Перед тем, как изучать специальную теорию относительности, необходимо научиться мыслить в терминах пространства-времени, а также освоить некоторые вещи из линейной алгебры.

Соответственно сначала мы посмотрим на классическую теорию в терминах пространства-времени, затем изучим необходимые основы линейной алгебры и уже тогда перейдём к СТО.

Чтобы говорить о движении каких-либо объектов, нам нужно ввести систему координат. Обычно это три координаты в пространстве и одна координата — время. После того, как координаты введены, мы можем изучать динамику тел.

Далее возникает естественный вопрос: что произойдёт, если взять другую систему координат, ведь координаты в нашем пространстве-времени нельзя выбрать инвариантно, то есть не привязываясь к существующим там объектам. Так возникает понятие *инерциальной системы отсчёта.*

Выберем какую-нибудь систему координат (три пространственных координаты $(x, y, z)$ и временную координату $t$). Эту систему координат будем называть *системой отсчёта лаборатории.* Системе отсчёта лаборатории всегда будет противопоставляться система отсчёта «ракеты». В ракете есть свои часы и своя метровая линейка, они были взяты из лаборатории перед стартом и не отличались от своих копий в лаборатории. С помощью этих часов и линейки мы можем найти координаты любого события в пространстве-времени в координатах ракеты.

В нашей ракете мы будем проводить ровно те же опыты, что в лаборатории. Мы постулируем, что результаты экспериментов, проведённых в лаборатории и ракете, подчиняются одним и тем же законам (этот постулат — результат множества проведённых экспериментов). Оказывается, для определения достаточно рассматривать опыты с равномерным движением.

**Определение 1.** Система отсчёта называет *инерциальной* в некоторой области пространства-времени, если во всей этой области с некоторой данной степенью точности любая первоначально покоившаяся частица сохраняет своё состояние покоя, а любая частица, изначально двигавшаяся, сохраняет своё движение без изменение величины и направления скорости.

**Определение 2. Принцип относительности:** все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта. Или по-другому, невозможно отличить одну инерциальную систему отсчёта от другой с помощью законов физики. Это не значит, что величины должны быть одинаковыми по своим *численным значениям* (например, время между событиями ровно 1 с), но должны удовлетворять тем же *законам.*

**Задача 1.** Для измерений будем использовать обыкновенную линейку и обыкновенный секундомер. Рассмотрим систему отсчёта, связанную с МКС (международной космической станцией). Приведите пример области пространства-времени, где эта система отсчёта заведомо инерциальна, и заведомо неинерциальна.

Итак, пространство с выбранными пространственными (не обязательно всеми тремя, возможно и с одной или двумя) и временной координатой будем называть *пространством-временем.* Яблоко в момент времени 5 и координатами $(2, -3, 10)$ будем описывать точкой $(2, -3, 10, 5)$. Равноускоренное падение этого яблока вниз (вдоль третьей координаты) из этой точки — это множество точек $(2, -3, 10 - g\tau^2/2, 5 + \tau)$. Равномерное движение мотоциклиста — например, набор точек $(30t, 40t, 150, t)$. Множество точек в пространстве-времени, соответствующих данной частице во все моменты времени, называется *мировой линией* частицы.

**Задача 2.** Опишите мировую линию **а)** покоящейся частицы;
**б)** равномерно двигающейся частицы;
**в)** Как выглядит в пространстве-времени покоящийся стержень?
**г)** Равномерно без вращения двигающийся стержень;
**д)** Вращающийся на месте стержень;

**Соглашение 1.** Для простоты будем считать, оси ракеты сонаправлены с осями лаборатории, начало координат ракеты (то есть сама ракета) движется вдоль первой оси со скоростью $u$, в момент времени 0 центры систем отсчёта ракеты и лаборатории совпадают.

**Задача 3.** **а)** Опишите мировую линию лаборатории (она находится в точке $(0, 0, 0)$ в своей системе отсчёта) в координатах лаборатории и в координатах ракеты.
**б)** В системе отсчёта ракеты табуретка летит со скоростью $\vec{w}$ вдоль второй оси. Опишите мировую линию табуретки в системе отсчёта лаборатории и ракеты.

