



普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室

Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、
强场激光物理、飞秒激光成丝。

<https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm>



1. 质点、参考系、坐标系

2. 位置矢量与运动方程 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

3. 位移与路程 $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

4. 速度、加速度 $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

5. 匀加速直线运动 $v = v_0 + at, \quad x = v_0t + at^2/2, \quad v^2 - v_0^2 = 2ax$

6. 平面极坐标系 $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$ $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$



例 在离水面高为 h 的岸边，有人用绳子拉小船靠岸，人以不变的速率 u 收绳。

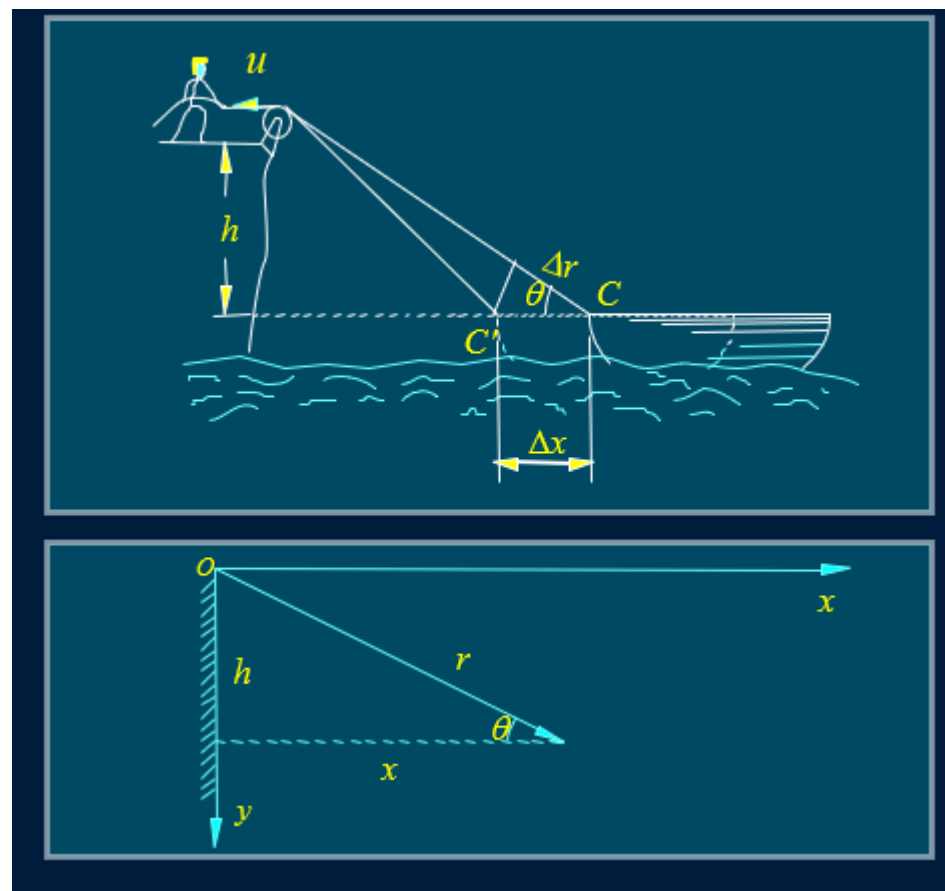
求 当船在离岸距离为 x 时的速度和加速度。

解 任意时刻船的位矢

$$\vec{r} = x\vec{i} + h\vec{j}$$

设船靠岸的速度为 \vec{v}

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dh}{dt}\vec{j} \\ &= \frac{dx}{dt}\vec{i} = v_x\vec{i}\end{aligned}$$



任意时刻小船到岸边的距离 x 都满足

$$x = \sqrt{r^2 - h^2}$$

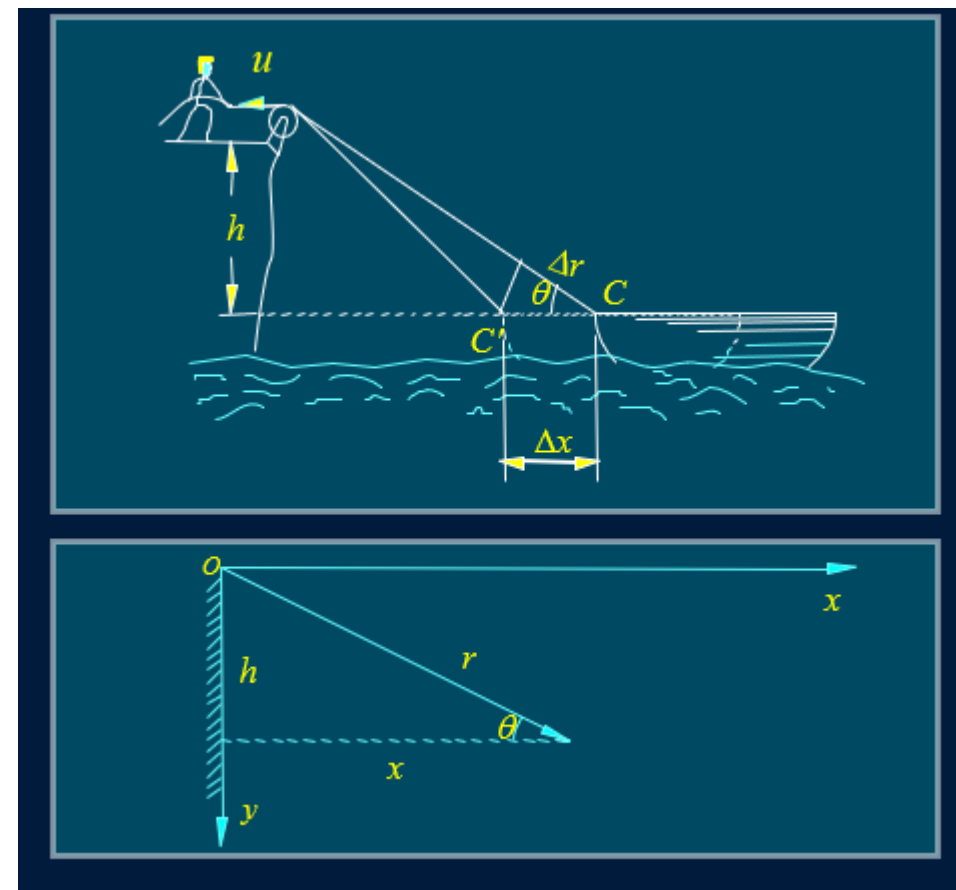
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{r^2 - h^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} \frac{dr}{dt}$$

