Метрические пространства: сходящиеся последовательности

Определение 1. Говорят, что последовательность (x_n) точек метрического пространства (M, d) *сходится к* $a \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что если $n > N$, то $d(x_n, a) < \varepsilon$.

Задача 1. Докажите, что последовательность в метрическом пространстве не может иметь двух различных пределов.

Задача 2. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(a, b)$?

Задача 3. Докажите, что если последовательность сходится и предел её лежит внутри некоторого открытого шара, то почти все её члены лежат внутри этого шара.

Задача 4. (*Сходимость в* $\mathbb{R}^m$) Рассмотрим арифметическое m-мерное пространство $\mathbb{R}^m$ с евклидовой метрикой. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ если и только если $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant m$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(i)} = a^{(i)}$ (под $\alpha^{(i)}$ подразумевается i-ая координата точки α).

Задача 5. Какие последовательности являются сходящимися в
а) дискретной метрике; **б)** p-адической метрике?

Задача 6. Рассмотрим пространство M ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций с равномерной метрикой. **а)** Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = g$, то для всех $x \in [a, b]$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$. **б)** Верно ли обратное?

Определение 2. Последовательность (x_n) точек метрического пространства (M, d) называется *фундаментальной,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что если $m, n > N$, то $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Задача 7. **а)** Докажите, что любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.
б) Верно ли обратное?

Определение 3. Метрическое пространство (M, d) называется *полным,* если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

Задача 8. Докажите, что вещественная прямая с естественной метрикой полна.

Задача 9. Докажите, что пространство $C([a, b])$ с равномерной метрикой является полным.

Определение 4. Отображение $f\colon M \to M$ из метрического пространства M в себя называется *сжимающим,* если найдётся такая константа $0 < \theta < 1$, что для любых $x, y \in M$: $d(f(x), f(y)) < \theta d(x, y)$.

Задача 10. При каких условиях гомотетия на плоскости является сжимающим отображением?

Задача 11. **а)** Докажите, что сжимающее отображение f полного метрического пространства M имеет неподвижную точку, то есть $\exists\, x \in M$: $f(x) = x$. **б)** Верно ли это без условия полноты M?
(Подсказка к пункту **а**: докажите, что любая последовательность $(f^n(x))$ фундаментальна)

Задача 12. Докажите, что композиция гомотетии с коэффициентом, не равным ± 1 и любого движения имеет неподвижную точку.

Задача 13. (*Метод Ньютона*) Пусть функция $\alpha(x)$ дважды непрерывно дифференцируема (то есть вторая производная непрерывна) на отрезке $[a, b]$, имеет на нём корень $\widetilde{x}$, причём $\alpha'(x) \neq 0$ всюду на $[a, b]$. Рассмотрим функцию $f(x) = x - \dfrac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}$.
а) Докажите, что $\alpha(\widetilde{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$;
б) Докажите, что f и f' непрерывны;
в) Докажите, что найдётся такое $\delta > 0$, что f на $U_\delta(\widetilde{x})$ осуществляет сжимающее отображение.
г) Что всё это значит и как это применять?
д) Найдите $\sqrt{2}$ с точностью до трёх знаков после запятой.

1	2	3	4	5 а	5 б	6 а	6 б	7 а	7 б	8	9	10	11 а	11 б	12	13 а	13 б	13 в	13 г	13 д