

**Задача 1.** Докажите, что последовательность в метрическом пространстве не может иметь двух различных пределов.

**Задача 3.** Докажите, что если последовательность сходится и предел её лежит внутри некоторого открытого шара, то почти все её члены лежат внутри этого шара.

**Задача 5.** Какие последовательности являются сходящимися в  
а) дискретной метрике; б)  $p$ -адической метрике?

**Определение 2.** Последовательность  $(x_n)$  точек метрического пространства  $(M, d)$  называется *фундаментальной*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся номер  $N \in \mathbb{N}$  такой, что если  $m, n > N$ , то  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ .

**Определение 3.** Метрическое пространство  $(M, d)$  называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

**Определение 4.** Отображение  $f: M \rightarrow M$  из метрического пространства  $M$  в себя называется *сжимающим*, если найдётся такая константа  $0 < \theta < 1$ , что для любых  $x, y \in M$ :  $d(f(x), f(y)) < \theta d(x, y)$ .

**Задача 11.** а) Докажите, что сжимающее отображение  $f$  полного метрического пространства  $M$  имеет неподвижную точку, то есть  $\exists x \in M: f(x) = x$ . б) Верно ли это без условия полноты  $M$ ?

**Задача 12.** Докажите, что композиция гомотетии с коэффициентом, не равным  $\pm 1$  и любого движения имеет неподвижную точку.

д) Найдите  $\sqrt{2}$  с точностью до трёх знаков после запятой.

[illegible]