

[illegible]

Условная вероятность

Задача 13. Пусть B — событие, обладающее ненулевой вероятностью.

а) Дайте определение условной вероятности $P(A \mid B)$ события A при условии B .

б) Докажите, что тройка $(\Omega, \mathbb{A}, P_B)$, где P_B — условная вероятность, является вероятностным пространством.

Задача 14. Какова вероятность того, что в семье два мальчика, если один из детей — мальчик?

Задача 15. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна 0,2. Какова вероятность поразить цель, если в 2% случаев выстрел не происходит из-за осечки?

Определение 2. События A и B называются *независимыми*, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. События A_1, \dots, A_n называются *независимыми в совокупности*, если для любых $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ выполнено равенство $P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$.

Задача 16. Из колоды в 52 карты выбирается наудачу одна карта. Независимы ли события

а) «выбрать вальта» и «выбрать пику»; **б)** «выбрать вальта» и «не выбрать даму»?

Задача 17. Пусть A и B независимы. **а)** Верно ли, что $P(B | A) = P(B)$? **б)** Выразите $P(A \text{ и } B)$ через $P(A)$ и $P(B)$. **в)** Верно ли, что независимы события A и «не B »? **г)** Тот же вопрос про события «не A » и «не B ».

Задача 18. Следует ли из попарной независимости нескольких событий их независимость в совокупности?

Задача 19. (Теорема умножения вероятностей) Пусть A_1, A_2, \dots, A_n — события, вероятности которых больше 0. Докажите, что

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n \mid A_1 \dots A_{n-1}).$$

Определение 3. События A и B *несовместны*, если они не могут произойти одновременно ($A \cap B = \emptyset$).

Задача 20. (Формула полной вероятности) Пусть H_1, H_2, \dots, H_n — попарно несовместные события («гипотезы»), причем $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$. Докажите, что для любого события B

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(B \mid H_i).$$

Задача 21. Два охотника одновременно выстрелили одинаковыми пулями в медведя. Медведь был убит одной пулей. Как поделить охотникам шкуру, если вероятность попадания у первого — 0,3, а у второго — 0,6?

Задача 22. Три завода выпускают одинаковые изделия. Первый производит 50% всей продукции, второй — 20%, третий — 30%. Первый завод выпускает 1% брака, второй — 8%, третий — 3%. Выбранное наугад изделие — бракованное. Какова вероятность того, что оно со второго завода?

Задача 23. Пусть при рентгеновском обследовании вероятность обнаружить туберкулез у больного туберкулезом равна 0,9, а вероятность принять здорового человека за больного равна 0,01. Доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна 0,001. С какой вероятностью человек здоров, если **а)** он был признан больным при обследовании; **б)** он был признан больным при двух независимых обследованиях?

Задача 24. В первой урне 2 белых и 6 чёрных шаров, во второй — 4 белых и 2 чёрных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны наудачу достали один шар.

а) Какова вероятность того, что этот шар белый? б) Шар, взятый из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара?

Задача 25. Из 100 симметричных монет одна фальшивая (с двумя орлами). Выбрали случайно монету, бросили 5 раз: выпали все орлы. С какой вероятностью, если её бросить ещё 10 раз, снова выпадут все орлы?

Геометрические вероятности

При решении требуется построить соответствующее бесконечное вероятностное пространство.

Задача 26. Палку случайно ломают на 3 части. С какой вероятностью из них можно сложить треугольник?

Задача 27. (Задача Бюффона) На плоскость, разлинованную параллельными прямыми на расстоянии a друг от друга, случайно брошена игла длиной $l < a$. Найти вероятность пересечения иглы с какой-нибудь прямой.

Задача 28. (*Парадокс Бертрана*) С какой вероятностью случайная хорда некой данной окружности будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в эту окружность?

Задача 29. Монету радиусом r и толщиной d бросают на горизонтальную поверхность (соударение неупругое). Какова вероятность того, что монета упадет на ребро?

[illegible]