Определение 1. Пусть дана последовательность чисел $a_1, a_2, a_3 \ldots$. *Бесконечный числовой ряд* (или просто *ряд*) — это формальное выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ (краткое обозначение: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$).

Задача 1. Дайте определение суммы ряда. Всегда ли она существует?

Определение 2. Если у ряда есть сумма, то его называют *сходящимся*, а если нет — то *расходящимся.*

Задача 2. Восстановите ряд по последовательности его *частичных сумм* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n =: \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Задача 3. Верно ли, что:
а) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; **б)** если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится?

Задача 4. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Задача 5. Приведем примеры нахождения суммы ряда.
1) Пусть $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Тогда $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S$, откуда $S = 1/2$.
2) Пусть $S = 1 + 1 + 1 + \ldots$. Тогда $S = 1 + (1 + 1 + 1 + \ldots) = 1 + S$, откуда $0 = 1$.
3) Пусть $S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$. Тогда $S = 1 + 1/2(1 + 1/2 + 1/4 + \ldots) = 1 + S/2$, откуда $S = 2$.
В каких случаях рассуждение корректно, а в каких — допущена ошибка? Почему один и тот же способ вычисления иногда дает верный ответ, а иногда приводит к ошибке?

Задача 6. Выясните, какие из следующих рядов сходятся, и найдите их суммы:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; **б)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; **д)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$;

Определение 3. Обозначим за C_x^n число $\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$, где число x — произвольное действительное число.

е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_{n+x}^n}$

Теорема Кантора. Любая неубывающая ограниченная последовательность имеет предел [1].

Задача 7. При каких натуральных k ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ сходится?

Задача 8. **а)** Пусть ряд, составленный из положительных членов, сходится. Докажите, что ряд, полученнный из него перестановкой членов, тоже сходится, и его сумма совпадает с суммой исходного ряда.
б) Верно ли утверждение пункта а) для произвольного сходящегося ряда?

Задача 9. Дана бесконечная вправо и вниз таблица из положительных чисел. Пусть ряды, составленные из чисел каждой строчки этой таблицы, сходятся. Кроме того, пусть ряд, составленный из сумм этих рядов, тоже сходится и имеет сумму S. Докажите, что ряды, составленные из чисел каждого столбца, сходятся, и ряд, составленный из сумм этих рядов, также имеет сумму S.

Задача 10. Найдите суммы рядов: **а)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$; **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^k x^n$; **в)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$.

Задача 11. Даны два сходящихся ряда из положительных чисел: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Рассмотрим таблицу чисел, у которой на месте с координатами (n, m) стоит число $a_n \cdot b_m$. Перенумеруем все числа в таблице произвольным образом и составим из них ряд. Докажите, что он сходится и его сумма равна произведению сумм двух исходных рядов.

Задача 12. (*задача про экспоненту*) Докажите, что: **а)** ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится при положительных x;
б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ при положительных x; **в)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$ при положительных x и y; **г)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ при всех положительных рациональных x, где $e := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

[1] при решении задач этого листка теоремой Кантора можно пользоваться без доказательства

Задача 13*. Пусть p_k — k-ое по счёту простое число. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_1^m}}\frac{1}{1-\frac{1}{p_2^m}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^m}}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m}$, где m — натуральное число больше одного.

Задача 14*. В задаче 1 определена сумма счетного числа слагаемых. А что такое сумма несчетного числа слагаемых? Когда она может существовать? Чему равна сумма несчетного числа слагаемых, если она существует?

Определение 4. Назовём ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ абсолютно сходящимся, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Задача 15. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Задача 16. Докажите, что если в абсолютно сходящемся ряду переставить его члены некоторым образом, то его сумма не изменится.

Задача 17. Пусть даны два абсолютно сходящихся ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$. Рассмотрим таблицу чисел, у которой на месте с координатами (n,m) стоит число $a_n\cdot b_m$. Пронумеруем числа в таблице произвольным образом и составим ряд из них. Докажите, что его сумма равна произведению сумм двух данных рядов.

Задача 18. Обобщённый бином Ньютона. а) Докажите формулу $\sum\limits_{k=0}^{n} C_\alpha^k C_\beta^{n-k}=C_{\alpha+\beta}^n$ для натуральных α и β.

б) Докажите вышеуказанную формулу для любых α и β.

в) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n$ абсолютно сходится при $|x|<1$.

г) По свойству абсолютно сходящихся рядов ряд из прошлого пункта сходится, обозначим его сумму $S(\alpha)$. Докажите, что $S(\alpha)\cdot S(\beta)=S(\alpha+\beta)$.

д) Покажите, что сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^n x^n$ равна $\sqrt{1+x}$.

е) Найдите $S(-1)$.

Задача 19. Докажите, что в задаче про экспоненту x может быть отрицательным.

1	2	3 а	3 б	4	5	6 а	6 б	6 в	6 г	6 д	6 е	7	8 а	8 б	9	10 а	10 б	10 в	11	12 а	12 б	12 в	12 г	13	14	15	16	17	18 а	18 б	18 в	18 г	18 д	18 е	19