## Определение производной.

**Определение 1.** Пусть функция $f$ определена на некотором интервале, и пусть точка $x_0$ принадлежит этому интервалу. *Производной функции $f$ в точке $x_0$* называется число $f'(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, в случае, если этот предел существует (тогда говорят, что функция $f$ *дифференцируема* в точке $x_0$).

**Задача 1.** Докажите, что $f'(x_0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$.

**Задача 2.** Для каждой точки $a \in \mathbb{R}$ найдите $f'(a)$, если **а)** $f(x) = c$, где $c \in \mathbb{R}$; **б)** $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

**Задача 3°.** Докажите, что $f'(x_0) = A$ тогда и только тогда, когда найдётся такая функция $\beta(t)$, что для всех достаточно малых $t$ будет верно $f(x_0+t) = f(x_0) + At + \beta(t)$, причём $\lim\limits_{t\to 0} \beta(t)/t = 0$.

**Задача 4.** Верно ли, что функция, дифференцируемая в некоторой точке, непрерывна в этой точке?

**Определение 2.** Говорят, что функция $f$ *дифференцируема* на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала. При этом её *производной* называется функция $f' : x \mapsto f'(x)$.

**Задача 5.** Найдите производные функций (там, где они существуют): **а)** $|x|$; **б)** $\frac{1}{x}$; **в)** $\sqrt{x}$; **г)** $x^{3/2}$.

**Задача 6.** Автомобиль едет по прямой дороге так, что в каждый момент времени $t$ он находится в точке с координатой $s(t)$. Что будет показывать спидометр автомобиля в момент времени $t_0$?

## Вычисление производных

**Задача 7°.** Пусть функции $f$ и $g$ дифференцируемы на некотором интервале. Докажите, что
**а)** функция $f+g$ тоже дифференцируема на этом интервале и $(f+g)' = f' + g'$;
**б)** для любой константы $C$ функция $Cf$ тоже дифференцируема на этом интервале и $(Cf)' = Cf'$;
**в)** функция $fg$ тоже дифференцируема на этом интервале и $(fg)' = f'g + fg'$;
**г)** функция $f/g$ дифференцируема во всех точках интервала, где $g(x) \neq 0$, и $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

**Задача 8.** Найдите производные функций (там, где они существуют): **а)** $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$; **б)** $\frac{5x+6}{7x+8}$; **в)** $\frac{1}{x^3-5x-2}$. **г)** $\sin x$; **д)** $\cos x$; **е)** $\operatorname{tg} x$; **ж)** $\operatorname{ctg} x$; **з)** $x^{m/n}$, где $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$; **и)*** $e^x$.

**Задача 9°.** Пусть $F(x) = f(g(x))$. Докажите, что если $g$ дифференцируема в точке $x_0$, а $f$ дифференцируема в точке $g(x_0)$, то $F(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, и $F'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

**Задача 10°.** **а)** Пусть функция $f$ на некотором интервале непрерывна и имеет обратную функцию $g$. Докажите, что если $f$ дифференцируема в точке $x_0$ из этого интервала и $f'(x_0) \neq 0$, то $g$ дифференцируема в точке $f(x_0)$ и $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$. **б)** Каков геометрический смысл формулы из пункта а)?

**Задача 11.** Продифференцируйте:
**а)** $\sin x^2$; **б)** $\arcsin x$; **в)** $\arccos x$; **г)** $\operatorname{arctg} x$; **д)*** $\ln x$; **е)*** $2^x$; **ж)*** $x^\alpha$.

**Определение 3.** Говорят, что многочлен имеет *кратный корень* $\alpha$, если он делится на $(x-\alpha)^k$, где натуральное $k \geqslant 2$.

**Задача 12°.** Докажите, что многочлен из имеет кратный корень тогда и только тогда, когда он имеет общий корень со своей производной.

| 1 | 2 а | 2 б | 3 | 4 | 5 а | 5 б | 5 в | 5 г | 6 | 7 а | 7 б | 7 в | 7 г | 8 а | 8 б | 8 в | 8 г | 8 д | 8 е | 8 ж | 8 з | 8 и | 9 | 10 а | 10 б | 11 а | 11 б | 11 в | 11 г | 11 д | 11 е | 11 ж | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |