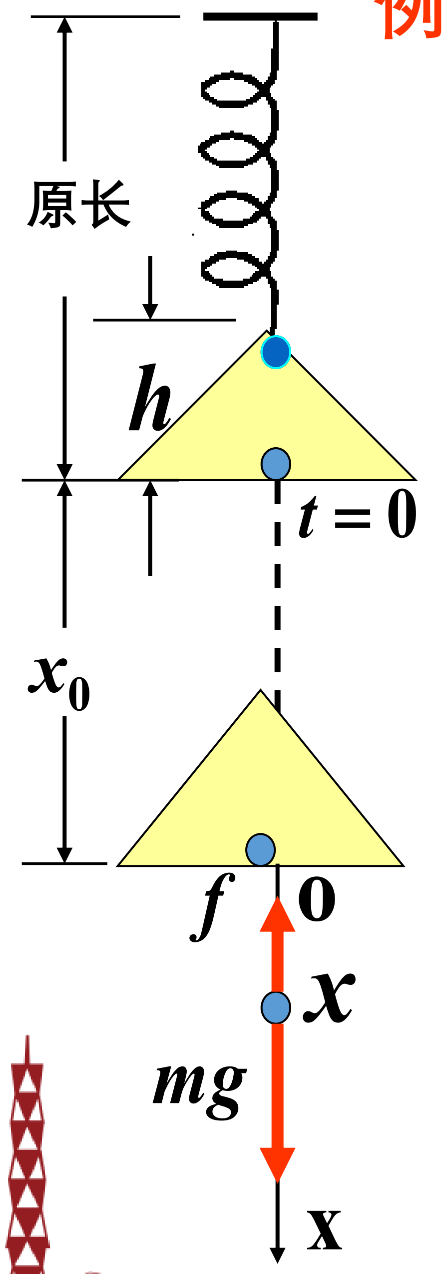
普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、强场激光物理、飞秒激光成丝。
https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm



例2.将天平盘子挂在一个倔强系数为k的弹簧下端,有一质量为m的物体,从离盘高为h处自由下落至盘中后不再跳离盘子,因此盘子和物体一起开始运动(**盘和弹簧的质量忽略**),问(1)是否为**谐振动**? (2) 求振动时的周期 T 振幅 A 位相 φ 及 **振动方程。**

解: 盘、弹簧、物体构成的一个系统

设物体 m 落入盘中后,系统运动至o处所受合力为零(**o为平衡位置**)。

建立坐标如左图,则

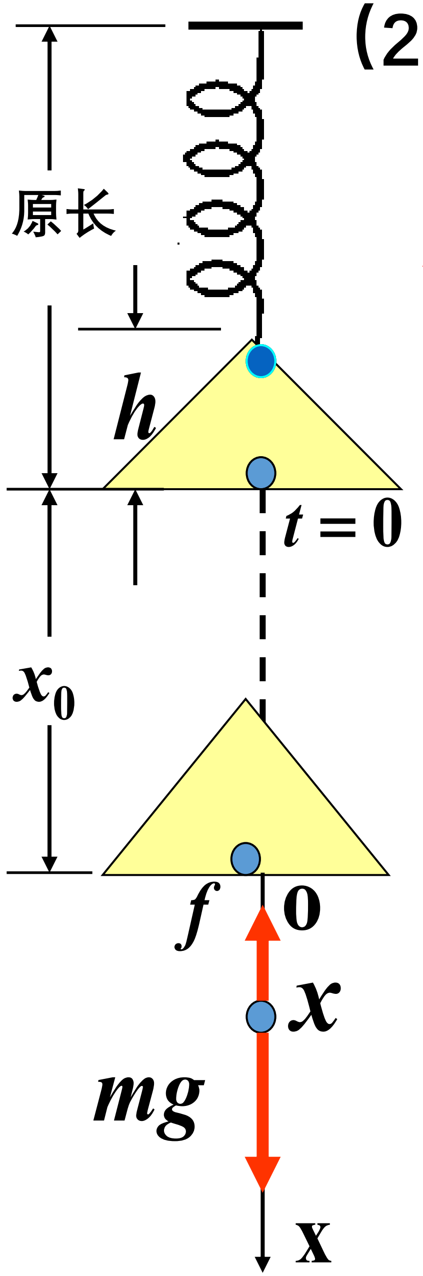
$$mg - kx_0 = 0 \qquad mg = kx_0$$

系统在任一时刻所受的合力为:

$$\sum F = mg - f = kx_0 - k(x_0 + x)$$

即 $\sum F = -kx$ **是谐振动!**

(2) 求振动时的周期 T 振幅 A 位相 φ 及振动方程。



解：根据 $\begin{cases} \sum F = -kx \\ \sum F = ma \end{cases}$ $\quad -kx = ma$

$$a = -\frac{k}{m}x \qquad \text{则} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

即 $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$t=0$ 时 $\quad x_0 = -\dfrac{mg}{k} \quad v_0 = \sqrt{2gh}$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}$$

振幅和初相位的确定

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow x_0 = A\cos\varphi$

$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow v_0 = -\omega A\sin\varphi$

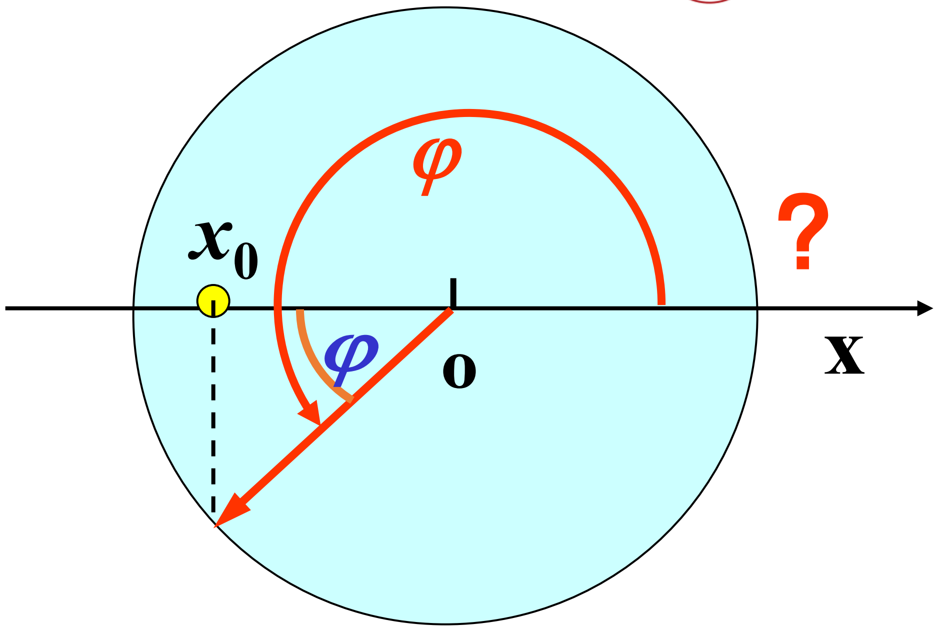
$\boxed{A = \sqrt{x_0^{\,2} + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}} \qquad \boxed{\varphi = \arctan\left(-\dfrac{v_0}{\omega x_0}\right)}$

上海科技大学
ShanghaiTech University

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(-\frac{v_0}{x_0\omega}\right)$$

$$= \cancel{tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{2kh}{mg}}\right)}$$



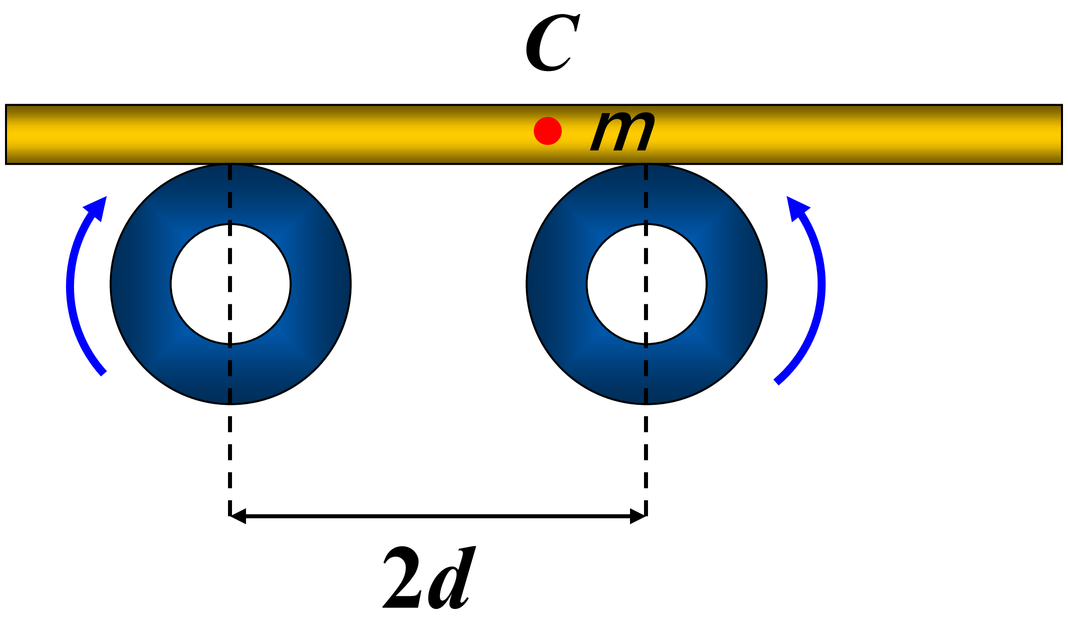
$$\varphi = \left[\, tg^{-1}\sqrt{\frac{2kh}{mg}}\,\right] \pm \pi$$

$$\boxed{A = \frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$x = \frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t + tg^{-1}\sqrt{\frac{2kh}{mg}} \pm \pi\right]$$

例3. 两轮的轴互相平行，相距 $2d$，两轮转速相同而方向相反，将质量为 m 的一根匀质杆搁在两轮上，杆与轮的摩擦系数为μ，若杆子的质心 C 起初距一轮较近（如图）。