按题意 $u = -\frac{dr}{dt}$ 是人收绳的速率

$\frac{dr}{dt} < 0$ 绳长 r 随时间在缩短

则有
$$v_x = -\frac{r}{\sqrt{r^2 - h^2}} u = -\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x} u$$

$$\vec{v} = -\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x} u \vec{i} \quad (\text{船速方向沿} x \text{ 轴负向})$$



船靠岸的速率为 $v = |\vec{v}| = \frac{u}{\cos \theta} = \frac{u}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}} = \frac{u \sqrt{x^2 + h^2}}{x} > u$

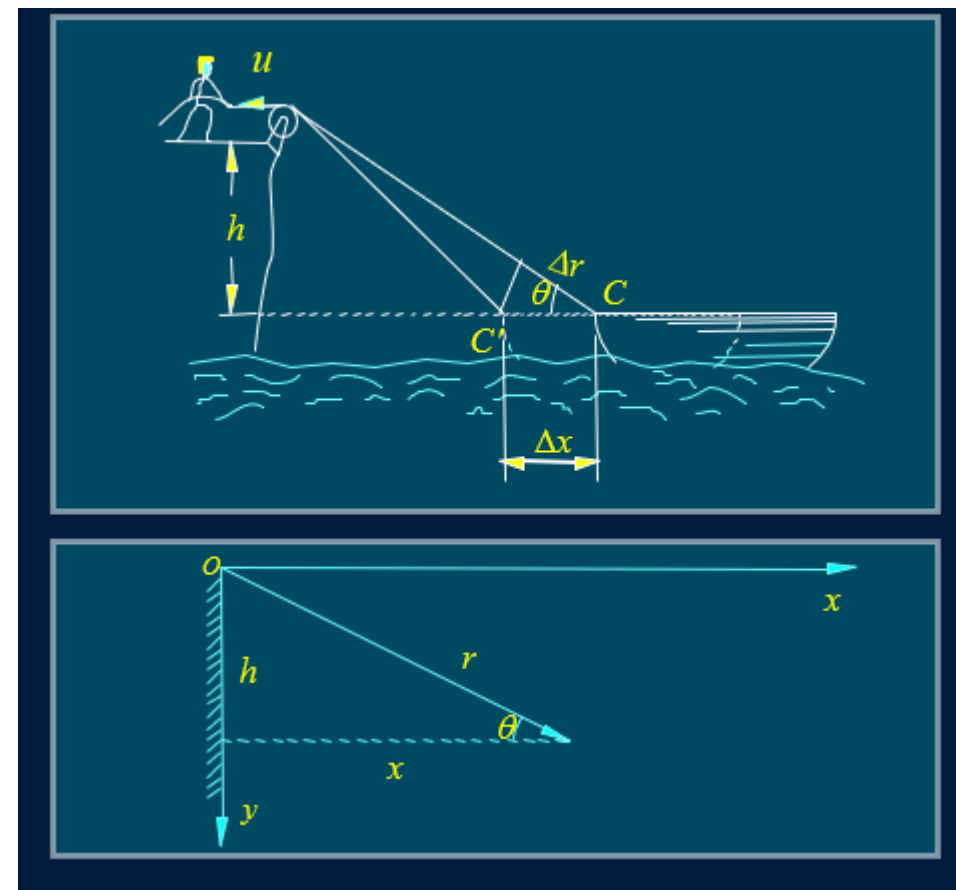
船的加速度为 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i}$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x} u \right) = u \frac{h^2}{x^2 \sqrt{x^2 + h^2}} \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{-u^2 h^2}{x^3}$$

即

$$\vec{a} = a_x \vec{i} = -\frac{u^2 h^2}{x^3} \vec{i} \quad (\text{船的加速度方向沿} x \text{ 轴负向})$$





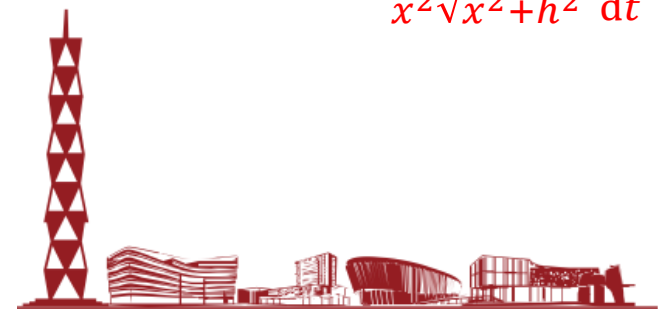
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x} u \right) = u \frac{h^2}{x^2 \sqrt{x^2 + h^2}} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x} u \right)$$

$$= -u \frac{d}{dt} \left(\sqrt{1 + \frac{h^2}{x^2}} \right)$$

$$= -u \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} * (-2) \frac{h^2}{x^3} \frac{dx}{dt}$$

$$= u \frac{h^2}{x^2 \sqrt{x^2 + h^2}} \frac{dx}{dt}$$



自然坐标

质点作曲线运动且轨迹已知时，用自然坐标描述。

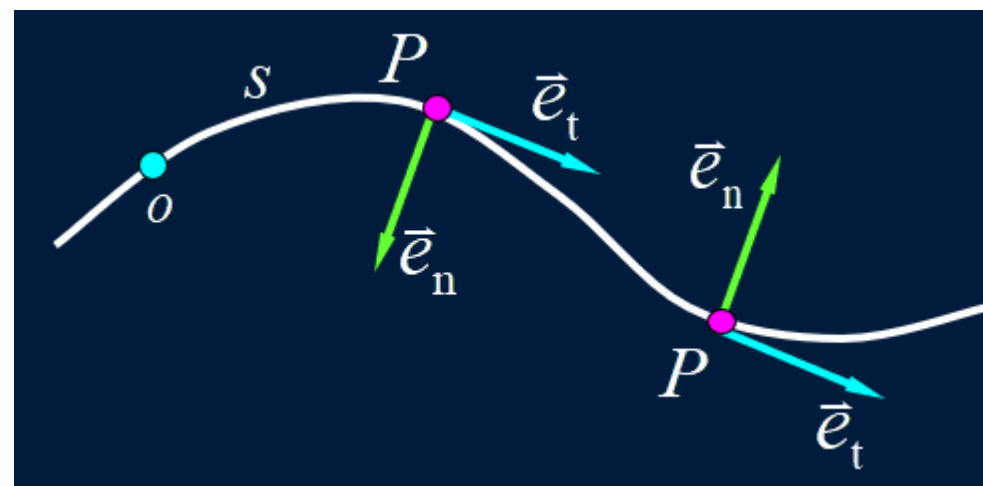
在已知的运动轨迹上任选一点 O 为原点，从 O 点起沿轨迹的某一方向量得曲线长度 s (取正值)，此方向为自然坐标正向。

