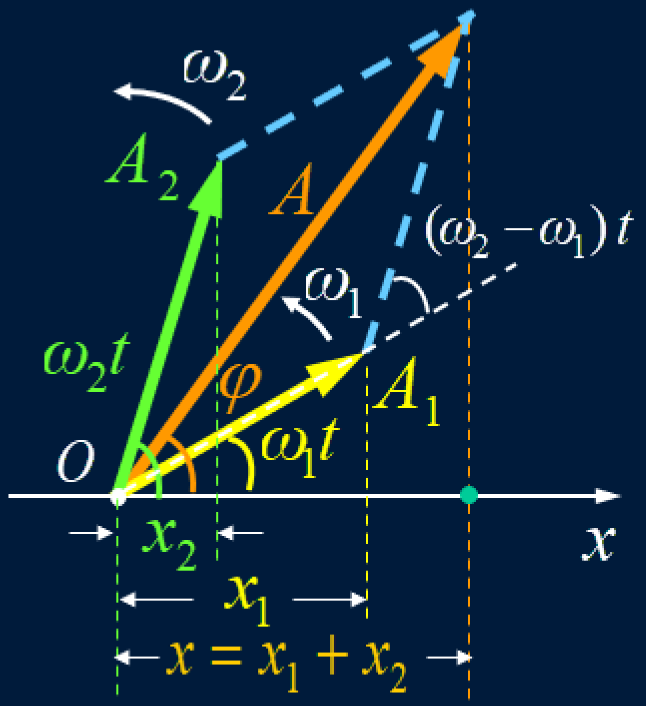
同方向不同频率谐振动的合成　拍

分振动： $\begin{cases} x_1 = A_1\cos\omega_1 t \\ x_2 = A_2\cos\omega_2 t \end{cases}$

合振动： $x = x_1 + x_2$

合振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2 - \omega_1)t}$$



当 $(\omega_2 - \omega_1)t = 2k\pi$ **时，**

A **有最大值：** $A = A_1 + A_2$

当 $(\omega_2 - \omega_1)t = (2k+1)\pi$ **时，**　A**有最小值：** $A = |A_1 - A_2|$

➢ 结论：**合振动 x 不再是简谐振动，合振动振幅的频率为**

$$(\omega_2 - \omega_1)T = 2\pi \qquad \nu = \left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}\right| = |\nu_2 - \nu_1|$$

◆ 振幅相同不同频率的简谐振动的合成

分振动：
$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_1 t \\ x_2 = A\cos\omega_2 t \end{cases}$$

合振动：
$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$$
$$= 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \cdot \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t$$

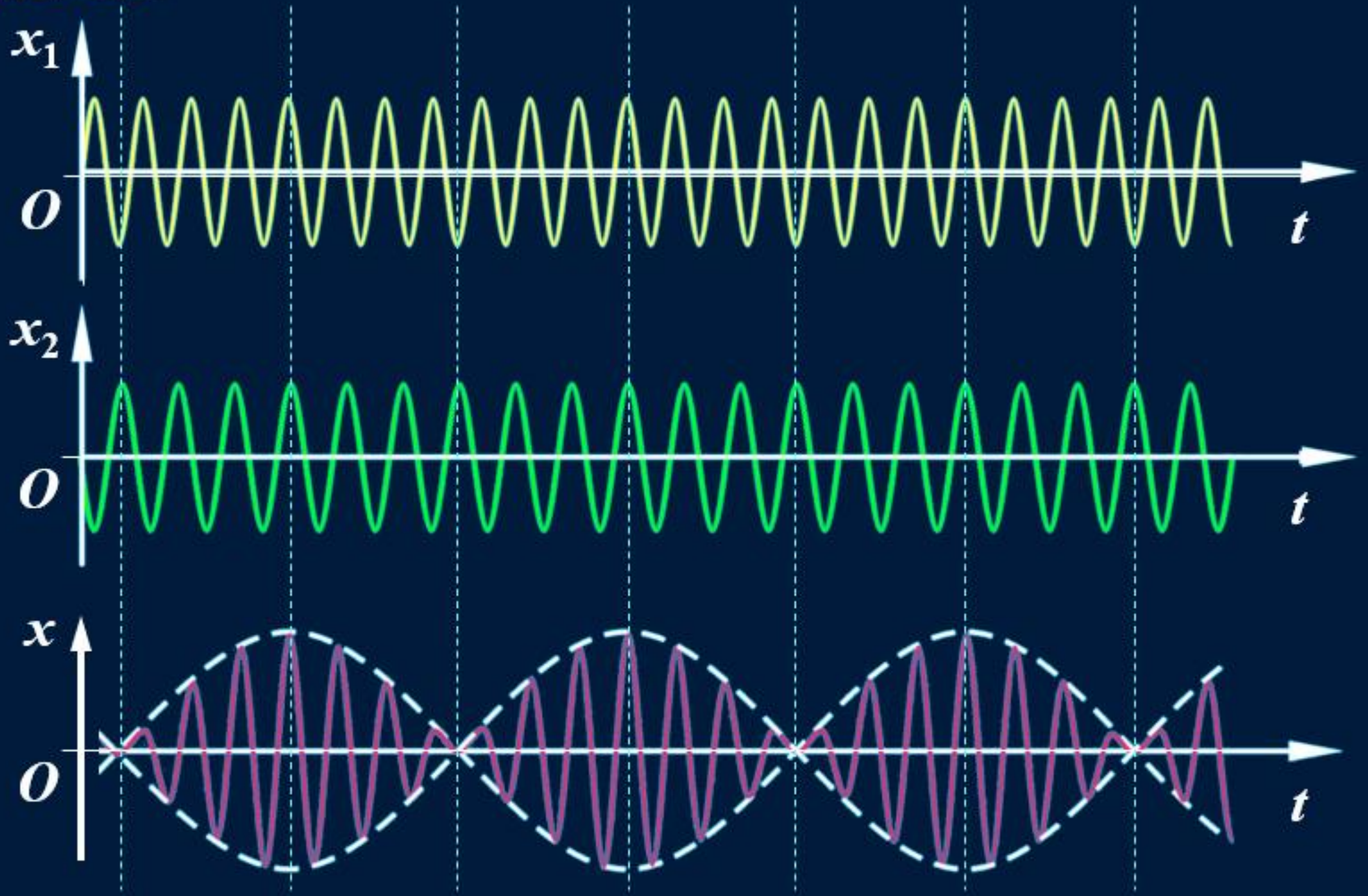
当 $\omega_2 \cong \omega_1$ 时， $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$， 令 $x = A(t)\cos\overline{\omega}t$

其中 $\boxed{A(t) = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)}$　　$\boxed{\cos\overline{\omega}t = \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t)}$

随 t 缓变　　随 t 快变

➤ 结论：合振动 x 可看作是振幅缓变的简谐振动。

❖ 拍的现象



拍频：单位时间内合振动振幅强弱变化的次数

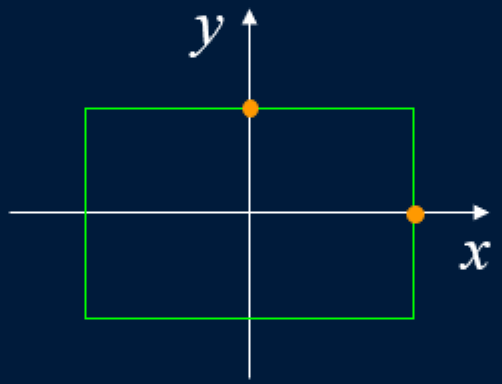
即：$\nu = \left|(\omega_2 - \omega_1)/(2\pi)\right| = \left|\nu_2 - \nu_1\right|$

