导数、方向导数和梯度

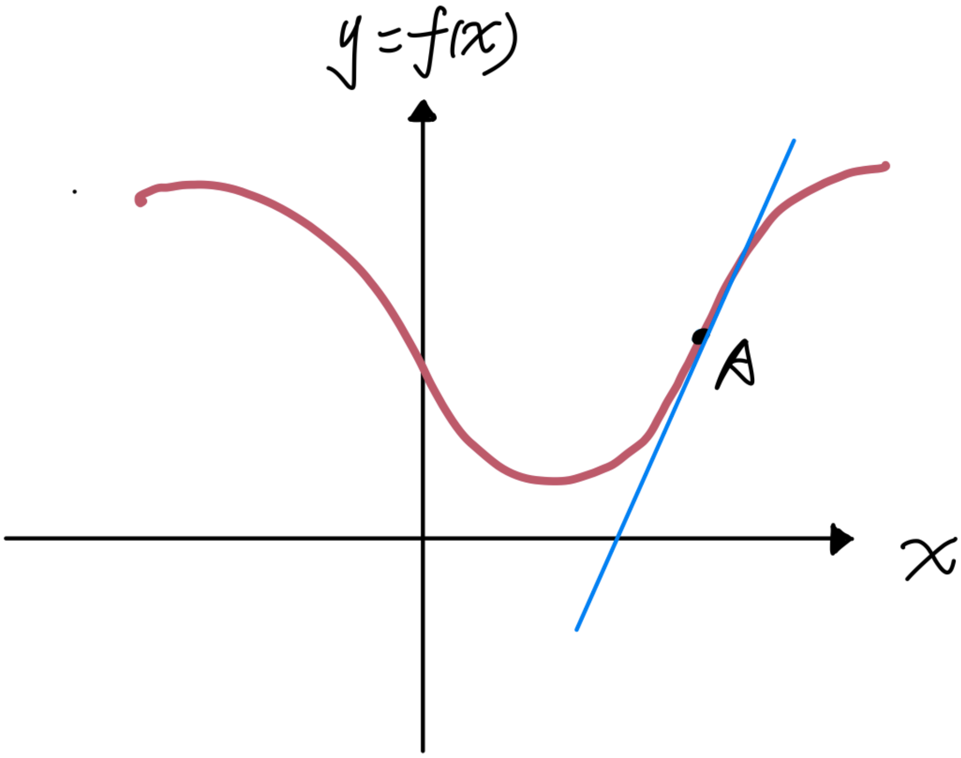
`Machine Learning`

一元函数的导数

一元函数的情况下，导数就是函数的变化率：

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

如果我们在图上作出该一元函数的图像，那么函数$f(x)$在该点的导数就是在该点切线的斜率。



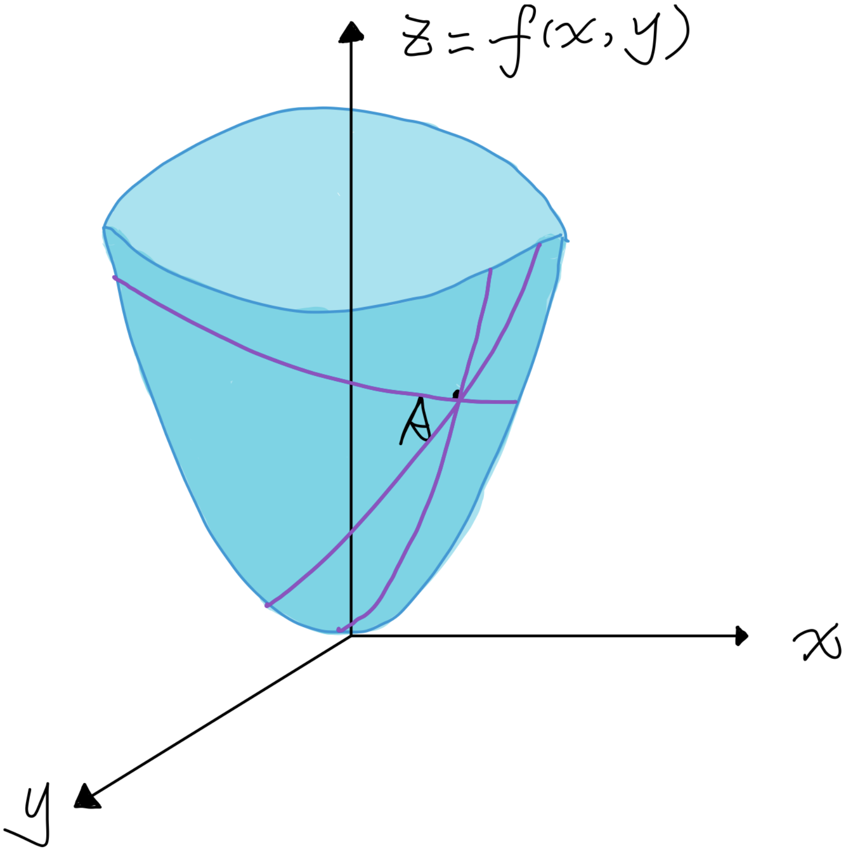
图中蓝色切线的斜率即为函数$f(x)$在A点的导数。

多元函数的全导数

