普通物理I PHYS1181.03

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室

Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

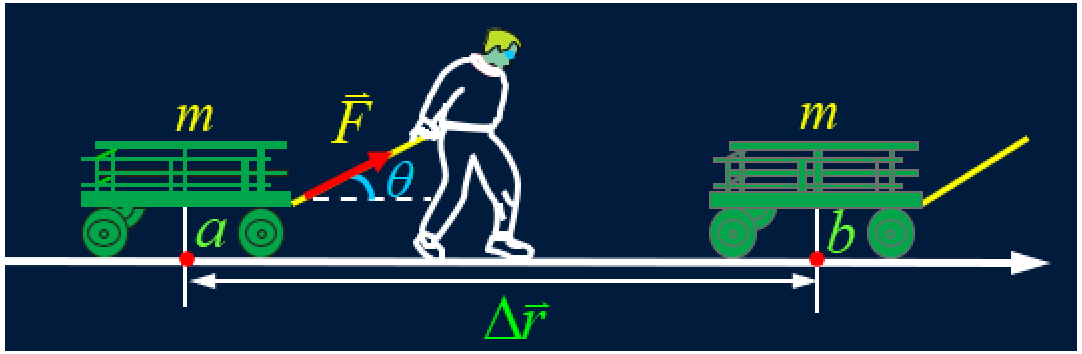
研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、强场激光物理、飞秒激光成丝。

https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm

1. 恒力的功

恒力 $\vec{F}$，夹角θ

位移 $\Delta\vec{r}$，路程Δs



$$A = (F\cos\theta)\Delta s \quad = F|\Delta\vec{r}|\cos\theta$$

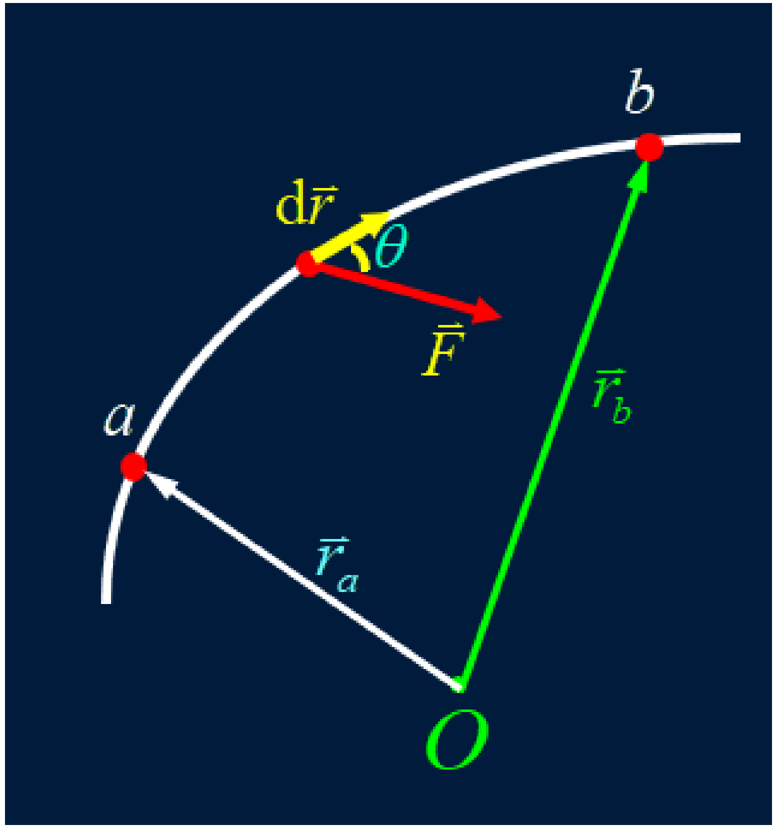
$$A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

- 功是标量
- 功有正功、负功之分，功的正负功取决于θ。
- 力对物体作负功，也可以说物体反抗外力作功。

2. 变力的功

取元位移 $d\vec{r}$， 在 $d\vec{r}$ 范围内， 作用力 $\vec{F}$ 可认为是恒力
在任一元位移 $d\vec{r}$上， 力 $\vec{F}$ 所作的元功

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad = F|d\vec{r}|\cos\theta$$



元功等于力与元位移的标积

或 $$dA = F\cos\theta ds$$

由a点移动到b点， 总功

$$A = \int_a^b dA = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F\cos\theta ds$$

