Мамонов Антон ЗИСиП-19-1

12. Транспортная задача. Методы нахождения начального опорного плана транспортной задачи. Метод потенциалов.

Постановка транспортной задачи заключается в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза у пунктов отправлено A_1, A_2, A в пункты назначения B_1, B_2, B_k.

Математическая модель транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad \Big| \quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad \Big| \quad x_{ij}\geqslant 0$$

Любое неотрицательное решение $X_{ij}=\|x_{ij}\|$ системы называется допустимым планом транспортной задачи.

План $X_{ij}^{*}=\|x_{ij}^{*}\|$ при котором функция принимает минимальное значение называется оптимальным планом транспортной задачи. Если сумма груза у поставщиков равна общей сумме потребностей в пунктах назначения

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$$ то модель называется закрытой. Если иначе называется открытой.

Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие. В случае превышения запаса над потребностями вводится фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения с потребностью

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Соответствующие тарифы считаются равными нулю

$c_{i,n+1} = 0$. После этих преобразований получим закрытую модель транспортной задачи.

Определение опорного плана:
На каждом шаге в таблице условий задачи заполняют одну клетку, которая называется занятой.

Метод северо-западного угла.
При построении опорного плана транспортной задачи методом с-з угла заполнение клеток таблицы условий начинают с верхней левой клетки K_{11} ~~потом~~

Метод минимального элемента.
Выбор пунктов отправления и пунктов назначения производят ориентируясь на тарифы перевозок.
В каждом шаге нужно выбрать клетку с минимальным тарифом перевозок. Если таких клеток несколько, то выбираем одну из них.
Стоимость перевозок будет меньше, чем у С-З угла.

Метод потенциалов

Если для некоторого опорного плана $X_{ij}^* = ||x_{ij}^*||$ транспортной задачи существуют такие числа, что

$$\begin{cases} \beta_j - \alpha_i = c_{ji} & \text{при } x_{ij} > 0 \\ \beta_i - \alpha_i \le c_{ij} & \text{при } x_{ij} = 0. \end{cases}$$

Числа α_i и β_j называют потенциальными пунктами отправления и назначения.

Так как число заполненных клеток равно $m+n-1$, то система с $m+n$ неизвестными содержит $m+n-1$ уравнений. Если среди чисел нет положительных, то найденный опорный план является оптимальным. Если же хотя бы для некоторой свободной клетки $a_{ij} > 0$, то данный опорный план не является оптимальным и необходимо перейти к новому опорному плану.

Циклом в таблице условий транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья расположены вдоль строк и столбцов.

Алгоритм потенциалов:

1) Нахождение опорного плана
2) Нахождение потенциалов α_i и β_j
3) Определение чисел a_{ij} для каждой свободной клетки, сдвиг по циклу пересчёта
4) Выбор максимального среди положительных чисел
5) Проверка полученного опорного плана на оптимальность, т.е. переход к пункту 2