普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

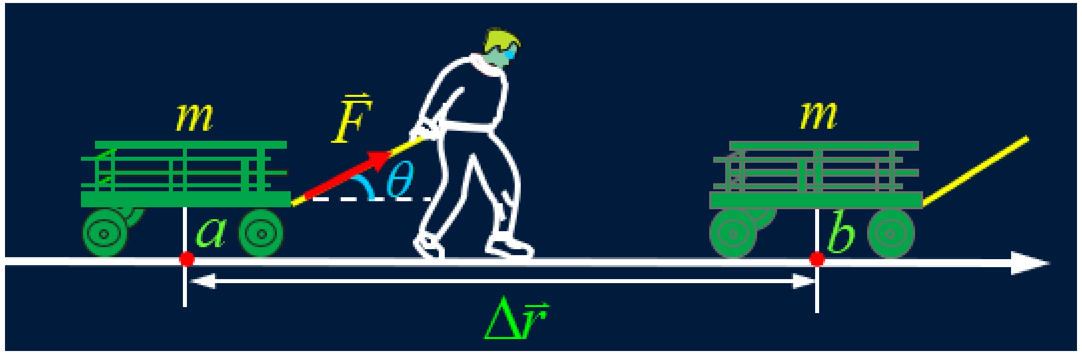
Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、强场激光物理、飞秒激光成丝。
https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm

1. 恒力的功

恒力 $\vec{F}$，夹角θ

位移 $\Delta\vec{r}$，路程Δs



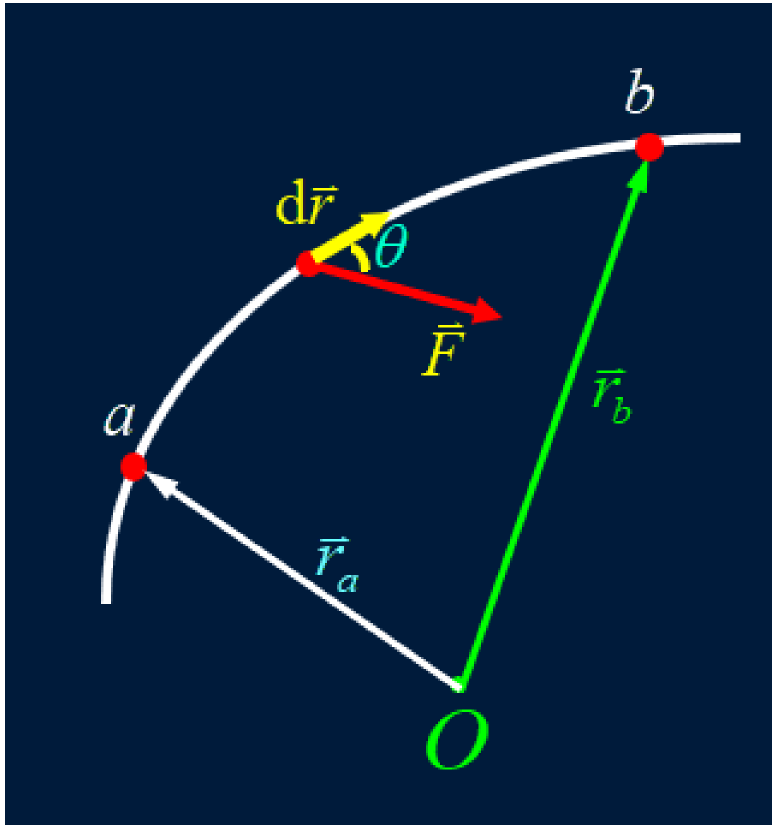
$$A = (F\cos\theta)\Delta s \ = F|\Delta\vec{r}|\cos\theta$$

$$A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

- 功是标量
- 功有正功、负功之分，功的正负功取决于θ。
- 力对物体作负功，也可以说物体反抗外力作功。

2. 变力的功

取元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$，在 $\mathrm{d}\vec{r}$ 范围内，作用力 $\vec{F}$ 可认为是恒力
在任一元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$ 上，力 $\vec{F}$ 所作的元功



$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \quad = F|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\theta$$

元功等于力与元位移的标积

或 $\mathrm{d}A = F\cos\theta\mathrm{d}s$

由a点移动到b点，总功

$$A = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F\cos\theta\mathrm{d}s$$

功是过程量，是力的一种空间累积效应

➢ 讨论

(1) 在直角坐标系中

$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \ = \int_a^b (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z)$$

(2) 合力 $\vec{F}$ 的功 —— 等于各分力沿同一路径所作功的代数和

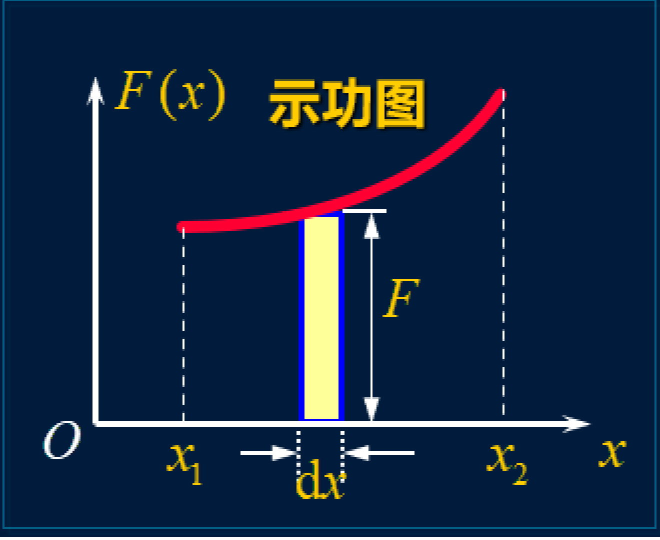
$$A = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_a^b \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_a^b \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \cdots + \int_a^b \vec{F}_n \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

