Определение 1. *Метрическим пространством* (M, d) называется пара, состоящая из множества M и функции «расстояния» (*метрики*) $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

(M1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (*симметричность*);

(M3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (*неравенство треугольника*).

Подмножество N метрического пространства M, рассматриваемое как метрическое пространство (с той же метрикой), называется *подпространством* пространства M.

Задача 1. Пусть (M, d) — метрическое пространство. Докажите, что $d(x, y) \geqslant 0$ для любых $x, y \in M$.

Задача 2. Поездка на московском метрополитене от станции A до станции B требует времени, которое зависит от выбранного маршрута, времени ожидания поездов и т. п. Выберем из всех возможных случаев тот, при котором затраченное время окажется наименьшим, и назовём это время расстоянием от станции A до станции B. Является ли такое расстояние метрикой на множестве станций московского метро? Если нет, предложите дополнительные условия, при которых введённое расстояние будет метрикой.

Определение 2. Множество последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ длины n, состоящих из действительных чисел, называется *n-мерным арифметическим пространством* $\mathbb{R}^n$. (Обычные прямая, плоскость и пространство — это $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно).

Задача 3. Является ли метрическим пространством $\mathbb{R}^n$ с метрикой

а) $d_1(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k - x_k|$;

б) (*евклидова метрика*) $d_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$;

в) $d_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k - x_k|$?

Задача 4. (*Дискретная метрика*) Пусть M — любое множество. Положим $d(x, y) = 0$, если $x = y$ и $d(x, y) = 1$, если $x \neq y$. Докажите, что таким образом получается метрика (называемая *дискретной*). Метрическое пространство (M, d) также называется *дискретным.*

Задача 5. (*Метрика Хэмминга*) Пусть M — множество слов некоторого алфавита, состоящих из какого-то фиксированного числа букв. Расстоянием $d(x, y)$ между словами x и y назовём количество букв, в которых эти слова отличаются, если написать их одно под другим. Например, $d(\text{нос}, \text{сон}) = 2$. Докажите, что d является метрикой.

Задача 6. (*p-адическая метрика*) Пусть p — простое число. Для $x, y \in \mathbb{N}$ положим $d_p(x, y) = 0$, если $x = y$, и $d_p(x, y) = p^{-n}$, если $x \neq y$ и n — наибольший показатель степени числа p, при котором разность $x - y$ делится на p. Проверьте, что $(\mathbb{N}, d_p)$ — метрическое пространство.

Задача 7. (*Равномерная метрика*) Пусть M — множество ограниченных функций $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Положим $d(f, g) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$. Проверьте, что это метрика.

1	2	3 а	3 б	3 в	4	5	6	7

Определение 3. Пусть M — метрическое пространство, $x_0 \in M$ — произвольная точка, $\varepsilon > 0$ — вещественное число. Множество $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in M \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$ называется ε-окрестностью точки x_0 (или *открытым шаром* с центром x_0 и радиусом ε). Множество $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in M \mid d(x, x_0) \leqslant \varepsilon\}$ называется *замкнутым шаром* с центром x_0 и радиусом ε.

Задача 8. Как выглядят шары в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ относительно метрик из задачи 3?

Задача 9. (*Хаусдорфовость метрического пространства*) Пусть x_1, x_2 — различные точки метрического пространства M. Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(x_1) \cap U_\varepsilon(x_2) = \varnothing$.

Задача 10. Докажите, что если два открытых шара метрического пространства имеют общую точку, то существует шар, лежащий в их пересечении.

Задача 11. Докажите, что если $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) \neq \varnothing$, то $d(x, y) < 2\varepsilon$. Верно ли обратное (в произвольном метрическом пространстве)?

Задача 12. Докажите, что если $d(x, y) < \varepsilon$, то $U_\varepsilon(x) \subset U_{2\varepsilon}(y)$.

Задача 13. Шары с радиусами r_1 и $r_2 = 57r_1$ пересекаются. Радиусы шаров увеличили вдвое, не меняя их центров. Докажите, что один из полученных шаров содержится в другом.

Задача 14. Могут ли в метрическом пространстве существовать два шара разных радиусов, таких что шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса и не совпадает с ним?

Задача 15.

а) Сколько элементов содержит замкнутый шар радиуса 1 на множестве слов длины n с метрикой Хэмминга для алфавита $\{0, 1\}$? А если в алфавите m букв?

