Программа

1. Вычисление скоростей, длин, площадей, объёмов;
2. Решение дифференциальных уравнений для решения физических задач

Примеры задач

Задача 1. Пусть пара непрерывно дифференцируемых функций $(x(t), y(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$ задаёт замкнутую несамопересекающуюся кривую. Кривая ограничивает область площади S. Доказать, что

$$S = \left| \int\limits_0^T y(t)x'(t)dt \right|.$$

Задача 2. Доказать, что объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant y(x)$, где $y(x)$ — непрерывная функция, равен $V = 2\pi \int\limits_a^b xy(x)\, dx$.

Задача 3. **а)** Найдите объём шара радиуса R. **б)** Определите центр масс однородного полушария радиуса R. **в)** Найдите площадь сферы радиуса R. **г)*** Найдите объём четырёхмерного шара радиуса R. **д)**** Найдите объём n-мерного шара радиуса R. Докажите, что при достаточно большом n почти весь объём шара заключён в тонком слое на границе.

Задача 4*. С какой силой материальная бесконечная прямая постоянной плотности μ_0 притягивает материальную точку массы m, находящуюся на расстоянии a от этой прямой?

Задача 5*. Найти кинетическую энергию цилиндра высоты h радиуса R постоянной плотности ϱ, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω.

Задача 6*. Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен $\frac{1}{3}$, и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой $10 \cdot g$ Н? (g — ускорение свободного падения) Скорость верёвки считать постоянной.
(*Указание:* Сила трения $F_{mp} = \mu \cdot N$, N можно найти для куска каната радианной меры $\Delta\varphi$, а силу можно выразить как функцию радианной меры угла φ.)

Литература: Фихтенгольц Г.М. "Основы математического анализа в 2-х томах"

Программа

1. Числовые ряды, их сходимость.
2. Ряды Тейлора, функциональные ряды.
3. Формальные степенные ряды.
4. Производящие функции.

Примеры задач

Задача 1. Рассмотрим ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ называется n-ой частичной суммой ряда. Ряд называется сходящимся к S, если существует $\lim n \to \infty S_n = S$.

Задача 2. Докажите, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ расходится.

Задача 3. Докажите, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ сходится. (Его сумма равна $\frac{\pi^2}{6}$).

Задача 4. Докажите, что в каждой точке x сходится ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x$;

Задача 5. Найдите такой ряд F, что $(1-t) \cdot F = 1$.

Задача 6. При каких условиях на степенной ряд F разрешимо уравнение $X^2 = F$ относительно неизвестного степенного ряда X?

Задача 7. Сколькими способами можно заплатить 1 рубль копейками, алтынами (трехкопеечными монетами) и пятаками (пятикопеечными монетами)?

Задача 8. Найдите все решения дифференциального уравнения $F'(s) = F(s)$.

Литература: С.К. Ландо "Введение в дискретную математику"

Программа

1. События и их вероятности;
2. Опыт с непрерывным пространством элементарных событий;
3. Строгое определение вероятности. Аксиоматика Колмогорова;
4. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса;
5. Независимость. Схема Бернулли

Примеры задач

Задача 1. Тест состоит из 10 вопросов, по 4 варианта ответа на каждый, причём только один из них правильный. Если к каждому вопросу подбирать случайный ответ, то какова вероятность ответить верно **а)** на все 10 вопросов; **б)** ровно на 5 вопросов; **в)** не менее, чем на 5 вопросов?

Задача 2. В теннисном турнире участвуют 32 спортсмена, причём силы всех спортсменов постоянны, а более сильный всегда выигрывает у более слабого. Найдите вероятность того, что в финале встретятся два самых сильных спортсмена, если:
а) Перед началом турнира создаётся сетка и спортсмены случайным образом распределяются по ней;
б) Перед началом каждого тура спортсмены случайным образом разбиваются на пары, победители которых проходят в следующий тур.

Задача 3. Метровую линейку случайным образом разрезают ножницами. Найдите вероятность того, что длина обрезка составит на менее 80 см.

Задача 4. (*Теорема умножения вероятностей*) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события, вероятность которых больше 0. Докажите, что $\mathsf{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\cdot\mathsf{P}(A_2|A_1)\cdot\mathsf{P}(A_3|A_1A_2)\cdot\ldots\cdot\mathsf{P}(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$.

Задача 5. (*Формула полной вероятности*) Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — попарно несовместимые события, причём $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$. Докажите, что $\forall\, B \in \mathscr{U} \hookrightarrow \mathsf{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\cdot\mathsf{P}(B|H_i)$.

