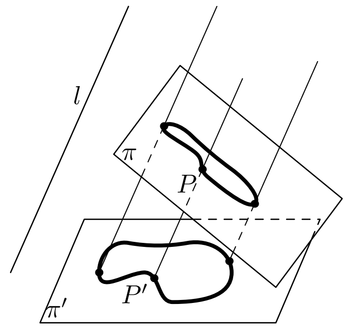
Листок №GM-1 — **Аффинная геометрия** — 01.2017

Аффинные преобразования плоскости



Определение 1. Пусть в пространстве заданы две плоскости π и π', параллельные или непараллельные между собой.

Пусть l — прямая, не параллельная ни π, ни π'. *Параллельной проекцией π на π' вдоль l* называется отображение, сопоставляющее каждой точке $P \in \pi$ такую точку $P' \in \pi'$, что прямая PP' параллельна прямой l (см. рис. справа).

Любое отображение плоскости π на плоскость π', которое можно представить в виде композиции параллельных проекций, называется *аффинным.* Аффинное отображение плоскости π на себя называется *аффинным преобразованием.*

Задача 1. Докажите, что следующие преобразования являются аффинными: **а)** параллельный перенос; **б)** осевая симметрия; **в)** поворот; **г)** любое движение.

Задача 2. Зададим на плоскости прямоугольную систему координат. Докажите, что следующие отображения являются аффинными преобразованиями: **а)** $(x, y) \mapsto (ax, y)$, где $a \neq 0$; **б)** гомотетия с центром в начале координат; **в)** любое преобразование подобия; **г)** $(x, y) \mapsto (x + by, y)$, где b — любое число; **д)** $(x, y) \mapsto (ax + by + \alpha, cx + dy + \beta)$, где $ad - bc \neq 0$.

Задача 3. Докажите, что аффинные преобразования **а)** переводят прямые в прямые; **б)** переводят отрезки в отрезки; **в)** переводят параллельные прямые в параллельные прямые; **г)** сохраняют отношения длин отрезков, лежащих на параллельных прямых; **д)** переводят параллелограммы в параллелограммы; **е)** сохраняют отношения площадей.

Задача 4. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два произвольных треугольника. Докажите, что существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$ с сохранением порядка вершин.

Применения аффинных преобразований

Задача 5. Используйте аффинные преобразования для доказательства того, что три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 6. Используйте аффинные преобразования для доказательства «замечательного свойства трапеции»: в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Задача 7. На плоскости даны две параллельные прямые l и l'.

а) Отрезок AB прямой l разделите пополам при помощи одной линейки.

б) Через данную точку M проведите при помощи одной линейки прямую, параллельную прямым l и l'.

Задача 8. Пусть M, N и P — точки, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC и делящие эти стороны в одинаковых отношениях $\left(\text{то есть } \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA}\right)$. Докажите, что

а) точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC;

б) точка пресечения медиан треугольника, образованного прямыми AN, BP и CM, совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Задача 9. Пусть у четырехугольника $ABCD$ никакие две стороны не параллельны. Докажите, что прямая, соединяющая середины его диагоналей, делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечений продолжений противоположных сторон.

Задача 10. Докажите, что с помощью только односторонней линейки без делений и карандаша нельзя опустить перпендикуляр на данную прямую.

Задача 11. Выпуклый пятиугольник P гомотетичен пятиугольнику, построенному на серединах его сторон. Обязательно ли тогда P — правильный?

Задача 12. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбрали соответственно точки K, L и M так, что $AK : KB = BL : LC = CM : MA = 1 : \sqrt{3}$. Прямые AL, BM и CK пересекаются в точках A', B' и C', образуя новый треугольник, на сторонах которого аналогичным образом выбирают точки K', L', M' и получают треугольник $A''B''C'''$, и так далее. Докажите, что на каком-то шаге мы получим треугольник, подобный исходному.

1 а	1 б	1 в	1 г	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	4	5	6	7 а	7 б	8 а	8 б	9	10	11	12