Листок №9 **Целые числа: алгоритм Евклида** 02.2013

Определение 1. Два отрезка называются *соизмеримыми,* если они имеют *общую меру*— третий отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз.

Задача 1. Верно ли, что два отрезка соизмеримы тогда и только тогда, когда найдётся третий отрезок, в котором каждый из двух укладывается целое число раз?

Задача 2. Докажите, что a и b соизмеримы в том и только том случае, когда a и $a+2b$ соизмеримы.

Задача 3. От прямоугольника $a\times b$ отрезают квадраты со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, пока это возможно. С оставшимся прямоугольником делают тоже самое, и т. д.

а) Сколько и каких квадратов получится, если $a=324$, $b=141$?

б) Докажите: если a и b соизмеримы, то прямоугольник разрежут на конечное число квадратов;

в) Докажите, что если в итоге прямоугольник разрежут на конечное число квадратов, то стороны прямоугольника соизмеримы, и сторона самого маленького квадрата является их общей мерой;

г) Докажите, что в пункте в) сторона последнего квадрата является *наибольшей* общей мерой сторон прямоугольника, и любая другая их общая мера укладывается в ней целое число раз.

Задача 4. От прямоугольника отрезали квадрат и получили прямоугольник, подобный исходному.

а) Соизмеримы ли его стороны? **б)** Найдите отношение сторон исходного прямоугольника.

Задача 5. Найдите наибольшую общую меру отрезков длиной $15/28$ и $6/35$.

Определение 2. *Наибольший общий делитель* (a,b) целых чисел a и b — это наибольшее целое число, делящее и a и b. Число (a,b) существует и единственно, если a и b не равны одновременно нулю (докажите!).

Задача 6. Докажите, что $(a,b)=(a-b,b)=(r,b)$, где r — остаток от деления a на b.

Задача 7. Найдите возможные значения **а)** $(n,12)$; **б)** $(n,n+1)$; **в)** $(2n+3,7n+6)$; **г)** $(n^2,n+1)$.

Задача 8. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размерами $a\times b$ клеток (стороны лежат на линиях сетки). На сколько частей делят его диагональ **а)** узлы сетки; **б)** линии сетки?

Задача 9. Даны целые числа $a>b>0$. *Алгоритм Евклида* можно описать так: делим a на b, получаем остаток $r_1<b$, затем делим b на r_1, получаем остаток $r_2<r_1$, делим r_1 на r_2, получаем остаток $r_3<r_2$, и т. д. Докажите, что какой-то остаток r_{n-1} разделится нацело на r_n, и тогда $r_n=(a,b)$.

Задача 10. Найдите **а)** $(525,231)$; **б)** $(7\,777\,777,7\,777)$; **в)** $(10946,17711)$; **г)*** $(2^m-1,2^n-1)$.

Задача 11. Для каких пар чисел алгоритм Евклида работает «дольше всего» — каждый раз частное равно 1?

Задача 12. **а)** В обозначениях задачи 9 докажите, что каждое из чисел $r_1,r_2,\ldots$ представимо в виде $ax+by$ с целыми x и y. **б)** Как с помощью алгоритма Евклида найти такие целые x и y, что $ax+by=(a,b)$?

Задача 13. Докажите, что все общие делители целых чисел a и b — это все делители некоторого числа. Какого?

Задача 14. Какие расстояния можно отложить от данной точки на прямой, пользуясь двумя шаблонами (без делений) **а)** длины 6 см и 15 см; **б)** длины a см и b см (где $(a,b)=d$)?

Задача 15. Пусть целые числа a и b *взаимно просты* (то есть $(a,b)=1$). Докажите, что

а) найдутся такие целые x и y, что $ax+by=1$; **б)** если число c целое и ac делится на b, то c делится на b.

Задача 16. Решите в целых числах x, y уравнения **а)** $12x=42y$; **б)** $ax+by=0$, где $(a,b)=d$.

Задача 17. **а)** Докажите, что уравнение $ax+by=c$ имеет решение в целых числах x, y если и только если c делится на (a,b). **б)** Как найти одно из решений? **в)** Зная одно решение, найдите формулу для остальных.

Задача 18. Решите в целых x, y: **а)** $17x+23y=36$; **б)** $nx+(2n-1)y=3$, n — целое; **в)** $525x-231y=42$.

Задача 19. Синим на числовой оси отметили числа, дающие при делении на 24 остаток 17, белым — дающие при делении на 40 остаток 7. Найдите наименьшее расстояние между белой и синей точками.

Задача 20. На плоскости дана фигура, которая при повороте вокруг точки O на угол 48° переходит в себя. Обязательно ли эта фигура переходит в себя при повороте вокруг O на угол **а)** 72°; **б)** 90°?

Задача 21. По окружности длины a см катится колесо длины b см (a и b натуральные, $(a,b)=d$). В колесо вбит гвоздь, он оставляет отметки на окружности. Сколько отметок оставит гвоздь?

Задача 22*. Решите в целых числах уравнение $2x+3y+5z=11$.

Задача 23*. Даны m целых чисел. За один ход разрешается прибавить по единице к любым n из них. При каких m и n всегда можно за несколько таких ходов сделать числа одинаковыми?

Задача 24*. Натуральные числа m и n взаимно просты. Дробь $(m+1000n)/(1000m+n)$ можно сократить на число d. Каково наибольшее возможное значение d?

Задача 25*. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что уравнение $ax+by=c$

а) при любом целом c имеет такое решение в целых числах x и y, что $0\leqslant x<b$;

б) имеет решение в целых неотрицательных числах x и y, если c целое, большее $ab-a-b$;

в) при целых c от 0 до $ab-a-b$ ровно в половине случаев имеет целое неотрицательное решение, причём если для $c=c_0$ такое решение есть, то для $c=ab-a-b-c_0$ таких решений нет.

1	2	3 а	3 б	3 в	3 г	4 а	4 б	5	6	7 а	7 б	7 в	7 г	8 а	8 б	9	10 а	10 б	10 в	10 г	11	12 а	12 б	13	14 а	14 б	15 а	15 б	16 а	16 б	17 а	17 б	17 в	18 а	18 б	18 в	19	20 а	20 б	21	22	23	24	25 а	25 б	25 в