



普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、
强场激光物理、飞秒激光成丝。

<https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm>



例：一长 $l = 4\text{m}$, 质量 $m_1 = 150\text{kg}$ 的船，静止在湖面上。现有一质量 $m_2 = 50\text{kg}$ 的人，从船头走到船尾，如图所示。求：人和船相对于湖岸各移动的距离。（设水对船的阻力忽略不计）

人和船构成的质点系所受外力沿x轴的分量为零

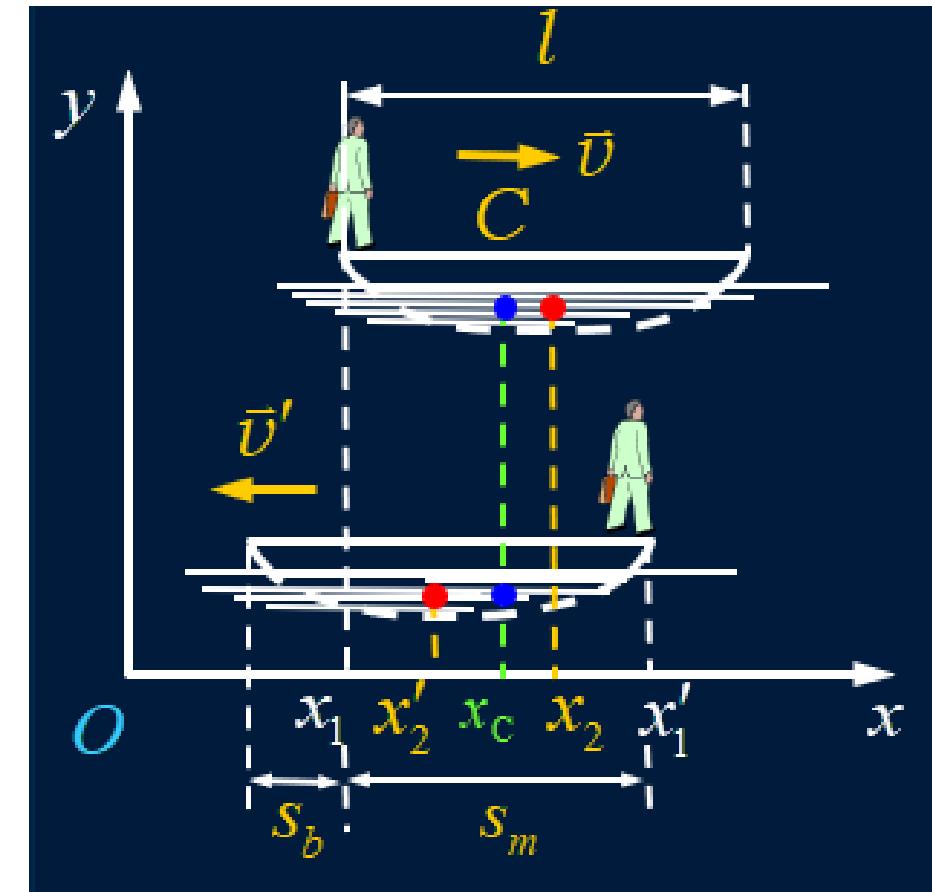
$$a_{Cx} = \frac{dv_{Cx}}{dt} = 0$$

v_{Cx} = 常数

$$v_{Cx} = v_{Cx0} = \frac{dx_C}{dt} = 0$$

x_C = 常数

质心位置坐标在人走动过程中保持不变



在人走之前，人船系统质心的坐标为

$$x_C = \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}$$

当人走到船尾时，系统质心的坐标为

$$\begin{aligned} x'_C &= \frac{m_2 x'_1 + m_1 x'_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_2(x_1 + l - s_b) + m_1(x_2 - s_b)}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

