

Пусть перед обществом из n человек стоит l альтернатив, и каждый из участников упорядочивает их в соответствии со своими предпочтениями, а по результатам опроса определяется коллективное решение. Это означает, что набору $P = \{<_1, <_2, \dots, <_n\}$ мнений¹ — строгих линейных порядков на множестве альтернатив A — сопоставляется нестрогий линейный порядок \leq_P на A (альтернативам разрешается быть равнозначными с точки зрения общества).

Определение 1. Набор $<_1, <_2, \dots, <_n$ называется *профилем*, а отображение из множества профилей в множество нестрогих линейных порядков на A — *функционалом общественного выбора*.

Определение 2. Функционал общественного выбора мы будем называть *справедливым*, если он обладает следующими свойствами:

эффективность по Парето: если в профиле P для некоторых альтернатив x и y $x <_k y$ для любого участника k , то $x \leq_P y$ и не $y \leq_P x$;

независимость от посторонних альтернатив: если в профиле P каждый участник сравнил альтернативы x и y так же, как в профиле P' , то $x \leq_P y \iff x \leq_{P'} y$.

Задача 1. а) При каких l правило простого большинства (общество считает, что $x \leq y$ если и только если хотя бы для половины участников $x < y$) задает функционал общественного выбора? б) Является ли этот функционал эффективным? Независимым от посторонних альтернатив?

Задача 2. Пусть в данном профиле альтернатива заняла i -е по счету место в предпочтениях j -го участника. Присвоим ей рейтинг — сумму мест в предпочтениях всех участников, и упорядочим альтернативы по возрастанию рейтинга (такой способ формирования коллективного решения называется *правилом Борда*).

а) Задает ли правило Борда функционал общественного выбора?

б) Является ли правило Борда эффективным? Независимым от посторонних альтернатив?

Задача 3. а) Придумайте свой способ формирования коллективного решения. При каких l он является справедливым? б) Зачем в определении справедливого функционала требовать независимость от посторонних альтернатив?

Задача 4. Определите, что такое диктаторский функционал. Является ли он эффективным? Независимым от посторонних альтернатив?

Теорема Эрроу о диктаторе. Пусть число альтернатив больше двух. Тогда справедливый функционал общественного выбора является диктаторским.

Всюду ниже будем считать, что задан функционал общественного выбора, удовлетворяющий условиям теоремы Эрроу. Будем обозначать $P_{xy} = \{k : x <_k y\}$.

Задача 5. (*лемма о нейтральности*) Пусть для некоторых альтернатив x, y, z $P_{xy} = P_{xz}$, и $x \leq_P y$. Тогда $x \leq_P z$.

Задача 6. (*лемма об экстремальной альтернативе*) Назовем альтернативу a *экстремальной* в профиле P , если для каждого участника a либо лучшая, либо худшая. Докажите, что в коллективном мнении экстремальная альтернатива займет либо первое, либо последнее место.

Задача 7. (*доказательство теоремы Эрроу*) Рассмотрим серию профилей, отличающихся друг от друга только мнением участников о некоторой альтернативе a : в первом профиле все считают a лучшей альтернативой, во втором профиле участник 1 считает a худшей, а остальные — лучшей, в третьем профиле участники 1 и 2 считают a худшей, а остальные — лучшей, и т.д. В последнем, $(n+1)$ -м профиле все будут считать a худшей.

а) Исходя из значений функционала на этих профилях, угадайте, кто диктатор.

б) Докажите, что он действительно диктатор.

¹ «меньше» = «хуже»