自然坐标中质点的运动方程

$$s = s(t)$$

\vec{e}_n : 法向单位矢量，指向轨迹曲线凹侧。

\vec{e}_t : 切向单位矢量，指向自然坐标正向。



自然坐标中 \vec{e}_n , \vec{e}_t 不是恒矢量, 其方向随质点在轨迹上的位置而变化。

自然坐标中的速度:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t = v \vec{e}_t$$

速度矢量方向，总是沿轨迹的切线方向

自然坐标中的加速度:

$$\vec{v} = v\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$\Delta\vec{e}_t = \vec{e}_t(t + \Delta t) - \vec{e}_t(t)$$

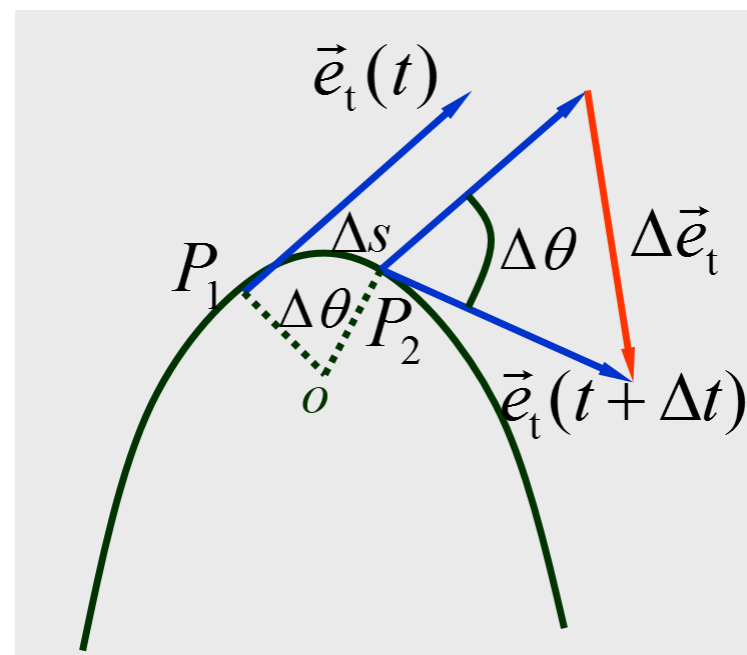
大小: $|\Delta\vec{e}_t| = |\vec{e}_t|\Delta\theta = \Delta\theta$

$$\Rightarrow \Delta\vec{e}_t = \Delta\theta\vec{e}_n$$

方向: $\Delta\theta \rightarrow 0: \Delta\vec{e}_t//\vec{e}_n$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{e}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{e}_n = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n$$



注意此处法线单位矢量为内法线方向

切向加速度: 质点速度大小的变化
法向加速度: 质点速度方向的变化

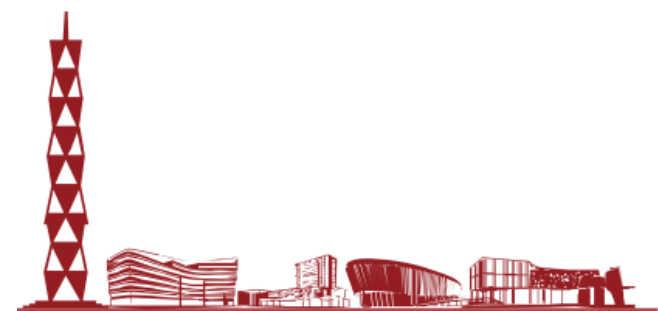
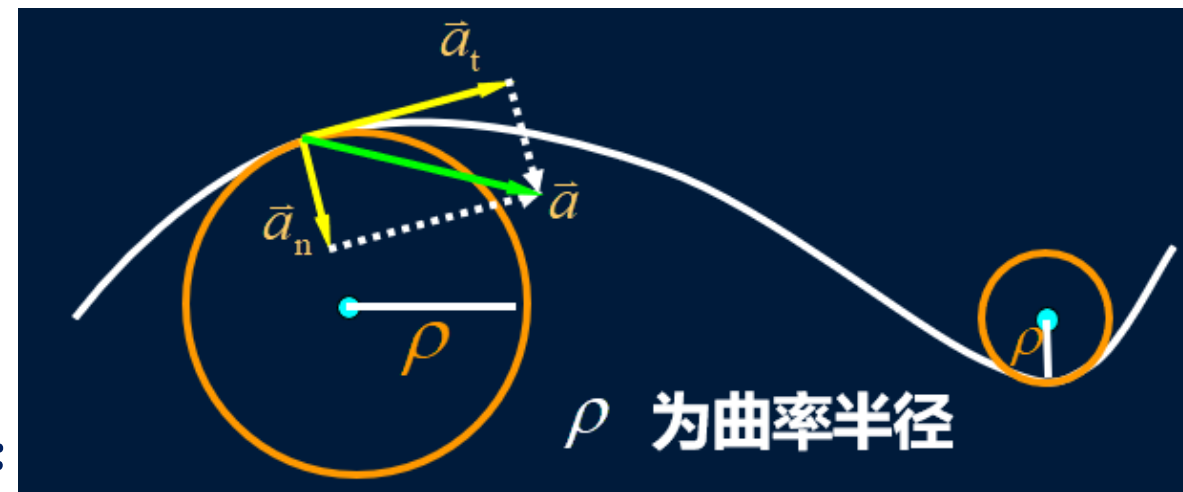
- 简单的情形：如果轨迹是一个圆，那么

$$v \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_n = v \frac{d(s/R)}{dt} \vec{e}_n = \frac{v}{R} \frac{ds}{dt} \vec{e}_n = \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$$

一般的情形：任意轨道，找到一个圆去和这一时刻的轨道相切。

假设内切圆半径为 ρ ，那么法向加速度：

$$v \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$



$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = a_n \vec{e}_n + a_t \vec{e}_t = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n + \frac{dv}{dt} \vec{e}_t$$