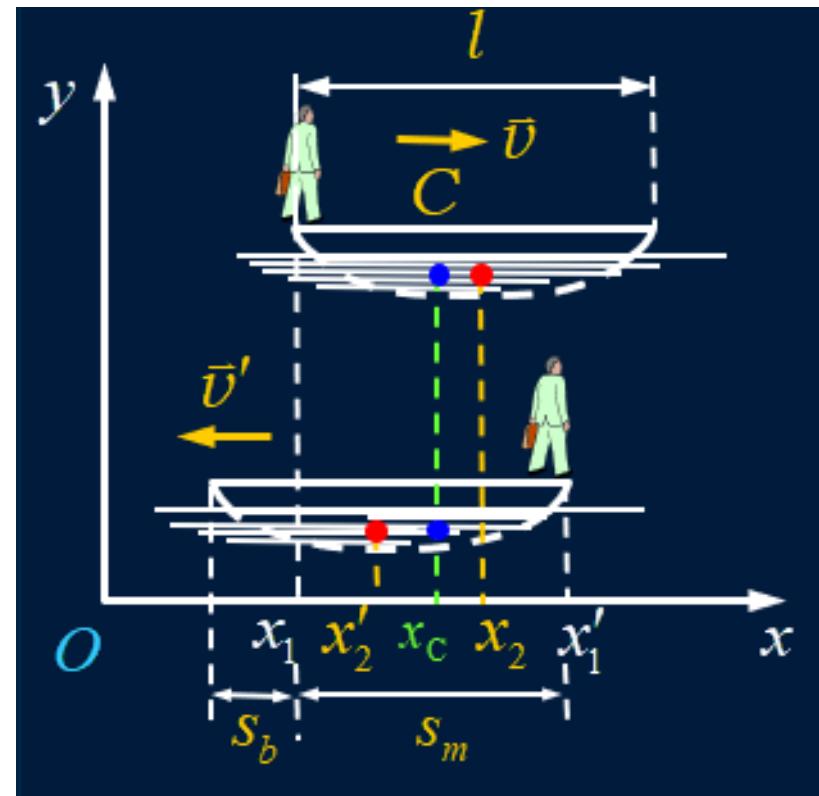
因为 $x'_C = x_C$

船相对于湖岸移动的距离为

$$s_b = \frac{m_2 l}{m_2 + m_1} = \frac{50 \times 4}{150 + 50} = 1\text{m}$$

人相对于湖岸移动的距离为

$$s_m = l - s_b = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = 3\text{m}$$





由牛顿第二定律 $\bar{F} = d\bar{p}/dt$ 有 $\bar{F}dt = d\bar{p}$

\bar{F} 是随时间而变的，但 dt 时间内，可认为 \bar{F} 恒定不变。

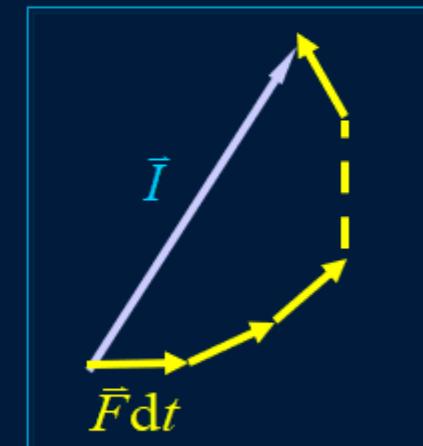
冲量：作用力与作用时间的乘积。

(反映力对时间的累积效应)

元冲量： $d\bar{I} = \bar{F}dt$

力在 t_1 到 t_2 时间内的冲量为

$$\bar{I} = \int d\bar{I} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt$$



冲量 \bar{I} 的方向是元冲量的矢量和 $(\sum_i \bar{F}_i dt)$ 的方向。





牛顿运动定律

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$



质点的运动状态

$$\vec{p} = m\vec{v} \text{ (状态量)}$$

动量：运动质点的质量与其速度的乘积。

- 动量是矢量，方向为速度方向。

- 动量的分量式为

$$\begin{cases} p_x = m v_x \\ p_y = m v_y \\ p_z = m v_z \end{cases}$$

- 动量与动能数量上的关系为

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$



牛顿运动定律

$$\bar{F} = \frac{d(m\bar{v})}{dt}$$

$$\bar{F}dt = d(m\bar{v}) \quad (\text{动量定理微分形式})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt = \int_{\bar{v}_1}^{\bar{v}_2} d(m\bar{v}) = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 \quad (\text{动量定理积分形式})$$

作用在质点上的合力在某一时间内的冲量等于质点在同一时间内动量的增量。

➤ 讨论

- 由动量定理可知，作用在质点上的合力的冲量由质点的始末状态决定而与中间过程无关。因此，动量定理对打击、碰撞等问题特别有效。



- 一般情况下，要利用动量和冲量在坐标系中的分量式进行动量定理的计算。

直角坐标系中动量定理的分量形式

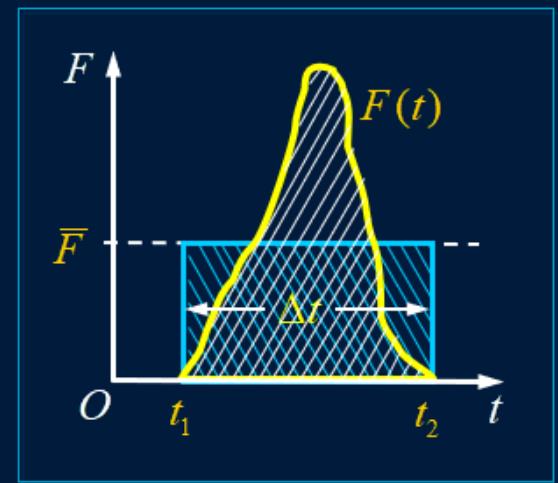
$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m v_{2x} - m v_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m v_{2y} - m v_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = m v_{2z} - m v_{1z} \end{cases}$$

