Антон Мамонов

22.01 Основная теорема алгебры утверждает, что любой многочлен над полем комплексных чисел имеет хотя бы один комплексный корень. Следовательно, многочлен над полем комплексных чисел разложим в произведение линейных множителей. Разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей. Над полем вещественных чисел многочлен раскладывается в произведение неприводимых многочленов степени ~~1 и 2~~ 1 и 2. Разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей

Последовательность многочленов $F=\{f_0(x),\dots f_k(x)\}$ называется последовательностью многочлена Штурма, если она удовлетворяет следующим условиям

▷ любые два соседних многочлена не имеют общих корней

▷ если α - корень $f_j(x)$, при $j>0$, то $f_{j-1}(\alpha)\cdot f_{j+1}(\alpha)<0$

▷ Последний многочлен не имеет вещественных корней

▷ Если в окрестности корня α многочлена $f_0(x)$ сам многочлен возрастает, то $f_1(\alpha)>0$, а если убывает, то $f_1(\alpha)<0$

▷ Многочлены последовательности Штурма имеют взаимно простые коэффициенты из последовательности многочленов F и числа α определим величину $W(\alpha)$, равную количеству перемен знака в числовой последовательности $f_0(\alpha), \dots, f_k(\alpha)$ (нули игнорируем). Число различных корней многочлена $f_0(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ равно $W(\alpha) - W(\beta)$

Пусть многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней. Построим последовательность многочленов: $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = f'(x)$, и далее, где $f_j(x)$ - остаток от деления $f_{j-2}(x)$ на $f_{j-1}(x)$, умноженный на (-1)

Данная последовательность многочленов будем последовательностью многочленов Штурма.

Для задания отрезка, содержащего все вещественные корни многочлена $f(x)$ полезна фор.

Если $f(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} f_j x^j$ и $\alpha = 1 + \max\limits_{0 \le j \le n} |f_j|$, то корни многочлена $f(x)$ по модулю не превосходят α, Пример: $y = x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 7$

$y' = 5x^4 + 40x^3 - 15x^2 + 20x - 15 \quad | : 5$

$f_1(x) = x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 4x - 3 \quad | \quad f_0(x) = x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 7$

1)

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 7 & x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 4x - 3 \\
\hline
-\,x^5 + 8x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x & x + 2 \\
\hline
0 \quad 2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 12x + 7 & \\
-\,2x^4 + 16x^3 - 6x^2 + 8x - 6 & \\
\hline
0 \quad -18x^3 + 12x^2 - 20x + 13 &
\end{array}
$$

берем такое, чтобы первые члены совпали $x^5 = x^5$ | $2x^4 = 2x^4$

делим до тех пор, пока степень первого x не станет меньше делителя. $\boxed{4x^3 < x^4}$

2) $f_2 = -18x^3 + 12x^2 - 20x + 13 \quad | \cdot (-1)$

$+18x^3 - 12x^2 + 20x - 13$

$f_1(x) \cdot 18 = 18x^4 + 144x^3 - 54x^2 + 72x - 54$

~~$12x^4 + 144x^3 - 54x^2$~~

теперь нужно, чтобы коэф у f_2 и f_1 совпали

у f_2 коэф $x^3 = 18$, у $f_1 = 1$.

тогда f_1 умножим на 18.

$$
\begin{array}{l|l}
18x^4 + 144x^3 - 54x^2 + 72x - 54 & 18x^3 - 12x^2 + 20x - 13 \\
\hline
-\,18x^4 - 12x^3 + 20x^2 - 13x & x + \frac{26}{3} \\
\hline
0 \quad 156x^3 - 74x^2 + 85x - 54 & \\
-\,156x^3 - 104x^2 + \frac{520x}{3} - \frac{338}{3} & \\
\hline
0 \quad + 30x^2 - \frac{265x}{3} + \frac{176}{3} \quad | \cdot (-3) &
\end{array}
$$

$\frac{156x^3}{18x^3} = \frac{26}{3}$

надо умножать со знаком (−) всегда

$f_3(x) = -90x^2 + 265x - 176$

$\cancel{\frac{f_2(x)}{}} \quad \frac{90}{18} = 5$

$f_2(x) \cdot 5 = 90x^3 - 60x^2 + 100x - 65$

$$
\begin{array}{l|l}
90x^3 - 60x^2 + 100x - 65 & -90x^2 + 265x - 176 \\
\hline
-\,90x^3 - 265x^2 + 176x & -x - \frac{41}{18} \\
\hline
0 \quad + 205x^2 - 76x - 65 & \\
-\,205x^2 - \frac{10865x}{18} + \frac{3608}{9} & \\
\hline
0 + \frac{9497x}{18} - \frac{4193}{9} \quad | \cdot (-18) &
\end{array}
$$

$\frac{205}{-90} = -\frac{41}{18}$

$f_4(x) = -9497x + 8386 \quad \left| \quad \left| \frac{-9497}{-90} \right| = \frac{9497}{90} \right.$

$$-\frac{9497x^2 + \frac{1215616}{45}x - \frac{835736}{45}}{9497x^2 - 8386x} \quad \Big| \quad \frac{-9497x + 8386}{-x - \frac{1592986}{427365}}$$

$$\frac{1592986}{427365}$$

$$0 \quad \frac{1592986}{45}x - \frac{835736}{45}$$

$$-\quad \frac{1592986}{45}x - \frac{13358780596}{427365}$$

$$0 \quad - \frac{38200616116}{47485} \cdot \frac{47485}{38200616116} = -1$$

$f_5(x) = 1$ меняем знак везде.

Система Штурма.

$f_0(x) = x^5 + 10x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 15x + 7$

$f_1(x) = x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

$f_2(x) = 18x^3 - 12x^2 + 20x - 13$

$f_3(x) = -90x^2 + 265x - 176$

$f_4(x) = -9497x + 8386$

$f_5(x) = 1$

	$-\infty$		$+\infty$
f_0	$-$		
f_1	$+$		
f_2	$-$		
f_3	$-$		
f_4			
f_5			

Здесь подставляем в каждое уравн сперва отрицательное большое, затем ~~отрицатель~~ положительное большое, смотрим знак ответа. Затем считаем сколько раз меняет знак (w). где w уменьшилось – корни.

$y^0 = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ | $f_0(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ ⓪

$y' = 5x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 6x + 3$ | $f_1(x) = : 5$

$f_1(x) = x^4 + \frac{4}{5}x^3 - \frac{12x^2}{5} - \frac{6x}{5} + \frac{3}{5}$

1) $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \;\Big|\; x^4 + \frac{4}{5}x^3 - \frac{12x^2}{5} - \frac{6x}{5} + \frac{3}{5}$

$-\left(x^5 + \frac{4}{5}x^4 - \frac{12x^3}{5} - \frac{6x^2}{5} + \frac{3x}{5}\right) \;\Big|\; x + \frac{1}{5}$

$0 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{8}{5}x^3 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{12}{5} + 1$

$\frac{1}{5}x^4 + \frac{4}{25}x^3 - \frac{12}{25}x^2 - \frac{6}{25}x + \frac{3}{25}$

$0 - \frac{44}{25}x^3 - \frac{33}{25}x^2 + \frac{66}{25}x + \frac{22}{25} \quad \Big| \cdot \left(-\frac{25}{11}\right)$

$f_2(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 2 \quad \Big|\; f_1(x) \cdot 4 = 4x^4 + \frac{16x^3}{5} - \frac{48x^2}{5} - \frac{24x}{5} + \frac{12}{5}$

$4x^4 + \frac{16x^3}{5} - \frac{48x^2}{5} - \frac{24x}{5} + \frac{12}{5} \;\Big|\; 4x^3 + 3x^2 - 6x - 2$

$-\left(4x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 2x\right) \;\Big|\; x + \frac{1}{20}$

$0 + \frac{1}{5}x^3 - \frac{18}{5}x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}$

$-\left(\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{20}x^2 - \frac{6}{20}x - \frac{2}{20}\right)$

$0 - \frac{15}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2} \quad \Big| \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$

$f_3(x) = 3x^2 + 2x - 2 \quad \Big|\; \cancel{f_2(x) \cdot 3(\ldots)}$

$f_2(x) \cdot \frac{3}{4} = \cancel{\ldots} \frac{12}{\cancel{25}}x$

$= 3x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{18}{4}x - \frac{6}{4}$

$3x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{18}{4}x - \frac{6}{4} \;\Big|\; 3x^2 + 2x - 2$

$-\left(3x^3 + 2x^2 - 2x\right) \;\Big|\; x + \frac{1}{12}$

$0 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{10}{4}x - \frac{6}{4}$

$-\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{12}x - \frac{2}{12}\right)$

$0 - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} \quad \Big| \cdot (-3) \quad \Big|\; f_4(x) = 8x - 5$

$$f_3(x)\cdot\frac{8}{3} = 8x^2+\frac{16}{3}x-\frac{16}{3}.$$

$$\begin{array}{l|l} 8x^2+\frac{16}{3}x-\frac{16}{3} & 8x-5 \\ \cline{2-2} -\;8x^2-5x & x+\frac{31}{24} \\ \hline 0+\frac{31}{3}x-\frac{16}{3} & \\ -\;\frac{31}{3}x-\frac{155}{24} & \\ \hline \end{array}$$

$$0+\frac{283}{24}\cdot\left(-\frac{24}{283}\right)=-1$$

$f_0(x)=x^5+x^4-4x^3+3x^2+3x+1$

$f_1(x)=x^4+\frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x-\frac{6x}{5}+\frac{3}{5}$

$f_2(x)=4x^3+3x^2-6x-2$

$f_3(x)=3x^2+2x-2$

$f_4(x)=8x-5$

$f_5(x)=-1$

	$-\infty$	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	$+\infty$
f_0	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
f_1	+	+	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	+
f_2	+	+	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	-
f_3	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+
f_4	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-
f_5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
~~f_6~~ W	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	1	1	1	1	1	2	2	2	5	4	4	4	4

Ответ: $(2;1)\cup(-2;-3)$