



# 普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室  
Email: [pengpeng@shanghaitech.edu.cn](mailto:pengpeng@shanghaitech.edu.cn)

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、  
强场激光物理、飞秒激光成丝。

<https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm>





# 周期运动 -- 简谐振动和阻尼





# 周期运动

对一个体系的描述：

$$\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots\}$$

$$Q_i = Q_i(t + \Delta t)$$

$\Delta t$  有限大，而且对所有参数适用

对一个质点的描述：

$$\{r, v, a, E\}$$

$$r = r(t + \Delta t)$$

$\Delta t$  有限大，而且对所有参数适用

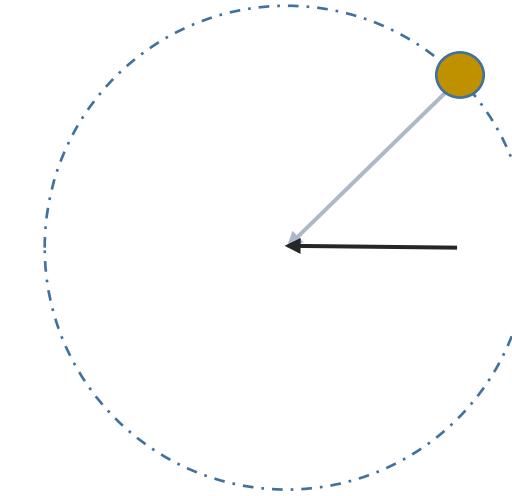
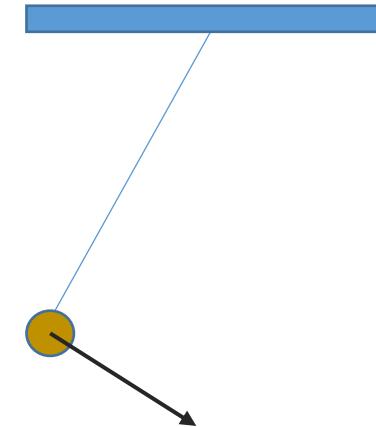
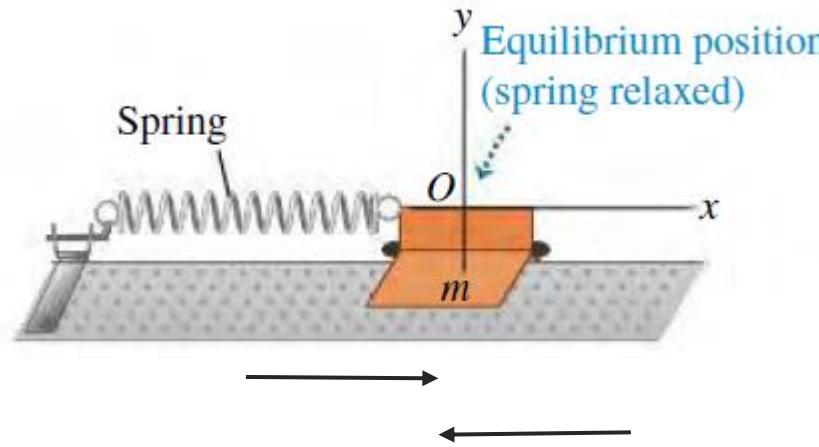
$$r = r(t + \Delta t) \rightarrow r = r(t + 2 * \Delta t) \rightarrow r = r(t + n * \Delta t)$$



周期 T:  $\Delta t$  -- 秒 s  
频率 f:  $1/\Delta t$  -- 赫兹 Hz = cycle/s  
角频率:  $2\pi f$  -- rad/s



# 周期运动



简谐运动：受一个指向平衡位置的，与偏移平衡位置的“距离”大小成正比的力。



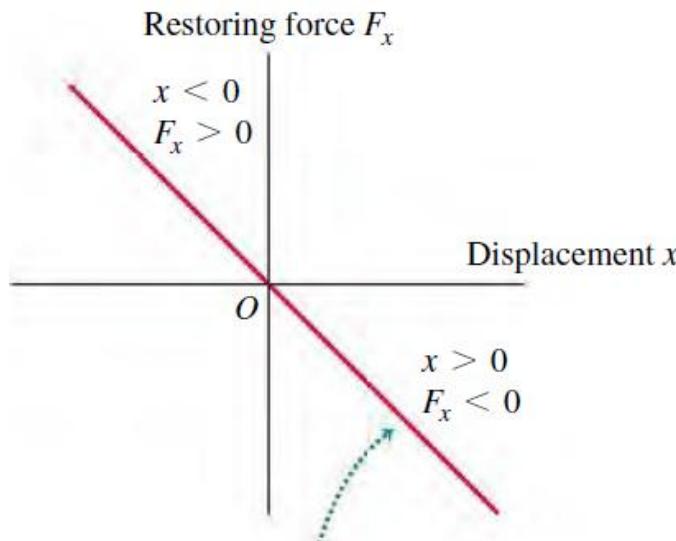


# 简谐运动

Restoring force  
exerted by an ideal spring

$$F_x = -kx$$

*x*-component of force  
Displacement  
Force constant of spring



The restoring force exerted by an idealized spring is directly proportional to the displacement (Hooke's law,  $F_x = -kx$ ):  
the graph of  $F_x$  versus  $x$  is a straight line.

Equation for simple harmonic motion

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

*x*-component of acceleration  
Second derivative of displacement  
Force constant of restoring force  
Displacement  
Mass of object



# 简谐运动的解

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -k x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

令:  $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$x = A \cos(\omega t + \varphi)$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A \cos(\omega t + \varphi + \omega \frac{2\pi}{\omega})$$

周期 T:  $\Delta t \quad -- \quad \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

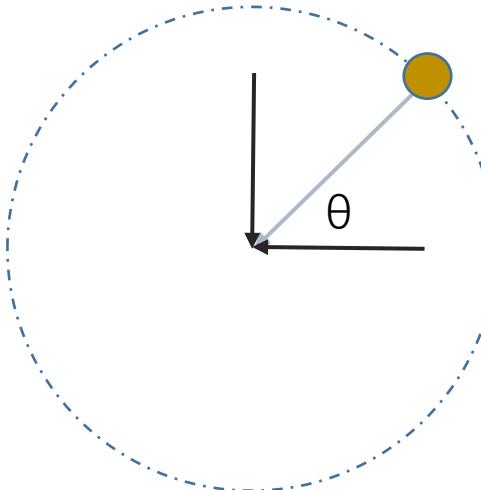
频率 f:  $1/\Delta t \quad -- \quad \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

角频率:  $2\pi f \quad -- \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

注意: 周期、频率和A无关!