冲量的分量只改变自己方向上的动量

- 在碰撞、冲击等问题中，力的作用时间很短，且力的变化又复杂时，常引入平均冲力

$$\bar{I} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \bar{F}(t_2 - t_1)$$

$$\bar{F} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt}{t_2 - t_1} = \frac{\bar{I}}{t_2 - t_1} = \frac{m \bar{v}_2 - m \bar{v}_1}{t_2 - t_1}$$



例：一质量为 $m = 1000\text{kg}$ 的蒸汽锤从高度为 $h = 1.5\text{m}$ 的地方由静止下落，锤与被加工的工件的碰撞时间为 $t = 0.01\text{s}$ ，且锤与工件碰撞后的末速度为零。求：蒸汽锤对工件的平均冲击力

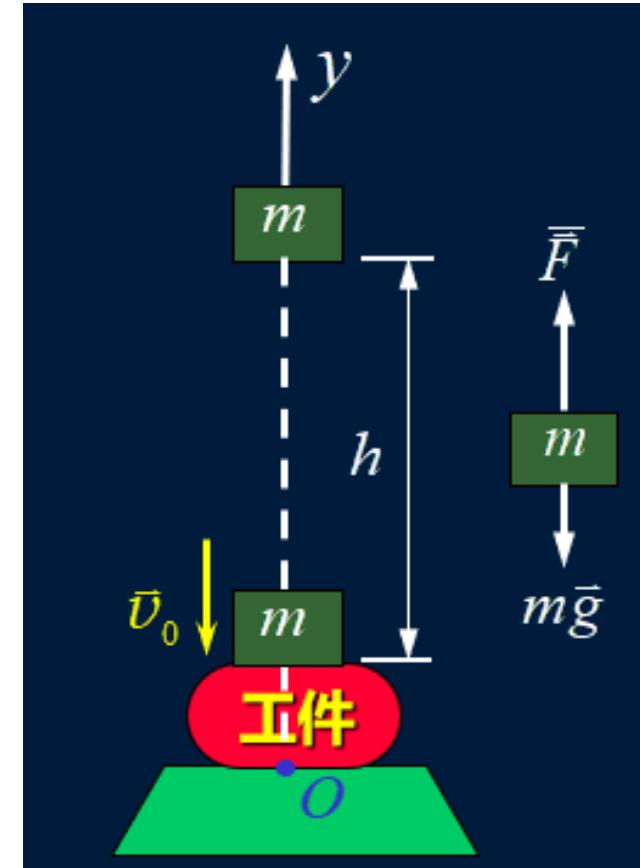
受力分析如图，设平均冲击力为： \bar{F}

锤撞击工件的初速为： $v_0 = \sqrt{2gh}$

$$\int_0^{\Delta t} (\bar{F} - mg)dt = 0 - (-mv_0)$$

$$(\bar{F} - mg)\Delta t = 0 - (-mv_0)$$

$$\bar{F} = \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} + mg = 1.69 \times 10^6 \text{N}$$



时间短而冲力大，重力等往往可以忽略。



例：一质点受合力作用，合力为 $\vec{F} = 10t\vec{i} + 2(2-t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}$
质点从静止开始在2s内所受合力的冲量和质点在2s末的动量。

由冲量的定义有

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \int_0^2 \vec{F} dt = \int_0^2 [10t\vec{i} + 2(2-t)\vec{j} + 3t^2\vec{k}] dt \\ &= \int_0^2 10t dt \vec{i} + \int_0^2 2(2-t) dt \vec{j} + \int_0^2 3t^2 dt \vec{k} \\ &= (20\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}) N \cdot s\end{aligned}$$

根据动量定理

$$\vec{I}_{t_1 \rightarrow t_2} = \vec{p}_{t=2} - \vec{p}_0 = \vec{p}_{t=2}$$

$$\vec{p}_{t=2} = (20\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}) N \cdot s$$

2s末的动量大小

$$|\vec{p}_{t=2}| = |\vec{I}_{t_1 \rightarrow t_2}| = \sqrt{20^2 + 4^2 + 8^2} N \cdot s = 21.9 N \cdot s$$

例：如图所示，一质量为 $m = 1\text{kg}$ 的质点，沿半径为 $R = 2\text{m}$ 的圆周运动。取O点为自然坐标的原点，质点在自然坐标中的运动方程为 $s = \frac{1}{2}\pi t^2$ (SI)。

