

hw_2

1. 大本钟的分针长 4.5m，质量为 100kg，时针长 2.7m，质量为 60kg。二者对中心轴的角动量和转动动能各是多少？将二者都当成均匀细直棒处理。

解：

分针

$$L_1 = I_1 \omega_1 = \frac{1}{3} m_1 L_1^2 \cdot \frac{2\pi}{T_1} = \frac{3}{8} \pi \text{ J}\cdot\text{s}$$

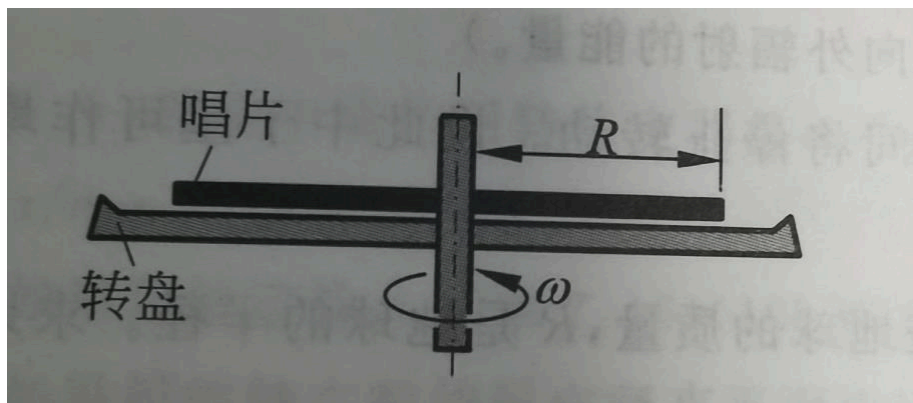
$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} m_1 L_1^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T_1^2} = \frac{\pi^2}{9600} \text{ J}$$

时针

$$L_2 = I_2 \omega_2 = \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \cdot \frac{2\pi}{T_2} = \frac{145.8\pi}{21600}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T_2^2} = \frac{72.9\pi^2}{466560000} \text{ J}$$

2. 唱机的转盘绕着通过盘心的固定竖直轴转动，唱片放上去后将受转盘的摩擦力作用而随转盘转动。设唱片可以看成是半径为 R 的均匀圆盘，质量为 m ，唱片和转盘之间的滑动摩擦系数为 μ_k 。转盘原来以角速度 ω 匀速转动，唱片刚放上去时它受到的摩擦力矩多大？唱片达到角速度 ω 需要多长时间？在这段时间内，转盘保持角速度 ω 不变，驱动力矩共做了多少功？唱片获得了多大动能？



解：

(1) 摩擦力矩

$$\tau = \mu_k mgR$$

(2) 角加速度和时间

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\mu_k mg R}{\frac{1}{2} m R^2} = \frac{2\mu_k g}{R}$$

$$t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{\frac{2\mu_k g}{R}} = \frac{R\omega}{2\mu_k g}$$

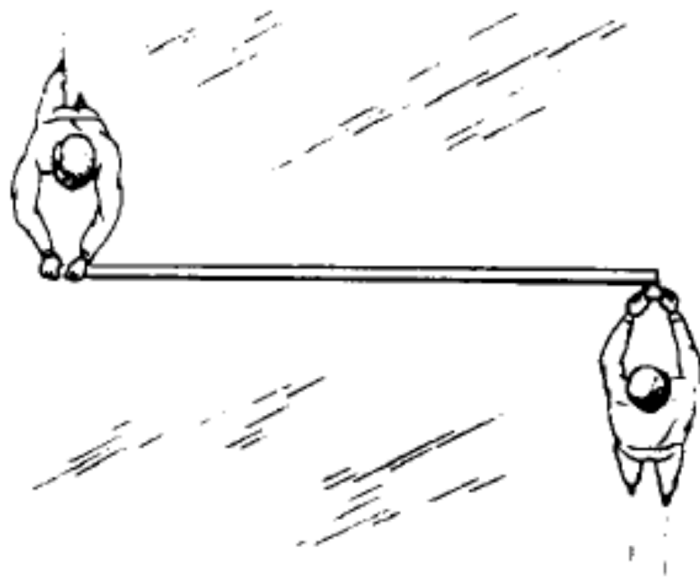
(3) 驱动力矩做功

$$W = \tau\theta = \tau\omega t = \mu_k mg R \cdot \omega \cdot \frac{R\omega}{2\mu_k g} = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

(4) 唱片获得的动能

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m R^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2$$

3. 两个滑冰运动员，体重都是 60kg，他们以 6.5m/s 的速率垂直地冲向一根 10m 长细杆的两端，并同时抓住它，如本题图所示。若将每个运动员看成一个质点，细杆的质量可以忽略不计。



习题 4 - 9

- (1) 求他们抓住细杆前后对于其中点的角动量；
- (2) 他们每人都用力往自己一边收细杆，当他们之间距离为 5.0m 时，各自的速率是多少？
- (3) 求此系杆中的张力；
- (4) 计算每个运动员在减少他们之间距离的过程中所作的功，并证明这功恰好等于他们动能的变化。

解:

(1) 抓住细杆前的角动量

$$L = 2mvd = 3900 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

(2) 收杆后的速率

$$I = 2md^2 = 3000 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega = \frac{L}{I} = \frac{3900}{3000} = 1.3 \text{ rad/s}$$

$$V = \omega d = 16.5 \text{ m/s}$$

距离为 5.0m 时:

$$d' = 2.5 \text{ m}, \quad I' = 2md'^2 = 750 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega' = \frac{L}{I'} = \frac{3900}{750} = 5.2 \text{ rad/s}$$

$$V' = \omega' \cdot d = 5.2 \times 2.5 = 13 \text{ m/s}$$

(3) 细杆中的张力

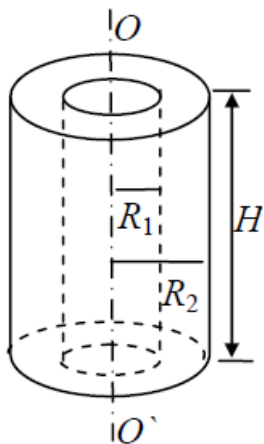
$$T = m\omega^2 d = 4056 \text{ N}$$

(4) 运动员做功

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2} I' \omega'^2 - \frac{1}{2} I \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 750 \times (5.2)^2 - \frac{1}{2} \times 3000 \times (1.3)^2 = 7605 \text{ J} \end{aligned}$$

$$W = \frac{\Delta E_k}{2} = 3802.5 \text{ J}$$

4. 质量为 M 的均匀空心圆柱，其内外半径为 R_1 和 R_2 ，求对过中心轴的转动惯量。



解:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)H}$$

外圆柱 C_2 :

$$M_2 = \rho V_2 = \rho \pi R_2^2 H = \frac{MR_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 = \frac{1}{2} M \frac{R_2^4}{R_2^2 - R_1^2}$$

内圆柱 C_1 (挖空部分) :

$$M_1 = \rho V_1 = \rho \pi R_1^2 H = \frac{MR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 = \frac{1}{2} M \frac{R_1^4}{R_2^2 - R_1^2}$$

空心圆柱转动惯量:

$$I = I_2 - I_1 = \frac{1}{2} M \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$