# 匀速圆周运动-分解



$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos(\theta) = r \cos(\omega t) \\ y = r \sin(\theta) = r \sin(\omega t - \pi/2) \end{array} \right.$$

$$a_x = -r\omega^2 \cos(\theta) = -\omega^2 x$$

$$v = \omega r$$

$$a_y = -r\omega^2 \sin(\theta) = -\omega^2 y$$

$$a_t = r\beta$$

$$a_n = \omega^2 r = \omega v$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

$$\vec{a} = -\vec{r}\omega^2$$

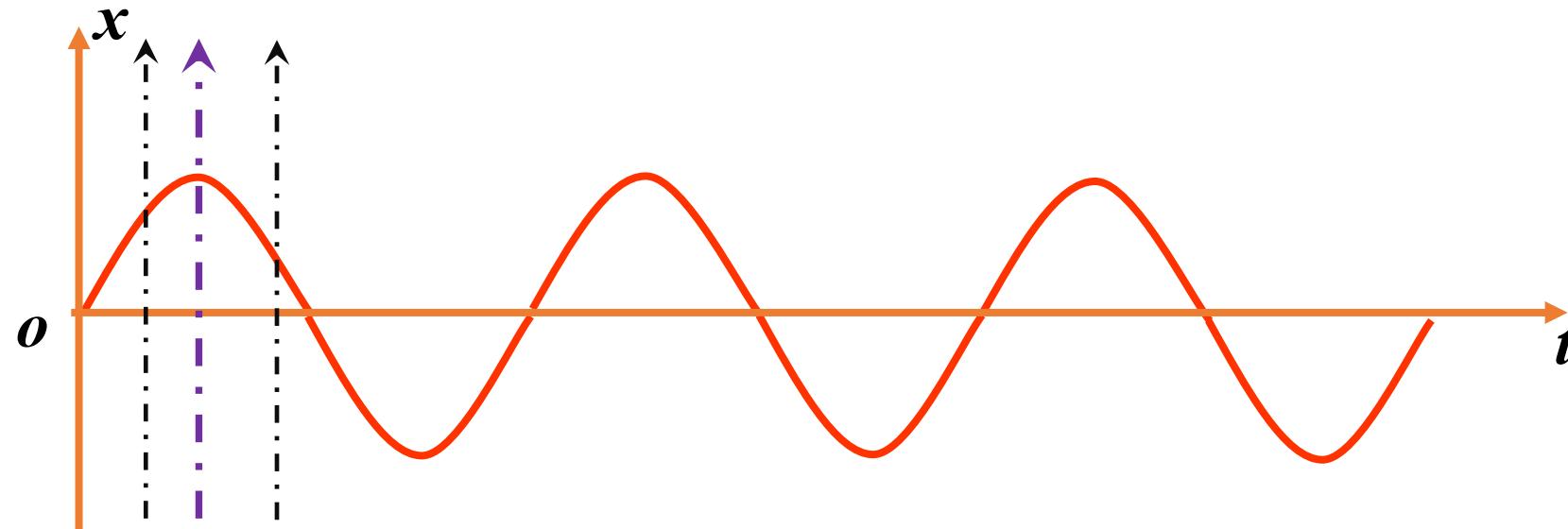
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \longrightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{m}\vec{r}$$



# 简谐运动的解 – 振动的相位 phase

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\theta)$$

$\theta = \omega t + \varphi$  t时刻, 振动的相或相位



# 简谐运动的解 – 振动的振幅

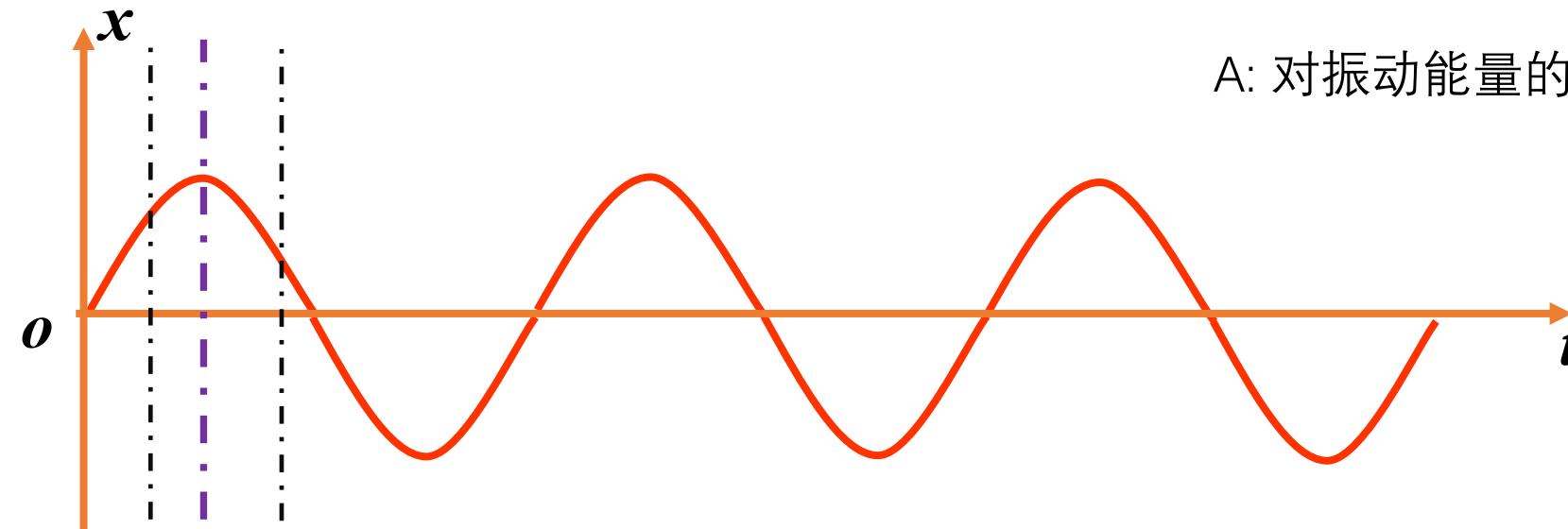
$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -k x$$

$$X = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$X_{\max} = A$  对应  $v = 0$

能量守恒  $\rightarrow X_{\max}$  的势能 = 总机械能

A: 对振动能量的**标度**



# 简谐振动的动力学模型

二阶线性常微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

• 通解的几种形式：

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$
 A振幅,  $\omega$ 角频率,  $\phi$ 初相位。其中A,  $\phi$ 为待定常数

$$x = A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)$$
 A', B'振幅,  $\omega$ 角频率。其中A', B'为待定常数

$$x = \operatorname{Re}(A'' e^{i\omega t} + B'' e^{-i\omega t})$$
 A'', B''振幅,  $\omega$ 角频率。其中A'', B''为待定复常数

这几种通解形式彼此等价，但是有不同的物理含义和用途。





# 振动状态和振动能量

位置:  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

振动速度:  $v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$

$$= v_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ 其中: } v_m = \omega A \text{ 称为“速度振幅”}$$

振动加速度:  $a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$

$$= a_m \cos(\omega t + \varphi \pm \pi)$$

其中:  $a_m = \omega^2 A$  称为“加速度振幅”





# 振动状态和振动能量

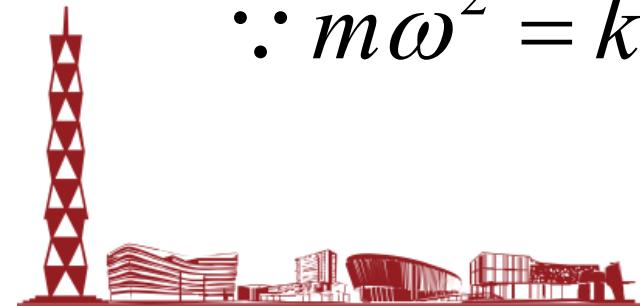
振子动能:  $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