证明: 杆作谐振动并求周期。

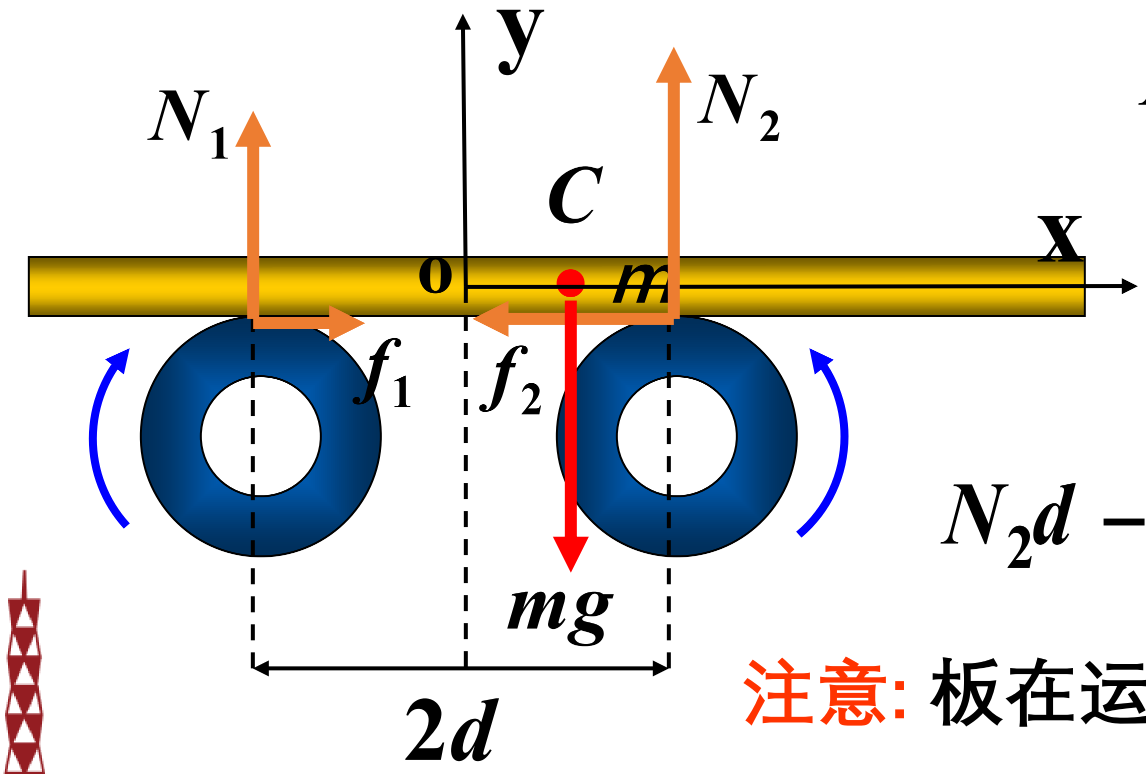


证明: 建立坐标系如图

杆受力: $mg\quad N_1\quad N_2\quad f_1\quad f_2$

$$\sum F_y = N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$\sum F_x = f_1 - f_2 = \mu N_1 - \mu N_2 \neq 0$$



$$N_1 - N_2 = ?$$

设o点为转轴

$$\sum M_o = 0$$

$$N_2 d - N_1 d - mgx = 0$$

注意: 板在运动, x是变化的!

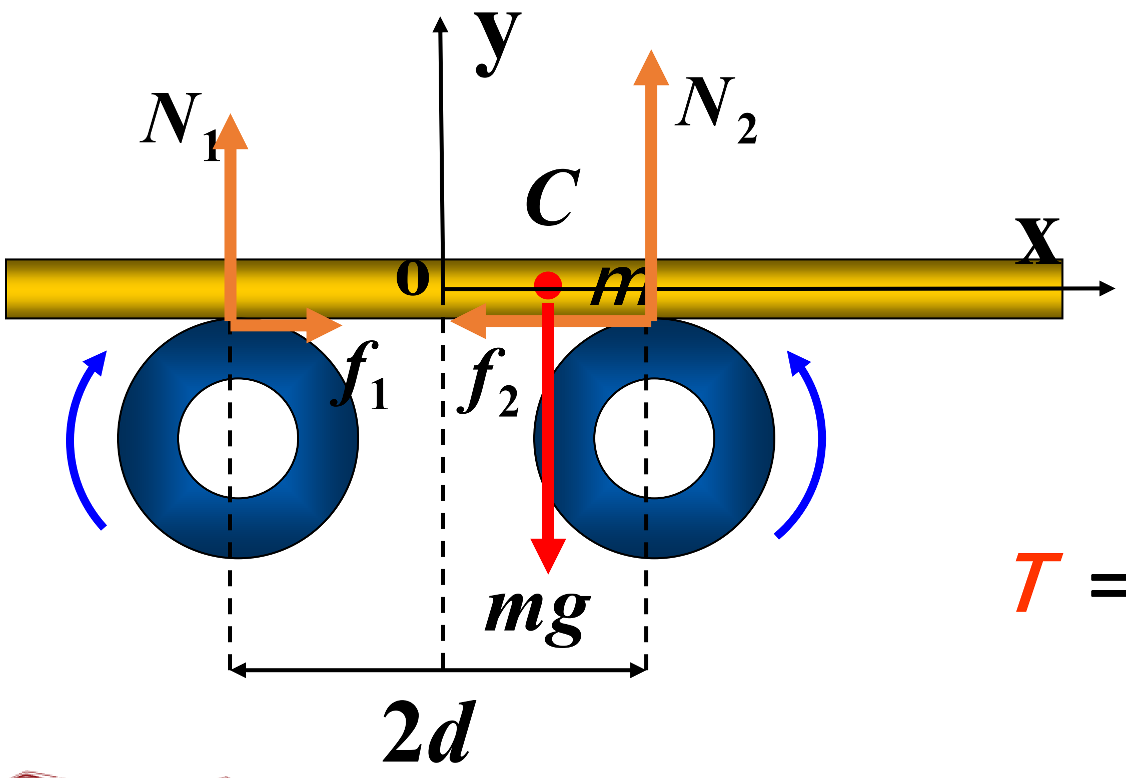
$$N_2 d - N_1 d - mgx = 0$$

$$N_1 - N_2 = -\frac{mgx}{d}$$

$$\boxed{\sum F_x = \mu(N_1 - N_2)}$$

$$\sum F_x = -\mu\frac{mg}{d}x$$

是谐振动！



$$a = -\frac{\mu \cancel{m} g}{\cancel{m} d}x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{d}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{\mu g}}$$

上海科技大学 ShanghaiTech University

同方向同频率谐振动的合成

1. 解析法

分振动：
$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

合振动：

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= \underbrace{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)}_{A\cos\varphi}\cos\omega t - \underbrace{(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)}_{A\sin\varphi}\sin\omega t$$

$$\boxed{x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

➢ 结论：合振动 x 仍是简谐振动

2. 旋转矢量法

分振动

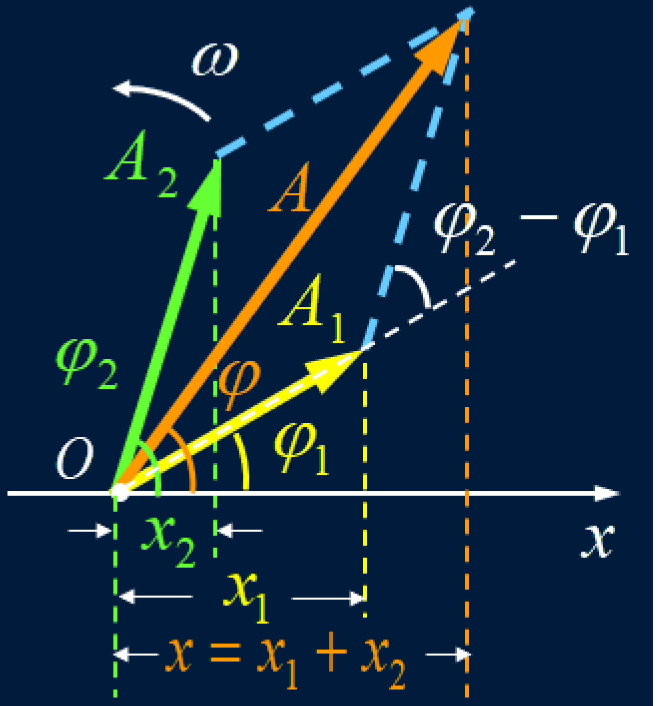
$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

合振动

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$



➢ 结论：**与解析法求得的结果一致，方法直观、简捷.**

➢ 讨论：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(1)若两分振动同相,即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi$ $(k=0,1,2,\ldots)$,

则 $A=A_1+A_2$，两分振动相互加强，当 $A_1=A_2$ 时，$A=2A_1$,

(2)若两分振动反相,即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi$ $(k=0,1,2,\ldots)$,

则$A=|A_1-A_2|$，两分振动相互减弱，当 $A_1=A_2$ 时, $A=0$.

3. n 个同方向同频率谐振动的合成

例 设有 n 个同方向、同频率、振幅 a 相同、初相差依次为一常量ε的谐振动，它们的振动分别为

$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \varepsilon)$$

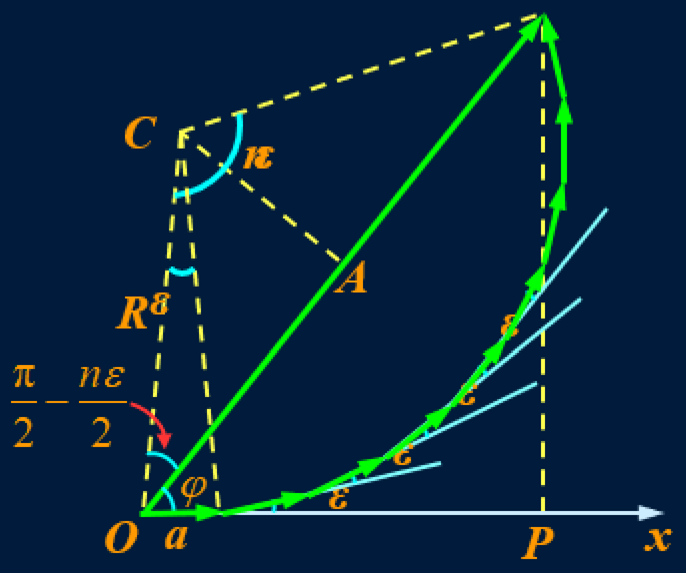
$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\varepsilon)$$

$$\cdots\ \cdots\quad \cdots\ \cdots$$

$$x_n = a\cos[(\omega t + (n-1)\varepsilon]$$

求 合振动的振动方程.

解 $$x = \sum x_n = A\cos(\omega t + \varphi)$$



$$a = 2R\sin\frac{\varepsilon}{2} \qquad A = 2R\sin\frac{n\varepsilon}{2}$$

$$A = a\frac{\sin n\varepsilon/2}{\sin\varepsilon/2} \qquad \varphi = \frac{1}{2}(\pi - \varepsilon) - \frac{1}{2}(\pi - n\varepsilon) = \frac{n-1}{2}\varepsilon$$

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = a\frac{\sin\frac{n\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\cos[\omega t+\frac{(n-1)\varepsilon}{2}]$$

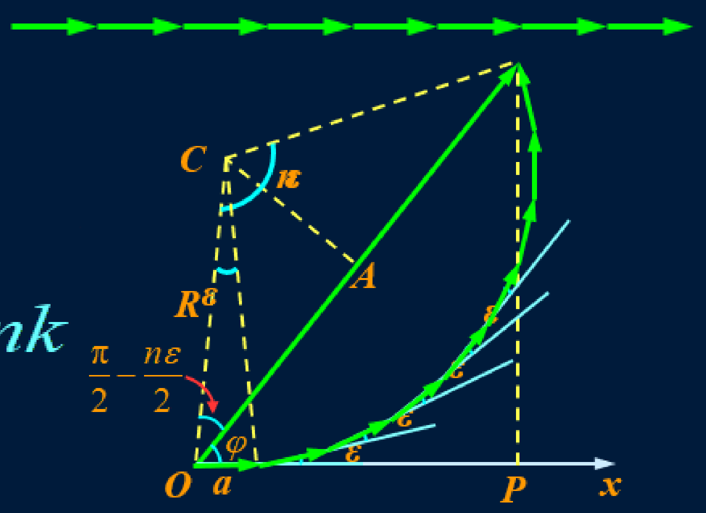
➢ **讨论：**

极大值: $\varepsilon = 2k\pi$

$A = na$

极小值: $\varepsilon = \frac{2k'\pi}{n}$， $k' \neq nk$

$A = 0$



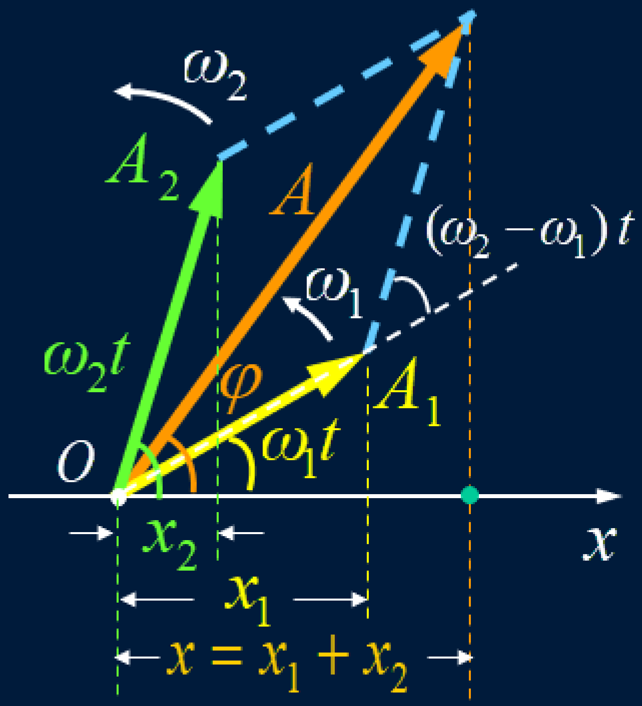
同方向不同频率谐振动的合成　拍

分振动： $\begin{cases} x_1 = A_1\cos\omega_1 t \\ x_2 = A_2\cos\omega_2 t \end{cases}$

合振动： $x = x_1 + x_2$

合振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_2 - \omega_1)t}$$



当 $(\omega_2 - \omega_1)t = 2k\pi$ **时，**

A **有最大值：** $A = A_1 + A_2$

当 $(\omega_2 - \omega_1)t = (2k+1)\pi$ **时，**　A **有最小值：** $A = |A_1 - A_2|$

➢ **结论：合振动 x 不再是简谐振动，合振动振幅的频率为**

$$(\omega_2 - \omega_1)T = 2\pi \qquad \nu = \left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}\right| = |\nu_2 - \nu_1|$$

◆ 振幅相同不同频率的简谐振动的合成

分振动：

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_1 t \\ x_2 = A\cos\omega_2 t \end{cases}$$

合振动：

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$$

$$= 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \cdot \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t$$

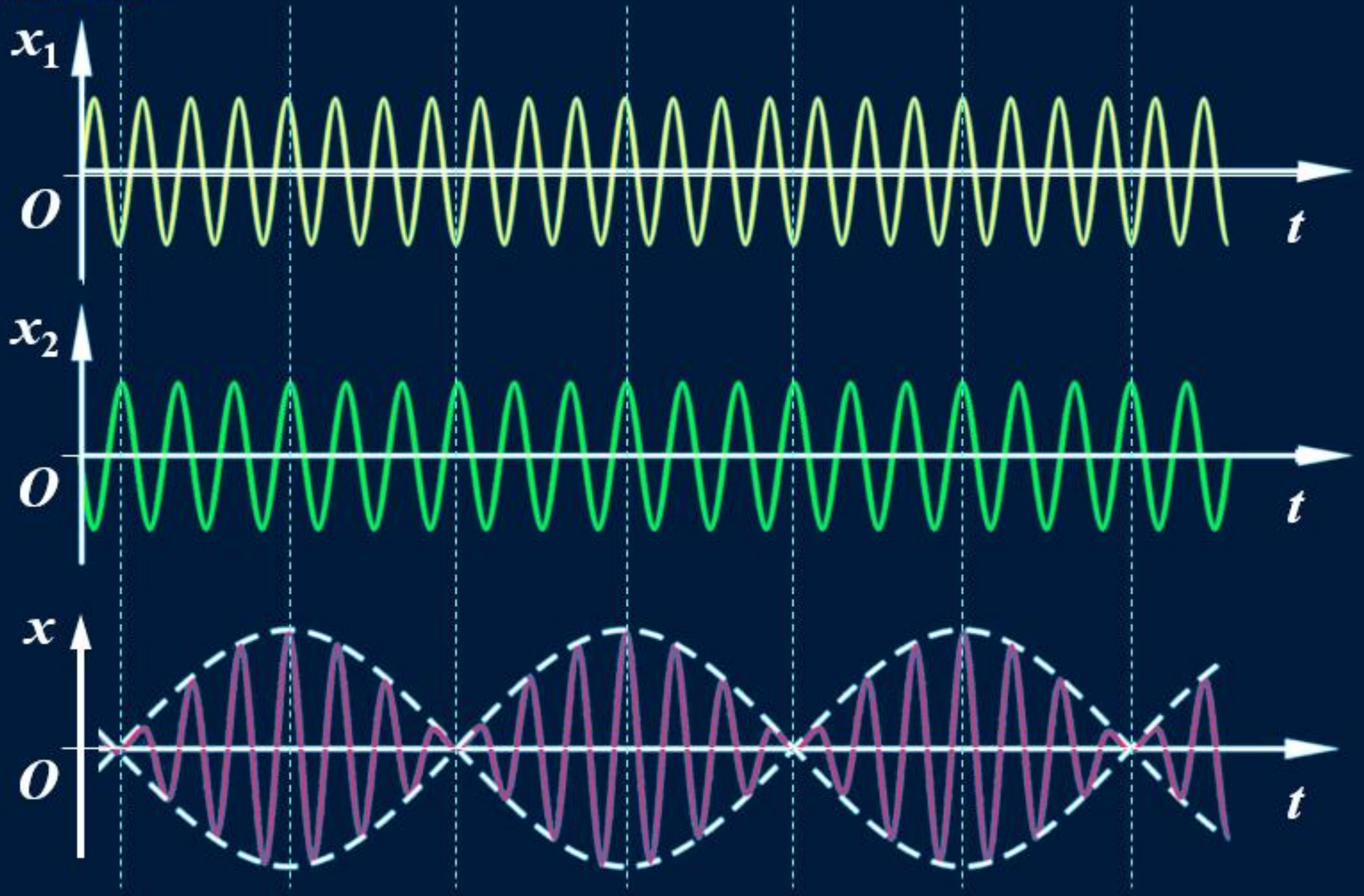
当 $\omega_2 \cong \omega_1$ **时，** $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$ **，令** $x = A(t)\cos\overline{\omega}t$

其中 $\boxed{A(t) = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)}$ $\boxed{\cos\overline{\omega}t = \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t)}$

随 t 缓变　　　　随 t 快变

➢ 结论：合振动 x 可看作是振幅缓变的简谐振动。

❖ 拍的现象



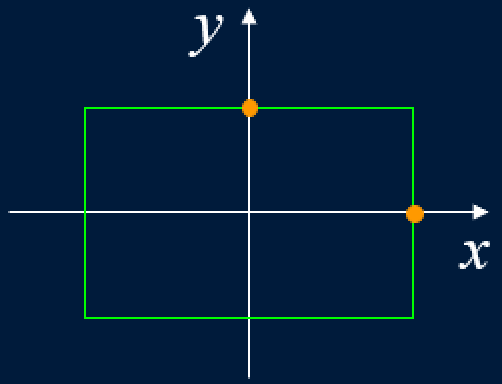
拍频：单位时间内**合振动振幅强弱变化的次数**

即： $\nu = |(\omega_2 - \omega_1)/(2\pi)| = |\nu_2 - \nu_1|$

拍原理的应用

12.3.3 两个相互垂直谐振动的合成　李萨如图

1. 两个同频率相互垂直的谐振动的合成



分振动 $\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$

合运动 $$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

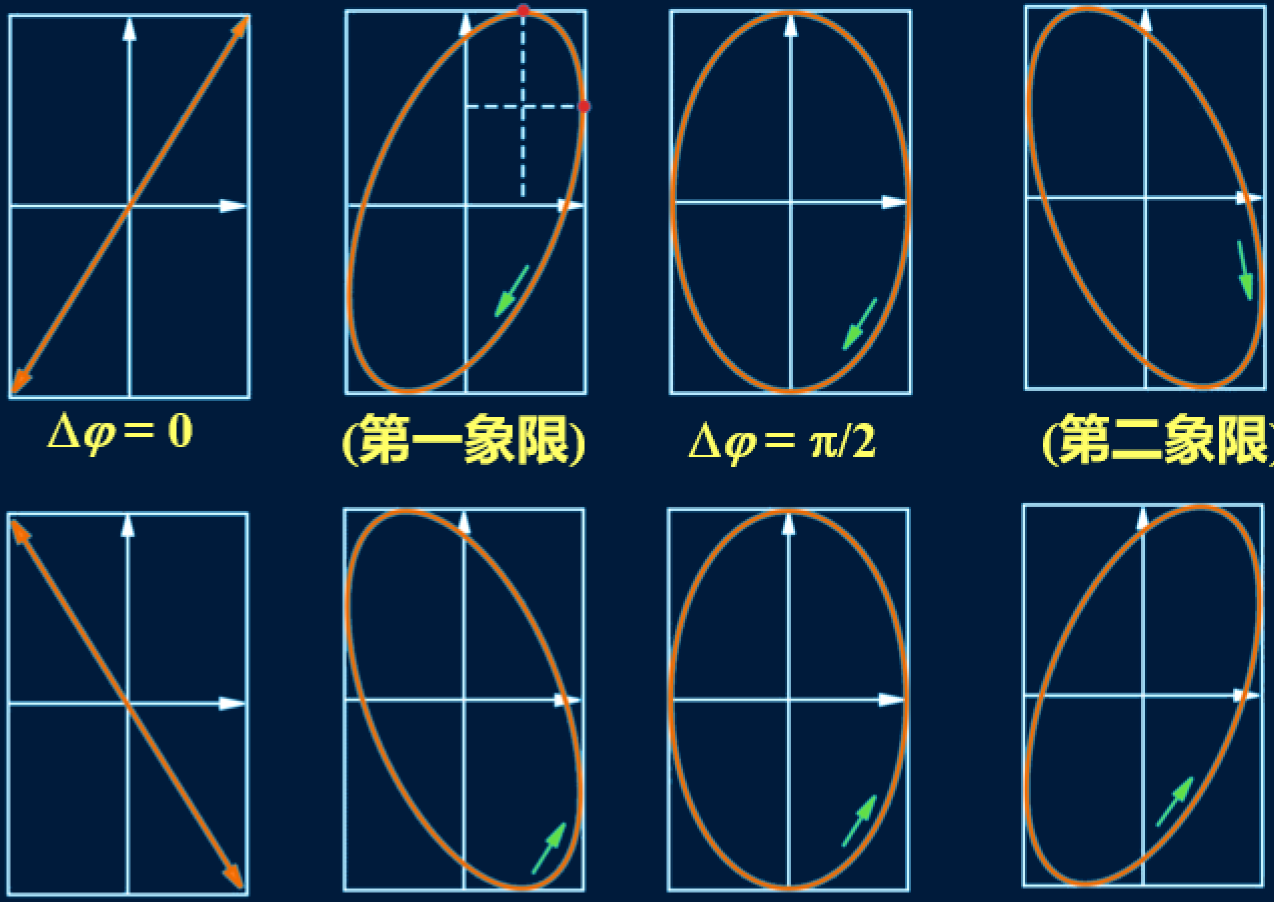
讨论 当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k\pi$ (k为整数)时,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} \pm 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} = 0$$

