

Интеграл Римана

Определение 1. Разбиением отрезка $[a, b]$ называется всякий конечный набор точек $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ с условием $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Разность $x_i - x_{i-1}$ обозначается Δx_i .

Диаметром разбиения σ называется число $\lambda(\sigma) = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i$.

Определение 2. Отмеченным разбиением отрезка $[a, b]$ называется пара (σ, ξ) , где $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — набор точек из отрезков разбиения: $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

Определение 3. Пусть f — функция на отрезке $[a, b]$, а (σ, ξ) — отмеченное разбиение этого отрезка. Интегральной суммой функции f при отмеченном разбиении (σ, ξ) называется

$$\sum_{(\sigma, \xi)} f \Delta x = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Определение 4. Пусть f — функция на отрезке $[a, b]$. Интегралом Римана функции f по отрезку $[a, b]$ называется

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(\sigma) \rightarrow 0} \sum_{(\sigma, \xi)} f \Delta x,$$

где предел берется по всем отмеченным разбиениям (σ, ξ) отрезка $[a, b]$ при $\lambda(\sigma) \rightarrow 0$. Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если этот предел (то есть интеграл) существует. Обозначение: $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Задача 1. Дайте четкое определение (в терминах ε и δ) того, что число I является пределом интегральных сумм $\sum_{(\sigma, \xi)} f \Delta x$ при $\lambda(\sigma) \rightarrow 0$.

Задача 2. Интегрируемы ли на отрезке $[0, 1]$ функции: а) $f(x) = 1$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = x^{-1}$?

Задача 3. Докажите, что любая интегрируемая функция на отрезке $[a, b]$ ограничена на нем.

Задача 4. Докажите, что если изменить значение функции в конечном числе точек, то ее интегрируемость на отрезке $[a, b]$ и значение интеграла не изменятся.

Задача 5. Докажите критерий Коши интегрируемости: функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух отмеченных разбиений (σ, ξ) и (σ', ξ') таких, что $\lambda(\sigma) < \delta$ и $\lambda(\sigma') < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{(\sigma, \xi)} f \Delta x - \sum_{(\sigma', \xi')} f \Delta x \right| < \varepsilon.$$

Интеграл Дарбу

Определение 5. Пусть σ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, f — функция, ограниченная на этом отрезке. Положим $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$. Числа $s_\sigma = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ и $S_\sigma = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу функции f при разбиении σ .

Задача 6. Объясните геометрический смысл верхней и нижней сумм Дарбу и «нарисуйте» их

- а) для функции $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{4} \mid i = 0, \dots, 4\}$;
 б) для функции $f(x) = (x - 1)^2$ на отрезке $[0, 2]$ при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{4} \mid i = 0, \dots, 8\}$.

Задача 7. Можно ли исключить из определения 5 условие ограниченности функции f на отрезке $[a, b]$?

Задача 8. Найдите нижние и верхние суммы Дарбу при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{n} \mid i = 0, \dots, n\}$ отрезка $[0, 1]$ функций
 а) $f(x) = x$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = \sin \pi x$.

Задача 9. Что происходит с суммами Дарбу при добавлении к разбиению новых точек?

Задача 10. Докажите: любая верхняя сумма Дарбу функции не меньше любой её нижней суммы Дарбу.

Задача 11. Докажите, что для любой ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f существуют $I_* = \sup s_\sigma$ и $I^* = \inf S_\sigma$, где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям σ отрезка. Сравните I_* и I^* . Эти числа называются нижним и верхним интегралами Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$.

Задача 12. Найдите I_* и I^* для

- а) $f(x) = x$ на $[0, 1]$; б) $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$; в) функции Дирихле на отрезке $[a, b]$.

Задача 13. Докажите, что функция f интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена на этом отрезке, и $I_* = I^*$. При этом $\int_a^b f(x) dx = I_* = I^*$.

Задача 14. Верно ли, что всякая ограниченная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке?

Задача 15. Докажите, что функция, монотонная на некотором отрезке, интегрируема на нём.

Задача 16. а) Докажите, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.

б) Верно ли, что если интеграл функции равен нулю, то и сама функция тождественно равна нулю?

в) А если эта функция неотрицательна? г) А если эта функция неотрицательна и непрерывна?

д)* Верно ли, что интеграл от строго положительной функции строго больше нуля?

Задача 17. Пусть $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Докажите, что $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ и выполнено равенство

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

Задача 18. Пусть $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $c \in \mathbb{R}$. Докажите, что $cf \in \mathcal{R}([a, b])$ и выполнено равенство

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Задача 19. Пусть $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ и при любом $x \in [a, b]$ выполнено $f(x) \leq g(x)$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Задача 20. Пусть $f \in \mathcal{R}([a, b])$ и для любого $x \in [a, b]$ выполнено $m \leq f(x) \leq M$. Докажите, что

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Задача 21. а) Докажите, что $I_* = I^* \iff \inf_{\sigma} (S_{\sigma} - s_{\sigma}) = 0$.

б) Пусть $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Докажите, что $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ и выполнено неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Задача 22. Пусть $f \in \mathcal{R}([a, b])$ и $[c, d] \subset [a, b]$. Докажите, что $f \in \mathcal{R}([c, d])$.

Задача 23. Пусть $a < b < c$. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, b]$ и $[b, c]$, то она интегрируема и на $[a, c]$, причём

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Задача 24. Докажите, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём.

Указание: непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём (см. листок 24).

Задача 25. Докажите интегрируемость на отрезке

а) ограниченной функции с конечным числом точек разрыва на этом отрезке;

б)* ограниченной функции со счётным числом точек разрыва на этом отрезке.

[illegible]