Определение 1. *Многочленом степени n от одной переменной x* называется любое выражение вида
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0,$$
где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а *коэффициенты* $a_n, \dots, a_0$ — любые числа (даже комплексные), причём $a_n \neq 0$. Краткое обозначение: $A(x)$ или A. Коэффициент a_n называют *старшим.* Степень ненулевого многочлена A обозначают $\deg A$. Число 0 называют *нулевым* многочленом, его степень не определена. Множества всех многочленов с целыми, рациональными, действительными, комплексными коэффициентами обозначаются соответственно $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.

Задача 1. Определите *сумму* и *произведение* многочленов.

Задача 2. **а)** Пусть $\deg A = 10$, $\deg B = \deg C = 7$. Какими могут быть $\deg(A+B)$ и $\deg(B+C)$?
б) Докажите, что $\deg AB = \deg A + \deg B$. **в)** Докажите, что $\deg A(B(x)) = \deg A \cdot \deg B$.

Задача 3. Может ли произведение нескольких ненулевых многочленов быть нулевым многочленом?

Определение 2. Многочлен $A(x)$ задаёт функцию, которая сопоставляет каждому числу s число $A(s)$ (результат подстановки в выражение $A(x)$ числа s вместо переменной x).

Задача 4. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена:
а) $(x-1)^n$; **б)** $(x+1)^n$; **в)** $(x-2)^n$; **г)** $(x+2)^n$; **д)** $(1-x+x^4)^{1000}$.
е) Найдите сумму коэффициентов при нечётных степенях у многочлена из пункта д).

Число корней многочлена

Определение 3. Число s называется *корнем* многочлена A, если $A(s) = 0$.

Задача 5. Докажите, что если многочлен A *делится* на многочлен B, то есть существует такой многочлен C, что $A = BC$, то все корни B являются корнями A. Верно ли обратное утверждение?

Задача 6. Делится ли многочлен $x^9 - 1$ на многочлен x? А на многочлен $x^2 - 1$?

Задача 7. Произвольный многочлен $A(x)$ домножили на $(x-1)$. Могут ли у получившегося многочлена все коэффициенты быть положительными?

Задача 8. Докажите, что число s — корень многочлена $A(x)$ если и только если $A(x)$ делится на $x - s$.

Задача 9. Пусть $A(1) = A(2) = 0$. Докажите, что $A(x)$ делится на $(x-1)(x-2)$.

Задача 10. Докажите, что число различных корней многочлена A не больше $\deg A$.

Задача 11. Могут ли разные многочлены задавать одну и ту же функцию?

Задача 12. Пусть многочлен $A(x)$ таков, что $A(x) = A(-x)$ при любом x. Докажите, что существует такой многочлен $P(x)$, что $A(x) = P(x^2)$ при любом x.

Задача 13. Можно ли задать многочленом функцию $\sin x$?

Задача 14. Пусть значения многочленов A и B совпадают при n различных значениях переменной, и степени этих многочленов меньше n. Докажите, что тогда $A = B$.

Задача 15. В скольких точках прямая может пересекать параболу?

Задача 16. **а)** Докажите, что любой многочлен степени 3 представляется в виде
$$a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2).$$
б) Найдите такой многочлен $P(x)$ степени 3, что $P(0) = -8$, $P(1) = 5$, $P(2) = 6$, $P(3) = 1$.

Задача 17. Даны различные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ и любые числа $b_1, b_2, \dots, b_n$.
а) Найдите многочлен степени $n-1$, который равен b_1 при $x = a_1$ и равен 0 при $x \in \{a_2, \dots, a_n\}$.
б) Докажите, что существует единственный многочлен $P(x)$ степени меньше n такой, что $P(a_1) = b_1$, $\dots$, $P(a_n) = b_n$.