当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi/2$ (k为整数)时,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$



$\Delta\varphi=0$ (第一象限) $\Delta\varphi=\pi/2$ (第二象限)

$\Delta\varphi=\pi$ (第三象限) $\Delta\varphi=3\pi/2$ (第四象限)

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$$

2. 两个不同频率、相互垂直的谐振动的合成

分振动 $\begin{cases} x = A_1 \cos \omega_1 t \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta) \end{cases}$

➢ 结论:

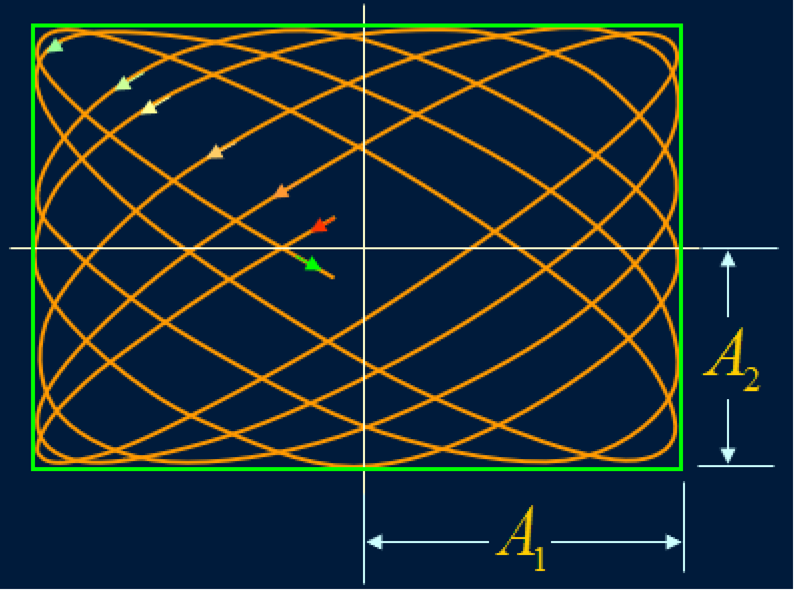
(1)ω_1、ω_2 之比为整数时:

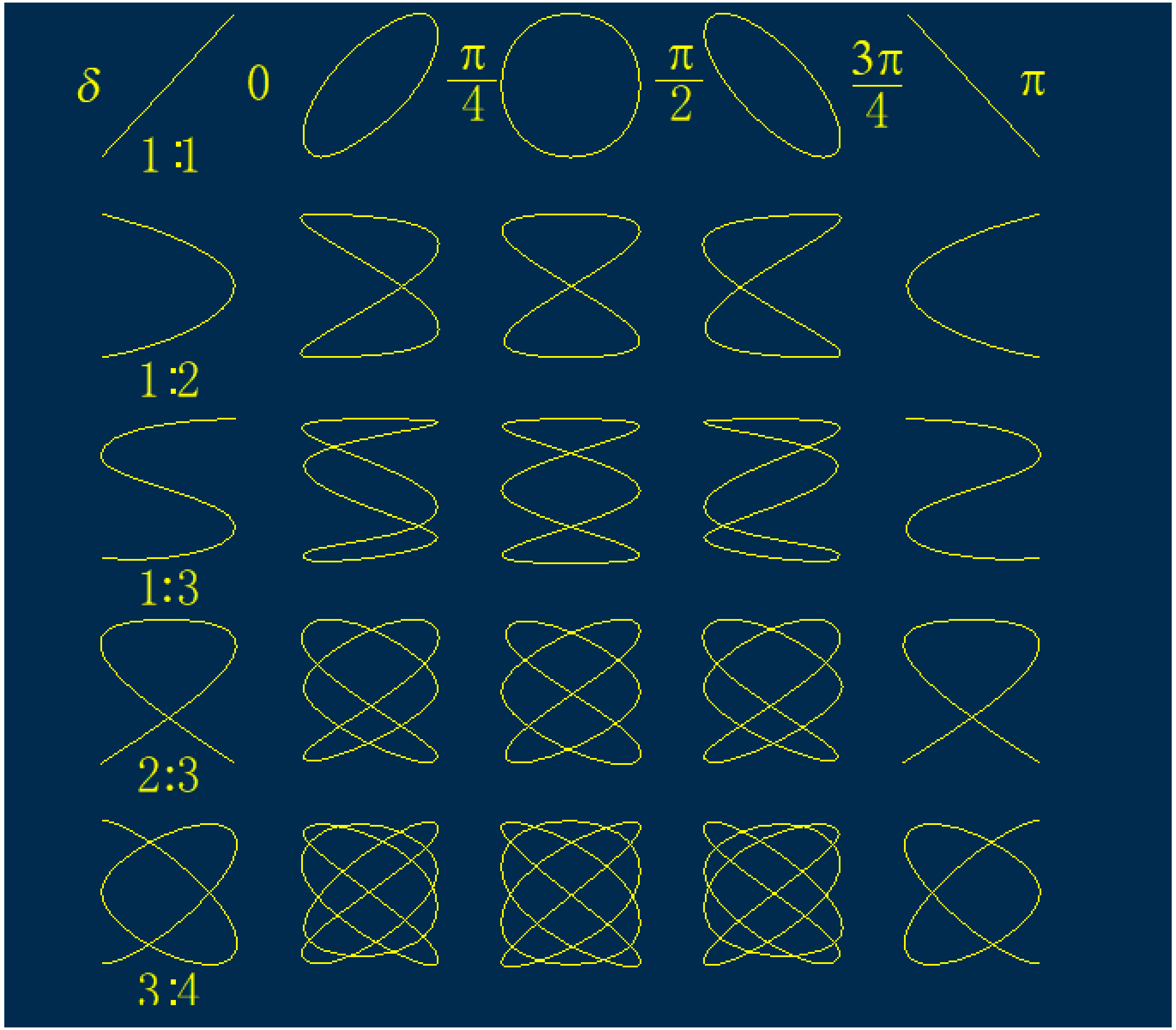
合成运动仍是周期运动,轨迹是稳定的闭合曲线(李萨如图).

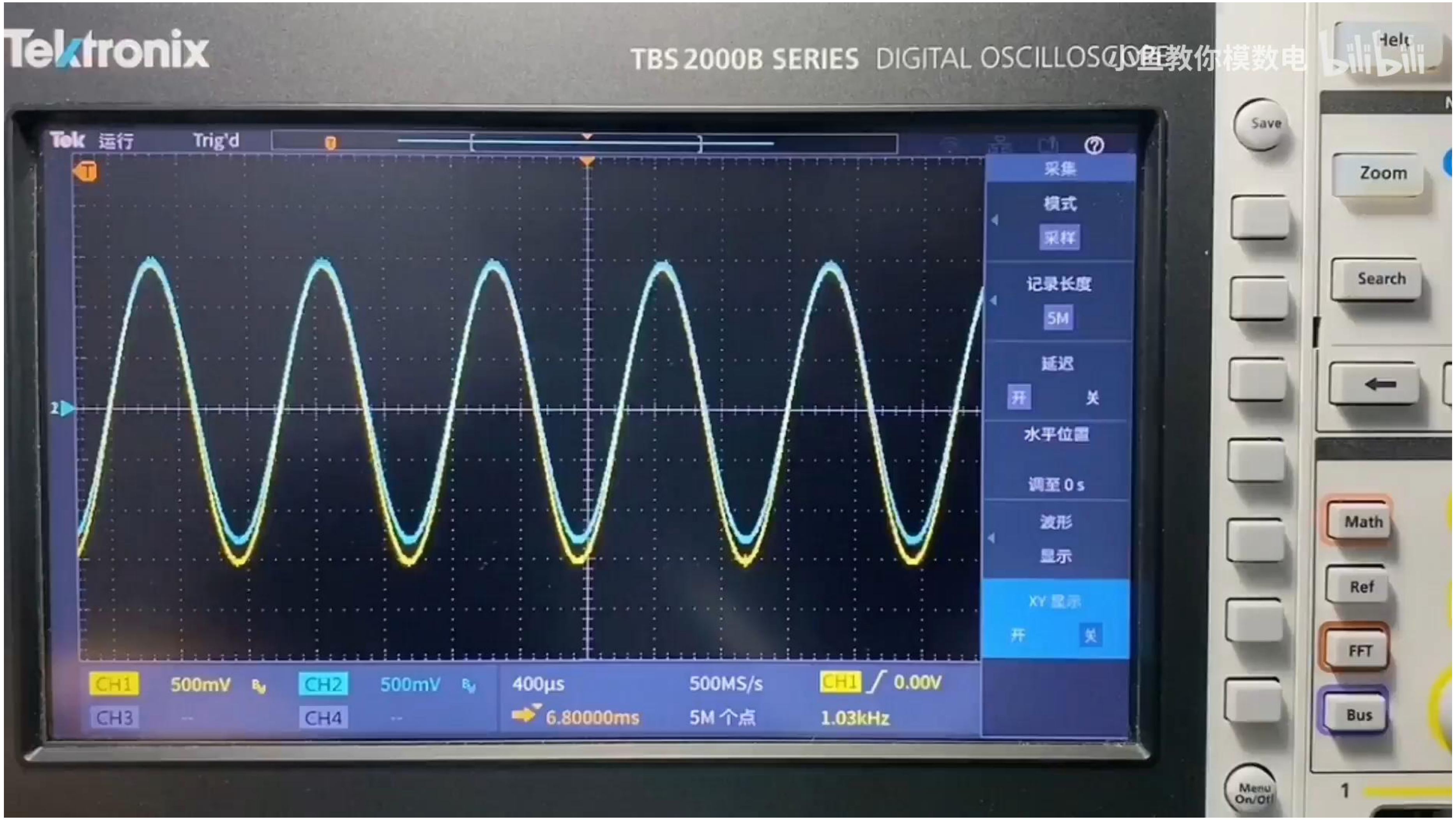
(2)ω_1、ω_2 之比不为整数时:

