Если в задаче ничего не спрашивается, то ответьте, какой игрок может всегда выигрывать, как бы ни играл другой?

I. Ответный ход.

В задачах этого раздела можно указать стратегию игрока, который выигрывает. Чтобы её найти, полезно бывает рассмотреть частные случаи или упростить задачу (например, решить задачу 4 сначала для полосок 1×3, 1×4, $\ldots$).

Задача 1. В коробке n конфет. Двое по очереди берут себе из коробки 1, 10 или 11 конфет. Выигрывает взявший последнюю. **а)** Кто выигрывает при $n = 1, 2, \ldots, 30$? **б)** А при $n = 100$?

Задача 2. В куче 2009 камней. Двое по очереди берут по **а)** 1 или 2; **б)** 1 или m; **в)** 1, 2 или m камней. Выигрывает взявший последний камень.

Задача 3. На крайней правой клетке доски 1×20 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают эту фишку (вправо или влево) на любое число клеток, которое еще не встречалось при выполнении предыдущих ходов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 4. Имеется полоска 1×2013. **а)** В двух; **б)** в трёх; **в)** в n самых правых клетках стоят фишки (по одной в клетке). Игрок на своём ходу должен одну из фишек переставить влево на любую незанятую клетку. Кто не может сходить, тот проиграл.

Назовём позиции, из которых игрок выигрывает одним ходом, *выигрышными.* Если игрок своим ходом обязательно попадает в такую позицию, то он находится в *проигрышной* позиции (после его хода соперник выиграет). Если же игрок своим ходом может попасть в проигрышную позицию, то он находится в выигрышной позиции (сможет выиграть). Последовательно находя выигрышные и проигрышные позиции, *начиная с конца,* можно узнать, кто выиграет и найти стратегию.

Задача 5. В коробке лежат 300 спичек. Двое по очереди берут из коробка не более половины имеющихся в нём спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 6. Ферзь стоит в левом нижнем углу клетчатой доски 10×12. За один ход его можно передвинуть на любое число клеток вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх». Играют двое, ходят по очереди. Выигрывает тот, кто поставит ферзя в правый верхний угол.

II. Симметрия.

Иногда игрок выигрывает с помощью «симметричной стратегии»: например, дублирует ход предыдущего игрока.

Задача 7. Есть две кучи камней: **а)** в каждой по 20; **б)** в одной — 30, в другой — 20. Двое по очереди берут любое число камней из любой кучки (но не из двух сразу). Выигрывает взявший последний камень. **в)** А если есть три кучи по 20 камней? **г)** А если есть четыре кучи по 20 камней?

Задача 8. Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга. Кто не может сходить, тот проиграл.

Задача 9. Двое играют на доске $m \times n$. В первом столбце стоят фишки первого, а в последнем столбце стоят фишки второго. На своём ходу игрок может передвинуть свою фишку в строке, не отрывая её от доски, то есть фишка не может перепрыгнуть через фишку противника. Кто не может сходить, тот проиграл.

Задача 10. У ромашки **а)** 12; **б)** 11 лепестков. За ход разрешается оборвать один или два рядом растущих лепестка. Выигрывает сорвавший последний лепесток.

Задача 11. (*Брюссельская капуста.*) В каждый момент на плоскости нарисовано несколько «кочанов»: точек с четырьмя хвостами каждая, причём часть «кочанов» принадлежат одному игроку, часть — другому; некоторые из хвостов соединены линиями так, что из каждого хвоста выходит не более одной линии, и никакие две линии не пересекаются. Двое ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок проводит ещё одну линию между двумя свободными хвостами своих точек так, что все ограничения остаются в силе, и на этой линии ставит новую свою точку с двумя свободными хвостами по разные стороны новой линии. Сначала на плоскости нарисованы n кочанов одного игрока и n кочанов другого. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

III. Геометрия.

Задача 12. В клетчатом квадрате 100×100 двое по очереди ставят фигурки. Первый ставит квадрат 2×2, второй — уголок из трёх клеток (так, что фигурки занимают целое число клеток и не перекрываются). Кто не может сходить, тот проиграл.