**Задача 4.** Опишите множество точек в пространстве-времени в координатах лаборатории и в координатах ракеты, которые соответствуют покоящемуся в лаборатории стержню длины 1 направленному вдоль **а)** оси $Ox$; **б)** оси $Oy$; **в)** лежащему в плоскости $xOy$ под углом $\varphi$ к оси $Ox$.

| 1 | 2 а | 2 б | 2 в | 2 г | 2 д | 3 а | 3 б | 4 а | 4 б | 4 в |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

Листок №STO-2 **Линейные и аффинные функции** 2022.01

**Задача 1.** Как перелётным птицам проще лететь: по ветру или против ветра? (в каком смысле «проще» следует понять самостоятельно)

**Задача 2.** Астрономы считают, что все галактики разлетаются прямолинейно по направлениям от нашей со скоростями, пропорциональными расстояниям до них. Означает ли это, что наша галактика — центр вселенной?

**Задача 3.** Крючок безмена заменили на более тяжёлый и одновременно параллельно сдвинули вниз шкалу, так чтобы нуль совпал с новым положением стрелки. Будет ли безмен после этого правильно измерять вес?

**Определение 1.** *Векторным пространством* $\mathbb{R}^n$ называется множество всевозможных наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ действительный чисел вместе с операциями сложения $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ и умножения на числа $\lambda\,(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

**Определение 2.** Отображение $\mathbb{R}^m \xmapsto{f} \mathbb{R}^n$ называется *линейным*, если для всех векторов $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^m$ и всех чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f(\lambda x + \mu y) = \lambda\, f(x) + \mu\, f(y)$. Отображение $\mathbb{R}^m \xmapsto{g} \mathbb{R}^n$ называется *аффинным*, если существует $a \in \mathbb{R}^m$, такое что отображение $x \longmapsto g(x+a) - g(a)$ линейно.
Будем опускать лишние скобки в выражении $f((x_1, \ldots, x_m))$ и писать просто $f(x_1, \ldots, x_m)$.
Например, будем писать $f(x)$ вместо $f((x))$ для $x \in \mathbb{R}^1$, $f(x,y)$ вместо $f((x,y))$ для $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

**Задача 4.** Являются ли следующие отображения аффинными или линейными?:
**а)** $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f(x) = (0)$; **б)** $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f(x) = (x^2+1)$; **в)** $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (57x, 179x + 57)$;
**г)** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, $f(x_1, x_2) = -3(x_1 - x_2)$; **д)** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1 - 1, x_1)$;
**е)** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2 + 1, x_1^2 + x_2^2)$?

**Задача 5.** Изменим в определении аффинного отображения фразу «существует $a \in \mathbb{R}^m$» на фразу «для любого $a \in \mathbb{R}^m$». Будет ли новое определение эквивалентно исходному?

**Задача 6.** На плоскости фиксированы три точки: $O$, $A$ и $B$. Нарисуйте множество точек $\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ при **а)** $\lambda + \mu = 1$; **б)** $\lambda, \mu > 0$.

**Задача 7.** Пусть линейное отображения $\mathbb{R}^2 \xmapsto{f} \mathbb{R}^2$ переводит базисные векторы $e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$ в векторы $(a,c)$ и $(b,d)$ соответственно. Куда оно переведёт вектор $(x,y)$?

**Задача 8.** Опишите все линейные и все аффинные отображения
**а)** $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ **б)** $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$ **в)** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **г)** $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

**Задача 9.** Докажите, что множество всех линейных отображений $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ образует коммутативную группу по сложению (то есть сложение коммутативно, ассоциативно и имеет обратный элемент).

**Задача 10.** Пусть задано некоторое биективное отображение $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Известно, что точка в $\mathbb{R}^m$ движется равномерно и прямолинейно тогда и только тогда, когда её образ движется равномерно и прямолинейно. Докажите, что преобразование $f$ аффинно.

**Задача 11.** Докажите, что в классической механике преобразование координат между инерциальными системами отсчёта аффинно.

