Листок №6 — **Целые числа: остатки** — 12.2013

Определение 1. Пусть a и m — целые числа, $m \neq 0$. *Разделить a на m с остатком* значит найти такие целые числа k (частное) и r (остаток), что $a = km + r$ и $0 \leqslant r < |m|$.

Определение 2. Говорят, что *a сравнимо с b по модулю m,* если $a - b$ делится на m. Обозначение: $a \equiv b \pmod{m}$.

Задача 1. Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда a и b дают одинаковые остатки от деления на m.

> **Замечание.** Иногда, для удобства, остатком от деления a на m называют целое число, не обязательно лежащее в пределах от 0 до m. Например, бывает удобно сказать, что число 29 при делении на 6 дает остаток -1. Или что число $9N$ дает остаток $2N$ при делении на 7 (число $2N$ может быть и больше 7, но главное, что оно сравнимо с $9N$ по модулю 7).

Задача 2. Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$. Докажите, что сравнения по одному и тому же модулю можно

а) складывать и вычитать: $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;
б) умножать: $ac \equiv bd \pmod{m}$;
в) возводить в натуральную степень n: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$;
г) домножать на любое целое число k: $ka \equiv kb \pmod{m}$.

Задача 3. Найдите частные и остатки от деления 2013 на 23, -17 на 4 и $n^2 - n + 1$ на n.

Задача 4. Найдите остаток от деления числа $1 + 31 + 331 + \ldots + 3333333331$ на 3.

Задача 5. Найдите остаток от деления числа $1 - 11 + 111 - 1111 + \ldots - 1111111111$ на 9.

Задача 6. Найдите остатки от деления на 3 чисел $2N$, $100N$, 2^N, 100^N, 2007^N (ответ зависит от N).

Задача 7. Найдите остаток от деления **а)** $10!$ на 11; **б)** $11!$ на 12.

Задача 8. **а)** Какой цифрой оканчивается 8^{18}? **б)** При каких натуральных k верно: $2^k - 1 \,\vdots\, 7$?

Задача 9. Найдите две последние цифры числа 1999^{2000}.

Задача 10. Докажите, что **а)** $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31; **б)** $43^{95} + 57^{95}$ делится на 100.

Задача 11. Числа x и y целые, причем $x^2 + y^2$ делится на 3. Докажите, что и x и y делятся на 3.

Задача 12. Какие целые числа дают при делении на 3 остаток 2, а при делении на 5 — остаток 3?

Задача 13. Даны 20 целых чисел, ни одно из которых не делится на 5. Докажите, что сумма двадцатых степеней этих чисел делится на 5.

Задача 14. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть или простое число или 1.

Задача 15. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два таких числа, что
а) их разность делится на 51; **б)** их сумма или разность делится на 100.

Задача 16. Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно число, делящееся на n).

Задача 17*. Существует ли делящееся на 2013 натуральное число, состоящее из цифр 0 и 1?

Задача 18. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых как сумма трех или менее точных квадратов.

Задача 19. Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету не отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

1	2 а	2 б	2 в	2 г	3	4	5	6	7 а	7 б	8 а	8 б	9	10 а	10 б	11	12	13	14	15 а	15 б	16	17	18	19