Задача 6. (*Формула Байеса*) Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — попарно несовместимые события, причём $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$. Предположим, стало известно, что событие A произошло. Докажите, что тогда

$$\mathsf{P}(H_i|A) = \frac{\mathsf{P}(H_i)\cdot\mathsf{P}(A|H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathsf{P}(A)\cdot\mathsf{P}(A|H_k)}.$$

Задача 7. (*Задача о разорении*) Игрок, имеющий n монет, играет против казино, имеющего неограниченное количество монет. За одну игру игрок либо проигрывает монету, либо выигрывает с вероятностью $1/2$. Он играет, пока не разорится. Найдите вероятность разориться ровно за m игр.

Задача 8. Радиоактивная бактерия делится на две таких же бактерии с вероятностью 0.6, а с вероятностью 0.4 погибает. Вначале в лаборатории живет одна радиоактивная бактерия. С какой вероятностью популяция радиоактивных бактерий вымрет через некоторое количество поколений?

Задача 9. n претендентов на должность в случайном порядке приходят на собеседование. Если в результате собеседования выясняется, что новый претендент лучше того, кто в данный момент занимает должность, первого нанимают, а последнего — увольняют. а) С какой вероятностью k-й по силе претендент будет нанят в какой-либо момент. б) Найдите матожидание числа увольнений.

Программа

1. Цепные дроби: цепные дроби, алгоритм Евклида и решения диофантовых уравнений; наилучшие приближения вещественных чисел при помощи цепных дробей; квадратичные иррациональности и периодические цепные дроби; алгебраические числа и их приближения.
2. Геометрические построения и поля алгебраических чисел: построения одним циркулем, теорема Маскерони; задачи о трисекции угла и удвоении куба и квадратичные расширения полей. гауссовы числа; круговые поля.
3. Алгебраические уравнения и теория Галуа: решение уравнений 3 и 4 степени, группа Галуа уравнения; проблема разрешимости уравнения в радикалах; уравнения деления круга и построения Гаусса правильных многоугольников.

Примеры задач

Задача 1. **а)** Сформулируйте и докажите утверждение: всякое вещественное число может быть единственным образом записано в виде цепной дроби

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}},$$

где все a_k - целые, и $a_k > 0$ при $k > 0$.
б) при этом конечным цепным дробям соответствуют рациональные числа, а периодическим - квадратичные иррациональности, т.е., решения уравнений

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0, \qquad b_i \in \mathbb{Z}$$

Задача 2. Убедитесь, что дробь

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

представляет золотое сечение.

Задача 3. Число Архимеда $\frac{22}{7}$ является первым нетривиальным приближением числа π при помощи цепных дробей. Оно является наилучшим приближением π с точностью до второго знака после запятой. Постройте следующее за архимедовым приближение π цепными дробями.

Задача 4. Постройте с помощью циркуля и линейки
а) правильный 5- угольник
б) правильный 17- угольник (это в свое время проделал Гаусс).

Литература

В.И.Арнольд, Цепные дроби
М.М.Постников, Теория Галуа

Введение

Большинство парадоксальных и противоречащих интуитивным представлениям о мире эффектов, возникающих при движении со скоростью, близкой к скорости света, предсказывается именно специальной теорией относительности. Самый известный из них — эффект замедления хода часов, или эффект замедления времени. Часы, движущиеся относительно наблюдателя, идут для него медленнее, чем точно такие же часы у него в руках.

В специальной теории относительности координаты приписываются не частицам, а элементарным событиям, то есть включают в себя время.

Приблизительная программа

1. Линейная алгебра: группа движений плоскости и пространства. Запись преобразований матрицами. Композиция преобразований и произведение матриц.
2. Принцип относительности Галилея. Принцип относительности Эйнштейна. Предпосылки для специальной теории относительности. Описания и результаты опытов.
3. Пространство-время. Преобразования пространства-времени, группа Преобразований Лоренца.
4. Сокращение размеров: парадокс шеста и сарая.
5. Углы в пространстве-времени. Сложение скоростей.
6. Разные задачи и парадоксы.

Примеры задач

Задача 1. Известно, что скорость света постоянна во всех системах отсчёта. При какой скорости будет наблюдаться (относительно "лаборатории") сокращение объёма вдвое?

Задача 2. (*Парадокс поезда*) Пусть на поезде, движущемся со скоростью, близкой к скорости света (такой поезд, видимо, стоит ожидать раньше всего в Японии (если где-нибудь ещё не научатся значительно влиять на скорость света)), едут три человека: A в голове, O — в середине и B — в хвосте поезда. На земле около пути стоит четвёртый человек O'. В тот самый момент, когда O проезжает мимо O', сигналы ламп от A и B достигают O и O'. Покажите, что на вопрос "Кто раньше включил фонарь" наблюдатели O и O' дадут различные ответы. Объясните этот парадокс качественно.

