Основная теорема алгебры

Формулировка

Произвольный многочлен степени $n > 0$ с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней (считаемых со своими кратностями).

Обозначения

$P(z)$ — некоторый произвольно выбранный многочлен от комплексной переменной z с комплексными коэффициентами степени $n > 0$.
$\mathbb{D}(z_0, \varrho)$ — круг с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ радиуса ϱ, т. е. $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant \varrho\}$.

* * *

Задача 1. (*Поведение многочлена на бесконечности*) Докажите, что $|P(z)| \to +\infty$ при $|z| \to +\infty$.

Задача 2. Многочлен $P(z)$ можно рассматривать как функцию комплексной переменной z с комплексными значениями, а $|P(z)|$ можно рассматривать как функцию комплексной переменной z с вещественными значениями.
а) Дайте определение непрерывности функции комплексной переменной (аналогично определению для функции вещественной переменной).
б) Докажите, что функции $P(z)$ и $|P(z)|$ непрерывны.

Задача 3. (*Поведение многочлена в круге*) Докажите, что $|P(z)|$ ограничен в любом круге (конечного радиуса) и достигает в нём своих максимума и минимума.
(Разрешается решить эту задачу для квадрата со сторонами, параллельными осям координат, вместо круга — это немного проще и этого достаточно для дальнейшего.)

Задача 4. (*Разложение Тейлора*) Докажите, что для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ существуют такое $k \in \mathbb{N}$ и такие $c_k, c_{k+1}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, что $c_k \neq 0$ и для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство
$$P(z) = P(z_0) + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots + c_n(z - z_0)^n \qquad (*)$$
Представление $P(z)$ в таком виде называется *разложением Тейлора многочлена $P(z)$ в точке z_0*.

Задача 5. (*Поведение многочлена в малой окрестности точки*) Пусть $(*)$ — разложение Тейлора многочлена $P(z)$ в точке $z_0 \in \mathbb{C}$.
а) Докажите, что существует такое $\varrho > 0$, что для любого $z \in \mathbb{D}(z_0, \varrho)$, $z \neq z_0$, справедливо неравенство
$$|P(z)| < |P(z_0) + c_k(z - z_0)^k| + |c_k(z - z_0)^k| \qquad (**)$$
б) Пусть для любого $z \in \mathbb{D}(z_0, \varrho)$, $z \neq z_0$, выполнено соотношение $(**)$, и, кроме того, $P(z_0) \neq 0$. Докажите, что существует такое $z_1 \in \mathbb{D}(z_0, \varrho)$, что $|P(z_1)| < |P(z_0)|$.

Задача 6. (*Поведение многочлена на плоскости*)
а) Докажите, что $|P(z)|$ достигает на плоскости своего минимума: существует такое $\mu \geqslant 0$, что $|P(z)| \geqslant \mu$ при любом $z \in \mathbb{C}$, причём найдётся такое $z_0 \in \mathbb{C}$, что $|P(z_0)| = \mu$.
б) Пусть μ такое, как в п. а). Докажите, что $\mu = 0$.

Задача 7. Докажите, что всякий многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень, и выведите отсюда основную теорему алгебры.

Задача 8. **а)** Разложите в произведение многочленов не более чем второй степени с вещественными коэффициентами многочлены $x^4 + 3x^2 + 2$, $x^4 + 4$, $x^n - 1$.
б) Докажите, что произвольный многочлен с вещественными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов не более чем второй степени с вещественными коэффициентами.

Задача 9. Многочлен $P(x) \in \mathbb{R}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ принимает только неотрицательные значения. Докажите, что его можно представить в виде суммы нескольких квадратов многочленов с вещественными коэффициентами.

Задача 10. Докажите, что максимум $|P(z)|$ в круге достигается в некоторой точке граничной окружности этого круга.

1	2 а	2 б	3	4	5 а	5 б	6 а	6 б	7	8 а	8 б	9	10