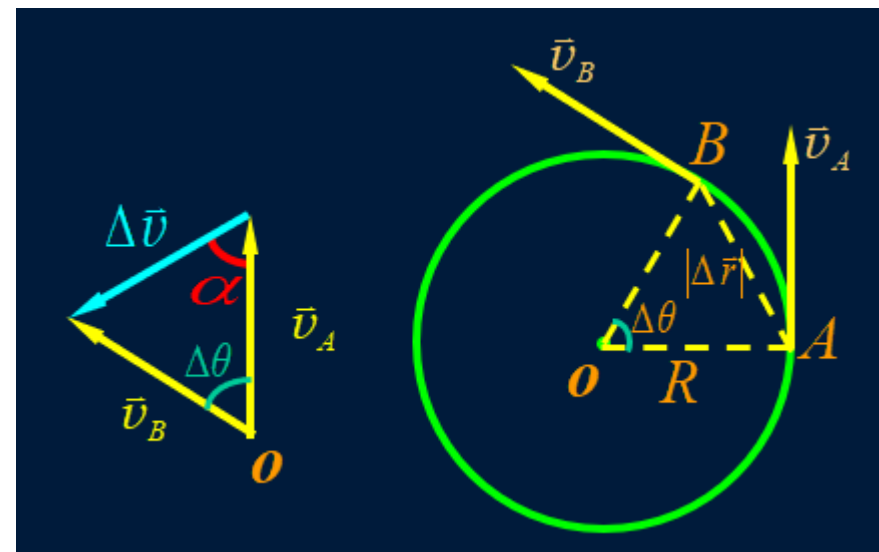
1. 匀速率圆周运动中的加速度

质点作半径为 R 速率为 v 的匀速圆周运动

$$\vec{a} = a_n \vec{e}_n = \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$$

质点在 A 点处的加速度方向垂直于 A 点的速度方向，沿半径指向圆心，称为法向加速度，以 a_n 表示。

只有法向加速度。



$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = a_n \vec{e}_n + a_t \vec{e}_t = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n + \frac{dv}{dt} \vec{e}_t$$

2. 变速圆周运动中的加速度

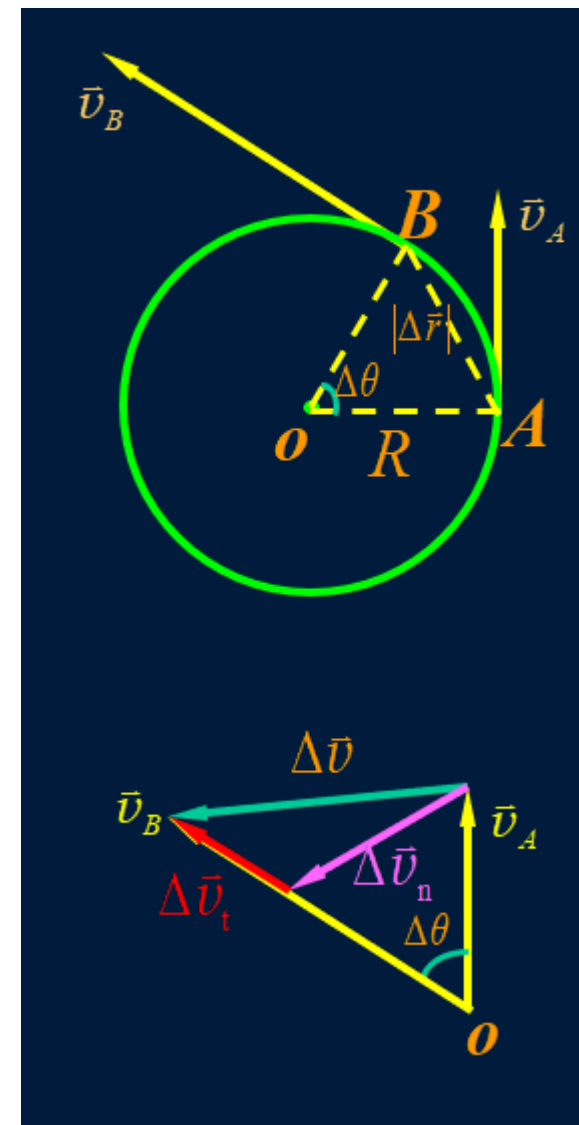
$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_n + \Delta \vec{v}_t$$

$\Delta \vec{v}_n$ 反映速度方向变化。

$\Delta \vec{v}_t$ 反映速度大小变化。

既有切向加速度，又有法向加速度。



自然坐标中，变速圆周运动的加速度



$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = a_n \vec{e}_n + a_t \vec{e}_t$$

大小

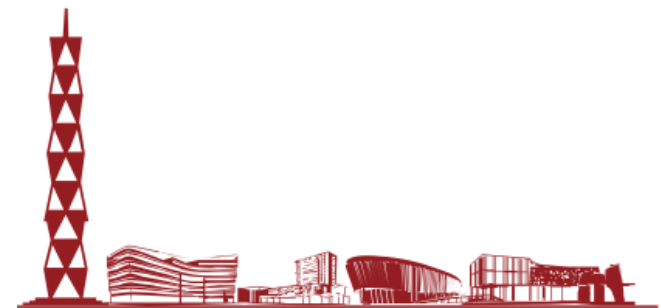
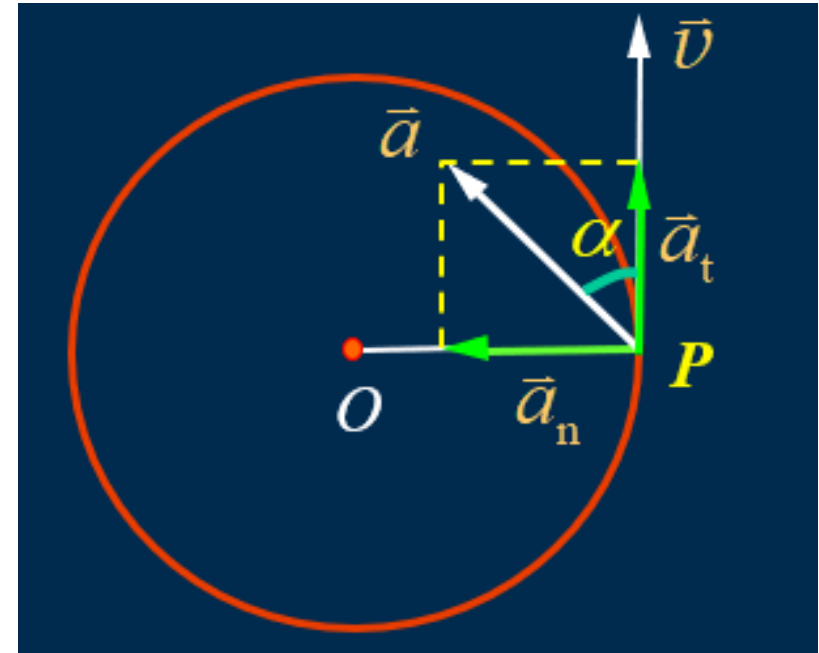
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