拍原理的应用

12.3.3 两个相互垂直谐振动的合成　李萨如图

上海科技大学 ShanghaiTech University

1. 两个同频率相互垂直的谐振动的合成



分振动 $\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$

合运动 $$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

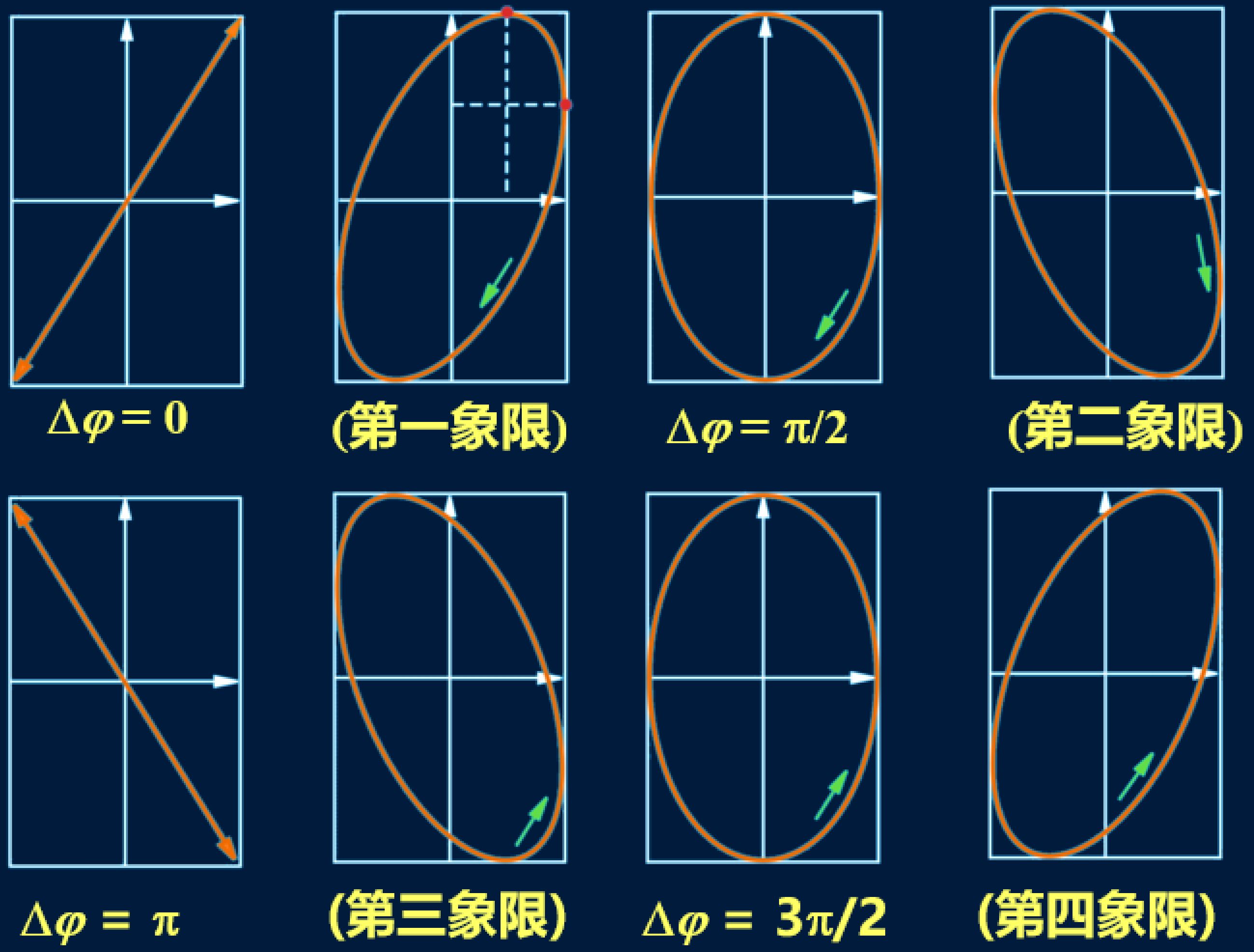
讨论 当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k\pi$ (k为整数)时,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} \pm 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} = 0$$

当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi/2$ (k为整数)时,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$



$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$$

2. 两个不同频率、相互垂直的谐振动的合成

分振动 $\begin{cases} x = A_1 \cos \omega_1 t \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta) \end{cases}$

➢ 结论:

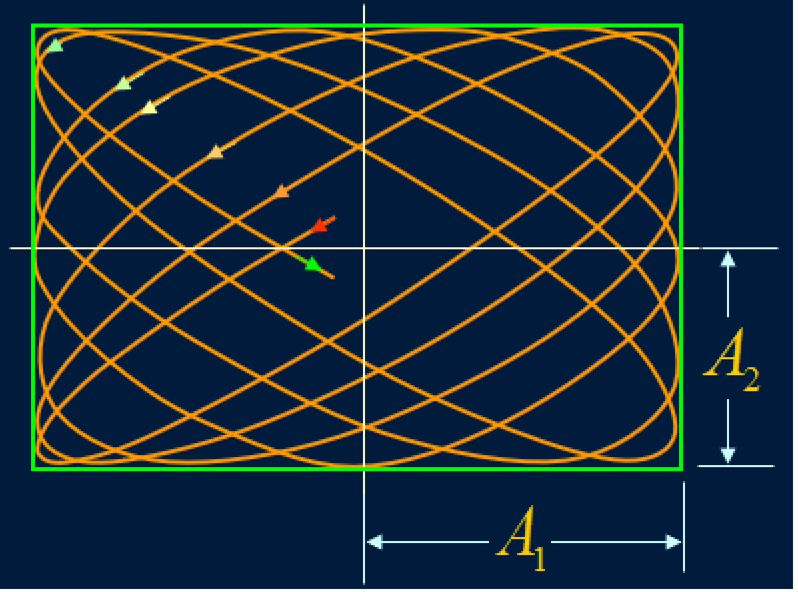
(1)ω_1、ω_2 之比为整数时:

合成运动仍是周期运动，轨迹是稳定的闭合曲线(李萨如图).

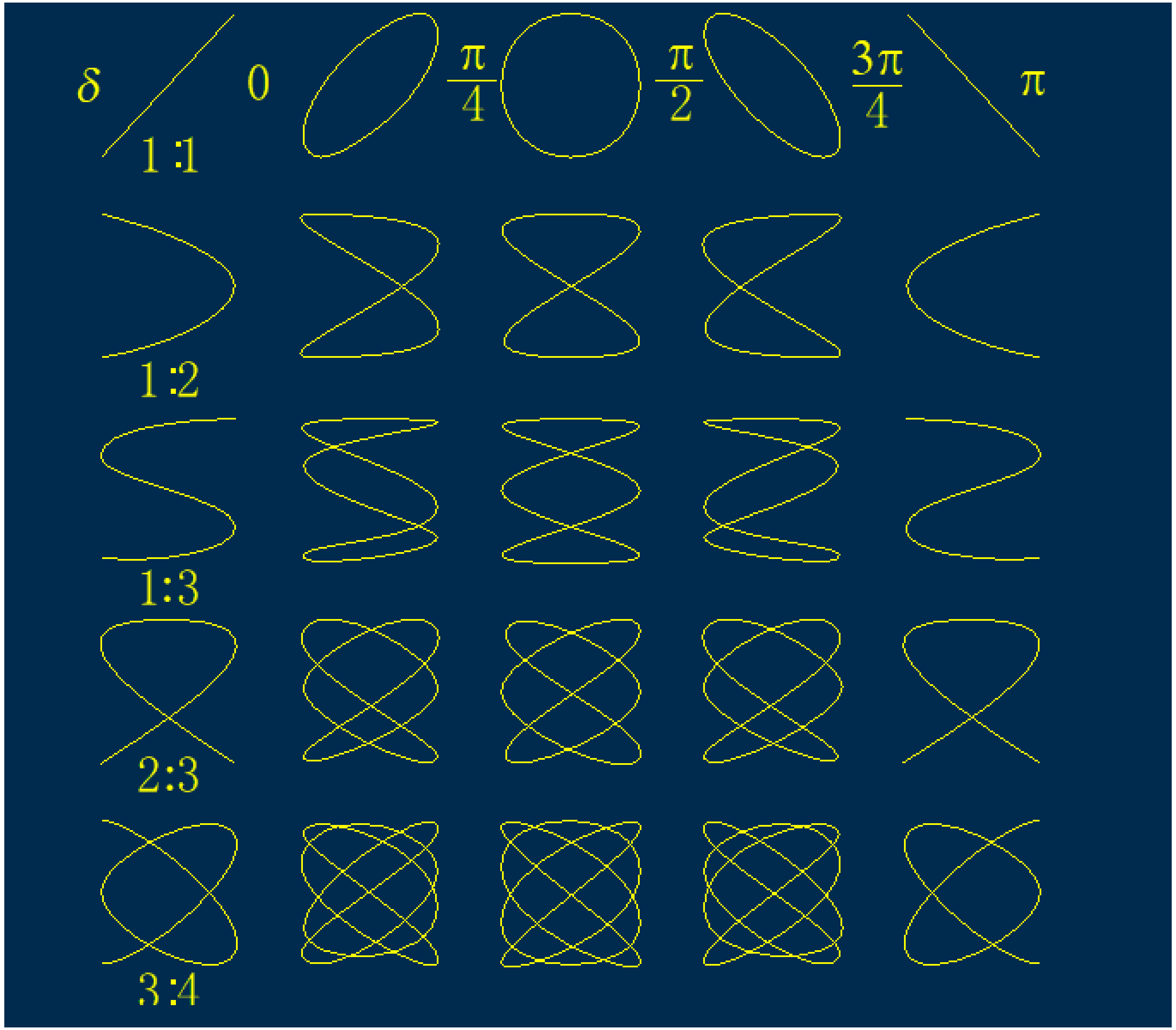
(2)ω_1、ω_2 之比不为整数时:

合成运动为非周期运动，

运动的轨迹为永不闭合的.