(3) 功在数值上等于示功图曲线下的面积

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \mathrm{d}x$$

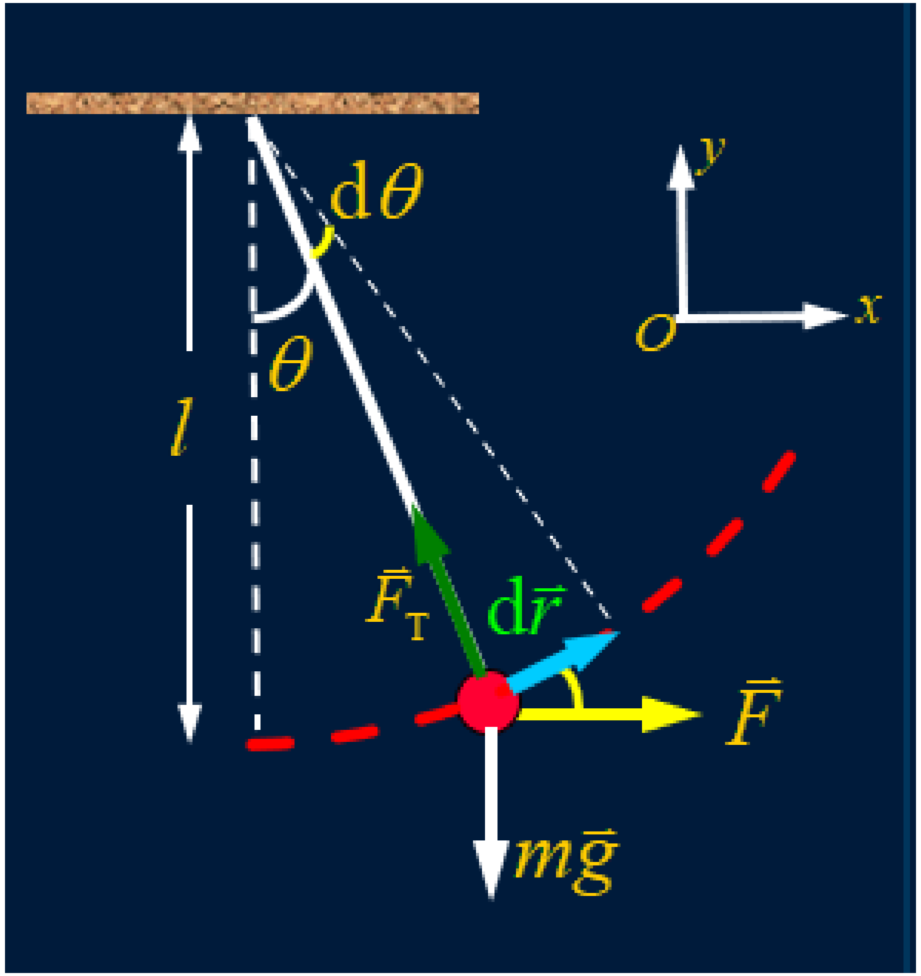


(4) 功率

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

例　有一长为l、质量为m的单摆，最初处于铅直位置且静止。现用一水平力$\vec{F}$作用于小球上，使单摆非常缓慢的上升（即上升过程中每一位置近似平衡）。用摆球与铅直位置的夹角q表示单摆的位置。

