

**Задача 1.** В классе учатся 20 человек. Сколькими способами из них можно выбрать двоих школьников: старосту и ответственного за проездные билеты? А просто двоих школьников?

**Задача 2.** Сколько разных слов (не только осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах  
 а) РОК; б) КУРОК; в) КОЛОБОК; г)  $\underbrace{\dots}_a \underbrace{\dots}_b ?$  д)\*  $\underbrace{1\dots 1}_{k_1} \underbrace{2\dots 2}_{k_2} \dots \underbrace{m\dots m}_{k_m}$ .

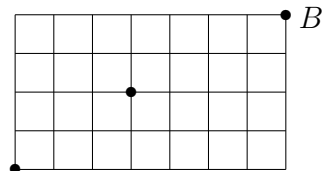
**Задача 3.** а) Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных в классе из 20 человек? б) А сколькими способами можно выбрать старосту, его помощника и трёх дежурных?

**Определение 1.** Числом сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  называется количество способов выбрать  $k$  предметов из  $n$  различных предметов. Обозначение:  $\binom{n}{k}$  или  $C_n^k$  (читается «це из  $n$  по  $k$ »).

**Задача 4.** Докажите, что а)  $C_n^k = C_n^{n-k}$ ; б)  $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ .

**Задача 5.** Найдите формулу для  $C_n^k$ .

**Задача 6.** а) На рисунке изображен план города (линии — это улицы, пересечения линий — перекрестки). На улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вверх» или «вправо». Сколько разных маршрутов  $A \rightarrow B$  ведёт из точки  $A$  в точку  $B$ ?



б) Сколько из этих маршрутов не проходят через отмеченную на плане точку внутри города?

**Задача 7.** Сколькими способами можно рассадить класс, если пришло 27 человек, а мест 30?

**Задача 8.** Сколькими способами можно посадить в ряд 3 груши и 4 яблони?

**Определение 2.** Треугольником Паскаля называют числовой треугольник, изображенный на рисунке (по краям треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух стоящих сверху и слева над ним).

**Задача 9.** На рисунке выписаны первые 5 строк треугольника Паскаля. Напишите следующие 5 строк.

						1
					1	1
				1	2	1
		1	3	3	1	
	1	4	6	4	1	

**Задача 10.** Докажите, что  $k$ -ое число  $n$ -ой строки равно  $C_n^k$  (строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нуля).

**Задача 11.** Докажите, что сумма чисел в  $n$ -ой строке треугольника Паскаля равна  $2^n$ .

**Задача 12.** Докажите тождество:  $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$ .

**Задача 13.** а) Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях  $(a+b)^2$ ,  $(a+b)^3$ ,  $(a+b)^4$ . б) (Бином Ньютона) Раскройте скобки и приведём подобные в выражении  $(a+b)^n$ . Возьмём любое слагаемое. Оно имеет вид  $C \cdot a^k \cdot b^{n-k}$  (почему?). Докажите, что  $C = C_n^k$ .

**Задача 14.** Докажите тождество:  $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ .

**Задача 15.** Возьмём любое число  $C$  в треугольнике Паскаля и сложим все числа, начиная с него и идя по прямой направо-вверх. Докажите, что сумма равна числу, стоящему под  $C$  справа.

**Задача 16.** Выведите из задачи 15 формулы для сумм  $1 + \dots + n$ ,  $T_1 + \dots + T_n$ ,  $P_1 + \dots + P_n$ .

**Задача 17\*.** Как из предыдущей задачи вывести формулы для  $1^2 + \dots + k^2$ ,  $1^3 + \dots + k^3$ , ...?

**Задача 18\*.** Отметьте в треугольнике Паскаля чётные числа. В каких строках все числа нечётные?

**Задача 19\*.** Докажите, что  $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \dots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0 = C_{p+q}^m$ .

\*\*\*

**Задача 20.** В НИИ работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий, и 23 — оба языка. Сколько человек в НИИ не знают ни английского, ни немецкого языков? а) Пусть кроме этого польский знают 20 человек, английский и польский — 12, немецкий и польский — 11, все три языка — 5. Сколько человек не знают ни одного из этих языков?

**Задача 21.** В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак «+». Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем — перед каждой пятой, а затем — перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

**Задача 22.** а) На полке стоят 10 книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на месте? б) А если на месте должны остаться ровно 3 книги?

1	2	2	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	9	10	11	12	13	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	22
	а	б	в	г	д	а	б	а	б		а	б						а	б						а		а	б	