Листок №4д Трудные задачи о графах 03.2014

Задача 1. Каких графов на n данных вершинах больше: связных или несвязных? Дайте ответ для всех n.

Задача 2. (*Теорема Холла*) В некоторой компании n юношей. При каждом k от 1 до n верно утверждение: для любых k юношей в компании число девушек, знакомых хотя бы с одним из этих k юношей, не меньше k. Можно ли женить всех юношей на знакомых девушках?

Задача 3. *Латинским прямоугольником* называется таблица $m\times n$, где $m \leqslant n$, в каждой клетке которой записано целое число от 1 до n, причем в каждой строке все числа различны и в каждом столбце все числа различны. Докажите, что любой латинский прямоугольник $m \times n$, где $m < n$, можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$.

Задача 4. **а)** В гости ожидают m или n человек, где $(m, n) = 1$. На какое наименьшее число секторов надо разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как m, так и n одинаковых кусков? **б)** А если $(m, n) = d$?

Задача 5. В графе $n > 2$ вершин, причём степень каждой вершины не меньше $n/2$. Докажите, что в графе есть *гамильтонов цикл,* т. е. цикл, содержащий все вершины графа по одному разу.

Задача 6. **а)*** Рассеянный математик, забыв трёхзначный код своего подъезда, нажимает кнопки с цифрами 0, 1, 2, . . . , 8, 9 по одной в секунду. Дверь откроется, если три цифры кода в нужном порядке будут набраны подряд. Математик уверен, что даже в случае крайнего невезениям (если нужная комбинация встретится последней) он сможет войти в подъезд не позже чем через 1002 секунды. Прав ли он? Как он должен действовать, чтобы попасть в дом за наименьшее время?
Ответьте на аналогичный вопрос, если
б) исправны только кнопки с цифрами 1, 2 и 3, а никакие другие цифры в код не входят;
в)* исправны все кнопки, но математик помнит, что все три цифры кода различны.

Задача 7. Опишите простые графы с n вершинами $A_1, \ldots, A_n$ и n рёбрами $b_1, \ldots, b_n$, со свойством: любые две различные вершины A_i и A_j соединены ребром если и только если рёбра b_i и b_j имеют общую вершину.

Задача 8. Докажите, что среди любых 50 человек найдутся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.

Задача 9. Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим.

Задача 10. В графе с n вершинами нет треугольников (циклов длины 3). Какое наибольшее число рёбер может быть в этом графе? Дайте ответ для всех n.

Задача 11. В стране 1000 городов и 2008 дорог (каждая дорога соединяет два города). Докажите, что можно указать кольцевой маршрут, проходящий не более, чем через 18 городов.

Задача 12. На плоскости расположены n непересекающихся отрезков и $n+2$ точки, не лежащие на этих отрезках. Докажите, что какие-то две точки «видят друг друга» (то есть если соединить эти две точки отрезком, он не пересечёт ни одного из данных n отрезков).

Задача 13. (*Теорема Кели*) Докажите, что полный граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

Графы и раскраски.

Задача 14. В лесу $k \cdot l$ тропинок и несколько полянок. Каждая тропинка соединяет две полянки. Известно, что тропинки можно раскрасить в l цветов так, чтобы к каждой полянке сходились тропинки разного цвета. Докажите, что это можно сделать, покрасив каждым цветом ровно k тропинок.

Задача 15. Найдите наименьшее значение n, для которого любой коллектив, где каждый недолюбливает не более семи из остальных, можно разбить на не более чем n частей так, чтобы ни в какой части не нашлось двух человек, хотя бы один из которых недолюбливает другого.

Определение 1. Раскраска вершин графа называется *правильной,* если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром. Простой граф называется *k-дольным,* если правильная раскраска его вершин возможна k цветами, но не менее (такая раскраска называется *минимальной).*

Задача 16. Равносильна ли двудольность графа отсутствию в нём циклов нечётной длины?

Задача 17. Вершины k-дольного графа правильно раскрашены в цвета 1, 2, . . . , k. Докажите, что этом в графе есть путь, в котором первая вершина — цвета 1, вторая — цвета 2, . . . , k-я — цвета k.

1	2	3	4 а	4 б	5	6 а	6 б	6 в	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17