**Определение 3.** Набор векторов $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ называется базисом, если для любого вектора $w \in \mathbb{R}^m$ найдётся единственный набор чисел $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (который называется координатами вектора $w$ в этом базисе) такой, что
$$w = \lambda v_1 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

**Задача 12.** **а)** Опишите все базисы в $\mathbb{R}^1$; **б)** Докажите, что в любом базисе в $\mathbb{R}^2$ ровно два вектора.
**в)*** Докажете, что в любом базисе в $\mathbb{R}^m$ ровно $m$ векторов.

| 1 | 2 | 3 | 4<br>а | 4<br>б | 4<br>в | 4<br>г | 4<br>д | 4<br>е | 5 | 6<br>а | 6<br>б | 7 | 8<br>а | 8<br>б | 8<br>в | 8<br>г | 9 | 10 | 11 | 12<br>а | 12<br>б | 12<br>в |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Листок №STO-3 **Линейные преобразования и матрицы** 2022.01

**Определение 1.** Набор векторов $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^m$ называется базисом, если для любого вектора $w \in \mathbb{R}^m$ найдётся единственный набор чисел $\{w^1, \ldots, w^n\}$ (который называется координатами вектора $w$ в этом базисе) такой, что $w = w^1 v_1 + \ldots + w^n v_n$.

**Определение 2.** *Матрицей* называется произвольная прямоугольная таблица действительных чисел.

**Соглашение 1.** (*Правило суммирования Эйнштейна*) В физике и механике часто рассматривают различные суммы произведений. Например, если $w^i$ — координаты вектора $w$ в базисе $\{e_i\}$, то $w = \sum\limits_{\alpha=1}^{m} w^\alpha e_\alpha$. В тех случаях, когда суммирование ведётся по одному нижнему и одному верхнему индексу, знак суммы может быть опущен: пишут просто $w^\alpha e_\alpha$, имея в виду сумму по всем осмысленным значениям параметра $\alpha$. Таким образом могут быть коротко записаны довольно длинные суммы:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] \text{— тензор натяжений Максвелла}$$

Координаты вектора $w \in \mathbb{R}^m$ в стандартном базисе $\{e_i\}$ будем обозначать через $w^1, \ldots, w^m$. Будем записывать координаты вектора $w$ матрицей $m \times 1$ (то есть столбцом) его координат:

$$w = \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^m \end{pmatrix} = w^1 e_1 + w^2 e_2 + \ldots + w^m e_m = w^\alpha e_\alpha.$$

**Задача 1.** Докажите, что набор векторов $\{e_1, \ldots, e_m\} \in \mathbb{R}^m$, где $e_i = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$, образует базис $\mathbb{R}^m$. Будем называть его *стандартным.*

**Задача 2.** **а)** Пусть $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — биективное линейное отображение. Докажите, что набор векторов $\{e_{1'}, \ldots, e_{m'}\}$, где $e_{i'} = f(e_i)$, образует базис $\mathbb{R}^m$.

**б)** Пусть линейное преобразование $f$ переводит базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в базис. Докажите, что оно биективно.

**Задача 3.** Пусть $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — произвольное линейное отображение. Запишем координаты вектора $e_{i'} = f(e_i)$ в столбец: $\begin{pmatrix} c^1_{\mathbf{i}} \\ c^2_{\mathbf{i}} \\ \vdots \\ c^m_{\mathbf{i}} \end{pmatrix}$, а из этих столбцов составим квадратную таблицу $C := \begin{pmatrix} C^1_{\mathbf{1}} & C^1_2 & \cdots & C^1_{\mathbf{m}} \\ C^2_{\mathbf{1}} & C^2_2 & \cdots & C^2_{\mathbf{m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C^m_{\mathbf{1}} & C^m_2 & \cdots & C^m_{\mathbf{m}} \end{pmatrix}$

Эта таблица называется *матрицей преобразования* $f$ в базисе $\{e_i\}$.

**Задача 4.** Выразите вектор $e_{i'}$ через базисные векторы $\{e_\alpha\}$ и элементы матрицы $\left\{C^p_{\mathbf{q}}\right\}$ в короткой нотации.

**Задача 5.** **а)** Найдите координаты вектора $f(w)$ в базисе $\{e_{1'}, \ldots, e_{m'}\}$.

**б)** Найдите координаты вектора $f(w)$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_m\}$.

**в)** Придумайте привило умножения матрицы $C$ на вектор-столбец координат вектора $w$ так, чтобы работало правило $f(w) = C \cdot w$.

**Задача 6.** Вычислите: **а)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$; **б)** $\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; Что это за линейное преобразование?

**в)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$; **г)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; **д)** $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$.

**Задача 7.** Пусть $f$ и $g$ — два биективных линейных отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, а $C$ и $D$ — матрицы преобразований $f$ и $g$ в базисе $\{e_i\}$ соответственно.

**а)** Найдите координаты $g(f(e_1))$ в базисе $\{e_i\}$. **б)** Найдите координаты $g(f(w))$ в базисе $\{e_i\}$.

**в)** Придумайте правило умножения матриц так, чтобы для каждого вектора $w$

$$g(f(w)) = (D \cdot C) \cdot w.$$

**Задача 8.** Придумайте две матрицы $C$ и $D$ такие, что: **а)** $CD = D$; **б)** $CD = DC$; **в)** $CD \neq DC$.

**Задача 9.** Постройте биекцию между множеством всех линейных отображений (операторов) $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ и множеством матриц размера $m$ на $m$.

**Задача 10.** **а)** Найдите такую матрицу $E$, что для любой матрицы $C$ верно: $EC = CE = C$.

**б)** Докажите, что такая матрица единственна.

**в)** Пусть $C$ — матрица биективного линейного оператора. Докажите, что найдётся матрица $D$ такая, что $CD = DC = E$.

**г)** Докажите, что множество матриц биективных линейных операторов образуют группу относительно операции умножения.

**Задача 11.** Придумайте, как описать аффинные преобразования с помощью матриц, векторов, их сложения и умножения.

| 1 | 2<br>а | 2<br>б | 3 | 4 | 5<br>а | 5<br>б | 5<br>в | 6<br>а | 6<br>б | 6<br>в | 6<br>г | 6<br>д | 7<br>а | 7<br>б | 7<br>в | 8<br>а | 8<br>б | 8<br>в | 9 | 10<br>а | 10<br>б | 10<br>в | 10<br>г | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Напоминание**. Мы уже выяснили две основных вещи. Преобразование координат между двумя инерциальными системами отсчёта должно быть аффинно. Аффинное преобразование $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ может быть записано в координатах виде $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{w_0}$, где $A$ — матрица линейного преобразования, а $\vec{w_0}$ — некоторый вектор.

**Секунда и метр**. Оказывается, что время и расстояния можно точно определить независимо от системы счисления. Так секунда есть время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133, а метр равен расстоянию, которое проходит свет в вакууме за промежуток времени, равный 1/299 792 458 секунды. Конечно, мы требуем, чтобы метр и секунда во всех системах отсчёта совпадали.

**Преобразования Галилея**. В классической теории мы не властны над временем. Это означает, что если $f$ — преобразование координат между инерциальными системами отсчёта в классической теории (преобразование *Галилея),* то $f(x, y, z, t) = (*, *, *, t + t_0)$.

**Задача 1.** (*одномерный классический мир*) Будем рассматривать одномерный мир: одна координата в пространстве и одна во времени. **а)** Докажите, преобразование имеет вид $f\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$; **б)** Покажите, что число $a$ равно либо 1, либо $-1$; **в)** За что «отвечают» каждое из чисел $a$, $b$, $x_0$ и $t_0$?

**Задача 2.** **а)** На обычной плоскости заданы два обычных вектора $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$. Докажите, что площадь параллелограмма, натянутого на эти вектора равна $x_1y_2 - x_2y_1$. Это число называется *определителем* матрицы $\left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{smallmatrix}\right)$. Что происходит с определителем, если **б)** переставить строки или столбцы? **в)** умножить строку или столбец на число? **г)** к одной строке прибавить другую, умноженную на число?

**Задача 3.** (*двумерный классический мир*) Будем рассматривать двумерный мир: две координаты в пространстве и одна во времени. **а)** Докажите, преобразование имеет вид $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$;

**б)** За что «отвечают» числа $\alpha$ и $\beta$?

**в)** Из физических соображений покажите, что $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + c^2 = 1$ и $ab + cd = 1$;

**г)** Докажите, что матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ имеет определитель, равный 1 или $-1$;

**д)** Известно, что существует физический опыт, который позволяет вне зависимости от системы отсчёта определить вращение «по часовой стрелке». Покажите, что определитель из предыдущего пункта равен 1;

**е)** Докажите, что матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$. Какой физический смысл числа $\varphi$?

## Гиперболические функции

**Задача 4.** Гиперболические функции — семейство элементарных функций, выражающихся через экспоненту и тесно связанных с тригонометрическими функциями. По определению $\operatorname{ch}\varphi = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$ (*гиперболический синус, чинус),* $\operatorname{sh}\varphi = \dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$ (*шинус),* $\operatorname{th}\varphi = \dfrac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}$, $\operatorname{cth}\varphi = \dfrac{\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{sh}\varphi}$.