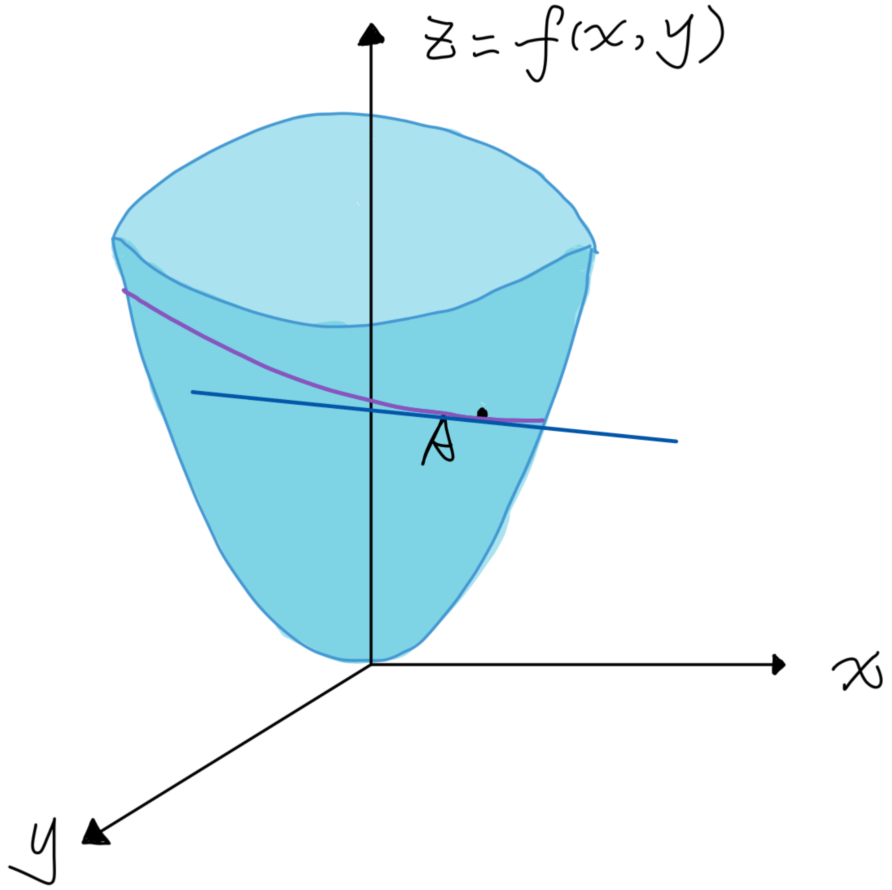
全导数非常简单，其实**全导数本质上就是一元函数的导数**。他是针对复合函数而言的定义。比如z=f(x,y)，x=u(t)，y=v(t)。那么z关于t的导数就是全导数。所以我说本质上就是个一元函数的导数，z本质上就是个关于t的一元函数。因此全导数没什么难于理解的，只不过为了复数函数的求导而被定义了出来。对于**真正的多元函数是没有全导数这一说**

的，只有偏导数、偏微分和全微分。

假设我们有一个二元函数$f(x,y)=x^2+y^2$, 过曲面上的一点A可以画无数道在曲面上的曲线:



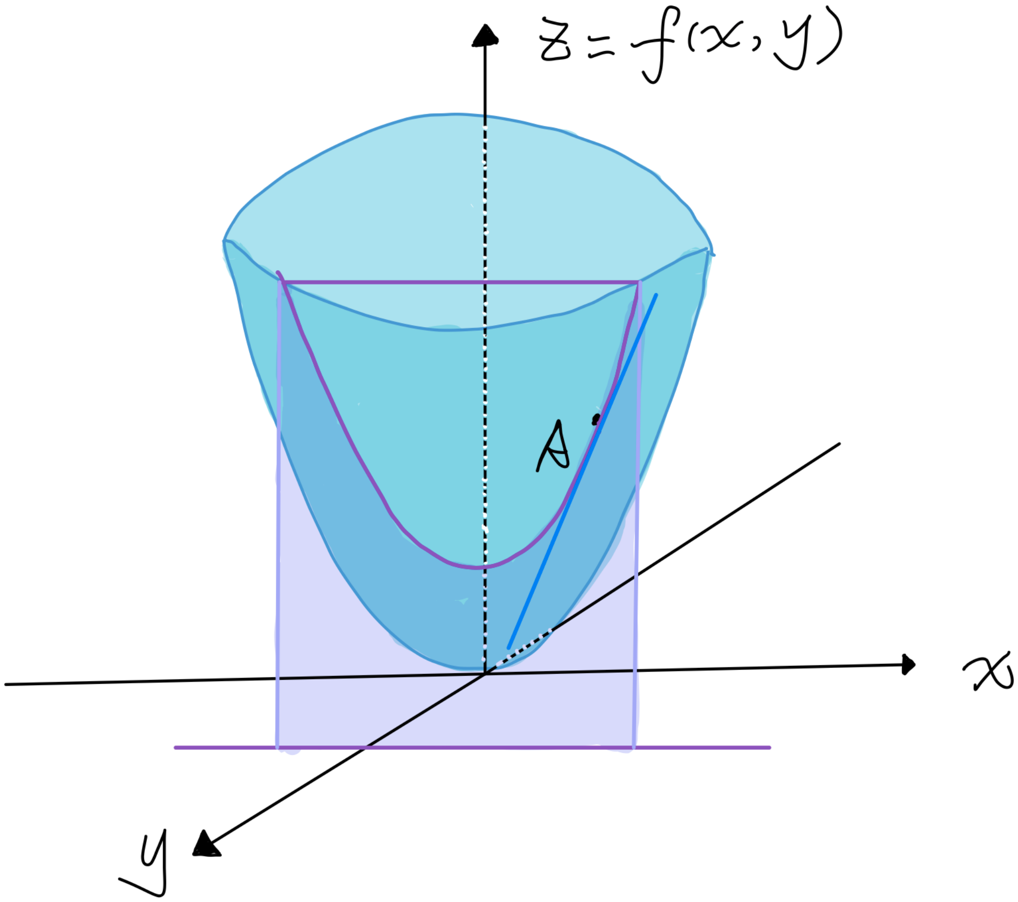
每根曲线都**可能**过A点作出一条切线:



每一条切线都和一个全导数“相关”，A点有无数个全导数。

偏导数

偏导数是特殊的全导数。
假设我们过A点作一条平行于x轴的直线，那么这个直线的方程为$y = y_A$。该直线和z轴会形成一个平面，这个平面与函数$f(x, y)$相交得到一条曲线，这条曲线的参数方程为$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = t \\ y = y_A \end{cases}$。此时函数$f(x, y)$的偏导数$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$就是该曲线经过$A$点的切线的斜率。