功是过程量， 是力的一种空间累积效应

➢ 讨论

(1) 在直角坐标系中

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b (F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)$$

(2) 合力$\vec{F}$ 的功 —— 等于各分力沿同一路径所作功的代数和

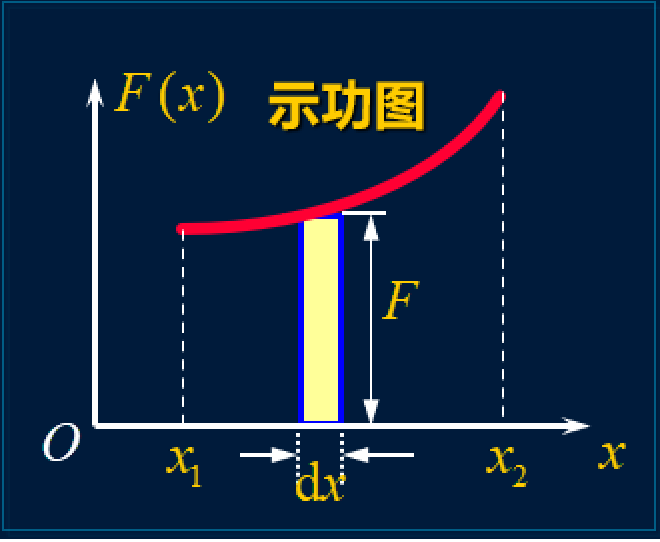
$$A=\int_{r_a}^{r_b}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b (\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_a^b \vec{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_a^b \vec{F}_2\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\cdots+\int_a^b \vec{F}_n\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

