Листок №ALG-1 Расширения полей I: Алгебраические числа 2022.01

Задача 1. Приведите пример ненулевого многочлена с рациональным коэффициентами, корнем которого является **а)** $1+\sqrt[3]{2}$; **б)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **в)*** $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$; **г)*** $(1+\sqrt[3]{2})\sqrt{3}$.

Определение 1. Действительное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами, и *трансцендентным* в противном случае.

Задача 2*. **а)** Трансцендентные числа существуют.
б)* Приведите конкретный пример трансцендентного числа.

Задача 3*. Алгебраические числа образуют поле.

Определение 2. *Минимальным многочленом* алгебраического числа α называется неприводимый многочлен $m_\alpha \in \mathbb{Q}[x]$, такой что $m_\alpha(\alpha)=0$. *Степенью* алгебраического числа называется степень его минимального многочлена.

Задача 4. **а)** Любое алгебраическое число степени 2 может быть представлено в виде $a \pm \sqrt{d}$, где числа a и d рациональные. (Верно ли аналогичное утверждение для алгебраических чисел степени 4?)
б) Если $\alpha = a+\sqrt{d}$ (числа a и d рациональные), то $m_\alpha = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} = a-\sqrt{d}$.

Задача 5. **а)** $\{P \in \mathbb{Q}[x] : P(\alpha)=0\} = (m_\alpha)$.
б) Минимальный многочлен алгебраического числа α существует и единственен (с точностью до умножения на ненулевую константу).

Задача 6. Если α — алгебраическое действительное число, то внутри действительных чисел есть подполе $\mathbb{Q}(\alpha)$, изоморфное полю $\mathbb{Q}[x]/(m_\alpha)$.

Определение 3. Пусть L поле, K его подполе («L/K[1] — расширение полей»). Говорят, что элемент поля L *алгебраичен* над K, если он является корнем ненулевого многочлена с коэффициентами в K. (Таким образом, выше шла речь об алгебраических элементах в расширении $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.)

Расширение L/K называется *алгебраическим*, если любой его элемент алгебраичен.

Задача 7. Любое конечное поле характеристики p является алгебраическим расширением поля $\mathbb{F}_p$.

Задача 8. Любое расширение конечных полей получается последовательностью расширений вида $K \subset L \cong K[x]/(P)$.

Задача 9. Если конечное поле имеет характеристику p, то количество элементов в нем является степенью числа p.

Задача 10. Для любого поля K и любого многочлена P над этим полем найдется расширение, в котором многочлен P **а)** имеет корень; **б)** раскладывается на линейные множители.

Задача 11. **а)** Если L — поле из $q=p^n$ элементов, то любой его элемент является корнем многочлена $x^q - x$.
б) Для любого q вида p^n существует поле из q элементов.
в)* Единственно ли такое поле?

1 а	1 б	1 в	1 г	2 а	2 б	3	4 а	4 б	5 а	5 б	6	7	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	11 в

[1] Читается «L над K», не путать с фактором.