Листок №35 Неопределенный интеграл 12.2016

Определение 1. *Первообразная* или *неопределённый интеграл* функции f — это такая дифференцируемая функция F, что $F' = f$. Обозначение: $\int f(x)\,dx$. Обратите внимание: первообразная определена неоднозначно!

Задача 1. Пусть F_1 и F_2 — первообразные функции f на неком интервале. Докажите, что $F_1 - F_2$ — константа.

Задача 2. **а)** Пусть функция f непрерывна на некотором интервале. Зафиксируем точку a из этого интервала. Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Докажите, что функция F дифференцируема. Чему равна её производная? **б)** Докажите, что у каждой функции, непрерывной на интервале, существует первообразная. **в)*** Приведите пример разрывной функции, у которой существует первообразная.

Задача 3. Пусть на некотором интервале существуют $\int f(x)\,dx$ и $\int g(x)\,dx$. Тогда для любых постоянных α и β на этом интервале существует $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ причём $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$.

Задача 4. Найдите все первообразные функций (на их области определения): **а)** $f = 1$; **б)** $f = x$; **в)** $f = x^k$, $k \in \mathbb{N}$; **г)** $f = 1/x$; **д)** $f = x^k$, $k \in \mathbb{Z}$; **е)** $f = e^x$; **ж)** $f = \sin x$; **з)** $f = \cos x$; **и)** $f = \operatorname{tg} x$; **к)** $f = \operatorname{ctg} x$.

Задача 5°. (*Формула Ньютона-Лейбница*) Пусть f — непрерывная функция и F — её первообразная. Докажите, что $\int\limits_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$.

Задача 6. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной дугой синусоиды.

Формула замены переменных

Задача 7. Пусть $\int f(x)\,dx = F(x)$. Докажите, что $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

Задача 8°. Пусть $\omega(x)$ — дифференцируемая функция с непрерывной производной. Пусть f — непрерывная функция, и $\int f(x)\,dx = F(x)$. Докажите, что существует $\int f(\omega(x))\omega'(x)\,dx$ и $\int f(\omega(x))\omega'(x)\,dx = F(\omega(x))$.

Задача 9. Вычислите: **а)** $\int e^{e^x + x}\,dx$; **б)** $\int xe^{x^2}\,dx$; **в)** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; **г)** $\int \sin x\cos x\,dx$; **д)** $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

Задача 10. **а)** Пусть $\omega(x)$ монотонна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, а её производная $\omega'(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Пусть ещё $\omega(a) = c$, $\omega(b) = d$. Докажите, что $\int\limits_c^d f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(\omega(x))\omega'(x)\,dx$ для любой непрерывной на отрезке $[c;d]$ функции f. **б)** Верно ли утверждение пункта а), если $\omega(x)$ не является монотонной?

Задача 11. Вычислите интегралы **а)** $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; **б)** $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$.

Интегрирование по частям.

Задача 12°. **а)** Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции. Пусть существует интеграл $\int u(x)v'(x)\,dx$. Докажите, что существует интеграл $\int u'(x)v(x)\,dx$ и $\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$.

б) Пусть $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Докажите, что $\int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx$.

Задача 13. Найдите ($k \in \mathbb{N}$): **а)** $\int \ln x\,dx$; **б)** $\int x^k e^x\,dx$; **в)** $\int e^x \sin x\,dx$; **г)** $\int \ln^k x\,dx$; **д)** $\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx$.

Задача 14°. (*Формула Тейлора*) Пусть $f(x)$ — функция с непрерывной $n+1$ производной. Докажите, что $f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$.

Разные задачи.

Задача 15. Приведите пример функции, определённой на интервале и не имеющей на нём первообразной.

Задача 16. **а)** (*Интегральный признак сходимости*) Пусть $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ неотрицательна, монотонна и непрерывна. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ сходится, если и только если существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_1^x f(t)dt$.

б) При каких $s > 0$ сходится ряд $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$? **в)*** Найдите $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \ln t dt$.

Задача 17. Пусть M — максимум $|f'|$ на отрезке $[0;2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\left|\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\right| \leqslant 2\pi M/n$.

Задача 18. **а)** Найдите точную верхнюю грань чисел $\int\limits_0^1 xf(x)\,dx$ по всем непрерывным неотрицательным на $[0;1]$ функциям f, для которых $\int\limits_0^1 f(x)\,dx \leqslant 2$. **б)** Найдите ответ, если не требовать неотрицательность f.

Задача 19. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Разделите отрезок $[-1;1]$ на черные и белые отрезки так, чтобы суммы определённых интегралов любого многочлена степени n по белым отрезкам и по чёрным были бы равны друг другу.

1	2 а	2 б	2 в	3	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	4 е	4 ж	4 з	4 и	4 к	5	6	7	8	9 а	9 б	9 в	9 г	9 д	10 а	10 б	11 а	11 б	12 а	12 б	13 а	13 б	13 в	13 г	13 д	14	15	16 а	16 б	16 в	17	18 а	18 б	19