(3) 功在数值上等于示功图曲线下的面积

$$A=\int_{x_1}^{x_2}F(x)\mathrm{d}x$$



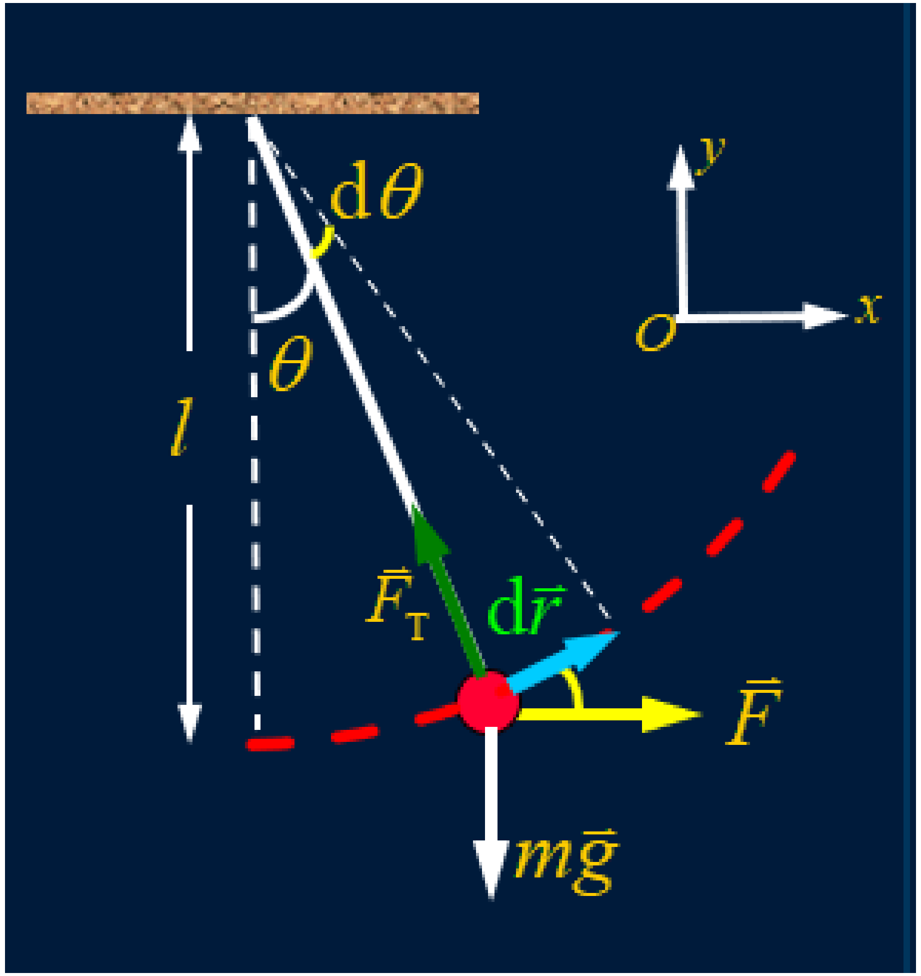
(4) 功率

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

例　有一长为l、质量为m的单摆，最初处于铅直位置且静止。现用一水平力$\vec{F}$作用于小球上，使单摆非常缓慢的上升（即上升过程中每一位置近似平衡）。用摆球与铅直位置的夹角q表示单摆的位置。

求　当θ由0增大到θ_0的过程中，此水平力$\vec{F}$所作的功？

解　摆球受力分析　　，建立坐标系如图。



列方程
$$\begin{cases} F - F_\mathrm{T}\sin\theta = 0 \\ F_\mathrm{T}\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

得
$$F = mg\tan\theta$$

元功
$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\theta = F\mathrm{d}s\cos\theta$$
$$= Fl\cos\theta\mathrm{d}\theta = mg\tan\theta l\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

总功
$$A = \int_0^{\theta_0} mgl\sin\theta\mathrm{d}\theta = mgl(1-\cos\theta_0)$$

例　设作用于质量$m=2\mathrm{kg}$的物体上的力为$F=6t$，在该力作用下物体由静止出发，沿力的作用方向作直线运动。

求　在前2s时间内，这个力所作的功。

解　列方程

$$a=\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t}=\frac{F}{m}=\frac{6t}{m}$$

分离变量，并考虑初始条件，积分

$$\int_0^{\mathrm{v}}\mathrm{dv}=\int_0^t\frac{6t}{m}\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{v}=\frac{3}{m}t^2$$

$$\mathrm{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{3}{m}t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{3}{m}t^2\mathrm{d}t$$

在前2s力所作的功为

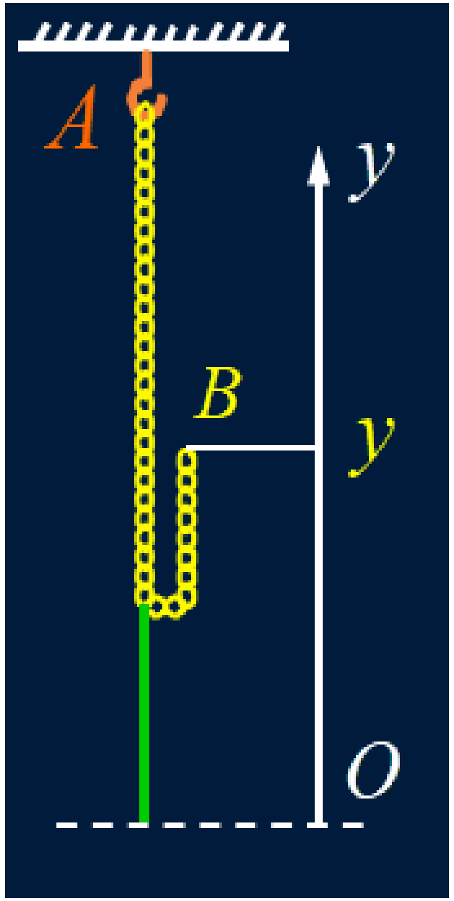
$$A=\int_0^x F\mathrm{d}x=\int_0^2 6t\frac{3}{m}t^2\mathrm{d}t=36\mathrm{J}$$

例 一条长为l、质量为m的均质柔绳AB，A端挂在天花板的钩上，自然下垂。现将B端沿铅垂方向提高到与A端同一高度处。

上海科技大学
ShanghaiTech University

求 该过程中重力所作的功。

解 取绳自然下垂时B端位置为坐标原点，铅垂向上为Oy轴正方向。



设B 端提升过程中的某一时刻坐标为y

绳提起部分所受重力为 $\frac{1}{2}y\frac{m}{l}g$

取重力元位移$\mathrm{d}y$ ，则重力在元位移上的元功为

$$\mathrm{d}A = F_y \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\frac{m}{l}gy\mathrm{d}y$$

该过程中重力所作的总功为

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^l \left(-\frac{1}{2}\frac{m}{l}gy\right)\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}mgl$$

