



Задачи разрешимости логических формул и приложения

Лекция 9. Логика массивов

Роман Холин

Московский государственный университет

Москва, 2021

$$a\{i \leftarrow x\}$$

$a\{i \leftarrow x\}$ - присвоить x элементу массива с индексом i

$a\{i \leftarrow x\}$ - присвоить x элементу массива с индексом i
 $(\forall x \in \mathbb{N}_0. x < i \implies a[x] = 0) \wedge a' = a\{i \leftarrow 0\} \implies$
 $(\forall x \in \mathbb{N}_0. x \leq i \implies a'[x] = 0)$

T_I - тип индекса

T_E - тип элемента

T_A - тип массива, сокращение от $T_I \rightarrow T_E$ - т.е. множество функций из индексы в элементы

T_I - тип индекса

T_E - тип элемента

T_A - тип массива, сокращение от $T_I \rightarrow T_E$ - т.е. множество функций из индексы в элементы

Теория массивов параметризирована теориями индексов и элементов.

$\text{term } A : \text{array-identifier} \mid \text{term}_A \{ \text{term}_I \leftarrow \text{term}_E \}$
 $\text{term } E : \text{term}_A[\text{term}_I] \mid (\text{previous rules})$
 $\text{formula} : \text{term}_A = \text{term}_A \mid (\text{previous rules})$

Аксиома чтения:

$$\forall a_1 \in T_A. \forall a_2 \in T_A. \forall i \in T_I. \forall j \in T_I. (a_1 = a_2 \wedge i = j) \implies a_1[i] = a_2[j]$$

Аксиома записи:

$$\forall a \in T_A. \forall e \in T_E. \forall i \in T_I. \forall j \in T_I. a\{i \leftarrow e\}[j] = (i = j)?e : a[j]$$

Экзистенциальная аксиома:

$$\forall a_1 \in T_A. \forall a_2 \in T_A. (\forall i \in T_I. a_1[i] = a_2[i]) \implies a_1 = a_2$$

$$(i = j \wedge a[j] = 'z') \implies a[i] = 'z'$$

$$\begin{aligned}(i = j \wedge a[j] = ' z') &\implies a[i] = ' z' \\ (i = j \wedge F_a(i) = ' z') &\implies F_a(i) = ' z'\end{aligned}$$

Перепишем формулу:

для $a\{i \leftarrow e\}$ добавим a' , т.ч. $a'[i] = e$ и $\forall j \neq i. a'[j] = a[j]$

Перепишем формулу:

для $a\{i \leftarrow e\}$ добавим a' , т.ч. $a'[i] = e$ и $\forall j \neq i. a'[j] = a[j]$

$a[0] = 10 \implies a\{1 \leftarrow 20\}[0] = 10$

Перепишем формулу:

для $a\{i \leftarrow e\}$ добавим a' , т.ч. $a'[i] = e$ и $\forall j \neq i. a'[j] = a[j]$

$$a[0] = 10 \implies a\{1 \leftarrow 20\}[0] = 10$$

$$(a[0] = 10 \wedge a'[1] = 20 \wedge (\forall j \neq 1. a'[j] = a[j])) \implies a_0[0] = 10$$

$$(F_a(0) = 10 \wedge F_{a'}(1) = 20 \wedge (\forall j \neq 1. F_{a'}(j) = F_a(j))) \implies$$

$$F_{a'}(0) = 10$$

Перепишем формулу:

для $a\{i \leftarrow e\}$ добавим a' , т.ч. $a'[i] = e$ и $\forall j \neq i. a'[j] = a[j]$

$$a[0] = 10 \implies a\{1 \leftarrow 20\}[0] = 10$$

$$(a[0] = 10 \wedge a'[1] = 20 \wedge (\forall j \neq 1. a'[j] = a[j])) \implies a_0[0] = 10$$

$$\forall i_1 \dots \forall i_k \in T_I. \phi_I(i_1, \dots, i_k) \implies \phi_V(i_1, \dots, i_k)$$

