Листок №STO-4 Преобразования Галилея и гиперболические функции 2022.01

Напоминание. Мы уже выяснили две основных вещи. Преобразование координат между двумя инерциальными системами отсчёта должно быть аффинно. Аффинное преобразование $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ может быть записано в координатах виде $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{w_0}$, где A — матрица линейного преобразования, а $\vec{w_0}$ — некоторый вектор.
Секунда и метр. Оказывается, что время и расстояния можно точно определить независимо от системы счисления. Так секунда есть время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133, а метр равен расстоянию, которое проходит свет в вакууме за промежуток времени, равный 1/299 792 458 секунды. Конечно, мы требуем, чтобы метр и секунда во всех системах отсчёта совпадали.
Преобразования Галилея. В классической теории мы не властны над временем. Это означает, что если f — преобразование координат между инерциальными системами отсчёта в классической теории (преобразование *Галилея),* то $f(x,y,z,t) = (*,*,*,t+t_0)$.

Задача 1. (*одномерный классический мир*) Будем рассматривать одномерный мир: одна координата в пространстве и одна во времени. **а)** Докажите, преобразование имеет вид $f\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$; **б)** Покажите, что число a равно либо 1, либо -1; **в)** За что «отвечают» каждое из чисел a, b, x_0 и t_0?

Задача 2. **а)** На обычной плоскости заданы два обычных вектора (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Докажите, что площадь параллелограмма, натянутого на эти вектора равна $x_1y_2 - x_2y_1$. Это число называется *определителем* матрицы $\left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{smallmatrix}\right)$. Что происходит с определителем, если **б)** переставить строки или столбцы? **в)** умножить строку или столбец на число? **г)** к одной строке прибавить другую, умноженную на число?

Задача 3. (*двумерный классический мир*) Будем рассматривать двумерный мир: две координаты в пространстве и одна во времени. **а)** Докажите, преобразование имеет вид $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$;
б) За что «отвечают» числа α и β?
в) Из физических соображений покажите, что $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + c^2 = 1$ и $ab + cd = 1$;
г) Докажите, что матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ имеет определитель, равный 1 или -1;
д) Известно, что существует физический опыт, который позволяет вне зависимости от системы отсчёта определить вращение «по часовой стрелке». Покажите, что определитель из предыдущего пункта равен 1;
е) Докажите, что матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$. Какой физический смысл числа φ?

Гиперболические функции

Задача 4. Гиперболические функции — семейство элементарных функций, выражающихся через экспоненту и тесно связанных с тригонометрическими функциями. По определению $\operatorname{ch}\varphi = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$ (*гиперболический синус, чинус),* $\operatorname{sh}\varphi = \dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$ (*шинус),* $\operatorname{th}\varphi = \dfrac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}$, $\operatorname{cth}\varphi = \dfrac{\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{sh}\varphi}$.
а) Нарисуйте графики гиперболических функций.
б) (*Основное соотношение*) Докажите, что $\operatorname{ch}^2\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi = 1$;
в) (*Геометрическое определение*) Как связаны гиперболические функции с гиперболой?
г) (*Формулы сложения*) Выразите $\operatorname{sh}(x \pm y)$ и $\operatorname{ch}(x \pm y)$ через $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} y$ и $\operatorname{ch} y$;
д) Выразите $\operatorname{th}(x \pm y)$ через $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{th} y$;
е) (*Производные*) Найдите производные гиперболических функций;
ж) (*Обратные гиперболические функции*) Обратные гиперболические функции обозначаются через Arsh, Arch, Arth и Arcth, и читаются как *Ареа-синус* (от *area), Ареа-косинус* и т.д.
Выразите $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$ и $\operatorname{Arth} x$ через $\ln$ и x.
з)** (*Связь с тригонометрическими функциями*) Докажите, что $\operatorname{sh} x = -i\sin(ix)$, $\operatorname{ch} x = \cos(ix)$, $\operatorname{th} x = -i\operatorname{tg}(ix)$.
и)** (*Функция Гудермана*) Функция *Гудермана* определяется через интеграл: $\operatorname{gd}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$.
Докажите, что $\operatorname{gd}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(x))$, $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{gd}(x))$, $\sin(\operatorname{gd}(x)) = \operatorname{th}(x)$.

Задача 5. Пусть преобразование координат задаётся матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} \operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi \\ -\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{smallmatrix}\right)$.
а) Куда это преобразование переводит прямые $y = 0$, $y = x/2$, $y = x$, $y = 2x$ и $x = 0$?
б) Докажите, что преобразование A в области $y \geqslant x$ сохраняет *интервал*— величину $\sqrt{y^2 - x^2}$.

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	2 в	2 г	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	4 е	4 ж	4 з	4 и	5 а	5 б