Листок №21

Комплексные числа

09.2015

Определение 1. *Комплéксное число* z — это выражение вида $z = a + bi$, где $a,\ b \in \mathbb{R}$, а i — *мнимая единица*. По определению $i^2 = -1$. Число a называют *вещественной частью* z (пишут $a = \mathrm{Re}\,(z)$), а число b — *мнимой частью* z (пишут $b = \mathrm{Im}\,(z)$). Комплексные числа складывают и умножают, «раскрывая скобки и приводя подобные». Множество комплексных чисел обозначают буквой $\mathbb{C}$.

Задача 1. Найдите вещественную и мнимую части суммы и произведения чисел $a + bi$ и $c + di$.

Определение 2. Каждому комплексному числу $z = a+bi$ сопоставим точку (a, b) и вектор (a, b). Длина этого вектора называется *модулем* числа z и обозначается $|z|$.
Пусть $z \neq 0$. Угол (в радианах), отсчитанный против часовой стрелки от вектора $(1, 0)$ до вектора (a, b), называется *аргументом* числа z и обозначается $\mathrm{Arg}\,(z)$. Аргумент определен с точностью до прибавления числа вида $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. **а)** Каков геометрический смысл суммы комплексных чисел?
б) Сравните $|z + w|$ и $|z| + |w|$ для $z, w \in \mathbb{C}$.

Задача 3. Найдите модуль и аргумент чисел: -4, $\quad 1 + i$, $\quad 1 - i\sqrt{3}$, $\quad \sin\alpha + i\cos\alpha$.

Задача 4. (*Тригонометрическая форма записи*) Докажите, что для любого ненулевого комплексного числа z имеет место равенство $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \mathrm{Arg}\,(z)$.

Задача 5. Рассмотрим умножение точек комплексной плоскости на $\cos\varphi + i\sin\varphi$ как преобразование f этой плоскости, переводящее z в $(\cos\varphi + i\sin\varphi)z$.
а) Куда при этом преобразовании перейдут точки действительной оси?
б) А куда перейдут точки мнимой оси?
в) Докажите, что f — поворот против часовой стрелки на угол φ вокруг начала координат.
г) Пусть $z, w \in \mathbb{C}$. Выразите $|zw|$ и $\mathrm{Arg}\,(zw)$ через $|z|$, $|w|$, $\mathrm{Arg}\,(z)$, $\mathrm{Arg}\,(w)$.
д) Выведите из предыдущего пункта формулы для косинуса суммы и синуса суммы.

Задача 6. **а)** Из любого ли комплексного числа можно извлечь квадратный корень?
б) Решите уравнение $z^2 = i$. **в)** Найдите ошибку: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$.

Задача 7. Докажите, что если и m и n — суммы двух квадратов целых чисел, то и mn — тоже.

Задача 8. (*Формула Муавра*) Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Задача 9. Вычислите **а)** $(1 + i)^{333}$; **б)** $(1 + i\sqrt{3})^{150}$.

Определение 3. (*Формула Эйлера*) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Мы сможем доказать эту формулу в 11 классе, а пока можно использовать выражение $e^{i\varphi}$ как короткое и удобное обозначение для $\cos\varphi + i\sin\varphi$.

Задача 10. **а)** Докажите, что $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$.
б)* Определите e^z для любого комплексного z и докажите, что $e^z e^w = e^{z+w}$ для любых $z, w \in \mathbb{C}$.
в)** Подумайте, как возводить комплексное число в комплексную степень.

Задача 11. Найдите: **а)** $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$; **б)** $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$; **в)** $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$.

Задача 12. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Выразите $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Определение 4. Пусть $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Число $\overline{z} = a - bi$ называют *комплексно-сопряжённым* к z.

Задача 13. **а)** Выразите $|\overline{z}|$, $\mathrm{Arg}\,(\overline{z})$ через $|z|$, $\mathrm{Arg}\,(z)$.
Докажите, что: **б)** $|z|^2 = z\overline{z}$; **в)** $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;
г) если $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами и $P(z) = 0$, то $P(\overline{z}) = 0$.

Задача 14. **а)** Определите деление комплексных чисел; **б)** вычислите $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; **в)** вычислите $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

Определение 5. *Корнем из 1 степени n* называется любое такое комплексное число z, что $z^n = 1$.

Задача 15. **а)** Найдите и нарисуйте все корни из 1 степеней 2, 3, 4, 5 и 6. **б)** Сколько всего корней из 1 степени n? Найдите их произведение и сумму их s-х степеней для каждого $s \in \mathbb{N}$.

Задача 16*. Вершины правильного n-угольника покрашены в несколько цветов так, что точки одного цвета — вершины правильного многоугольника. Докажите: среди этих многоугольников есть равные.

1	2 а	2 б	3	4	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	6 а	6 б	6 в	7	8	9 а	9 б	10 а	10 б	10 в	11 а	11 б	11 в	12	13 а	13 б	13 в	13 г	14 а	14 б	14 в	15 а	15 б	16