Асимптотика

Комбинаторика

Задача 1. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 10. Можно ли оставшееся **а)** разрезать на доминошки; **б)** обойти ходом коня?

Задача 2. Можно ли расставить во всех точках плоскости с целыми координатами натуральные числа так, чтобы каждое натуральное число присутствовало, и чтобы на любой прямой, проходящей через две точки с целыми координатами, но не проходящей через начало координат, расстановка чисел была периодической?

Задача 3. На плоскости живут мальчики и девочки, расстояние между любыми двумя не меньше 1 м. Каждый ребенок общается только с теми, которые живут от него не дальше 10 км. Девочка счастлива, если число мальчиков, с которыми она целуется, больше числа девочек, с которыми целуется любой ее знакомый мальчик. Мальчик счастлив, если число девочек, с которыми он танцует, больше числа мальчиков, с которыми танцует любая его знакомая девочка. Докажите, что полное счастье невозможно.

Задача 4. На клетчатой плоскости стоит квадрат $n \times n$, составленный из фишек. Разрешается прыгать фишкой через соседнюю по стороне на свободную клетку, при этом фишка, через которую перепрыгнули, снимается. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ ситуация, в которой нельзя больше сделать ни одного хода, может возникнуть не раньше, чем через $n^2\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ ходов для всех достаточно больших n.

Комбинаторная геометрия

Задача 5. Существует ли функция из какого-то шара в какой-то круг, не уменьшающая расстояния?

Задача 6. Можно ли разбить плоскость на **а)** равные выпуклые семиугольники; **б)** выпуклые семиугольники 100 типов?

Задача 7. (*Зоны Берлюэна*) Тысячной зоной Берлюэна с центром в целочисленной точке O называется множество всех точек M плоскости, для которых существует ровно 999 точек целочисленной решетки, удаленных от M на расстояние меньшее, чем OM. Найдите площадь тысячной зоны Берлюэна.

Задача 8. (*О кляксе*) На плоскости есть конечная клякса. Она эволюционирует по следующему закону: если в круге радиуса 1 с центром в некоторой точке больше половины площади белая, то точка становится белой, иначе — становится черной. Можно ли нарисовать кляксу, которая в некоторый момент увеличит свою площадь более, чем в 1000 раз?

Алгебра и теория чисел

Задача 9. Докажите, что для подходящего N уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = N$ имеет не менее 1000 решений в натуральных числах.

Задача 10. Пусть $\sigma(n)$ — сумма цифр числа n. **а)** Докажите, что найдется бесконечно много n таких, что $\sigma(2^{n+1}) < \sigma(2^n)$. **б)** Докажите, что последовательность $\dfrac{1}{\sigma(2^n)}$ бесконечно малая.

1 а	1 б	2	3	4	5	6 а	6 б	7	8	9	10 а	10 б