振子势能:  $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

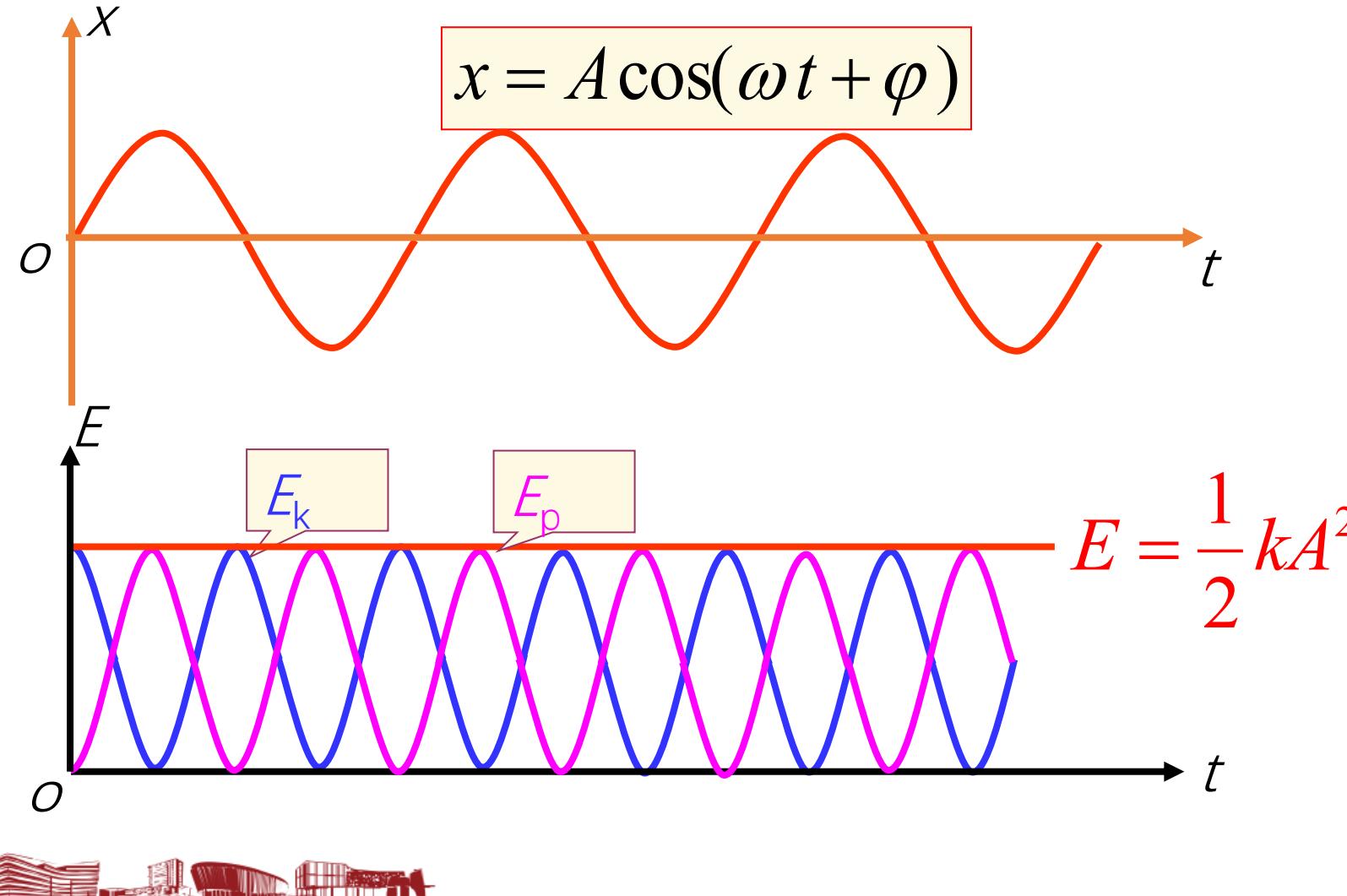
总能量:  $E = E_k + E_p$

$$\because m\omega^2 = k$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$$



# 振动状态和振动能量



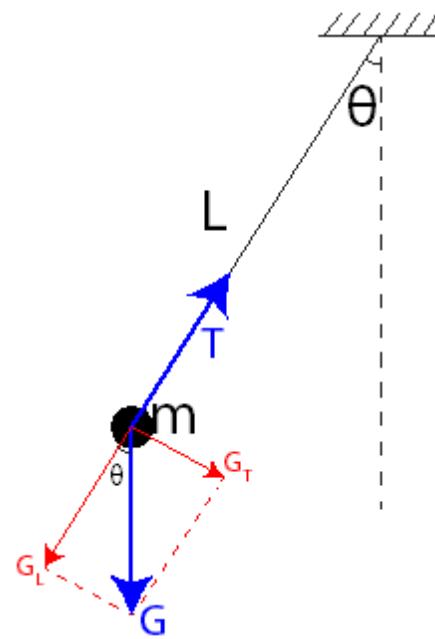
➤ 振子在振动过程中，动能和势能分别随时间变化，但任一时刻总机械能保持不变。

$$v_x = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - x^2}$$

➤ 动能和势能的变化频率是弹簧振子振动频率的两倍。

➤ 谐振动的总能量与振幅的平方成正比。（适合于任何谐振系统）

# 单摆与微振动近似



受力分析:

$$\text{切向合力为 } G_T = mg \sin \theta$$

$$\text{法向合力为 } T - G_L = T - mg \cos \theta$$

运动学分析:

切向加速度为  $L\ddot{\theta}$ , 法向加速度为  $L\dot{\theta}^2$

$$v = \omega r$$

$$a_t = r\beta$$

$$a_n = \omega^2 r = \omega v$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n$$

切向  $F = ma$

$$\text{因此 } g \sin \theta = -L\ddot{\theta} \quad \text{令 } \frac{g}{L} = \omega^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin \theta$$

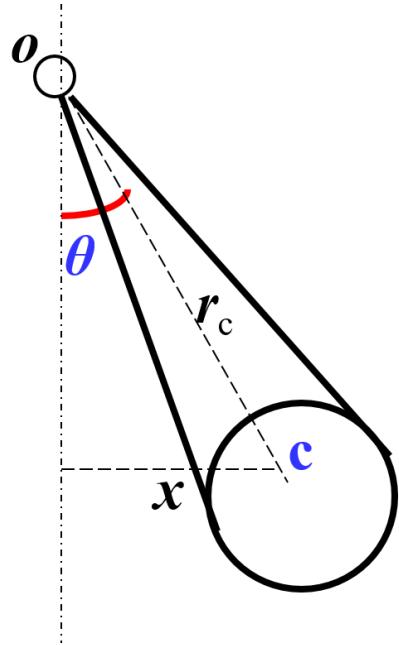
当振动很小的时候 (角度很小)

$$\text{由: } \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

由于  $\theta$  很小, 略去  $\theta^3$  以上各项, 则  $\sin \theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta \quad \text{这与弹簧振子的动力学方程形式相同}$$

# 刚体摆动与微振动近似



如图所示，一刚体绕过 $o$ 的垂直于纸面的轴转动，满足转动定律：

$$-mg r_c \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$M = J\beta$  (刚体定轴转动定律)

作用在刚体上的合外力矩等于刚体对转轴的转动惯量与所获得的角加速度的乘积。

令:  $\omega^2 = \frac{mgr_c}{I}$  得:  $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0$

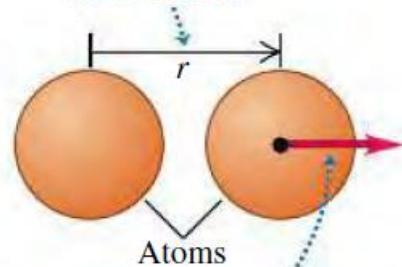
微振动近似后  $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta$

