Мамонов Антон ЗИСиП-19-1

[Интерполяция Ньютона]

Разностью первого многочлена $f(x)$ в узлах α_0, α_1 называют $f(\alpha_0, \alpha_1) = \dfrac{f(\alpha_0) - f(\alpha_1)}{\alpha_0 - \alpha_1}$

Индуктивно определим разность порядка k многочлена $f(x)$ в узлах $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ через разности $k-1$ порядка по формуле:

$$f(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) = \frac{f(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) - f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}{\alpha_0 - \alpha_k}$$

Разность порядка k выражается через значения многочлена в узлах

$$\boxed{f(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(\alpha_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}} (\alpha_i - \alpha_j)}}$$

и, следовательно, разность не зависит от порядка и расположения её аргументов

Если степень многочлена $f(x)$ равна n, то разность $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ порядка k есть многочлен степени $n-k$ при $n \geq k$. Если $n < k$, то разность порядка k равно нулю. Из определения разности порядка k выводим равенство, позволяющее выразить многочлен через соответствующую разности $f(x) \cancel{= f(\alpha_1)} +$

$$\boxed{f(x) = f(\alpha_1) + (x - \alpha_1) f(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots + (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_k) f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$$

При решении задачи интерполяции $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$, и, значит, получаем представление интерполяционного многочлена в форме Ньютона

$$\boxed{f(x) = f(\alpha_1) + (x - \alpha_1) f(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots + (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{n-1}) f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$$

1) Номер...

x	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	1248	186	36	24	78	636	3516

$f(x_1,x_2) = \frac{1248-186}{-3-(-2)} = \cancel{177}\ -1062$

$f(x_2,x_3) = \frac{186-36}{-2-(-1)} = -150$

$f(x_3,x_4) = \frac{36-24}{-1-1} = -6$

$f(x_4,x_5) = \frac{24-78}{1-2} = 54$

$f(x_5,x_6) = \frac{78-636}{2-3} = 558$

$f(x_6,x_7) = \frac{636-3516}{3-4} = 2880$

$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{-1062-(-150)}{-3-(-1)} = 456$

$f(x_2,x_3,x_4) = \frac{-150-(-6)}{-2-1} = 48$

$f(x_3,x_4,x_5) = \frac{-6-54}{-1-2} = 20$

$f(x_4,x_5,x_6) = \frac{54-558}{1-3} = +252$

$f(x_5,x_6,x_7) = \frac{558-2880}{2-4} = +1161$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{456-48}{-3-1} = -102$

$f(x_2,x_3,x_4,x_5) = \frac{48-20}{-2-2} = -7$

$f(x_3,x_4,x_5,x_6) = \frac{20-(+252)}{-1-3} = 58$

$f(x_4,x_5,x_6,x_7) = \frac{-252+1161}{1-4} = +303$

$f(x_1 \div x_5) = \frac{-102-(-7)}{-3-2} = 19$

$f(x_2;x_6) = \frac{-7-58}{-2-3} = 13$

$f(x_3-x_7) = \frac{58-303}{-1-4} = 49$

$f(1-6) = \frac{19-13}{-3-3} = -1$

$f(x_2-x_7) = \frac{13-49}{-2-4} = 6$

$f(x_1-x_7) = \frac{-1-6}{-3-4} = 1$

$1248 + (-1062)(x-(-3)) + 456(x-(-3))(x-(-2)) + (-102)(x-(-3))(x-(-2))(x-(-1)) + 19(x-(-3))(x-(-2))(x-(-1))(x-1) +$
$+ (-1)(x-(-3))(x-(-2))(x-(-1))(x-1)(x-2) + 1(x-(-3))(x-(-2))(x-(-1))(x-1)(x-2)(x-3) = 1248 - 1062(x+3) +$
$+ 456(x+3)(x+2) - 102(x+3)(x+2)(x+1) + 19(x+3)(x+2)(x+1)(x-1) - 1(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) + 1(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) =$
$= \cancel{1248-1062(}\ 1248 - 1062x - 3186 + 456x^2 + 912x + 1368x + 2736 - 102x^3 - 102x^2 - 510x^2 - 510x - 612x - 612 +$
$+ 19x^4 - 19x^2 + 95x^3 - 95x + 114x^2 - 114 - x^5 + x^3 + 4x^3 - 4x - 3x^4 + 3x^2 + 12x^2 - 12 + x^6 - x^4 - 13x^4 + 13x^2 +$
$+ 36x^2 - 36 = \boxed{x^6 - x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 24}$

проверим.

1) $-3^6 - (-3)^5 + 2(-3)^4 - 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 3(-3) + 24 = 1248$ верно

2) $-2^6 - (-2)^5 + 2(-2)^4 - 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 3(-2) + 24 = 186$ верно

3) $-1^6 - (-1)^5 + 2(-1)^4 - 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 3(-1) + 24 = 36$ верно

4) $1^6 - 1^5 + 2(1)^4 - 2(1)^3 + 3(1)^2 - 3(1) + 24 = 24$ верно

5) $2^6 - 2^5 + 2(2)^4 - 2(2)^3 + 3(2)^2 - 3(2) + 24 = 78$ верно

6) $3^6 - 3^5 + 2(3)^4 - 2(3)^3 + 3(3)^2 - 3(3) + 24 = 636$ верно

7) $4^6 - 4^5 + 2(4)^4 - 2(4)^3 + 3(4)^2 - 3(4) + 24 = 3516$ верно

2)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	374	15	2	5	6	59	770

$f(x_1,x_2) = \dfrac{374-15}{-3+2} = -359$

$f(x_2,x_3) = \dfrac{15-2}{-2+1} = -13$

$f(x_3,x_4) = \dfrac{2-5}{-1-0} = 3$

$f(x_4,x_5) = \dfrac{5-6}{0-1} = 1$

$f(x_5,x_6) = \dfrac{6-59}{1-2} = 53$

$f(x_6,x_7) = \dfrac{59-770}{2-3} = 711$

$f(x_1-x_3) = \dfrac{-359+13}{-3-(-1)} = 173$

$f(x_2-x_4) = \dfrac{-13-3}{-2-0} = 8$

$f(x_3-x_5) = \dfrac{3-1}{-1-1} = -1$

$f(x_4-x_6) = \dfrac{1-53}{0-2} = 26$

$f(x_5-x_7) = \dfrac{53-711}{1-3} = 329$

$f(x_1-x_4) = \dfrac{173-8}{-3-0} = -55$

$f(x_2-x_5) = \dfrac{8+1}{-2-1} = -3$

$f(x_3-x_6) = \dfrac{-1-26}{-1-2} = 9$

$f(x_4-x_7) = \dfrac{26-329}{0-3} = 101$

$f(x_1-x_5) = \dfrac{-55+3}{-3-1} = 13$

$f(x_2-x_6) = \dfrac{-3-9}{-2-2} = 3$

$f(x_3-x_7) = \dfrac{9-101}{-1-3} = 23$

$f(x_1-x_6) = \dfrac{13-3}{-3-2} = -2$

$f(x_2-x_7) = \dfrac{3-23}{-2-3} = 4$

$f(x_1-x_7) = \dfrac{-2-4}{-3-3} = 1$

$374 + (-359)(x-(-3)) + \cancel{173} \; 173(x-(-3))(x-(-2)) + (-55)(x-(-3))(x-(-2))(x-(-1)) + 13(x-(-3))(x-(-2))(x-(-1))(x-0) +$
$+ (-2)(x-(-3))(x-(-2))(x-(-1))(x-0)(x-1) + 1(x-(-3))(x-(-2))(x-(-1))(x-0)(x-1)(x-2) = 374 - 359x - 1077 +$
$+ 173(x+3)(x+2) - 55(x+3)(x+2)(x+1) + 13(x+3)(x+2)(x+1)x - 2(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1) +$
$+ (x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) = 374 - 359x - 1077 + 173x^2 + 346x + 519x + 1038 - 55x^3 - 330x^2 - 605x - 330 +$
$+ 13x^4 + 13x^3 + 65x^3 + 65x^2 + 78x^2 + 78x - 2x^4 + 2x^2 - 10x^3 + 10x - 12x^2 + 12 + x^6 - x^4 - 4x^4 + 4x^2 + 3x^5 - 3x^3 - 12x^3 + 12x =$
$= \boxed{x^6 + x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x + 5}$

Проверка.

$y(-3) = (-3)^6 + (-3)^5 - 2(-3)^4 - 2(-3)^3 + 3(-3) + 5 = 729 - 243 + 162 + 54 - 9 + 5 = 374$ верно

$y(-2) = (-2)^6 + (-2)^5 - 2(-2)^4 - 2(-2)^3 + 3(-2) + 5 = 64 - 32 - 32 + 16 + 5 - 6 + 0 = 15$ верно

$y(-1) = (-1)^6 + (-1)^5 - 2(-1)^4 - 2(-1)^3 + 3(-1) + 5 = 1 - 1 - 2 + 2 - 3 + 5 = 2$ верно

$y(0) = (0)^6 + (0)^5 - 2(0)^4 - 2(0)^3 + 3(0) + 5 = 5$ верно

$y(1) = (1)^6 + (1)^5 - 2(1)^4 - 2(1)^3 + 3(1) + 5 = 6$ верно

$y(2) = (2)^6 + (2)^5 - 2(2)^4 - 2(2)^3 + 3(2) + 5 = 64 + 32 - 32 - 16 + 6 + 5 = 59$ верно

$y(3) = 3^6 + 3^5 - 2 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 + 5 =$
$= 729 + 243 - 162 - 54 + 9 + 5 = 770$ верно.