

Определение 1. Пусть d — целое число, свободное от квадратов. *Нормой* элемента $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ называется целое число $N(z) = x^2 - dy^2$.

Задача 1. Норма мультипликативна: $N(zw) = N(z)N(w)$.

Определение 2. Пусть d — целое число, свободное от квадратов. Диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ называется *уравнением Пелля*.

Решением уравнения Пелля мы будем называть как пару целых чисел (x, y) , так и соответствующий элемент единичной нормы $x + y\sqrt{d}$ кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

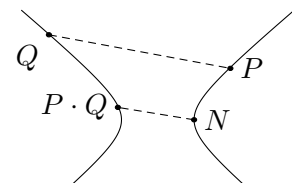
Задача 2. а) Если уравнение Пелля имеет нетривиальное (отличное от $(\pm 1, 0)$) решение, то оно имеет бесконечно много решений.

б) Если уравнение Пелля имеет нетривиальное решение, то группа его положительных решений изоморфна \mathbb{Z} .

Задача 3*. Пусть $N = (1, 0)$; P и Q — пара точек на гиперболе $x^2 - dy^2 = 1$. Проведем через точку N секущую, параллельную хорде PQ .

а) Эта секущая пересекает гиперболу еще ровно в одной точке¹.

б) Построенная точка соответствует произведению элементов единичной нормы, соответствующих точкам P и Q .



Задача 4. Решите уравнение а) $x^2 - 3y^2 = -2$; б) $x^2 - 3y^2 = -1$.

Задача 5. Найдите формулу для k -го треугольного числа, являющегося точным квадратом.

Определение 3. Значением *квадратичной формы* с (симметричной) матрицей Q на векторе v называется число (v, Qv) . Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ задает квадратичную форму $ax^2 + bxy + cy^2$.

Задача 6*. Отображение Q квадратично тогда и только тогда, когда отображение $(u, v) \mapsto Q(u+v) - Q(u) - Q(v)$ билинейно².

Задача 7. Как меняется квадратичная форма при замене координат с матрицей C ?

Задача 8. а) Существует лишь конечное число целочисленных квадратичных форм с $ac < 0$ и фиксированным дискриминантом $-d < 0$.

б) Целочисленная квадратичная форма $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$ имеет нетривиальный автоморфизм (т. е. существует обратимая целочисленная замена координат, при которой эта форма не меняется).

Указание. Рассмотрите алгоритм вытягивания носов для \sqrt{d} .

в) Уравнение Пелля имеет нетривиальное решение.

г) Разложение числа \sqrt{d} в цепную дробь периодически.

д)* Разложение иррационального числа в цепную дробь периодически тогда и только тогда, когда это квадратичная иррациональность (“теорема Лагранжа”).

Задача 9. У числа \sqrt{d} бесконечно много приближений, таких что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(2\sqrt{d}-\varepsilon)q^2}$.

Задача 10*. а) Период цепной дроби числа \sqrt{d} без последнего числа — палиндром.

б) Уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение тогда и только тогда, когда период цепной дроби числа \sqrt{d} имеет нечетную длину.

1	2	2	3	3	4	4	5	6	7	8	8	8	8	8	9	10	10
	а	б	а	б	а	б				а	б	в	г	д		а	б

¹Если отрезок PQ оказался вертикальным, то надо считать, что вторая точка совпадает с N (в этом случае наша “секущая” как раз касается гиперболы).

²Это можно считать определением квадратичного отображения — а доказывать, соответственно, что любое квадратичное отображение задается некоторой симметричной матрицей.