1) Грамматика для ϕ_I :

iguard : iguard \wedge iguard | iguard \vee iguard | iterm \leq iterm | iterm =
item

item : i_1 | ... | i_k | term

term : integer-constant | integer-constant \times index-identifier | term
+ term

index-identifier и term не могут быть i_1, \dots, i_k

2) i_1, \dots, i_k могут быть только частью выражения чтения вида
 $a[i_j]$

$$a' = a\{i \leftarrow 0\}$$

$$a' = a\{i \leftarrow 0\}$$
$$\forall j \neq i. a'[j] = a[j]$$

$$a' = a\{i \leftarrow 0\}$$

$$\forall j \neq i. a'[j] = a[j]$$

$$\forall j. (j \leq i - 1 \wedge i + 1 \leq j) \implies a'[j] = a[j]$$

$\iota(\phi)$ - множество элементов, которые могут быть равны какому-нибудь индексу, т.е.:

- 1) Все выражения, которые используются как индекс массива и которые не связаны квантором
- 2) Все выражения, которые используются внутри ограничений на индексы и которые не связаны квантором
- 3) Если ϕ ничего такого не содержит, то $\iota(\phi) = \{0\}$, чтобы оно не было пусто

- 1) Применим правило записи в ϕ_A , чтобы удалить везде запись в исходной формуле
- 2) Заменить везде квантор существования вида $\exists i \in T_I.P(i)$ на $P(j)$, где j - новая переменная
- 3) Заменить везде квантор всеобщности вида $\forall i \in T_I.P(i)$ на $\bigwedge_{i \in \iota(\phi)} P(i)$
- 4) Заменить везде чтение из массива на неинтерпретируемые функции

$$\begin{aligned} & (\forall x \in \mathbb{N}_0. x < i \implies a[x] = 0) \wedge a' = a\{i \leftarrow 0\} \implies \\ & (\forall x \in \mathbb{N}_0. x \leq i \implies a'[x] = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\forall x \in \mathbb{N}_0. x < i \implies a[x] = 0) \wedge a' = a\{i \leftarrow 0\} \implies \\ & (\exists x \in \mathbb{N}_0. x \leq i \wedge a'[x] \neq 0) \end{aligned}$$

$$(\forall x \in \mathbb{N}_0. x < i \implies a[x] = 0) \wedge a'[i] = 0 \wedge \forall j \neq i. a'[j] = a[j] \implies \\ (\exists x \in \mathbb{N}_0. x \leq i \wedge a'[x] \neq 0)$$

$$(\forall x \in \mathbb{N}_0. x < i \implies a[x] = 0) \wedge a'[i] = 0 \wedge \forall j \neq i. a'[j] = a[j] \implies \\ (z \leq i \wedge a'[z] \neq 0)$$

$$\iota(\phi) = \{i, z\}$$

$$\iota(\phi) = \{i, z\}$$

$$(i < i \implies a[i] = 0) \wedge (z < i \implies a[z] = 0) \wedge$$

$$a'[i] = 0 \wedge \forall j \neq i. a'[j] = a[j] \implies$$

$$(z \leq i \wedge a'[z] \neq 0)$$

$$\iota(\phi) = \{i, z\}$$

$$(i < i \implies a[i] = 0) \wedge (z < i \implies a[z] = 0) \wedge \\ a'[i] = 0 \wedge (i \neq i \implies a'[i] = a[i]) \wedge (z \neq i \implies a'[z] = a[z]) \implies \\ (z \leq i \wedge a'[z] \neq 0)$$

$$\begin{aligned} & (z < i \implies a[z] = 0) \wedge \\ & a'[i] = 0 \wedge (z \neq i \implies a'[z] = a[z]) \implies \\ & (z \leq i \wedge a'[z] \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (z < i \implies F_a(z) = 0) \wedge \\ & F_{a'}(i) = 0 \wedge (z \neq i \implies F_{a'}(z) = F_a(z)) \implies \\ & (z \leq i \wedge F_{a'}(z) \neq 0) \end{aligned}$$

