

Задача 1. Дайте определение суммы и произведения многочленов из $\mathbb{K}[x]$.

Задача 2. Докажите, что над любым полем существует бесконечно много неприводимых многочленов.

а) $5x + 7$; б) $x^2 - 2$; в) $x^3 + x^2 + x + 1$; г) $x^2 + 1$; д) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; е) $x^4 + 4$.

Определение 3. Наибольшим общим делителем ($\text{НОД}(A, B)$) двух многочленов A и B из $\mathbb{K}[x]$, хотя бы один из которых ненулевой, называют приведённый многочлен наибольшей степени, который делит и A , и B .

б) Сформулируйте и докажите алгоритм Евклида вычисления НОД многочленов.

Задача 5. Докажите, что $\text{НОД}(A, B)$ делится на любой общий делитель A и B .

Задача 6. Пусть многочлены $A(x)$ и $B(x)$ из $\mathbb{K}[x]$ *взаимно просты* (то есть, $\text{НОД}(A, B) = 1$). Докажите, что тогда существуют такие многочлены $U(x)$ и $V(x)$ из $\mathbb{K}[x]$, что $AU + BV = 1$.

Задача 7. Докажите, что если неприводимый над \mathbb{K} многочлен $P(x)$ из $\mathbb{K}[x]$ делит произведение двух многочленов $A(x)$ и $B(x)$ из $\mathbb{K}[x]$ ненулевой степени, то он делит один из этих многочленов.

Задача 8. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{K}[x]$ однозначно (с точностью до множителей из \mathbb{K}) раскладывается в произведение неприводимых над \mathbb{K} многочленов.

Обозначение. Множество многочленов с целыми коэффициентами обозначается $\mathbb{Z}[x]$.

Определение 4. Многочлен положительной степени из $\mathbb{Z}[x]$ называется *неприводимым (над \mathbb{Z})*, если он не может быть представлен в виде произведения двух многочленов меньшей степени из $\mathbb{Z}[x]$. (Это определение несколько отличается от общепринятого: обычно требуют еще, чтобы коэффициенты многочлена были взаимно просты).

Задача 9. (*Признак Эйзенштейна*) Если для многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ можно указать такое простое число p , что старший коэффициент этого многочлена не делится на p , а все остальные коэффициенты делятся на p , причём свободный член этого многочлена, делясь на p , не делится на p^2 , то многочлен $P(x)$ неприводим над \mathbb{Z} .

Задача 10. Докажите, что следующие многочлены неприводимы над \mathbb{Z} :

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$; **б)** $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$

Задача 11. Пусть p, p_1, \dots, p_k — различные простые числа. Докажите, что многочлены

а) $x^n - p$; **б)** $x^n - p_1 \dots p_k$ неприводимы над \mathbb{Z} .

Задача 12. Какие из многочленов задачи 4 неприводимы над \mathbb{Z} ?

Задача 13. Докажите, что многочлен $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ неприводим над \mathbb{Z} тогда и только тогда, когда n — простое число. (Указание: рассмотрите многочлен $P(x+1)$.)

[illegible]

```
<?xml version='1.0'?>
<listok number = 'AG-2' description='Многочлены на поле' type='1' date='01.2017'>
  <problem group='1' type='0'>1</problem>
  <problem group='2' type='0'>2</problem>
  <problem group='3' type='0'>3a</problem>
  <problem group='3' type='0'>3б</problem>
  <problem group='3' type='0'>3в</problem>
  <problem group='3' type='0'>3г</problem>
  <problem group='3' type='0'>3д</problem>
  <problem group='3' type='0'>3е</problem>
  <problem group='4' type='0'>4a</problem>
  <problem group='4' type='0'>4б</problem>
  <problem group='5' type='0'>5</problem>
  <problem group='6' type='0'>6</problem>
  <problem group='7' type='0'>7</problem>
  <problem group='8' type='0'>8</problem>
  <problem group='9' type='0'>9</problem>
  <problem group='10' type='0'>10a</problem>
  <problem group='10' type='0'>10б</problem>
  <problem group='11' type='0'>11a</problem>
  <problem group='11' type='0'>11б</problem>
  <problem group='12' type='0'>12</problem>
  <problem group='13' type='0'>13</problem>
</listok>
```