## Введение

Теория игр занимается, в основном, двумя разными задачами. Первая — понять, как действуют экономические агенты (люди, фирмы). Вторая — понять, как организовать процесс (голосования на выборах, аукционы, разбиения на пары) так, чтобы получить устойчивый и рациональный итог.

В этом листке мы изучим «задачу о марьяже» (о том, как переженить мужчин и женщин), это наиболее упрощенная модель формирования двусторонних рынков. Здесь под двусторонним рынком подразумевается некоторая совокупность экономических агентов, которая разбита на два множества, взаимодействующие между собой. Эта конструкция позволяет симулировать (а значит, и исследовать с точки зрения экономики и социологии) самые разнообразные типы взаимодействий: рынок труда (работники и фирмы), образование (школьники/студенты и школы/вузы), распределение нагрузки в интернете (пользователи и сервера), товарооборот в торговле (поставщики и магазины) и так далее. За развитие этой теории Ллойд Шепли и Элвин Рот получили Нобелевскую премию по экономике в 2012 году.

**Определение 1.** Пусть $M$ — множество мужчин $A_1, A_2, \ldots, A_k$; $W$ — множество женщин $a_1, a_2, \ldots, a_n$. *Паросочетанием* называется любое однозначное соответствие из $M$ в $W$, то есть набор пар (мужчина, женщина), в котором мужчины и женщины различны. Пусть у каждого мужчины есть список женщин, упорядоченный по убыванию их "привлекательности" для него. Аналогично, у каждой женщины есть упорядоченный по тому же принципу список мужчин. Паросочетание называется *неустойчивым*, если некие мужчина $A$ и женщина $a$, не состоящие в браке между собой, оба предпочитают друг друга своим супругам, и *устойчивым*, иначе.

**Задача о марьяже** заключается в следующем: существует ли устойчивое паросочетание? Более тонкий вопрос: если устойчивых паросочетаний несколько, какое из них надо выбрать?

**Задача 1.** Опишите устойчивые паросочетания при заданных предпочтениях (в строке написан порядок по убыванию):

**а)**

| Мужчины | Порядок предпочтений | Женщины | Порядок предпочтений |
|---|---|---|---|
| Anatole | $c\ b\ d\ a$ | alice | $A\ B\ D\ C$ |
| Bob | $b\ a\ c\ d$ | brigitte | $C\ A\ D\ B$ |
| Charles | $b\ d\ a\ c$ | carole | $C\ B\ D\ A$ |
| Dave | $c\ a\ d\ b$ | diana | $B\ A\ C\ D$ |

; **б)**

| Выбор мужчин | | | | | | Выбор женщин | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$: | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $a$: | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $A$ |
| $B$: | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $a$ | $b$: | $C$ | $D$ | $E$ | $A$ | $B$ |
| $C$: | $c$ | $d$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$: | $D$ | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $D$: | $d$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$: | $E$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
| $E$: | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$: | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |

.

**Задача 2.** (*Пример, когда устойчивых паросочетаний много*) Приведите пример наборов предпочтений для $N$ мужчин и $N$ женщин, для которых существует $2^{\frac{N}{2}}$ устойчивых паросочетаний. Для простоты можно считать, что $N = 2^k$.

## Алгоритм Гейла-Шепли

Рассмотрим следующий алгоритм Гейла-Шепли. Вот его $i$-ый шаг:

(1) каждый мужчина делает предложение самой привлекательной женщине из тех, кто ещё ему не отказал;

(2) каждая женщина отказывает всем мужчинам, сделавшим ей предложение, кроме самого привлекательного для неё.

**Задача 3.** Примените алгоритм к задаче 1. Правда ли, что алгоритм закончит работу и получится устойчивое паросочетание?

**Задача 4.** Верно ли, что

**а)** если женщина $a$ отвергла мужчину $A$, то пара $Aa$ не встретится ни в одном устойчивом паросочетании;

**б)** на каждом шаге алгоритма у любого мужчины список оставшихся предложений не пуст?

**в)** Докажите, что в ходе алгоритма получается устойчивое паросочетание.

**Задача 5.** Предположим, что мы провели алгоритм Гейла-Шепли и получили устойчивое паросочетание.

**а)** Покажите, что те, кто не попал в это паросочетание (при неравном количестве мужчин и женщин) не попадёт ни в одного другое устойчивое паросочетание.

**б)** Покажите, что данное паросочетание самое лучше (из всех устойчивых паросочетаний) с точки зрения мужчин и самое худшее с точки зрения женщин.

**Задача 6.** Проведём алгоритм Гейла-Шепли сначала, когда мужчины делают предложения, а женщины отказывают; а потом — когда женщины делают предложения, а мужчины отказывают. Пусть получилось одно и тоже паросочетание. Верно ли, что при данных упорядочиваниях устойчивое паросочетание единственно?

**Задача 7.** Покажите, что алгоритм Гейла-Шепли можно обобщить на случай «абитуриенты» — «университеты». А именно, теперь в одном из множеств (в данном случае, университеты) элементы могут связываться с несколькими абитуриентами. Будем считать, что у каждого университета помимо упорядочивания задача ещё и *мощность,* то есть количество пар, которые он хочет образовать.

**Задача 8.** Сколько устойчивых паросочетаний может быть, если мужчин и женщин по три?

**Задача 9.** Пусть $M = (Aa, Bb, \ldots, Zz)$ и $M_0 = (Aa_0, Bb_0, \ldots, Zz_0)$ — два произвольных устойчивых паросочетания. Докажите, что набор $M \vee M_0 = (A \max_A(a, a_0), B \max_B(b, b_0), \ldots, Z \max_Z(z, z_0))$

**а)** является паросочетанием; **б)** является устойчивым паросочетанием.

(Здесь $\max_A(a, a_0)$ есть женщина, наиболее предпочтительная для $A$ из двух кандидатур $a$ и $a_0$.)

**в)** Докажите аналогичное утверждение про $M \wedge M_0 = (A \min_A(a, a_0), B \min_B(b, b_0), \ldots, Z \min_Z(z, z_0))$.

| 1 а | 1 б | 2 | 3 | 4 а | 4 б | 4 в | 5 а | 5 б | 6 | 7 | 8 | 9 а | 9 б | 9 в |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | |