



Задачи разрешимости логических формул и приложения

Лекция 10. Комбинирование логик

Роман Холин

Московский государственный университет

Москва, 2021

Зачему нужно комбинировать теории?

- 1 Комбинации линейной арифметики и неинтерпретируемых функций:

$$(x_2 \geq x_1) \wedge (x_1 - x_3 \geq x_2) \wedge (x_3 \geq 0) \wedge f(f(x_1) - f(x_2)) \neq f(x_3)$$

- 2 Комбинации битовых векторов и неинтерпретируемых функций:

$$f(a[32], b[1]) = f(b[32], a[1]) \wedge a[32] = b[32]$$

- 3 Комбинации массивов и неинтерпретируемых функций:

$$x = v\{i \leftarrow e\}[j] \wedge y = v[j] \wedge x > e \wedge x > y$$

- Переменные
- Логические символы: $\forall, \wedge, \rightarrow, \neg, \exists$
- Нелогические символы (сигнатура Σ): предикатные и функциональные символы
- Синтаксис

Знак равенства часто рассматривают как логический символ, а не как предикатный, т.к. теории без такого символа встречаются редко

- Теория T - множество «предложений» (формулы первого порядка над сигнатурой Σ , где все переменные связаны с квантором). Эти «предложения» называют аксиомами
- Формула T -выполнима ($T \models \phi$), если существует интерпретация, при которой она и теория T верна
- Формула T -тавтология, если для любой интерпретации, при которой верна T , она так же верна

Пусть T_1, T_2 - теории над сигнатурами Σ_1, Σ_2 соответственно. Тогда комбинацией теорий $T_1 \oplus T_2$ назовём теорию над сигатурой $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ над множеством аксиом $T_1 \cup T_2$

Σ теория T назовём выпуклой, если для любой Σ формулы ϕ :
 $(\phi \implies \bigvee_{i=1}^n (x_i = y_i))$ - T тавтология для некоторого
 $n > 1 \implies$
 $(\phi \implies (x_i = y_i))$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$

Ограничения Нельсона-Оппена

- ① T_1, \dots, T_n - безкванторные теории с равенством
- ② Для каждой теории есть разрешающая процедура
- ③ Пересечение каждой пары сигнатур - пустое множество
- ④ Теории интерпретируются над бесконечным доменом

Очистка формулы(purification)

Пусть $\phi' := \phi$

- 1 Каждое "чуждое" подвыражения φ заменим на a_φ
- 2 Добавим в формулу ограничение $a_\varphi = \varphi$

Очистка формулы(purification)

После данной процедуры мы получим множество «чистых» формул F_1, \dots, F_n , таких, что:

- 1 Каждая F_i принадлежит теории T_i и является конъюнкцией T_i -литералов
- 2 Общие переменные возможны
- 3 Исходная формула выполнима тогда и только тогда, когда выполнима $\bigwedge_{i=1}^n F_i$

Алгоритм Нельсона-Оппена для выпуклых теорий

- 1 Очистить формулу ϕ и получить F_1, \dots, F_n
- 2 Если хотя бы одна из теорий невыполнима, то вернуть UNSAT
- 3 Если существуют такие i и j , что из F_i следует равенство i и j , а из F_j такого следствия нет, то добавить к F_j такое равенство и вернуться на шаг 2
- 4 Вернуть SAT

Алгоритм Нельсона-Оппена для выпуклых теорий

Если хотя бы одна из теорий не выпуклая, то алгоритм будет ложно возвращать *SAT*

Алгоритм Нельсона-Оппена

- 1 Очистить формулу ϕ и получить F_1, \dots, F_n
- 2 Если хотя бы одна из теорий невыполнима, то вернуть UNSAT
- 3 Если существуют такие i и j , что из F_i следует равенство i и j , а из F_j такого следствия нет, то добавить к F_j такое равенство и вернуться на шаг 2
- 4 Если существует i , так что

- $F_i \implies (x_1 = y_1 \vee \dots \vee x_k = y_k)$
- $\forall \in \{1, \dots, k\}. F_i \not\implies x_j = y_j$

то рекурсивно применим Алгоритм Нельсона-Оппена для $\phi \wedge x_1 = y_1, \dots, \phi \wedge x_k = y_k$

Если хотя бы одно из выражений выполнимо, то возвращаем SAT. Иначе UNSAT.

- 5 Вернуть SAT