求：从 $\sqrt{2}$ 秒到2秒这段时间内质点所受到的合力的冲量。

由质点的运动方程可知

$$t_0 = 0 \quad s_0 = 0 \quad \text{质点位于O点}$$

$$t_1 = \sqrt{2}s \quad s_1 = \pi m \quad \text{质点位于P点}$$

$$t_2 = 2s \quad s_2 = 2\pi m \quad \text{质点位于Q点}$$

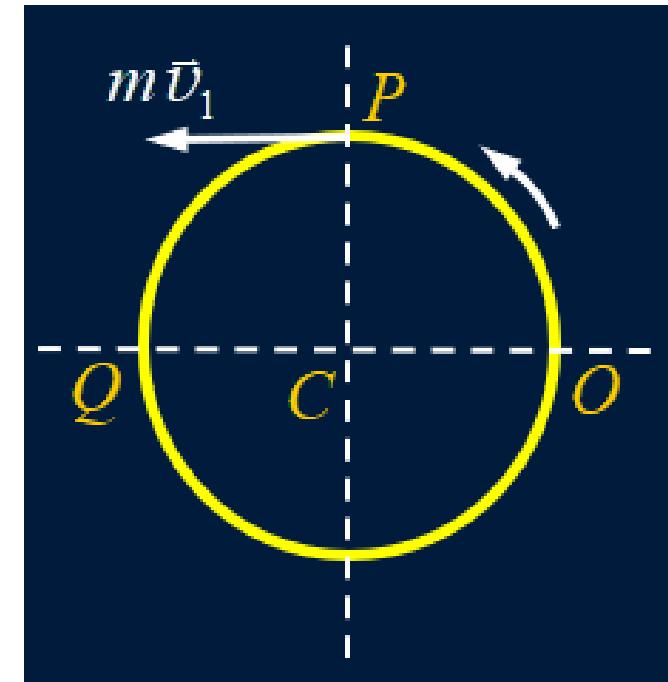
质点的运动速率为

$$v = \frac{ds}{dt} = \pi t$$

$t_1 = \sqrt{2}s$ 时，质点的速率和动量分别为

$$v_1 = \sqrt{2}\pi m \cdot s^{-1}$$

$$p_1 = mv_1 = \sqrt{2}\pi kg \cdot m \cdot s^{-1}$$



$t_2 = 2s$ 时，质点的速率和动量分别为

$$v_2 = 2\pi m \cdot s^{-1}$$

$$p_2 = mv_2 = 2\pi kg \cdot m \cdot s^{-1} \quad (\text{方向如图所示})$$

t_1 到 t_2 时间内质点所受合力的冲量为

$$\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

由图示动量合成三角形可知

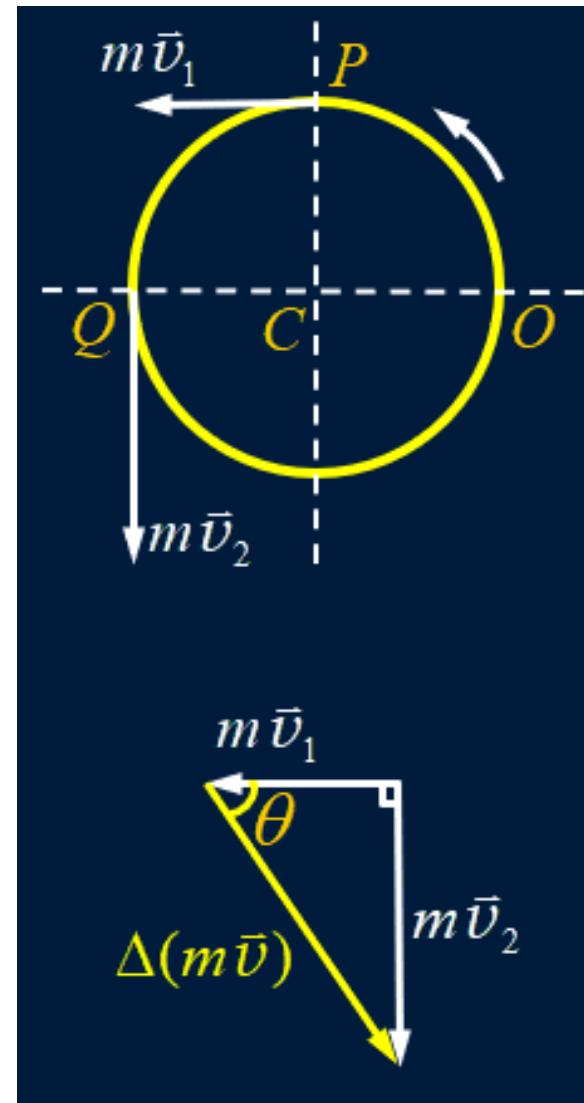
$$I = |\Delta(m\vec{v})| = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2}$$

$$= 7.69 kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

冲量的方向可用 θ 角来表示

$$\tan\theta = \frac{mv_2}{mv_1} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