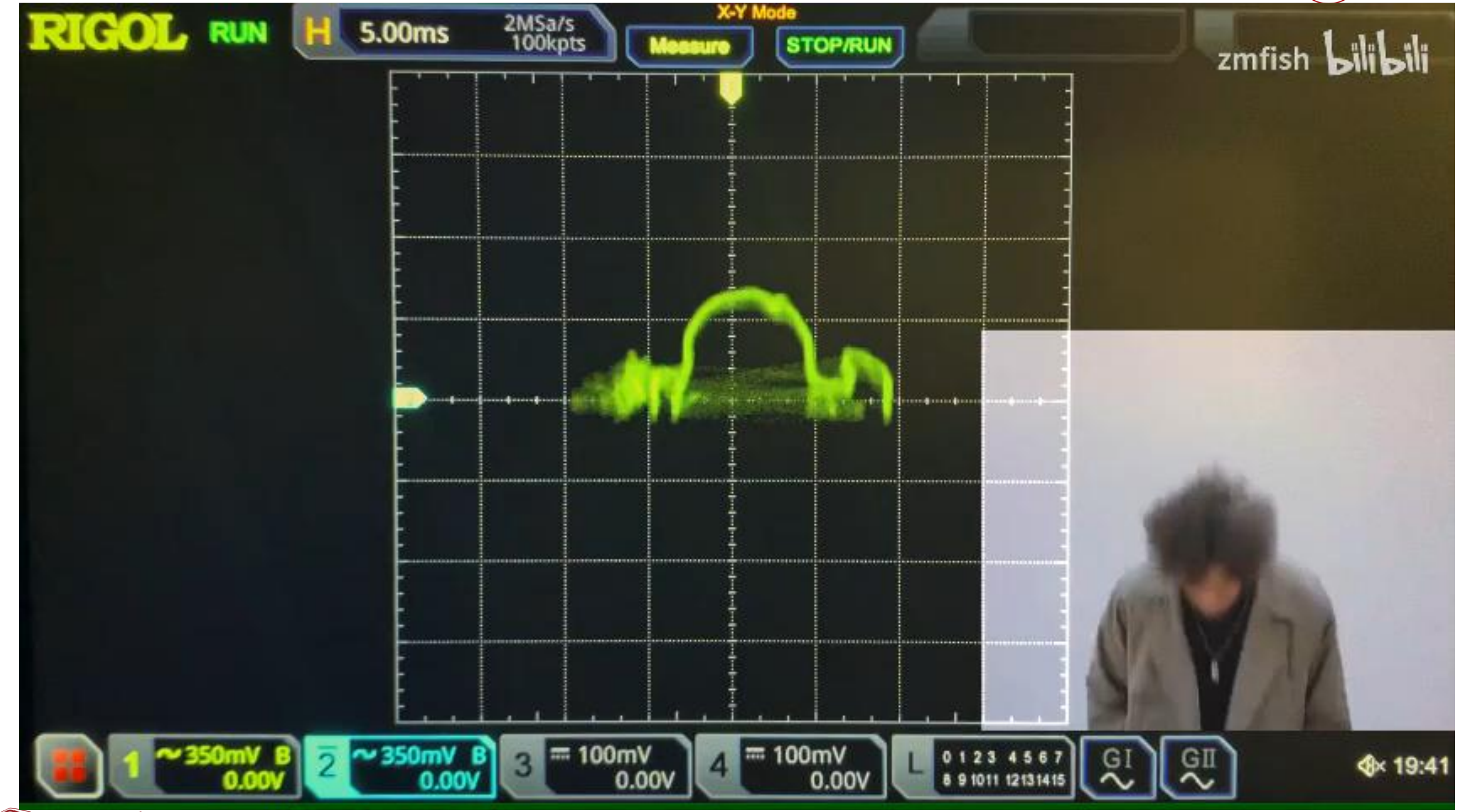
合成运动为非周期运动,

运动的轨迹为永不闭合的.




δ
0
π/4
π/2
3π/4
π
1:1
1:2
1:3
2:3
3:4


Tektronix
TBS 2000B SERIES DIGITAL OSCILLOSCOPE
小鱼教你模数电
Tek 运行 Trig'd
采集
模式
采样
记录长度
5M
延迟
开 关
水平位置
调至 0 s
波形
显示
XY 显示
开 关
CH1 500mV
CH2 500mV
400µs
500MS/s
CH1 0.00V
CH3
CH4
6.80000ms
5M 个点
1.03kHz
Save
Zoom
Search
Math
Ref
FFT
Bus


RIGOL
RUN
H
5.00ms
2MSa/s
100kpts
X-Y Mode
Measure
STOP/RUN
zmfish bilibili
1
350mV B
0.00V
2
350mV B
0.00V
3
100mV
0.00V
4
100mV
0.00V
L
0 1 2 3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14 15
GI
GII
19:41

例1. 已知两分振动为

$$x = A_1\cos\omega t$$

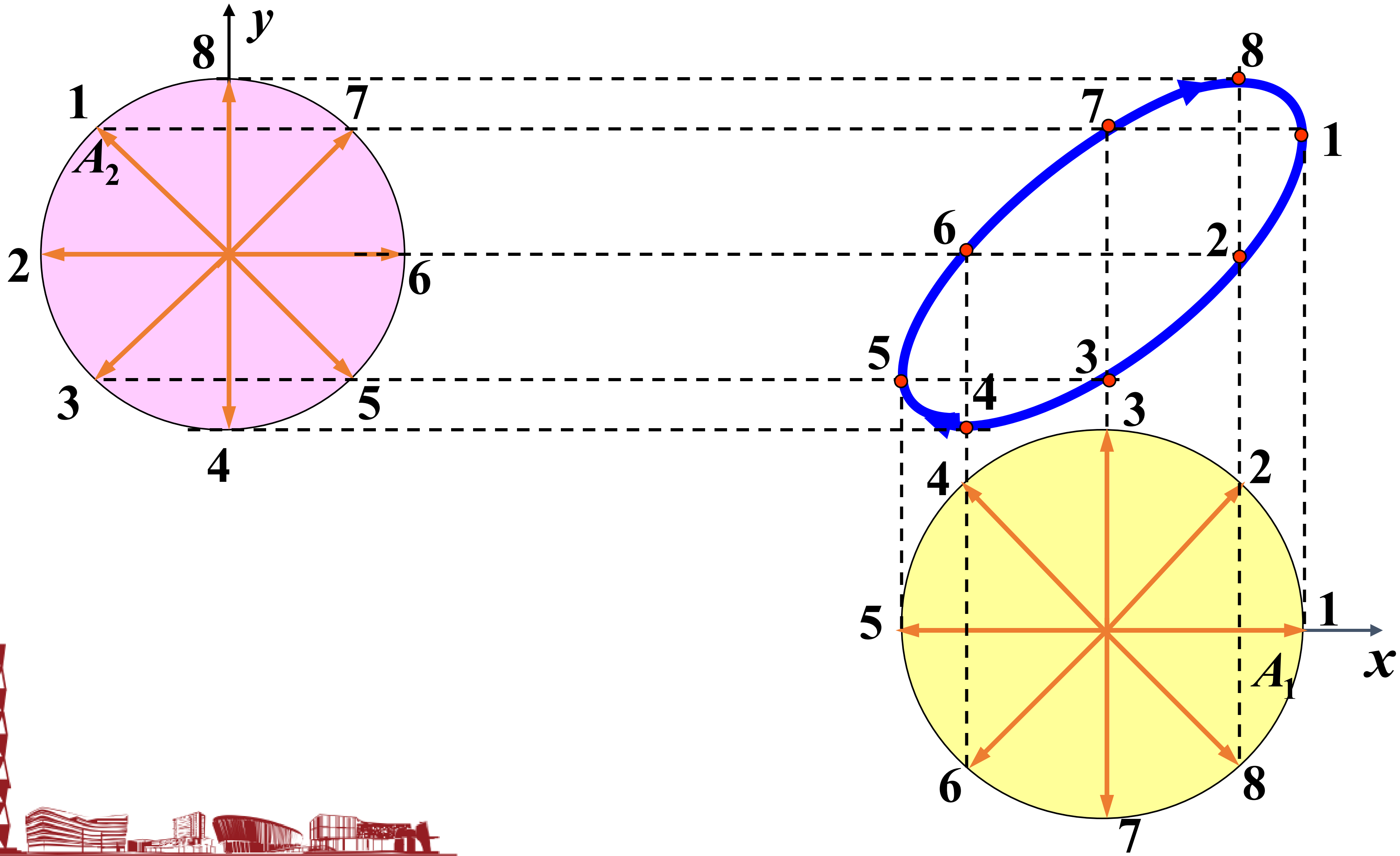
$$y = A_2\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$$

求（1）合振动的轨迹

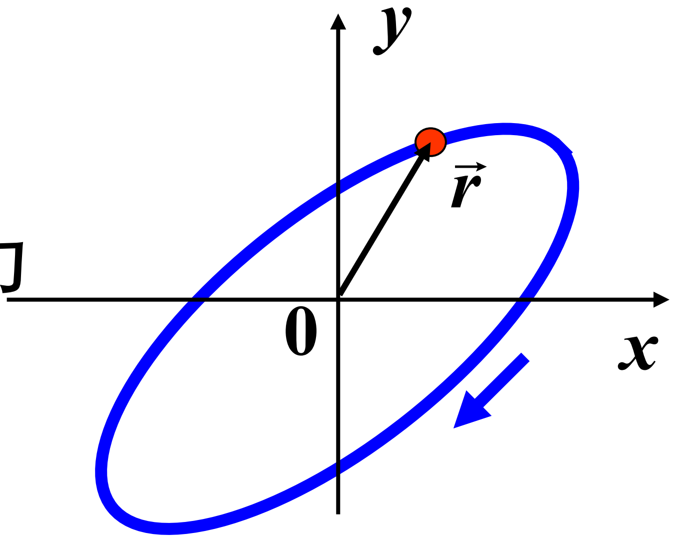
（2）若已知A、ω、φ、m，求质点在任一位置所受的力。

解： （1）几何作图法

$$x = A_1 \cos\omega t \quad y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$$



$$x = A_1\cos\omega t$$
$$y = A_2\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

