ПРОИЗВОДНЫЕ

1. $(c)' = 0$, $c = \mathrm{const}$;

2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (где $\alpha \in \mathbb{R}$); в частности, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$; в частности, $(e^x)' = e^x$;

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$; в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

5. $(\sin x)' = \cos x$;

6. $(\cos x)' = -\sin x$;

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

ИНТЕГРАЛЫ

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$.

В частности, $\int 1 \cdot dx = x + C$, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

В частности, $\int e^x\, dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$.

В частности, $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$, $(a > 0)$.

В частности, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$, $(a > 0)$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$.

Иногда к этому списку добавляют еще несколько интегралов:

13. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

14. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

15. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

16. $\operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$.

17. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right| + C$.

18. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

1) Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Примеры.

Комплексным числом Z называется упорядоченная пара действительных чисел (x;y), первое из которых x называется его действительной частью, а второе число y - мнимой частью. Обозначение: z = x + iy. Символ i называется мнимой единицей.

Запись числа z в виде z = x + iy называют **алгебраической формой** комплексного числа.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$
$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$
$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

2) Понятие комплексного числа. Понятие равных, комплексно-сопряженных и противоположных чисел. Формулы решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом. Примеры.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$ называются **равными** тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части. Два комплексных числа z = x + iy и z = x - iy, отличающиеся только знаком мнимой части называются **сопряженными (комплексно-сопряженными)**. Числом **противоположным** к (x, y) называется такая пара (a, b), что (x, y) + (a, b) = (0,0). Если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то уравнение имеет решения на множестве комплексных чисел. В ответе получаются **два сопряженных комплексных числа**.

3) Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Переход от алгебраической формы к тригонометрической форме и обратно. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Примеры.

Запись числа z в виде z = r (cos φ + i*sin φ) называется **тригонометрической формой**.

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент z можно найти, используя формулу $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{при } x > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0,\ y > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$
$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$
$$(1.3)\quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big),$$
где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, n-1$.

4) Показательная форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме. Примеры.

Запись числа z в виде

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{или} \quad z = |z|e^{i\arg z} \qquad (1.4)$$

называют *показательной формой* (или экспоненциальной) комплексного числа.

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$
$$z^n = r^ne^{i\varphi n}$$
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}, \; k = 0,1,\ldots, n-1$$

5) Понятие производной функции. Понятие дифференциала функции. Основные правила дифференцирования. Таблица производных. Примеры

Понятие производной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Вычисление производной называется *дифференцированием* функции.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Понятие дифференциала функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует такое число A, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad (2.1)$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т.е. $A \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом функции* в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Основные правила дифференцирования.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности, $(cu)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$.

6) Неопределенный и определенный интегралы. Таблица интегралов.

Неопределенный интеграл.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором (конечном или бесконечном) интервале (a, b). Тогда функция $F(x)$ называется *первообра́зной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)^3$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется *интегрированием* этой функции.

Основные свойства.

1. $\int dF(x) = F(x) + C.$
2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$
3. $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$, где $\alpha \neq 0$,
4. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$

$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$, где $a \neq 0$.

Определенный интеграл

Сумма вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \tag{1.1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_i \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{1.2}$$

Свойства.

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$
2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$
3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$, т.е. переменную интегрирования можно обозначить любой буквой.
4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$
5. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$
6. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a < c < b.$
7. Если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$; если $f(x) \leqslant 0$ для всех точек $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0.$
8. Если $f(x) \leqslant g(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$
9. Если M — наибольшее, m — наименьшее значение $f(x)$ на $[a; b]$, то $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$
10. $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \quad c \in [a; b]$ (теорема о среднем).
11. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$
12. $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$

Формула Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

7) Понятие дифференциального уравнения 1 прядка. Понятие решения Д.У. 1 порядка. Задача Коши. ДУ 1 порядка с разделяющимися переменными. Примеры.

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

⇛ Уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

связывающее между собой независимую переменную, искомую (неизвестную) функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$ называется *дифференциальным уравнением первого порядка*. ⇚

⇛ *Решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График функции $y = \varphi(x)$ в этом случае называется *интегральной кривой*. Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения. ⇚

⇛ Уравнение вида

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\,dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\,dy = 0 \tag{1.3}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Уравнение (1.3) путем деления на произведение $Q_1(y)\cdot P_2(x)$ приводится к уравнению с *разделенными переменными*

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = 0 \tag{1.4}$$

⇛ Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (1.1), удовлетворяющего заданному *начальному условию* $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*. ⇚

8) Однородные дифференциальные уравнения 1 порядка. Примеры.

