Листок №ODE-1 — **Решение некоторых дифференциальных уравнений** — 2022.01

Определение 1. (*Дифференциальное уравнение **k**-того порядка*) на неизвестную функцию $y = y(x)$ переменной x — это соотношение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$, в которое входит x, y и первые k производных $y', y'', \dots, y^{(k)}$ от y по x. Его *решением* называется всякая функция $y = f(x)$, при подстановке которой в F вместо y получается тождественно нулевая функция от x.

Задача 1. Пусть $c = \mathrm{const}$, дифференцируемые функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ являются решениями уравнения $y' = cy$ на некотором интервале и $g(x) \neq 0$ на этом интервале. Чему может быть равно отношение $f(x)/g(x)$?

Задача 2. Найдите все решения дифференциального уравнения $y' = cy$ на любом интервале.

Задача 3. Найдите все функции $(0, 1) \to^{f} \mathbb{R}$, такие что $f' = -2f$ всюду на $(0, 1)$ и $f(1/2) = 1$.

Задача 4. Пусть на некотором интервале ненулевая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $y' - cy = 0$, а функция $z = z(x)$ — уравнению $z' - cz = h(x)$, где $c = \mathrm{const}$, а $h(x)$ — данная функция. Выразите z/y через c и h и найдите все решения обоих уравнений.

Задача 5. Найдите все решения уравнений: **а)** $y' - 2y = x$ **б)** $y' + y = e^{2x}$ **в)** $y' + 3y = \cos(2x)$

Задача 6°. Пусть $l_1, l_2, \dots, l_k$ — это все корни многочлена $l^k + a_{k-1}l^{k-1} + \dots + a_1 l + a_0$. Верно ли, что $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \left(\frac{d}{dx} - l_1\right)\left(\frac{d}{dx} - l_2\right)\cdots\left(\frac{d}{dx} - l_k\right) y$?

Задача 7. Найдите все решения уравнений: **а)** $y'' = y$ **б)** $y'' - y' = 2y$ **в)** $y'' + y = 2y'$.

Задача 8. Выделите в предыдущей задаче те решения, которые удовлетворяют условиям:
а) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ **б)** $y(-1) = y(1) = 1$

Определение 2. (*Комплекснозначные функции*) Любая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суть вещественнозначные функции, называемые *вещественной* и *мнимой* частями f. Положим, по определению, $f' = u' + iv'$ и $\int f\,dx = \int u\,dx + i\int v\,dx$.

Задача 9. Найдите вещественную и мнимую части функций $z = e^{(2+3i)x}$ и $z = e^{(2-3i)x}$.

Задача 10. Докажите, что комплекснозначная функция тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ с постоянными $a_\nu \in \mathbb{R}$, когда её вещественная и мнимая части удовлетворяют этому уравнению.

Задача 11. Найдите все комплекснозначные функции $z = z(x)$, удовлетворяющие уравнениям (константа $l \in \mathbb{C}$ и комплекснозначная функция $h(x)$ заданы): **а)** $z' - lz = 0$ **б)** $z' - lz = h(x)$

Задача 12. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' = -y$.

Задача 13. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' = -2y$, удовлетворяющие условиям: **а)** $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ **б)** $y(0) = 1$, $y(\pi) = 0$.

Задача 14*. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' + y = e^{4x}$ с $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

Задача 15. (*разделённые переменные*) Докажите, что дифференцируемая функция y тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению $h(y)y' = g(x)$ с заданными непрерывными функциями $h(y)$, $g(x)$, когда при некотором постоянном c она удовлетворяет обычному (не дифференциальному) уравнению $H(y) = G(x) + c$, в котором H и G суть какие-либо первообразные от h и g.

Задача 16. Найдите все решения дифференциальных уравнений:
а) $(x + 1)y' = xy$ **б)** $y' = y \sin x$ **в)** $yy' + x = 1$

Задача 17. Найдите все решения дифференциального уравнения $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$ с $y(0) = -1$.

1	2	3	4	5 а	5 б	5 в	6	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	9	10	11 а	11 б	12	13 а	13 б	14	15	16 а	16 б	16 в	17