**Определение 1.** Топологическим пространством называется пара  $(X, \mathcal{T})$ , состоящая из множества X и набора его подмножеств  $\mathcal{T} = \{U_{\alpha}\}$ , которые называются *открытыми*, так что:

- $(i) \varnothing, X \in \mathcal{T}$ , то есть пустое множество и всё множество X открыты;
- (ii) если  $U, V \in \mathcal{T}$ , то  $U \cap V \in \mathcal{T}$ , то есть пересечение двух открытых открыто;
- (iii) если  $\{V_{\beta}\}$  произвольный набор открытых множеств, то  $\bigcup_{\beta} V_{\beta} \in \mathcal{T}$ , то есть произвольное объединение открытых множеств открыто.

Также говорят, что X снабжено структурой топологического пространства, или что на X задана топология.

**Задача 1.** Придумайте несколько топологий на множестве  $X = \{a, b\}$ .

**Определение 2.** *Окрестностью* точки называется любое открытое множество, эту точку содержащее.

Задача 2. а) Может ли у точки в топологическом пространстве не быть окрестностей?

б) Докажите, что на любом множестве можно задать топологию.

Задача 3. Пусть (M,d) — метрическое пространство. Положим открытыми те множества, которые вместе с каждой своей точкой содержат какую-нибудь её  $\varepsilon$ -окрестность. Докажите, что таким образом M наделяется структурой топологического пространства.

Таким образом, любое метрическое пространство является топологическим. В частности  $\mathbb{R}^n$  с метрикой  $d_2$  является топологическим пространством.

**Задача 4.** Докажите, что метрики  $d_1,\,d_2$  и  $d_\infty$  индуцируют на  $\mathbb{R}^n$  одну и ту же топологию.

**Задача 5.** а) Пусть Y — некоторое непустое подмножество метрического пространства (X, d). Докажите, что метрика на X индуцирует на Y структуру метрического пространства.

- **б)** Пусть Y некоторое непустое подмножество топологического пространства  $(X, \mathcal{T})$ . Положим открытыми в Y пересечения открытых в X множеств с Y. Докажите, что это правило задаёт на Y топологию, которая называется undyuupoвanhoй.
- Задача 6. а) Докажите, что любое открытое множество в  $\mathbb{R}$  можно представить как объединение интервалов (то есть множество интервалов является *базой* топологии) **б)** Докажите, что любое открытое множество в  $\mathbb{R}$  является объединением непересекающихся интервалов и лучей.

**Определение 3.** Точка  $x \in X$  называется *предельной точкой множества* M, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M (отличную от x).

**Определение 4.** Множество M в топологическом пространстве называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 7. а) Докажите, что объединение и пересечение двух замкнутых множеств замкнуто;

- б) Докажите, что произвольное пересечение замкнутых также замкнуто;
- **в)** Покажите, что произвольное объединение замкнутых подмножеств не обязано быть замкнутым.
- г) Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

1	2 a	2 6	3	4	5 a	5 6	6 a	6 6	7 a	7 б	7 В	7 Г

Листок №MS-5 Страница 2

**Задача 8.** Докажите, что шар  $B_{\varepsilon}(x_0) = \{x \in M \mid d(x,x_0) \leqslant \varepsilon\}$  в метрическом пространстве M является замкнутым.

**Задача 9.** (*принцип вложенных шаров*) Докажите, что метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку.

**Задача 10\*.** Докажите, что стремление радиусов к нулю существенно, то есть существует полное пространство и последовательность вложенных шаров, имеющих пустое пересечение. (Подсказка:  $u \neq x$  илп 1 < (v.x)ь идоти, лят V ви ухидтем атностроп онжоV)

**Определение 5.** Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого покрытия его открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Задача 11. а) Докажите, что любое конечное топологическое пространство компактно.

- б) Приведите пример некомпактного топологического пространства.
- в) Докажите, что отрезок компактен.

**Задача 12\*.** Докажите, что подмножество в  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Задача 13. Докажите, что подмножество компактного топологического пространство компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

**Задача 14.** а) Дайте определение *непрерывной* функции  $f:(X,\mathcal{T}_X)\to (Y,\mathcal{T}_Y)$  так, чтобы оно совпадало с определением непрерывности в случае метрических пространств.

**б)** Дайте определение непрерывности функции в точке. **в)\*** Сформулируйте следующие утверждения как утверждения о непрерывности отображений топологических пространств (в некоторой точке):  $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ;  $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ ;  $\lim_{x\to +\infty} f(x) = A$ ;  $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ .

**Задача 15.** Докажите, что непрерывная функция  $f:(X,\mathcal{T}_X)\to\mathbb{R}$  на компактном X достигает своего наименьшего и наибольшего значения.

Задача 16. Докажите, что непрерывный образ компакта — компакт.

8	9	10	11 a	11 б	11 B	12	13	14 a	14 б	14 B	15	16