与弹簧振子的动力学方程形式相同  
说明了简谐运动的普遍性

# 分子振动

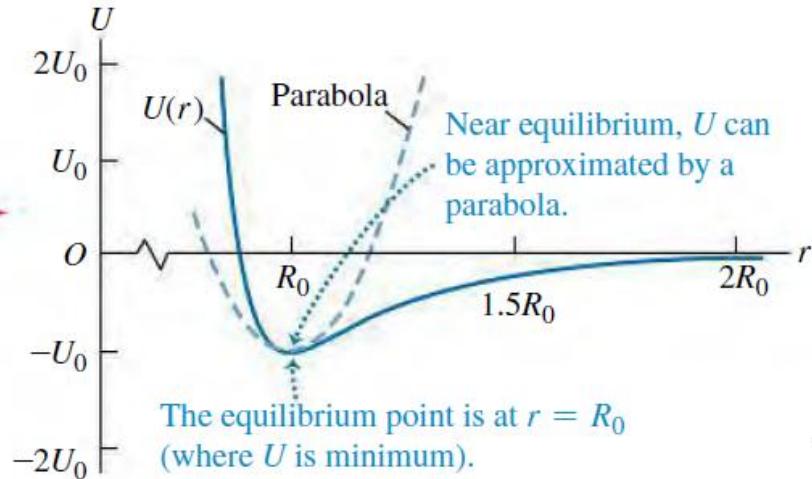
(a) Two-atom system

Distance between atom centers



$F_r$  = the force exerted by the left-hand atom on the right-hand atom

(b) Potential energy  $U$  of the two-atom system as a function of  $r$



$$U = U_0 \left[ \left( \frac{R_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{R_0}{r} \right)^6 \right]$$

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0 \left[ \frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2 \frac{6R_0^6}{r^7} \right] = 12 \frac{U_0}{R_0} \left[ \left( \frac{R_0}{r} \right)^{13} - \left( \frac{R_0}{r} \right)^7 \right]$$

小量偏移:  $x = r - R_0$

$$F_r = 12 \frac{U_0}{R_0} \left[ \left( \frac{R_0}{R_0 + x} \right)^{13} - \left( \frac{R_0}{R_0 + x} \right)^7 \right]$$

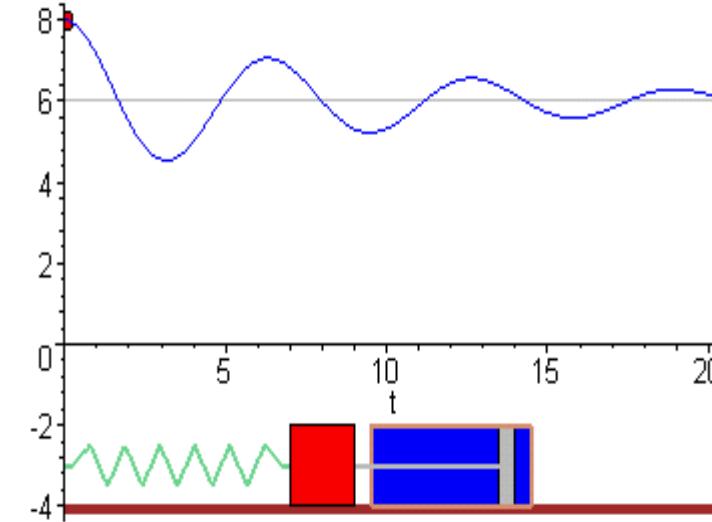
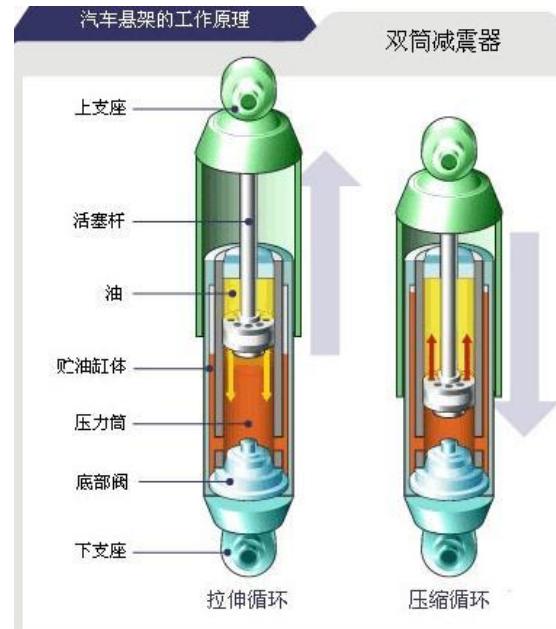
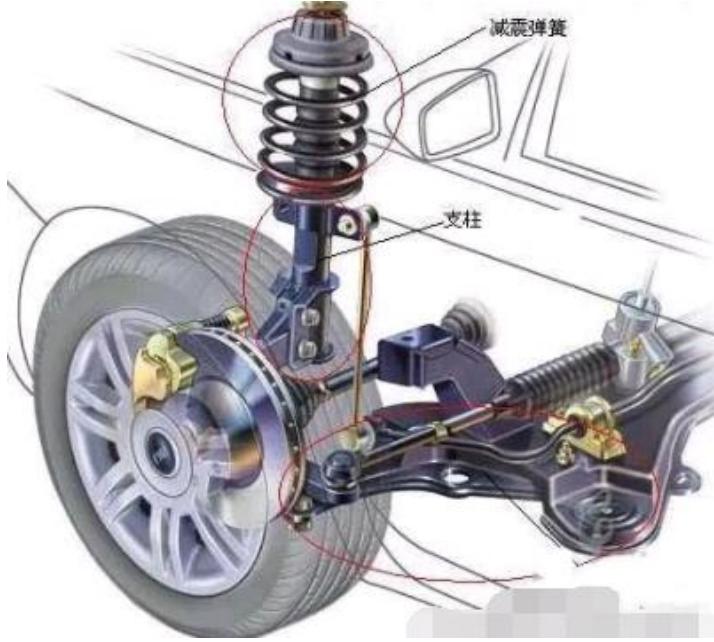
$$= 12 \frac{U_0}{R_0} \left[ \frac{1}{(1 + x/R_0)^{13}} - \frac{1}{(1 + x/R_0)^7} \right]$$

$$F_r \approx 12 \frac{U_0}{R_0} \left[ \left( 1 + (-13) \frac{x}{R_0} \right) - \left( 1 + (-7) \frac{x}{R_0} \right) \right] = -\left( \frac{72U_0}{R_0^2} \right)x$$

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中,  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ , 此处的  $\varepsilon$  为  $x_0$  与  $x$  之间的某个值。 $f(x)$  称为  $n$  阶泰勒公式

# 振动能量耗散--阻尼 damping





# 阻尼震动

阻尼跟速度有关

$$F = -\mathcal{N} = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{-kx}{\nearrow \text{线性回复力}} - \frac{\mathcal{N}}{\nearrow \text{阻力}} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

令:  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  ,  $2\delta = \frac{\gamma}{m}$   $\delta$  称为阻尼系数

动力学方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$



# 阻尼项的数学体现

## (速度)如何衰减?

例：考虑以  $v_0$  运动的物体在只有粘滞阻力作用时的运动情况

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \quad \text{即} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} = 0$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = -2\delta v \quad \frac{dv}{v} = -2\delta dt$$

两边同时积分得：  $\ln v - \ln v_0 = -2\delta t \Rightarrow v = v_0 e^{-2\delta \cdot t}$

再次积分得  $x = \frac{v_0}{2\delta} + x_0 - \frac{v_0}{2\delta} e^{-2\delta t}$

速度，位移呈指数衰减  $e^{-2\delta \cdot t}$





# 阻尼振动的动力学方程

物体大致的运动情况：

只有弹性力       $\Rightarrow$  简谐振动      描述振动： $e^{i\omega t}$  或  $e^{-i\omega t}$   
加粘滞阻力后     $\Rightarrow$  振幅逐渐变小，即有指数衰减  $e^{-2\delta \cdot t}$

对动力学方程： 
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

考虑引入试探解  $e^{\gamma t}$  其中  $\gamma$  为复数

代入方程后得到

$$(\gamma^2 + 2\delta\gamma + \omega_0^2)e^{\gamma t} = 0 \Rightarrow \gamma^2 + 2\delta\gamma + \omega_0^2 = 0$$



# 阻尼振动的动力学方程的解 1

我们讨论**特征方程**  $\gamma^2 + 2\delta\gamma + \omega_0^2 = 0$  解的情况

$\delta$  称为阻尼系数

$$\gamma^2 + 2\delta\gamma + \delta^2 = \delta^2 - \omega_0^2 \quad \text{讨论判别式} \Delta = \delta^2 - \omega_0^2 \text{的正负性}$$

1)  $\Delta > 0$ , 即  $\delta > \omega_0$  (**过阻尼**)

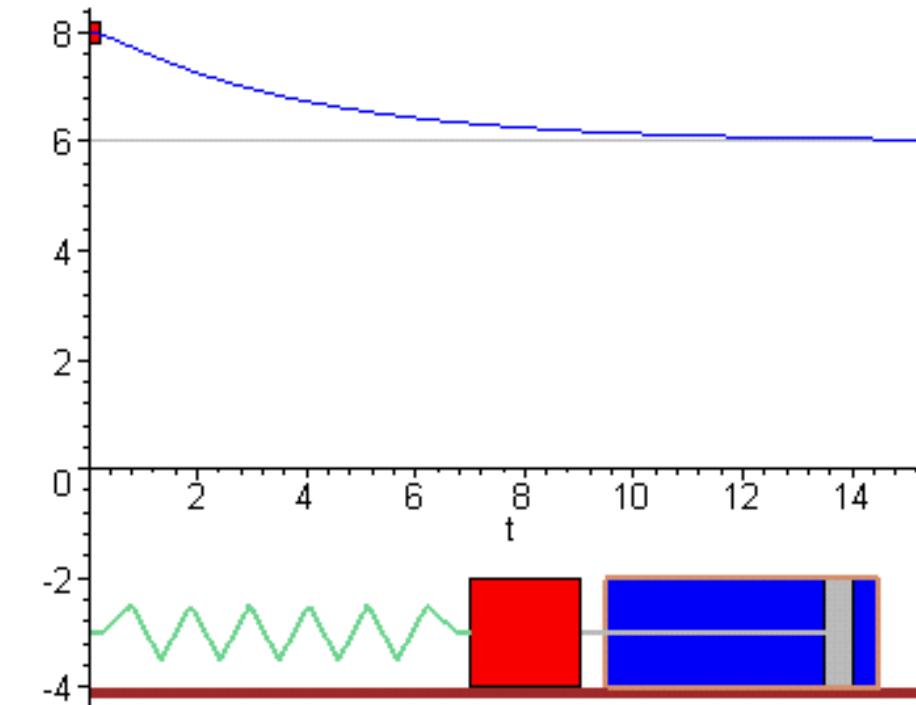
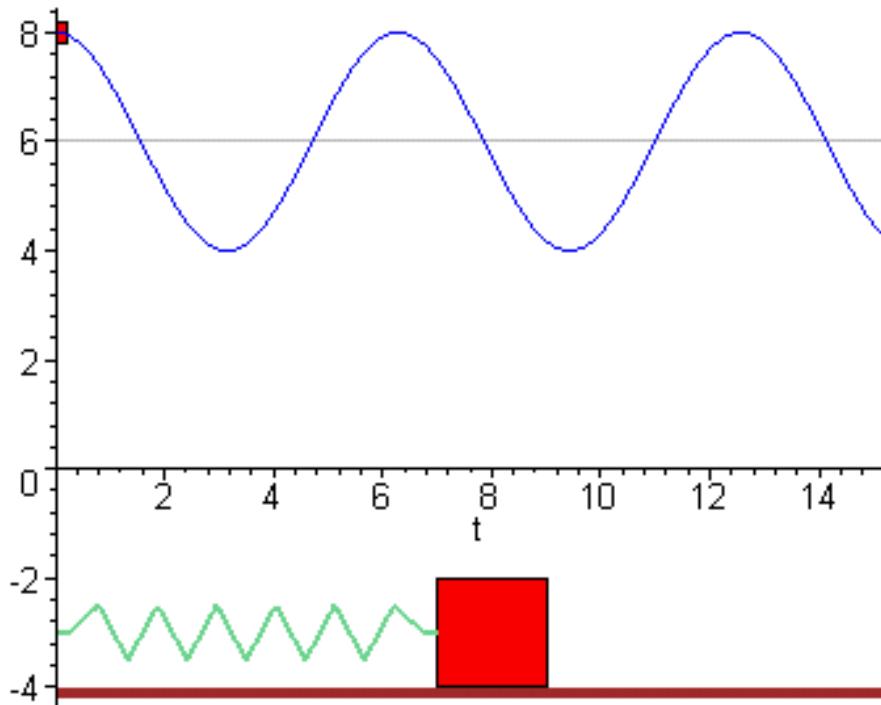
特征方程的两个实数根分别为  $r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ ,  $r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

方程通解为

$$Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\delta t} (Ae^{t\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} + Be^{-t\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}})$$

阻尼较大时  $\delta > \omega_0$ , 质点缓慢回到平衡位置,  
不作往复运动。

# 过阻尼振动





# 阻尼振动的动力学方程的解 2

2)  $\Delta=0$ , 即  $\delta=\omega_0$  (**临界阻尼**)

特征方程只有一个实数根分别为  $r_1 = r_2 = -\delta$

因此找到一个解为  $e^{-\delta t}$ , 猜测另一个独立的解为  $te^{-\delta t}$ , 代入验算后成立。

方程通解为  $Ae^{-\delta t} + Bte^{-\delta t} = e^{-\delta t}(A + Bt)$

当 ( $\delta = \omega_0$ ) 时, 为“临界阻尼”情况, 是质点不作往复运动的一个极限

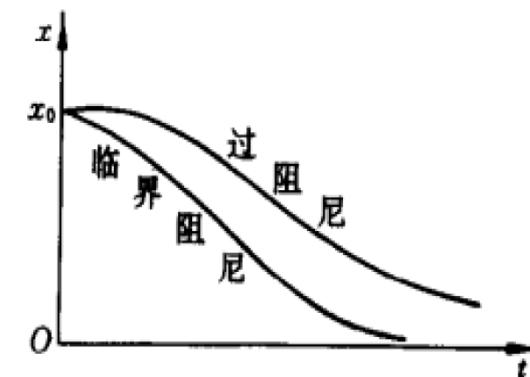
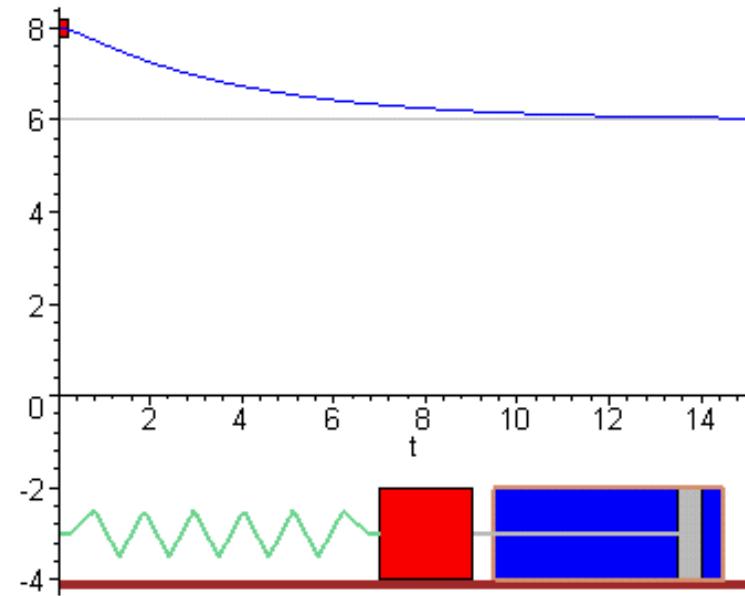
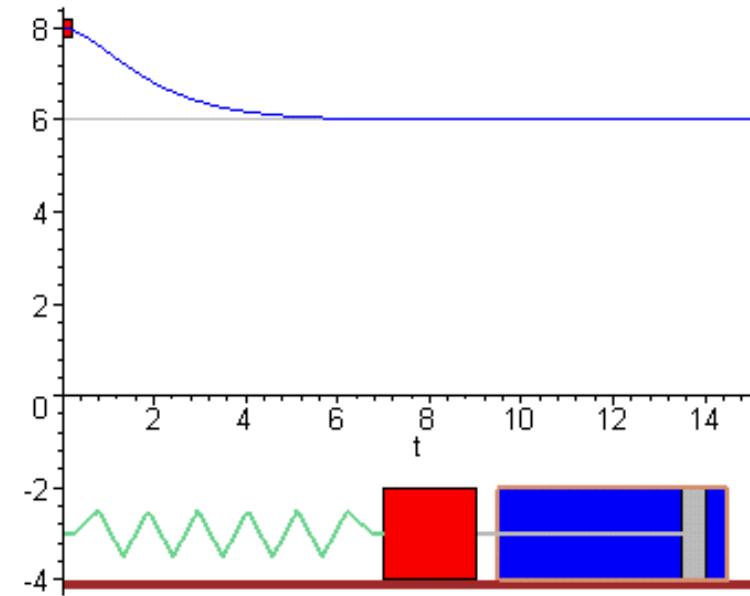


