

Задача. Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить её график.

1. Укажите естественную область определения функции, если область определения не задана.
2. На черновике набросайте приблизительный график функции для того, чтобы лучше понимать, о чём речь. После каждого пункта отмечайте на графике разрывы, экстремумы, нули и т.д. При необходимости обновите набросок графика.
3. Укажите множество значений (скорее всего, она будет известна после нахождения экстремумов).
4. Выясните наличие симметрий у графика (чётность, нечётность функции). Выясните, периодична ли данная функция, и, если это возможно, найдите её минимальный положительный период.
5. Найдите нули функции и точки разрыва (если они есть).
6. Найдите промежутки знакопостоянства функции (обычно, методом интервалов). Результат — таблица (a_1, a_2 — нули функции или точки, где $f(x)$ не определена или разрывна):

	$(-\infty, a_1)$	a_1	(a_1, a_2)	a_2	$(a_2, +\infty)$
$f(x)$	+	0	+	0	—

7. Изучите поведение функции в граничных точках области определения, в окрестности точек разрыва и на бесконечности.
8. Найдите все асимптоты. Найдите точку пересечения графика с наклонной асимптотой.
9. Найдите производную функцию $f'(x)$ в тех точках, где она существует, критические точки, и исследуйте функцию на монотонность и экстремумы с помощью первой производной. Результат — таблица (b_1, b_2 — точки, в которых производная равна нулю или не определена):

	$(-\infty, b_1)$	b_1	(b_1, b_2)	b_2	$(b_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	—
$f(x)$	\nearrow	$f(b_1)$	\nearrow	$f(b_2)$	\searrow
		—		максимум	

10. Найдите вторую производную $f''(x)$ в тех точках, где она существует, и исследуйте функцию на выпуклость и точки перегиба с помощью второй производной. Результат — таблица (c_1, c_2 — точки, в которых вторая производная либо равна нулю, либо не определена):

	$(-\infty, c_1)$	c_1	(c_1, c_2)	c_2	$(c_2, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	+	0	—
$f'(x)$		$f'(c_1)$		$f'(c_2)$	
$f(x)$	\cup	$f(c_1)$	\cup	$f(c_2)$	\cap
		—		т.перегиба	

11. Сделайте крупный эскиз графика функции, отметив на нём характерные особенности графика (см. пп. 1–10) и некоторые контрольные значения, в частности точку пересечения с осью ординат, и, если это возможно, точки пересечения с осью абсцисс.

Задача 1. Постройте (с полным исследованием) графики следующих функций:

а) $x + \frac{1}{x}$; б) $\frac{x+3}{2-x}$; в) $\sqrt{x(1+x)}$; г) $x \arctg x$; д) $\frac{x}{(x+1)^2}$; е) $\sqrt[3]{9-x^3}$; ж) $\frac{x^3}{1-x^2}$; з)* $\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	1 е	1 ж	1 з