1 (10 баллов). Даны булевы переменные $x_1, \ldots, x_5$. Постройте две разные булевы формулы в форме КНФ, которые выражают следующую формулу: $x_1 + \cdots + x_5 \leqslant 2$. Первая должна содержать только переменные $x_1, \ldots, x_5$, вторая – дополнительные переменные.

Решение 1:

1. В первой формуле нужно реализовать $AtMostTwo$.
Общая формула для $AtMostK$ выглядит так:

$$\bigwedge_{\substack{1 \leqslant i_1, \ldots, i_{k+1} \leqslant n \\ i_h \neq i_m}} (\overline{x_{i_1}} \vee \overline{x_{i_2}} \vee \ldots \vee \overline{x_{i_{k+1}}})$$

Тогда формула $\phi_1 = AtMostTwo$ для $x_1, \ldots, x_5$ будет выглядеть так:

$$\phi_1 = AtMostTwo = \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 5 \\ i \neq j \neq k}} (\overline{x_i} \vee \overline{x_j} \vee \overline{x_k})$$

2. Введем дополнительные переменные и получим формулу ϕ_2, т.ч. она будет равновыполнима формуле ϕ_1.

$$\phi_2 = AtMostTwo(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) \wedge AtMostTwo(\overline{z_1}, \overline{z_2}, x_4, x_5)$$

Тут есть $AtMostTwo$ от четырех переменных – она строится аналогично как и от пяти переменных.
Заметим, что если формула ϕ_2 истина, то и формула ϕ_1 истина (равносильно тому, что $\phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_2 = 0$):

- Если $z_1 = 0, z_2 = 0$, то $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2$ и $x_4 + x_5 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 2$;
- Если $z_1 = 0, z_2 = 1$, то $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1$ и $x_4 + x_5 \leqslant 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 2$;
- Если $z_1 = 1, z_2 = 0$, то $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1$ и $x_4 + x_5 \leqslant 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 2$;
- Если $z_1 = 1, z_2 = 1$, то $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и $x_4 + x_5 \leqslant 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leqslant 2$;

При этом также, если формула ϕ_1 истина, то и формула ϕ_2 истина при некоторых z_1, z_2. Обозначим $s_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $s_2 = x_4 + x_5$. В условиях истинности формулы ϕ_1 – $s_1 + s_2 \leqslant 2$ и возможны следующие варианты:

- Если $s_1 = 0$, то при любом $s_2 \in \{0, 1, 2\}$, при $z_1 = 1, z_2 = 1 \Rightarrow \phi_2$ истина;
- Если $s_2 = 0$, то при любом $s_1 \in \{0, 1, 2\}$, при $z_1 = 0, z_2 = 0 \Rightarrow \phi_2$ истина;
- Если $s_1 = 1$ и $s_2 = 1$, то при $z_1 = 0, z_2 = 1 \Rightarrow \phi_2$ истина;

Таким образом мы показали, что формулы действительно равновыполнимы.

2 (10 баллов). Обозначим первую формулу как $AtMostTwoA$, вторую – $AtMostTwoB$.
Представьте в виде КНФ формулы
$y_1 \leftrightarrow AtMostTwoA(x_1, \ldots, x_5)$, $y_2 \leftrightarrow AtMostTwoB(x_1, \ldots, x_5)$.

Решение 2:

1. КНФ для формулы $y_1 \leftrightarrow AtMostTwoA(x_1, \dots, x_5)$.

$$x \leftrightarrow y \Leftrightarrow (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y)$$

Следовательно:

$$y_1 \leftrightarrow AtMostTwoA(x_1, \dots, x_5)$$

$$(y_1 \vee \overline{AtMostTwoA(x_1, \dots, x_5)}) \wedge (\overline{y_1} \vee AtMostTwoA(x_1, \dots, x_5))$$

$$(y_1 \vee \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 5 \\ i \neq j \neq k}} (x_i \vee x_j \vee x_k)) \wedge (\overline{y_1} \vee \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 5 \\ i \neq j \neq k}} (\overline{x_i} \vee \overline{x_j} \vee \overline{x_k}))$$

$$CNF = \Big(\bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 5 \\ i \neq j \neq k}} (x_i \vee x_j \vee x_k \vee y_1)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 5 \\ i \neq j \neq k}} (\overline{x_i} \vee \overline{x_j} \vee \overline{x_k} \vee \overline{y_1})\Big)$$

В файле task2_AtMostTwoA.py находится программа, которая построчно печатает все дизъюнкты КНФ данной формулы.

