

[illegible]

Случайные блуждания

Задача 21. Предположим, что мы находимся в целочисленной точке горизонтальной прямой и каждую секунду сдвигаемся с вероятностью $1/2$ на 1 вправо или влево.

- а) Найдите число способов попасть из начала координат в точку с координатой x через t секунд ($t \geq x \geq 0$).
- б) (*Принцип отражения*) Докажите, что число способов попасть через t секунд из точки $x > 0$ в точку $y > 0$, не проходя через начало координат, равно числу способов попасть через t секунд из точки $-x$ в точку y .
- в) Найдите число способов попасть из начала координат в точку $x > 0$ через t секунд, не проходя при этом второй раз через начало координат.
- г) Найдите число способов двигаться из начала координат t секунд, не проходя при этом второй раз через начало координат.

Задача 22. Пусть в начальный момент времени мы находимся в начале координат.

- а) Найдите вероятность u_{2t} возвращения в начало координат через $2t$ секунд.
- б) Обозначим f_{2t} вероятность первого возвращения в начало координат через $2t$ секунд. Докажите, что $f_{2t} = u_{2t-2} - u_{2t}$.
- в) Докажите, что случайное блуждание на прямой возвратно, т. е. что выйдя из начала координат, мы вернемся в него с вероятностью 1.
- г) Докажите, что выйдя из начала координат, мы с вероятностью 1 достигнем каждой целочисленной точки.

Задача 23. Аналогично предыдущему определяется случайное блуждание на плоскости и в пространстве. В каждую секунду производится сдвиг на 1 в направлении, параллельном одной из координатных осей. Вероятности сдвига по всем направлениям равны $1/4$ в случае плоскости и $1/6$ в случае пространства. Также обозначим u_{2t} и f_{2t} соответственно вероятности возвращения и первого возвращения в начало координат через $2t$ секунд.

- а) Найдите u_{2t} в случае блуждания на плоскости и в пространстве.
- б) Докажите, что $u_{2t} = \sum_{k=1}^t f_{2k} u_{2t-2k}$.
- в)* Докажите, что в случае блуждания на плоскости ряд $\sum_{t=0}^{\infty} u_{2t}$ расходится и блуждание возвратно.
- г)* Докажите, что при блуждании в пространстве ряд $\sum_{t=0}^{\infty} u_{2t}$ сходится и вероятность возврата строго меньше 1.
- Дополнительные задачи**

Дополнительные задачи

Задача 24. Двое бросают монету — один 10 раз, другой — 11. Какова вероятность того, что у второго орлов выпало больше, чем у первого?

Задача 25. (Задача о баллотировке) Предположим, что на выборах кандидат P набрал p голосов, а кандидат Q набрал q голосов, причем $p > q$. Найдите вероятность того, что при последовательном подсчете голосов P все время был впереди Q .

Задача 26*. Каждый из n пассажиров купил по билету на n -местный самолет. Первой зашла сумасшедшая старушка и уселась на случайное место. Далее, каждый вновь пришедший занимает свое место, если оно свободно; в противном случае он занимает случайное место. Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место?

Задача 27. Датчик случайных чисел может выдавать конечное число чисел, каждое число — с определенной вероятностью. Скажем, что один датчик круче другого, если с вероятностью большей $1/2$ выданное им число больше числа, выданного другим датчиком. Можно ли изготовить 3 датчика A , B и C так, чтобы A был круче B , B был круче C , а C был круче A ?

Задача 28*. (*Выбор невесты*) Царь желает выбрать самую красивую невесту из 100 претенденток. Процедура выбора невесты состоит в следующем: претендентки в случайном порядке приходят к царю, и в момент прихода очередной претендентки царь может объявить ее своей невестой (царь заранее не знаком с претендентками, но легко упорядочивает девушек по красоте). Докажите, что царь может выбрать самую красивую с вероятностью, большей $1/3$.

Задача 29*. В жевачку вложен с вероятностью $1/n$ один из n вкладышей. Какое количество жевачек нужно в среднем купить, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

[illegible]