

Задача 1. В классе учатся 20 человек. Сколькими способами из них можно выбрать двоих школьников: старосту и ответственного за проездные билеты? А просто двоих школьников?

Задача 2. Сколько разных слов (не только осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах а) РОК; б) КУРОК; в) КОЛОБОК; г) $\underbrace{AA \dots A}_a \underbrace{BB \dots B}_b$? д)* $\underbrace{Y_1 \dots Y_1}_{k_1} \underbrace{Y_2 \dots Y_2}_{k_2} \dots \underbrace{Y_m \dots Y_m}_{k_m}$.

Задача 3. а) Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных в классе из 20 человек?

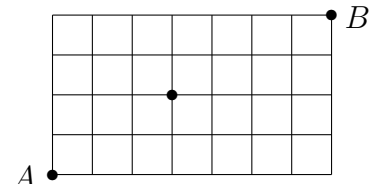
б) А сколькими способами можно выбрать старосту, его помощника и трёх дежурных?

Определение 1. Числом сочетаний из n элементов по k называется количество способов выбрать k предметов из n различных предметов. Обозначение: $\binom{n}{k}$ или C_n^k (читается «це из n по k »).

Задача 4. Докажите, что а) $C_n^k = C_n^{n-k}$; б) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Задача 5. Найдите формулу для C_n^k .

Задача 6. а) На рисунке изображен план города (линии — это улицы, пересечения линий — перекрестки). На улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вверх» или «вправо». Сколько разных маршрутов ведёт из точки A в точку B ?



б) Сколько из этих маршрутов не проходят через отмеченную на плане точку внутри города?

Задача 7. Сколькими способами можно рассадить класс, если пришло 27 человек, а мест 30?

Задача 8. Сколькими способами можно посадить в ряд 3 груши и 4 яблони?

Определение 2. Треугольником Паскаля называют числовой треугольник, изображенный на рисунке (по краям треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух, стоящих справа и слева над ним).

Задача 9. На рисунке выписаны первые 5 строк треугольника Паскаля. Напишите следующие 5 строк.

						1
					1	1
				1	2	1
		1	3	3	1	
1	4	6	4	1		

Задача 10. Докажите, что k -ое число n -ой строки равно C_n^k (строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нуля).

Задача 11. Докажите, что сумма чисел в n -ой строке треугольника Паскаля равна 2^n .

Задача 12. а) Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$.

б) (Бином Ньютона) Раскроем скобки и приведём подобные в выражении $(a+b)^n$. Возьмём любое слагаемое. Оно имеет вид $C \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ (почему?). Докажите, что $C = C_n^k$.

Задача 13. Докажите: а) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$; б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Задача 14. Возьмём любое число C в треугольнике Паскаля и сложим все числа, начиная с него и идя по прямой направо-вверх. Докажите, что сумма равна числу, стоящему под C справа.

Задача 15. Выведите из задачи 14 формулы для сумм $1 + \dots + n$, $T_1 + \dots + T_n$, $P_1 + \dots + P_n$.

Задача 16*. Как из предыдущей задачи вывести формулы для сумм $1^2 + \dots + k^2$, $1^3 + \dots + k^3$, ...?

Задача 17*. Отметьте в треугольнике Паскаля чётные числа. В каких строках все числа нечётные?

Задача 18*. Докажите, что $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \dots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0 = C_{p+q}^m$.

Задача 19*. Докажите, что любые два не единичных числа из одной строки треугольника Паскаля имеют общий множитель, больший 1.

Задача 20. а) В НИИ работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий, и 23 — оба языка. Сколько человек в НИИ не знают ни английского, ни немецкого языков?

б) Пусть кроме этого польский язык знают 20 человек, английский и польский — 12, немецкий и польский — 11, все три языка — 5. Сколько человек не знают ни одного из этих языков?

Задача 21. В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак «+». Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем — перед каждой пятой, а затем — перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

Задача 22. а) На полке стоят 10 книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на месте? б) А если на месте должны остаться ровно 3 книги?

1	2	2	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	9	10	11	12	12	13	13	14	15	16	17	18	19	20	20	21	22	22
	а	б	в	г	а	б	а	б		а	б						а	б	а	б						а	б		а	б	