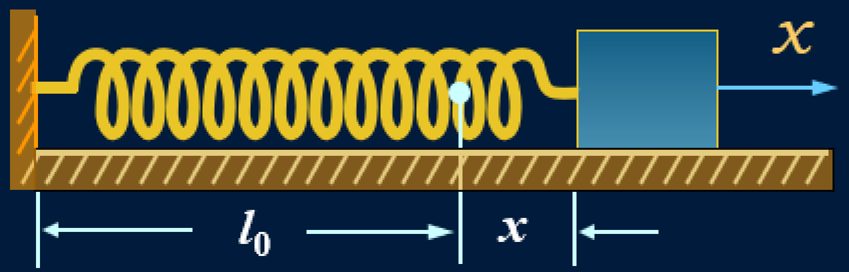


（2）求质点在任一位置所受的力

$$\vec{F} = m\vec{a}$$
$$= m(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j})$$

$$\vec{F} = m\{[-A_1\omega^2\cos\omega t]\vec{i} + [-A_2\omega^2\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})]\vec{j}\}$$
$$= -m\omega^2\{A_1\cos\omega t\ \vec{i} + A_2\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})\vec{j}\}$$
$$= -m\omega^2(x\vec{i} + y\vec{j})$$
$$= -m\omega^2\vec{r}$$

12.4.2 受迫振动



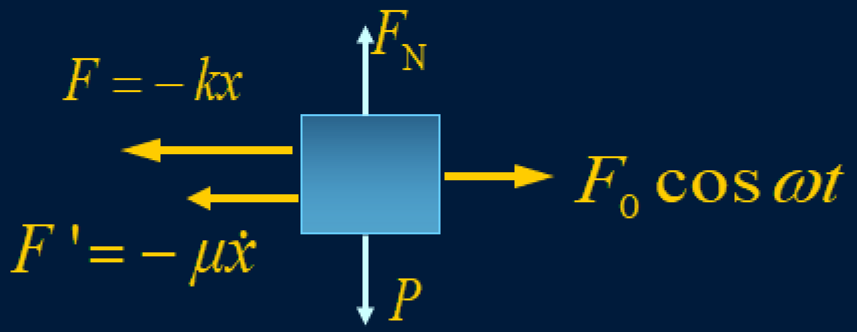
受力分析

弹性力 $-kx$

阻尼力 $-\mu\dot{x}$

周期性驱动力

$$F = F_0 \cos \omega t$$



受迫振动的微分方程

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F_0 \cos \omega t \quad (令：\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\ n = \frac{\mu}{2m}\ ;\ f = \frac{F_0}{m})$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

其解为 $x = x_1(\text{通解}) + x_2(\text{特解})$

受迫振动微分方程的稳态解为:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi)$$

其中，振幅 A 及受迫振动与干扰力之间的相位差 φ 分别为:

$$\boxed{A = \frac{f}{[(\omega^2 - \omega_0^{\,2})^2 + 4n^2\omega^2]^{1/2}}} \qquad \boxed{\tan\varphi = \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

➢ 结论:

振幅 A 及受迫振动与干扰力之间的相位差 φ 都与起始条件无关.

讨论:

- 位移共振(振幅取极值)
- 速度共振(速度振幅取极值)

1. 位移共振(振幅取极值)

共振频率： $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}$

共振振幅： $A_r = \dfrac{f}{2n\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}$

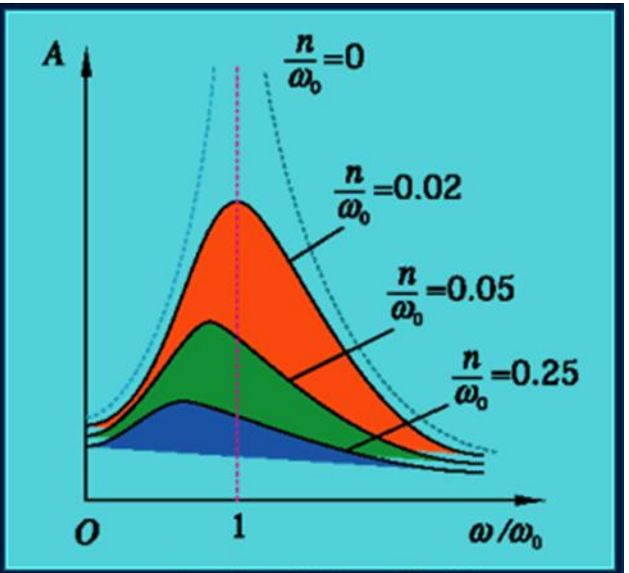
2. 速度共振(速度振幅取极值)

$$v_m = \omega A = \frac{f\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

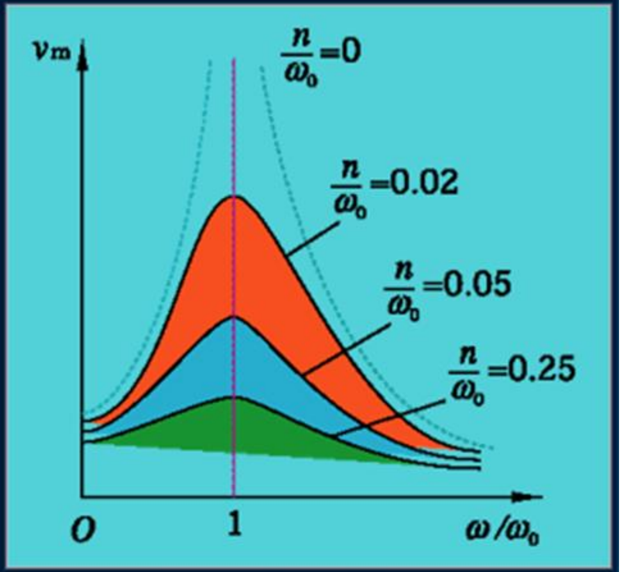
共振频率： $\omega = \omega_0$

共振速度振幅： $v_m = \dfrac{f}{2n}$

◆ 共振的应用和危害

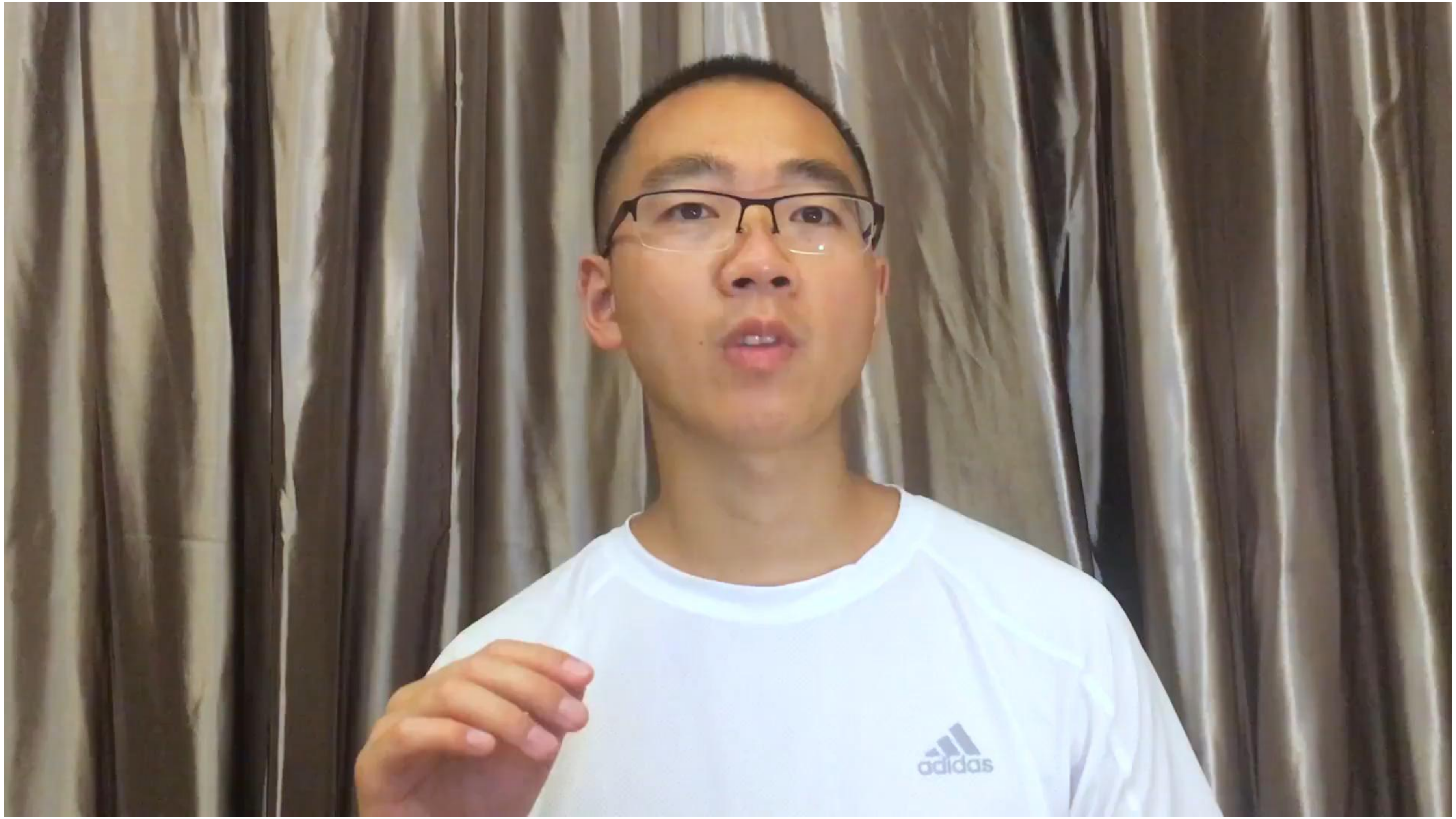


(振幅共振曲线)



