**Задача 1.** Рассмотрим последовательность «уголков»: □, □, □, □, □, □, ...

а) Сколько клеток в k-том уголке? **б**) Чему равна суммарная площадь первых k уголков?

Задача 2. а) Чему равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел?

- **б)** Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел?
- в) Вычислите сумму 100 последовательных нечётных чисел, начиная со 179.

**Задача 3.** Числа  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 3$ ,  $T_3 = 6$ ,  $T_4 = 10$ , . . . греческий математик Диофант называл *треуголь* ными:  $\square$  ,  $\boxplus$  ,  $\boxplus$  , ... Четырёхугольные числа  $\square$  ,  $\boxplus$  ,  $\boxplus$  ,  $\boxplus$  , ... — это квадраты.

- а) Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат.
- **б)** Что получится при сложении  $T_n$  с  $T_n$ ?
- в) выразив  $T_n$  через n, найдите сумму  $1+2+3+\cdots+n$ .

Задача 4. а) Чему равна сумма первой сотни натуральных чисел?

б) А сумма второй сотни?

**Задача 5.** Докажите геометрически, что  $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$ .

Задача 6. (Пифагорова таблица умножения)

а) Докажите тождество mk = km

(т. е. докажите, что  $\underbrace{k+k+\ldots+k}_m = \underbrace{m+m+\ldots+m}_k$ ).



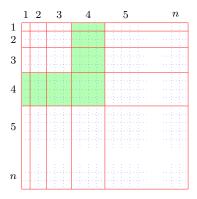


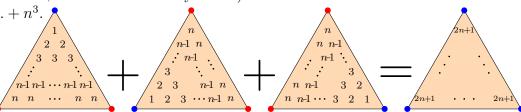
Рис. 1. Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n

**Задача 7.** а) Докажите геометрически, что  $1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=n^2$ .

**б)** Сколько клеток в k-м, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» уголке, «вершина» которого — квадрат  $k \times k$ , а «стороны» составлены из прямоугольников  $1 \times k$ ,  $2 \times k$ , ...,  $(k-1) \times k$ ? (На рисунке 1 зелёным цветом отмечен 4-й уголок.)

в) Найдите сумму  $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ .

Задача 8. Объясните равенство на рисунке 2 и получите формулу для суммы квадратов  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .

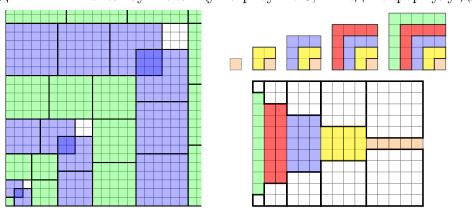


**Рис. 2.** Сумма квадратов — 1

Задача 9\*. С помощью рисунка 3 получите ещё один способ найти формулу для суммы кубов.

Задача 10\*. С помощью рисунка 4 получите ещё один способ найти формулу для суммы квадратов.

**Задача 11\*\*.** Используя таблицу на рисунке 5, выведите формулу для суммы  $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$ .



**Рис. 3.** Сумма кубов — 2

**Рис. 4.** Сумма квадратов — 2

	$1^2$	$2^2$	$3^2$	$k^2$	$n^2$
1	$1.1^{2}$	$1.2^{2}$	$1.3^{2}$	$1 \cdot k^2$	$1 \cdot n^2$
2	$2 \cdot 1^{2}$	$2 \cdot 2^2$	$2.3^{2}$	$2 \cdot k^2$	$2 \cdot n^2$
3	$3.1^{2}$	$3.2^{2}$	$3.3^{2}$	$3 \cdot k^2$	$3 \cdot n^2$
k	$k \cdot 1^2$	$k \cdot 2^2$	$k \cdot 3^2$	$k \cdot k^2$	$k \cdot n^2$
n	$n \cdot 1^2$	$n \cdot 2^2$	$n \cdot 3^2$	$n \cdot k^2$	$n \cdot n^2$

Рис. 5. Сумма четвёртых степеней

$\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$	2 a	2 6	2 B	3 a	3 6	3 B	4 a	4 6	5	6 a	6 6	7 a	7 6	7 B	8	9	10	11