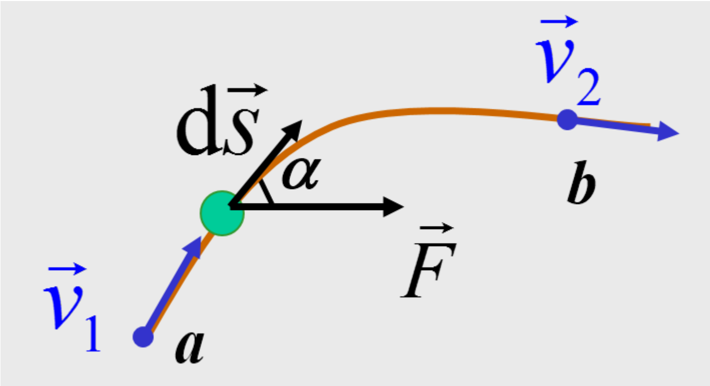
做功的效果：质点的动能定理

设质点m在力的作用下沿曲线从a点移动到b点

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}=F\cos\alpha\, ds$$

$$F\cos\alpha=ma_t=m\frac{dv}{dt}$$

$$dA=F\cos\alpha\, ds=m\frac{dv}{dt}ds=mvdv$$



总功：

$$A=\int dA=\int_{v_1}^{v_2}mvdv=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=E_{kb}-E_{ka}$$

无论走的路径是什么样的，力的作用方向、过程是什么样的，总功可以由起始+终末的状态确定！

质点的动能定理

净合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

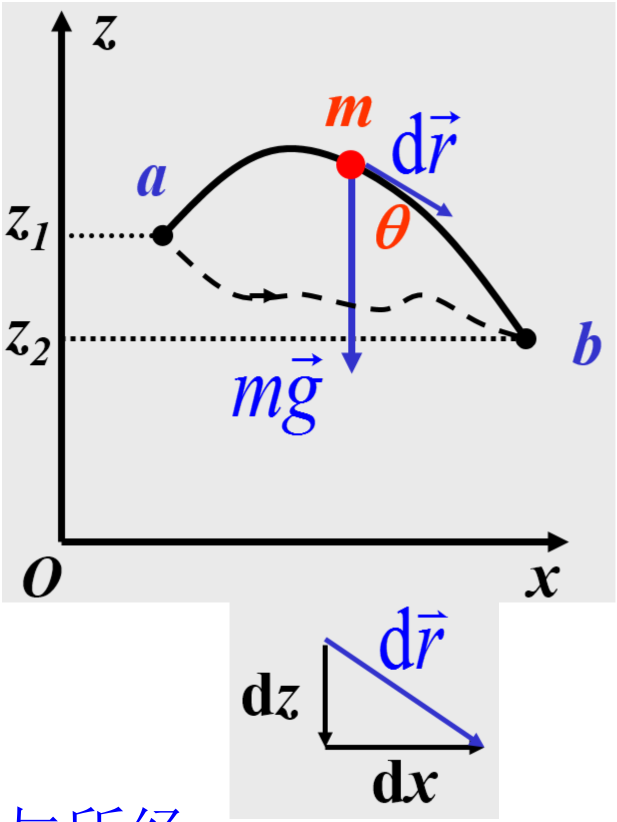
$$\boxed{A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{kb} - E_{ka}}$$

说明

1. 合外力的功是动能变化的量度。$A > 0 \rightarrow E_{kb} > E_{ka}$， $A < 0 \rightarrow E_{kb} < E_{ka}$
2. A, E_k 与参考系有关，不同惯性系里它们的大小是不一样的
3. 动能定理只在惯性系中成立。

几种常见力的做功：重力

质量为m的质点，从a点运动到b点



$$\mathrm{d}A = m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$m\vec{g} = -mg\vec{k} \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}A = -mg\vec{k}\cdot(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}z\vec{k}) = -mg\mathrm{d}z$$

$$\boxed{A = -mg\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z = mgz_1 - mgz_2}$$