⇛ Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени* n, где n-целое, если при любом α имеет место тождество $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$. ⇚

В частности, функция $f(x, y)$ — однородная нулевой степени, если

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y).$$

⇛ Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{2.1}$$

называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одинаковой степени. ⇚

Уравнение (2.1) может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.2}$$

Однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{т. е.} \quad y = ux,$$

где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция (можно также применять подстановку $\frac{x}{y} = u$).

9) Неоднородные дифференциальные уравнения 1 порядка. Методы решения неоднородных дифференциальных уравнений 1 порядка. Примеры

⇛ Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x), \quad (3.1)$$

где $p(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции (в частности — постоянные), называется *линейным уравнением первого порядка.* ⇚

Уравнение

$$x' + p(y)x = g(y) \quad (3.2)$$

является *линейным относительно x и x'*.

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (3.1) принимает вид $y' + p(x)y = 0$ и называется *линейным однородным.* Оно является уравнением с разделяющимися переменными. В случае $g(x) \not\equiv 0$ уравнение (3.1) называется *линейным неоднородным уравнением.*

Решение уравнения (3.1) ищется в виде $y = uv$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от x (*метод Бернулли*). При этом одну из этих функций (например, $v(x)$) можно выбрать произвольно (из соображений удобства), тогда вторая определится из уравнения (3.1). В обоих случаях они находятся из уравнений с разделяющимися переменными (см. задачу 2.3.1 а)).

Кроме того, уравнение (3.1) можно решить методом вариации произвольной постоянной (*метод Лагранжа*); в этом случае его общее решение ищется в виде $C(x)e^{-\int p(x)\,dx}$ (см. задачу 2.3.1 а)).

10) Простейшие дифференциальные уравнения 2 порядка.

⇛ Уравнение

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (6.1)$$

связывающее между собой независимую переменную, неизвестную функцию $y(x)$, а также ее первые две производные $y'(x)$ и $y''(x)$, называется *дифференциальным уравнением второго порядка.* ⇚

⇛ *Решением* уравнения (6.2) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке вместе с y' и y'' в это уравнение обращает его в тождество. График функции $y = \varphi(x)$ в этом случае называется *интегральной кривой.* ⇚

Примеры.

⇛ Задача отыскания решения уравнения (6.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 — некоторые числа, называется *задачей Коши.* ⇚

⇛ *Общим решением* уравнения (6.2) называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 и такая, что:

1) она является решением этого уравнения при любых конкретных значениях C_1 и C_2;

2) при любых допустимых начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (6.3)$$

можно подобрать такие значения C_1^0 и C_2^0 постоянных, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ будет удовлетворять этим начальным условиям. ⇚

⇛ Любая функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получающаяся из общего решения уравнения (6.2) при конкретных значениях постоянных C_1 и C_2, называется *частным решением* этого уравнения. ⇚

2 страница

11) Понятия числового ряда. Понятия сходящегося и расходящегося рядов. Свойства рядов. Примеры.

⇛ Пусть задана бесконечная последовательность чисел (действительных или комплексных)

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Сокращенно ряд обозначают следующим образом: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. При этом числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами* ряда, а число a_n — *общим членом* ряда.

Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

В этом случае указанный предел называется *суммой ряда.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности, то числовой ряд называется *расходящимся* и суммы не имеет. ⇚

Свойства.

Если у сходящегося ряда отбросить конечное число его членов, то полученный ряд также будет сходиться. Верно и обратное: если сходится ряд, полученный отбрасыванием конечного числа членов у данного ряда, то и данный ряд также сходится.

Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, и их суммы, соответственно, равны S_1 и S_2. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots$ также сходится, причем его сумма равна $S_1 + S_2$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и его сумма равна S. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \ldots + \alpha a_n + \ldots$, где α — произвольное число, также сходится, причем его сумма равна αS.

12) Необходимый признак сходимости ряда. Частные случаи рядов. Признак сравнения рядов. Примеры.

Необходимый признак сходимости ряда.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий член ряда a_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Частные случаи рядов.

Ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом $a \neq 0$, называется *геометрическим рядом.* Если $|q| \geqslant 1$, то геометрический ряд расходится, если $|q| < 1$ — сходится (при этом его сумма S находится по формуле $S = \dfrac{a}{1-q}$).

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, или, что то же самое, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, называется *гармоническим.* Гармонический ряд расходится. Ряд $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$, где $p > 0$, называется *рядом Дирихле.* Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$. Частным случаем ряда Дирихле (при $p = 1$) является гармонический ряд.

Признак сравнения рядов.

1-й признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами, причем $a_n \leqslant b_n$ для всех номеров n, начиная с некоторого. Тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

2-й признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами, причем существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

При использовании 1-го или 2-го признака сравнения, как правило, сравнивают исходный ряд с соответствующим рядом Дирихле. При этом часто используют эквивалентность следующих бесконечно малых последовательностей (при $n \to \infty$):

$$\sin\frac{1}{n} \sim \operatorname{tg}\frac{1}{n} \sim \arcsin\frac{1}{n} \sim \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

3 страница

13) Признак Даламбера. Признак Коши. Примеры. 4 страница

Признак Даламбера.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то — расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Признак Коши.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд с положительными членами, и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Тогда, если $l < 1$, то данный ряд сходится; если же $l > 1$, то — расходится.

Если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

14) Понятие знакочередующегося ряда. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость ряда. Примеры.

⇛ *Знакочередующимся* называется ряд, в котором любые два соседних члена имеют разные знаки. Таким образом, знакочередующийся ряд — это ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \qquad (2.1)$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_n + \ldots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \qquad (2.2)$$

Признак Лейбница.

Пусть дан знакочередующийся ряд (вида (2.1) или (2.2)). Если выполнены два условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \ldots$ (абсолютные величины членов ряда монотонно убывают);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$),

то ряд сходится.

В этом случае знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*.

⇛ Если же знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*. ⇚

Пусть дан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где a_n — произвольные числа (действительные или комплексные). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

15) Понятие степенного ряда. Область сходимости. Радиус и интервал сходимости. Примеры.

⇛ Выражение вида $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — постоянные числа (действительные или комплексные), а x — переменная величина (также действительная или комплексная), называется *степенным рядом*. Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда*. Сокращенно степенной ряд обозначают так: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. ⇚

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots,$$

⇛ Придавая переменной x в степенном ряде конкретное числовое значение $x = x_0$, получим числовой ряд, который сходится или расходится. Множество всех тех значений переменной, при которых данный степенной ряд сходится, называется *областью сходимости* этого ряда. ⇚

⇛ *Интервалом сходимости* действительного степенного ряда вида (3.1) (соответственно, вида (3.2)) называется такой интервал $(-R, R)$ (соответственно, $(a_0 - R, a_0 + R)$), что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне отрезка $[-R, R]$ (соответственно, $[x_0 - R, x_0 + R]$), ряд расходится. На границах интервала сходимости, т. е. в точках $x = \pm R$ (соответственно, в точках $x = x_0 \pm R$), ряд может как сходиться, так и расходиться. Число R называется *радиусом сходимости* действительного степенного ряда. ⇚

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{и} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

⇛ *Кругом сходимости* комплексного степенного ряда вида (3.1) (соответственно, вида (3.2)) называется такой открытый круг $|x| < R$ (соответственно, $|x - a| < R$), что в каждой его точке ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне замкнутого круга $|x| \leqslant R$ (соответственно, вне замкнутого круга $|x - a| \leqslant R$), ряд расходится. ⇚

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \quad (\text{соответственно}, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-a)^n|),$$

Число R называется *радиусом сходимости* комплексного степенного ряда. В частности, R может быть равно 0 — в этом случае вся область сходимости ряда состоит из одной точки 0 (соответственно, a), или $+\infty$ — в этом случае областью сходимости является вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$.

16) Понятия определителей 2 и 3 порядков. Свойства определителей. Формулы Крамера. Примеры.

⇛ Определитель 2-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (-a_{12}a_{21}).$$

Таким образом, определитель 2-го порядка есть сумма $2 = 2!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 2-х сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одно из слагаемых берется со знаком «+», другое — со знаком «−».

⇛ Определитель 3-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ + (-a_{13}a_{22}a_{31}) + (-a_{12}a_{21}a_{33}) + (-a_{11}a_{23}a_{32}). \qquad (2.1)$$

Таким образом, определитель 3-го порядка есть сумма $6 = 3!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 3-х сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая — со знаком «−». Правило, по которому выбираются эти знаки, задается с помощью формулы (2.1) или другими методами, приведенными ниже.

Разложение определителя 3-го порядка по первой строке:

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Свойства определителей.