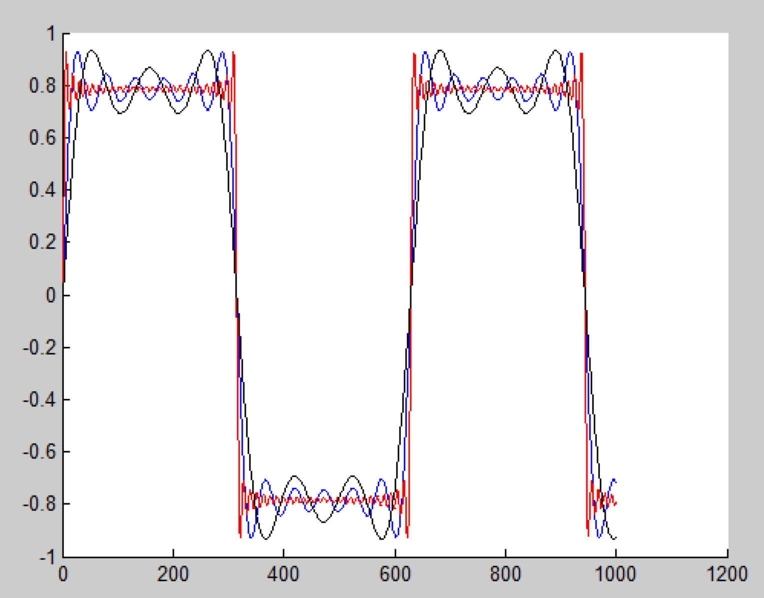
(速度共振曲线)


史上著名的三起
华北电力大学
NORTH CHINA ELECTRIC POWER UNIVERSITY
大桥共振
谨以此片献给热爱知识的你们
金豆张
经典力学
物理见闻
1


adidas

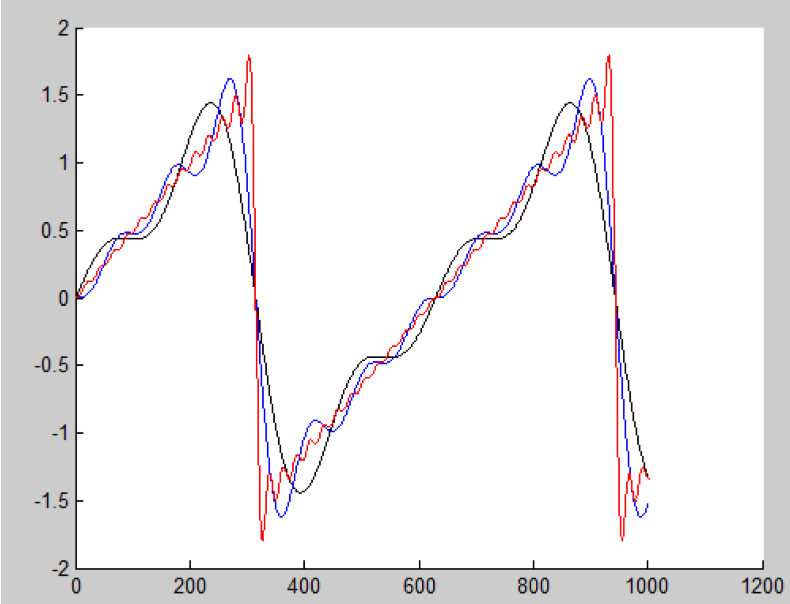
非简谐振动

- 任何一个周期性运动，都能用其频率整数倍的简谐振动的叠加得到



$$(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\frac{1}{7}\sin 7\omega t+\cdots\cdots)$$

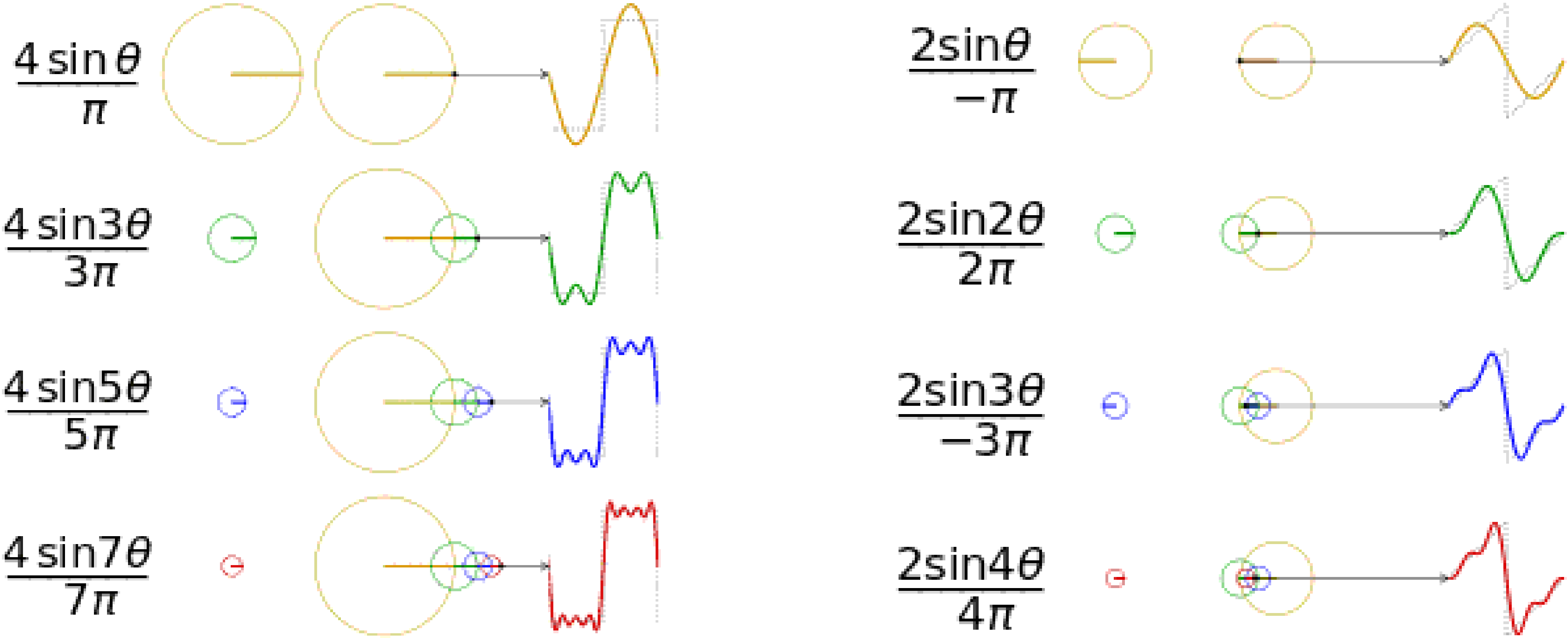
三项，六项，二十六项的叠加结果



$$\sin(\omega t)-\frac{1}{2}\sin(2\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)-\cdots$$

三项，六项，二十六项的叠加结果

非简谐振动-y方向投影示意



波动

- 波的分类
- 简谐波
- 波动方程
- 波的能量和能流
- 惠更斯原理
- 干涉和衍射

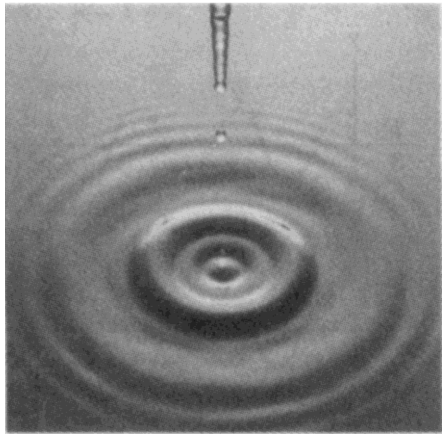
- 什么是波？

  振动状态以一定速度在空间的传播就形成了波.

- 波的分类

1. 机械波

机械振动以一定速度在弹性介质中由近及远地传播出去，就形成机械波.



产生条件 $\begin{cases}\text{波源：作机械振动的物体} \\ \text{弹性介质：承担传播振动的物质}\end{cases}$

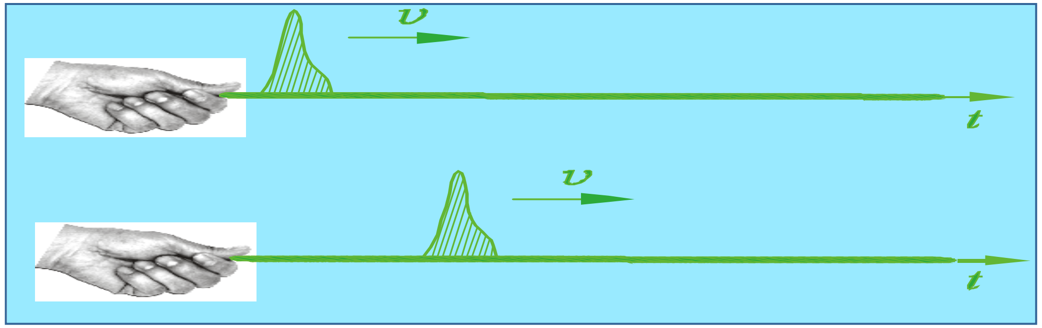
2. 电磁波

变化的电场和变化的磁场在空中的传播过程形成电磁波.

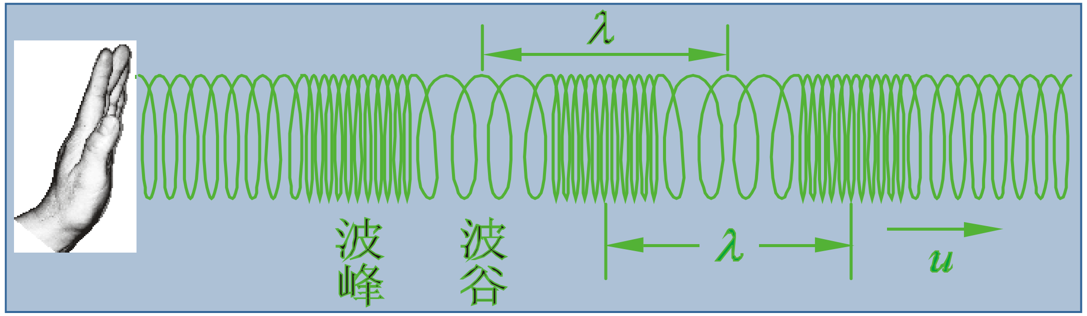
3. 物质波

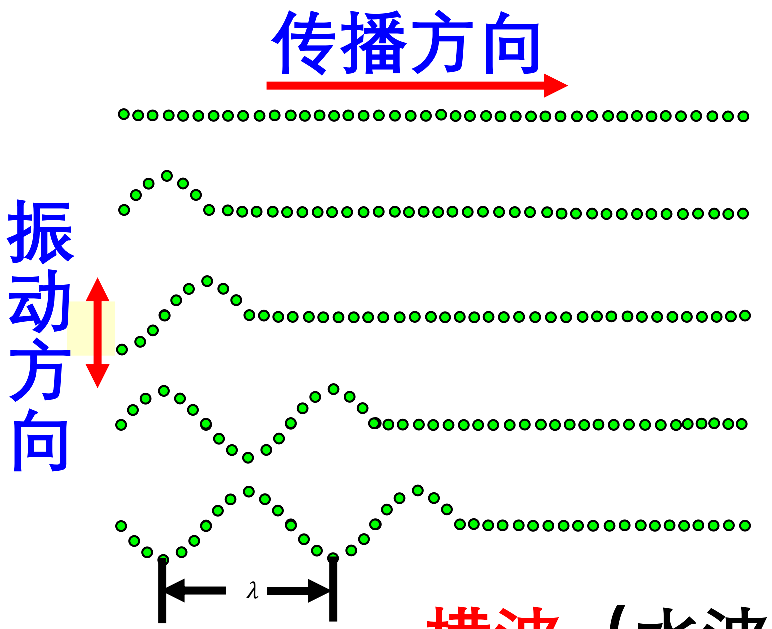
物质波（也称概率波）是微观粒子的一种属性，具有完全不同的性质，遵从量子力学理论.

