Мамонов Антон ЗИСиП-19-1

9. Задача Коши: постановка, поиск решения точными и численными методами.

Определение: Начальной задачей или задачей Коши для обыкновенного дифференцированного уравнения порядка n называется задача отыскания решения этого уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным уравнениям:

$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y'_0$$
$$y''(x_0) = y''_0$$
$$\ldots\ldots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

В частности, для дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x; y)$ задача Коши состоит в том отыскании его решения, которое при $x = x_0$ принимает значение y_0.

Т.е решения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Геометрически это значит, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0; y_0)$ координатной плоскости XOY

Самостоятельное выполнение:

$$\begin{cases} y' = 2x + 7x \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Пишем общую формулу очередного приближения Пикаро

$$y_{k+1} = \int_0^x (2t + 7y_k(t))\,dt + 5$$

$$y_1 = \int_0^x (2t + 35)\,dt + 5 = t^2 + 35t + 5\Big|_0^x = x^2 + 35x + 5$$

$$y_2 = \int_0^x (7t^2 + 247t + 35)\,dt + 5 = \frac{7t^3}{3} + \frac{247t^2}{2} + 35t + 5\Big|_0^x =$$

$$= \frac{7x^3}{3} + \frac{247x^2}{2} + 35x + 5$$

$$y_3 = \int_0^x \left(\frac{49t^3}{3} + \frac{1729t^2}{2} + 247t + 35 \right) dt + 5 =$$

$$= \frac{49t^3}{12} + \frac{1729t^3}{6} + \frac{247t^2}{2} + 35t + 5 \Big|_0^x = \frac{49x^4}{12} + \frac{1729x^3}{6} +$$

$$+ \frac{247x^2}{2} + 35x$$

$$y_4 = \int_0^x \left(\frac{343t^4}{12} + \frac{12103t^3}{6} + \frac{1729t^2}{2} + 247t + 35 \right) dt + 5 =$$

$$= \frac{343t^5}{60} + \frac{12103t^4}{24} + \frac{1729t^3}{6} + \frac{217t^2}{2} + 35t + 5 \Big|_0^x =$$

$$= \frac{343x^5}{60} + \frac{12103x^4}{24} + \frac{1729x^3}{6} + \frac{217x^2}{2} + 35x + 5$$

Ответ: общая формула очередного приближения Пикара:

$$y_{n+1} = \int_0^x (2t + 7y_n(t))\,dt + 5 \qquad y_1 = x^2 + 35x + 5$$

$$y_2 = \frac{7x^3}{3} + \frac{247x^2}{2} + 35x + 5$$

$$y_3 = \frac{49x^4}{12} + \frac{1729x^3}{6} + \frac{247x^3}{2} + 35x + 5$$

$$y_4 = \frac{343x^5}{60} + \frac{12103x^4}{24} + \frac{1729x^3}{6} + \frac{247x^2}{2} + 35x + 5$$