Задача 1. **а)** (*Решето Эратосфена*) Выпишем в ряд целые числа от 2 до n. Подчеркнём число 2 и сотрём числа, делящиеся на 2. Первое неподчёркнутое число подчеркнём и сотрём числа, делящиеся на него, и т. д. Будем действовать так, пока каждое число от 2 до n не будет либо подчёркнуто, либо стёрто. Докажите, что мы подчеркнём в точности простые числа от 1 до n. **б)** Пусть очередное число, которое мы хотим подчеркнуть, больше $\sqrt{n}$. Докажите, что нестёртые к этому моменту числа от 2 до n простые. **в)** Какие числа, меньшие 100, простые?

Определение 1. Назовём *идеалом* в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ любое подмножество I с такими свойствами:
1) если $a \in I$ и $b \in I$, то и $a + b \in I$ (сумма любых двух чисел из идеала также принадлежит этому идеалу);
2) если $a \in I$, $n \in \mathbb{Z}$, то $na \in I$ (умножая число из идеала на *любое целое*, мы получаем число из этого идеала).

Задача 2. Верно ли, что разность любых двух чисел из идеала также принадлежит этому идеалу?

Задача 3. Какие из следующих множеств являются идеалами в $\mathbb{Z}$: **а)** $\mathbb{Z}$; **б)** $\mathbb{N}$; **в)** множество чётных целых чисел; **г)** множество нечётных целых чисел; **д)** $\{0\}$: **е)** множество чисел, делящихся на 17.

Задача 4. (*Теорема об идеалах в* $\mathbb{Z}$) Пусть r — наименьшее положительное число, принадлежащее идеалу I. Докажите, что **а)** любое число из I делится на r; **б)** I состоит из всех целых чисел, делящихся на r.

Задача 5. Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю, J — множество чисел вида $ax + by$, где x и y целые, и r — наименьшее положительное число в J. Докажите, что
а) J — идеал; **б)** r делится на (a, b); **в)** a и b делятся на r; **г)** $r = (a, b)$, то есть J состоит из всех чисел, делящихся на (a, b).

Задача 6. Пусть a и b — целые числа, причем $(a, b) = 1$. Докажите, что
а) найдутся такие целые x и y, что $ax + by = 1$; **б)** если ca делится на b, где c — целое, то c делится на b.

Задача 7. (*Основная теорема арифметики*) Докажите следующие утверждения:
а) если p — простое число, m и n — целые, и $mn \,\vdots\, p$, то либо $m \,\vdots\, p$, либо $n \,\vdots\, p$;
б) для каждого целого $n > 1$ найдутся такие простые $p_1, \ldots, p_k$, что $n = p_1 \cdot \cdots \cdot p_k$;
в) (*каноническое разложение*) Для каждого целого $n > 1$ найдутся такие различные простые $p_1, \ldots, p_k$ и натуральные $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k}$;
г) разложения из пунктов б) и в) единственны с точностью до порядка сомножителей.

Задача 8. Назовём чётное число n *чётнопростым,* если n не раскладывается в произведение двух чётных чисел. (Например, 6 — чётнопростое, а 12 — нет.) Какие пункты задачи 2 будут верны, если заменить в условии целые числа на чётные, а простые — на чётнопростые?

Задача 9. Числа a, b, c, n натуральные, $(a, b) = 1$, $ab = c^n$. Найдутся ли такие целые x и y, что $a = x^n$, $b = y^n$?

Задача 10. Решите в натуральных числах уравнение $x^{42} = y^{55}$.

Задача 11. Найдите каноническое разложение числа **а)** 2010; **б)** 2011; **в)** 17!; **г)** C_{20}^{10}.

Задача 12. При каких натуральных k число $(k - 1)!$ не делится на k?

Задача 13. **а)** (*Теорема Лежандра*) Докажите, что простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$ в степени $[n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots$ (где $[x]$ — это *целая часть* числа x).
С какого момента слагаемые в этой сумме станут равными нулю?
б) Сколько у 2000! нулей в конце его десятичной записи? **в)** Может ли $n!$ делиться на 2^n $(n \geqslant 1)$?

Задача 14. Число p простое. Докажите, что C_p^k делится на p, если $0 < k < p$.

Задача 15. (*Малая теорема Ферма*) Пусть p — простое число, n — целое число. Докажите, что
а) $n^p - n$ делится на p; **б)** если $(n, p) = 1$, то $n^{p-1} - 1$ делится на p.

Задача 16*. **а)** Числа p и q простые, $2^p - 1 \,\vdots\, q$. Докажите, что $q - 1 \,\vdots\, p$. **б)** Простое ли $2^{13} - 1$?

Задача 17*. Может ли быть целым число **а)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}$; **б)** $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{2n+1}$?

***

Определение 2. *Наименьшим общим кратным* ненулевых целых чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b. Обозначение: $[a, b]$ или НОК(a, b).

Задача 18. **а)** Как, зная канонические разложения чисел a и b, найти (a, b) и $[a, b]$? **б)** Найдите $[192, 270]$. **в)** Докажите, что $ab = (a, b) \cdot [a, b]$. **г)** Верно ли, что $[a, b]/a$ и $[a, b]/b$ взаимно просты?

Задача 19. Докажите, что любое общее кратное целых чисел a и b делится на $[a, b]$.

Задача 20. Про натуральные числа a и b известно, что $(a, b) = 15$, $[a, b] = 840$. Найдите a и b.

Задача 21. Найдите $\dfrac{\text{НОК}(1,\,2,\,3,\,\ldots\,,\,99)}{\text{НОК}(2,\,4,\,6,\,\ldots\,,\,200)}$.

1 а	1 б	1 в	2	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	4 а	4 б	5 а	5 б	5 в	5 г	6 а	6 б	7 а	7 б	7 в	7 г	8	9	10	11 а	11 б	11 в	11 г	12	13 а	13 б	13 в	14	15 а	15 б	16 а	16 б	17 а	17 б	18 а	18 б	18 в	18 г	19	20	21