◆ 横波：介质质点的振动方向与波传播方向相互垂直的波；如柔绳上传播的波.

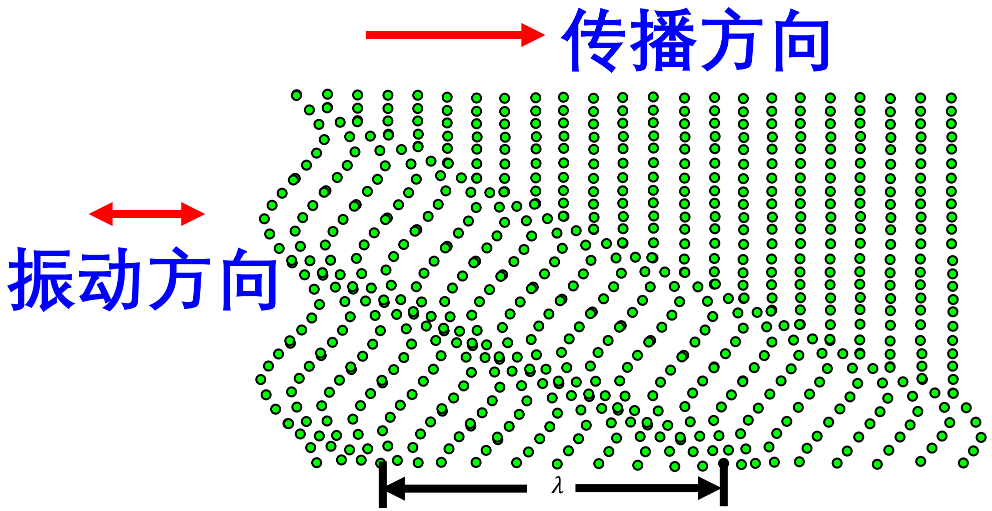


◆ 纵波：介质质点的振动方向和波传播方向相互平行的波；如空气中传播的声波.



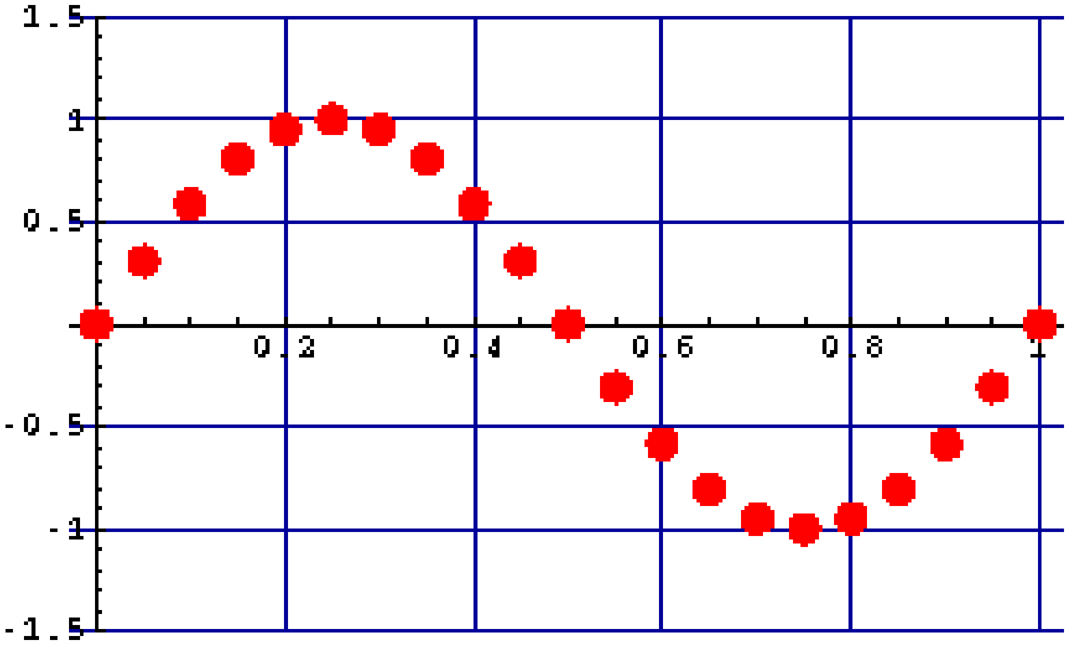


横波（水波）

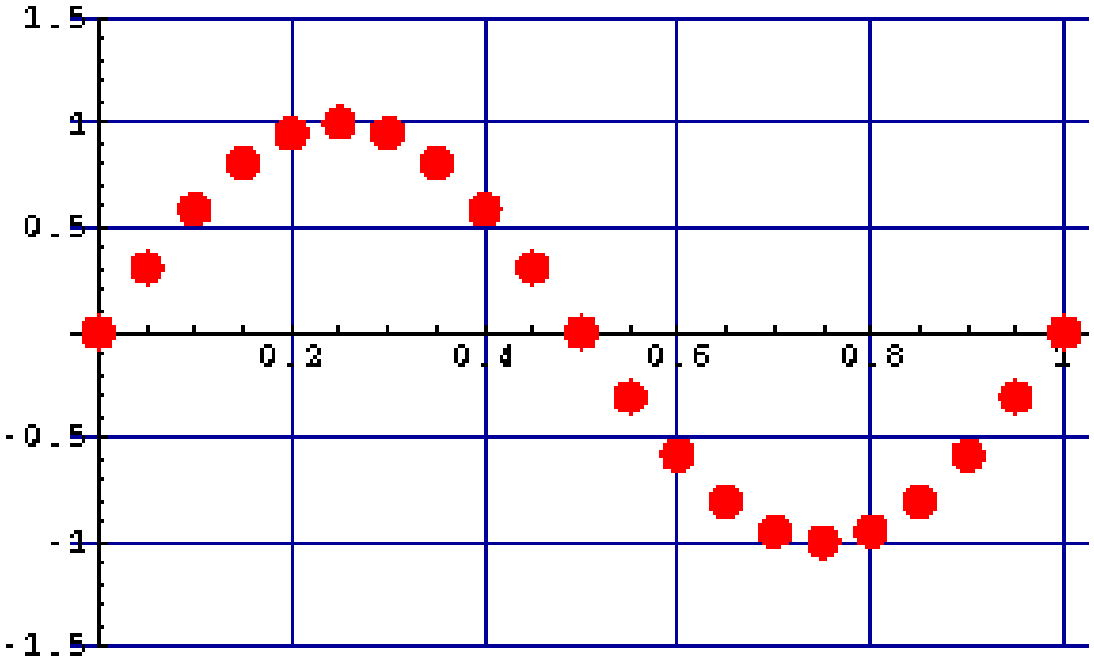


纵波（声波）

机械波的类型：传播形式



行波

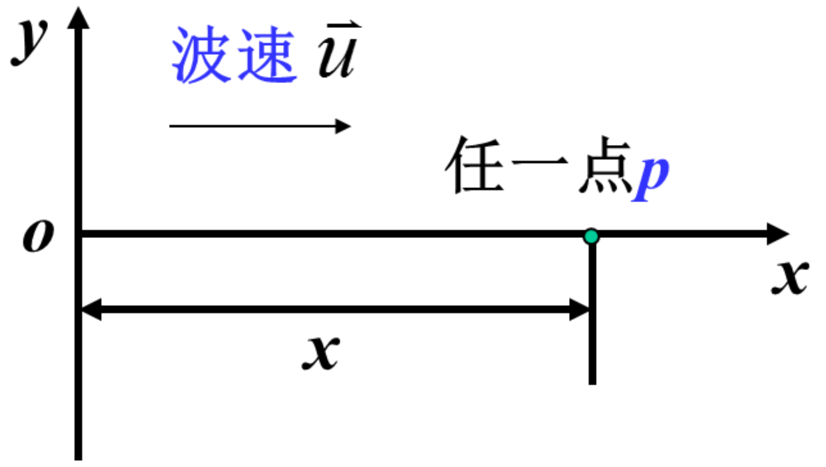


驻波

平面简谐波

简谐波：波源作简谐振动，在波传到的区域，媒质中的质元均作简谐振动。

设 $y_o = A\cos(\omega t + \phi)$



假设：媒质无吸收(质元振幅均为A)

图中p点比o点落后时间： $\dfrac{x}{u}$

$p:\ t \Leftrightarrow o:\ t - \dfrac{x}{u}$

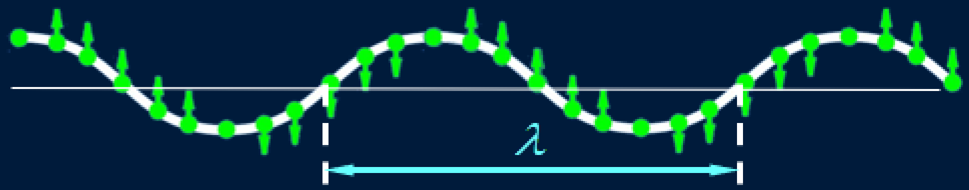
则 $$\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi\right]}$$

向右传播的一维平面简谐波

◆ 波长 周期 频率和波速

波长（λ）：同一波线上相位差为 2π 的质点之间的距离；即波源作一次完全振动，波前进的距离.

(波长反映了波的空间周期性)



角波数 k ：2π距离中完整波的数目 $k = 2\pi / \lambda$

周期（T）：波前进一个波长距离所需的时间.

(周期表征了波的时间周期性)

频率（ν）：单位时间内，波前进距离中完整波的数目.

频率与周期的关系为 $\nu = 1/T = \omega / 2\pi$

波速（u）：振动状态在媒质中的传播速度.

波速与波长、周期(或频率）的关系为 $uT = \lambda$

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi\right]$$

◆ **简谐波波函数的其它形式**

将 $k = 2\pi/\lambda$ 、$uT = \lambda$ 、 $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ 代入

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

有

$$\begin{cases} y(x,t) = A\cos[2\pi(\nu t - \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[\dfrac{2\pi}{\lambda}(ut - x) + \varphi_0] \end{cases}$$

若波沿轴负向传播时，则有波函数

$$\begin{cases} y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_0) \\ y(x,t) = A\cos[2\pi(\nu t + \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T} + \dfrac{x}{\lambda}) + \varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[\dfrac{2\pi}{\lambda}(ut + x) + \varphi_0] \end{cases}$$