2. КНФ для формулы $y_2 \leftrightarrow AtMostTwoB(x_1, \dots, x_5)$.
Для краткости обозначим f как $AtMostTwo$:

$$y_2 \leftrightarrow AtMostTwoB(x_1, \dots, x_5)$$

$$y_2 \leftrightarrow \big(f(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) \wedge f(\overline{z_1}, \overline{z_2}, x_4, x_5)\big)$$

$$(y_2 \vee \overline{f(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)} \vee \overline{f(\overline{z_1}, \overline{z_2}, x_4, x_5)}) \wedge (\overline{y_2} \vee \big(f(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) \wedge f(\overline{z_1}, \overline{z_2}, x_4, x_5)\big))$$

Для удобства обозначим через $h_1 = x_1, h_2 = x_2, h_3 = x_3, h_4 = z_1, h_5 = z_2$ и $g_1 = \overline{z_1}, g_2 = \overline{z_2}, g_3 = x_3, g_4 = x_4$.

$$y_2 \vee \overline{f(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2)} \vee \overline{f(\overline{z_1}, \overline{z_2}, x_4, x_5)} = y_2 \vee \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 5 \\ i \neq j \neq k}} (h_i \vee h_j \vee h_k) \vee \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 4 \\ i \neq j \neq k}} (g_i \vee g_j \vee g_k) =$$

$$= \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 5 \\ i \neq j \neq k}} \bigwedge_{\substack{1 \leqslant n,l,m \leqslant 5 \\ n \neq l \neq m}} (y_2 \vee h_i \vee h_j \vee h_k \vee g_n \vee g_l \vee g_m)$$

$$\overline{y_2} \vee \big(f(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) \wedge f(\overline{z_1}, \overline{z_2}, x_4, x_5)\big) = \overline{y_2} \vee \Big(\bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 5 \\ i \neq j \neq k}} (\overline{h_i} \vee \overline{h_j} \vee \overline{h_k}) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 4 \\ i \neq j \neq k}} (\overline{g_i} \vee \overline{g_j} \vee \overline{g_k})\Big) =$$

$$= \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 5 \\ i \neq j \neq k}} (\overline{h_i} \vee \overline{h_j} \vee \overline{h_k} \vee \overline{y_2}) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 4 \\ i \neq j \neq k}} (\overline{g_i} \vee \overline{g_j} \vee \overline{g_k} \vee \overline{y_2})$$

Таким образом:

$$CNF = \bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j,k \leqslant 5 \\ i \neq j \neq k}} \bigwedge_{\substack{1 \leqslant n,l,m \leqslant 5 \\ n \neq l \neq m}} (y_2 \vee h_i \vee h_j \vee h_k \vee g_n \vee g_l \vee g_m) \wedge$$

$$\wedge\Big(\bigwedge_{\substack{1\leqslant i,j,k\leqslant 5\\ i\neq j\neq k}}(\overline{h_i}\vee\overline{h_j}\vee\overline{h_k}\vee\overline{y_2})\wedge\bigwedge_{\substack{1\leqslant i,j,k\leqslant 4\\ i\neq j\neq k}}(\overline{g_i}\vee\overline{g_j}\vee\overline{g_k}\vee\overline{y_2})\Big)$$

Так это делается теоретически, однако довольно просто можно найти совершенную КНФ по самой формуле. Минус такого подхода в том, что число дизъюнктов может быть больше, чем в теоретическом подходе. В качестве разнообразия в программе будем использовать СКНФ данной формулы.
В файле task2_AtMostTwoB.py находится программа, которая построчно печатает все дизъюнкты СКНФ данной формулы.

3 (5 баллов). Напишите формулу, выражающую следующее утверждение: *"существует оценка* $x_1,\dots,x_5$*, такая, что не выполняется* y_1 *и выполняется* y_2*"*, используя $y_1\leftrightarrow AtMostTwoA(x_1,\dots,x_5)$ и $y_2\leftrightarrow AtMostTwoB(x_1,\dots,x_5)$.

Решение 3:

Тут подход похож (а может быть это он и есть) на *преобразование Цейтина.*

$T_1\leftrightarrow\overline{y_1}\wedge y_2$
$y_1\leftrightarrow AtMostTwoA(x_1,\dots,x_5)$
$y_2\leftrightarrow AtMostTwoB(x_1,\dots,x_5)$

Пусть F_1 – КНФ формулы $y_1\leftrightarrow AtMostTwoA(x_1,\dots,x_5)$,
F_2 – КНФ формулы $y_2\leftrightarrow AtMostTwoB(x_1,\dots,x_5)$.

Тогда формула, выражающая утверждение есть: $T_1\wedge F_1\wedge F_2=\overline{y_1}\wedge y_2\wedge F_1\wedge F_2$.
Осталось заметить, что КНФ F_1 и F_2 были построены в предыдущем номере.

Ответ: $\overline{y_1}\wedge y_2\wedge F_1\wedge F_2$.

4 (5 баллов). Проверьте получившуюся формулу на SAT-решателе и предоставьте результат вычисления.

