Корни многочленов

Задача 1. Докажите, что если многочлен $A(x)$ с целыми коэффициентами принимает при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, то уравнение $A(x) = 0$ не имеет целых решений.

Задача 2. **а)** Ненулевая несократимая дробь p/q — корень многочлена $A(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ с целыми коэффициентами. Докажите, что тогда a_n делится на q и a_0 делится на p.
б) Пусть в пункте а) дано $a_n = 1$. Докажите, что все рациональные корни A — целые числа.

Задача 3. Найдите все рациональные корни многочленов:
а) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$; **б)** $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

Задача 4. Пусть $A(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $A(\sqrt{2}) = 0$. Докажите, что $A(-\sqrt{2}) = 0$.

Задача 5. **а)** Найдите ненулевой многочлен P с целыми коэффициентами и корнем $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
б) Найдите все корни многочлена P из пункта а).

Задача 6. Найдите многочлен минимальной степени из $\mathbb{R}[x]$, для которого $3-i$, 2 и $1+i$ — корни.

Теорема Виета

Задача 7. **а)** Пусть многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ раскладывается на *линейные* множители (то есть многочлены первой степени): $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$. Докажите, что справедливы *формулы Виета:*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = b, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -c.$$

б)* Найдите подобные формулы, если $\deg P = n$ и P раскладывается на линейные множители.

Задача 8. **а)** Пусть $a + b + c > 0$, $ab + bc + ac > 0$, $abc > 0$. Докажите, что a, b и c положительны.
б) Пусть $a + b + c < 0$, $ab + bc + ac < 0$, $abc < 0$. Какие знаки могут иметь числа a, b, c?

Задача 9*. **а)** Пусть число $c \neq 0$. Докажите, что многочлен $x^5 + ax^2 + bx + c$ не может раскладываться на пять линейных множителей. **б)** Та же задача для многочлена $x^5 + ax^4 + bx^3 + c$.

Задача 10. **а)** Коэффициенты многочлена $(x-a)(x-b)$ целые. Докажите, что $a^n + b^n$ целое при $n \in \mathbb{N}$. **б)*** Найдите первые n цифр после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{26} + 5)^n$.

Дополнительные задачи

Задача 11. Коэффициенты многочленов P и Q целые. Коэффициенты их произведения делятся на 5. Докажите, что либо коэффициенты P, либо коэффициенты Q делятся на 5.

Задача 12. Пусть P — многочлен степени k из $\mathbb{C}[x]$ и $n > k$. Докажите, что среднее арифметическое значений P в вершинах правильного n-угольника равно значению P в центре n-угольника.

Задача 13. На графике многочлена из $\mathbb{Z}[x]$ отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то у них одинаковые ординаты.

Задача 14. Даны многочлены положительной степени $P(x)$ и $Q(x)$, причём выполнены тождества $P(P(x)) = Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают?

Задача 15. При каких n многочлен степени n с нечётными коэффициентами может иметь n нечётных корней?

Задача 16. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x принимает целые значения. Верно ли, что среди его коэффициентов **а)** хотя бы один — целое число; **б)** все — целые числа?

Задача 17. Докажите, что для любого числового многочлена $P(x)$ степени n, принимающего при всех целых x целые значения, существуют такие целые числа $b_0, b_1, \dots, b_n$, что

$$P(x) = b_n C_x^n + b_{n-1} C_x^{n-1} + \dots + b_1 C_x^1 + b_0, \quad \text{где} \quad C_x^i = \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!}.$$

Задача 18. Многочлен $P(x)$ степени $n-1$ принимает целые значения при n последовательных целых значениях x. Докажите, что $P(x) \in Q[x]$ и $P(n) \in \mathbb{N}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.