

Всюду в этом листке, где упоминается пространство \mathbb{R}^n , имеется в виду, что оно снабжено евклидовой метрикой $d_{\mathcal{J}}$.

Под словом «функция» подразумевается отображение в \mathbb{R} .

Определение 1. Точка a метрического пространства M называется *предельной точкой* множества $X \subset M$, если в любой ε -окрестности точки a найдётся точка из X .

Определение 2. Подмножество U метрического пространства M называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит какую-нибудь её ε -окрестность.

Определение 3. Подмножество B метрического пространства M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 1°. Докажите, что $U \subset M$ открыто тогда и только тогда, когда $M \setminus U$ замкнуто.

Задача 2. Пусть M снабжено дискретной метрикой. Опишите все его открытые подмножества.

Задача 3. Множество X на плоскости обладает таким свойством, что его пересечение с любой прямой есть открытое подмножество этой прямой. Обязательно ли X открытое? Тот же вопрос, если все слова «открытое» заменить на «замкнутое».

Определение 4. Отображение $f: M \rightarrow N$ непрерывно в точке $t \in M$, если для любой последовательности (x_i) , сходящейся к t , последовательность $(f(x_i))$ сходится к $f(t)$. Если f непрерывно во всех точках множества M , то говорят, что f непрерывно на M .

Определение 5. Отображение $f: M \rightarrow N$ *непрерывно на M* (или просто *непрерывно*), если прообраз любого открытого множества открыт.

Задача 4°. Докажите эквивалентность определений 4 и 5.

Задача 5. Рассмотрим на \mathbb{R}^2 функции вычисления суммы, разности, произведения и частного координат. Докажите, что они непрерывны на своей области определения.

Задача 6°. Докажите, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

Задача 7. Докажите, что сумма и произведение непрерывных функций непрерывны.

Задача 8. Докажите, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

Задача 9. Верно ли, что при непрерывном отображении открытые множества переходят в открытые? А замкнутые в замкнутые?

Задача 10. Пусть пространство M таково, что для любого метрического пространства N любое отображение $f: M \rightarrow N$ непрерывно. Что можно сказать об M ?

Задача 11. Пусть пространство N таково, что для любого метрического пространства M любое отображение $f: M \rightarrow N$ непрерывно. Что можно сказать об N ?

[illegible]