图 7-44 临界阻尼

# 临界阻尼振动



过阻尼



临界阻尼



# 阻尼振动的动力学方程的解

3)  $\Delta < 0$ , 即  $\delta < \omega_0$  (低阻尼)

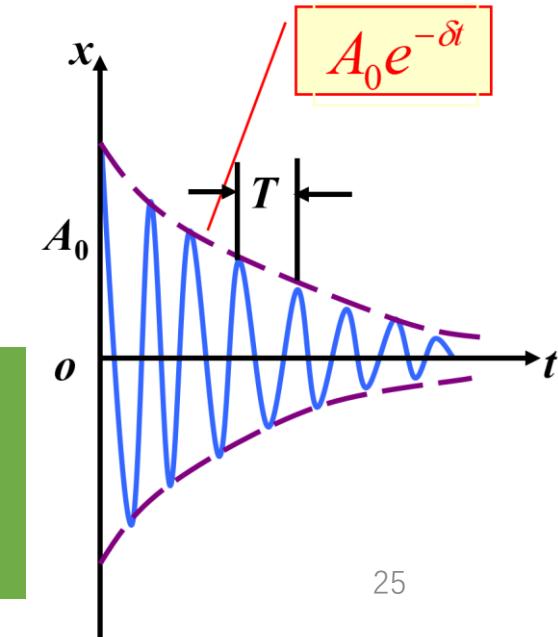
特征方程的两个复数根分别为  $r_1 = -\delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ,  $r_2 = -\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

方程通解为  $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\delta t}(Ae^{it\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} + Be^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}})$  (A,B为复数, 有物理意义的是解的实数部分)

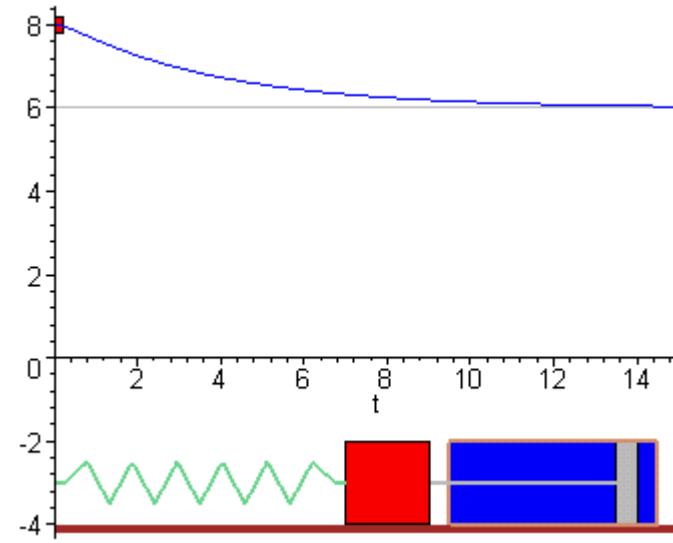
将其组合出我们熟悉的 $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$ 的形式, 我们得到方程的另一个形式通解为

$$A'e^{r_1 t} + B'e^{r_2 t} = e^{-\delta t}(A' \cos(t\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}) + B' \sin(t\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}))$$

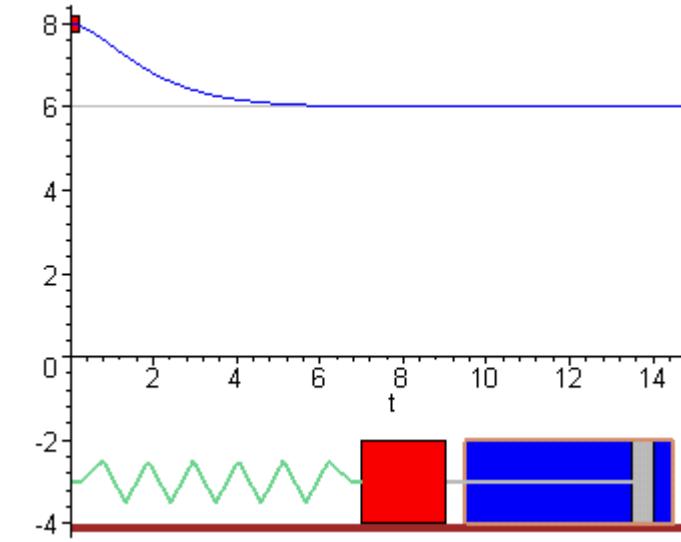
阻尼较小时 ( $\delta < \omega_0$ ), 振动为减幅振动, 振幅  $Ae^{-\delta t}$  随时间按指数规律迅速减少。阻尼越大, 减幅越迅速。振动周期大于自由振动周期。



