

Обозначения:  $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  или  $f(x) \rightarrow b$  при  $x \rightarrow a$  (« $f(x)$  стремится к  $b$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ »).

**Задача 2.** Дайте определение того, что функция  $f$  не имеет предела в точке  $a$ .

**Задача 3.** Докажите эквивалентность определений 1 и 2.

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \{x\}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x - 3}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ ; е)\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + 1}}$ .

**Задача 5.** Дайте определение а) предела функции при  $x \rightarrow +\infty$ ;  
б) того, что  $f(x)$  стремится к  $+\infty$ , при  $x \rightarrow a$  (где  $a \in \mathbb{R}$  или  $a = +\infty$ ).

**Задача 6.** Найдите пределы (если они существуют) при  $x \rightarrow +\infty$  функций из задачи 4, а)–д).

**Задача 7.** Сформулируйте и докажите а) теоремы о пределе суммы, разности, произведения и отношения двух функций; б) «принцип двух милиционеров» для функций

**Задача 8.** Найдите пределы при  $x \rightarrow \pm\infty$  функции  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x), Q(x)$  — многочлены.

**Задача 9.** а) Пусть функции  $f$  и  $g$  определены на  $\mathbb{R}$ , причём  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$ . Обязательно ли тогда  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$ ? б) А если  $g(A) = B$ ?

**Задача 10.** Докажите неравенства: а)  $\sin x < x$  при  $x > 0$ ; б)  $x < \operatorname{tg} x$  при  $0 < x < \pi/2$ .

**Задача 11.** (Первый «замечательный» предел) Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Задача 12.** Найдите: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{x}$ .

**Задача 13.** Найдите: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ); в)\*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ).

**Задача 14.** Докажите, что: а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ;

**Задача 15.** (Второй «замечательный» предел) Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ .

**Задача 16.** Определите предел слева (справа) функции  $f$  в точке  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ).

**Задача 17.** Приведите пример функции, которая в точке  $a$  **а)** имеет разные пределы слева и справа; **б)** имеет предел слева, но не имеет предела справа; **в)** не имеет предела ни справа, ни слева.

**Задача 18.** Докажите, что функция, монотонная на некотором интервале, имеет предел как слева, так и справа в каждой точке этого интервала.

**Задача 19\*.** Приведите пример функции, определенной на  $\mathbb{R}$ , не равной тождественно нулю ни на каком интервале, но имеющей в каждой точке нулевой предел.

**Задача 20\*.** Может ли функция, определенная на  $\mathbb{R}$ , иметь в каждой точке бесконечный предел?

1	1	1	2	3	4	4	4	4	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	12	12	12	12	12	13	13	13	14	14	15	16	17	17	17	18	19	20						
a	б	в			a	б	в	г	д	e	a	б		a	б	a	б	a	б		a	б	в	г	д	a	б	в	a	б				a	б	в								