Задача 1. Число вкладчиков МегаБанка счетно, причем каждый вложил хотя бы 1 рубль. Докажите, что деньги можно перераспределить между вкладчиками так, чтобы у каждого стало не менее 1000000 рублей.

Десятичные дроби и последовательности

Задача 2. Докажите, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет периодической (возможно, с предпериодом).

Задача 3. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел, что любая другая получается из неё вычёркиванием **а)** некоторых членов; **б)** некоторого конечного числа членов?

Задача 4. Докажите, что **а)** из любых одиннадцати бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций; **б)** любое действительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и 8.

Задача 5. Можно ли в последовательности $1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots$ выделить
а) бесконечно длинную; **б)** сколь угодно длинную арифметическую прогрессию?

Задача 6. Докажите, что в любой бесконечной последовательности **а)** целых; **б)** действительных чисел найдётся либо неубывающая, либо невозрастающая бесконечная подпоследовательность.

Задача 7. Два джинна по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Первый своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, второй — одну. Если в итоге получится периодическая дробь, выигрывает первый, иначе — второй. Кто выиграет при правильной игре?

Фигуры на плоскости

Задача 8. Замостите плоскость квадратами, среди которых **а)** ровно два одинаковых; **б)** нет одинаковых.

Задача 9. Клетки бесконечной клетчатой плоскости окрашены в 2 цвета. Найдётся ли бесконечное множество вертикалей и бесконечное множество горизонталей, на пересечении которых все клетки будут одного цвета?

Задача 10. Можно ли покрыть плоскость **а)** конечным числом полос; **б)** конечным числом внутренностей углов, сумма которых меньше 360°; **в)** конечным числом внутренностей парабол?

Задача 11. Можно ли замостить плоскость треугольниками так, чтобы не было двух равных треугольников?

Графы

Задача 12. Пусть человечество бессмертно, любой человек смертен, число людей в любом поколении конечно. Докажите, что есть бесконечная цепь, начинающаяся с Адама, где каждый следующий — сын предыдущего.

Задача 13. Дан язык с конечным алфавитом. Любая последовательность букв из алфавита этого языка называется словом. Часть слов (конечной длины) в языке — неприличные. Слово называется абсолютно приличным, если оно не содержит неприличных подслов. Известно, что существуют сколь угодно длинные абсолютно приличные слова. Докажите, что существует бесконечно длинное абсолютно приличное слово.

Задача 14. Каждое конечное слово в неком языке либо хорошее, либо нехорошее. Докажите, что в любом бесконечном слове можно откинуть несколько начальных букв так, что оставшееся бесконечное слово можно будет нарезать либо только на хорошие слова, либо только на нехорошие.

Задача 15. Теорема о четырех красках утверждает, что вершины любого связного плоского графа можно раскрасить в 4 цвета так, что вершины, соединенные ребром, будут разного цвета. Докажите с помощью этой теоремы тот же результат для графа со счётным числом вершин (степень каждой вершины конечна).

Разное

Задача 16. По результатам исследования британских учёных, прирост числа проблем человечества пропорционален количеству всевозможных пар проблем человечества (т.е. каждая новая проблема появляется через время, обратно пропорциональное числу пар). Докажите, что скоро проблем станет бесконечно много.

Задача 17. Докажите, что существуют такие два бесконечных подмножества A и B целых неотрицательных чисел, что каждое целое неотрицательное число однозначно представляется в виде $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$.

Задача 18. Все натуральные числа выписали в ряд в неком порядке (каждое по разу). Может ли сумма любых нескольких (двух, трех, ...) чисел, выписанных подряд (начиная с любого места) быть составным числом?

Задача 19. Можно ли в счётном множестве выделить такую несчётную систему подмножеств, что для любых двух подмножеств из этой системы их пересечение **а)** совпадает с одним из этих двух подмножеств; **б)** непусто и содержит не более десяти элементов; **в)** непусто и конечно?

Задача 20. Натуральный ряд представлен в виде объединения попарно непересекающихся целочисленных арифметических прогрессий с положительными разностями $d_1, d_2, d_3, \ldots$. Может ли сумма $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}+\ldots$ быть меньше $0,9$, если **а)** число прогрессий конечно; **б)** прогрессий счетное число (в этом случае условие нужно понимать так: сумма любого конечного числа слагаемых из бесконечной суммы не превышает $0,9$).

1	2	3 а	3 б	4 а	4 б	5 а	5 б	6 а	6 б	7	8 а	8 б	9	10 а	10 б	10 в	11	12	13	14	15	16	17	18	19 а	19 б	19 в	20 а	20 б