б) Написано несколько последовательностей из нулей и единиц длины n, причём любые две из них отличаются по крайней мере в трех местах. Докажите, что их число не превосходит $\frac{2^n}{n+1}$.

Определение 4. Два метрических пространства (M_1, d_1) и (M_2, d_2) называются *изометричными,* если существует взаимно однозначное отображение $f\colon M_1 \to M_2$, такое что для любых точек $x_1, x_2 \in M_1$ выполняется равенство $d_1(x_1, x_2) = d_2(f(x_1), f(x_2))$. Отображение f в этом случае называется *изометрией.*

Задача 16. Придумайте такую метрику на прямой $\mathbb{R}$, чтобы прямая относительно этой метрики и интервал $(0; 1)$ относительно стандартной метрики были изометричны.

Задача 17. Изометричны ли $(\mathbb{R}^n, d_2)$ и $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$?

Определение 5. Говорят, что метрическое пространство N *вкладывается* в метрическое пространство M, если N изометрично некоторому подпространству в M.

Задача 18. Докажите, что $(\mathbb{R}^n, d_2)$ вкладывается в $(\mathbb{R}^N, d_2)$ при $n \leqslant N$.

Задача 19. Докажите, что $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ вкладывается в метрическое пространство из задачи 7.

Задача 20. Верно ли, что любое конечное метрическое пространство M вкладывается в $(\mathbb{R}^n, d_2)$ при $n \gg 0$? Если да, то как можно оценить n, зная $|M|$?

8	9	10	11	12	13	14	15 а	15 б	16	17	18	19	20

Определение 1. Говорят, что последовательность (x_n) точек метрического пространства (M, d) *сходится к* $a \in M$*,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что если $n > N$, то $d(x_n, a) < \varepsilon$.

Задача 1. Докажите, что последовательность в метрическом пространстве не может иметь двух различных пределов.

Задача 2. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(a, b)$?

Задача 3. Докажите, что если последовательность сходится и предел её лежит внутри некоторого открытого шара, то почти все её члены лежат внутри этого шара.

Задача 4. (*Сходимость в* $\mathbb{R}^m$) Рассмотрим арифметическое m-мерное пространство $\mathbb{R}^m$ с евклидовой метрикой. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ если и только если $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant m$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(i)} = a^{(i)}$ (под $\alpha^{(i)}$ подразумевается i-ая координата точки α).

Задача 5. Какие последовательности являются сходящимися в
а) дискретной метрике; **б)** p-адической метрике?

Задача 6. Рассмотрим пространство M ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций с равномерной метрикой. **а)** Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = g$, то для всех $x \in [a, b]$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$. **б)** Верно ли обратное?

Определение 2. Последовательность (x_n) точек метрического пространства (M, d) называется *фундаментальной,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что если $m, n > N$, то $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Задача 7. **а)** Докажите, что любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.
б) Верно ли обратное?

Определение 3. Метрическое пространство (M, d) называется *полным,* если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

Задача 8. Докажите, что вещественная прямая с естественной метрикой полна.

Задача 9. Докажите, что пространство $C([a, b])$ с равномерной метрикой является полным.

Определение 4. Отображение $f\colon M \to M$ из метрического пространства M в себя называется *сжимающим,* если найдётся такая константа $0 < \theta < 1$, что для любых $x, y \in M$: $d(f(x), f(y)) < \theta d(x, y)$.

Задача 10. При каких условиях гомотетия на плоскости является сжимающим отображением?

Задача 11. **а)** Докажите, что сжимающее отображение f полного метрического пространства M имеет неподвижную точку, то есть $\exists\, x \in M$: $f(x) = x$. **б)** Верно ли это без условия полноты M?
(Подсказка к пункту **а**: докажите, что любая последовательность $(f^n(x))$ фундаментальна)

Задача 12. Докажите, что композиция гомотетии с коэффициентом, не равным ± 1 и любого движения имеет неподвижную точку.

Задача 13. (*Метод Ньютона*) Пусть функция $\alpha(x)$ дважды непрерывно дифференцируема (то есть вторая производная непрерывна) на отрезке $[a, b]$, имеет на нём корень $\widetilde{x}$, причём $\alpha'(x) \neq 0$ всюду на $[a, b]$. Рассмотрим функцию $f(x) = x - \dfrac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}$.
а) Докажите, что $\alpha(\widetilde{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$;
б) Докажите, что f и f' непрерывны;
в) Докажите, что найдётся такое $\delta > 0$, что f на $U_\delta(\widetilde{x})$ осуществляет сжимающее отображение.
г) Что всё это значит и как это применять?
д) Найдите $\sqrt{2}$ с точностью до трёх знаков после запятой.