Задача 13. На клетчатой доске 2013×2013 в центре стоит фишка. Двое по очереди передвигают фишку на одну из соседних (по стороне) клеток, если эта клетка ранее ни разу не была занята фишкой. Кто не может сделать ход, тот проиграл.

Задача 14. На бесконечной доске двое играют в крестики-нолики. Выигрывает тот, кто поставит 5 своих знаков в ряд по вертикали или горизонтали. Докажите, что при правильной игре второй **а)** не выигрывает; **б)** не проигрывает.

Задача 15. В комплекте для игры в домино 28 разных костяшек 2×1. Все костяшки состоят из двух клеток 1×1, на каждой клетке выбито от одной до шести точек или ничего не выбито. Двое по очереди берут по костяшке и строят из них разветвляющуюся цепочку (очередную костяшку можно приложить к одной из клеток цепочки тем концом, на котором выбито то же число точек, что и на этой клетке цепочки). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет, если игроки видят все костяшки?

IV. Передача хода.

В задачах этого раздела можно узнать, кто выигрывает при правильной игре, не указывая стратегию.

Задача 16. (*Двойные шахматы*) Двое играют в шахматы, но каждый делает по два хода сразу. Докажите, что у второго нет выигрышной стратегии.

Задача 17. (*Игра «Щёлк»*) Есть прямоугольная шоколадка, разделённая бороздками на дольки. Двое по очереди выбирают любую ещё не съеденную дольку и съедают её вместе со всеми дольками, расположенными от выбранной не ниже и не левее. Съевший последнюю дольку проигрывает.

Задача 18. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Играют двое, ходят по очереди. За ход игрок вычеркивает какое-нибудь число и все его делители. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Задача 19. Фома и Ерёма делят кучу из 25 монет в 1, 2, 3, ..., 25 алтынов. Каждым ходом один из них выбирает монету из кучи, а другой говорит, кому её отдать. Первый раз выбирает Фома, далее — тот, у кого сейчас больше алтынов, при равенстве — тот же, кто в прошлый раз. Может ли Фома действовать так, чтобы в итоге обязательно получить больше алтынов, чем Ерёма, или Ерёма всегда сможет Фоме помешать?

V. Разное.

Задача 20. В ряд по горизонтали расположены 179 клеток. На самой левой стоит белая фишка, на самой правой — черная. Двое ходят по очереди. Каждый двигает свою фишку на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток вперед или назад по свободным клеткам. Перепрыгивать через фишку соперника нельзя. Кто не может сделать ход — проигрывает.

Задача 21. Двое играют в следующую игру. Есть кучка камней. Первый каждым своим ходом берет 1 или 10 камней. Второй каждым своим ходом берет m или n камней. Ходят по очереди, начинает первый. Тот, кто не может сделать хода, проигрывает. Известно, что при любом начальном количестве камней первый всегда может играть так, чтобы выиграть (при любой игре второго). Какими могут быть m и n?

Задача 22. Король за ход может поставить по крестику в любые две свободные клетки бесконечного листа бумаги. Министр за ход может поставить нолик в любую свободную клетку. Король хочет поставить 100 крестиков в ряд. Может ли министр ему помешать?

Задача 23. (*Игра Ним*) Имеется три кучки камней: **а)** 7, 8 и 9; **б)** любые кучки. Двое по очереди берут любое количество камней из одной кучки. Выигрывает взявший последний камень.

Задача 24. Первоначально на доске написано число 2009! (то есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009$). Два игрока ходят по очереди. Игрок в свой ход вычитает из написанного числа какое-нибудь натуральное число, которое делится не более чем на 20 различных простых чисел (так, чтобы разность была неотрицательна), записывает на доске эту разность, а старое число стирает. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто из играющих — начинающий, или его соперник, — может обеспечить себе победу, и как ему играть?