Задача 1. Пусть (x_n) — последовательность положительных чисел, стремящаяся к a. Докажите[1], что тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует предел последовательности $(\sqrt[k]{x_n})$, равный $\sqrt[k]{a}$.

Задача 2. Пусть $a, b > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что выполнено неравенство $\dfrac{a^{n+1}}{b^n} \geqslant (n+1)a - nb$.

Задача 3. (*о числе* e) Докажите, что

а) последовательность $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает;

б) последовательность $E_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$ (число e по определению равно пределу этих последовательностей);

г) выполнено неравенство $2{,}25 < e < 3{,}375$;

д) Найдите такое n, что $|e - e_n| < 10^{-6}$.

Задача 4. (*о числе* e^r) Докажите, что **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$, если число k — целое; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^n = e^r$, если число r — рационально;

г)* одна из последовательностей $\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^n$ и $\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{n+r}$ монотонно возрастает, другая — монотонно убывает, и пределы обеих последовательностей равны e^r.

Задача 5. Обозначим сумму $\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)$ через s_n, а число $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ по-прежнему через e_n.

а) Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $e_n \leqslant s_n$;

б) Зафиксируем натуральное число N и рассмотрим любое натуральное $n > N$. Раскроем скобки в выражении $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ по биному Ньютона и оставим лишь первые $N+1$ слагаемых. Докажите, что предел полученной таким образом последовательности равен s_N;

в) Докажите, что $s_N \leqslant e$;

г) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$;

д)* Докажите, что $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i!} \leqslant \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}}$;

е)* Найдётся ли $n < 100$ такое, что $|e - s_n| < 10^{-6}$?

ж)* Докажите, что для любого $r \in \mathbb{Q}$ существует предел $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{r^i}{i!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r^1}{1!} + \ldots + \frac{r^n}{n!}\right) = e^r$.

Задача 6. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$. (Подсказка: тэжомоп моєавдо мынапэтнивдү ѕэдєє Ɛ дэмон вѵдѵƐ)

1	2	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	4 а	4 б	4 в	4 г	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	5 е	5 ж	6

[1] Домножение на сопряжённое будет крайне уместно и в этой задаче :)

Задача 1. Пусть (x_n) — последовательность положительных чисел, стремящаяся к a. Докажите, что тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует предел последовательности $(\sqrt[k]{x_n})$, равный $\sqrt[k]{a}$.

Задача 2. Пусть $a, b > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что выполнено неравенство $\dfrac{a^{n+1}}{b^n} \geqslant (n+1)a - nb$.

Задача 3.

в) Докажите, что существует предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Число e по определению равно пределу этой последовательности.

г) Докажите, что выполнено неравенство $2{,}4 < e < 3$;

д) Найдите такое n, что $\left|e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right| < 10^{-9}$.

Задача 4. Докажите, что

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n = e^r$, если число r — рационально;

г) одна из последовательностей $e_n = \left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ и $E_n = \left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{n+r}$ монотонно возрастает, другая — монотонно убывает, и пределы обеих последовательностей равны e^r.

Задача 5. Обозначим сумму $\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$ через s_n.

г) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = e$;

е) Найдётся ли $n < 100$ такое, что $|e - s_n| < 10^{-9}$?

ж) Докажите, что для любого $r \in \mathbb{Q}$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{r^i}{i!} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r^1}{1!}+\ldots+\dfrac{r^n}{n!}\right) = e^r$.

Задача 6. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$.

1	2	3 в	3 г	3 д	4 в	4 г	5 г	5 е	5 ж	6