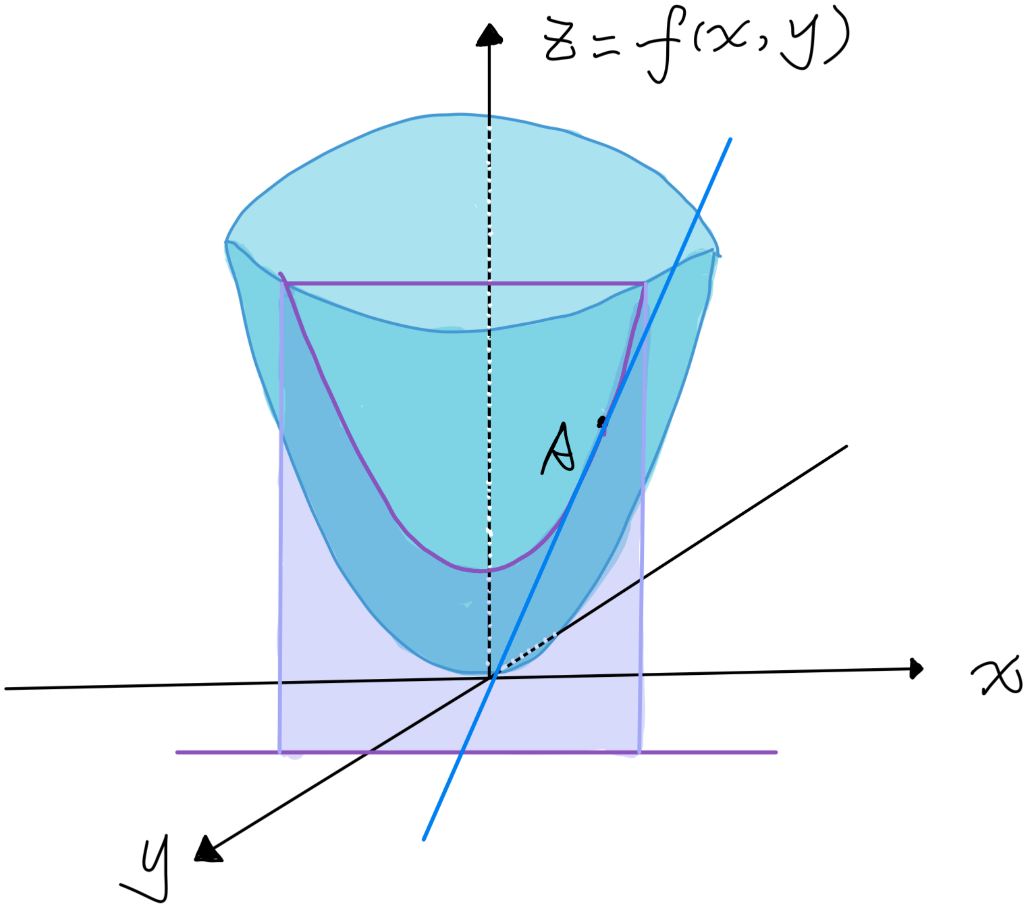
也就是说**偏导数是特定曲线（由平行于某个轴的直线决定的）所确定的全导数**。

方向导数

方向导数是特殊的全导数。
同样的，在xy平面上，我们可以用射线决定曲线。同样的，我们假设有一条射线为$(cos\alpha, sin\alpha)$，那么它所确定的曲线的参数方程为

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x = x_A + tcos\alpha & t \geq 0 \\ y = y_A + tsin\alpha & t \geq 0 \end{cases}$$

当我们将该曲线映射到zt平面上的时候，曲线也不会变形。
因此这条曲线的切线的斜率就是A点在射线方向上的方向导数。



方向导数的计算

我们可以通过偏微分得到任何方向的导数。
假设我们有一个单位向量$u = icosa + jsin\alpha$，那么沿着该方向的方向导数的定义为

$$
\begin{aligned}
D_u f &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tcos\alpha, y_0 + tsin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tcos\alpha, y_0 + tsin\alpha) - f(x_0, y_0 + tsin\alpha) + f(x_0, y_0 + tsin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t} \\
&= f_x(x, y)cos\alpha + f_y(x, y)sin\alpha
\end{aligned}
$$

利用偏微分我们可以得到方向导数为$D_u f = f_x(x, y)cos\alpha + f_y(x, y)sin\alpha$

全导数

在偏导数和方向导数的例子里， 我们得到的曲线是在一个平行于xy平面的平面上的，也就是说即使我们将该曲线映射到zt平面，该曲线也依然不会变形，因此， 曲线的切线与xyz空间中的切线是一致的，所以对于偏导数和方向导数，我们可以用曲线切线的斜率来代替全导数。
在xy平面上除了平行于x, y轴的直线， 和射线外。还有其他的曲线，他们也能决定$z = f(x, y)$曲面上的曲线。曲线的参数方程为

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

由于该曲线上的点不一定在同一平面上，因此我们无法将它映射到一个平面上。
一般来说（除了偏导、方向导数，下面说的全导全部指除了偏导和方向导数之外的），**全导数不是这根曲线的切线的斜率。**

多元函数的梯度

梯度：是一个矢量，其方向上的方向导数最大，其大小正好是此最大方向导数。
对于某个多元函数上的某个点，我们可以沿着不同的方向得到它的方向导数，这样的方向导数有无数个。

梯度的数学定义为：设函数$f(x, y)$在平面区域D内具有一阶连续偏导数，则对每一点$P(x_0, y_0) \in D$，都可以定义出一个向量$f_x(x_0, y_0)i + f_y(x_0, y_0)j$ 称为 $f(x, y)$ 在P点出的梯度，记作$\nabla f(x_0, y_0)$。
具有一阶连续偏导数，意味着可微。可微意味着函数**f(x,y)在各个方向的切线都在同一个平面上**，也就是切平面。
所有的切线都在一个平面上，每条曲线都与这个切平面相切，某一点一定有且只有一个（梯度为0的情况除外）最陡峭的地方（因为方向导数是切线的斜率，方向导数最大也就意味着最陡峭）。

梯度的计算

任意方向导数的大小为$D_u f = f_x(x, y)cos\alpha + f_y(x, y)sin\alpha$。当方向导数的方向在$(f_x(x, y), f_y(x, y))$的时候，$D_u f$能取到最大值，其最大值为向量$f_x(x, y), f_y(x, y)$的长度。

参考资料

1. 什么是全导数-知乎