➢ 重力作功只与质点的起始和终了位置有关， 而与所经过的路径无关。

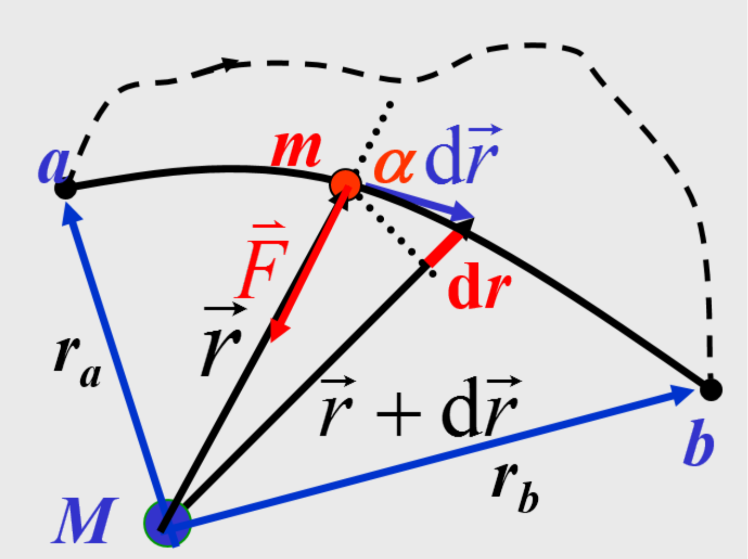
几种常见力的做功：万有引力

设质量为M的质点固定，另一质量为m的质点在M的引力场中从a点运动到b点。

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

$$A = \int_{r_a}^{r_b} -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = r|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\alpha = r\mathrm{d}r$$

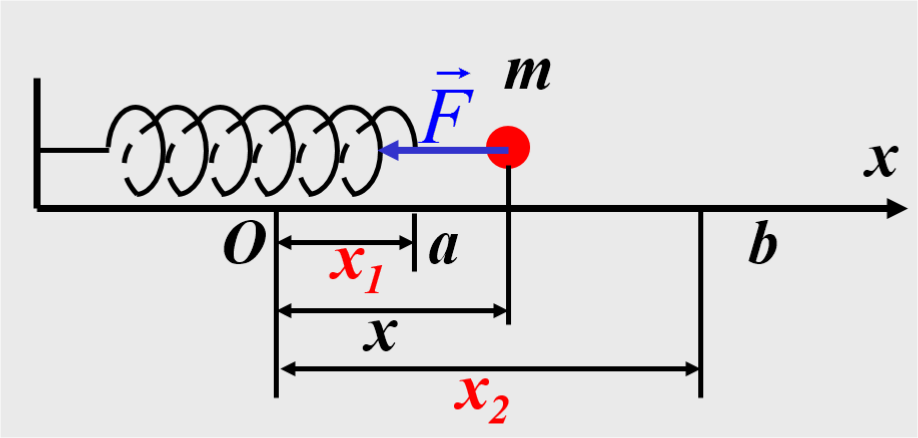


$$\boxed{A = -GMm\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -GMm\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)}$$

- 万有引力的功仅由物体的始末位置决定，而与路径无关。

几种常见力的做功：弹性力

0为平衡位置，质量为m的质点，从a点运动到b点



$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\vec{i} \cdot \mathrm{d}x\vec{i} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2}$$

- 弹性力作功只与质点的起始和终了位置有关，而与质点运动的路径无关。

几种常见力的做功：摩檫力

元功 $\mathrm{d}A = \vec{F}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

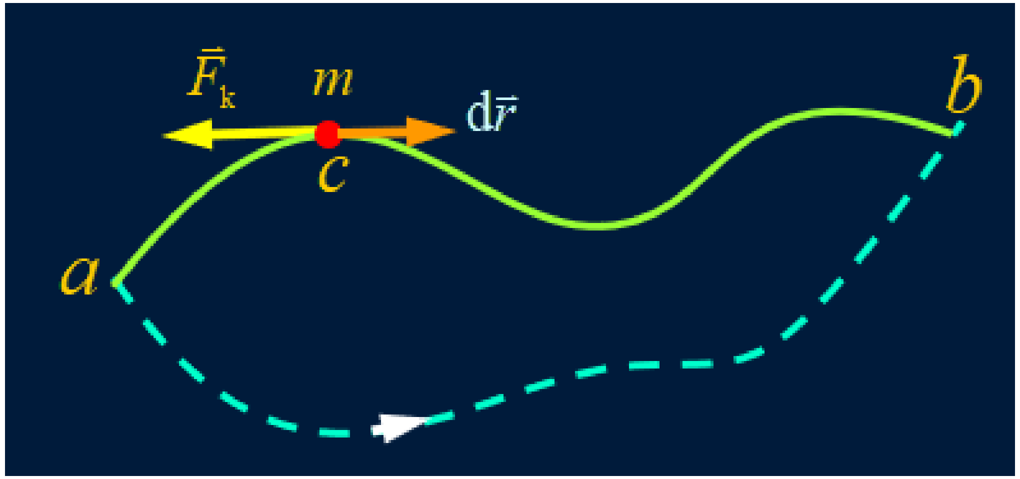
$= F_{\mathrm{k}}|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\pi \;\; = -F_{\mathrm{k}}\mathrm{d}s$

