a) Сколько клеток в k-том уголке? **b)** Чему равна суммарная площадь первых k уголков?

Problem 2. a) Yemy равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел?

- **b)** Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел?
- с) Вычислите сумму 100 последовательных нечётных чисел, начиная со 179.

Problem 3. Числа $T_1=1,\ T_2=3,\ T_3=6,\ T_4=10,\ \dots$ греческий математик Диофант называл mpeугольными: \square , \boxplus , \boxplus , ... Четырёхугольные числа \square , \boxplus , \boxplus ,

- а) Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат.
- **b)** Что получится при сложении T_n с T_n ?
- $(c)^{\circ}$ Выразив T_n через n, найдите сумму $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

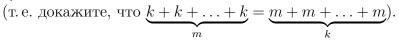
Problem 4. a) Чему равна сумма первой сотни натуральных чисел?

b) А сумма второй сотни?

Problem 5. Докажите геометрически, что $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$.

Problem 6. (Пифагорова таблица умножения)

а) Докажите тождество mk = km



b) Каковы размеры и площадь таблицы на рисунке 1?

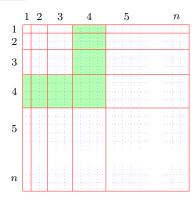


Рис. 1. Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n

Problem 7. a) Докажите геометрически, что $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = n^2$.

b) Сколько клеток в k-м, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» уголке, «вершина» которого — квадрат $k \times k$, а «стороны» составлены из прямоугольников $1 \times k$, $2 \times k$, ..., $(k-1) \times k$? (На рисунке 1 зелёным цветом отмечен 4-й уголок.)

c) Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Problem 8. Объясните равенство на рисунке 2 и получите формулу для суммы квадратов $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

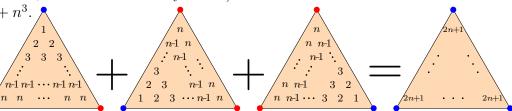


Рис. 2. Сумма квадратов -1

Problem 9*. С помощью рисунка 3 получите ещё один способ найти формулу для суммы кубов.

Problem 10*. С помощью рисунка 4 получите ещё один способ найти формулу для суммы квадратов.

Problem 11.** Используя таблицу на рисунке 5, выведите формулу для суммы $1^4 + 2^4 + ... + n^4$.

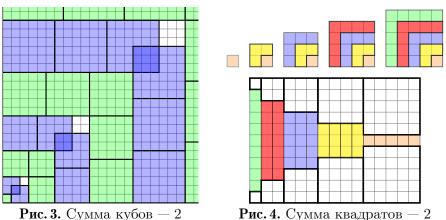


Рис. 4.	Сумма	квадратов		2
---------	-------	-----------	--	---

	1^2	2^2	3^2	k^2	n^2
1	1.1^{2}	$1\cdot 2^2$	1.3^2	$1 \cdot k^2$	$1 \cdot n^2$
2	$2 \cdot 1^{2}$	$2 \cdot 2^2$	2.3^{2}	$2 \cdot k^2$	$2 \cdot n^2$
3	3.1^{2}	3.2^{2}	3.3^{2}	$3 \cdot k^2$	$3 \cdot n^2$
k	$k \cdot 1^2$	$k \cdot 2^2$	$k \cdot 3^2$	$k \cdot k^2$	$k \cdot n^2$
n	$n \cdot 1^2$	$n \cdot 2^2$	$n \cdot 3^2$	$n \cdot k^2$	$n \cdot n^2$

Рис. 5. Сумма четвёртых степеней

$\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$	1 b	2 a	2 b	$\begin{bmatrix} 2 \\ c \end{bmatrix}$	3 a	3 b	$\begin{bmatrix} 3 \\ c \end{bmatrix}$	4 a	4 b	5	6 a	6 b	7 a	7 b	7 c	8	9	10	11