Определение 1. *Метрическим пространством* (M, d) называется пара, состоящая из множества M и функции «расстояния» (*метрики*) $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

(M1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (*симметричность);*
(M3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (*неравенство треугольника).*

Подмножество N метрического пространства M, рассматриваемое как метрическое пространство (с той же метрикой), называется *подпространством* пространства M.

Задача 1. Пусть (M, d) — метрическое пространство. Докажите, что $d(x, y) \geqslant 0$ для любых $x, y \in M$.

Задача 2. Поездка на московском метрополитене от станции A до станции B требует времени, которое зависит от выбранного маршрута, времени ожидания поездов и т. п. Выберем из всех возможных случаев тот, при котором затраченное время окажется наименьшим, и назовём это время расстоянием от станции A до станции B. Является ли такое расстояние метрикой на множестве станций московского метро? Если нет, предложите дополнительные условия, при которых введённое расстояние будет метрикой.

Определение 2. Множество последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ длины n, состоящих из действительных чисел, называется *n-мерным арифметическим пространством* $\mathbb{R}^n$. (Обычные прямая, плоскость и пространство — это $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно).

Задача 3. Является ли метрическим пространством $\mathbb{R}^n$ с метрикой

а) $d_1(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k - x_k|$;

б) (*евклидова метрика*) $d_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$;

в) $d_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k - x_k|$?

Задача 4. (*Дискретная метрика*) Пусть M — любое множество. Положим $d(x, y) = 0$, если $x = y$ и $d(x, y) = 1$, если $x \neq y$. Докажите, что таким образом получается метрика (называемая *дискретной*). Метрическое пространство (M, d) также называется *дискретным.*

Задача 5. (*Метрика Хэмминга*) Пусть M — множество слов некоторого алфавита, состоящих из какого-то фиксированного числа букв. Расстоянием $d(x, y)$ между словами x и y назовём количество букв, в которых эти слова отличаются, если написать их одно под другим. Например, $d(\text{нос}, \text{сон}) = 2$. Докажите, что d является метрикой.

Задача 6. (*p-адическая метрика*) Пусть p — простое число. Для $x, y \in \mathbb{N}$ положим $d_p(x, y) = 0$, если $x = y$, и $d_p(x, y) = p^{-n}$, если $x \neq y$ и n — наибольший показатель степени числа p, при котором разность $x - y$ делится на p^n. Проверьте, что $(\mathbb{N}, d_p)$ — метрическое пространство.

Задача 7. (*Равномерная метрика*) Пусть M — множество ограниченных функций $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Положим $d(f, g) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$. Проверьте, что это метрика.

1	2	3 а	3 б	3 в	4	5	6	7

Определение 3. Пусть M — метрическое пространство, $x_0 \in M$ — произвольная точка, $\varepsilon > 0$ — вещественное число. Множество $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in M \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$ называется ε-окрестностью точки x_0 (или *открытым шаром* с центром x_0 и радиусом ε). Множество $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in M \mid d(x, x_0) \leqslant \varepsilon\}$ называется *замкнутым шаром* с центром x_0 и радиусом ε.

Задача 8. Как выглядят шары в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ относительно метрик из задачи 3?

Задача 9. (*Хаусдорфовость метрического пространства*) Пусть x_1, x_2 — различные точки метрического пространства M. Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(x_1) \cap U_\varepsilon(x_2) = \varnothing$.

Задача 10. Докажите, что если два открытых шара метрического пространства имеют общую точку, то существует шар, лежащий в их пересечении.

Задача 11. Докажите, что если $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) \neq \varnothing$, то $d(x, y) < 2\varepsilon$. Верно ли обратное (в произвольном метрическом пространстве)?

Задача 12. Докажите, что если $d(x, y) < \varepsilon$, то $U_\varepsilon(x) \subset U_{2\varepsilon}(y)$.

Задача 13. Шары с радиусами r_1 и $r_2 = 179r_1$ пересекаются. Радиусы шаров увеличили вдвое, не меняя их центров. Докажите, что один из полученных шаров содержится в другом.

Задача 14. Могут ли в метрическом пространстве существовать два шара разных радиусов, таких что шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса и не совпадает с ним?

Задача 15.

а) Сколько элементов содержит замкнутый шар радиуса 1 на множестве слов длины n с метрикой Хэмминга для алфавита $\{0, 1\}$? А если в алфавите m букв?

б) Написано несколько последовательностей из нулей и единиц длины n, причём любые две из них отличаются по крайней мере в трех местах. Докажите, что их число не превосходит $\frac{2^n}{n+1}$.

Определение 4. Два метрических пространства (M_1, d_1) и (M_2, d_2) называются *изометричными,* если существует взаимно однозначное отображение $f\colon M_1 \to M_2$, такое что для любых точек $x_1, x_2 \in M_1$ выполняется равенство $d_1(x_1, x_2) = d_2(f(x_1), f(x_2))$. Отображение f в этом случае называется *изометрией.*

Задача 16. Придумайте такую метрику на прямой $\mathbb{R}$, чтобы прямая относительно этой метрики и интервал $(0; 1)$ относительно стандартной метрики были изометричны.

Задача 17. Изометричны ли $(\mathbb{R}^n, d_2)$ и $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$?

Определение 5. Говорят, что метрическое пространство N *вкладывается* в метрическое пространство M, если N изометрично некоторому подпространству в M.

Задача 18. Докажите, что $(\mathbb{R}^n, d_2)$ вкладывается в $(\mathbb{R}^N, d_2)$ при $n \leqslant N$.

Задача 19. Докажите, что $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ вкладывается в метрическое пространство из задачи 7.

Задача 20. Верно ли, что любое конечное метрическое пространство M вкладывается в $(\mathbb{R}^n, d_2)$ при $n \gg 0$? Если да, то как можно оценить n, зная $|M|$?

8	9	10	11	12	13	14	15 а	15 б	16	17	18	19	20