Листок №17 **Неравенства и оценки.** 12.2014

Задача 1. Что больше: **а)** 5^{15} или 15^5; **б)** 2^{100} или 10^{30}; **в)** 3^{500} или 7^{300}?

Задача 2. **а)** Докажите, что $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$ при $a > 0$.

б) Каково наименьшее значение $a + \dfrac{9}{a}$ при $a > 0$?

Задача 3. **а)** Число x изменили не более, чем на $0,1$. Могло ли при этом значение x^2 измениться более, чем на 10? **б)** Тот же вопрос для значения $\sqrt{x}$.

Задача 4. Найдите первые **а)** девять; **б)** десять знаков после запятой у числа $\sqrt{0,999\,999\,999}$.

Задача 5*. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами?

Задача 6. Описанный около круга квадрат разбили на 100×100 равных квадратиков и закрасили квадратики, не выходящие за пределы круга. Докажите, что площадь закрашенной фигуры не меньше 94% площади круга.

Задача 7. Докажите, что $x^{n_1} - x^{n_2} + x^{n_3} - \dots + x^{n_{2k+1}} \geqslant 0$ при $x > 0$, если $n_1 > n_2 > \dots > n_{2k+1}$ натуральные.

Задача 8. Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии с натуральными основанием и разностью найдется число, десятичная запись которого начинается с 1.

Задача 9. Сколько цифр в десятичной записи **а)** 2^{40}; **б)** 2^{100}; **в)*** чисел 2^{2010} и 5^{2010} вместе?

***

Задача 10. В банк кладут 1000 рублей. В каком случае спустя 10 лет получат больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы раз в год или если он начисляет $(5/12)\%$ раз в месяц?

Задача 11. Докажите, что при всех натуральных n и при всех неотрицательных x выполнены неравенства **а)** (*неравенство Бернулли*) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$; **б)** $(1+x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$.

Задача 12. Укажите такое целое $n > 1$, что **а)** $1,001^n > 10^5$; **б)** $0,999^n < 10^{-5}$.

Задача 13. **а)** Пусть $b > 1$. Докажите, что найдётся такое натуральное k, что при любом натуральном $n \geqslant k$ будет выполнено неравенство $b^n > 1000$ (то есть, $b^k > 1000$, $b^{k+1} > 1000$, $b^{k+2} > 1000$, и так далее).
б) Можно ли заменить 1000 на любое другое конкретное число?

Задача 14. **а)** Найдётся ли такое C, что при любом натуральном $n \geqslant C$ будет выполнено неравенство $(1,01)^n > 1000n$?
б) А если заменить число $1,01$ на любое конкретное число, большее 1, а число 1000 — на любое конкретное положительное число?

Задача 15. При каких натуральных n выполнено неравенство **а)** $2^n \geqslant n$; **б)** $2^n \geqslant n^2$?

Задача 16. **а)** Пусть $q > 1$. Пусть последовательность положительных чисел (x_n) такова, что, начиная с некоторого номера, выполнено неравенство $x_{n+1}/x_n > q$. Докажите, что тогда, начиная с некоторого номера, выполнено неравенство $x_n > 1$.
б) Останется ли верным утверждение задачи, если $q = 1$?

Задача 17. Найдётся ли такое k, что при всех натуральных $n \geqslant k$ будет выполнено $2^n > n^{50}$?

Задача 18. **а)** Найдётся ли такое число C, что при любом натуральном $n \geqslant C$ будет выполнено неравенство $n! > 100^n$? **б)** А если заменить число 100 на любое другое конкретное число?

Определение 1. Говорят, что неравенство верно «при всех достаточно больших n» или «при n много больше нуля», если найдётся такое k, что неравенство верно при всех $n > k$. Обозначение: верно при $n \gg 0$.

Задача 19. **а)** Докажите, что неравенство $n^n > 10^6 \cdot n!$ выполнено при $n \gg 0$.
б) Можно ли заменить 10^6 на любое другое число?

Задача 20. **а)** Докажите, что $0,001n^2 > 100n + 179$ при $n \gg 0$.
б) Число C — любое, n и m — натуральные, причём $n > m$. Докажите, что $x^n > Cx^m$ при $x \gg 0$.
в) Дан многочлен $P(x) = p_k x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \dots + p_1 x + p_0$, где $p_k > 0$. Верно ли, что $P(x) > 0$ при $x \gg 0$?

Задача 21. Докажите, что для любого a неравенство $n! > a^n$ выполнено при $n \gg 0$.

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6	7	8	9 а	9 б	9 в	10	11 а	11 б	12 а	12 б	13 а	13 б	14 а	14 б	15 а	15 б	16 а	16 б	17	18 а	18 б	19 а	19 б	20 а	20 б	20 в	21