Принцип Дирихле: задачи посложнее (решения)

Задача 1. Докажите, что у любого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

Решение. Рассмотрим грань с максимальным числом сторон N. Количество сторон в соседних с ней гранях принимает значения $3, 4, 5, \ldots, N$, а всего соседних граней N. По принципу Дирихле у двух граней будет одинаковое количество сторон. ■

Задача 2. В канун Нового года 10 друзей посылали праздничные открытки друг другу. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, пославшие открытки друг другу.

Решение. Всего отправлено 50 открыток. При этом «пар» друзей всего 45. По принципу Дирихле найдётся пара людей, получившая $\geqslant 2$ открытки, а значит, они послали открытки друг другу. ■

Задача 3. На большую «шахматную» доску 2017×2017 поставили 2017 ладей так, что ни одна из них не бьет другую. Докажите, что в любом квадрате 1009×1009 найдётся хотя бы одна ладья.

Задача 4. Петя пытается занумеровать вершины куба числами от 1 до 8 (без повторений) так, чтобы суммы чисел на концах каждого ребра куба были различны. Удастся ли ему это сделать?

Решение. Если «просуммировать» все рёбра, то с одной стороны, получим $(1+2+\ldots+8)\cdot 3 = 108$, с другой, их суммы принимают значения от 3 до 15, и легко понять, что не встречается число 9. Значит, встречаются суммы $3, 4, 5, 6$, а такого не может быть ($3, 4, 5$ получаются из рёбер $1-2, 1-3, 1-4$, и поэтому 6 не получится). ■

Задача 5. На шахматной доске стоят фигуры: на каждой горизонтали есть хотя бы одна фигура, а на разных горизонталях стоит разное число фигур. Докажите, что можно убрать часть фигур так, что на каждой вертикали и каждой горизонтали останется ровно одна фигура.

Решение. Так как на разных горизонталях стоит разное число фигур (и в каждой — не меньше одной), то количество фигур в горизонталях равно $1, 2, 3, \ldots, 8$. Рассмотрим горизонталь с одной фигурой. Эту фигуру обязательно надо оставить. В результате одна вертикаль уже занята. Далее рассмотрим горизонталь с двумя фигурами. В ней можно выбрать фигуру на «свободной вертикали», а вторую фигуру выкинуть, и.т.д. На k-ом шаге смотрим на горизонталь с k фигурами, и оставляем ту, которая не лежит на одной вертикали с уже выбранными фигурами. ■

Задача 6. В поход пошло 30 школьников. Оказалось, что среди любых 10 из них обязательно найдётся трое одноклассников. Докажите, что в походе приняло участие не менее 8 человек из одного класса.

Решение. Все классы, из которых пришёл один школьник, объединим в пары или тройки (условие задачи при этом, очевидно не нарушится). Если есть хотя бы 5 классов по 2 школьника, то условие не выполнено, так как 5 пар образуют 10 человек, в которых нет троих одноклассников. Поэтому классов не больше 4, а значит, найдётся класс, в котором не меньше $8 = \lceil \frac{30}{4} \rceil$ школьников. ■

Задача 7. Докажите, что из 51 натурального числа первой сотни можно выбрать 6 так, что никакие два из них не имеют одинаковых цифр в одном разряде.

Решение. По принципу Дирихле найдётся не менее 6 ($= \lceil \frac{51}{10} \rceil$) чисел, имеющих одинаковую первую цифру. Если вы уберём все целые числа с данной первой цифрой, останется не менее 41 числа. Значит, найдётся не менее 5 ($= \lceil \frac{41}{10} \rceil$) чисел с одинаковой первой цифрой. Продолжая так, получим $\geqslant 6$ чисел с первой цифрой a_1, $\geqslant 5$ чисел с первой цифрой a_2,и.т.д. Теперь по аналогии с задачей про шахматы, мы получим 6 чисел, у которых все цифры в каждом из разрядов разные. ■

Задача 8. Верно ли, что среди любых **а)** 34; **б)** 32 различных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два, одно из которых вдвое больше другого?

Решение. **в)** Разобьём числа на множества $(2k+1, 4k+2)$ (при $0 \leqslant k \leqslant 12$), $(4, 8)$, $(12, 24)$, $(16, 32)$, $(20, 40)$, (k) для оставшихся k — всего 33 множества. Из 34 чисел по принципу Дирихле 2 попадут в одно множество. ■

Задача 9. Даны 70 различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 200. Докажите, что какие-то два из них отличаются на 4, 5 или 9.

Решение. Прибавим к каждом из 70 чисел 4 и 9. Тогда три множества в сумме покрывают числа от 1 до 209, и их 210, значит, есть два повторяющихся. Если $a = b + 4$, то противоречие, если $a = b + 9$, то также противоречие, а если $a + 4 = b + 9$, то $a = b + 5$. ■

Задача 10. Даны 50 различных натуральных чисел, 25 из которых не больше 50, а остальные больше 50, но не больше 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

Решение. Если вычесть из второй группы чисел по 50 мы получим все числа от 1 до 50. Их сумма равна $1+2+\ldots+50 = \frac{50\cdot 51}{2} = 25\cdot 51$. Прибавив обратно искомые числа, получим, $25\cdot 51+25\cdot 50 = 25\cdot 101 = 2525$. ■

Задача 11. Из ряда 1, 2,..., 200 выбрали 101 число. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

Решение. Для каждого нечётного числа k построим цепочку $k, 2k, 4k, \ldots$. Тогда числа от 1 до 200 образуют 100 цепочек, поэтому из произвольных 101 числа как минимум два попадут в одну цепочку, и тогда одно из них делится на другое. ■

Задача 12. Числа 1, 2, ..., 600 выписаны в строчку в неком порядке. Сумма любых двух соседних чисел не больше 800. Докажите, что сумма каких-то двух чисел, идущих через одно, больше 800.

Решение. Рассмотрим числа $400, \ldots, 600$. Их 201, значит, найдётся тройка подряд идущих чисел, два из которых из данного списка. Но их сумма больше 800, значит они стоят через одно число и утверждение доказано. ■

Задача 13. На пир собралось 100 людоедов. Известно, что среди любых 10 хотя бы один оказался в желудке у другого (из этой десятки). Докажите, что есть «матрёшка» из 12 людоедов, каждый из которых (кроме последнего) находится в желудке у следующего.

Решение. Разобьём всех людоедов на «матрёшки». Тогда количество матрёшек не больше 9, так как иначе нашлось бы 10 людоедов из разных цепочек, и тогда ни один не оказался бы в желудке у другого. По принципу Дирихле в одной из цепочек находится не менее $\lceil \frac{100}{9} \rceil$ людоедов, а значит, как минимум 12. ■

Задача 14. Пять школьников решили в воскресенье посмотреть все новые фильмы последнего месяца. Для этого был выбран семизальный кинотеатр, в котором сеансы начинаются в 9.00, 10.40, 12.20, 14.00, 15.40, 17.20, 19.00, 20.40 и 22.00. На каждый сеанс школьники делились на две группы, одна шла в один зал, а другая — в другой. Вечером выяснилось, что каждый школьник побывал в каждом зале. Докажите, что в каждом из залов был сеанс, на котором никто из школьников не был.

Решение. Рассмотрим всевозможные пары (зал, сеанс). Всего таких пар школьниками было посещено 18 (сеансов 9, каждый сеанс школьники делились на две группы). При этом каждый зал был посещен как минимум два раза (чтобы каждый школьник побывал в каждом зале). Следовательно, ни в одном зале школьники не посетили больше 7 сеансов (оставшихся 11 не хватит, чтобы посетить 6 залов по 2 раза). Поэтому в каждом зале найдётся такой сеанс. ■

Задача 15. В течение прошлого учебного года Саша каждый день решал хотя бы одну задачу по математике. Однако, боясь перетрудиться, за неделю он решал не более 12 задач. Докажите, что можно найти несколько последовательных дней, в течение которых Саша решил ровно 20 задач.

Решение. Пусть a_k — количество решённых задач от 1 до k-ого дня. Рассмотрим 700 чисел $a_1, a_1+20, a_2, a_2+20, \ldots, a_{350}, a_{350}+20$. Заметим, что $a_{350} \leqslant 12\cdot 50 = 600$, то есть максимальное число не превосходит 620, значит, по принципу Дирихле какие-то два числа совпадают. Так как $a_1 < a_2 < \ldots < a_{350}$, то совпадают a_m и $a_n + 20$. Тогда в дни между n-ым и m-ым Саша решил ровно 20 задач. ■

Задача 16. В банде 50 гангстеров. Все вместе они ни в одной разборке ни разу не участвовали, а каждые двое встречались на разборках ровно по разу. Докажите, что кто-то из гангстеров был не менее, чем на восьми разборках.

Решение. Пусть утверждение неверно. Предположим, что в какой-то разборке (назовём её *кровавой*) участвовало не менее 8 гангстеров. Тогде те, кто не принимал участие в этой разборке, должны встретиться с каждым из «кровавых» гангстеров по отдельности, то есть принять участие в не менее, чем в 8 разборках. Если же кровавых разборок нет, то в каждой разборке принимает участие не более 7 гангстеров, и поэтому каждому, чтобы со всеми встретиться, надо принять участие в не менее, чем $\left\lceil \frac{49}{6} \right\rceil = 8$ разборках. ■

Задача 17. В каждом из двух одинаковых правильных 16-угольников отметили по 7 вершин. Докажите, что можно так наложить эти многоугольники друг на друга, чтобы не менее 4 отмеченных вершин одного многоугольника совпали с отмеченными вершинами другого.

Решение. Зафиксируем один многоугольник, а второй будем накладывать на него всеми возможными способами. Всего способов «наложить» многоугольник 16, при этом во всех наложениях будет $7 \cdot 7 = 49$ «совпадений» отмеченных точек (каждая встретится с каждой). Значит, по принципу Дирихле в каком-то из наложений будет как минимум $\left\lceil \frac{49}{16} \right\rceil = 4$ отмеченных точек.
■

Задача 18. Доска 6×6 разбита на доминошки. Докажите, что можно разрезать доску по прямой на две части, не повредив ни одной доминошки.

Решение. Покажем, что любая прямая, проходящая по линиям клеток, разрезает чётное количество доминошек. С каждой из двух сторон относительно любой такой прямой будет чётное число клеток (так как каждая из двух частей, на которые оказалась разрезана доска, состоит из нескольких строк или столбцов по 6 клеток). Но если оказалось, что прямая разрезала нечётное число доминошек, то каждая из этих частей должна состоять из нескольких доминошек по 2 клетки и нечётного количества половинок доминошек по 1 клетке. Т.е. в этом случае такие части должны состоять из нечётного количества клеток. Противоречие.

Предположим теперь, что любая из 10 прямых (5 вертикальных, 5 горизонтальных) разрезает хотя бы одну доминошку. Так как 1 — нечётное число, то каждой прямой должно быть пересечено хотя бы 2 доминошки. При этом каждая доминошка может быть пересечена не более, чем одной прямой. Значит, всего доминошек должно быть не меньше, чем $102 = 20$. Но их только $36 : 2 = 18$. Противоречие. Значит, есть прямая, которая не пересекает ни одной доминошки. По ней и нужно разрезать доску. ■

Задача 19. **а)** Докажите, что если в $3n$ клетках таблицы $2n \times 2n$ расставлены $3n$ звёздочек, то можно вычеркнуть n столбцов и n строк так, что все звёздочки будут вычеркнуты.
б) Докажите, что в таблице $2n \times 2n$ можно расставить $3n + 1$ звёздочек, так что при вычёркивании любых n строк и любых n столбцов остаётся невычеркнутой хотя бы одна звёздочка.

Решение. Вычеркнем n строк с наибольшим количеством звёздочек. Менее $2n$ звёздочек в них быть не может — это означало бы, что в одной из этих n строк не более одной звёздочки, тогда и в оставшихся n строках не более, чем по одной звёздочке, так что всего звёздочек меньше, чем $2n + n = 3n$. Итак, вычеркнуто не менее $2n$ звёздочек; оставшиеся (не более n) звёздочки можно убрать, вычеркнув соответствующие столбцы. ■