Листок №NT-1 **Распределение простых чисел** 01.2019

В этом листке мы будем часто использовать следующие обозначения:
p_n — n-е простое число ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$); P — множество всех простых чисел ($P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$); $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих $x \in \mathbb{N}$; $\log x$ — двоичный логарифм x (т. е. $\log_2 x$).

История определения асимптотики функции $\pi(x)$ такова:

1. Евклид: $\pi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$;
2. Эйлер: $\dfrac{\pi(x)}{x} \to 0$ при $x \to \infty$;
3. Чебышёв (1848 г.): Если предел $\dfrac{\pi(x)\ln(x)}{x}$ существует, то он равен 1;
4. Адамар и Валле-Пуссен (1896 г.): $\dfrac{\pi(x)\ln(x)}{x} \to 1$ при $x \to \infty$.

Задача 1. Докажите, что при $n \in \mathbb{N}$ **а)** $p_{n+1} \leqslant p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$; **б)** $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.

Задача 2. Докажите, что $\pi(x) \geqslant \log\log x$ при $x \geqslant 2$.

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим функцию $F^n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом: F^n есть количество натуральных чисел, не превосходящих x, все простые делители которых принадлежат множеству $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Задача 3. **а)** Найдите $F^3(57)$; **б)** Найдите $F^n(x)$ при $x < p_{n+1}$.

Задача 4. Докажите, что $F^n(x) \leqslant 2^n \cdot \sqrt{x}$.

Задача 5. Докажите следующие утверждения:
а) простых чисел бесконечно много; **б)** $\pi(x) \geqslant 0{,}5 \cdot \log x$; **в)*** ряд $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \dots$ расходится.

* * *

Задача 6. Докажите следующие утверждения:
а) $\prod\limits_{\substack{n<p\leqslant 2n,\\ p\in P}} p < C_{2n}^n < 2^{2n}$; **б)** $\prod\limits_{\substack{n+1<p\leqslant 2n+1,\\ p\in P}} p < C_{2n+1}^n < 2^{2n}$; **в)** $\prod\limits_{\substack{p\leqslant x,\\ p\in P}} p < 2^{2x}$.

Задача 7. Докажите следующие утверждения:
а) $(\pi(x) - \pi([\sqrt{x}])) \cdot \log\sqrt{x} < 2x$;
б) существует такое $c_1 \in \mathbb{R}$, что $\pi(x) \leqslant c_1 \cdot \dfrac{x}{\log x}$ при $x \geqslant 2$.

Задача 8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, p — простое число. Докажите, что p входит в каноническое разложение числа $n!$ в степени $\sum\limits_{i=1}^{m} [n/p^i]$, где $m = [\log_p n]$.

Задача 9. Пусть p — простое число, α_p — степень, в которой p входит в каноническое разложение числа C_{2n}^n. Докажите, что $\alpha_p \leqslant [\log_p 2n]$.

Задача 10. Докажите следующие утверждения: **а)** $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant C_{2n}^n$; **б)** $C_{2n}^n \leqslant \prod\limits_{\substack{p\leqslant 2n,\\ p\in P}} p^{[\log_p 2n]}$.

Задача 11. Докажите следующие утверждения:
а) $2n - \log(2n+1) \leqslant \pi(2n) \cdot \log 2n$;
б) существует такое положительное $c_2 \in \mathbb{R}$, что $\pi(x) \geqslant c_2 \cdot \dfrac{x}{\log x}$ при $x \geqslant 2$.

Задача 12*. Докажите, что для всякого достаточно большого $x \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$0{,}9 \cdot \frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant 4{,}1 \cdot \frac{x}{\log x}.$$

Задача 13*. Докажите, что при всяком достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ между n и $5n$ обязательно найдется простое число.

Задача 14. В обозначениях задачи 9 докажите следующие утверждения:
а) $\alpha_p \leqslant 1$ при $p > \sqrt{2n}$; **б)** $\alpha_p = 0$ при $2n/3 < p \leqslant n$.

Задача 15*. (*Постулат Бертрана*) Докажите, что при всяком достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ между n и $2n$ обязательно найдется простое число.

1 а	1 б	2	3 а	3 б	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12	13	14 а	14 б	15