1	2	3	4	5 а	5 б	6 а	6 б	7 а	7 б	8	9	10	11 а	11 б	12	13 а	13 б	13 в	13 г	13 д

Всюду в этом листке, где упоминается пространство $\mathbb{R}^n$, имеется в виду, что оно снабжено евклидовой метрикой d_2.
Под словом «функция» подразумевается отображение в $\mathbb{R}$.

Определение 1. Точка a метрического пространства M называется *предельной точкой* множества $X \subset M$, если в любой ε-окрестности точки a найдётся точка из X.

Определение 2. Подмножество U метрического пространства M называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит какую-нибудь её ε-окрестность.

Определение 3. Подмножество B метрического пространства M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 1°. Докажите, что $U \subset M$ открыто тогда и только тогда, когда $M \setminus U$ замкнуто.

Задача 2. Пусть M снабжено дискретной метрикой. Опишите все его открытые подмножества.

Задача 3. Множество X на плоскости обладает таким свойством, что его пересечение с любой прямой есть открытое подмножество этой прямой. Обязательно ли X открытое? Тот же вопрос, если все слова «открытое» заменить на «замкнутое».

Определение 4. Отображение $f\colon M \to N$ *непрерывно в точке* $m \in M$, если для любой последовательности (x_i), сходящейся к m, последовательность $(f(x_i))$ сходится к $f(m)$. Если f непрерывно во всех точках множества M, то говорят, что f *непрерывно на* M.

Определение 5. Отображение $f\colon M \to N$ *непрерывно на* M (или просто *непрерывно*), если прообраз любого открытого множества открыт.

Задача 4°. Докажите эквивалентность определений 4 и 5.

Задача 5. Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ функции вычисления суммы, разности, произведения и частного координат. Докажите, что они непрерывны на своей области определения.

Задача 6°. Докажите, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

Задача 7. Докажите, что сумма и произведение непрерывных функций непрерывны.

Задача 8. Докажите, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

Задача 9. Верно ли, что при непрерывном отображении открытые множества переходят в открытые? А замкнутые в замкнутые?

Задача 10. Пусть пространство M таково, что для любого метрического пространства N любое отображение $f\colon M \to N$ непрерывно. Что можно сказать об M?

Задача 11. Пусть пространство N таково, что для любого метрического пространства M любое отображение $f\colon M \to N$ непрерывно. Что можно сказать об N?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Определение 6. Множество X называется *связным,* если из того, что X принадлежит объединению двух открытых непересекающихся множеств, следует, что оно принадлежит одному из этих множеств.

Определение 7. Множество X называется *линейно-связным,* если для любых двух его точек x_0 и x_1 существует путь из x_0 в x_1 (то есть непрерывное отображение $f\colon [0,1] \to X$ такое, что $f(0) = x_0$ и $f(1) = x_1$).

Задача 12°. Докажите, что образ связного множества при непрерывном отображении связен.

Задача 13°. Докажите, что образ линейно-связного множества при непрерывном отображении линейно-связен.

Задача 14. Верно ли, что прообраз связного множества при непрерывном отображении связен?

Задача 15. Докажите, что если множество линейно-связно, то оно связно.

Задача 16. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто и связно. Докажите, что оно линейно-связно.

Задача 17. (*задача-шутка*) Множество X делит плоскость на две части (то есть его дополнение является несвязным объединением двух связных множеств). Обязательно ли X связно?

Задача 18*. Приведите пример связного, но не линейно-связного подмножества в $\mathbb{R}^n$ для какого-нибудь n.

Задача 19. Пусть $f\colon M \to N$ непрерывное взаимно-однозначное отображение. Верно ли, что f^{-1} тоже непрерывно?

Определение 8. Непрерывное взаимно-однозначное отображение $f\colon M \to N$ называется *гомеоморфизмом,* если отображение f^{-1} непрерывно. В этом случае говорят, что M *гомеоморфно* N (обозначение: $M \cong N$).

Задача 20. Какие из следующих пар множеств гомеоморфны между собой:
а) прямая и парабола; **б)** прямая и гипербола; **в)** прямая и интервал;
г) открытый круг и плоскость; **д)** сфера с выколотой точкой и плоскость;
е) интервал и отрезок; **ж)** прямая и окружность; **з)** прямая и плоскость?

