Степенные ряды

Определение 1. *Формальным степенным рядом* от переменной t называется бесконечное выражение вида $A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$, где $a_0, a_1, \dots$ — числовая последовательность (*коэффициенты* ряда). Два ряда считаются равными, если равны их соответствующие коэффициенты. Слагаемые с нулевыми коэффициентами мы будем, как правило, пропускать. Например, многочлен — это ряд с конечным числом ненулевых коэффициентов.
Сопоставление рядам F, G нового ряда H называется *формальной алгебраической операцией,* если каждый коэффициент ряда H вычисляется конечным числом арифметических действий над конечным числом коэффициентов рядов F, G. Например, сложение и умножение рядов определяются так же, как для многочленов и *являются формальными операциями,* а «вычисление значения ряда при данном числовом значении t» *не является формальной операцией* (и потому здесь не определяется).

Задача 1. Проверьте, что сложение и умножение рядов являются формальными операциями.

Задача 2. **а)** Пусть $F(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$, $G(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$. Найдите $F + G$ и $F \cdot G$. **б)** Пусть $F = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k$, $G = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k$. Найдите $F \cdot G$ и F^2.

Задача 3. (*Замена переменной*) Является ли формальной алгебраической операцией подстановка в ряд вместо переменной t произвольного ряда с нулевым свободным членом?

Задача 4. Найдите (если это возможно) такой ряд F, что **а)** $(1 - t) \cdot F = 1$; **б)** $(2 - t) \cdot F = 1$; **в)** $(t^2 + t^3 + t^4 + \dots) \cdot F = t^4 - t^6 + t^8 - \dots$; **г)** $(t^3 + t^4 + t^5 + \dots) \cdot F = t^2 - t^4 + t^6 - \dots$.

Задача 5. Ряд $a(t)$ называется *обратимым,* если существует такой ряд $a^{-1}(t)$, что $a(t)a^{-1}(t) = 1$. Докажите, что ряд $a(t)$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$, причём $a^{-1}(t)$ единственен, и его отыскание есть формальная операция.

Задача 6. При каких условиях на числа a и b ряд $\dfrac{1}{(a-t)(b-t)}$ можно записать в виде $\dfrac{c}{(a-t)} + \dfrac{d}{(b-t)}$ (подобрав подходящие числа c и d)?

Задача 7. Вычислите все коэффициенты для ряда, обратного к
а) $(1 - t)(2 - t)$; **б)** $(1 - t)^2$; **в)** $(1 - t)^m$; **г)** $(t - 1)(t + 2)(t - 3)$; **д)** $t^2 + t - 1$.

Задача 8. Сформулируйте условия, при которых ненулевой степенной ряд F можно разделить на ненулевой степенной ряд G (иначе говоря, уравнение $G \cdot X = F$ разрешимо относительно неизвестного степенного ряда X). Всегда ли результат деления определен однозначно?

Задача 9. При каких условиях на степенной ряд F разрешимо уравнение $X^2 = F$ относительно неизвестного степенного ряда X?

1	2 а	2 б	3	4 а	4 б	4 в	4 г	5	6	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	8	9

Производящие функции

Определение 2. Пусть $(a_k) = (a_0, a_1, \dots)$ — числовая последовательность, а t — формальная переменная. Степенной ряд $\sum a_k t^k$ называется *производящей функцией* последовательности (a_k).

Задача 10. Пусть $F(t)$ — производящая функция последовательности (a_k). Для какой последовательности производящей функцией будет степенной ряд **а)** $tF(t)$; **б)** $t^2F(t)$; **в)** $(1+t)F(t)$?

Задача 11. **а)** Напишите, пользуясь рекуррентным соотношением $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$ и начальными условиями $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, уравнение для производящей функции чисел Фибоначчи и решите его. **б)** Найдите формулу для n-го числа Фибоначчи.

Задача 12. Найдите явную формулу для последовательности (g_n), если $g_0 = g_1 = 1$ и при $n \geqslant 2$ **а)** $g_n = 5g_{n-1} - 6g_{n-2}$; **б)** $g_n = 6g_{n-1} - 9g_{n-2}$; **в)** $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + (-1)^n$; **г)** $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \ldots + ng_0$.

Задача 13. Сколькими способами можно замостить прямоугольник $3 \times n$ плашками размера 2×1?

Определение 3. Для произвольного числа α и натурального числа k *биномиальный коэффициент* C_α^k определяется формулой
$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$
Для каждого α рассмотрим следующий степенной ряд:
$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k t^k.$$
(Для натуральных α это уже знакомая вам формула бинома Ньютона, а для остальных α правая часть равенства является определением левой.)

Задача 14. **а)** Ряд $(1+t)^{-1}$ определяется теперь двумя способами: как обратный к ряду $1+t$ и по биномиальной формуле. Согласуются ли эти определения?
б) Докажите, что для любого натурального числа n имеет место равенство $(1+t)^{-n}(1+t)^n = 1$.

Задача 15. Рассмотрим два многочлена от двух переменных: $G(x,y) = C_{x+y}^n$ и $F(x,y) = \sum\limits_{j=0}^{n} C_x^j \cdot C_y^{n-j}$.

а) Докажите, что $F(x,y) = G(x,y)$ для натуральных $x > n$, $y > n$.
б) Используя предыдущий пункт, выведите равенство $(1+t)^{\alpha+\beta} = (1+t)^\alpha \cdot (1+t)^\beta$.
в) Пусть $\alpha = \dfrac{m}{n}$ — рациональное число. Докажите, что $(1+t)^m = \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j t^j\right)^n$.

Задача 16. Пусть $c_0 = 1$, а при $n \geqslant 1$ пусть c_n — это число правильных расстановок n открывающих и n закрывающих скобок (n-е число Каталана).

а) Докажите, что c_n удовлетворяет рекуррентной формуле $c_n = c_0 \cdot c_{n-1} + c_1 \cdot c_{n-2} + \ldots + c_{n-1} \cdot c_0$.
б) Докажите, что производящая функция $C(t)$ чисел Каталана удовлетворяет уравнению
$$t \cdot C^2(t) - C(t) + 1 = 0.$$
в) Решив квадратное уравнение, и использовав формулу для $(1+t)^{1/2}$ покажите, что
$$c_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot 4^{n+1}}{2(n+1)!}.$$
г) Докажите, что $c_n = \dfrac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

10	10	10	11	11	12	12	12	12	13	14	14	15	15	15	16	16	16	16
а	б	в	а	б	а	б	в	г		а	б	а	б	в	а	б	в	г