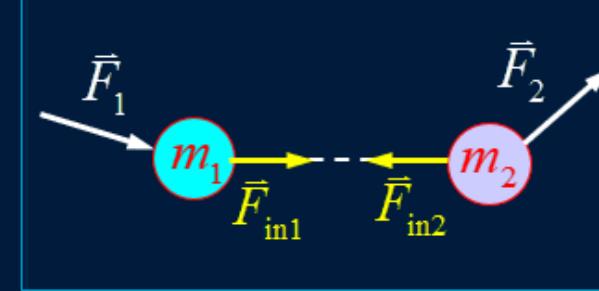
$$\theta = 54^\circ 44'$$



外力: \vec{F}_1, \vec{F}_2 内力: $\vec{F}_{\text{in}1}, \vec{F}_{\text{in}2}$

t_1 时刻, 两质点的速度分别为 $\vec{v}_{11}, \vec{v}_{21}$

t_2 时刻, 两质点的速度分别为 $\vec{v}_{12}, \vec{v}_{22}$



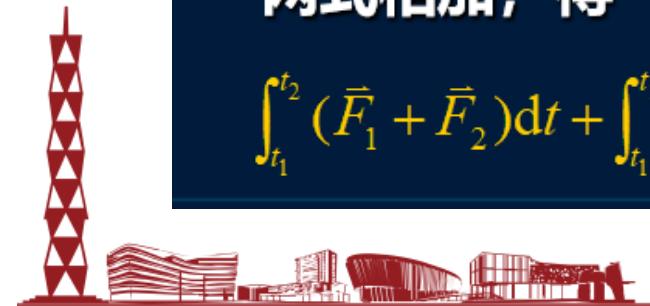
对质点系中的各质点应用动量定理

对质点1, 有 $\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_{\text{in}1}) dt = m_1 \vec{v}_{12} - m_1 \vec{v}_{11}$

对质点2, 有 $\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_2 + \vec{F}_{\text{in}2}) dt = m_2 \vec{v}_{22} - m_2 \vec{v}_{21}$

两式相加, 得

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_{\text{in}1} + \vec{F}_{\text{in}2}) dt = (m_1 \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{22}) - (m_1 \vec{v}_{11} + m_2 \vec{v}_{21})$$





其中

$$\vec{F}_{\text{in}1} = -\vec{F}_{\text{in}2}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) dt = (m_1 \vec{v}_{12} + m_2 \vec{v}_{22}) - (m_1 \vec{v}_{11} + m_2 \vec{v}_{21})$$

推广到 **n** 个质点的质点系，有

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_i dt = \left(\sum_i m_i \vec{v}_{i2} \right) - \left(\sum_i m_i \vec{v}_{i1} \right)$$

或 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (质点系动量定理)

系统所受合外力的冲量等于质点系总动量的增量





根据系统的动量定理可知: $\sum \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i$

当合外力 $\sum \vec{F}_i = 0$ 则 $\frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i = 0$

$$\sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \text{常矢量} \quad (\text{质点系的动量守恒定律})$$

质点系所受合外力为零时，质点系的总动量保持不变。

讨论

- 若系统的合外力不为零，但可能合外力在某一方向的分量等于零，则该方向的总动量守恒。

当 $\sum F_{ix} = 0$ $\sum m_i v_{ix} = \text{常量}$

当 $\sum F_{iy} = 0$ $\sum m_i v_{iy} = \text{常量}$

当 $\sum F_{iz} = 0$ $\sum m_i v_{iz} = \text{常量}$

(动量守恒定律在直角坐标系中的分量式)



1. 系统的总动量守恒并不意味着系统内各个质点的动量不变，而是指系统动量总和不变；
2. 内力的作用：内力不改变系统的总动量，但可以改变系统中各质点的动量，使系统的总动量在系统各质点间的分配发生变化；
3. 动量守恒定律是自然界的普遍定律之一，对于宏观物体和微观粒子都适用。





应用动量定理和动量守恒定律解题步骤

(1) 选取研究对象。

(2) 分析受力。

判断是否满足合外力为零，或是否沿某一方向合外力投影的代数和为零，或是否合外力远小于内力？若满足这类条件，就应用动量守恒定律求解，否则就应用动量定理求解。

(3) 确定过程。

需要考虑一定的时间间隔或一个过程。

(4) 列方程求解。

要选取适当的坐标系，一般要列出动量定理或动量守恒定律方程的分量式。



例：一装沙车以速率 $v = 3\text{m/s}$ 从沙斗下通过，每秒钟落入车厢的沙为 $m = 500\text{kg}$ ，如果使车厢的速率保持不变，应用多大的牵引力？(设车与轨道的摩擦不计)

解 设t时刻已落入车厢沙子的质量与沙车的质量之和为 m , dt 时间内即将落入的沙子质量为 dm 。

以 m 和 dm 为研究系统

t 时刻水平总动量为

$$mv + dm \cdot 0 = mv$$

$t + dt$ 时刻的动量为

$$mv + dm \cdot v = (m + dm)v$$

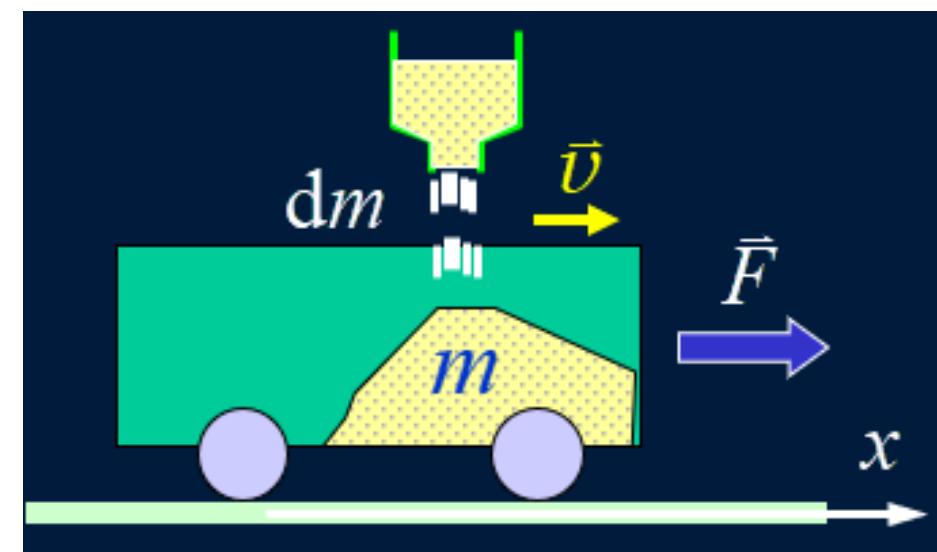
动量的增量为

$$dp = (m + dm)v - mv = dm \cdot v$$

根据动量定理

$$Fdt = dp = dm \cdot v$$

$$F = \frac{dm}{dt}v = 500 \times 3 \text{ N} = 1.5 \times 10^3 \text{ N}$$



例：一个有 $1/4$ 圆弧滑槽、半径为 R 的大物体质量为 m_1 ，停在光滑的水平面上，另一质量为 m_2 的小物体从圆弧滑槽顶点由静止下滑。求：当小物体 m_2 滑到底时，大物体 m_1 在水平面上移动的距离。

取 m_1 和 m_2 为一系统

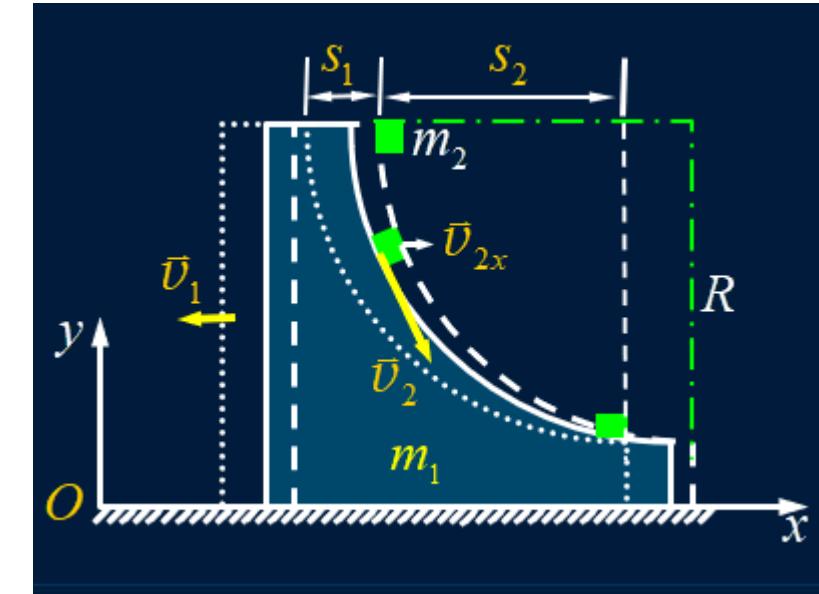
设 \vec{v}_1 和 \vec{v}_2 为下滑过程中 m_1 和 m_2 相对于地面的速度

水平方向系统动量守恒

$$0 = m_2 v_{2x} + m_1 (-v_1)$$

$$m_2 v_{2x} = m_1 v_1$$

设 $t = 0$ 时 m_2 在圆弧顶点, t 时刻滑到最低点,对上式积分,有



$$m_2 \int_0^t v_{2x} dt = m_1 \int_0^t v_1 dt$$





$$m_2 \int_0^t v_{2x} dt = m_1 \int_0^t v_1 dt$$

设s₁和s₂分别表示m₁和m₂在水平方向移动的距离，则有

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^t v_1 dt & s_2 &= \int_0^t v_{2x} dt \\ m_2 s_2 &= m_1 s_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$s_1 + s_2 = R \quad (2)$$