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица коэффициентов системы размера $n \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Если D — определитель матрицы A — не равен нулю, то система совместна и определенна, ее решение задается формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

1. Если у определителя какая-либо строка (столбец) состоит только из нулей, то определитель равен 0.

2. Если какие-либо две строки (два столбца) определителя пропорциональны, то определитель равен 0.

3. Если какую-либо строку (столбец) определителя умножить на произвольное число, то и весь определитель умножится на это число.

4. Если две строки (два столбца) определителя поменять местами, то определитель изменит знак.

5. Если к какой-либо строке (столбцу) определителя прибавить какую-либо другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, то определитель не изменится.

6. Определитель произведения матриц равен произведению их определителей.

Матрица, определитель которой равен 0, называется *вырожденной*; матрица, определитель которой не равен 0, называется *невырожденной*.

Другую форму записи этого утверждения дают *формулы Крамера*:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где D_k — определитель, получающийся из D заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

17) Матрицы. Виды матриц. Действия с матрицами. Примеры.

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений a_{ij} (называемых *элементами матрицы*), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица размера $n \times n$. *Диагональной* называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т. е. с индексами $i \neq j$) равны нулю. *Единичной* (обозначается E) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали. *Нулевой* называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Матрица называется *ступенчатой*, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

Коммутирующими (или перестановочными) называются матрицы A и B, для которых $AB = BA$.

Транспонированной к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $A^T = (a^T_{ij})$ такая, что $a^T_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i, j$ (т. е. все строки которой равны соответствующим столбцам матрицы A).

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\, i, j$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, что и матрица A, причем $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall\, i, j$.

Линейной комбинацией матриц A и B одинакового размера называется выражение вида $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α и β — произвольные числа.

Произведением $A \cdot B$ *матриц* A и B (размеров $m \times n$ и $n \times r$ соответственно) называется матрица C размера $m \times r$, такая, что

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице A (обозначается $B \sim A$). В дальнейшем будем рассматривать элементарные преобразования только над строками.

18) Ранг матрицы. Свойства ранга матрицы. Методы решения систем линейных уравнений. Примеры.

Минором k-го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

где числа a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, \ldots, b_m$ — *свободными членами*.

Свойства ранга матрицы.

Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Методы решения систем линейных уравнений.

Решением системы (1.1) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, …, c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Существует метод Гаусса, метод обратной матрицы и метод с применением формул Крамера

5 страница

19) Векторы. Действия над векторами в координатной форме. Примеры.

Вектором называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overline{AB}$ (или одной буквой, $\bar{a}$, $\bar{b}$, ...). Длина отрезка AB называется *длиной*, или *модулем* вектора $\overline{AB}$ и обозначается $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\bar{0}$ или просто 0. По определению нулевой вектор не имеет направления и коллинеарен любому вектору. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается через $\bar{e}$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Три (и более) вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными* ($\bar{a} = \bar{b}$), если они сонаправлены и имеют равные длины.

Действия над векторами.

Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, соединяющий начало вектора $\bar{a}$ с концом вектора $\bar{b}$, отложенного от конца вектора $\bar{a}$.

Произведением вектора $\bar{a} \neq 0$ *на число* $\lambda \neq 0$ называется вектор, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$, его направление если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Вектор $\bar{a}$ с координатами a_x, a_y, a_z записывают в виде $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Длина вектора $\bar{a}$ определяется по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (1.1)$$

Пусть даны два вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ *и* $b = (b_x; b_y; b_z)$. *Тогда:*

1) векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е.

$$\bar{a} = \bar{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \end{cases}$$

2) векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (1.3)$$

Линейной комбинацией матриц A и B одинакового размера называется выражение вида $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α и β — произвольные числа.

При сложении векторов их одноименные координаты складываются, при вычитании — вычитаются, при умножении вектора на число — умножаются на это число:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z),$$
$$\lambda \cdot \bar{a} = (\lambda \cdot a_x; \lambda \cdot a_y; \lambda \cdot a_z).$$

20) Способы задания прямой на плоскости. Примеры.

Каждая *прямая* на плоскости Oxy определяется линейным *уравнением первой степени с двумя неизвестными*. Обратно: каждое линейное уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет некоторую прямую на плоскости.