总功 $A_{ab} = \int \mathrm{d}A = -F_{\mathrm{k}} \int_a^b \mathrm{d}s$

$= -F_{\mathrm{k}} s_{ab}$ （F_{k}为常量）

- 结论：　摩擦力的功与路径有关。

重力，万有引力，弹性力做功与路径无关。



保守力与非保守力

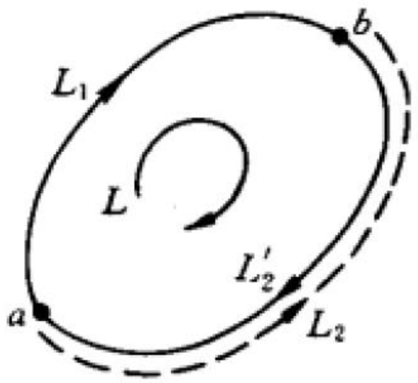
保守力：作功与路径无关，只与始末位置有关的力。

如：重力，引力，弹性力等。

$$\int_{L_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{L_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

$$\int_{L_2'} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{L_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{L_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \quad \text{或} \quad \int_{L_2'} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{L_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

$$\oint \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

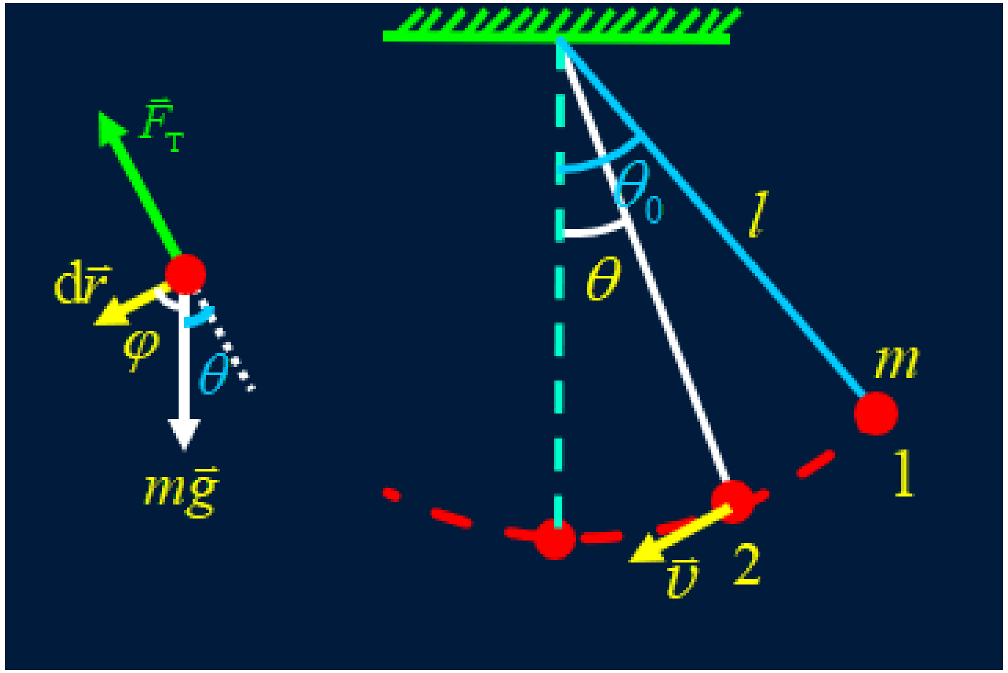


- 保守力沿任何闭合路径作功等于零。

非保守力：作功不仅与始末位置有关，还与路径有关的。比如摩擦力。

例　质量为m的小球，系在长为l的细绳下端，绳的上端固定在天花板上，构成一单摆，如图。开始时，把绳子拉到与铅垂线成θ_0角处，然后放手使小球沿圆弧下落。

求　绳与铅垂线成θ角时小球的速率。



解　受力如图，　　取元位移　$d\vec{r}$

由质点的动能定理得

$$A=\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^2(\vec{F}_T+m\vec{g})\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_1^2 \vec{F}_T\cdot d\vec{r}+\int_1^2 m\vec{g}\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