式(1)和(2)式联立，有

$$s_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R$$



火箭发射

And god said

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

And there was light

例：火箭是一种自带燃料和助燃剂的太空飞行器，它依靠燃料燃烧喷出的气体所产生的反冲推力向前推进。设不计地球引力和空气阻力。

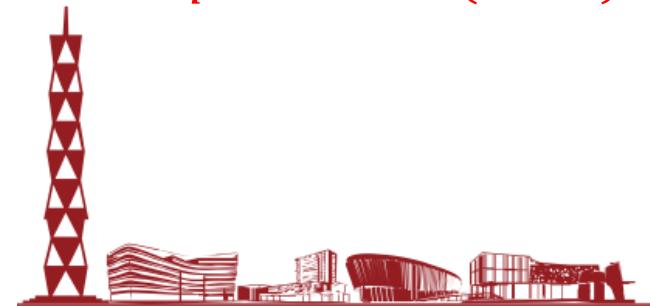
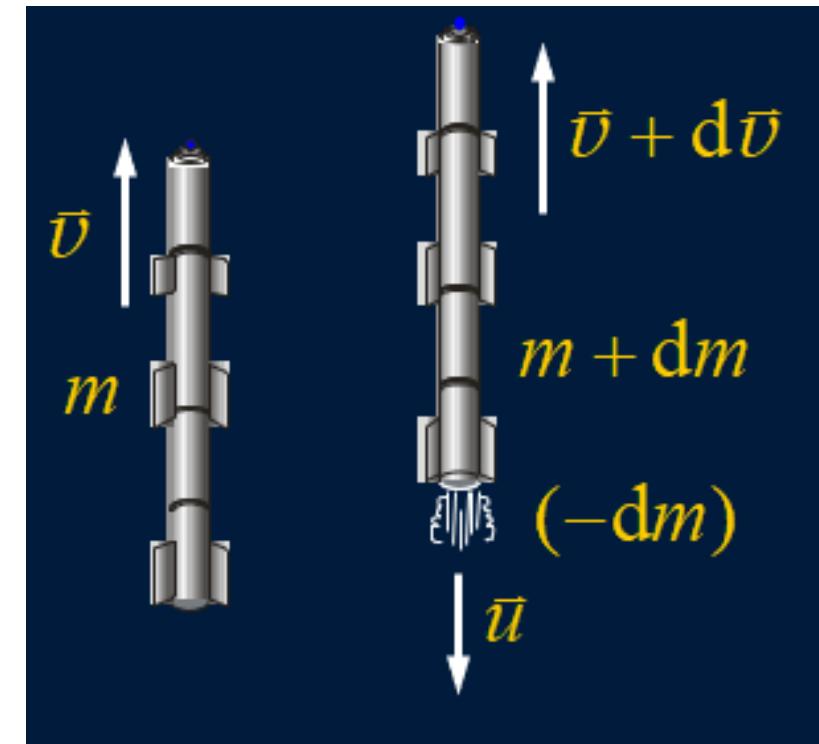
设各量如图。图中 $dm < 0$ ，且 \vec{v} 、 $\vec{v} + d\vec{v}$ 、 \vec{u} 三个速度均为相对于地面参考系的速度

则在时间 dt 内，系统动量的增量为

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= [(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + (-dm)\vec{u}] - m\vec{v} \\ &= m\vec{v} + (dm)\vec{v} + md\vec{v} + (dm)(d\vec{v}) - (dm)\vec{u} - m\vec{v} \end{aligned}$$

略去二阶无穷小，则有

$$d\vec{p} = md\vec{v} - (\vec{u} - \vec{v})dm$$





设喷气出口的相对速度为 \vec{v}_r ，即

$$\vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}$$

则系统动量的增量可表示为

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - \vec{v}_r dm$$

不计地球引力和空气阻力，火箭系统的动量守恒，即

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - \vec{v}_r dm = 0$$

取竖直向上作为x轴的正方向，则 $m dv - (-v_r) dm = 0$ $dv = -v_r \frac{dm}{m}$

设火箭发射时的质量为 m_i ，初速度为 v_i ，燃料耗尽时的质量为 m_f ，末速度为 v_f

通常喷气出口速度 v_r 为常量，积分得

$$v_f = v_i + v_r \ln \frac{m_i}{m_f}$$



提高火箭速度的途径： (1) $v_r \uparrow$, (2) $\frac{m_i}{m_f} \uparrow$

- 当 $v_0 = 0$, $v_r = 2000$ m/s 时, 要达到第一宇宙速度 $v_1 = 7.9$ km/s, 须 $\frac{m_i}{m_f} = 50$
- 目前技术只有: $v_r = 2500$ m/s, $\frac{m_i}{m_f} = 10$ 。

采用多级火箭技术: $v_1 = u \ln N_1$ $v_2 - v_1 = u \ln N_2$, $v_3 - v_2 = u \ln N_3$,...

$$v = \sum_i u \ln N_i = u \ln(N_1 N_2 N_3 \cdots)$$



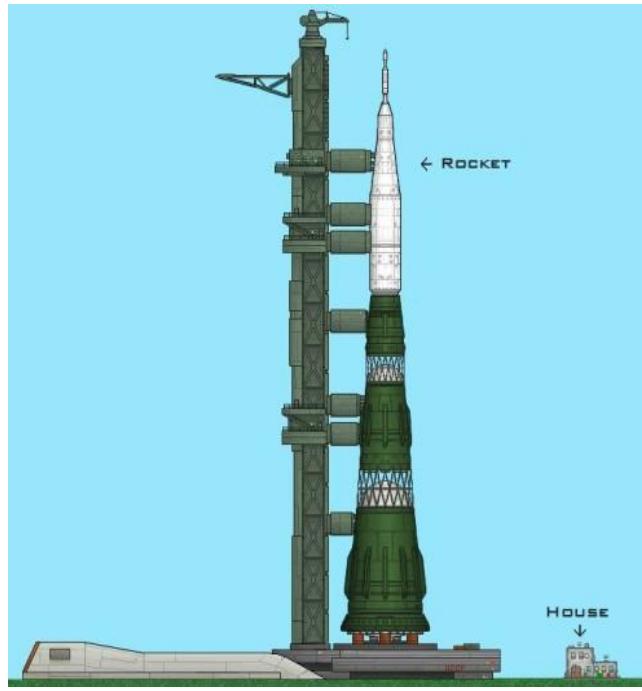
火箭发射的“沉重”代价

苏联N1运载火箭

火箭类型：五级重型运载火箭

直径17米，高度105米

火箭重2735吨，低地轨道载荷：75吨

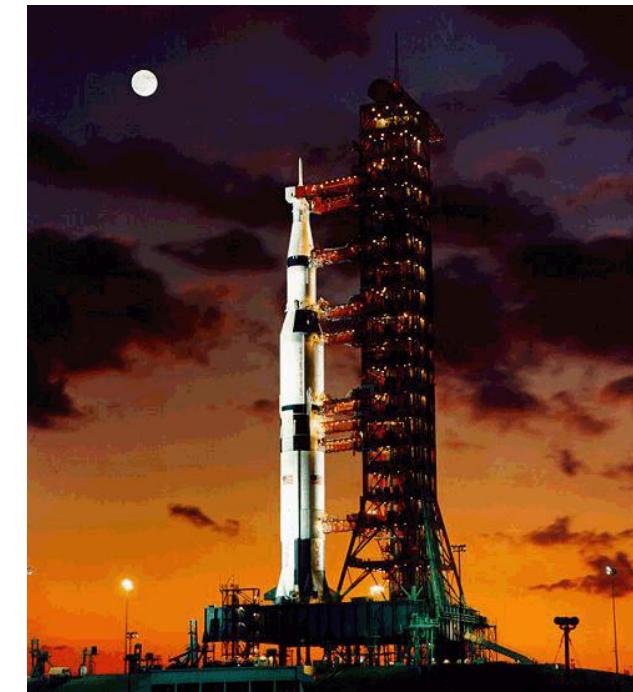


美国土星5号运载火箭

火箭类型：三级液体燃料重型运载火箭

高度110.6米，直径10.1米

质量3039吨，低地轨道载荷：119吨





主要内容：

1. 完全弹性碰撞
2. 完全非弹性碰撞
3. 非完全弹性碰撞



◆ 完全弹性碰撞、非完全弹性碰撞、完全非弹性碰撞、恢复系数



- 完全弹性碰撞：碰撞前后，动量守恒，总动能不变。
- 非完全弹性碰撞：碰撞前后，动量守恒，总动能有改变（转化为热、声等能）。
- 完全非弹性碰撞：碰撞前后，动量守恒，总动能有改变，并以共同的速度运动。
- 恢复系数：碰撞后两球的分离速度与碰撞前两球的接近速度的比值。

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$





完全弹性碰撞



系统动量守恒

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

系统动能守恒

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

可得

$$v_{10} - v_{20} = v_2 - v_1$$

则

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{10} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{20}$$

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{10} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{20}$$



$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{10} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{20}$$

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{10} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{20}$$



➤ 讨论

- 完全弹性碰撞时

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 1$$

- 当 $m_1 = m_2$ 时 $v_1 = v_{20}, \quad v_2 = v_{10}$ —两球交换速度

- 当 $m_1 \ll m_2$, 且 $v_{20} = 0$ 时 $v_1 \approx -v_{10}, \quad v_2 \approx 0$

- 当 $m_1 \gg m_2$, 且 $v_{20} = 0$ 时 $v_1 \approx v_{10} , \quad v_2 \approx 2v_{10}$

