Мамонов Антон ЗИСиП-19-1

Численные методы нахождения определенного интеграла.

К численному интегрированию обращаются, когда требуется вычислить определенный интеграл от функции, заданной таблично, или непосредственно нахождение первообразной затруднительно.

Можно искомую функцию $f(x)$ интерполировать и за определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ взять $\int_a^b P(x)dx$. Здесь функция $f(x) = P(x) + R(x)$, где $P(x)$ интерприрующая, $R(x)$ — остаток. $\int_a^b R(x)dx$, если $R(x) \approx 0$, то $\int_a^b R(x)dx \approx 0$.

Известно приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$ — квадратная формула, определяемой узлами x_k и A_k.

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

При приближенном вычислении определенного интеграла часто, особенно в случае, когда соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции в конечном виде, бывает удобно представить его в виде суммы ряда. Для этого сначала подынтегральную функцию разлагают в степенной ряд, а затем интер.

Задачи.

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx \qquad e^{-x^2}=f(x)$$

$$f' = -2xe^{-x^2} \qquad f'(0)=0$$

$$f'' = 2(2x^2-1)e^{-x^2} \qquad f''(0)=-2$$

$$f''' = (-8x^3+12x)e^{-x^2} \qquad f'''(0)=0$$

$$f^{IV} = 4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2} \qquad f^{IV}(0)=12$$

$$f^{V} = (-32x^5+160x^3-120x)e^{-x^2} \qquad f^{V}(0)=0$$

$$f^{VI} = 8(8x^6-60x^4+90x^2-15)e^{-x^2} \qquad f^{VI}(0)=-120$$

$$f^{VII} = (-128x^7+1344x^5-3360x^3+1680x)e^{-x^2} \qquad f^{VII}(0)=0$$

$$f^{VIII} = 16(16x^8-224x^6+840x^4-840x^2+105)e^{-x^2} \qquad f^{VIII}(0)=1680$$

$$e^{-x^2} = \frac{x^8}{24}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}-x^2+1$$

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx = \int_0^{0,5}\frac{x^8}{24}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}-x^2+1 = \frac{x^9}{216}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,5} =$$

$$= \frac{0,5^9}{216}-\frac{0,5^7}{42}+\frac{0,5^5}{10}-\frac{0,5^3}{3}+0,5 \approx 0,46145.$$

2. $$\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}=f(x) \qquad f(0)=1.$$

$$f' = -x^2\cdot(x^3+1)^{-\frac{4}{3}} \qquad f'(0)=0$$

$$f'' = 2x(x^3-1)(\sqrt[3]{x^3+1}(x^6+2x^3+1))^{-1} \qquad f''(0)=0.$$

$$f''' = 2(-3x^6+10x^3-1)(\sqrt[3]{x^3+1}(x^9+3x^6+3x^3+1)) \qquad f'''(0)=-2$$

$$f^{IV} = x^2(24^6-176x^3+80)(\sqrt[3]{x^3+1}(x^{12}+4x^9+6x^6+4x^3+1)) \qquad f^{IV}(0)=0$$

$$f^{VI} = 40x(-9x^9-195x^6)(\sqrt[3]{x^3+1}(x^{18}+6x^{15}+15x^{12})) \qquad f^{VI}(0)=160$$

$$f^{IX} = \frac{4480(-81x^{18}+5184x^{15}-37800x^{12}+63140x^9+27195x^6+2430x^3-44)}{\sqrt[3]{x^3+1}(x^{27}+9x^{24}+36x^{21}+84x^{16}+126x^{15}+126x^{12}+84x^9+36x^6+9x^3+1)}$$

$$f^{IX} = -62720.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)}} = \frac{-14x^9}{81}+\frac{2x^6}{9}-\frac{x^3}{3}+1 \quad \Bigg| \quad \int_0^{0,5}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)}}dx = \int_0^{0,5}\frac{-14x^9}{81}+\frac{2x^6}{9}-\frac{x^3}{3}+1 =$$

$$= \left(\frac{-7x^{10}}{405}+\frac{2x^7}{63}-\frac{x^4}{12}+x\right)\Big|_0^{0,5} = -\frac{0,5}{12}+0,7 = 0,4948.$$