Листок №34 — **Логарифм, экспонента и число e** — 11.2016

Задача 1. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две такие функции, что на некотором промежутке $(F_1(x))' = (F_2(x))'$. Докажите, что найдется такая константа C, что $F_1(x) = F_2(x) + C$ на этом промежутке.

Определение 1. *Натуральным логарифмом* положительного числа t назовем интеграл $\int\limits_1^t \frac{1}{x}\,dx$. Обозначение: $\ln t$.

Задача 2. Докажите, что $(\ln t)' = 1/t$.

Задача 3. Докажите, что натуральный логарифм — монотонно возрастающая функция.

Задача 4. **а)** Пусть a — положительное число. Найдите производную функции $\ln at$.
б) Докажите, что $\ln ab = \ln a + \ln b$ для любых положительных чисел a и b.

Задача 5. Докажите, что $\ln t^r = r \ln t$ при любом рациональном r.

Задача 6. Докажите, что $\ln t$ неограниченно возрастает при $t \to +\infty$.

Задача 7. Докажите, что уравнение $\ln t = a$ имеет единственное решение при любом $a \in \mathbb{R}$ (при $a = 1$ это решение обозначается буквой e).

Задача 8. **а)** Пусть f — непрерывная функция. Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right)$ (если указанный справа предел существует и вместе с последовательностью (x_n) принадлежит области определения функции f). **б)** Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+1/n)}{1/n} = 1$, и выведите отсюда, что $e = \lim\limits_{n\to+\infty} (1+1/n)^n$, то есть новое определение числа e совпадает со старым.

Задача 9. Докажите, что функция $y = \ln t$ имеет обратную функцию (обозначим ее $E(y)$). Где определена эта функция? Непрерывна ли она? Как ведет себя эта функция при $y \to -\infty$ и при $y \to +\infty$?

Задача 10. Докажите, что $E(a) \cdot E(b) = E(a+b)$ при любых a и b из $\mathbb{R}$.

Задача 11. Докажите, что $E(r) = e^r$ при любом рациональном r.

Определение 2. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Определим x-тую степень числа e формулой $e^x = E(x)$. В результате
1) получилась непрерывная на $\mathbb{R}$ функция,
2) для рациональных x определение e^x эквивалентно известному из алгебры,
3) $e^a e^b = e^{a+b}$ при любых a и b из $\mathbb{R}$.

Задача 12. Найдите производную функции e^x.

Задача 13. Докажите, что $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + x/n)^n$.

Задача 14. Пусть a — положительное число. Определите для каждого $x \in \mathbb{R}$ число a^x так, чтобы a^x была непрерывной функцией от x, причем для рациональных чисел x определение a^x было эквивалентно уже известному из алгебры.

Задача 15. Докажите, что $a^x a^y = a^{x+y}$ при любых x и y из $\mathbb{R}$.

Задача 16. Найдите производную функции a^x.

Определение 3. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $x \mapsto x^\alpha$, определённая на множестве $\mathbb{R}_+$, называется *степенной функцией,* а число α называется *показателем степени.*

Задача 17. Представьте степенную функцию в виде композиции показательной и логарифмической функций.

Задача 18. Найдите производную функции x^α, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задача 19. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ условию **а)** $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$; **б)** $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$; **в)** $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$.

Задача 20*. Сколько решений имеет уравнение $\log_{1/16} x = \left(\dfrac{1}{16}\right)^x$?

1	2	3	4 а	4 б	5	6	7	8 а	8 б	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19 а	19 б	19 в	20