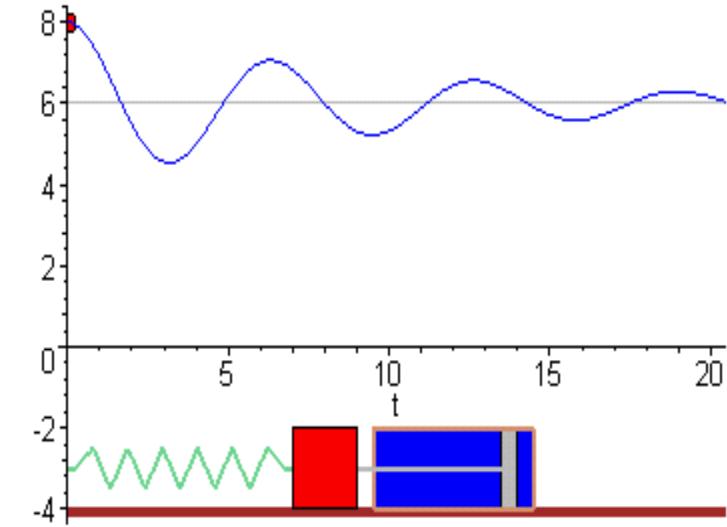
# 欠阻尼振动



过阻尼



临界阻尼



欠阻尼



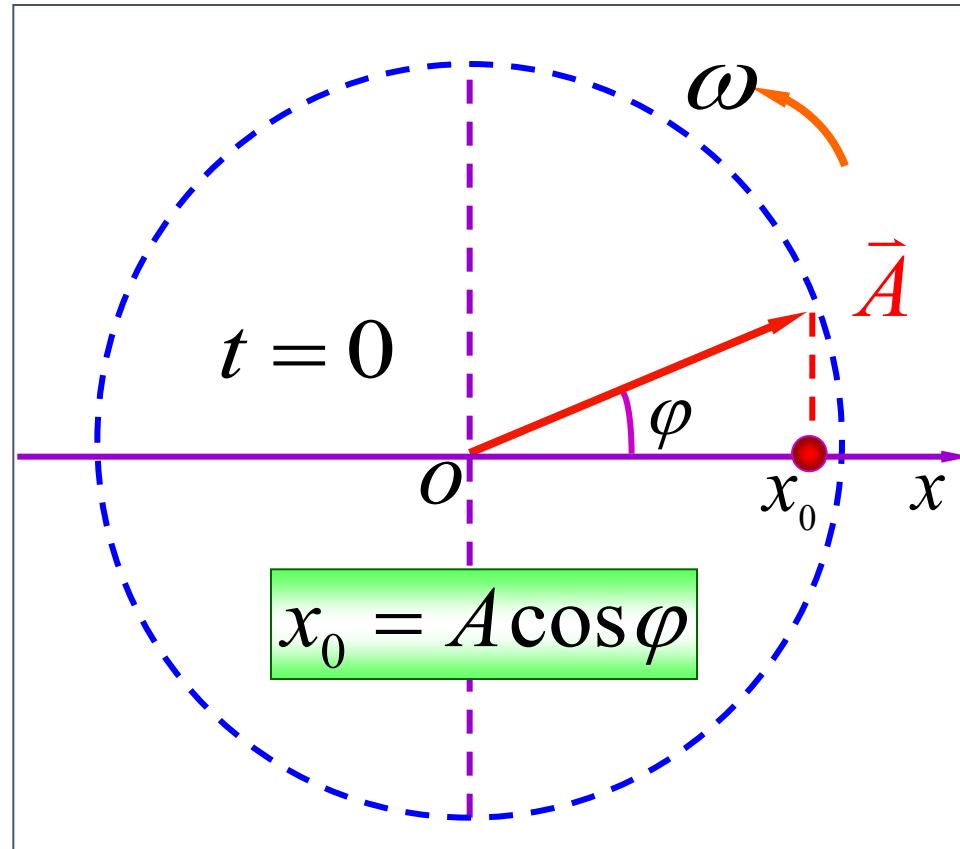


例如图所示，一质点作简谐振动，在一个周期内相继通过距离为12cm的两点A和B，历时2s，并且在A, B两点处具有相同的速率；再经过2s后，质点又从另一方向通过B点。

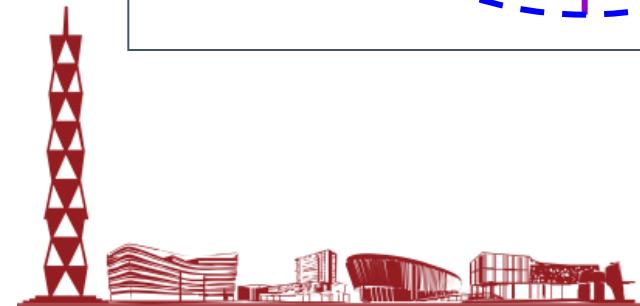
求 质点运动的周期和振幅。



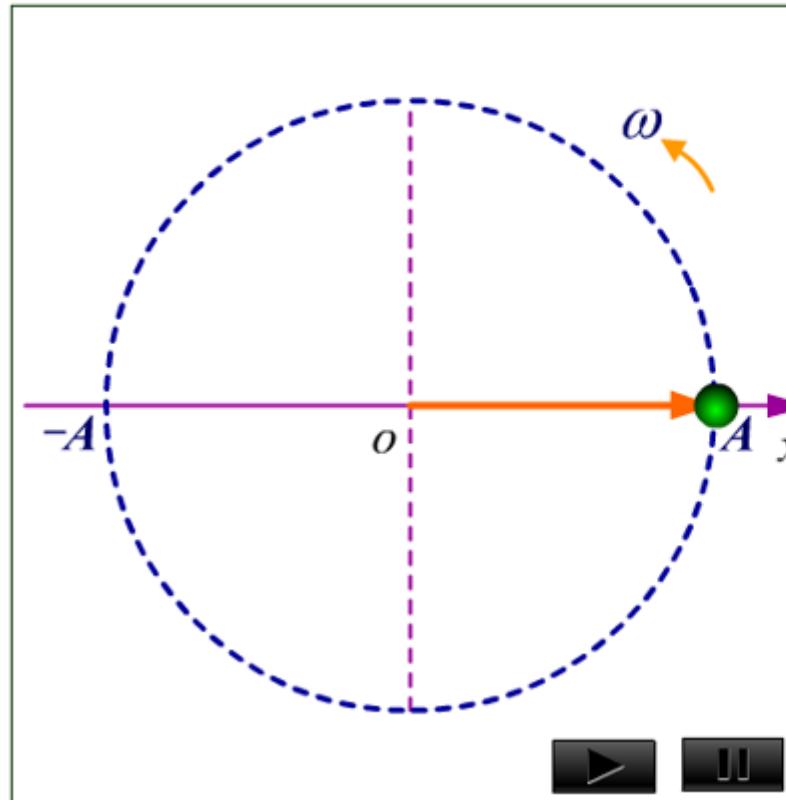
# 旋转矢量



自  $Ox$  轴的原点  $O$  作一矢量  $\vec{A}$ ，使它的模等于振动的振幅  $A$ ，并使矢量  $\vec{A}$  在  $Oxy$  平面内绕点  $O$  作逆时针方向的匀角速转动，其角速度  $\omega$  与振动频率相等，这个矢量就叫做旋转矢量。

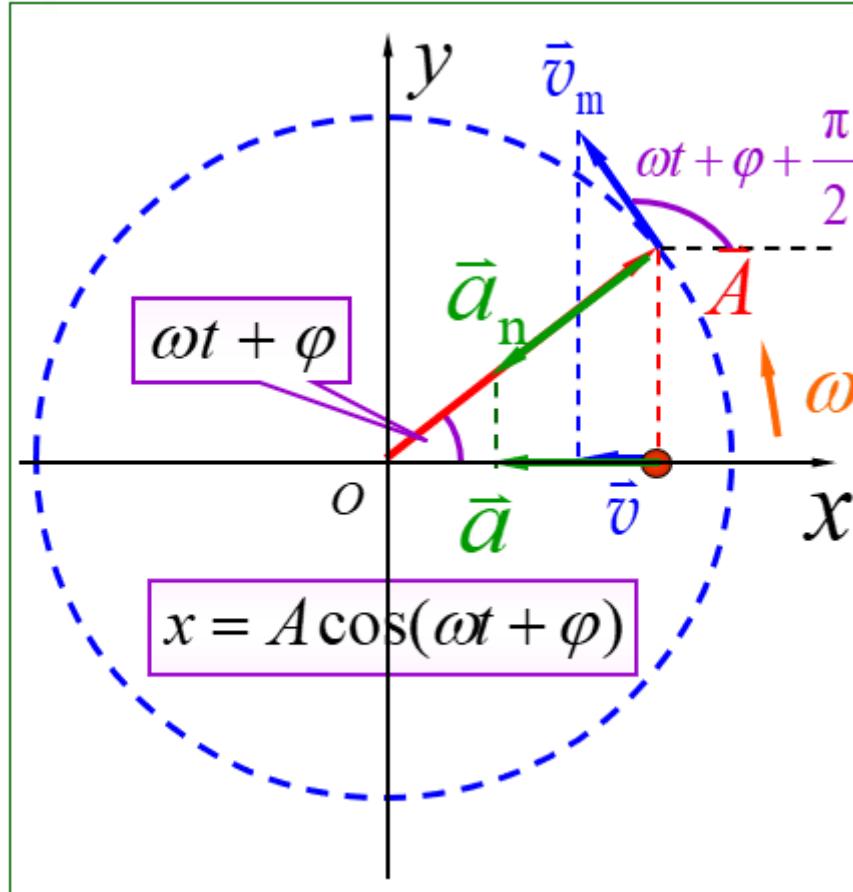


$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$



以  $o$  为原点旋转矢量  $\vec{A}$  的端点在  $x$  轴上的投影点的运动为简谐运动。





$$v = -A\omega \sin(\omega t + \phi) = -A\omega \cos(\omega t + \phi - \pi/2)$$

$$v_m = A\omega$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$a_n = A\omega^2$$