求　当θ由0增大到θ_0的过程中，此水平力$\vec{F}$所作的功？

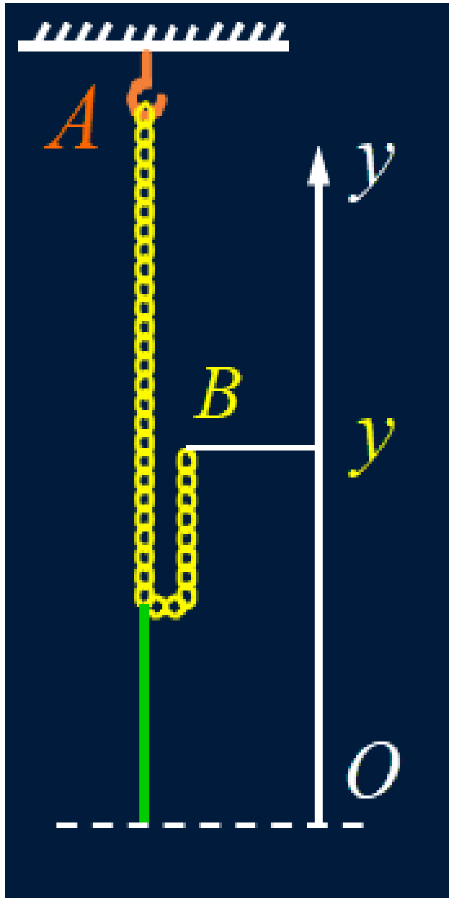


例　设作用于质量$m = 2\mathrm{kg}$的物体上的力为$F = 6t$，在该力作用下物体由静止出发，沿力的作用方向作直线运动。

求　在前2s时间内，这个力所作的功。

例　一条长为l、质量为m的均质柔绳AB，A端挂在天花板的钩上，自然下垂。现将B端沿铅垂方向提高到与A端同一高度处。

求　该过程中重力所作的功。



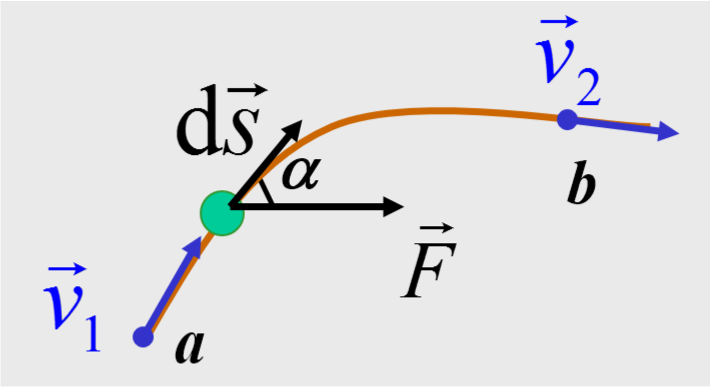
做功的效果：质点的动能定理

设质点m在力的作用下沿曲线从a点移动到b点

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s$$

$$F\cos\alpha = ma_{\mathrm{t}} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}A = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = mv\mathrm{d}v$$



总功：

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = E_{\mathrm{k}b} - E_{\mathrm{k}a}$$

无论走的路径是什么样的，力的作用方向、过程是什么样的，总功可以由起始+终末的状态确定！

质点的动能定理

<u>净合外力</u>对质点所做的功等于质点动能的增量。

$$\boxed{A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{kb} - E_{ka}}$$

说明

1. 合外力的功是动能变化的量度。$A > 0 \rightarrow E_{kb} > E_{ka}$， $A < 0 \rightarrow E_{kb} < E_{ka}$

2. A, E_k 与参考系有关，不同惯性系里它们的大小是不一样的

3. 动能定理只在惯性系中成立。

几种常见力的做功：重力

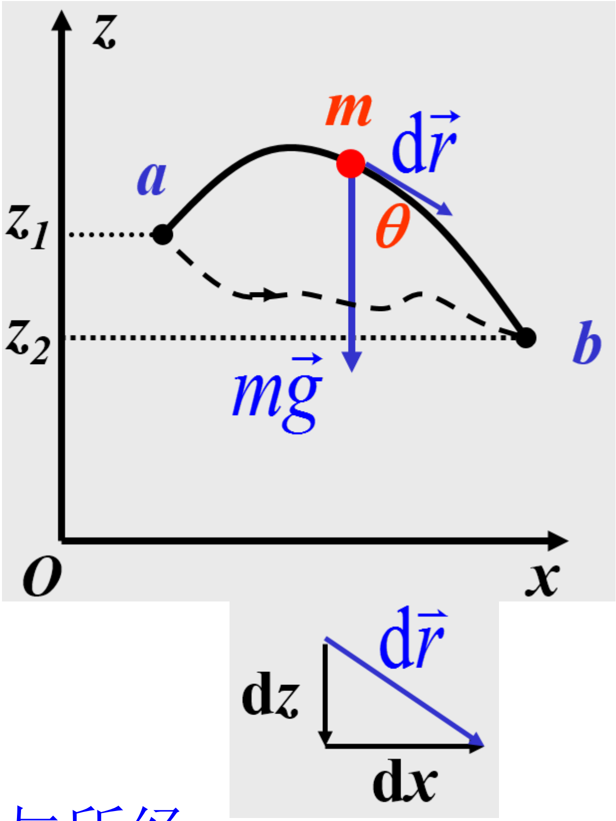
质量为m的质点，从a点运动到b点

$$\mathrm{d}A = m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{k} \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}A = -mg\vec{k}\cdot(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}z\vec{k}) = -mg\mathrm{d}z$$

$$\boxed{A = -mg\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z = mgz_1 - mgz_2}$$



➢ 重力作功只与质点的起始和终了位置有关， 而与所经过的路径无关。

几种常见力的做功：万有引力

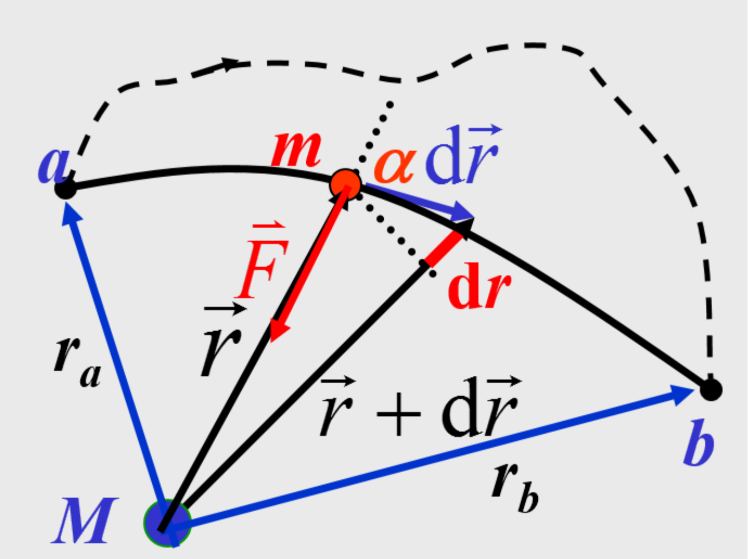
设质量为M的质点固定，另一质量为m的质点在M的引力场中从a点运动到b点。

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

$$A = \int_{r_a}^{r_b} -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{r}\cdot d\vec{r} = r|d\vec{r}|\cos\alpha = rdr$$

$$\boxed{A = -GMm\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = -GMm\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)}$$