**а)** Нарисуйте графики гиперболических функций.

**б)** (*Основное соотношение*) Докажите, что $\operatorname{ch}^2\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi = 1$;

**в)** (*Геометрическое определение*) Как связаны гиперболические функции с гиперболой?

**г)** (*Формулы сложения*) Выразите $\operatorname{sh}(x \pm y)$ и $\operatorname{ch}(x \pm y)$ через $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$, $\operatorname{sh}y$ и $\operatorname{ch}y$;

**д)** Выразите $\operatorname{th}(x \pm y)$ через $\operatorname{th}x$ и $\operatorname{th}y$;

**е)** (*Производные*) Найдите производные гиперболических функций;

**ж)** (*Обратные гиперболические функции*) Обратные гиперболические функции обозначаются через Arsh, Arch, Arth и Arcth, и читаются как *Ареа-синус* (от *area), Ареа-косинус* и т.д.
Выразите $\operatorname{Arsh}x$, $\operatorname{Arch}x$ и $\operatorname{Arth}x$ через ln и $x$.

**з)**** (*Связь с тригонометрическими функциями*) Докажите, что $\operatorname{sh}x = -i\sin(ix)$, $\operatorname{ch}x = \cos(ix)$, $\operatorname{th}x = -i\operatorname{tg}(ix)$.

**и)**** (*Функция Гудермана*) Функция *Гудермана* определяется через интеграл: $\operatorname{gd}(x) = \int\limits_0^x \dfrac{dt}{\operatorname{ch}t}$.
Докажите, что $\operatorname{gd}(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(x))$, $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{gd}(x))$, $\sin(\operatorname{gd}(x)) = \operatorname{th}(x)$.

**Задача 5.** Пусть преобразование координат задаётся матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} \operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi \\ -\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{smallmatrix}\right)$.

**а)** Куда это преобразование переводит прямые $y = 0$, $y = x/2$, $y = x$, $y = 2x$ и $x = 0$?

**б)** Докажите, что преобразование $A$ в области $y \geqslant x$ сохраняет *интервал*— величину $\sqrt{y^2 - x^2}$.

| 1 а | 1 б | 1 в | 2 а | 2 б | 2 в | 2 г | 3 а | 3 б | 3 в | 3 г | 3 д | 3 е | 4 а | 4 б | 4 в | 4 г | 4 д | 4 е | 4 ж | 4 з | 4 и | 5 а | 5 б |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Секунда и метр**. Время и расстояния можно точно определить независимо от системы счисления даже в СТО (см. предыдущий листок). Конечно же, мы требуем, чтобы метр и секунда во всех системах отсчёта были «одинаковыми». Также мы будем требовать, чтобы сохранялось направление течения времени (например, следя за тем, чтобы распад частицы оставался распадом).

Опыты Майкельсона–Морли и Кеннеди–Торндайка показали, что скорость света «почти» не зависит от системы отсчёта. Если быть точнее, то было установлено, что скорости света во всех направлениях в двух системах отсчёта, двигающихся относительно друг друга со скоростью 60 км/с, отличаются не более, чем на 2 м/с. Позднее, постоянство скорости света было проверено множеством различных способов и с куда большей точностью.

Таким образом возникает основной постулат СТО: скорость света постоянна во всех системах отсчёта. Скорость света обозначается через $c$. ($c \approx 299\,792,458$ м/с) Преобразование пространства-времени $\mathbb{R}^4$, сохраняющие 1 метр, 1 секунду и скорость света называются преобразованиями *Лоренца.* Предполагается, что ничто не способно двигаться в пространстве-времени быстрее, чем со скоростью света.