Задача 21*. Пусть множества M и N таковы, что существуют непрерывное взаимно-однозначное отображение $f\colon M \to N$ и непрерывное взаимно-однозначное отображение $g\colon N \to M$. Верно ли, что $M \cong N$?

Определение 9. Множество называется *компактным* (или просто *компактом*), если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 22°. Докажите, что компактное множество замкнуто и ограничено. Верно ли обратное?

Задача 23°. Докажите, что образ компакта при непрерывном отображении — компакт.

Задача 24. Докажите, что непрерывная функция достигает на компакте своего максимума и минимума.

Задача 25. Выполняется ли принцип вложенных компактов для произвольного метрического пространства?

Задача 26. Известно, что $f\colon [0,1] \to M$ непрерывно и взаимно-однозначно. Докажите, что f — гомеоморфизм.

12	13	14	15	16	17	18	19	20 а	20 б	20 в	20 г	20 д	20 е	20 ж	20 з	21	22	23	24	25	26

Задача 1. (*Описание открытых подмножеств* $\mathbb{R}$)

а) Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ можно представить как объединение интервалов.

б) Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением непересекающихся интервалов и лучей.

Задача 2. (*Принцип вложенных шаров*)

а) Докажите, что метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку.

б)* Докажите, что стремление радиусов к нулю существенно, то есть существует полное пространство и последовательность вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.

(Подсказка: Можно построить соответствующую метрику на счётном множестве)

Задача 3. Докажите, что подмножество компакта компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

Задача 4. (*Описание компактов в* $\mathbb{R}^n$)

а) Докажите, что единичный куб в $\mathbb{R}^n$ является компактом.

б) Докажите, что подмножество $\mathbb{R}^n$ является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Задача 5*. Приведите пример замкнутого ограниченного множества в $C[0,1]$, не являющегося компактом.

Определение 1. Рассмотрим семейство множеств $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, каждое из которых является объединением непересекающихся отрезков:

- $K_1 = [a, b]$.
- Если $K_i = \bigcup\limits_j [a_{ij}, b_{ij}]$, то $K_{i+1} = \bigcup\limits_j \big([a_{ij}, \frac{2}{3}a_{ij} + \frac{1}{3}b_{ij}] \cup [\frac{1}{3}a_{ij} + \frac{2}{3}b_{ij}, b_{ij}]\big)$.

Положим $K[a,b] = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Полученное множество называется *множеством Кантора* (на отрезке $[a,b]$).

Задача 6.

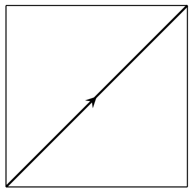
а) Докажите, что множество Кантора замкнуто.

б) Докажите, что множество Кантора континуально.

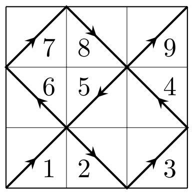
в) Найдите рациональное число, принадлежащее $K[0,1]$, знаменатель которого не является степенью тройки.

Задача 7. (*Кривая Пеано*) Положим $I = [0,1]$. Рассмотрим последовательность отображений $f_n\colon I \to I^2$.

f_1:



f_2:



Первая функция строится как диагональ квадрата: $f_1(t) = (t,t)$.

Для построения второй функции необходимо разделить квадрат на девять маленьких квадратиков и обойти их диагонали в указанном порядке.

Для построения f_3 возьмём f_2 и проход по каждой диагонали заменим на проход по такой же «букве Ф» (соответствующим образом уменьшенной и повёрнутой).

И так далее.

Движение по всем ломаным происходит с постоянной скоростью.

а) Докажите, что последовательность (f_n) имеет предел в пространстве непрерывных отображений из I в I^2. Обозначим этот предел через f.

(Подсказка: Упомянутое пространство полное)

б) Докажите, что для любого $x \in I^2$ и для любого $\varepsilon > 0$ пересечение $U_\varepsilon(x) \cap f_n(I)$ не пусто при $n \gg 0$.

в) Докажите, что для любой точки $x \in I^2$ и для любого $\varepsilon > 0$ пересечение $U_\varepsilon(x) \cap f(I)$ не пусто.

г) Докажите, что $f(I) = I^2$. **д)** Вычислите $f\left(\frac{1}{4}\right)$.

1 а	1 б	2 а	2 б	3	4 а	4 б	5	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д