Листок №4 Математическая индукция 11.2013

Математическая индукция— это способ доказать бесконечную серию занумерованных натуральными числами утверждений за два хода: 1) *база индукции:* доказываем первое утверждение;
2) *шаг индукции:* доказываем, что при любом натуральном n из n-го утверждения следует $(n+1)$-е.

Задача 1. Докажите, что части, на которые n прямых делят плоскость, можно раскрасить в два цвета, так чтобы соседние части (имеющие общий отрезок или луч) были окрашены в разные цвета.

Задача 2. Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ при любом натуральном n.

Задача 3. В компании из k человек ($k \geqslant 4$) у каждого появилась новость, известная лишь ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k-4$ разговора все они могут узнать все новости.

Задача 4. Известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n \geqslant 1$. Найдите a_n.

Задача 5. Докажите, что при любом натуральном n **а)** $2^n > n$; **б)** $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

Задача 6. Докажите неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geqslant 1 + na$, если $a \geqslant -1$ и n — натуральное число.

Задача 7. Докажите, что модуль суммы любого числа слагаемых не больше суммы модулей этих слагаемых.

Задача 8. Из клетчатого квадрата $2^n \times 2^n$ клеток вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток. («Уголок» — это квадрат 2×2 без одной клетки.)

Задача 9. Найдите ошибку в рассуждении: «Докажем, что в любом табуне все лошади одной масти. Воспользуемся индукцией по числу лошадей в табуне. Если в табуне всего одна лошадь, то, разумеется, все лошади в этом табуне одной масти. Предположим теперь, что в любом табуне из n лошадей все лошади одной масти. Рассмотрим произвольный табун из $n+1$ лошади. По предположению индукции любые n лошадей в этом табуне одной масти. Поэтому все лошади в табуне одной масти.»

Задача 10. Верна ли теорема: «Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный»? Вот её доказательство (нет ли в нём ошибки?):
«1. Если треугольник разбит отрезком на два треугольника, то один из них не остроугольный (ясно).
2. Пусть имеется треугольник, как-то разбитый на n треугольников. Проведём ещё один отрезок, разбив один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на $n+1$ треугольник, причём один из двух новых треугольников будет не остроугольный. По индукции теорема доказана.»

Задача 11. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость **а)** n прямых; **б)** n окружностей? **в)*** На какое максимальное число частей могут разбить пространство n плоскостей?

Есть разные варианты индукции. Иногда в качестве шага приходится проверять, что n-е утверждение верно если верны *все* предыдущие. Другой вариант: предположим, что не все утверждения верны. Тогда есть *наименьшее* натуральное n, для которого n-е утверждение неверно. Если из этого выводится противоречие, то все утверждения верны.

Задача 12. Докажите, что уравнение $n^2 = 2m^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Задача 13. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую).

Задача 14. Число $x + \dfrac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ — тоже целое при любом натуральном n.

Задача 15. (*Ханойские башни*) Есть детская пирамида с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но нельзя класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что **а)** можно переложить все кольца на один из пустых стержней; **б)** можно сделать это за $2^n - 1$ перекладываний; **в)** меньшим числом перекладываний не обойтись.

Задача 16*. Докажите, что для любого натурального $n > 3$ число $n!$ можно разложить на два множителя, отношение которых будет не меньше $2/3$ и не больше $3/2$.

Задача 17*. На кольцевой автотрассе стоят несколько машин. Общего количества бензина в этих машинах достаточно для того, чтобы одной машине объехать всю трассу. Докажите, что одна из машин действительно сможет объехать трассу, забирая по дороге бензин у других машин.

Задача 18*. k воров хотят поделить добычу. Каждый уверен, что он поделил бы добычу на равные части, но остальные ему не верят. Как действовать ворам, чтобы после раздела каждый был уверен, что у него не менее $\frac{1}{k}$ части добычи? Разберите случаи: **а)** $k = 2$; **б)** $k = 3$; **в)** k — любое.

Задача 19*. При каких n гири весом $1, 2, \dots, n$ кг можно разложить на три равные по весу кучи?

Задача 20*. Двое играют в игру, исход которой не зависит от случая. Ходят по очереди, по правилам игра длится не более n ходов. Ничьих нет. Докажите, что у кого-то есть выигрышная стратегия.

1	2	3	4	5 а	5 б	6	7	8	9	10	11 а	11 б	11 в	12	13	14	15 а	15 б	15 в	16	17	18 а	18 б	18 в	19	20