方向

$$\alpha = \arctan \frac{a_n}{a_t}$$

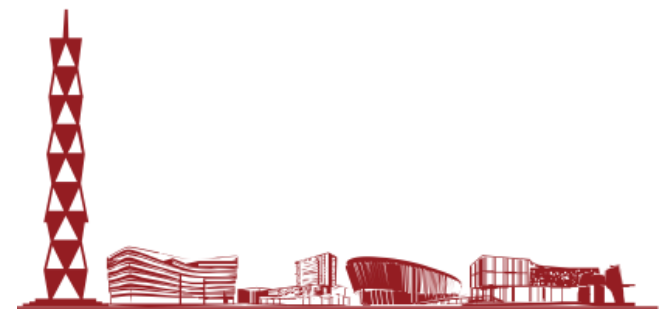
α 为加速度与速度之间的夹角



◆ 自然坐标中运动学的两类问题：

第一类问题：已知质点运动方程 $s=s(t)$ ，求质点在任意时刻的速度和加速度。

第二类问题：已知质点运动的速率 v 或切向加速度 a_t ，
求曲线运动的运动方程 $s=s(t)$ 。



例 如图所示，炮弹的出口速率为 v_0 ，发射角为 θ ，不计阻力。

求 (1) 任一时刻 t 的切向加速度 a_t 及法向加速度 a_n ；

(2) 轨迹最高点的曲率半径 ρ 。

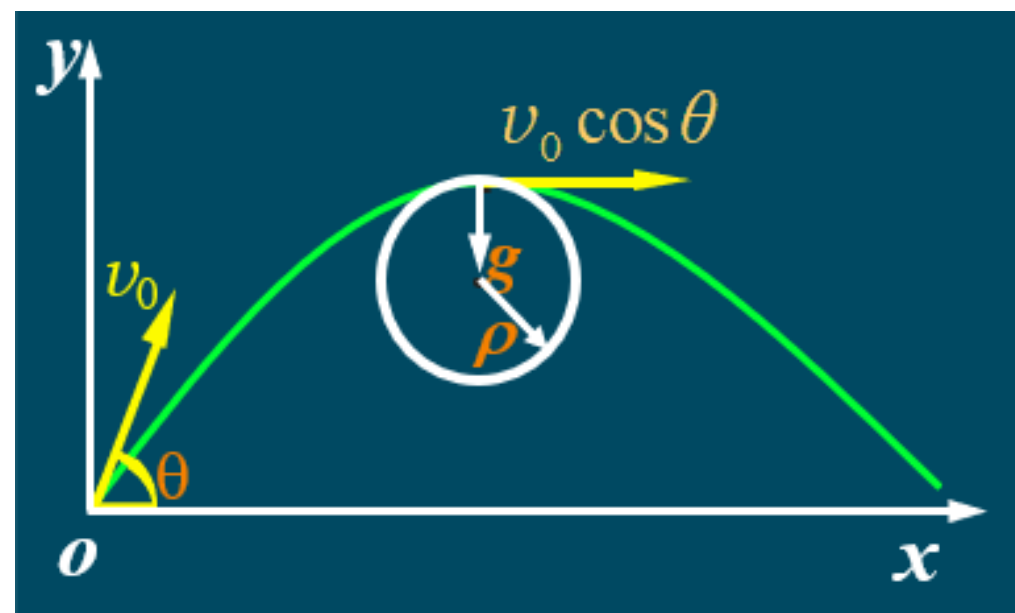
解 炮弹作抛体运动，设炮弹在平面 Oxy 上运动

(1) $\vec{a} = \vec{g}$ 为恒矢量

任一时刻 t ，炮弹速度在 Ox ， Oy 轴上的分量

$$v_x = v_0 \cos \theta$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt$$





任一时刻 t 的切向加速度

$$\begin{aligned}a_t &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\&= \frac{d}{dt} \sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta - gt)^2} \\&= -g \frac{v_0 \sin \theta - gt}{\sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta - gt)^2}}\end{aligned}$$

法向加速度

$$\begin{aligned}a_n &= \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{g^2 - a_t^2} = g \sqrt{1 - \left(\frac{a_t}{g}\right)^2} \\&= g \frac{v_0 \cos \theta}{\sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta - gt)^2}}\end{aligned}$$





(2) 轨迹最高点的曲率

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g}$$

► 讨论

由于顶点处速率 v 最小，且法向加速度 $a_n = g$ 最大，

按 $\rho = \frac{v^2}{a_n}$ 可知，在顶点处 ρ 达到最小值。

同理可推知，在抛出点和落地点 ρ 为最大值。





例 汽车在半径为200 m的水平圆弧形弯道上行驶，发现路障后司机刹车。若将开始刹车的时刻作为计时起点，则刹车阶段汽车的运动方程为 $s = 20t - 0.2t^3$ 。

求 汽车在 $t=1\text{s}$ 时的加速度。

解 本题为自然坐标中第一类问题。

$$v = \frac{ds}{dt} = 20 - 0.6t^2$$

切向加速度 $a_t = \frac{dv}{dt} = -1.2t$

法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(20 - 0.6t^2)^2}{R}$

总加速度 $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \frac{(20 - 0.6t^2)^2}{R} \vec{e}_n - 1.2t \vec{e}_t$

当 $t=1\text{s}$ 时

$$a_t = -1.2\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

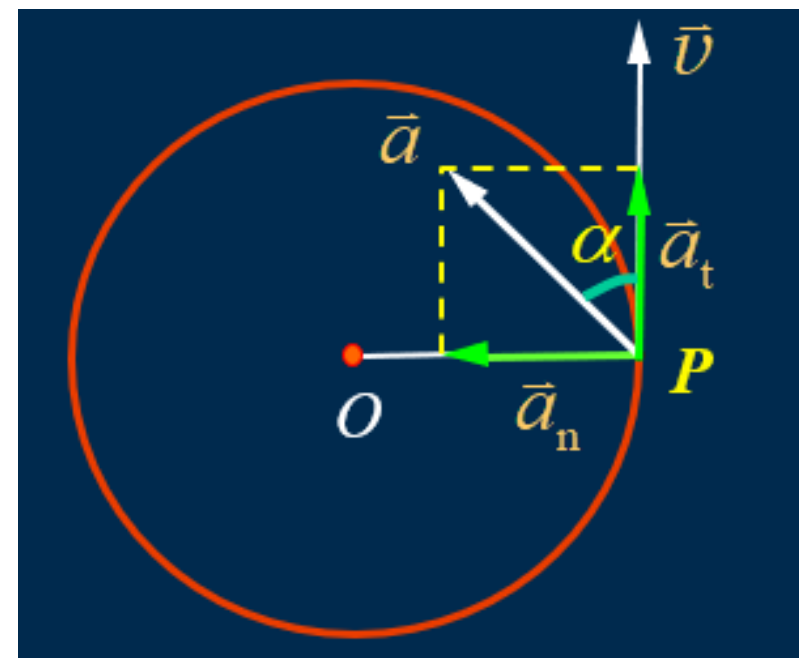
$$a_n = \frac{(20 - 0.6 \times 1)^2}{200} = 1.88\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\vec{a} = 1.88\vec{e}_n - 1.2\vec{e}_t$$

 $t=1\text{s}$ 时, 加速度的大小

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \\ &= \sqrt{1.88^2 + (-1.2)^2} = 2.23\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{1.88}{-1.2} = -1.5667$$

加速度 \vec{a} 与速度 \vec{v} 的夹角为 $\alpha = 122^\circ 33'$ 

例 一质点作半径为 R 的圆周运动，其速度随时间变化的规律为 $v = v_0 - bt$ ，式中 v_0 、 b 均为正的常量。 $t=0$ 时，质点位于自然坐标的原点。

求 (1) 自然坐标中质点的运动方程；

(2) 当加速度的大小为 b 时，质点沿圆周运动了几圈？

解 (1) 本题为自然坐标中的第二类问题，根据速度的定义

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$$

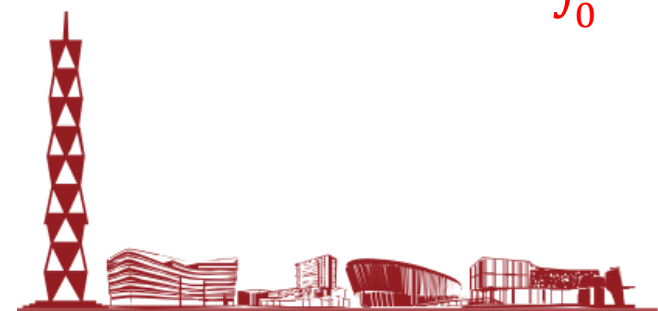
分离变量

$$ds = (v_0 - bt) dt$$

两边积分

$$\int_0^s ds = \int_0^t (v_0 - bt) dt$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} bt^2$$





(2)根据加速度的定义

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R} \qquad a_t = \frac{dv}{dt} = -b$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{b^2 + \frac{(v_0 - bt)^2}{R^2}}$$

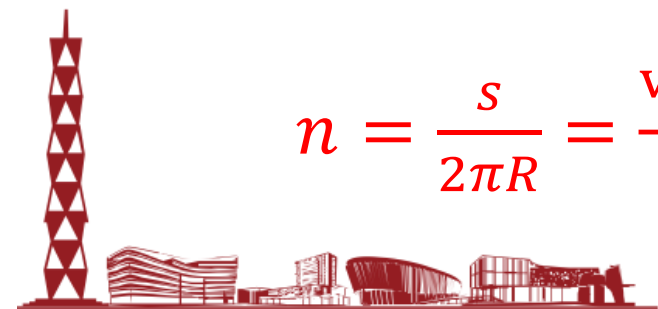
$$a = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^2}$$

由 $a = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^2} = b$

解得 $t = \frac{v_0}{b}$

这时质点运行的圈数为

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0(\frac{v_0}{b}) - \frac{1}{2}b(\frac{v_0}{b})^2}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$





相对运动

主要内容:

1. 基本参考系与运动参考系
2. 伽利略坐标变换
3. 伽利略速度变换



参考系：为描述物体的运动而选取的一组相对静止的物体。

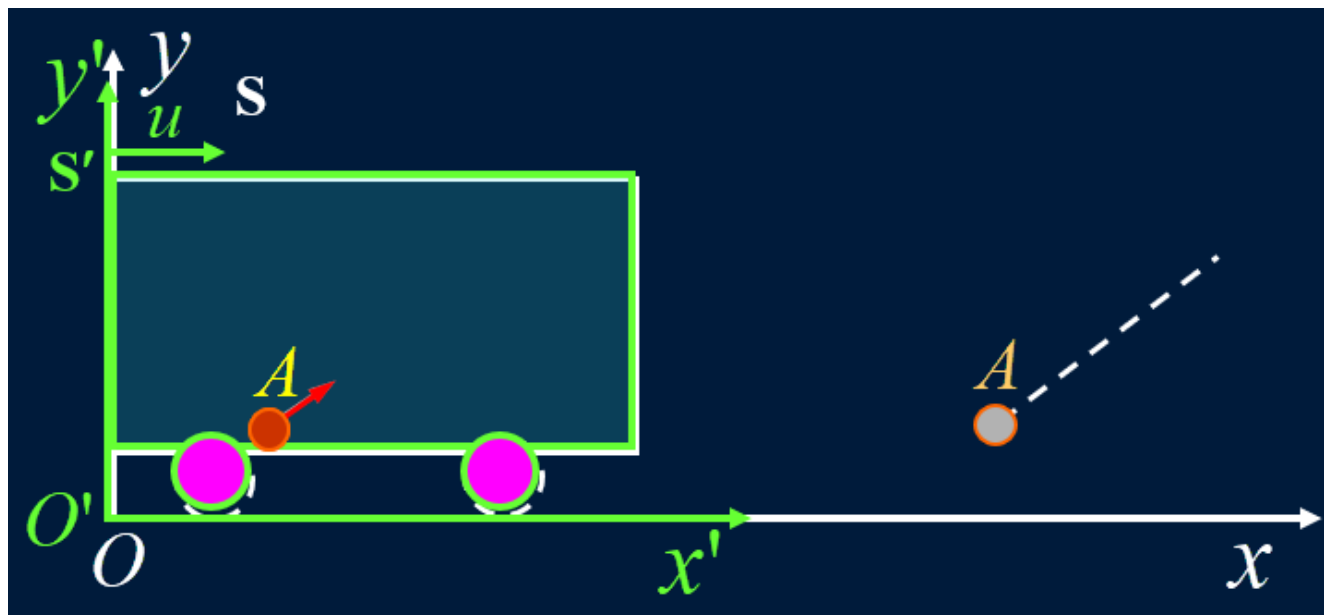
- 运动的相对性决定描述物体运动必须选取参考系
- 在运动学中，参考系可任选，但以描述方便为原则
- 不同参考系中，对物体运动的描述不同（如轨迹、速度等）——运动描述的相对性

- ✓ 太阳参考系
- ✓ 地心参考系
- ✓ 地面参考系或实验室参考系
- ✓ 质心参考系



舟已行矣，而剑不行：地面参考系

两个作相对运动的参考系，选其中一个作为基本参考系，用S系表示；把另一参考系称为运动参考系，用S'系表示。



物体相对于S系的运动——绝对运动；
物体相对于S'系的运动——相对运动；
S'系相对于S系的运动——牵连运动。

质点 P 在两个相互作平动运动的
坐标系中位矢之间的关系

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

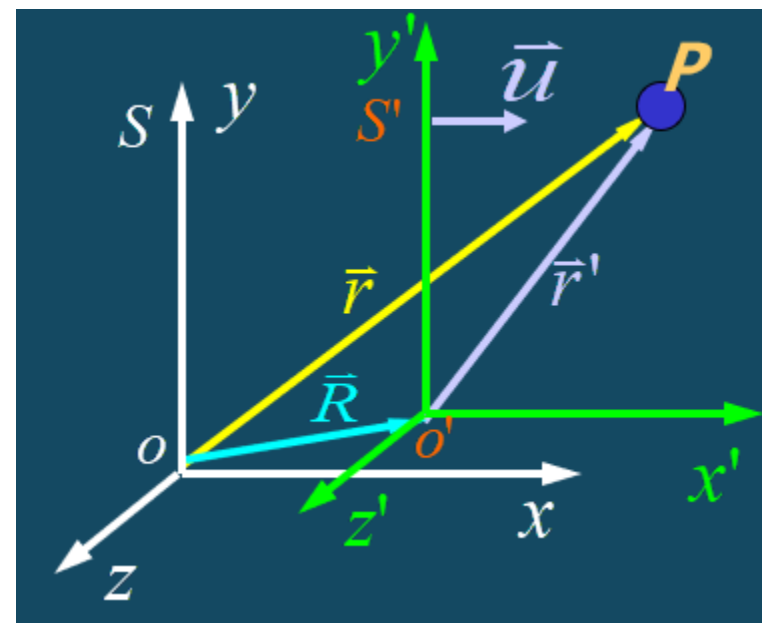
质点 P 在相互作平动运动的
坐标系中速度之间的关系

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

绝对速度

牵连速度

相对速度



伽利略速度变换公式(经典力学速度变换公式)

该公式在物体运动速度很高，接近于光速时不成立。

对速度变换作时间的一阶求导，可得加速度变换关系

$$\vec{u} = \text{定矢量}$$

$$\vec{a}_0 = 0$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

例 飞机上的罗盘指出飞机航向正东（即飞机相对气流方向为正东），航速表的读数为215 km/h，此时风向正北，风速为65 km/h。

求 (1) 飞机相对地面的速度；

(2) 若飞行员想朝相对地面方向正东飞行，他应取什么航向？

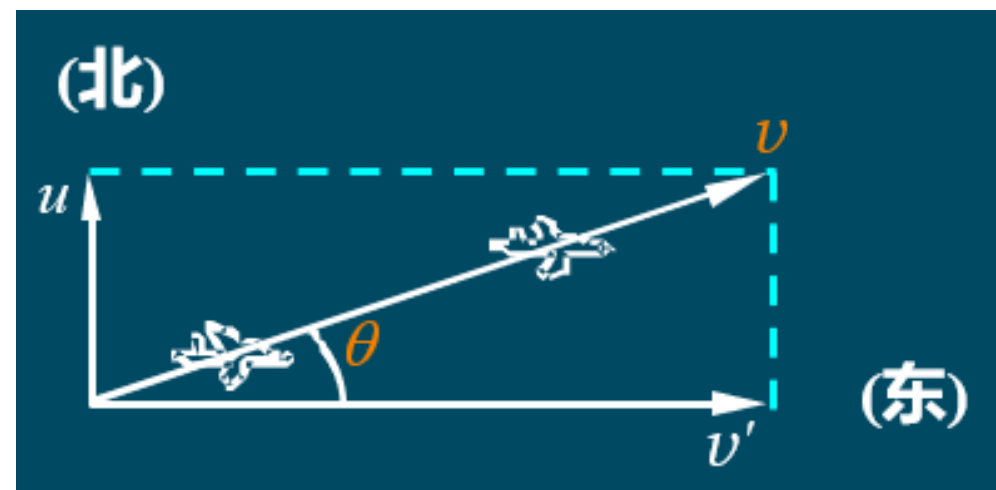
解 基本参考系:地面;运动参考系:气流;运动物体:飞机。

(1) 已知飞机相对气流的速度

$v' = 215 \text{ km/h}$ ，方向正东。

气流相对地面的速度即风

速 $u = 65 \text{ km/h}$ ，方向正北。



由速度变换关系可知，飞机相对地面的速度为：

$$\vec{v}_{\text{机} \rightarrow \text{地}} = \vec{v}'_{\text{机} \rightarrow \text{气}} + \vec{u}_{\text{气} \rightarrow \text{地}}$$

其大小为 $v = \sqrt{v'^2 + u^2} = \sqrt{215^2 + 65^2} \text{ km/h} = 225 \text{ km/h}$

方向角 $\theta = \arctan \frac{u}{v'} = \arctan \frac{65}{215} = 16.8^\circ$

(2) 飞机相对气流的速度大小不变, $v'=215\text{km/h}$, 飞机相对地面的绝对速度 v 方向向东, 风速的大小和方向不变, $u=65\text{km/h}$, 方向正北。

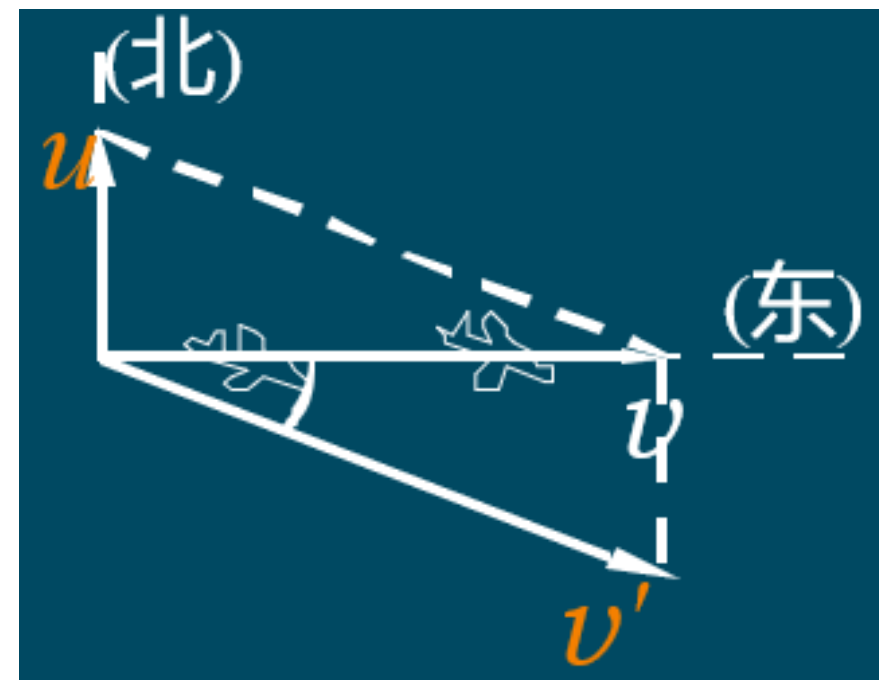
由速度变换关系知: $v_{\text{机} \rightarrow \text{气}} = v_{\text{机} \rightarrow \text{地}} - v_{\text{气} \rightarrow \text{地}}$,

即 $v' = v - u$,

v' 的方向如图所示。

由图可知, 飞行员应取的航向为正东偏南 α , 其值为

$$\alpha = \arcsin \frac{u}{v'} = \arcsin \frac{65}{215} = 17.6^\circ$$



1. 描述质点运动的物理量

(1) 位矢：从坐标原点引向质点所在位置的有向线段。

在直角坐标系中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

(2) 运动方程

在直角坐标系中 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$



(3)位移：由质点的初始位置指向末位置的矢量。

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

在直角坐标系中 $\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$

(4)路程：物体运动时沿轨迹实际通过的路径长度称为路程，用 s 表示。

一般情况下 $|\Delta \vec{r}| \neq \Delta s$ 但 $|d\vec{r}| = ds$

(5)速度：质点位置对时间的一阶导数称为速度， $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

在直角坐标系中 $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

$$= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$





(6) 加速度: 质点运动速度对时间的一阶导数或位移对时间的二阶导数

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

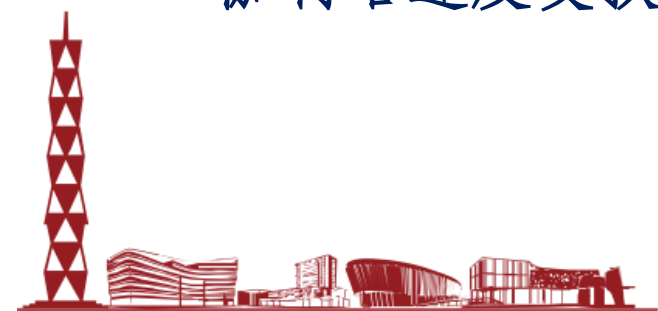
在直角坐标系中

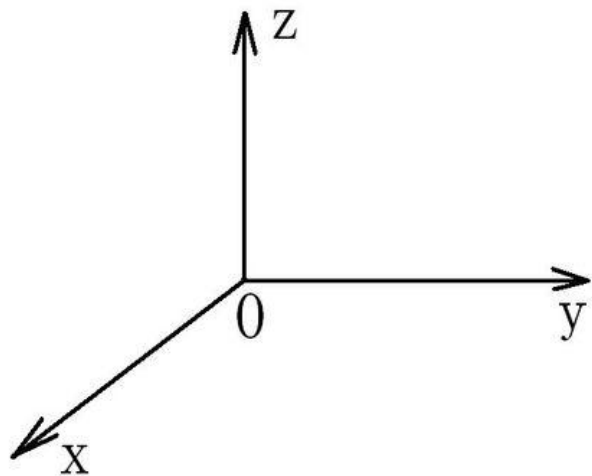
$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \\ &= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}\end{aligned}$$

(7) 相对运动和伽利略变换

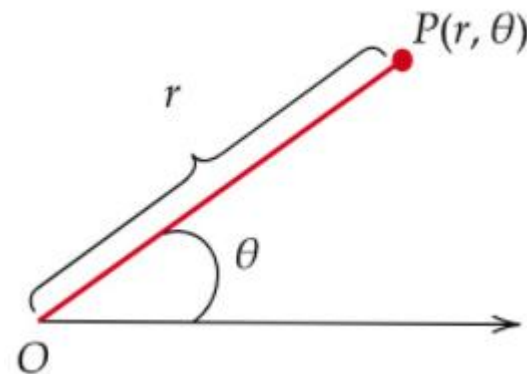
伽利略速度变换式:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

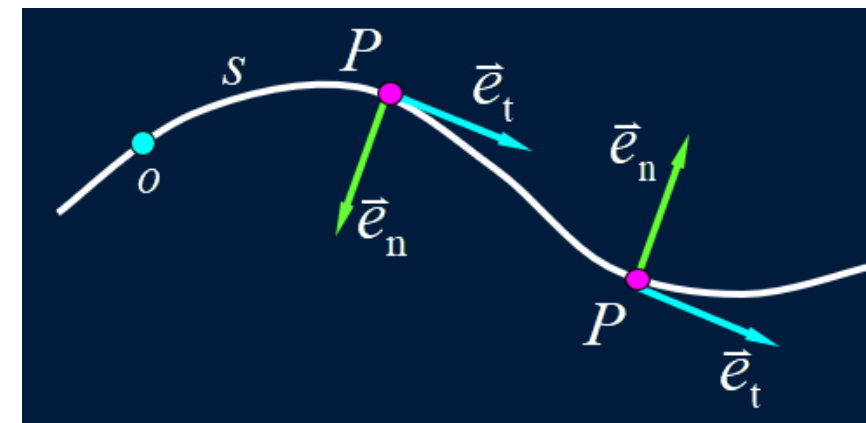




直角坐标系



极坐标系



自然坐标系

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = v \vec{e}_t = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

(1) 匀加速直线运动:

$$\begin{aligned}v &= v_0 + at \\x &= v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \\v^2 - v_0^2 &= 2a(x - x_0)\end{aligned}$$

(2) 抛体运动:

$$\begin{aligned}a_x &= 0, \quad a_y = -g \\v_x &= v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta - g t \\x &= v_0 \cos \theta \cdot t, \quad y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2\end{aligned}$$



质点动力学 Dynamics



上海科技大学
ShanghaiTech University

- ◆ 动力学是研究物体与物体之间的相互作用以及由于这种相互作用而引起的物体运动状态的变化规律
- ◆ 牛顿三个基本运动定律是整个动力学的基础

