Мамонов Антон 3ИСиП-19-1

Интерполяция

8 сен

Интерполяция - способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений $X(x_0, x_1, x_2 \ldots x_n)$ и $y = f(X)$ $(y_0, y_1, y_2 \ldots y_n)$.

x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Функцию применяют в случае, когда требуется найти значение функции $y(X)$ при значении аргумента x_i, принадлежащего интервалу $[x_0 \ldots x_n]$, но не совпадающего по значению ни с одним значением.

Аналитическое выражение функции $f(X)$ часто не известно, применяют:

$$\left.\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0) = y_0 \\ P_n(x_i) &= f(x_i) = y_i \end{aligned}\right\} \text{где } i = 0, 1, 2 \ldots n. \quad (1)$$

[Канонический полином]

$$\left[P_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n\right]$$

Выбор многочлена степени n основан на том факте, что через $n+1$ точку проходит единственная кривая степени n.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} + a_n x_2^n = y_2 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \quad (2)$$

[Линейная интерполяция]

Линейная интерполяция – простейший и часто используемый вид интерполяции. Она состоит в том, что заданные точки с координатами x_i, y_i при $i = 0, 1, 2, \dots, n$ соединяют прямолинейными отрезками, а функцию $y(x)$ можно приближенно представить в виде ломаной.

Для i-го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i)

$$\boxed{\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}} \quad (3)$$

отсюда

$$\begin{cases} y = a_i x + b_i, \quad x_{i-1} \le x \le x_i & (4) \\ a_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1} & (5) \end{cases}$$

При использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента x, а затем подставить его в формулу (4) и найти приближенное значение функции в этой точке.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$\left[P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_n(x)\right] \quad L_n(x) \text{ - многочлен.}$$

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left(\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \right)$$

Числитель - знаменатель не включают $x = x_i$

Развернутый вид:

$$P_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} +$$

$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

Задачи:

1)

x	0	1	2	3
y	-4	-2	8	32

$W_1(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = (x^2-2x-x+2)(x-3) = (x^3-3x^2-2x^2+6x-x$

$-x^2+3x+2x-6 = \boxed{x^3-6x^2+11x-6}$

$W_2(x) = (x-0)(x-2)(x-3) = (x^2-2x)(x-3) = x^3-3x^2-2x^2+6x =$

$= \boxed{x^3-5x^2+6x}$

$W_3(x) = (x-0)(x-1)(x-3) = (x^2-x)(x-3) = x^3-3x^2-x^2+3x =$

$= \boxed{x^3-4x^2+3x}$

$W_4(x) = (x-0)(x-1)(x-2) = (x^2-x)(x-2) = x^3-2x^2-x^2+2x =$

$= \boxed{x^3-3x^2+2x}$

$w_1(x_1) = 0^3 - 6 \cdot 0^3 + 11 \cdot 0 - 6 = -6$

$w_2(x_2) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 2$

$w_3(x_3) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = -2$

$w_4(x_4) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 6$

$$f(x) = \frac{-4}{-6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + \frac{-2}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x) + \frac{8}{-2}(x^3 - 4x^2 + 3x) + \frac{32}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) =$$

$$= x^3\left(\frac{4}{6} - \frac{2}{2} - \frac{4}{1} + \frac{32}{6}\right) + x^2\left(-\frac{24}{6} + \frac{10}{2} + \frac{32}{2} - \frac{96}{6}\right) + x\left(\frac{44}{6} - \frac{12}{2} - \frac{24}{2} + \frac{64}{6}\right) - \frac{24}{6} = \frac{4 - 6 - 24 + 32}{6}x^3 +$$

$$+ \frac{-24 + 30 + 96 - 96}{6}x^2 + \frac{44 - 36 - 72 + 64}{6}x - \frac{24}{6} =$$

$$= \frac{6}{6}x^3 + \frac{6}{6}x^2 - \frac{0}{6}x - \frac{24}{6} = \boxed{\cancel{6x^2 - 6x - 4}} = \boxed{x^3 + x^2 - 4}$$

проверка.

1) $6 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 4 = -4$ верно

2) $6 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 4 = -4$ – неверно

перерасчет

1) $0^3 + 0^2 - 4 = -4$ верно

2) $1^3 + 1^2 - 4 = -2$ верно

3) $2^3 + 2^2 - 4 = 8$ верно

4) $3^3 + 3^2 - 4 = 32$ верно

$x^3 + x^2 - 4$

2)

x	5	4	3	2	1
y	1	3	1	1	9

$w_1(x) = (x-4)(x-3)(x-2)(x-1) = (x^2 \overbrace{- 3x - 4x}^{-7x} + 12)(x-2)(x-1) =$

$= (x^3 - 2x^2 \overbrace{- 7x^2}^{-9x^2} + 14x \overbrace{+ 12x}^{26x} - 24)(x-1) = x^4 - x^3 - 9x^3 + 9x^2 + 26x^2 - 26x$

$- 24x + 24 = \boxed{x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24}$

$w_2(x) = (x-5)(x-3)(x-2)(x-1) = (x^2 \overbrace{- 3x - 5x}^{-8x} + 15)(x-2)(x-1) = (x^3 - 2x^2 -$

$- 8x^2 + 16x + 15x - 30)(x-1) = x^4 - x^3 - 10x^3 + 10x^2 + 31x^2 - 31x - 30x + 30 =$

$= \cancel{x^4 - 11x^3 + 35x^2 - 55x + 30} = \boxed{x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30}$

$W_3(x) = (x-5)(x-4)(x-2)(x-1) = (x^2 - 4x \overset{-9x}{-5x} + 20)(x-2)(x-1) =$

$= (x^3 - 2x^2 \overset{-11x^2}{-9x^2} + 18x \overset{38x}{+20x} - 40)(x-1) = x^4 - x^3 - 11x^3 + 11x^2$

$+ 38x^2 - 38x - 40x + 40 = \boxed{x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 40}$ 8

$W_4(x) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-1) = (x^2 - 4x \overset{-9x}{-5x} + 20)(x-3)(x-1) =$

$= (x^3 - 3x^2 \overset{-12x^2}{-9x^2} + 27x \overset{47x}{+20x} - 60)(x-1) = \cancel{x^3} x^4 - x^3 - 12x^3 + 12x^2 +$

$+ 47x^2 - 47x - 60x + 60 = \boxed{x^4 - 13x^3 + 59x^2 - 107x + 60}$

$W_5(x_5) = (x-5)(x-4)(x-3)(x-2) = (x^2 - 4x \overset{-9x}{-5x} + 20)(x-3)(x-2) =$

$= (x^3 - 3x^2 \overset{-12x^2}{-9x^2} + 27x \overset{47x}{+20x} - 60)(x-2) = x^4 - 2x^3 - 12x^3 + 24x^2 +$

$+ 47x^2 - 94x - 60x + 120 = \boxed{x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120}$

$W_1(x_1) = 5^4 - 10 \cdot 5^3 + 35 \cdot 5^2 - 50 \cdot 5 + 24 = 625 - 1250 +$

$+ 875 - 250 + 24 = 24$

$W_2(x_2) = 4^4 - 11 \cdot 4^3 + 47 \cdot 4^2 - 61 \cdot 4 + 30 = 256 - 704 + 656 -$

$- 244 + 30 = -6$

$W_3(x_3) = 3^4 - 12 \cdot 3^3 + 49 \cdot 3^2 - 78 \cdot 3 + 40 =$

$= 81 - 324 + 441 - 234 + 40 = 4$

$W_4(x_4) = 2^4 - 13 \cdot 2^3 + 59 \cdot 2^2 - 107 \cdot 2 + 60 = 16 - 104 + 236 -$

$- 214 + 60 = -6$

$W_4(x_4) = 1^4 - 14 \cdot 1^3 + 71 \cdot 1^2 - 154 \cdot 1 + 120 = 1 - 14 + 71 -$

$- 154 + 120 = 24$

$f(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) + \frac{3}{-6}(x^4 - 11x^3 + 47x^2 - 61x + 30) +$

$+ \frac{1}{4}(x^4 - 12x^3 + 49x^2 - 78x + 40) + \frac{1}{-6}(x^4 - 13x^3 + 59x^2 - 107x + 60) +$

$+ \frac{9}{24}(x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120) = x^4\left(\frac{1}{24} - \frac{3}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{9}{24}\right) +$

$+ x^3\left(-\frac{10}{24} + \frac{33}{6} - \frac{12}{4} + \frac{13}{6} - \frac{126}{24}\right) + x^2\left(\frac{35}{24} - \frac{123}{6} + \frac{49}{4} - \frac{59}{6} + \frac{639}{24}\right)$

$+ x\left(-\frac{50}{24} + \frac{183}{6} - \frac{78}{4} + \frac{107}{6} - \frac{1386}{24}\right) + \frac{24}{24} - \frac{90}{6} + \frac{40}{4} - \frac{60}{6} - \frac{126}{24} =$

$$= \frac{1-12+6-4+9}{24}x^4 + \frac{-10+132-72+52-126}{24}x^3 +$$

$$+ \frac{35-492+294-236+639}{24}x^2 + \frac{-50+732-468+428-1386}{24}x +$$

$$+31 = 0\cdot x^4 - \cancel{3}x^2 + 10x^2 - 31x + 31 = \boxed{-\cancel{3}x^3 + 10x^2 - 31x + 31}$$

Проверка:

1) $-\cancel{3}\cdot 5^3 + 10\cdot 5^2 - 31\cdot 5 + 31 = \overset{-125}{\cancel{-375}} + 250 - 155 + 31 = 1$ верно

2) $-\cancel{3}\cdot 4^3 + 10\cdot 4^2 - 31\cdot 4 + 31 = \overset{-64}{\cancel{-192}} + 160 - 124 + 31 = 3$ верно

3) $-\cancel{3}\cdot 3^3 + 10\cdot 3^2 - 31\cdot 3 + 31 = \overset{-27}{\cancel{-81}} + 90 - 93 + 31 = 1$ верно

4) $-\cancel{3}\cdot 2^3 + 10\cdot 2^2 - 31\cdot 2 + 31 = \overset{-8}{\cancel{-24}} + 40 - 62 + 31 = 1$ верно

5) $-\cancel{3}\cdot 1^3 + 10\cdot 1^2 - 31\cdot 1 + 31 = \overset{-1}{\cancel{-3}} + 10 - 31 + 31 = 9$ верно.