

**Задача 1.** Фабрика выпускает наборы из  $n > 2$  белых слоников различной величины и массы, стоящих по росту. По стандарту разность масс соседних слоников должна быть одной и той же. При каких  $n$  контролер гарантированно сможет это проверить с помощью чашечных весов без гирь?

**Определение 1.** *Арифметическая прогрессия* — это (конечная или бесконечная) последовательность чисел  $\dots, a_1, a_2$ , в которой разность  $d = a_k - a_{k-1}$  между соседними членами  $a_k$  и  $a_{k-1}$  одинакова для всех  $k$ ; она называется *разностью* или *приращением* прогрессии.

**Задача 2.** Выразите  $n$ -й член арифметической прогрессии через первый член и разность. Найдите 50-е натуральное число среди чисел, больших 90 и имеющих остаток 3 при делении на 4.

**Задача 3.** Каждый член некоторой последовательности (кроме крайних, если они есть) равен среднему арифметическому двух соседних членов. Верно ли, что это арифметическая прогрессия? Верно ли обратное?

**Задача 4.** В некоторой арифметической прогрессии сумма первых  $n$  членов равна сумме первых  $m$  членов (где  $m < n$ ). Докажите, что сумма первых  $n + m$  членов этой прогрессии равна нулю.

**Задача 5.** Выразите сумму всех членов конечной арифметической прогрессии  $a_1, a_2, \dots, a_n$  через  
 а) два крайних члена и число слагаемых; б) начальный член, число слагаемых и приращение.

**Задача 6.** Найдите сумму всех трёхзначных чисел, оканчивающихся на 7.

**Задача 7.** По строкам и столбцам прямоугольной таблицы  $m \times n$  стоят арифметические прогрессии. Найдите сумму всех чисел в таблице, если сумма четырёх угловых чисел равна  $S$ .

**Задача 8.** а) Дан квадратный трёхчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . При каких условиях на коэффициенты  $a, b, c$  найдётся такая арифметическая прогрессия  $(a_n)$ , что  $a_1 + \dots + a_n = f(n)$  при всех натуральных  $n$ ?

б) Найдите арифметическую прогрессию, сумма первых  $n$  членов которой равна  $2n^2 - 3n$ .

**Задача 9\*.** Можно ли натуральный ряд покрыть  $k$  арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными 1, если **а)**  $k = 2$ ; **б)**  $k = 3$ ; **в)**  $k = 4$ ; **г)**  $k = 5$ ?

\*\*\*

**Определение 2.** *Геометрическая прогрессия* — это (конечная или бесконечная) последовательность ненулевых чисел  $\dots, a_1, a_2, a_3, \dots$ , в которой отношение  $q = a_k/a_{k-1}$  соседних членов одинаково для всех  $k$ ; оно называется *знаменателем* прогрессии.

**Задача 10.** Будет ли геометрической прогрессией последовательность,  $k$ -й член которой равен

а)  $0, \underbrace{0 \dots 0}_k 3$ ; б)  $\underbrace{1 \dots 1}_k$ ; в)  $2^{3k+5}$ ; г)  $g_k \cdot h_k$ , где  $(g_k), (h_k)$  — геометрические прогрессии?

д) Выразите  $n$ -й член геометрической прогрессии через первый член и знаменатель.

**Задача 11.** Квадрат каждого члена некоторой последовательности (кроме крайних, если они есть) ненулевой и равен произведению двух соседних членов. Верно ли, что это геометрическая прогрессия? Верно ли обратное?

**Задача 12.** Некто приезжает в город с новостью и сообщает её двоим. Каждый из вновь узнавших новость через 5 минут сообщает её ещё двоим (которые её не знают) и т. д. (пока все в городе её не узнают). Через сколько времени новость узнает весь город, если в нём 1 000 000 жителей?

**Задача 13.** Торговец принёс на рынок мешок одинаковых орехов. Первый покупатель купил 1 орех, второй — 2, третий — 4, и т. д.: каждый следующий покупал вдвое больше орехов, чем предыдущий. Орехи, купленные последним, весили 50 кг, после чего у торговца остался 1 орех. Сколько килограммов орехов было у него вначале?

**Задача 14.** Найдите суммы: а)  $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ ; б)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots - \frac{1}{512}$ . в) Выразите сумму всех членов конечной геометрической прогрессии через начальный член  $a$ , количество слагаемых  $n$  и знаменатель  $q$ .

**Задача 15.** Даны две бесконечные вправо прогрессии: арифметическая и геометрическая. Известно, что все числа, которые встречаются среди членов геометрической прогрессии, встречаются и среди членов арифметической прогрессии. Докажите, что знаменатель геометрической прогрессии — целое число.

**Задача 16.** Можно ли покрыть натуральный ряд конечным числом геометрических прогрессий?

\*\*\*

**Определение 3.** Числа Фибоначчи – это члены последовательности  $f_0, f_1, \dots$ , в которой  $f_0 = f_1 = 1$ , а каждый следующий член равен сумме двух предыдущих:  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  при всех целых  $n \geq 2$ .

**Задача 17.** Вычислите первые 15 чисел Фибоначчи.

**Задача 18.** Найдите все а) арифметические; б) геометрические прогрессии, у которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих.

**Задача 19.** Представьте последовательность Фибоначчи в виде суммы двух геометрических прогрессий, т. е. найдите такие прогрессии  $(q_n)$  и  $(h_n)$ , что  $f_n = q_n + h_n$  при всех целых  $n \geq 0$ .

[illegible]