其中，张力的功　$\int_1^2 \vec{F}_T\cdot d\vec{r}=0$

重力的功　$\int_1^2 m\vec{g}\cdot d\vec{r}=\int_1^2 m\,g\cos\phi ds=\int_1^2 m\,g\sin\theta ds$

按照运动学中对角位移正负的规定，这里 $\mathrm{d}\theta$ 为负，则

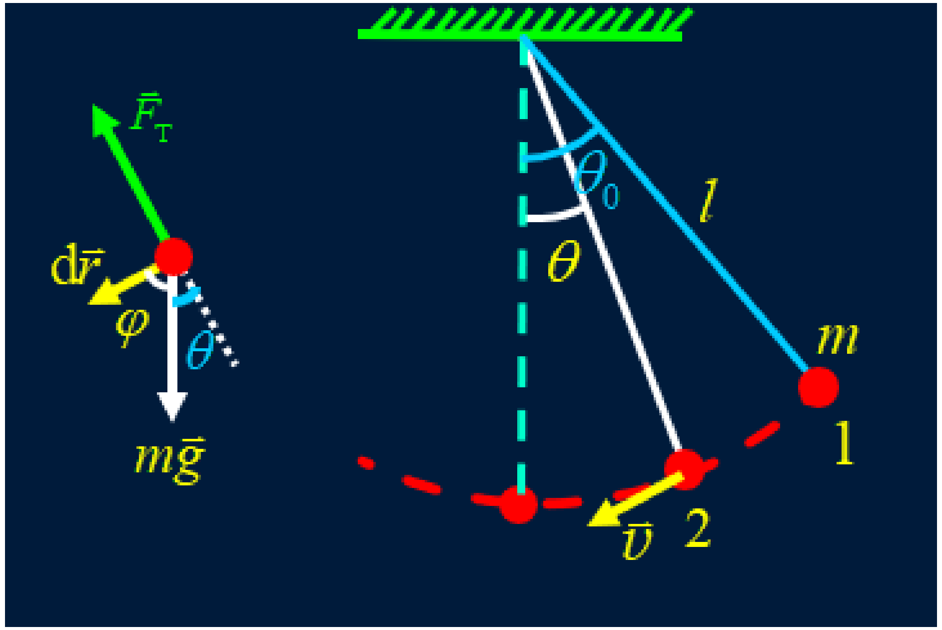
$$\mathrm{d}s = -l\mathrm{d}\theta$$

且初始条件为 $\theta = \theta_0$ $\mathrm{v}_0 = 0$

有 $$A = \int_1^2 m\,\mathrm{g}\sin\theta\mathrm{d}s = -\int_{\theta_0}^{\theta} m\,\mathrm{g}l\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$$

$$mgl(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$$

故得 $$\mathrm{v} = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$



例：质量为m的质点，系在一端固定的绳子上且在粗糙水平面上作半径为R的圆周运动。当它运动一周后，由初速v_0减小为$v_0/2$

求：（1）摩擦力所作的功；（2）滑动摩擦系数；（3）静止前质点运动了多少圈?

解：质点在运动过程中，受重力、支承力和摩擦力，但只有摩擦力作功

根据质点的动能定理，摩擦力的功

$$A=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \quad =\frac{1}{2}m(\frac{v_0}{2})^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \quad =-\frac{3}{8}mv_0^2$$

（2）因摩擦力 $F_k=\mu mg$ 方向与运动方向相反

$$A=\int_0^{2\pi R}F_k\cos\theta ds \quad =-\int_0^{2\pi R}\mu mg ds \quad =-\mu mg\cdot 2\pi R \quad =-\frac{3}{8}mv_0^2$$

可得 $$\mu=\frac{3v_0^2}{16\pi Rg}$$

(3) 设静止前质点运动了n圈

$$A_n = \int_0^{n\cdot 2\pi R} F_{\mathrm{k}}\cos\theta \mathrm{d}s = -\int_0^{n\cdot 2\pi R} \mu m g \mathrm{d}s$$

$$= -n\mu m g \cdot 2\pi R$$

由质点的动能定理有

$$A_n = -n\mu m g \cdot 2\pi R = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