例1. 一物体沿  $x$  轴作简谐振动,  $A = 12\text{cm}$ ,  $T = 2\text{s}$

当  $t = 0$  时,  $x_0 = 6\text{cm}$ , 且向  $x$  正方向运动。

求 (1) 初位相  $\varphi$ 。

(2)  $t = 0.5\text{s}$  时, 物体的位置、速度、加速度。





例1. 一物体沿  $x$  轴作简谐振动,  $A = 12\text{cm}$ ,  $T = 2\text{s}$

当  $t = 0$  时,  $x_0 = 6\text{cm}$ , 且向  $x$  正方向运动。

求 (3) 在  $x = -6\text{cm}$  处且向  $x$  负方向运动时, 物体的速度、加速度以及从这一位置回到平衡位置需的时间。





例1. 一物体沿  $x$  轴作简谐振动， $A = 12\text{cm}$ ,  $T = 2\text{s}$

当  $t = 0$  时,  $x_0 = 6\text{cm}$ , 且向  $x$  正方向运动。

求 (4) 从初始时刻开始, 第二次通过平衡位置的时刻  $t$ 。





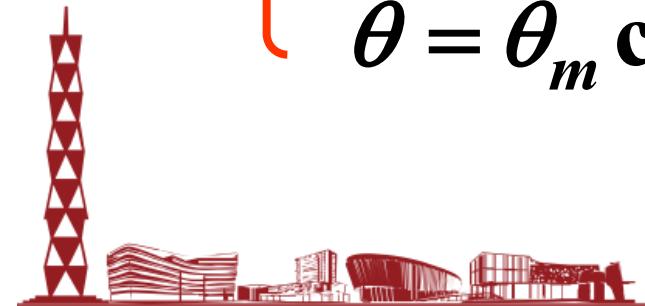
## ★ 谐振动的判据

### 线谐振动

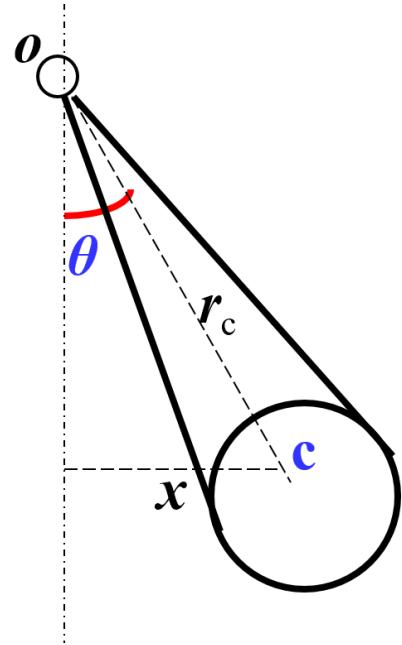
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F} = -kx \quad a = -\omega^2 x \\ x = A \cos(\omega t + \varphi) \end{array} \right. \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

### 角谐振动

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M = -k\theta \quad \beta = -\omega^2 \theta \\ \theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \end{array} \right. \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$



# 刚体摆动与微振动近似



如图所示，一刚体绕过 $o$ 的垂直于纸面的轴转动，满足转动定律：

$$-mg r_c \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$M = J\beta$  (刚体定轴转动定律)

作用在刚体上的合外力矩等于刚体对转轴的转动惯量与所获得的角加速度的乘积。

令:  $\omega^2 = \frac{mgr_c}{I}$  得:  $\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0$

微振动近似后  $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta$

与弹簧振子的动力学方程形式相同  
说明了简谐运动的普遍性





## 振幅和初相位的确定

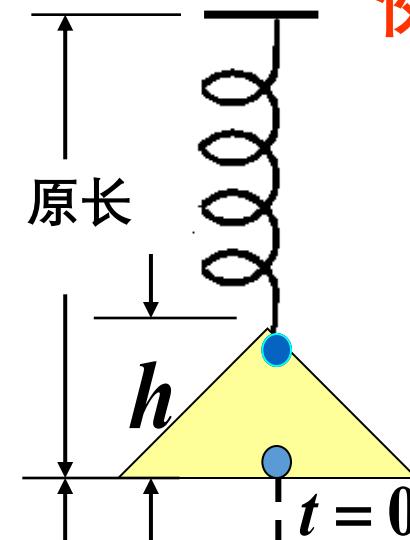
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow x_0 = A \cos \varphi$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow v_0 = -\omega A \sin \varphi$$

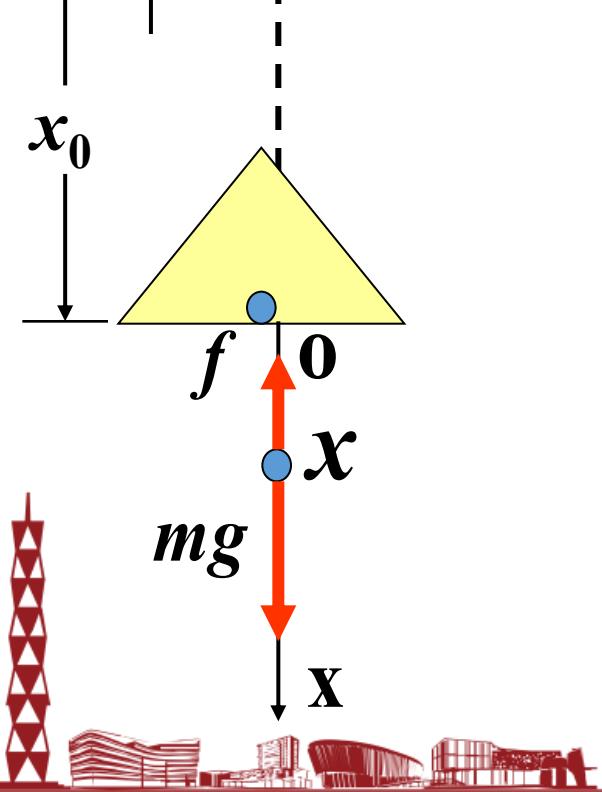
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$





例2. 将天平盘子挂在一个倔强系数为  $k$  的弹簧下端, 有一质量为  $m$  的物体, 从离盘高为  $h$  处自由下落至盘中后不再跳离盘子, 因此盘子和物体一起开始运动(盘和弹簧的质量忽略), 问(1)是否为谐振动?



(2) 求振动时的周期  $T$  振幅  $A$  位相  $\varphi$  及振动方程。

**例3.** 两轮的轴互相平行, 相距  $2d$ , 两轮转速相同而方向相反, 将质量为  $m$  的一根匀质杆搁在两轮上, 杆与轮的摩擦系数为  $\mu$ , 若杆子的质心  $C$  起初距一轮较近 (如图)。

**证明:** 杆作谐振动并求周期。

