

Определение 1. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $a \in M$, если для любой окрестности \mathcal{V} точки $f(a)$ найдется такая окрестность \mathcal{W} точки a , что при всех x из \mathcal{W} число $f(x)$ лежит в \mathcal{V} . Обозначение: $f \in C(a)$.

Если f непрерывна в каждой точке $a \in M$, то говорят, что f *непрерывна на M* , и пишут $f \in C(M)$.

Задача 1. Запишите без отрицаний: « $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ *разрывна* (не является непрерывной) в точке $a \in M$ ».

Задача 2. В каких точках непрерывны функции: а) x ; б) $\operatorname{sgn} x$; в) x^2 ; г) $\{x\}$; д) $\frac{1}{x}$; е) \sqrt{x} .
(Как обычно, функцию, заданную формулой, мы считаем определённой всюду, где эта формула имеет смысл.)

Определение 2. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Говорят, что $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ *ограничена на M* , если найдётся такое число k , что $|f(x)| < k$ при всех $x \in M$.

Задача 3. Будет ли функция, непрерывная в точке a , ограниченной в некоторой окрестности точки a ?

Задача 4. Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$, причём $f(a) > 0$. Докажите, что существует такая окрестность U точки a , что f положительна на множестве $U \cap M$.

Задача 5. Пусть функция f определена в некоторой окрестности \mathcal{U} точки a . Докажите, что f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Задача 6. Пусть $f, g \in C(a)$. Докажите, что: а) $|f| \in C(a)$; б) $f \pm g \in C(a)$; в) $f \cdot g \in C(a)$; г) если $g(a) \neq 0$, то функция f/g определена в некоторой окрестности точки a и непрерывна в точке a .

Задача 7. Докажите непрерывность функции (на её области определения): а) x^n , где $n \in \mathbb{N}$; б) многочлен из $\mathbb{R}[x]$; в) $P(x)/Q(x)$, где $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \neq 0$; г) $\sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}$; д) $\sin x$; е) $\cos x$; ж) $\operatorname{tg} x$.

Задача 8. Придумайте определённую на \mathbb{R} функцию f , множество точек разрыва которой есть а) \mathbb{R} ; б) \mathbb{R} без одной точки; в) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; г)* \mathbb{Q} .

Задача 9. а) Пусть $f \in C([a; b])$, причём $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Найдётся ли такое $\gamma \in (a, b)$, что $f(\gamma) = 0$? б) (ТЕОРЕМА О ПРОМЕЖУТОЧНОМ ЗНАЧЕНИИ). Пусть $f \in C([a; b])$, причём $f(a) < f(b)$. Докажите, что для любого $k \in [f(a), f(b)]$ найдётся такая точка $\gamma \in [a, b]$, что $f(\gamma) = k$.

Задача 10. Докажите: любой многочлен нечётной степени из $\mathbb{R}[x]$ имеет хотя бы один корень из \mathbb{R} .

Задача 11. (ТЕОРЕМА Л. БРАУЭРА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ ОТРЕЗКА). Пусть $f \in C([0; 1])$ и все значения функции f содержатся в отрезке $[0; 1]$. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет корень.

Задача 12. Функция непрерывна на отрезке I . Всегда ли она а) ограничена на I ; б) достигает своего наибольшего и наименьшего значений на I ? в) Та же задача, если I — интервал или прямая. г) Каким может быть множество значений непрерывной функции на отрезке; интервале; прямой?

Задача 13. Функция f непрерывна на отрезке $I \subseteq \mathbb{R}$. Докажите, что f обратима на I если и только если f строго монотонна на I , причём f^{-1} строго монотонна и непрерывна (на отрезке $[\min_{x \in I} f(x); \max_{x \in I} f(x)]$).

Задача 14. Докажите непрерывность $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ (на их области определения).

Задача 15. Пусть $A, B \subseteq \mathbb{R}$, и функции $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны. Докажите, что $g \circ f \in C(A)$.

Задача 16. Пусть $f, g \in C(\mathbb{R})$, причём $f(x) = g(x)$ для любого $x \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $f = g$.

Задача 17. Найдите все $f \in C(\mathbb{R})$, такие что $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Равномерная непрерывность

Определение 3. Функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на M , если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in M$, таких что $|x - y| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Задача 18. Функция f равномерно непрерывна на $M \subseteq \mathbb{R}$. Обязательно ли тогда f непрерывна на M ?

Задача 19. Какие из функций x^2 , \sqrt{x} , $1/x$ равномерно непрерывны **а)** на $[1; \infty)$; **б)** на $(0; 1)$? **в)** (ТЕОРЕМА КАНТОРА). Докажите: непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём.

[illegible]