

**Задача 1.** Найдется ли  $n$ , при котором многочлен  $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$  имеет более одного корня из  $\mathbb{R}$ ?

**Задача 2.** Может ли уравнение  $x(x^2 - 1)(x^2 - 1000) = \alpha$  при некотором  $\alpha \in \mathbb{R}$  иметь 5 целых корней?

**Задача 3.** Пусть  $k \in \mathbb{R}$ , функция  $f$  определена на  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$ , причем  $|f'(x)| \leq k$  при любом  $x \in (a, b)$ . Докажите, что при любых  $x, y \in (a, b)$  выполнено неравенство  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ .

**Задача 4.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  не является точной четвёртой степенью. Докажите, что тогда  $\{\sqrt[4]{n}\} > \frac{1}{4}n^{-3/4}$ .

**Задача 5.** Найдите суммы: а)  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ ; б)  $C_n^1 + 2C_n^2x + \dots + nC_n^nx^{n-1}$ .

**Задача 6.** а) Точка с координатами  $(x(t), y(t))$  движется в плоскости  $xOy$  так, что в каждый момент времени  $t$  выполнено  $y'(t) = 1/x(t)$ ,  $x'(t) = -1/y(t)$ . В некий момент времени точка имела координаты  $(12, 3)$ . Может ли она в какой-нибудь другой момент иметь координаты  $(6, 5)$ ? Нарисуйте траекторию движения точки. б) Те же вопросы для точки, движущейся по закону  $y'(t) = -x(t)$ ,  $x'(t) = y(t)$ .

**Задача 7.** а) Для каждого  $x$  из множества  $\{-2, -1, -1/2, -1/3, 0, 1/3, 1/2, 1, 2\}$  нарисуйте на плоскости  $pOq$  график прямой, задающейся уравнением  $x^3 + px + q = 0$ . Докажите, что все прямые вида  $x^3 + px + q = 0$  на плоскости  $pOq$  касаются некоторой кривой. Что это за кривая?

**б)** Задайте уравнением множество таких точек  $(p, q)$ , что многочлен  $x^3 + px + q$  имеет кратный корень. Нарисуйте на плоскости это множество, а также множества таких точек  $(p, q)$ , что  $x^3 + px + q$  имеет три разных корня, корень кратности 2, корень кратности 3, не имеет действительных корней.

в) Сколько корней у многочлена  $x^3 - 10x + 12$ ?

г) Исследуйте геометрически число корней уравнения  $x^3 + px + q = 0$  на отрезке  $[-1; 1]$ .

**Задача 8.** Пусть  $f$  определена на  $[0, 1]$  и дифференцируема на  $(0, 1)$ , причём  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . Докажите, что тогда найдутся такие различные  $s, t \in [0, 1]$ , что  $f'(s) \cdot f'(t) = 1$ .

**Задача 9.** Петя идёт **а)** по плоскому полю; **б)** по холмистой местности из пункта  $A$  в пункт  $B$ , нигде не останавливаясь. Всегда ли на его пути найдётся точка, вектор скорости в которой параллелен  $AB$ ?

**Задача 10.** Вычислите пятьдесят седьмую производную в нуле у функции  $\arcsin(x^{13} + x^{22})$ .

**Задача 11.** Докажите, что у многочлена  $x^{1024} + a_1x^{512} + a_2x^{256} + \dots + a_9x + a_{10}$ , где  $a_1, \dots, a_{10} \in \mathbb{R}$ , может быть не более 11 различных положительных действительных корней.

**Задача 12.** Пусть  $P(x)$  — многочлен степени  $n > 1$ , имеющий  $n$  различных корней  $x_1, \dots, x_n$ . Докажите, что справедливо равенство  $\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \dots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0$ .

**Задача 13.** Функция  $f$  дифференцируема на  $\mathbb{R}$ . Верно ли, что  $f'$  ограничена на любом отрезке?

**Задача 14\*.** Найдите все такие дифференцируемые  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $f'(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$  при любых  $x \neq y$ .

**Задача 15\*.** Решите в натуральных числах уравнение  $x^y = y^x$ . (Указание: изучите функцию  $f(x) = x^{1/x}$ ).

**Задача 16\*.** (Правило Лопиталья) Пусть функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ , причем  $g'$  не обращается в ноль на  $(a, b)$  и **а\lim\_{x \rightarrow b} f(x) = \lim\_{x \rightarrow b} g(x) = 0; **б**)  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = +\infty$ .**

Предположим, что существует предел  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ . Докажите, что предел  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$  существует и равен  $k$ .

**Задача 17\*.** Останется ли верным правило Лопиталья, если заменить в условии  $b$  и/или  $k$  на  $\pm\infty$ ?

**Задача 18\*.** Найдите пределы: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / x^\alpha$  при  $\alpha > 0$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ .

**Задача 19\*.** Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — дважды дифференцируемая функция на отрезке  $[0, a]$ ,  $f(0) = f(a) = 0$  и  $f''$  непрерывна на отрезке  $[0, a]$ . **а)** Докажите, что при  $a = \pi$  справедливо утверждение: «существует такая точка  $\xi \in (0, a)$ , что  $f''(\xi) + f(\xi) = 0$ ». **б)** Верно ли утверждение предыдущего пункта для  $a = 3$ ?

**Задача 20\*\*.** Существует ли непрерывная на  $\mathbb{R}$  функция, ни в одной точке не имеющая производной?

**Задача 21.** а) Функция  $f$  дифференцируема  $n$  раз на  $\mathbb{R}$ , и для каждой точки  $a \in \mathbb{R}$  одна из функций  $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$  обращается в ноль в точке  $a$ . Докажите, что  $f$  — многочлен степени не более чем  $n - 1$ . б)\*\* Функция  $f$  определена и бесконечно дифференцируема на  $\mathbb{R}$ ,  $f^{(n)}$  — ее  $n$ -тая производная. Пусть для каждого  $a \in \mathbb{R}$  найдется такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $f^{(n)}(a) = 0$ . Докажите, что  $f$  — многочлен.

[illegible]