Мамонов Антон

18.01.22.

Корнем уравнения $f(x)=0$ называется значение $x=\bar{x}$, подстановка которого в уравнение превращает его в верное числовое равенство. Например, если в $x^3+5x^2+4=0$ подставить $x=-1$, то получим $0=0$.

Решить уравнение — найти его корни.

Не все уравнения можно решить аналитически.

1) трансцендентные уравнения не решаются аналитически, за исключением специальных случаев, когда удачная подстан

2) Для алгебраического уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_nx - a_n = $ степени выше четвертой не существует формулы, выражающей корни через коэфф уравнения при помощи конечного числа арифм операций.
Таким образом, большое значение имеет задача приближенного численного отыскания корней уравн.

Метод итерации.

Пусть имеется уравнение $f(x) = 0$. Приведем его к равносильному виду $\varphi(x)$ $x = \varphi(x)$, удобному для итерации.
Выберем некоторое начальное приближение x_0 и найдем следующие приближения, в %.

$$\left[x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1), \dots x_n = \varphi(x_{n-1}) \dots\right]$$

~~Отсюда Если~~ Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна. Тогда, переходя к пределу $n \to \infty$ в рекуррентном соотношении $x_n = \varphi(x_{n-1})$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})$$

Следовательно $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \bar{x} = \bar{x}$ является корнем уравнения $x = \varphi(x)$

Теорема. Пусть корень $\bar{x}$ уравнения $x = \varphi(x)$, а также последовательные приближения $x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}) \dots$ принадлежат отрезку [a,b], на котором $|\varphi'(x)| \le q < 1$.
Следовательно.
1) Отображение $\varphi(x)$ является сжимающим, и итерации $x_n = \varphi(x_{n-1})$ сходятся к корню $\bar{x}$.

$$\Delta = |\bar{x} - x_n| \le \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

CP: $|x_3 - x_2| \leq 10^{-5}$

$5x - 6\ln x - 7 = 0.$ | ОДЗ $x > 0.$

$f(1) = 5 - 6 - 7 = -2$

$f(3) = 15 - 6\ln 3 - 7 = 8 - 6\ln 3 > 0.$

$f(1) \cdot f(3) < 0$

$\cancel{f'(x) = \frac{6 \cdot 3}{2x} = \frac{18}{x}}$

if $x_0 = 3 \Rightarrow$

$\cancel{x_1 = 3 - \frac{\ln 3 + 3^2 - 3}{}}$

$f'(x) = 5 - \frac{6}{x}$

$x_1 = 3 - \frac{5 \cdot 3 - 6\ln 3 - 7}{5 - \frac{6}{3}} = 2{,}68703961$

x_{k+1} | $x_0 = 3$

$x_{k+1} = \frac{5x - 6\ln x - 7}{}$

$\cancel{x_{k+1} = x_k - \frac{\ln x_k + x_k^2 - }{\frac{1}{x_k} + 2x_k}}$

$x_{k+1} = \frac{\cancel{5 - \frac{6}{x}}}{}$

$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{5x - 6\ln x - 7}{5 - \frac{6}{x}}}$

$x_2 = 2{,}687039 - \frac{5 \cdot 2{,}687039 - 6\ln 2{,}687039 - 7}{5 - \frac{6}{2{,}687039}} = 2{,}53055791$

$x_3 = 2{,}530558 - \frac{5 \cdot 2{,}530558 - 6\ln 2{,}530558 - 7}{5 - \frac{6}{2{,}530558}} = 2{,}49930977$

$x_4 = 2{,}499310 - \frac{5 \cdot 2{,}499310 - 6 \cdot \ln 2{,}499310 - 7}{5 - \frac{6}{2{,}499310}} = 2{,}49913232$

$x_5 = 2{,}499132 - \frac{5 \cdot 2{,}499132 - 6 \cdot \ln 2{,}499132 - 7}{5 - \frac{6}{2{,}499132}} = 2{,}49913232$

$|x_4 - x_3| < 10^{-5}$

Ответ: 2,499132