Решение 4:

Прежде, чем программировать, подумаем, может ли быть выполнима формула, которая выражает утверждение *"существует оценка* $x_1,\dots,x_5$*, такая, что не выполняется* y_1 *и выполняется* y_2*"*? Хммм, в 1-ом номере мы проверяли, что, если истина формула ϕ_2, то будет верна и формула ϕ_1. Поэтому небольшой спойлер: SAT-решатель выдаст вердикт, что формула UNSAT (*unsatisfiable*).

Что же, все действительно так. При запуске программы task4.py выводится слово ***"UNSAT"***.

5 (10 баллов). Рассмотрим квадратную таблицу 10×10 и все возможные прямоугольники внутри сетки, длина и ширина которых не менее 2. Напишите следующую формулу:

"существует ли раскраска сетки с использованием трех цветов, чтобы ни один такой прямоугольник не имел одинакового цвета в своих четырех углах".

Решение 5:

Введем следующие обозначения:
x_{ij1} – истина тогда и только тогда, когда клетка $i \times j$ раскрашена в цвет 1.
x_{ij2} – истина тогда и только тогда, когда клетка $i \times j$ раскрашена в цвет 2.
x_{ij3} – истина тогда и только тогда, когда клетка $i \times j$ раскрашена в цвет 3.
Таким образом у нас всего $10 \cdot 10 \cdot 3 = 300$ переменных.
Нужно проследить за тем, чтобы каждая клетка была раскрашена ровно в один из трех цветов. Это делает следующая формула:

$$\bigwedge_{1 \leqslant i,j \leqslant 10} \Big((x_{ij1} \vee x_{ij2} \vee x_{ij3}) \wedge AtMostOne(x_{ij1}, x_{ij2}, x_{ij3}) \Big) = \bigwedge_{1 \leqslant i,j \leqslant 10} \Big((x_{ij1} \vee x_{ij2} \vee x_{ij3}) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leqslant k,l \leqslant 3 \\ k \neq l}} (\overline{x_{ijk}} \vee \overline{x_{ijl}}) \Big)$$

Теперь таблица раскрашена правильно. Далее надо обеспечить, чтобы углы ни одного из прямоугольников с длиной и шириной $\geqslant 2$ не имел бы 4-х углов одного и того же цвета. Обозначим углы какого-либо прямоугольника следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
a_1, b_1 \arrow[r] & a_1, b_2 \arrow[d] \\
a_2, b_1 \arrow[u] & a_2, b_2 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Следующая формула обеспечивает то, что его углы не будут одного цвета:

$$\overline{\bigvee_{1 \leqslant k \leqslant 3} x_{a_1 b_1 k} \wedge x_{a_1 b_2 k} \wedge x_{a_2 b_1 k} \wedge x_{a_2 b_2 k}} = \bigwedge_{1 \leqslant k \leqslant 3} \overline{x_{a_1 b_1 k}} \vee \overline{x_{a_1 b_2 k}} \vee \overline{x_{a_2 b_1 k}} \vee \overline{x_{a_2 b_2 k}}$$

Распространим это требование ко всем прямоугольникам в таблице:

$$\bigwedge_{\substack{1 \leqslant a_1, b_1, a_2, b_2 \leqslant 10 \\ a_2 - a_1 \geqslant 2 \\ b_2 - b_1 \geqslant 2}} \Big(\bigwedge_{1 \leqslant k \leqslant 3} \overline{x_{a_1 b_1 k}} \vee \overline{x_{a_1 b_2 k}} \vee \overline{x_{a_2 b_1 k}} \vee \overline{x_{a_2 b_2 k}} \Big)$$

Осталось собрать вместе все наши требования:

$$\Bigg(\bigwedge_{1 \leqslant i,j \leqslant 10} \Big((x_{ij1} \vee x_{ij2} \vee x_{ij3}) \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leqslant k,l \leqslant 3 \\ k \neq l}} (\overline{x_{ijk}} \vee \overline{x_{ijl}}) \Big) \Bigg) \wedge \Bigg(\bigwedge_{\substack{1 \leqslant a_1, b_1, a_2, b_2 \leqslant 10 \\ a_2 - a_1 \geqslant 2 \\ b_2 - b_1 \geqslant 2}} \Big(\bigwedge_{1 \leqslant k \leqslant 3} \overline{x_{a_1 b_1 k}} \vee \overline{x_{a_1 b_2 k}} \vee \overline{x_{a_2 b_1 k}} \vee \overline{x_{a_2 b_2 k}} \Big) \Bigg)$$

6 (10 баллов). Решите формулу на SAT-решателе и по результату решателя (если формула разрешима) постройте нужную таблицу.

Решение 6:

Формула разрешима! Запуск программы task6.py выводит требуемую таблицу.