Листок №2д* **Итерации: исследовательские задачи** 11.2013

Задача 1. На столе у чиновника Министерства Околичностей лежит n томов Британской энциклопедии, сложенных в несколько стопок. Стопки лежат на столе в один ряд. Каждый день, приходя на работу, чиновник берет по одному тому из каждой стопки, образует из них новую стопку, которую кладет в начало ряда, и записывает в ведомость количество томов в каждой стопке. Например, если в первый день в ведомости записано $(8, 3, 1, 1)$, то на следующий день запись будет $(4, 7, 2)$, потом — $(3, 3, 6, 1)$, $(4, 2, 2, 5)$ и т. д.

а) Пусть $n = 36$. Разложите книги так, чтобы чиновник делал в ведомости одну и ту же запись.

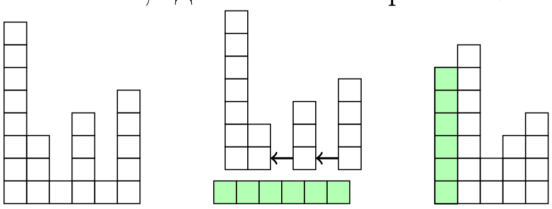
б) Что будет записано в ведомости на 31-й день, если в первый день там записано $(4, 4, 4)$?

в) Докажите, что после какого-то момента записи в ведомости будут циклически повторяться.

г) Что чиновник запишет через месяц, если $n = 6$? (Начальное разбиение на стопки неизвестно.)

Чтобы проследить за путём конкретной книги, будем считать, что чиновник берёт самую нижнюю книгу из первой стопки, на неё кладёт самую нижнюю книгу из второй стопки, и т. д. Каждая книга имеет две координаты: текущий номер её стопки и высоту внутри стопки. Всё это удобно изображать на клетчатой бумаге в первой координатной четверти: книге отвечает закрашенная клетка с теми же координатами.

д) Докажите, что действие чиновника можно описать так: он отрезает нижнюю строчку от закрашенной фигуры, сдвигает то, что осталось, на одну клетку вправо и вниз, а отрезанную строчку поворачивает на $90°$ (превращая её в первый столбик), см. рис. ниже; затем он, возможно, сдвигает некоторые столбики влево (чтобы не было пустых столбиков).



е) Какой путь проделала книга $(2, 4)$ из пункта б) этой задачи?

ж) Докажите, что при действиях чиновника сумма координат каждой книги либо не изменяется, либо уменьшается.

з) Докажите, что, начиная с какого-то момента, стопки будут располагаться по числу книг в невозрастающем порядке, и каждая книга, начиная с этого момента, будет двигаться по циклу.

и) Докажите, что если n — треугольное число (то есть $n = 1 + 2 + 3 + \dots + k$ для некоторого k), то, начиная с какого-то момента, чиновник ежедневно будет записывать в ведомость одно и то же. Что именно?

к) Пусть n — не треугольное число. Докажите, что период t, с которым после какого-то момента будут повторяться записи в ведомости, удовлетворяет условию $(t - 1)t < 2n < t(t + 1)$.

Задача 2. На плоскости заданы точки A, B, C — центры трёх кругов. Каждый круг равномерно раздувается (радиус увеличивается с одинаковой для всех кругов скоростью). Как только два круга касаются друг друга, они «лопаются» — их радиусы уменьшаются до 0 — и начинают расти снова. Верно ли, что если длины AB, BC, CA — целые числа, то этот процесс периодический? Изучите, как может развиваться этот процесс, если треугольник ABC

а) равносторонний;

б) равнобедренный;

в)* прямоугольный со сторонами 3, 4 и 5.

Начальное состояние может быть произвольным (не только «нулевым»).

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	1 е	1 ж	1 з	1 и	1 к	2 а	2 б	2 в