Листок №28 — **Производная. Касательная** — 02.2016

Определение 1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности U точки a. Для каждой точки $\alpha \in U$, $\alpha \neq a$, рассмотрим *секущую*: прямую $l_\alpha = k_\alpha x + c_\alpha$, проходящую через точки $(a, f(a))$ и $(\alpha, f(\alpha))$ (напишите её уравнение). Если существует предельная прямая $l = (\lim\limits_{\alpha\to a} k_\alpha)x + (\lim\limits_{\alpha\to a} c_\alpha)$ для семейства прямых l_α при $\alpha \to a$, то она называется *касательной* к графику f в точке a.

Задача 1°. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Задача 2. Под каким углом пересекаются кривые: **а)** $y = x^2$ и $x = y^2$; **б)** $y = \sin x$ и $y = \cos x$?

Задача 3. Найдите геометрическое место точек, из которых парабола $y = x^2$ видна под прямым углом.

Задача 4. Найдите касательную к параболе $y = \frac{x^2-3x+3}{3}$, параллельную прямой $y = x$.

Задача 5. Докажите, что отрезок любой касательной к графику функции $y = 1/x$, концы которого расположены на осях координат, делится точкой касания пополам.

Задача 6. Докажите, что касательная к гиперболе $xy = a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади.

Задача 7. **а)** Напишите уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = 1$ в точке (x_0, y_0). **б)** Докажите, что эта касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку (x_0, y_0).

Задача 8. В каком наибольшем конечном числе точек прямая может касаться синусоиды?

Задача 9. Пусть функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$, точка A плоскости не лежит на графике функции f, и M — такая точка графика функции f, что расстояние AM минимально. Докажите, что отрезок AM перпендикулярен касательной к графику f в точке M.

Задача 10. Параллельный пучок лучей, падающий на параболу $y = x^2$ по вертикали сверху, отражается от неё по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что все лучи этого пучка после первого отражения пройдут через одну и ту же точку, и найдите эту точку.

Задача 11*. Докажите, что любая касательная к гиперболе $y = 1/x$ образует равные по величине углы с двумя прямыми, одна из которых проходит через точку касания и точку $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, а другая — через точку касания и точку $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Задача 12*. Дана гипербола с фокусами F_1 и F_2. Докажите, что поток лучей из точечного источника света F_1, отразившись от гиперболы, предстанет стороннему наблюдателю как поток лучей от точечного источника в F_2.

Задача 13*. **а)** Из точки A проведены касательные AB и AC к эллипсу с фокусами F_1 и F_2. Докажите, что $\angle F_1AB = \angle F_2AC$. **б)** Докажите, что луч, выпущенный из внутренней точки эллипса, отражаясь от зеркальных стенок эллипса, будет всегда касаться некоторого другого эллипса или гиперболы, если он не проходит через фокусы эллипса и не летает по одной прямой.

Задача 14*. Существует ли окружность, пересекающая параболу $y = x^2$ ровно в двух точках, причём в одной из этих точек у параболы и окружности есть общая касательная, а в другой — нет?

1	2 а	2 б	3	4	5	6	7 а	7 б	8	9	10	11	12	13 а	13 б	14