

$$\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : aa^{-1} = a^{-1}a = e \quad (3)$$

$\times$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

1 а	1 <u>б</u>	1 в	1 г	1 д	1 е	1 ж	1 з	2 а	3 а	3 <u>б</u>	3 в	3 г	4	5	6	7	8 а	8 <u>б</u>	8 в

## Подгруппы, обыкновенные

**Определение 5.** Подгруппой  $H$  группы  $G$  называется такое непустое подмножество элементов группы  $G$ , что оно само является группой относительно операции в группе  $G$ .

**Задача 9.** Опишите все подгруппы группы  $D_3$

**Задача 10.** Рассмотрим элемент  $g$  группы  $G$  и множество всех его степеней  $\{\dots g^{-2}, g^{-1}, g^0 = e, g, \dots\}$ . Докажите, что это множество является подгруппой в  $G$ .

**Определение 6.** Циклической группой называется такая группа  $G$ , что существует элемент  $g$  такой, что любой элемент группы  $G$  является некоторой степенью элемента  $g$ . Обозначение  $G = \langle g \rangle$

**Задача 11.** Какие из этих групп являются циклическими? а)  $(\mathbb{Z}, +)$ ; б)  $D_4$ ; в)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ; г)  $(\mathbb{Z}_m, +)$ ; д)\*  $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$ , где  $p$  – простое число.

### Смежные классы по подгруппе

**Определение 7.** Пусть задана группа  $G$  и ее подгруппа  $H$ ,  $g \in G$ . Тогда назовем левым смежным классом элемента  $g$  по подгруппе  $H$  множество элементов вида  $gh$ , где  $h \in H$ . Обозначение  $gH$ . Аналогично определяем правый смежный класс элемента  $g$  ( $Hg$ ).

**Задача 12.** Рассмотрим группу  $S_3$  и ее подгруппу  $\{(1, 2), id\}$ . Выпишите все левые и правые смежные классы по этой подгруппе и покажите, что левые и правые смежные классы совпадают не у всех элементов.

**Задача 13.** Пусть есть два левых смежных класса  $gH$  и  $g_1H$ . Докажите, что тогда они либо не пересекаются, либо совпадают.

**Задача 14.** Сопоставим элементам  $gh_1, gh_2 \dots$  смежного класса  $gH$  элементы  $g_1h_1, g_1h_2 \dots$  смежного класса  $g_1H$ , не пересекающегося с  $gH$ . Докажите, что это отображение смежных классов как множеств биективно.

**Определение 8.** Порядком конечной группы  $G$  называется число ее элементов. Обозначение  $\text{ord } G$  или  $|G|$ .

**Определение 9.** Порядком элемента  $g$  конечной группы  $G$  называется  $\min\{k \in \mathbb{N} : g^k = e\}$ . Обозначение  $\text{ord } g$ .

**Задача 15.** Докажите, что  $g^k = e \iff \text{ord } g | k$ .

**Задача 16.** а) Докажите, что множество элементов группы  $G$  есть дизъюнктное объединение различных левых смежных классов по данной подгруппе  $H$ . б) (*Теорема Лагранжа*) Пусть группа  $G$  конечна. Докажите, что порядок группы  $G$  делится на порядок любой ее подгруппы  $H$ . в) В условиях предыдущего пункта докажите, что порядок  $G$  делится на порядок любого своего элемента.

**Задача 17.** Докажите, что конечная группа является циклической тогда и только тогда, когда существует элемент, порядок которого совпадает с порядком группы.

**Задача 18.** Пусть циклическая группа  $\langle g \rangle$  имеет порядок  $k$ . Рассмотрим циклическую подгруппу этой группы, порожденную  $m$ -й степенью  $g$ , то есть  $\langle g^m \rangle$ . В каких случаях эта подгруппа будет совпадать со всей группой?

**Задача 19.** Докажите, что любая группа порядка  $p$ , где  $p$  – простое число, циклическая.

**Задача 20.** Объясните решение задачи 13[32] на языке теории групп.

**Задача 21.** Докажите теорему Эйлера:  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ , где  $\varphi(m)$  – количество чисел, не превосходящих  $m$  и взаимнопростых с  $m$  с помощью теории групп.

[illegible]

```

<?xml version='1.0'?>
<listok number = 'GR-1' description='Введение в теорию групп — основные понятия' type='1'
date='01.2017'>
  <problem group='1' type='0'>1a</problem>
  <problem group='1' type='0'>1б</problem>
  <problem group='1' type='0'>1в</problem>
  <problem group='1' type='0'>1г</problem>
  <problem group='1' type='0'>1д</problem>
  <problem group='1' type='0'>1е</problem>
  <problem group='1' type='0'>1ж</problem>
  <problem group='1' type='1'>1з</problem>
  <problem group='2' type='0'>2а</problem>
  <problem group='3' type='3'>3а</problem>
  <problem group='3' type='3'>3б</problem>
  <problem group='3' type='3'>3в</problem>
  <problem group='3' type='3'>3г</problem>
  <problem group='4' type='1'>4</problem>
  <problem group='5' type='0'>5</problem>
  <problem group='6' type='0'>6</problem>
  <problem group='7' type='0'>7</problem>
  <problem group='8' type='0'>8а</problem>
  <problem group='8' type='0'>8б</problem>
  <problem group='8' type='0'>8в</problem>
  <problem group='9' type='0'>9</problem>
  <problem group='10' type='0'>10</problem>
  <problem group='11' type='0'>11а</problem>
  <problem group='11' type='0'>11б</problem>
  <problem group='11' type='0'>11в</problem>
  <problem group='11' type='0'>11г</problem>
  <problem group='11' type='1'>11д</problem>
  <problem group='12' type='0'>12</problem>
  <problem group='13' type='0'>13</problem>
  <problem group='14' type='0'>14</problem>
  <problem group='15' type='0'>15</problem>
  <problem group='16' type='0'>16а</problem>
  <problem group='16' type='0'>16б</problem>
  <problem group='16' type='0'>16в</problem>
  <problem group='17' type='0'>17</problem>
  <problem group='18' type='0'>18</problem>
  <problem group='19' type='0'>19</problem>
  <problem group='20' type='0'>20</problem>
  <problem group='21' type='0'>21</problem>
</listok>

```