Листок №5 **Целые числа: делимость и остатки** 11.2013

Определение 1. Пусть n и k — целые числа, $k \neq 0$. Говорят, что n *делится* на k, если найдётся такое целое m, что $n = k \cdot m$. Обозначение: $n \vdots k$. Говорят ещё, что n *кратно* k или что k *делит* n $(k \,|\, n)$.

Задача 1. **а)** Докажите, что $m(m+1)(m+2)$ делится на 6 при любом целом m.
б) Докажите, что произведение любых n последовательных целых чисел делится на $n!$.

Задача 2. Верно ли, что **а)** если $n \vdots k$ и $k \vdots n$, то $n = k$; **б)** если $b \vdots a$ и $c \vdots a$, но $d \not\vdots a$, то $b + c \vdots a$, но $b + d \not\vdots a$; **в)** если $b \vdots a$ и $c \vdots b$, то $c \vdots a$; **г)** если a и b не делятся на c, то ab не делится на c^2?

Задача 3. Пусть m, n — целые, и $5m + 3n \vdots 11$. Докажите, что **а)** $6m + 8n \vdots 11$; **б)** $9m + n \vdots 11$.

Задача 4. Докажите, что **а)** $\overline{aaa}$ делится на 37; **б)** $\overline{abc} - \overline{cba}$ делится на 99 (где a, b, c — цифры).

Задача 5. **а)** Докажите, что целое число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, кратное 4. **б)** Найдите и докажите признаки делимости на 2, 5, 8, 10.

Задача 6. **а)** Из натурального числа $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ вычли сумму его цифр $a_n + \ldots + a_1 + a_0$. Докажите, что получилось число, делящееся на 9. **б)** Выведите из пункта а) признаки делимости на 3 и на 9.

Задача 7. Сформулируйте и докажите признак делимости на 11.

Задача 8. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 4 нуля? А ровно на 5 нулей?

Задача 9. Сколькими нулями оканчивается число $11^{100} - 1$?

Задача 10. Целые числа a и b различны. Докажите, что $a^n - b^n \vdots a - b$ при любом натуральном n.

Задача 11. Найдите все целые n, при которых число $(n^3 + 3)/(n + 3)$ целое.

Задача 12. Решите в натуральных числах уравнения: **а)** $x^2 - y^2 = 31$; **б)** $x^2 - y^2 = 303$.

Определение 2. Натуральное число $p > 1$ называется *простым,* если оно имеет ровно два натуральных делителя: 1 и p, в противном случае оно называется *составным.*

Задача 13. Докажите, что любое натуральное число, большее 1, либо само простое, либо раскладывается в произведение нескольких простых множителей.

Задача 14. **а)** Даны целые числа $a_1, \ldots, a_n$, большие 1. Придумайте целое число, большее 1, которое не делится ни на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$. **б)** Докажите, что простых чисел бесконечно много.
в) Докажите, что простых чисел вида $3k + 2$ бесконечно много (k — натуральное).

Задача 15. **а)** Могут ли 100 последовательных натуральных чисел все быть составными?
б) Найдутся ли 100 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых?

Определение 3. Пусть a и b — целые числа, $b > 0$. *Разделить a на b с остатком* значит найти такие целые числа k (частное) и r (остаток), что $a = kb + r$ и $0 \leqslant r < b$.

Задача 16. Числа a и b — целые, $b > 0$. Отметим на числовой прямой все числа, кратные b. Они разобьют прямую на отрезки длины b. Точка a лежит на одном из них. Пусть kb — левый конец этого отрезка. Докажите, что k — частное, а $r = a - kb$ — остаток от деления a на b.

Задача 17. Найдите частные и остатки от деления 2013 на 23, -17 на 4 и $n^2 - n + 1$ на n.

Задача 18. **а)** Какой цифрой оканчивается 8^{18}? **б)** При каких натуральных k верно: $2^k - 1 \vdots 7$?

Задача 19. Числа x и y целые, причем $x^2 + y^2$ делится на 3. Докажите, что и x и y делятся на 3.

Задача 20. Какие целые числа дают при делении на 3 остаток 2, а при делении на 5 — остаток 3?

Задача 21. Даны 20 целых чисел, ни одно из которых не делится на 5. Докажите, что сумма двадцатых степеней этих чисел делится на 5.

Задача 22. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть или простое число или 1.

Задача 23. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два таких числа, что
а) их разность делится на 51; **б)** их сумма или разность делится на 100.

Задача 24. Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно число, делящееся на n).

Задача 25*. Существует ли делящееся на 2013 натуральное число, состоящее из цифр 0 и 1?

Задача 26*. Из чисел 1, 2, 3, …, 1000 выбрали произвольным образом 501 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два числа, одно из которых делится на другое.

1 а	1 б	2 а	2 б	2 в	2 г	3 а	3 б	4 а	4 б	5 а	5 б	6 а	6 б	7	8	9	10	11	12 а	12 б	13	14 а	14 б	14 в	15 а	15 б	16	17	18 а	18 б	19	20	21	22	23 а	23 б	24	25	26