Задача 1. Уравнение $x^3+ax+1=0$ имеет три действительных корня. Докажите, что найдётся такое $\varepsilon>0$, что для всякого $b\in(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ уравнение $x^3+bx+1=0$ имеет три действительных корня.

Задача 2. Функции f и g непрерывны на $\mathbb{R}$. Верно ли, что функция $\max(f(x),g(x))$ непрерывна на $\mathbb{R}$?

Задача 3. Пусть f непрерывна на $\mathbb{R}$, и пусть уравнение $f(x)=x$ не имеет корней. Докажите, что уравнение $f(f(x))=x$ также не имеет корней.

Задача 4. Запишем каждое $x\in(0;1)$ в троичной системе счисления: $x=0,a_1a_2a_3\ldots$ (без бесконечного числа двоек подряд), и положим $f(x)=a_1/10+a_2/10^2+a_3/10^3+\ldots$. Будет ли f непрерывна на $(0;1)$?

Задача 5. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, $(a;b)$ — любая точка на координатной плоскости. Докажите, что среди всех точек графика функции f найдётся такая, расстояние от которой до точки (a,b) минимально (то есть не больше, чем расстояние от любой другой точки графика f до $(a;b)$).

Задача 6. Однажды утром (в 9^{00}) турист вышел из лагеря к вершине горы и добрался туда в 20^{00}. В 9^{00} следующего дня он начал спуск с вершины (по той же тропе, что и поднимался) и в 20^{00} вернулся в лагерь. Найдётся ли на тропе точка, которую турист проходил в одно и то же время в день подъёма и в день спуска?

Задача 7. Верно ли, что каждая внутренняя точка любого выпуклого многогранника принадлежит какому-то отрезку, концы которого находятся на рёбрах этого многогранника?

Задача 8. Выпуклый многоугольник M, прямая l и точка A лежат в одной плоскости. Докажите, что найдётся прямая l', которая делит M на две равновеликие части и **а)** параллельна l; **б)** проходит через A.

Задача 9. Пусть S^1 — окружность на плоскости. **а)** Дайте определение непрерывной функции $f:S^1\to\mathbb{R}$. **б)** Пусть $f:S^1\to\mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что у S^1 найдётся такой диаметр AB, что $f(A)=f(B)$.

Задача 10. (Теоремы о блинах). На сковороде лежат два блина (многоугольники). Докажите, что
а) есть прямая, делящая каждый блин на две равновеликие части (часть может состоять из многих кусков);
б) найдутся две перпендикулярные прямые, делящие первый блин на четыре равновеликие части.

Задача 11. Фигура ограничена и выпукла. Докажите: **а)** вокруг неё можно описать квадрат; **б)** в неё можно вписать квадрат, если она центрально-симметрична; **в)** некая прямая делит пополам её площадь и периметр.

Задача 12. Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *выпукла вниз:* для любого отрезка $[a;b]$ график f на $[a;b]$ лежит не выше прямой, соединяющей точки $(a;f(a))$ и $(b;f(b))$. Докажите, что f непрерывна на $\mathbb{R}$.

Задача 13. Пусть $f\in C(\mathbb{R})$, причем $f(\frac{x+y}{2})\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$ при $x,y\in\mathbb{R}$. Докажите, что f выпукла вниз на $\mathbb{R}$.

Задача 14. Пусть $f\in C(\mathbb{R})$, f не является константой. Докажите, что найдётся такое $r\notin\mathbb{Q}$, что $f(r)\notin\mathbb{Q}$.

Задача 15. Пусть $M\subset\mathbb{R}$ — счётно. Найдётся ли $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, множество точек разрыва которой есть M?

Задача 16*. f монотонна и ограничена на отрезке I. Докажите: у f не более чем счетное число разрывов на I.

Задача 17*. Найдётся ли функция, принимающая на каждом отрезке все действительные значения?

Определение 1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки a. Для каждого интервала $I \subset \mathcal{U}$ назовем *колебанием функции f на интервале I* число
$$\omega_I(f) = \sup\{f(x) \mid x \in I\} - \inf\{f(x) \mid x \in I\}.$$
Колебанием функции f в точке a назовем число $\omega_a(f) = \inf\{\omega_I \mid I \subset \mathbb{R},\ a \in I\}$.

Задача 18. Докажите, что f непрерывна в точке a если и только если $\omega_a(f) = 0$.

Определение 2. Говорят, что график функции $f : M \to \mathbb{R}$ имеет *горизонтальную хорду длиной δ*, если найдутся такие точки $x, y \in M$, что $|x - y| = \delta$ и $f(x) = f(y)$.

Задача 19. Пусть f — непрерывная периодическая функция на прямой с периодом T. Докажите, что ее график имеет горизонтальную хорду длины а) $T/2$; в) $T/3$; г) Tq при любом $q \in \mathbb{Q}$; д) l при любом $l \in \mathbb{R}$.

Задача 20. Пусть $f \in C([0;1])$ и $f(0) = f(1)$.
а) Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ у графика f найдётся *горизонтальная хорда длины* $1/n$.
б) Есть ли ещё числа a, для которых у графика f обязательно найдётся горизонтальная хорда длины a?

Задача 21*. Некогда плоский пол стал неровным (но отличается от плоскости не слишком сильно). Докажите, что можно так поставить на пол квадратный табурет, чтобы он стоял на полу всеми четырьмя ножками.

Задача 22*. Среди ровной степи стоит гора. На вершину ведут две тропы (считаем их графиками непрерывных функций), не опускающиеся ниже уровня степи. Два альпиниста одновременно начали подъём (по разным тропам), соблюдая условие: всё время быть на одинаковой высоте. Смогут ли они достичь вершины, двигаясь непрерывно, если **а)** тропы состоят из конечного числа подъёмов и спусков; **б)** в общем случае?

Задача 23*. Из A в B ведут две дороги, не пересекающие друг друга и сами себя. Две машины, связанные верёвкой длины 15 м, проехали из A в B по разным дорогам, не порвав верёвки. Два круглых воза радиуса 8 м выезжают одновременно по разным дорогам, один из A в B, другой из B в A. Могут ли они разминуться?

1	2	3	4	5	6	7	8 а	8 б	9 а	9 б	10 а	10 б	11 а	11 б	11 в	12	13	14	15	16	17	18	19	20 а	20 б	21	22 а	22 б	23