上海科技大学
ShanghaiTech University



例1. 已知两分振动为

$$x = A_1 \cos \omega t$$

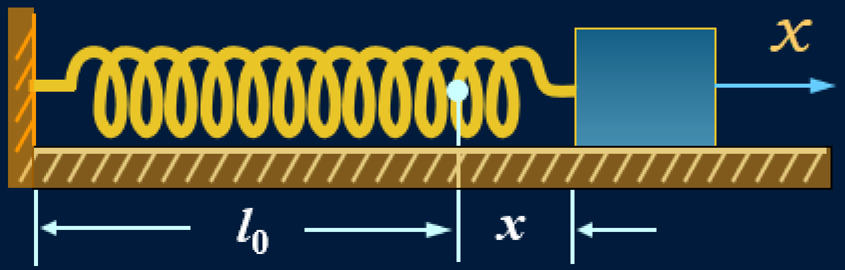
$$y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$$

求（1）合振动的轨迹

（2）若已知A、ω、φ、m，求质点在任一位置所受的力。

12.4.2 受迫振动

受力分析

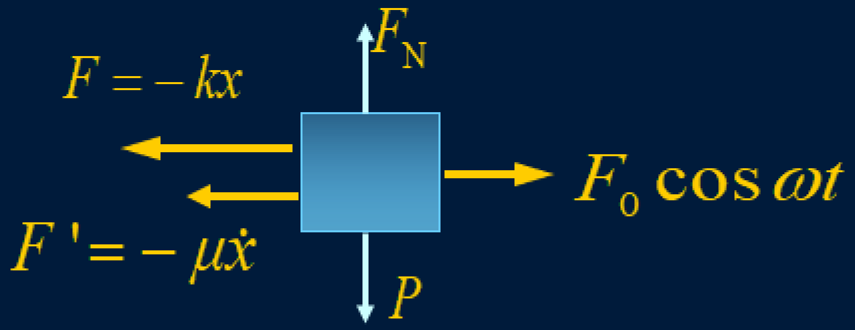


弹性力 $\quad -kx$

阻尼力 $\quad -\mu\dot{x}$

周期性驱动力

$$F = F_0 \cos \omega t$$



受迫振动的微分方程

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F_0 \cos \omega t \quad (令：\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\;;\quad n = \frac{\mu}{2m}\;;\quad f = \frac{F_0}{m})$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

其解为 $\quad x = x_1(通解) + x_2(特解)$

受迫振动微分方程的稳态解为:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi)$$

其中，振幅 A 及受迫振动与干扰力之间的相位差φ分别为:

$$A = \frac{f}{[(\omega^2 - \omega_0{}^2)^2 + 4n^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- 结论:

  振幅 A 及受迫振动与干扰力之间的相位差 φ 都与起始条件无关.

讨论:

- 位移共振(振幅取极值)
- 速度共振(速度振幅取极值)

1. 位移共振(振幅取极值)

共振频率： $\omega_{\mathrm{r}}=\sqrt{\omega_0^2-2n^2}$

共振振幅： $A_{\mathrm{r}}=\dfrac{f}{2n\sqrt{\omega_0^2-n^2}}$

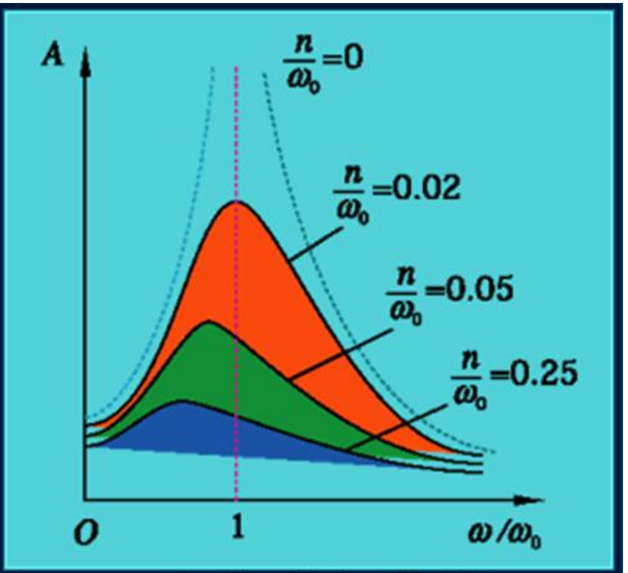
2. 速度共振(速度振幅取极值)

$$v_{\mathrm{m}}=\omega A=\frac{f\omega}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4n^2\omega^2}}$$

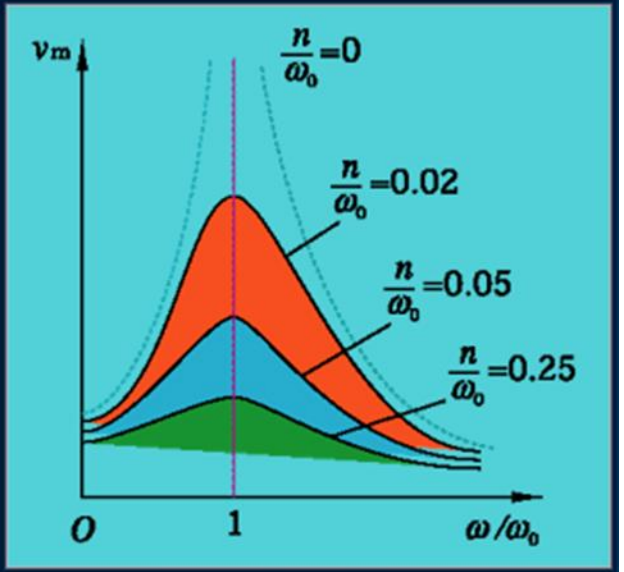
共振频率： $\omega=\omega_0$

共振速度振幅： $v_{\mathrm{m}}=\dfrac{f}{2n}$

◆ 共振的应用和危害



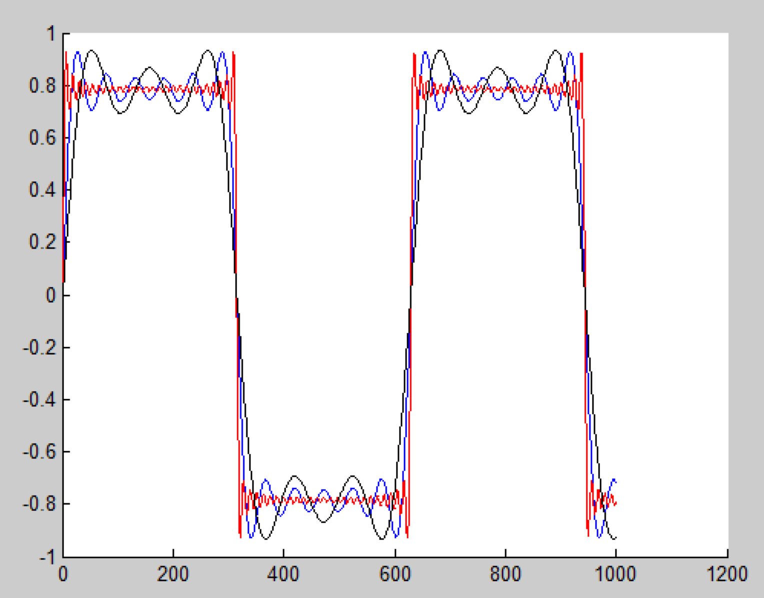
(振幅共振曲线)



(速度共振曲线)

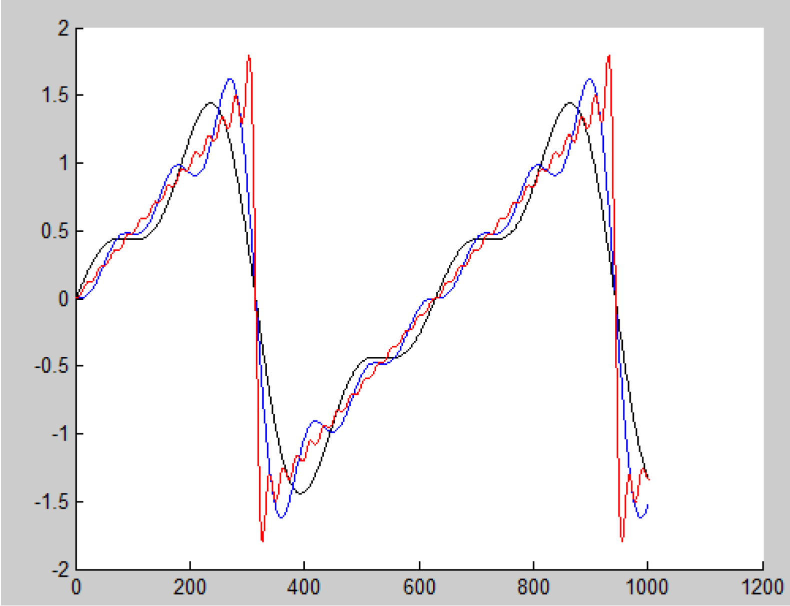
非简谐振动

- 任何一个周期性运动，都能用其频率整数倍的简谐振动的叠加得到



$$(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + \cdots\cdots)$$

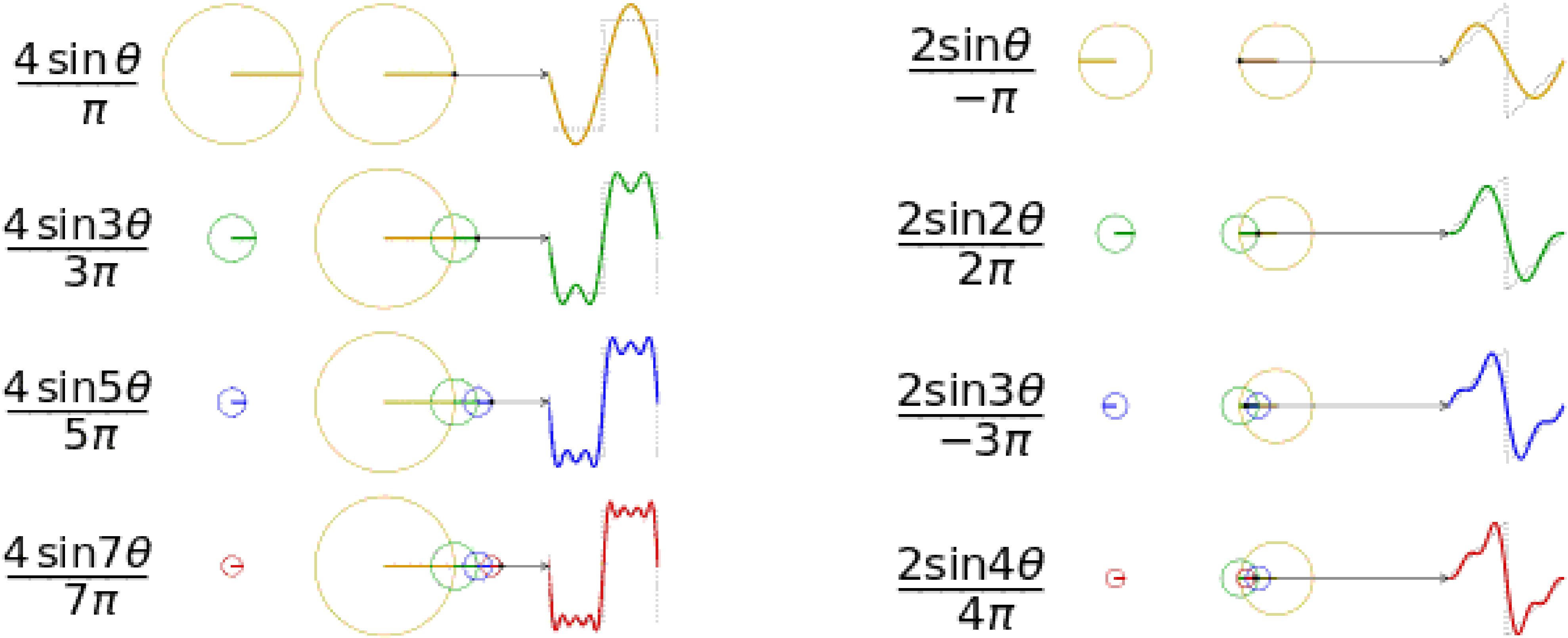
三项，六项，二十六项的叠加结果



$$\sin(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) - \cdots$$

三项，六项，二十六项的叠加结果

非简谐振动-y方向投影示意



波动

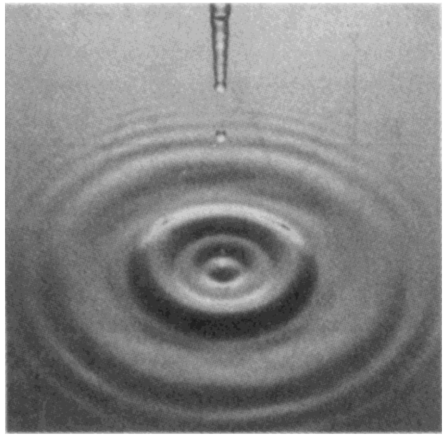
- 波的分类
- 简谐波
- 波动方程
- 波的能量和能流
- 惠更斯原理
- 干涉和衍射

- 什么是波？
  振动状态以一定速度在空间的传播就形成了波.

- 波的分类

1. 机械波

机械振动以一定速度在弹性介质中由近及远地传播出去，就形成机械波.



产生条件
- 波源：作机械振动的物体
- 弹性介质：承担传播振动的物质

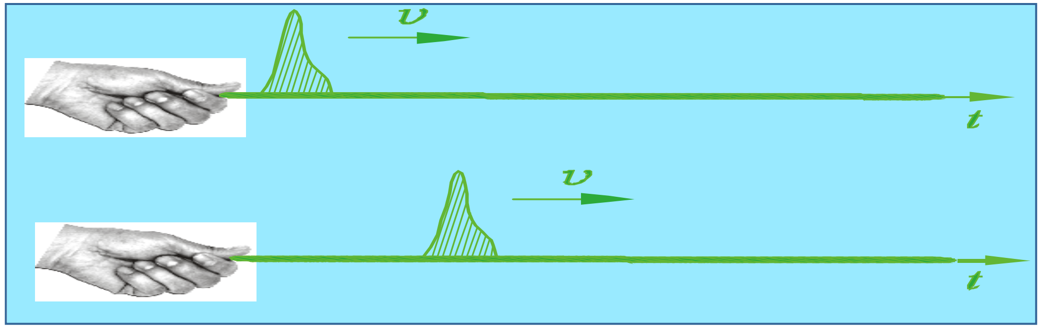
2. 电磁波

变化的电场和变化的磁场在空中的传播过程形成电磁波.

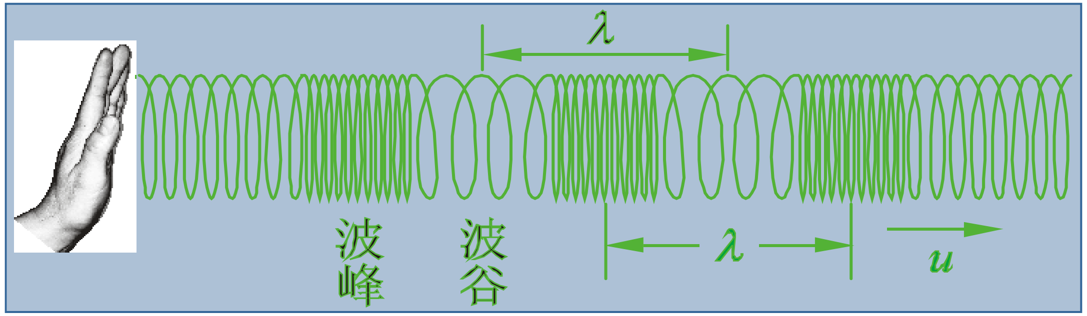
3. 物质波

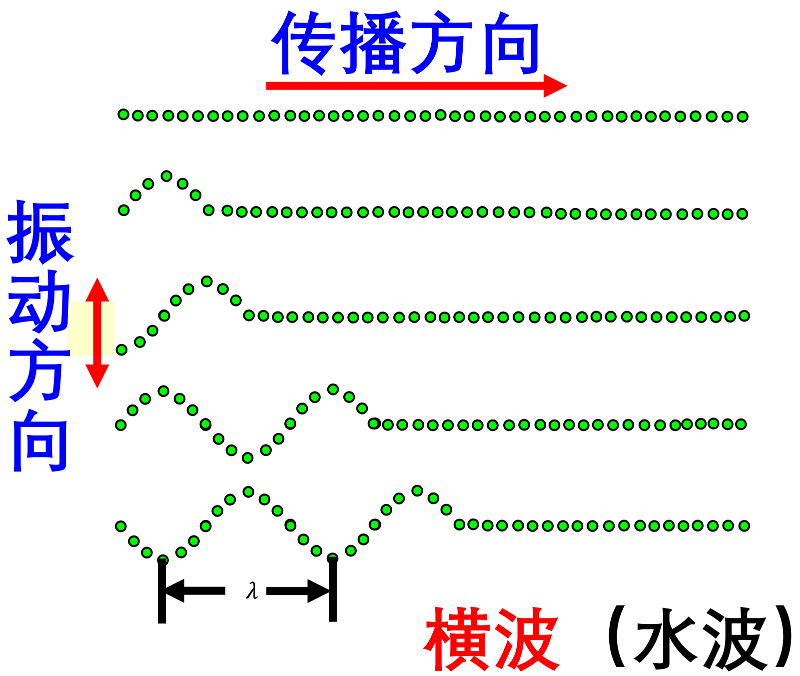
物质波（也称概率波）是微观粒子的一种属性，具有完全不同的性质，遵从量子力学理论.

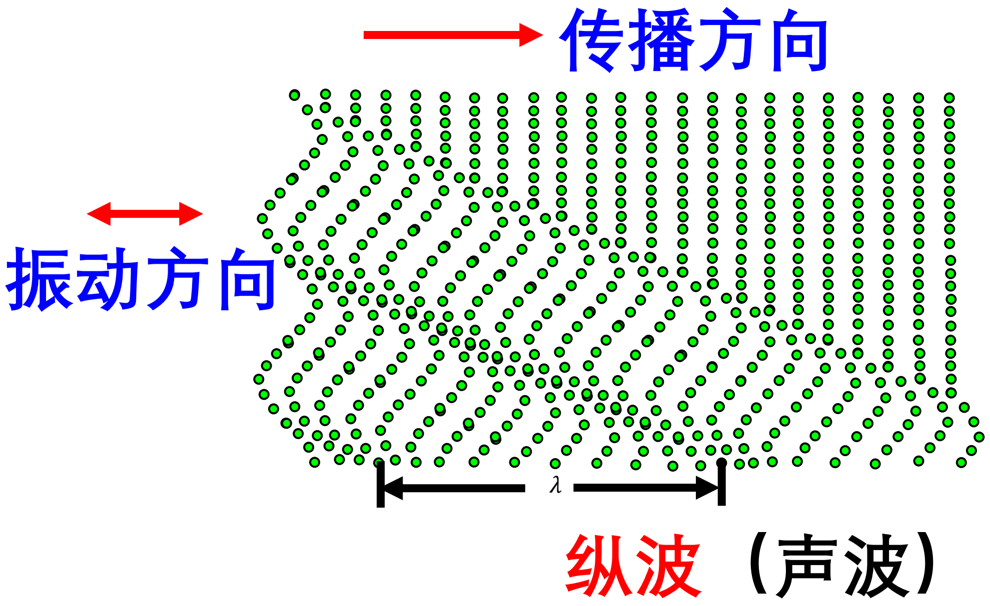
- 横波：介质质点的振动方向与波传播方向相互垂直的波；
  如柔绳上传播的波.



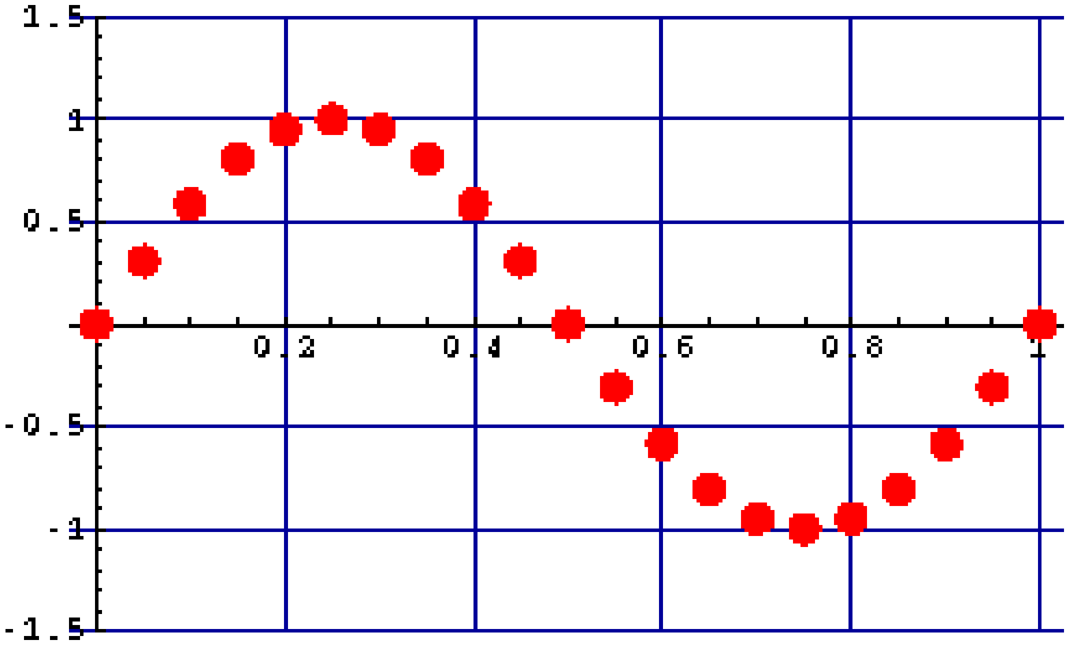
- 纵波：介质质点的振动方向和波传播方向相互平行的波；
  如空气中传播的声波.



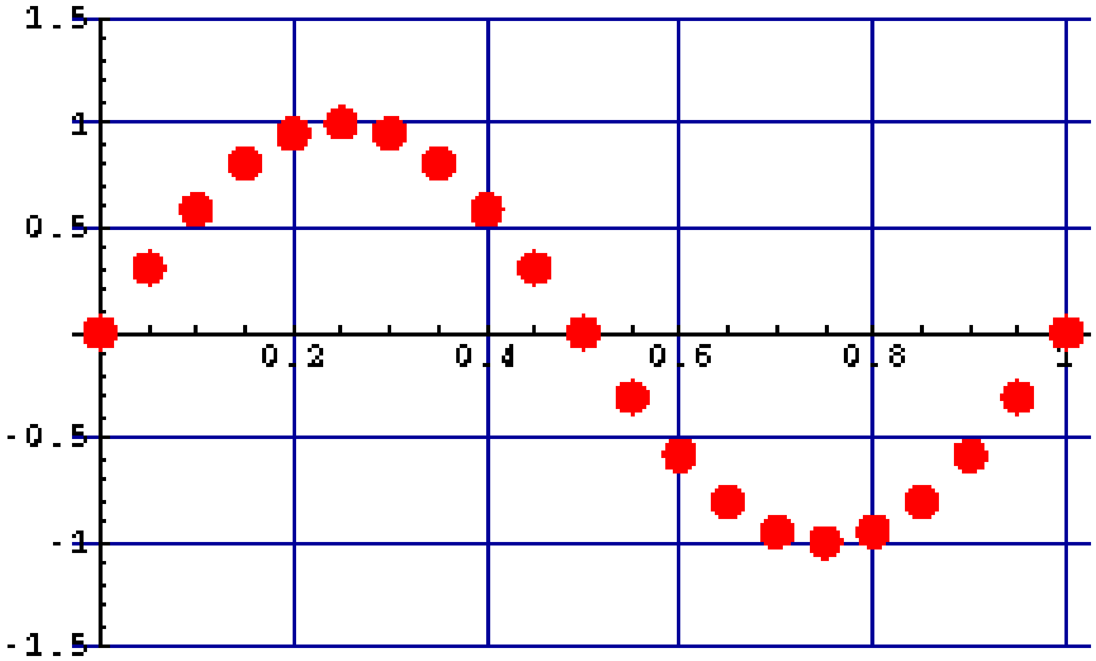

传播方向
振动方向
λ
横波（水波）


传播方向
振动方向
λ
纵波（声波）

机械波的类型：传播形式



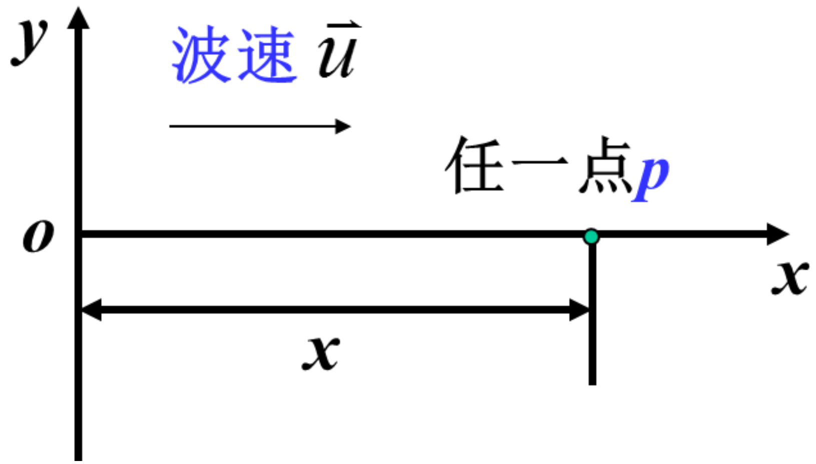
行波



驻波

平面简谐波

简谐波：波源作简谐振动，在波传到的区域，媒质中的质元均作简谐振动 。



设 $y_o = A\cos(\omega t + \phi)$

假设：媒质无吸收(质元振幅均为*A*)

图中*p*点比*o*点落后时间： $\frac{x}{u}$

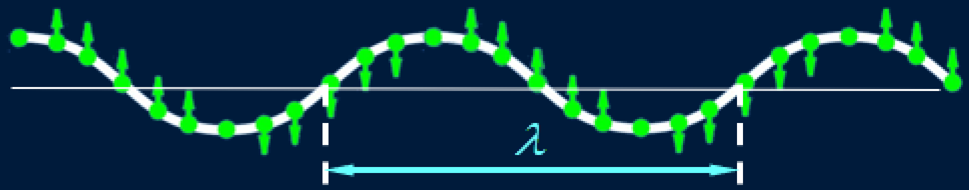
$p\text{:}\ t \Leftrightarrow o\text{:}\ t - \frac{x}{u}$

则 $\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi\right]}$ **向右传播的一维平面简谐波**

◆ 波长 周期 频率和波速

波长（λ）：同一波线上相位差为 2π 的质点之间的距离；即波源作一次完全振动，波前进的距离.

(波长反映了波的空间周期性)



角波数 k ：2π距离中完整波的数目 $k = 2\pi / \lambda$

周期（T）：波前进一个波长距离所需的时间.

(周期表征了波的时间周期性)

频率（ν）：单位时间内，波前进距离中完整波的数目.

频率与周期的关系为 $\nu = 1 / T = \omega / 2\pi$

波速（u）：振动状态在媒质中的传播速度.

波速与波长、周期(或频率）的关系为 $uT = \lambda$

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi\right]$$

◆ **简谐波波函数的其它形式**

将 $k = 2\pi/\lambda$ 、$uT = \lambda$ 、 $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ 代入

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

有

$$\begin{cases} y(x,t) = A\cos[2\pi(\nu t - \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[\dfrac{2\pi}{\lambda}(ut - x) + \varphi_0] \end{cases}$$

若波沿轴负向传播时，则有波函数

$$\begin{cases} y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0) \\ y(x,t) = A\cos[2\pi(\nu t + \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T} + \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[\dfrac{2\pi}{\lambda}(ut + x) + \varphi_0] \end{cases}$$

例 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，已知其波函数为

$$y = 0.04\cos\pi(50t - 0.10x)\ \text{m}$$

求 (1) 波的振幅、波长、周期及波速；

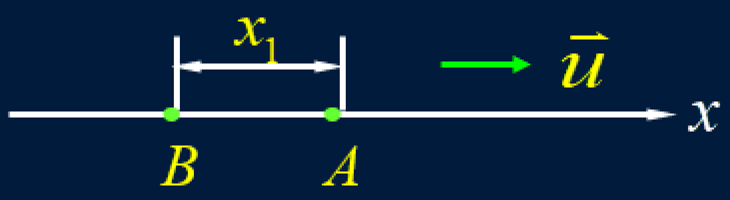
(2) 质点振动的最大速度.

例 如图，已知A点的振动方程为： $y_A = A\cos[4\pi(t-\frac{1}{8})]$

在下列情况下试求波函数：

(1) 以 A 为原点；

(2) 以 B 为原点；



(3) 若 u 沿 x 轴负向，以上两种情况又如何？

上海科技大学
ShanghaiTech University

平面波的波动微分方程

由 $y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$

知
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}&=-A\omega^2\cos(\omega t-kx+\varphi_0)\\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}&=-Ak^2\cos(\omega t-kx+\varphi_0)\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

➤ 说明

(1) **上式是一切平面波所满足的微分方程（正、反传播）；**

(2) **不仅适用于机械波，也适用于电磁波、热传导、化学中的扩散等过程；**

(3) **若物理量是在三维空间中以波的形式传播，波动方程为**

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

机械波的类型：波前形状

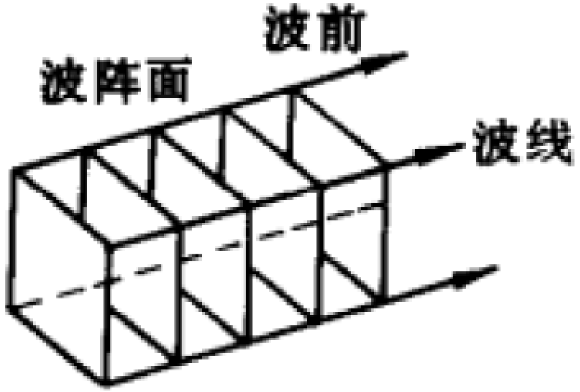
波线： 用有向直线表示波的传播方向

波阵面：某一时刻波的前方达到的相位相同的各点构成的连续的面，又称波前 (wave front)

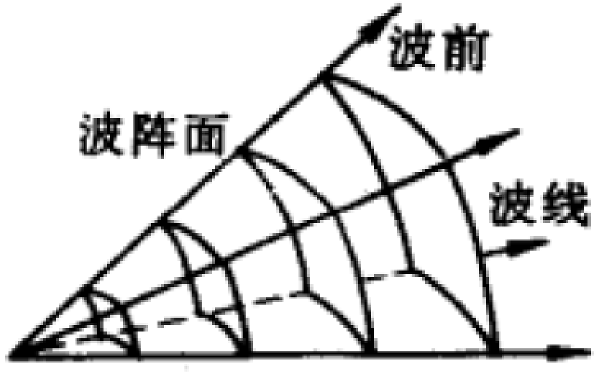
各向同性介质中，波线与波阵面垂直

- 若波阵面为平面，称为平面波
- 若波阵面为球面，称为球面波
- 若波阵面为柱面，称为柱面波

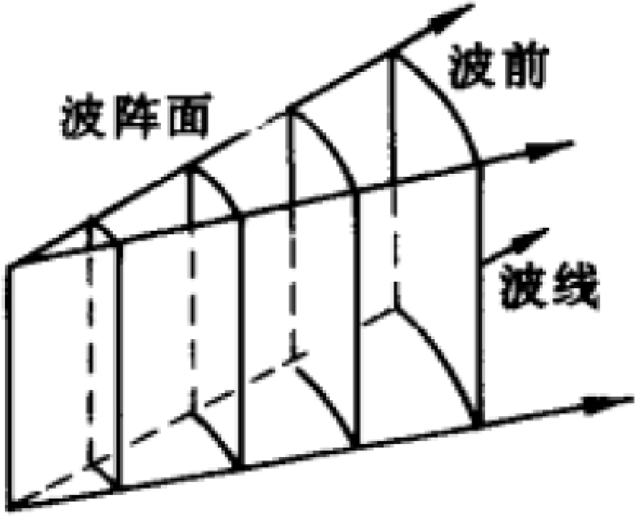
机械波的类型：波前形状



平面波



球面波



柱面波

波速*u*：波阵面沿波线的推进速度（相位传播）

t, Ψ $t + \Delta t, \Psi$ $u = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

ΔS

机械波的速度决定于媒质的弹性和密度

波速： 亦称相速度，其大小主要决定于媒质的性质，与波的频率无关.

例： a. 拉紧的绳子或弦线中横波的波速为：

$$u_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

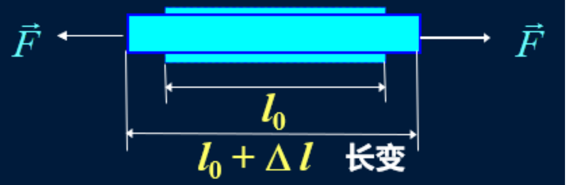
$\begin{cases} T \text{— 张力} \\ \mu \text{— 线密度} \end{cases}$

b. 均匀细棒中，纵波的波速为：

$$u_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$\begin{cases} Y \text{ — 杨氏模量} \\ \rho \text{ — 棒的密度} \end{cases}$

$$\frac{F}{S} = Y\frac{\Delta l}{l}$$

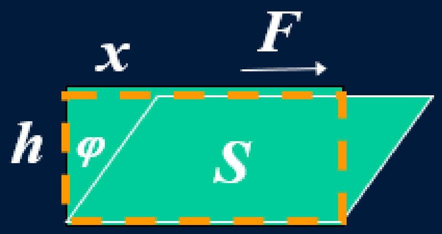


c. 固体介质中传播的横波速率由下式给出：

$$u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G：切变弹性模量

$$\frac{F}{S} = G\frac{x}{h}$$



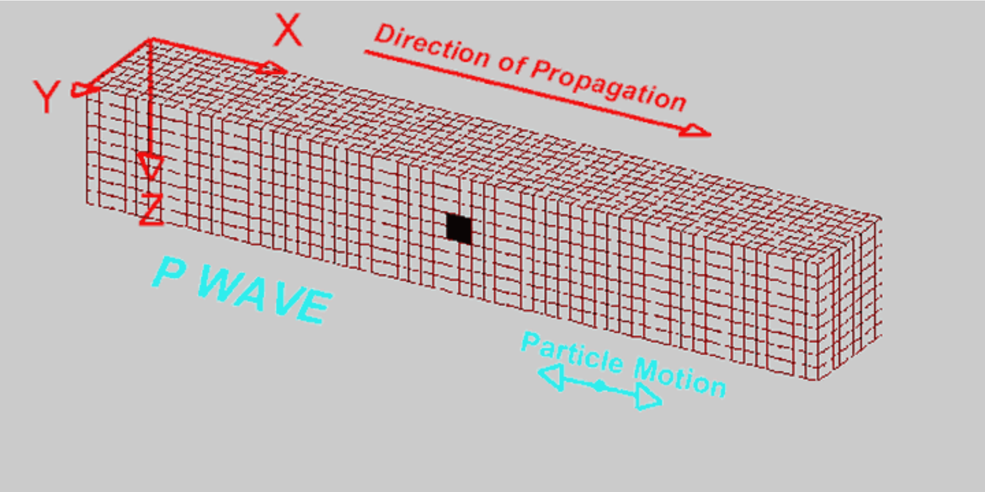
切变

由于：$G < Y$，固体中 $u_{横波} < u_{纵波}$

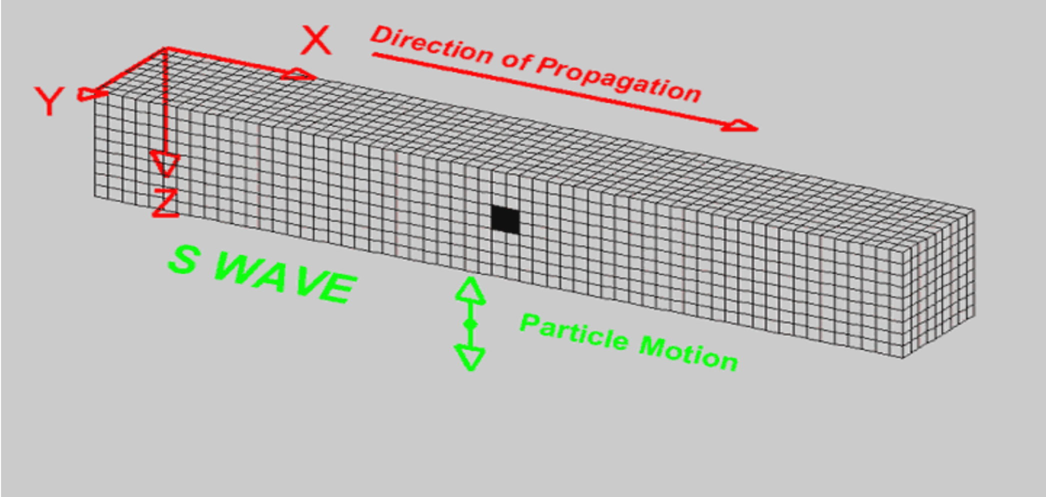
江苏盐城市大丰区海域发生5.0级地震，南京、上海等地有震感

来源：央视网 | 2021年11月17日 14:21:02

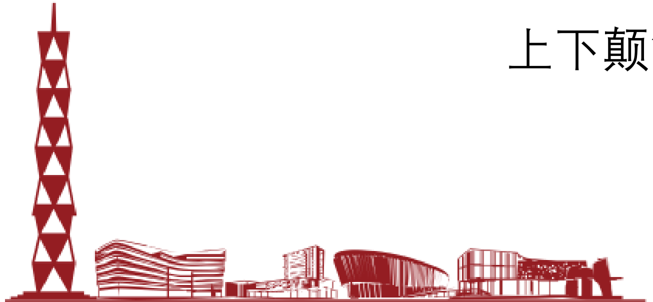
中国地震台网正式测定：11月17日13时54分在江苏盐城市大丰区海域（北纬33.50度，东经121.19度）发生5.0级地震，震源深度17千米。震中距最近海岸线45公里，距盐城市97公里，距南京市276公里，距上海市254公里。地震造成江苏盐城、南通等地震感强烈，江苏南京、上海等地亦有震感。