Задача 3. **а)** Покажите, что если два события происходят одновременно и в одном и том же месте в одной системе отсчёта, то они будут одновременными в любой другой системе отсчёта. **б)** Покажите, что если два события происходят одновременно в разных точках в одной системе отсчёта, то они не будут одновременными ни в какой другой системе отсчёта.

Задача 4. Как синхронизировать часы на спутнике и на Земле? (требуются точные расчёты)

Задача 5. Известно, что скорость света в среде (например, в воздухе) меньше скорости света в вакууме. Оказывается, что "светящиеся" частицы, двигающиеся в среде быстрее скорости света, создают световой "конус Маха". Вычислите угол этого конуса для электронов, летящих в воздухе, если скорость электронов составляет $\frac{999\,999}{1\,000\,000}$ скорости света в вакууме, а скорость света в воздухе — "всего" $\frac{999\,710}{1\,000\,000}$.

Предостережение

Большинство задач специальной теории относительности очень сложны: требуют длительных аккуратных расчётов, противоречат нашей привычной логике.

Для того, чтобы разобраться, придётся изучить несколько дополнительных тем. Описание действительно интересных эффектов не дастся без труда.

Если нет уверенности в своих силах и любопытстве, то не стоит даже начинать!

Программа

1. Многочлены от двух переменных.
2. Теорема Безу.
3. Приложение к геометрии.
4. Разные задачи алгебраической геометрии

Примеры задач

Задача 1. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{R}[x, y]$ однозначно (с точностью до множителей из $\mathbb{R}$) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{R}$ многочленов.

Задача 2. Пусть A, B — различные многочлены из $\mathbb{R}[x, y]$. Может ли система $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ иметь конечное число решений, бесконечное число решений?

Задача 3. Еще Исаак Ньютон заметил следующий интересный факт, называемый *теоремой Безу: если $A(x, y)$ и $B(x, y)$ — ненулевые взаимно простые многочлены, то система $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ имеет не более* $\deg A \cdot \deg B$ *решений.* Докажите теорему Безу для произвольного ненулевого многочлена A, взаимно простого с многочленом B.

Задача 4. Пусть никакие три из точек A, B, C, D, E на плоскости не лежат на одной прямой. Докажите, что через эти точки проходит ровно одна коника.

Задача 5. (*Теорема Паскаля*) Пусть вершины шестиугольника $ABCDEF$ лежат на кривой, задающейся неприводимым многочленом второй степени. Докажите, что тогда точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой (смотрите рисунок справа).

Литература

Н.Б.Васильев. Гексаграммы Паскаля и кубические кривые.
"Квант" №8-1987, с.2;
И.Р.Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. М., Наука, 1988, Т.1.

Программа

1. Дифференцирование комплексных функций;
2. Интегрирование комплексных функций по кривой;
3. Формула Ньютона – Лейбница;
4. Лемма Гурса и её следствия;
5. Бесконечная дифференцируемость функций, имеющих производную;

Примеры задач

Задача 1. (*формула Ньютона – Лейбница*) Пусть f непрерывна в области D, и существует первообразная F к f в области D; $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$ — кусочно-гладкая кривая в D, соединяющая точки A и B. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = F(B) - F(A). \tag{1}$$

Задача 2. Если интеграл от непрерывной функции f по любому замкнутому контуру в области D равен нулю, то f обладает первообразной.

Задача 3. (*лемма Гурса*) Пусть $\triangle$ — треугольник, лежащий в области D вместе с внутренностью, и f голоморфна в окрестности $\triangle$. Тогда

$$\int\limits_{\triangle} f(z)\,dz = 0. \tag{2}$$

Задача 4. (*интегральная теорема Коши*) Если D — односвязная область, и $f(z)$ голоморфна в D, а γ — кусочно-гладкий контур в D, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{3}$$

Задача 5. (*Теорема Лиувилля*) Если $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}$ и ограничена, тогда $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

Задача 6. (*Основная теорема алгебры*) Любой многочлен $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ положительной степени имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень.

Задача 7. Докажите, что функция комплексно дифференцируема в области D тогда и только тогда, когда для $\forall\, a \in D$ найдётся $r > 0$ такое, что в круге $\Delta(a, r)$ функция $f(z)$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \tag{4}$$

Литература

Б.В.Шабат. "Введение в комлексный анализ."
А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. "Курс дифференциальной геометрии и топологии"
Э.Б.Винберг. "Курс алгебры"