Листок №ALG-1

Расширения полей I: Алгебраические числа

2022.01

Задача 1. Приведите пример ненулевого многочлена с рациональным коэффициентами, корнем которого является **а)** $1+\sqrt[3]{2}$; **б)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **в)*** $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$; **г)*** $(1+\sqrt[3]{2})\sqrt{3}$.

Определение 1. Действительное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами, и *трансцендентным* в противном случае.

Задача 2*. **а)** Трансцендентные числа существуют.
б)* Приведите конкретный пример трансцендентного числа.

Задача 3*. Алгебраические числа образуют поле.

Определение 2. *Минимальным многочленом* алгебраического числа α называется неприводимый многочлен $m_\alpha \in \mathbb{Q}[x]$, такой что $m_\alpha(\alpha)=0$. *Степенью* алгебраического числа называется степень его минимального многочлена.

Задача 4. **а)** Любое алгебраическое число степени 2 может быть представлено в виде $a \pm \sqrt{d}$, где числа a и d рациональные. (Верно ли аналогичное утверждение для алгебраических чисел степени 4?)
б) Если $\alpha = a+\sqrt{d}$ (числа a и d рациональные), то $m_\alpha = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} = a-\sqrt{d}$.

Задача 5. **а)** $\{P \in \mathbb{Q}[x] : P(\alpha)=0\} = (m_\alpha)$.
б) Минимальный многочлен алгебраического числа α существует и единственен (с точностью до умножения на ненулевую константу).

Задача 6. Если α — алгебраическое действительное число, то внутри действительных чисел есть подполе $\mathbb{Q}(\alpha)$, изоморфное полю $\mathbb{Q}[x]/(m_\alpha)$.

Определение 3. Пусть L поле, K его подполе («L/K[1] — расширение полей»). Говорят, что элемент поля L *алгебраичен* над K, если он является корнем ненулевого многочлена с коэффициентами в K. (Таким образом, выше шла речь об алгебраических элементах в расширении $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.)

Расширение L/K называется *алгебраическим*, если любой его элемент алгебраичен.

Задача 7. Любое конечное поле характеристики p является алгебраическим расширением поля $\mathbb{F}_p$.

Задача 8. Любое расширение конечных полей получается последовательностью расширений вида $K \subset L \cong K[x]/(P)$.

Задача 9. Если конечное поле имеет характеристику p, то количество элементов в нем является степенью числа p.

Задача 10. Для любого поля K и любого многочлена P над этим полем найдется расширение, в котором многочлен P **а)** имеет корень; **б)** раскладывается на линейные множители.

Задача 11. **а)** Если L — поле из $q=p^n$ элементов, то любой его элемент является корнем многочлена $x^q - x$.
б) Для любого q вида p^n существует поле из q элементов.
в)* Единственно ли такое поле?

1 а	1 б	1 в	1 г	2 а	2 б	3	4 а	4 б	5 а	5 б	6	7	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	11 в

[1]Читается «L над K», не путать с фактором.

Определение 1. Пусть L/K — расширение полей (т. е. K — подполе поля L). Тогда L можно рассматривать как векторное пространство над K. Размерность $[L : K]$ этого пространства называется *степенью расширения*. Расширение, имеющее конечную степень, называется *конечным*.

Задача 1. Чему равна **а)** степень $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$; **б)** степень $[\mathbb{F}_4 : \mathbb{F}_2]$?

Задача 2. **а)** Если поле из p элементов вложено в поле из q элементов, то число q — степень числа p.
б) Количество элементов конечного поля — степень простого числа.

Задача 3. **а)** Расширение $K(\sqrt{d})/K$ имеет степень 2.
б) Если P — неприводимый многочлен степени n, то $[K[x]/(P) : K] = n$.

Задача 4. **а)** Если есть башня из трех полей $F \subset K \subset L$, то $[L : F] = [L : K] \cdot [K : F]$.
б) Если L/F — расширение полей степени n, то степень любого промежуточного расширения K/F делит число n.

Задача 5. Найдите **а)** $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$; **б)** $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$; **в)** $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.

Определение 2. Пусть на плоскости введена система координат. Будем сопоставлять каждому набору $\mathcal{K}$ точек подполе K действительных чисел, порожденное всеми координатами этих точек.

Задача 6. Коэффициенты уравнения
а) прямой, проходящей через пару точек из $\mathcal{K}$;
б) окружности с центром в точке из $\mathcal{K}$ и проходящей через точку из $\mathcal{K}$
лежат в K.

Задача 7. Пусть $\mathcal{L}$ получается из $\mathcal{K}$ добавлением точки пересечения
а) двух прямых; **б)** прямой и окружности; **в)** двух окружностей с коэффициентами из K.
Чему может равняться степень расширения L/K?

Задача 8. Если число α можно получить из элементов поля $K \subset \mathbb{R}$ при помощи циркуля и линейки, то $[K(\alpha) : K]$ — степень двойки.

Задача 9. Циркулем и линейкой нельзя построить отрезок в $\sqrt[3]{2}$ длиннее данного (то есть задача об удвоении куба не имеет решения).

Задача 10. Найдите минимальный многочлен числа **а)** $\cos\frac{\pi}{9}$; **б)** $\cos\frac{\pi}{5}$; **в)*** $\cos\frac{\pi}{7}$.
Указание. Используйте равенства вида $\cos n\varphi = \cos m\varphi$.

Задача 11. Задача о трисекции угла не имеет решения.

Задача 12. **а)** Конечное расширение алгебраично[1]. (Верно ли обратное?)
б) Если расширение порождено (как поле) конечным набором алгебраических элементов, то оно конечно и его степень не превосходит произведения степеней этих элементов.

Задача 13. Если L/K — произвольное расширение, то множество его элементов, алгебраичных над K, образует поле (в частности, алгебраические числа образуют поле).

1 а	1 б	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	7 а	7 б	7 в	8	9	10 а	10 б	10 в	11	12 а	12 б	13

[1] Определение можно найти в листке «Расширения полей I».