上下颠簸

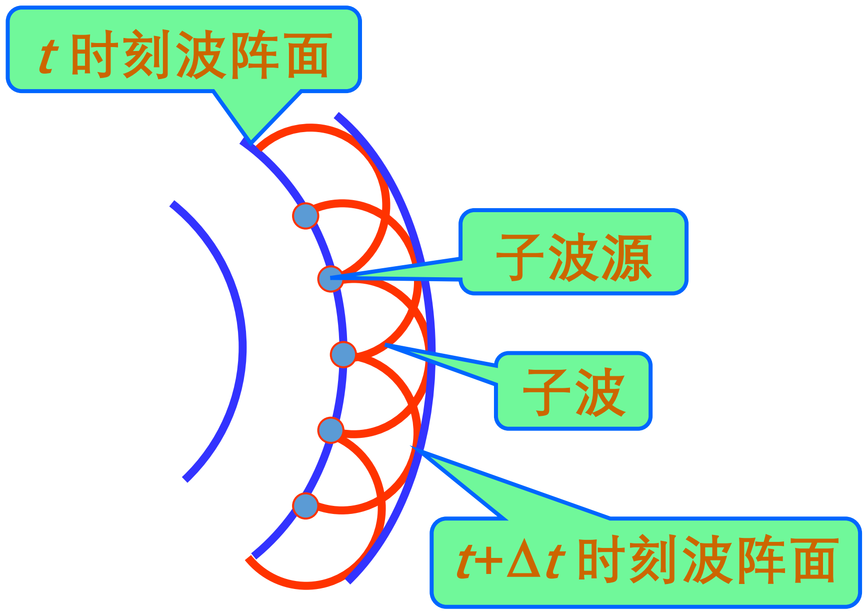


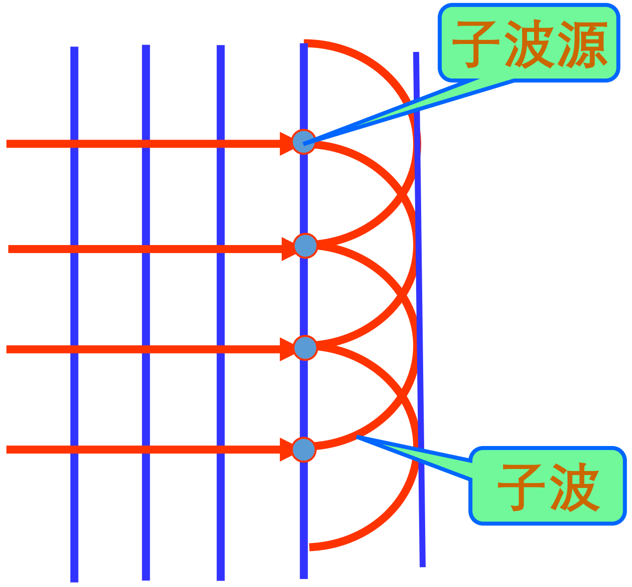
左右晃动



惠更斯原理

波动传到的各点都可以看作是发射子波的波源，在其后的任一时刻，这些子波波阵面的包络面就决定新的波阵面。



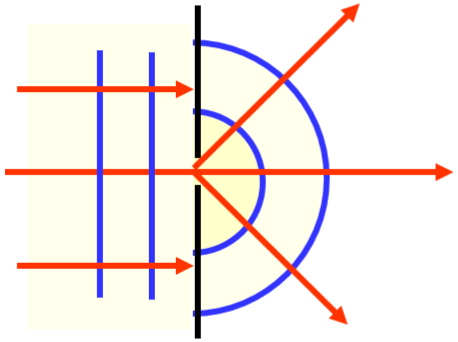


波动现象：衍射

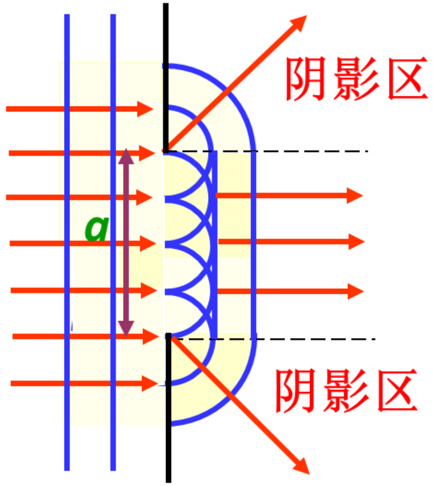
1. 现象

波传播过程中当遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘而传播的现象——衍射。

2. 作图 （可用惠更斯原理作图）



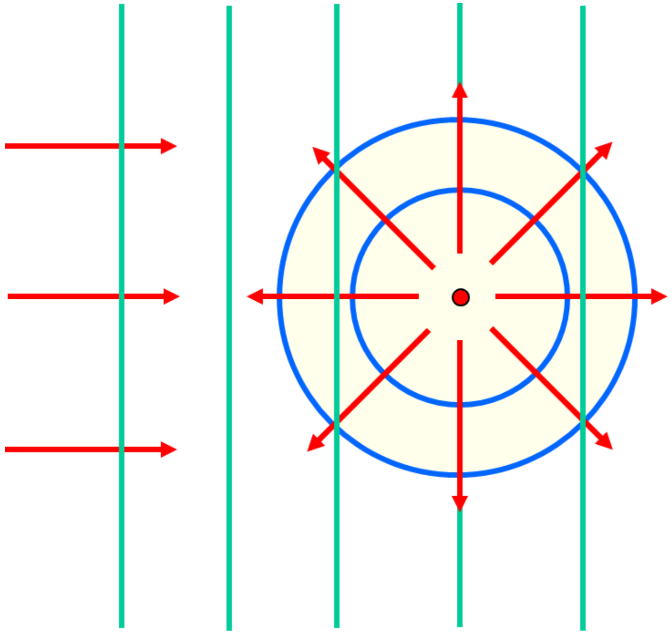
（1）$a \ll \lambda$



（2）$a \sim \lambda$

波动现象： 散射

当波在传播途中遇到球形小颗粒时，波将以小颗粒为球心发射球面子波，使波向各个方向散开，这一现象称为散射。



波动现象：折射

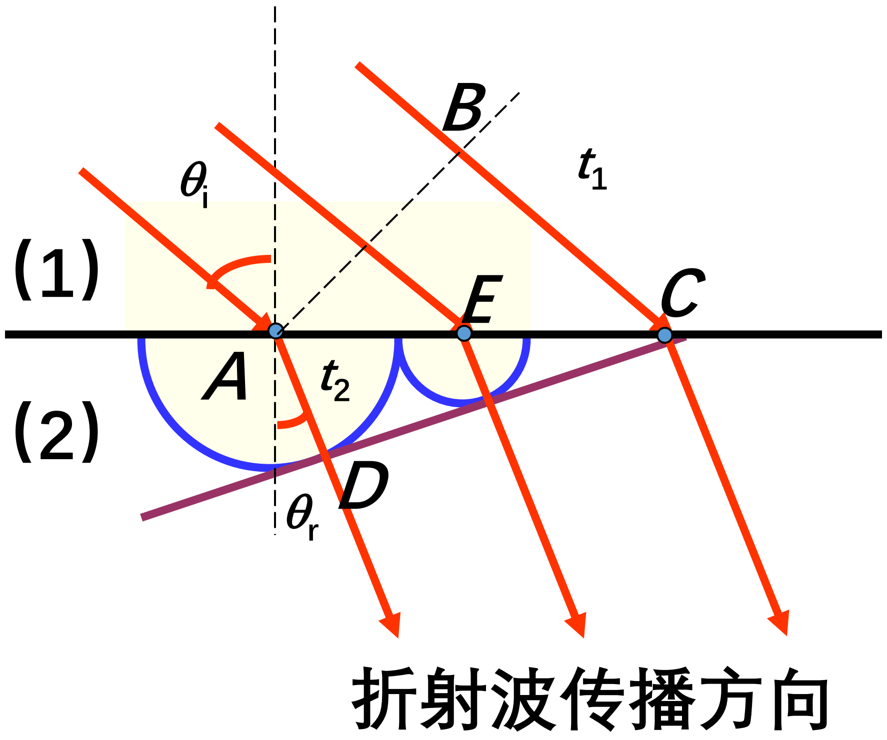
用作图法求出折射波的传播方向

$BC = u_1(t_2 - t_1)$

$AD = u_2(t_2 - t_1)$

由图可得波的折射定律：

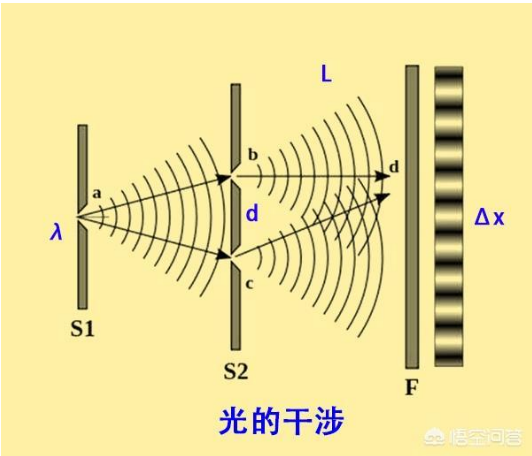
$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{u_1}{u_2}$$



θ_i—入射角，θ_r—折射角。

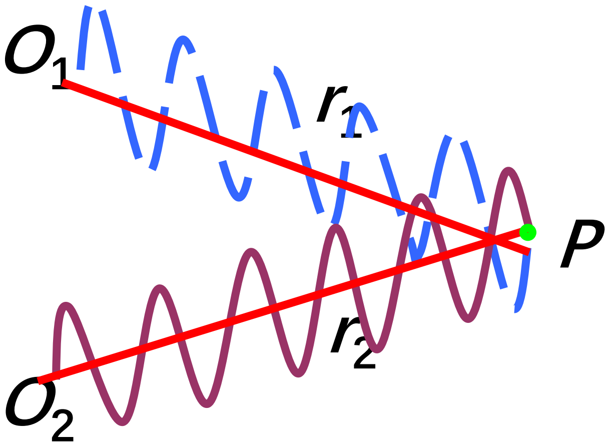
波的干涉现象

- 基于波的独立传播和叠加原理



相干条件：频率相同，振动方向相同，相位差恒定

两相干波在空间相遇，某些点的振动始终加强另一些点的振动始终减弱，即出现干涉现象。



设 $y_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1)$

$y_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2 - kr_2)$

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

波的干涉现象

其中 $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - k\left(r_1 - r_2\right)$$

设 $\varphi_2 = \varphi_1$ $\Delta\varphi = k\left(r_2 - r_1\right) = \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(r_2 - r_1\right)$

- 当 $r_2 - r_1 = \pm n\lambda, \quad n = 0,1,2\cdots$ $\boxed{A = A_1 + A_2 \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}}$ 相长
- 当 $r_2 - r_1 = \pm(2n+1)\dfrac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2\cdots$ $\boxed{A = \left|A_1 - A_2\right| \quad I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}}$ 相消