可得

$$n = \frac{4}{3}$$ （圈）

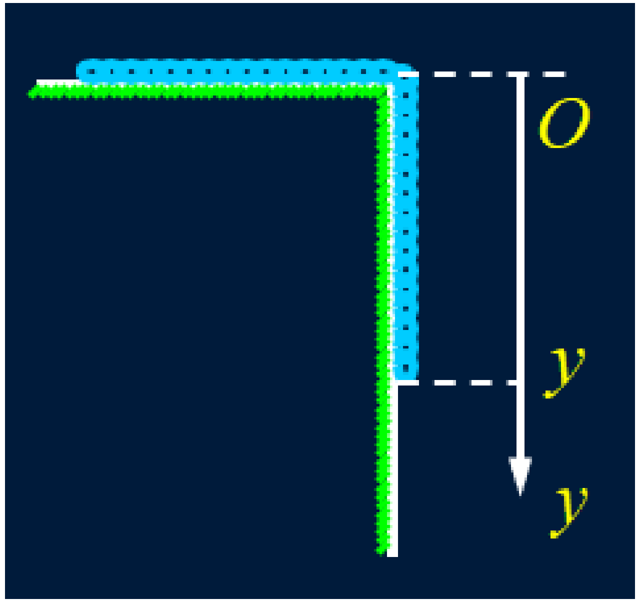
科里奥利力

例 长为l的均质绳索，部分置于水平面上，另一部分自然下垂，如图所示。已知绳索与水平面间的静摩擦系数为μ_s，滑动摩擦系数为μ_k。

求 (1) 满足什么条件时，绳索将开始滑动？

(2) 若下垂长度为b时，绳索自静止开始滑动，当绳索末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少？

解 以绳索的水平部分为研究对象，设绳索每单位长度的质量为ρ，设Oy轴向下，绳索下垂部分的端点坐标为y。



当$y = b_0$时，水平部分受到的下垂部分的拉力为

$$F_1 = \rho b_0 g$$

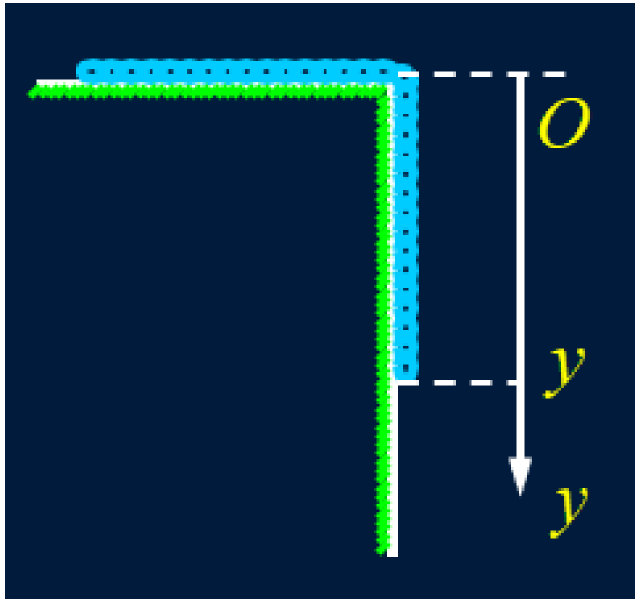
此时达到最大静摩擦力 $F_{S\max} = \mu_S \rho (l - b_0) g$

则有 $\rho b_0 g - \mu_S \rho (l - b_0) g = 0$

$$b_0 = \frac{\mu_S}{1+\mu_S} l$$

$y > b_0$　　拉力大于最大静摩擦力，绳索将开始滑动

（2）以整个绳索为研究对象



重力的功为　$A = \int_b^l \rho y g \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\rho g(l^2 - b^2)$

摩擦力的功为　$A' = -\int_b^l \mu_\mathrm{k} \rho g (l - y)\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\mu_\mathrm{k}\rho g(l-b)^2$

根据动能定理，有　$\frac{1}{2}\rho g(l^2 - b^2) - \frac{1}{2}\mu_\mathrm{k}\rho g(l-b)^2 = \frac{1}{2}\rho l \mathrm{v}^2 - 0$

解得　$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - b^2) - \frac{\mu_\mathrm{k} g}{l}(l-b)^2}$