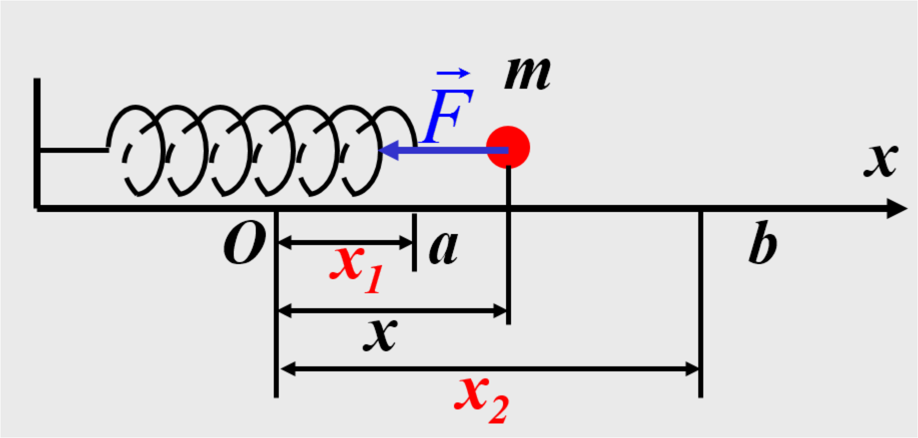


- 万有引力的功仅由物体的始末位置决定，而与路径无关。

几种常见力的做功：弹性力

上海科技大学 ShanghaiTech University

0为平衡位置，质量为m的质点，从a点运动到b点



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\vec{i} \cdot \mathrm{d}x\vec{i} \ = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2}$$

➢ 弹性力作功只与质点的起始和终了位置有关，而与质点运动的路径无关。

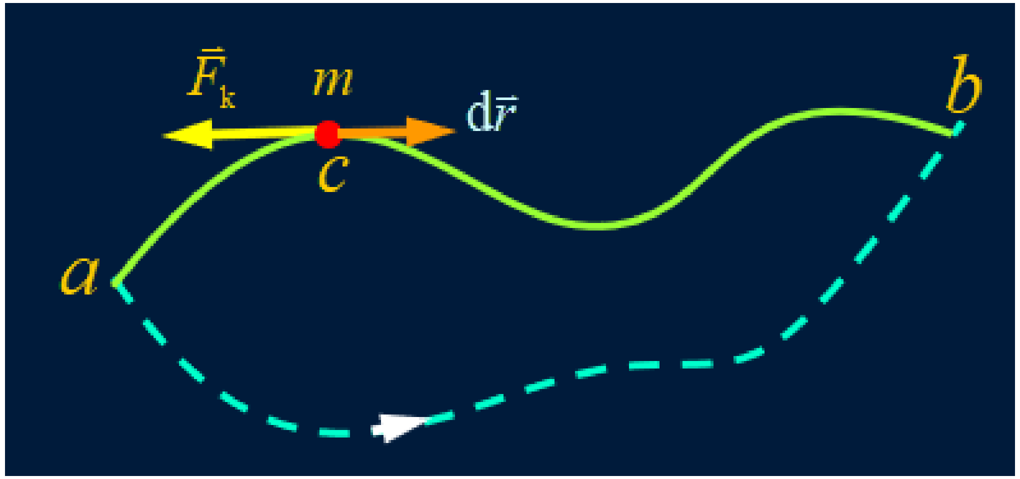
几种常见力的做功：摩檫力

元功 $\mathrm{d}A = \vec{F}_\mathrm{k} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$= F_\mathrm{k}|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\pi \; = -F_\mathrm{k}\mathrm{d}s$

总功 $A_{ab} = \int \mathrm{d}A = -F_\mathrm{k}\int_a^b \mathrm{d}s$

$= -F_\mathrm{k}s_{ab}$ （F_k为常量）



- 结论： 摩擦力的功与路径有关。

重力，万有引力，弹性力做功与路径无关。

保守力与非保守力

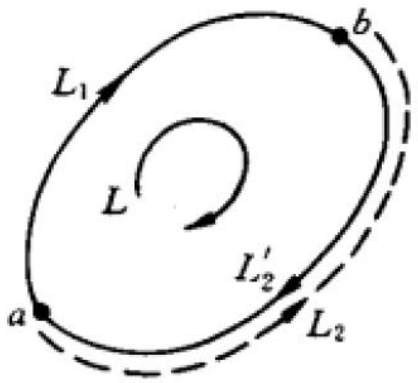
保守力：作功与路径无关，只与始末位置有关的力。

如：重力，引力，弹性力等。

$$\int_{L_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{L_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

$$\int_{L_2'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{L_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{L_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \quad \text{或} \quad \int_{L_2'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{L_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

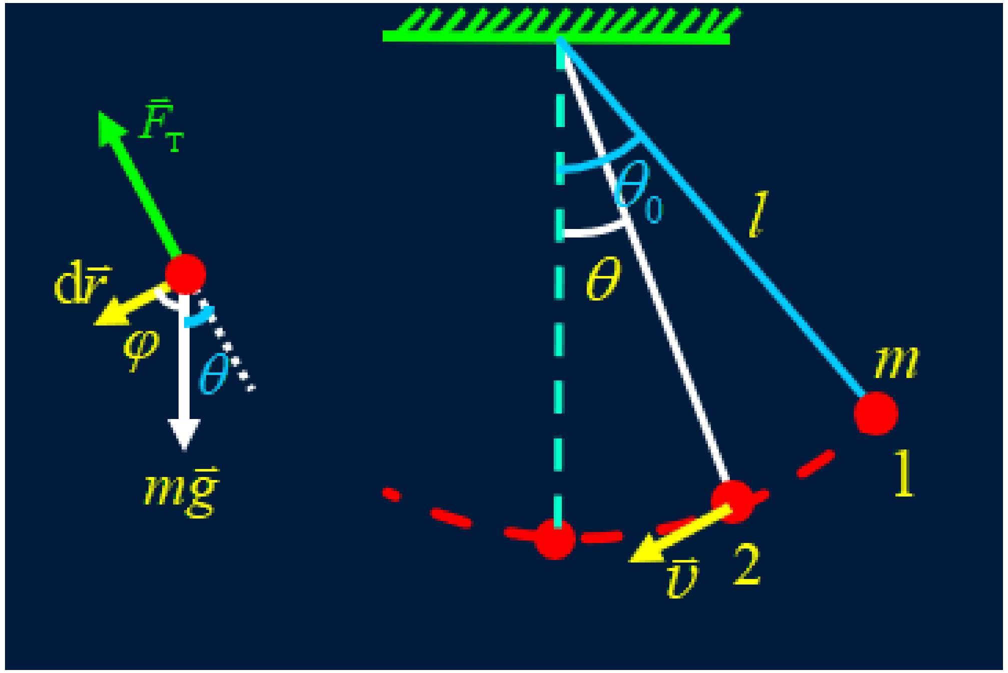


- 保守力沿任何闭合路径作功等于零。

非保守力：作功不仅与始末位置有关，还与路径有关的。比如摩擦力。

例　质量为m的小球，系在长为l的细绳下端，绳的上端固定在天花板上，构成一单摆，如图。开始时，把绳子拉到与铅垂线成θ_0角处，然后放手使小球沿圆弧下落。

求　绳与铅垂线成θ角时小球的速率。



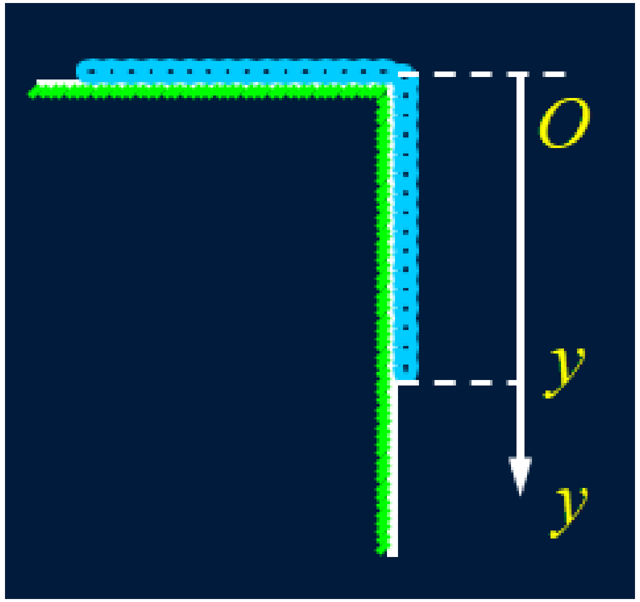
例：质量为m的质点，系在一端固定的绳子上且在粗糙水平面上作半径为R的圆周运动。当它运动一周后，由初速v_0减小为$v_0/2$

求：（1）摩擦力所作的功；（2）滑动摩擦系数；（3）静止前质点运动了多少圈?

例　长为l的均质绳索，部分置于水平面上，另一部分自然下垂，如图所示。已知绳索与水平面间的静摩擦系数为μ_s，滑动摩擦系数为μ_k。

求　（1）　满足什么条件时，绳索将开始滑动？

（2）　若下垂长度为b时，绳索自静止开始滑动，当绳索末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少？



保守力场的势能

上海科技大学 ShanghaiTech University

重力的功 $A_G = mgy_a - mgy_b = -(mgy_b - mgy_a)$

弹性力的功 $A_T = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2 = -(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2)$

万有引力的功 $A_w = -[(-\frac{Gmm_s}{r_b}) - (-\frac{Gmm_s}{r_a})]$

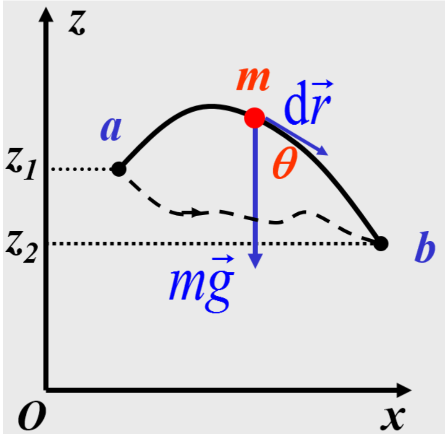
保守力的功可写成 $A_p = -(E_{pb} - E_{pa})$

对照动能定理 $A = \frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2$

➤结论：位置函数E_p被称为质点的势能，则

$$\boxed{E_{pb} - E_{pa} = -A_p}$$

在保守力场中，与保守力相关的势能增量等于保守力所作功的负值。



◆ 势能的讨论

- 只有在保守力的情况下才能引入势能的概念；对于非保守力，不存在势能的概念。

- 要确定保守力场中某一点势能，必须首先选定势能零点。

  保守场中质点在任一位置时的势能计算公式为

$$E_{pa}=\int_a^{b\,（势能零点）}\vec{F}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

