

# Гомотопии

**Определение 1.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства,  $f, g$  — два непрерывных отображения  $X$  в  $Y$ . Отображения  $f$  и  $g$  называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение  $F : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ , что  $F(0, x) = f(x)$ ,  $F(1, x) = g(x)$  для любого  $x \in X$ . Отображение  $F$  называется *гомотопией, связывающей  $f$  с  $g$* .

**Задача 1.** Докажите, что гомотопность отображений — отношение эквивалентности.

**Задача 2.** Докажите, что любые два непрерывных отображения из  $X$  в  $Y$  гомотопны, если а)  $X$  — любое,  $Y = [0, 1]$ ; б)  $X$  — любое,  $Y = \mathbb{R}$ ; в)  $X = [0, 1]$ ,  $Y$  — линейно связное.

**Определение 2.** Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $a, b$  — две его точки,  $f(t), g(t)$  — два пути с началом в точке  $a$  и концом в точке  $b$ . Пути  $f$  и  $g$  называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ , что  $F(0, t) = f(t)$ ,  $F(1, t) = g(t)$ ,  $F(\tau, 0) = a$ ,  $F(\tau, 1) = b$  для любых  $t, \tau \in [0, 1]$ . Отображение  $F$  называется *гомотопией, связывающей  $f$  с  $g$* .

**Напоминание.** Мы обозначаем через  $S^1$  окружность единичного радиуса в плоскости  $\mathbb{R}^2$  с центром в начале координат, причем саму плоскость мы отождествляем со множеством комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Таким образом,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi it} \mid t \in [0, 1]\}.$$

**Задача 3.** Пусть  $f, g$  — два пути в  $X$ . Определим отображение  $h$  окружности  $S^1$  в  $X$ , положив

$$h(e^{2\pi it}) = \begin{cases} f(2t), & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2-2t), & \text{при } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Докажите, что пути  $f$  и  $g$  гомотопны тогда и только тогда, когда отображение  $h$  гомотопно постоянному отображению (то есть, переводящему окружность  $S^1$  в одну точку).

### Степень отображения

Степенью непрерывного отображения окружности в себя называется, говоря неформально, число раз, которое окружность на себя «наматывается» при этом отображении. Для того, чтобы дать точное определение, нам понадобится некоторая подготовка.

**Определение 3.** Пусть  $f : X \rightarrow S^1$  и  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные отображения метрического пространства  $X$ . Отображение  $g$  называется *поднятием* отображения  $f$  на  $\mathbb{R}$ , если  $f(x) = e^{2\pi i g(x)}$  для любого  $x \in X$ .

**Задача 4.** Пусть  $X = [0, 1]$ ,  $f(x) = e^{2\pi i x}$ . Опишите все поднятия отображения  $f$  на  $\mathbb{R}$ .

**Задача 5.** Пусть  $X = S^1$ ,  $f(x) = x$ . Существует ли поднятие у этого отображения?

**Задача 6.** Пусть  $f$  — некоторый путь в окружности  $S^1$ , то есть непрерывное отображение  $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ .

а) Докажите, что у пути  $f$  существует поднятие на прямую  $\mathbb{R}$ .

б) Пусть  $g_1, g_2$  — поднятия  $f$  на  $\mathbb{R}$ . Докажите, что  $g_1(t) - g_2(t) = k$ , где  $k$  — некоторая целая константа.

**Указание.** Рассмотрите сначала путь  $f$ , лежащий в полуокружности; затем воспользуйтесь равномерной непрерывностью непрерывной функции на отрезке.

**Определение 4.** Пусть  $h : S^1 \rightarrow S^1$  — непрерывное отображение. Рассмотрим путь  $f(t) = h(e^{2\pi it})$  и его поднятие  $g(t)$ . Число  $g(1) - g(0)$  называется *степенью отображения*  $h$ .

**Задача 7.** Докажите, что степень отображения  $h : S^1 \rightarrow S^1$  определена корректно (то есть не зависит от выбора поднятия).

**Задача 8.** Чему равна степень отображения  $h(z) = z^n$ , где  $n$  — целое число?

**Задача 9.** Пусть  $h : S^1 \rightarrow S^1$  — непрерывное отображение,  $w_0 \in S^1$ . Назовем точку  $z_0 \in S^1$  *положительным прообразом* точки  $w_0$ , если  $h(z_0) = w_0$  и при проходе  $z$  через  $z_0$  против часовой стрелки значение  $h(z)$  проходит через  $w_0$  в том же направлении. Строго последнее условие записывается так: для всех  $z$  из некоторой окрестности точки  $z_0$  комплексное число  $h(z)/w_0$  имеет мнимую часть того же знака, что и мнимая часть  $z/z_0$ . Аналогично определяем *отрицательный прообраз* точки  $w_0$  (при проходе через него против часовой стрелки  $h(z)$  проходит через  $w_0$  по часовой стрелке).

Предположим, что у точки  $w_0$  конечное число прообразов, причем все они либо положительные, либо отрицательные. Докажите, что степень отображения  $h$  равна разности числа положительных прообразов точки  $w_0$  и числа ее отрицательных прообразов.

[illegible]

[illegible]