Для удобства будем измерять время в метрах$_в$ (и писать м$_в$). м$_в$— время, за которое свет пролетает один метр. Это удобно потому, что скорость света становится равной 1 м/ м$_в$. Преобразования координат между инерциальными системами отсчёта в СТО называются *преобразованиями Лоренца.*

## Одномерный мир

**Задача 1.** (*Парадокс поезда*) Пусть на поезде, движущемся со скоростью, близкой к скорости света (такой поезд, видимо, стоит ожидать раньше всего в Японии (если где-нибудь ещё не научатся значительно влиять на скорость света)), едут три человека: $A$ в голове, $O$ — в середине и $B$ — в хвосте поезда. На земле около пути стоит четвёртый человек $O'$. В тот самый момент, когда $O$ проезжает мимо $O'$, сигналы ламп от $A$ и $B$ достигают $O$ и $O'$. Покажите, что на вопрос«Кто раньше включил фонарь?» наблюдатели $O$ и $O'$ дадут различные ответы.

**Задача 2.** Найдите все возможные мировые линии света в одномерном мире $\mathbb{R}^2$.

**Задача 3.** Изобразите в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ множество точек: **а)** в которые можно попасть из данной (это множество называется *конусом будущего);* **б)** в которые можно посветить из данной; **в)** из которых можно попасть в данную (*конус прошлого).* Какой физический смысл конуса будущего и прошлого?

**Задача 4.** Преобразования Лоренца будучи аффинным имеют вид $f\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\t_0\end{pmatrix}$.

**а)** Покажите, что $|a+b| = |c+d|$ и $|b-a| = |d-c|$;

**б)** Покажите, что матрица $A = \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ имеет вид либо $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, либо $\left(\begin{smallmatrix}-\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$;

**в)** Покажите, что определитель матрицы $A$ должен быть равен $\pm 1$;

**г)** Покажите, что $\alpha = \operatorname{ch}\varphi$, а $b = \operatorname{sh}\varphi$ для некоторого $\varphi$. Число $\varphi$ называется при этом *параметром скорости* или *быстротой.*

**Задача 5.** Фраза «перейти в систему отсчёта ракеты» означает перейти в такую систему отсчёта, в которой мировая линия ракеты является прямой $(0,t), t \in \mathbb{R}$.

**а)** Преобразование координат для перехода в систему отсчёта ракеты задаётся матрицей $\left(\begin{smallmatrix}\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi\\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{smallmatrix}\right)$. С какой скоростью летит ракета? **б)** Ракета движется в системе отсчёта лаборатории со скоростью $u$. Найдите преобразование, позволяющее перейти в систему отсчёта ракеты, а также преобразование, которое позволяет из системы отсчёта ракеты перейти в систему отсчёта лаборатории.

**Задача 6.** (*Эффект Доплера*) Ракета движется в системе отсчёта лаборатории со скоростью $u$. Каждую секунду в точке с координатой 0 в лаборатории моргает лампочка. С каким интервалом на ракете наблюдаются вспышки?

**Задача 7.** **а)** Докажите, что для любой пары различных событий найдётся ракета, в системе которой события либо одновременны (говорят, что интервал между ними *пространственноподобный),* либо происходят в одной и той же точке пространства (интервал временноподобный), либо принадлежат мировой линии света (интервал *светоподобный).*

**б)** Пускай одно из событий находится в начале координат. Найдите множество точек пространства-времени, для которых интервал пространственно-, временно- и светоподобный.

**Задача 8.** В системе отсчёта лаборатории два события происходят одновременно **а)** в одной и той же точке; **б)** в разных точках. В каких ещё системах отсчёта эти события также будут одновременными? **в)** Докажите, что для любых событий, соединяемых пространственноподобным интервалом, найдётся две ракеты такие, что в системе одной первое событие происходит раньше, а в системе другой — наоборот.

| 1 | 2 | 3 а | 3 б | 3 в | 4 а | 4 б | 4 в | 4 г | 5 а | 5 б | 6 | 7 а | 7 б | 8 а | 8 б | 8 в |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | |

Листок №STO-6 **Сокращение Лоренца и другие парадоксы** 2022.01

Пока мы по-прежнему считаем мир одномерным. Все ракеты в этом листке летят вдоль оси $x$ со скоростью $u$.