  质点在任一位置时的势能等于质点从该位置经任意路径移动到势能零点时保守力所作的功。

- 势能的数值只有相对意义，但势能之差有绝对意义（势能的增量与势能零点的选择无关）；

- 势能为系统所有；　从场的观点来看，势能属于保守力场。

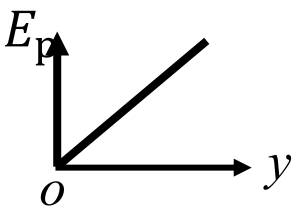
- 保守力的功与势能的关系：$A_{保}=-(E_{p2}-E_{p1})=-\Delta E_p$

$$A_{保} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

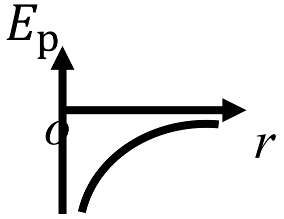
保守力在某一过程所作的功等于该过程的始末两个状态势能增量的负值

- **力学中常见势能的表达式**

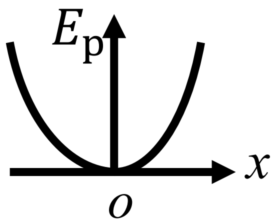
重力势能	$E_p = mgy$	取地面为重力势能零点（即$y=0$处）
万有引力势能	$E_p = -\dfrac{Gm_s m}{r}$	取无穷远处为引力势能零点（即$r=\infty$处）
弹性势能	$E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$	取弹簧自然长度时的端点为弹性势能零点（即$x=0$处）



重力势能曲线



引力势能曲线



弹性势能曲线

已知势能，如何求(保守)力?

$$\mathrm{d}A = \vec{F}_c \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\mathrm{d}E_\mathrm{p} \qquad (1)$$

直角坐标系中，dEp的全微分

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k})$$

$$= \left(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad (2)$$

比较(1)和(2)式

$$\vec{F}_c = -\left(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}$$

例　有一双原子分子由A、B两原子组成，设A原子位于坐标原点，B原子与A原子的间距为x，这两原子之间的作用力为分子力（分子力是保守力，可用势能来描述），且这两原子相互作用的势能函数可以表示为

$$E_{\mathrm{p}}(x)=\frac{a}{x^{3.4}}-\frac{b}{x^{2}}$$

式中a和b为正常数，x以m为单位，势能$E_{\mathrm{p}}(x)$以J为单位。

求　(1) 势能 $E_{\mathrm{p}}(x)=0$ 时，$x=$？

(2) 原子间的相互作用力和平衡位置。

机械能定理（功能原理）

上海科技大学 ShanghaiTech University

从动能定理出发 $\boxed{A=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=E_{kb}-E_{ka}}$

$$A=A_{保守力}+A_{非保守力}=A_{非保守力}-\Delta E_P$$

$$\therefore A_{非保守力}=\Delta E_P+\Delta E_K$$

$$=(E_{Pb}+E_{Kb})-(E_{Pa}+E_{Ka})$$

若 $A_{非保守力}=0$ $\qquad E_{Pb}+E_{Kb}=E_{Pa}+E_{Ka}$

如果 非保守力做的功不为0， 那么a b两处的机械能不相等 ！ ！

质点系：一个到几个

质点系的动能定理

上海科技大学 ShanghaiTech University

质点动能定理 $A_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$ 其中 $A_i = A_{ie} + A_{i\mathrm{I}}$ （内力，外力）

对系统内所有质点求和 $\sum_i A_{ie} + \sum_i A_{i\mathrm{I}} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 - \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{i0}^2$

$$\boxed{A_{外} + A_{内} = \Delta E_k}$$

质点系的动能定理：外力的总功与内力的总功之代数和等于质点系动能的增量

质点系的功能原理

$$A_{内} = A_{保守内力} + A_{非保守内力}$$

$$\therefore A_{外} + (A_{保守内力} + A_{非保守内力}) = E_{kb} - E_{ka}$$

而 $$A_{保守内力} = -(E_{Pb} - E_{Pa})$$

$$A_{外} + A_{非保守内力} = (E_k + E_p)_b - (E_k + E_p)_a$$

$$E = E_k + E_p$$ ——机械能

故 $$\boxed{A_{外} + A_{非保守内力} = \Delta E}$$

功能原理：质点系机械能的增量等于外力的功和非保守内力的功的总和。

系统的功能原理

$$A = A_{外} + A_{非保内} = E_b - E_a$$

当 $A = A_{外} + A_{非保内} = 0$

则 $\boxed{E = E_k + E_p = 恒量}$ **(质点系的机械能守恒定律)**

如果系统中只有保守内力作功，而其它内力和外力都不作功，或作功的总和始终为零，则系统总机械能保持不变。

应用功能原理或机械能守恒定律解题步骤

(1) 选取研究对象。

(2) 分析受力和守恒条件。

判断是否满足机械能守恒条件，如不满足，则应用功能原理求解。

(3) 明确过程的始、末状态。

需要选定势能的零势能位置。

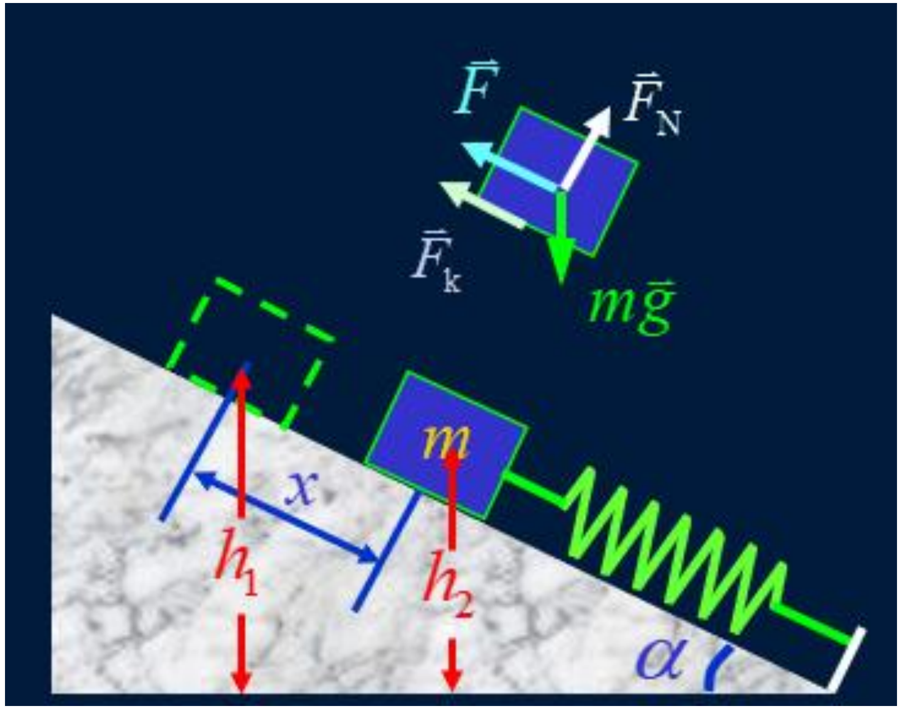
(4) 列方程。

(5) 解方程，求出结果。

(6) 讨论解的物理意义。

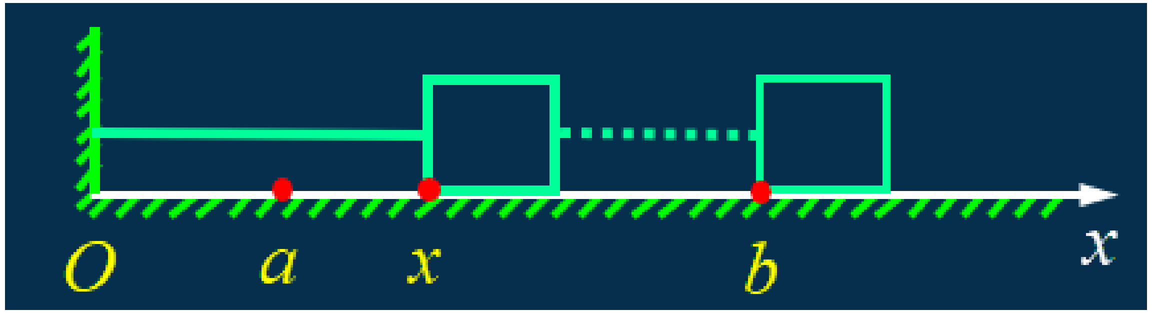
例　如图，放在倾角为α 的斜面上的质量为m的木块，由静止自由下滑，与劲度系数为k的轻弹簧发生碰撞，木块将弹簧最大压缩了x m。设木块与斜面之间的摩擦系数为μ。

求　开始碰撞时木块速率v为多大?



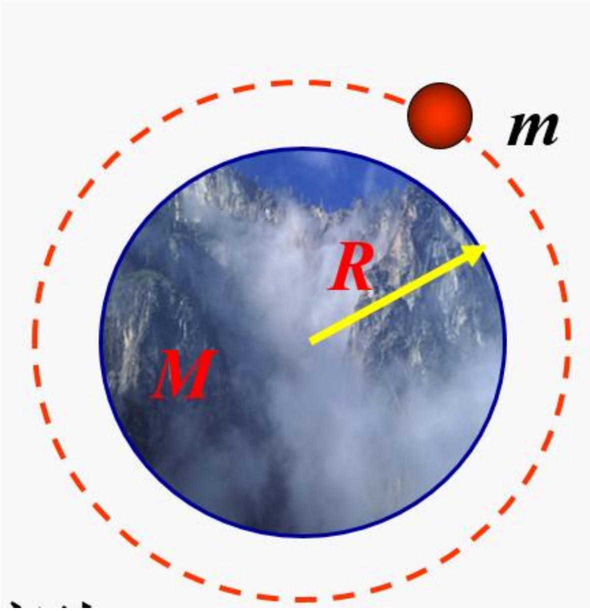
例 质量为m的滑块置于粗糙水平桌面上，并系于橡皮绳的一端，橡皮绳的另一端系于墙上。橡皮绳原长为a，处于拉伸状态的橡皮绳相当于劲度系数为k的弹簧。滑块与桌面的摩擦系数为μ。现将滑块向右拉伸至橡皮绳长为b后再由静止释放。

求 滑块撞击墙时的速度多大？



例：计算第一宇宙速度

已知：地球半径为R，质量为M，卫星质量为m。要使卫星在距地面h 高度绕地球作匀速圆周运动，求其发射速度。



例：计算第二宇宙速度

宇宙飞船脱离地球引力而必须具有的发射速度。

（1）　脱离地球引力时，飞船的动能必须大于或等于零。

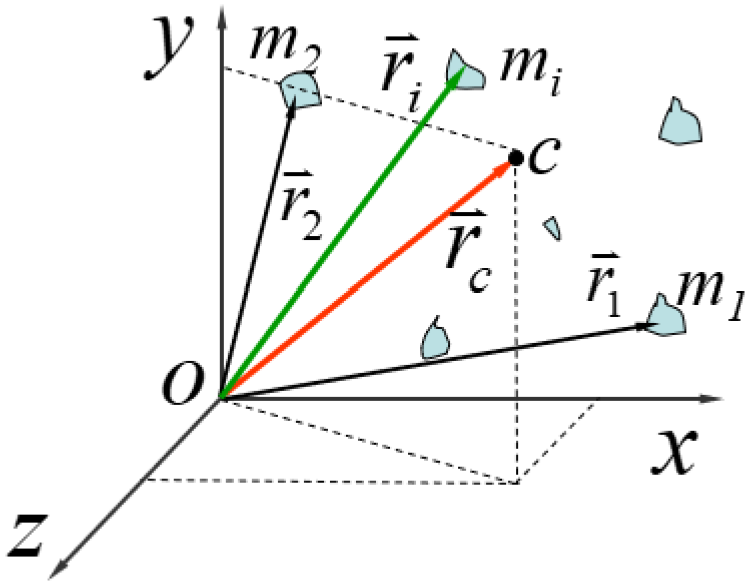
（2）　脱离地球引力处，飞船的引力势能为零。

质心系 – 几个到无穷多个

质心：质心是与质量分布有关的一个代表点，它的位置在平均意义上代表着质量分布的中心。

由n个质点组成的质点系，其质心的位置：

$$\vec{r}_C=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_i\vec{r}_i+\ldots}{m_1+m_2+\ldots+m_i+\ldots}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}{m'}$$



➤对质量离散分布的物系：

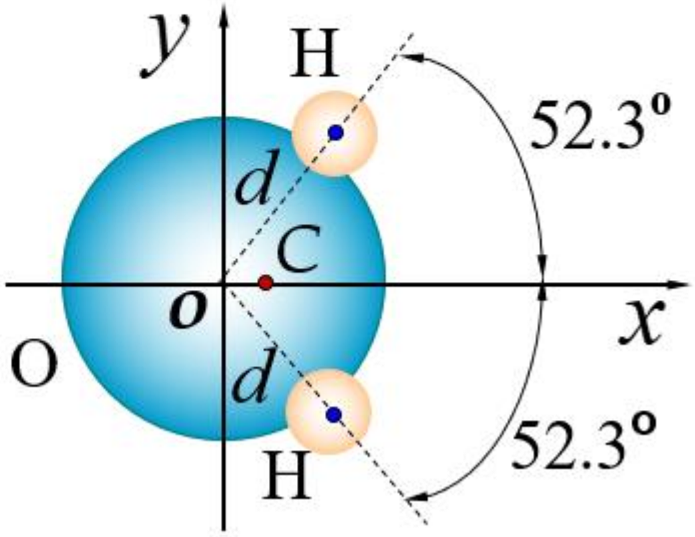
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m'} \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m'} \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m'}$$

➤对质量连续分布的物体：

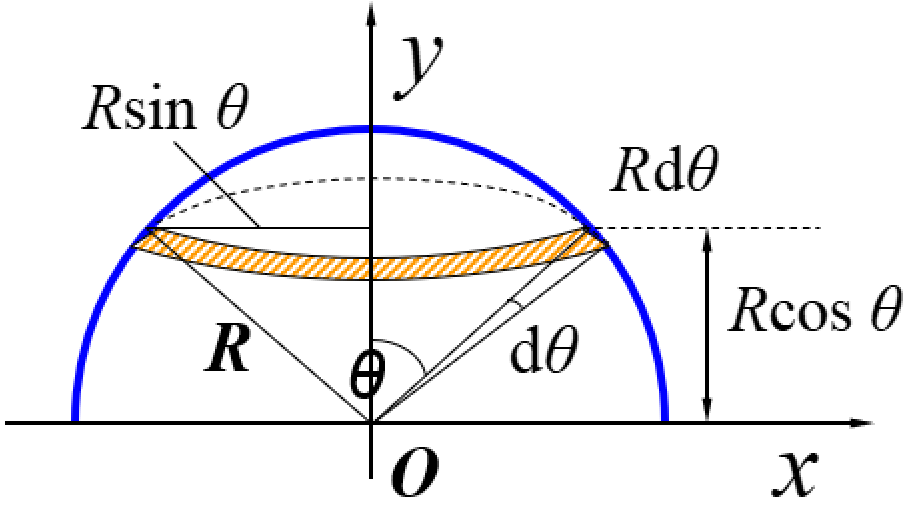
$$x_C = \frac{1}{m'}\int x\mathrm{d}m, \quad y_C = \frac{1}{m'}\int y\mathrm{d}m, \quad z_C = \frac{1}{m'}\int z\mathrm{d}m$$

对密度均匀、形状对称的物体，质心在其几何中心．

例1 水分子H_2O的结构如图．每个氢原子和氧原子中心间距离均为d=1.0×10^{-10} m，氢原子和氧原子两条连线间的夹角为θ=104.6^{o}．求水分子的质心．



例2　求半径为 R 的匀质半薄球壳的质心



质心运动定理

质心的位矢：

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m'}$$

$$m'\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

上式两边对时间 *t* 求一阶导数，得质心的速度、动量

$$m'\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$m'\vec{\mathrm{v}}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

再对时间 *t* 求一阶导数，得质心的加速度

$$m'\vec{a}_C = \frac{\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i\right)}{\mathrm{d}t}$$

牛顿第二定律的动量描述：$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\mathrm{ex}}$

$$\vec{F}^{\mathrm{ex}} = m' \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}_C}{\mathrm{d}t} = m' \vec{a}_C$$

质心运动定理：作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以质心的加速度。

质心参考系：物体系的质心在其中静止的平动参考系，多数情况下，质心选为质心系的原点。

$$\vec{r}_{\mathrm{c}} \equiv 0 \rightarrow \vec{v}_{\mathrm{c}} = 0 \rightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$

零动量系

例：一长$l=4\mathrm{m}$，质量$m_1=150\mathrm{kg}$的船，静止在湖面上。现有一质量$m_2=50\mathrm{kg}$的人，从船头走到船尾，如图所示。求：人和船相对于湖岸各移动的距离。（设水对船的阻力忽略不计）