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом* имеет вид

$$y = kx + b,$$

2. *Общее уравнение прямой*:

$$Ax + By + C = 0,$$

3. *Уравнение прямой в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

4. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении*:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (2.4)$$

ординаты данной точки. Уравнение (2.4) называют также *уравнением пучка прямых с центром в точке* $(x_0; y_0)$; *уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух прямых* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (2.5)$$

5. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1; y_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2)$, где $y_1 \neq y_2$, $x_1 \neq x_2$ имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2.6)$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, определяется по формуле

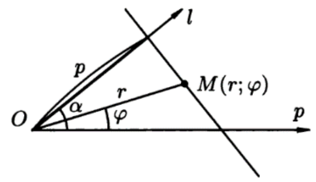
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2.7)$$

7. *Уравнение прямой* в полярных координатах имеет вид

$$r\cos(\varphi - \alpha) = p,$$

6. *Нормальное уравнение прямой*:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$



21) Окружность, её уравнение. Эллипс, его уравнение. Примеры.

Окружностью называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки A этой же плоскости на одно и тоже расстояние $R > 0$. Точка A называется *центром*, а R — *радиусом* окружности.

В прямоугольной системе координат уравнение окружности имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \qquad (3.2)$$

где $(a; b)$ — координаты ее центра, (рис. 31). Уравнение (3.2) называется *каноническим уравнением окружности*. В частности, если $a = 0$,

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3.4)$$

где a — *большая полуось*, b — *малая полуось* эллипса. Координаты фокусов: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, где c — половина расстояния между фокусами (рис. 32). Числа a, b и c связаны соотношением

$$c^2 = a^2 - b^2. \qquad (3.5)$$

Эксцентриситетом ε эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ (расстояния между фокусами) к большой оси $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (\varepsilon < 1,\ \text{т.к. } c < a). \qquad (3.6)$$

Фокальные радиусы определяются формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x \quad (r_1 + r_2 = 2a). \qquad (3.7)$$

Директрисами эллипса называются прямые l_1 и l_2 параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$; уравнения директрис:

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \qquad (3.8)$$

6 страница

22) Гипербола, её уравнение. Примеры.

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек этой же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.12}$$

где a — *действительная*, b — *мнимая полуось* гиперболы. Числа $2a$ и $2b$ называются соответственно *действительной* и *мнимой осями* гиперболы. Координаты фокусов: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, c — половина расстояния

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{3.13}$$

Точки A и B называются *вершинами* гиперболы, точка O — *центром* гиперболы, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M гиперболы до ее фокусов называются *фокальными радиусами* этой точки.

$\Rightarrow$

$$\text{Число} \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \qquad (\varepsilon > 1, \text{ т.к. } c > a). \tag{3.14}$$

называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Фокальные радиусы определяются формулами: для точек правой ветви гиперболы:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = -a + \varepsilon x; \tag{3.15}$$

для точек левой ветви:

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{3.16}$$

23) Парабола, её уравнение. Примеры.

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки этой же плоскости, называемой *фокусом*, и заданной прямой, называемой *директрисой*.

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px,$$

где число $p > 0$, равное расстоянию от фокуса F до директрисы l, называется *параметром* параболы. Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Точка $O(0;0)$ называются *вершиной* параболы, длина r отрезка FM — *фокальный радиус* точки M, ось Ox — *ось симметрии* параболы.

Уравнение директрисы l параболы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2};$$

фокальный радиус вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат (рис. 40), имеет уравнение $x^2 = 2py$.

Фокусом параболы (3.25) является точка $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$.

Уравнение директрисы этой параболы $y = -\frac{p}{2}$.

Фокальный радиус точки M параболы $r = y + \frac{p}{2}$.

24) Понятие предела функции в точке и при x→ ∞. Виды неопределенностей. Примеры.

Понятие предела функции в точке

По Гейне.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 ($x_n \neq x_0$ $\forall n$), последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначается это так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ (при $x \to x_0$).

По Коши.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Понятие предела функции при x→ ∞.

По Гейне.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любой положительной бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ (т. е. $x_n \to +\infty$, $n \to \infty$) последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

По Коши.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех значений $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

25) 1 и 2 замечательные пределы. Следствия из них. Примеры.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Часто используются следующие следствия из обоих замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

26) Непрерывность функции. Классификация точек разрыва. Примеры.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Точки разрыва.

Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $f(x)$ или является граничной точкой этой области. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, но они не равны между собой, или же односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то x_0 называется *точкой разрыва* 1-го рода.

Если в точке x_0 существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$, а $f(x_0)$ не определено или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то эта точка называется *точкой устранимого разрыва.*

Если в точке x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода.*

27) Определение функций многих переменных. Частные производные и дифференциал функции Двух переменных. Примеры.

Переменная z называется *функцией двух переменных* x и y, если каждой упорядоченной паре $(x; y)$ значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ соответствует единственное число z.

Переменная величина u называется *функцией* от n переменных $x; y; z; \ldots; t$, если каждому набору этих переменных соответствует единственное значение переменной u: $u = f(x; y; z; \ldots; t)$.

Частной производной функции $z = f(x; y)$ по переменным x и y называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ или $\Delta_y z$ к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Таким образом, полное приращение функции приближенно равно $f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$.

$\Rightarrow$ Это выражение представляет собой главную, линейную часть приращения функции и называется *дифференциалом* этой функции в данной точке.

Обозначение: $dz = z'_x dx + z'_y dy$ (здесь $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ — произвольные приращения аргументов).

Если полное приращение Δz функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ можно представить в виде $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$, где A и B не зависят от Δx и Δy, а $(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \to (0, 0)$ при $(\Delta x; \Delta y) \to (0; 0)$, то функция $f(x; y)$ называется дифференцируемой в точке M_0.

28) Экстремумы функций 2х переменных. Примеры. 9 страница

Пусть $z = f(x;y)$ — функция, непрерывная вместе со всеми частными производными до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$. Тогда для любой точки $M(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ этой окрестности имеет место равенство

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) = f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0;y_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0;y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x; y_0+\theta\Delta y), \quad 0<\theta<1,$$

которая называется *формулой Тейлора*, а первые $(n+1)$ слагаемых в правой части — *многочленом Тейлора степени* n. При $(x_0;y_0) = (0;0)$ имеем формулу и многочлен Маклорена.

Функция $f(x;y)$ имеет строгий *локальный максимум (минимум)* в точке $M_0(x_0;y_0)$, если неравенство $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ $(f(x_0;y_0) < f(x;y))$ имеет место во всех точках $M(x;y) \neq M_0$ из некоторой достаточно малой окрестности точки M_0.

29) Понятие двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Понятие повторного интеграла. Примеры.

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

⇛ Если существует конечный предел интегральных сумм σ_n при $d \to 0$, не зависящий от разбиения на области D_i и выбора точек M_i, то этот предел называется *двойным интегралом* функции $f(x,y)$ по области D и обозначается

$$\iint_D f(x,y)\,dS \quad \text{или} \quad \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Если $f(x,y) \geqslant 0$ и непрерывна в области D, то интеграл $\iint_D f(x,y)\,dS$ выражает объем тела, ограниченного снизу областью D, сверху — поверхностью $z = f(x,y)$, а с боков — цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области D

1. *Линейность.* Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны на области D, то

$$\iint_D (\alpha\cdot f(x,y) \pm \beta\cdot g(x,y))\,dxdy = \alpha\cdot\iint_D f(x,y)\,dxdy + \beta\cdot\iint_D g(x,y)\,dxdy$$

(α и β — постоянные числа).

В частности,

$$\iint_D \alpha f(x,y)\,dxdy = \alpha\iint_D f(x,y)\,dxdy,$$

2. *Монотонность.* Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны на области D и всюду в этой области $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, то $\iint_D f(x,y)\,dxdy \leqslant \iint_D g(x,y)\,dxdy.$

Таким образом, неравенства можно почленно интегрировать.
В частности, если $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$, $\forall(x,y)\in D$, то

$$m\cdot S \leqslant \iint_D f(x,y)\,dxdy \leqslant M\cdot S,$$

где $S = S(D)$ — площадь области D. Данные неравенства называются *оценкой интеграла*. Еще одно следствие: если $f(x,y) \geqslant 0$ на области D, то

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \geqslant 0.$$

3. *Теорема о среднем значении.*

Если функция $f(x,y)$ непрерывна на области D, то существует точка $M_0(x_0,y_0)\in D$ такая, что

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S, \quad \text{или} \quad \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0).$$

4. *Аддитивность.* Если область D представляется в виде объединения двух областей D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

$$\iint f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

5. Для любой функции $f(x,y)$, непрерывной на области, D имеет место неравенство

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Интегралы, стоящие в правых частях приведенных равенств, называются *повторными* (или двукратными). Они отличаются друг от друга порядком интегрирования. Интеграл, содержащий функцию $f(x,y)$, называется *внутренним*, другой — *внешним*. При вычислении повторных интегралов следует брать сначала внутренний интеграл, при этом переменная, не стоящая под знаком