**Задача 1.** (*сокращение Лоренца*) **а)** Пусть ракета снабжена метровым стержнем, который наблюдается из лаборатории. Какова его наблюдаемая длина в лаборатории? **б)** В начале и в конце стержня закреплены часы, которые в ракете показывают одинаковое время. Какое время будет наблюдаться в лаборатории?

**Задача 2.** (*замедление времени*) Пусть ракета снабжена настенными часами, которые наблюдаются из лаборатории. С какой скоростью идут эти часы при наблюдении из лаборатории?

**Задача 3.** (*сложение скоростей*) Пусть ракета снабжена табуреткой, двигающейся со скоростью $v$ относительно ракеты. С какой скоростью летит табуретка относительно лаборатории?

**Задача 4.** (*парадокс шеста и сарая*) Возьмём шест длины 10 м и сарай длиной также 10 м. Запустим шест так, чтобы в системе отсчёта сарая из-за лоренцева сокращения он имел длину 2 м. Тогда в некоторый момент он полностью поместится в сарае. С другой стороны, с системе шеста сарай имеет длину 2 м, и шест туда никак не может поместиться. Парадокс.

**Задача 5.** (*бетон и машина времени*) Зальём бетоном сарай так, чтобы оставался только вход. Возьмём шест длиной 20 м и разгоним до сокращения до 2 м. Как только шест влетит в сарай, зальём бетоном вход (у нас на это будет время точно не меньшее $\frac{8\textit{м}}{3\cdot 10^8\textit{м}/\textit{с}}$). В системе шеста вся наша затея выглядит комично. Парадокс.

**Задача 6.** (*непригодность ньютоновской механики для космических полётов*) Как должна зависеть скорость ракеты и параметр скорости от времени, чтобы наблюдатель в ракете всё время испытывал ускорение $g$? Через какое время ракета разгонится до 0,9 скорости света? А что предсказывает Ньютоновская механика?

**Задача 7.** (*парадокс близнецов*) **а)** Близнецы А и Б расстались в тот день, когда им было по 21 году. А двигался от Земли со скоростью 0,96 скорости света в течении 7 лет (своего времени) в одну сторону и столько же обратно. Насколько моложе он будет своего брата Б по возвращении? **б)** Однако в системе отчёта близнеца Б Земля улетала от него со скоростью 0,96, а потом летела к нему со скоростью 0,96. Поэтому по возвращению близнец А должен быть моложе. Парадокс.

## Этот трёхмерный мир.

**Задача 8.** (*Лоренцево сокращение 2*) Придумайте мысленный опыт, подтверждающий, что шест, расположенный перпендикулярно направлению движения, не изменяет своей наблюдаемой длины.

**Задача 9.** (*инвариантный интервал*) Придумайте мысленный опыт, подтверждающий, что во всех системах отсчёта сохраняется число $(\Delta t)^2-(\Delta x)^2-(\Delta y)^2$ (время в м$_\textit{в}$). Это число называется *интервалом* между событиями.

**Задача 10.** (*преобразование углов*) Метровый стержень в ракете прибит под углом $\varphi'$ к оси $x'$. Под каким углом к оси $x$ стержень наблюдается в лаборатории?

**Задача 11.** (*преобразование направлений движения*) Пусть табуретка летит со скоростью $v'$ под углом $\varphi'$ к оси $x'$ внутри ракеты. Под каким углом к оси $x$ наблюдается движение табуретки в лаборатории? Чем эта задача отличается от предыдущей?

**Задача 12.** (*эффект «прожектора»*) **а)** Табуретка из предыдущей задачи на проверку оказалась фотоном, то есть двигается со скоростью света. Под каким углом к оси $x$ распространяется этот фотон в лаборатории?
**б)** Частица, двигающая с большой скоростью, испускает свет в переднюю полусферу с своей системе отсчёта. Покажите, что в системе лаборатории свет сконцентрируется в узкий конус.

**Задача 13.** (*сложение скоростей 2*) Фотон из предыдущей задачи на проверку оказался табуретом, летящим в ракете вдоль оси $y'$ со скоростью $v'$. С какой скоростью он движется в системе лаборатории?

| 1 а | 1 б | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 а | 7 б | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 а | 12 б | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | |