Листок №NT-1 2022.01

Приближение действительных чисел рациональными: Цепные дроби

Задача 1. Охотник стоит в точке плоскости с координатой $(0,0)$, а в остальных точках с целыми координатами сидят одинаковые зайцы. Докажите, что в каком бы направлении ни выстрелил охотник, он обязательно попадет в зайца.

Задача 2. Найдите $\sup\bigl(\sin x + \sin\sqrt{2}x\bigr)$.

Задача 3. Десятичная запись числа 2^n может начинаться с любой последовательности цифр.

Определение 1. Будем говорить, что дробь $\dfrac{p}{q}$ приближает число α с *коэффициентом качества* δ, если

$$0 < \bigl|\alpha - \frac{p}{q}\bigr| \leqslant \frac{\delta}{q}.$$

Задача 4. Число α может быть сколь угодно качественно приближено дробью тогда и только тогда, когда оно иррационально.

Задача 5. Докажите, что число $e = \sum \dfrac{1}{i!}$ иррационально.

Определение 2. Число α будем называть *k-приближаемым*, если для любого $\delta > 0$ существует такая дробь $\dfrac{p}{q}$, что

$$0 < \bigl|\alpha - \frac{p}{q}\bigr| \leqslant \frac{\delta}{q^k}.$$

Если же такой дроби для некоторого $\delta > 0$ не существует, будем называть число *k-неприближаемым.*

Задача 6. **а)** Число $\sqrt{2}$ является 2-неприближаемым.

б) Алгебраическое число степени k является k-неприближаемым *(теорема Лиувилля).*

Задача 7. Число $\sum \dfrac{1}{10^{i!}}$ трансцендентно.

Задача 8. Любое иррациональное число обладает бесконечным число 2-приближений с коэффициентом 1 (в частности, является $(2-\varepsilon)$-приближаемым).

Задача 9*. Множество всех $(2+\varepsilon)$-приближаемых чисел *имеет меру ноль*[1].

Определение 3. Пусть a_0 — целое число, a_i — натуральные числа. Выражение вида

$$[a_0; a_1; \ldots] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}$$

называется *цепной дробью*; число $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; \ldots; a_n]$ называется n-й *подходящей дробью* или *конвергентой.*

Задача 10. **а)** Вычислите $[3;7;15;1]$ (с точностью до 7 знаков после запятой) и $[1;1;\ldots]$;

б) разложите в цепную дробь числа $10/7$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

Задача 11. Для любой бесконечной цепной дроби $[a_0; \ldots]$ последовательность конвергент сходится к некоторому действительному числу.

Задача 12. **а)** Ненулевое рациональное число может разложено в цепную дробь (“алгоритм Евклида”), причем ровно двумя способами: вида $[a_0; \ldots; a_n]$ и $[a_0; \ldots; a_n - 1; 1]$.

б) Иррациональное число может разложено в цепную дробь ровно одним способом.

Задача 13. **а)** $[a_0; a_1; \ldots; a_n; z]$ — дробно-линейная функция от z.

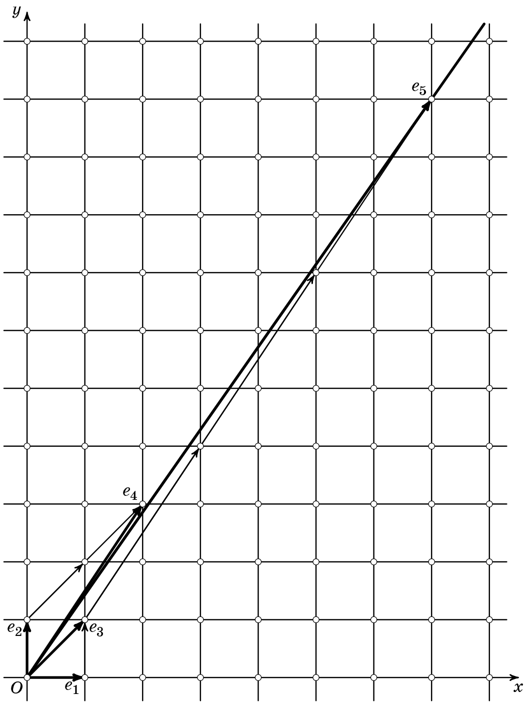
б)* Функция $\frac{az+b}{cz+d}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$ представима в виде $[a_0; \ldots; a_n; z] \iff \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1.$

1	2	3	4	5	6 а	6 б	7	8	9	10 а	10 б	11	12 а	12 б	13 а	13 б

[1] Т. е. для каждого положительного δ существует покрытие этого множества не более чем счетным числом интервалов, сумма длин которых не превосходит δ.

Задача 14. Если разложение иррационального числа в цепную дробь периодично, то это квадратичная иррациональность[2].

Задача 15. Пусть α — положительное число. Рассмотрим последовательность векторов (e_i): $e_1 = (1\ 0)$, $e_2 = (0\ 1)$; $e_{i+1} = e_{i-1} + a_{i-2}e_i$, где в качестве a_{i-2} берется наибольше натуральное число, при котором e_{i+1} остается с той же стороны от прямой $y = \alpha x$, что и e_{i-1} ("алгоритм вытягивания носов").



а) Пара векторов (e_i, e_{i+1}) — базис целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$.
б) Вектора (e_{2k-1}) и (e_{2k}) являются вершинами выпуклой оболочки части $\mathbb{Z}^2$ под и над прямой $y = \alpha x$ соответственно.
в) $\alpha = [a_0; a_1; \ldots]$, $e_{n+2} = (q_n\ p_n)$.
г) n-я подходящая дробь является наилучшим (в смысле коэффициента качества приближения $q|\alpha - \frac{p}{q}|$) приближением к α среди дробей со знаменателем, не превосходящим q_n.

Задача 16. **а)** $\det \begin{pmatrix} q_n & q_{n+1} \\ p_n & p_{n+1} \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}$.

б) У любого иррационального числа α бесконечно много приближений, таких что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$.

Задача 17*. У любого иррационального числа α бесконечно много приближений, таких что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, причем константу $\sqrt{5}$ нельзя улучшить ("теорема Гурвица–Бореля").

Задача 18. Числитель и знаменатель подходящей дроби для $[1; 1; \ldots; 1]$ — два последовательных числа Фибоначчи (в частности, $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = [1; 1; \ldots]$).

Задача 19*. Последовательность (a_i) удовлетворяет некоторой линейной рекурренте тогда и только тогда, когда ее производящая функция $a_0 + a_1 t + a^2 t^2 + \ldots$ рациональна.

Определение 4. *Пути Дика* — это пути из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящие из шагов $(1, 1)$ и $(1, -1)$ и не опускающиеся ниже прямой $y = 0$. Количество таких путей — это n-е число Каталана.

Пути Моцкина – это пути из точки $(0, 0)$ в точку $(n, 0)$, состоящие из шагов $(1, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, -1)$ и не опускающиеся ниже прямой $y = 0$. Количество таких путей называется n-м *числом Моцкина.*

Задача 20. **а)** Производящая функция для чисел Каталана равна (обобщенной) цепной дроби

$$\frac{1}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{1 - \ldots}}}.$$

б) Ее k-я конвергента дает производящую функцию для путей Дика, не поднимающихся выше прямой $y = k$...

в) ...и она же равна производящей функции для плоских корневых деревьев[3], имеющих высоту не более k.

Задача 21. **а)** Производящая функция для чисел Моцкина равна (обобщенной) цепной дроби

$$\frac{1}{1 - t - \frac{t^2}{1 - t - \frac{t^2}{1 - \ldots}}}.$$

б) Ее k-я конвергента дает производящую функцию для путей Моцкина, не поднимающихся выше прямой $y = k$.

(Упражнение: придумайте несколько комбинаторных интерпретаций чисел Моцкина, аналогичных вашим любимым интерпретациям чисел Каталана; попробуйте описать подмножества этих объектов, соответствующие конвергентам цепной дроби.)

14	15 а	15 б	15 в	15 г	16 а	16 б	17	18	19	20 а	20 б	20 в	21 а	21 б

[2]Как мы увидим позже, верно и обратное ("теорема Лагранжа").
[3]Ср. с задачей 7 листка «Числа Каталана».

Листок №NT-2 Приближение действительных чисел рациональными II: Уравнение Пелля 2022.01

Определение 1. Пусть d — целое число, свободное от квадратов. *Нормой* элемента $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ называется целое число $N(z) = x^2 - dy^2$.

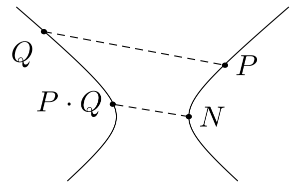
Задача 1. Норма мультипликативна: $N(zw) = N(z)N(w)$.

Определение 2. Пусть d — целое число, свободное от квадратов. Диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ называется *уравнением Пелля.*

Решением уравнения Пелля мы будем называть как пару целых чисел $(x\ y)$, так и соответствующий элемент единичной нормы $x + y\sqrt{d}$ кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Задача 2. **а)** Если уравнение Пелля имеет нетривиальное (отличное от $(\pm 1\ 0)$) решение, то оно имеет бесконечно много решений.
б) Если уравнение Пелля имеет нетривиальное решение, то группа его положительных решений изоморфна $\mathbb{Z}$.

Задача 3*. Пусть $N = (1\ 0)$; P и Q — пара точек на гиперболе $x^2 - dy^2 = 1$. Проведем через точку N секущую, параллельную хорде PQ.
а) Эта секущая пересекает гиперболу еще ровно в одной точке[1].
б) Построенная точка соответствует произведению элементов единичной нормы, соответствующих точкам P и Q.



Задача 4. Решите уравнение **а)** $x^2 - 3y^2 = -2$; **б)** $x^2 - 3y^2 = -1$.

Задача 5. Найдите формулу для k-го треугольного числа, являющегося точным квадратом.

Определение 3. Значением *квадратичной формы* с (симметричной) матрицей Q на векторе v называется число (v, Qv). Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ задает квадратичную форму $ax^2 + bxy + cy^2$.

Задача 6*. Отображение Q квадратично тогда и только тогда, когда отображение $(u, v) \mapsto Q(u+v) - Q(u) - Q(v)$ билинейно[2].

Задача 7. Как меняется квадратичная форма при замене координат с матрицей C?

Задача 8. **а)** Существует лишь конечное число целочисленных квадратичных форм с $ac < 0$ и фиксированным дискриминантом $-d < 0$.
б) Целочисленная квадратичная форма $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$ имеет нетривиальный автоморфизм (т. е. существует обратимая целочисленная замена координат, при которой эта форма не меняется).

Указание. Рассмотрите алгоритм вытягивания носов для $\sqrt{d}$.

в) Уравнение Пелля имеет нетривиальное решение.
г) Разложение числа $\sqrt{d}$ в цепную дробь периодично.
д)* Разложение иррационального числа в цепную дробь периодично тогда и только тогда, когда это квадратичная иррациональность ("теорема Лагранжа").

Задача 9. У числа $\sqrt{d}$ бесконечно много приближений, таких что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(2\sqrt{d} - \varepsilon)q^2}$.

Задача 10*. **а)** Период цепной дроби числа $\sqrt{d}$ без последнего числа — палиндром.
б) Уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение тогда и только тогда, когда период цепной дроби числа $\sqrt{d}$ имеет нечетную длину.

1	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6	7	8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	9	10 а	10 б

[1] Если отрезок PQ оказался вертикальным, то надо считать, что вторая точка совпадает с N (в этом случае наша "секущая" как раз касается гиперболы).

[2] Это можно считать определением квадратичного отображения — а доказывать, соответственно, что любое квадратичное отображение задается некоторой симметричной матрицей.

Листок №NT-3 **Распределение простых чисел** 2022.01

В этом листке мы будем часто использовать следующие обозначения:
p_n — n-е простое число ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$); P — множество всех простых чисел ($P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$);
$\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих $x \in \mathbb{N}$; $\log x$ — двоичный логарифм x (т. е. $\log_2 x$).

История определения асимптотики функции $\pi(x)$ такова:

1. Евклид: $\pi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$;
2. Эйлер: $\dfrac{\pi(x)}{x} \to 0$ при $x \to \infty$;
3. Чебышёв (1848 г.): Если предел $\dfrac{\pi(x)\ln(x)}{x}$ существует, то он равен 1;
4. Адамар и Валле-Пуссен (1896 г.): $\dfrac{\pi(x)\ln(x)}{x} \to 1$ при $x \to \infty$.

Задача 1. Докажите, что при $n \in \mathbb{N}$ **а)** $p_{n+1} \leqslant p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$; **б)** $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.

Задача 2. Докажите, что $\pi(x) \geqslant \log\log x$ при $x \geqslant 2$.

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим функцию $F^n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом: F^n есть количество натуральных чисел, не превосходящих x, все простые делители которых принадлежат множеству $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Задача 3. **а)** Найдите $F^3(57)$; **б)** Найдите $F^n(x)$ при $x < p_{n+1}$.

Задача 4. Докажите, что $F^n(x) \leqslant 2^n \cdot \sqrt{x}$.

Задача 5. Докажите следующие утверждения:
а) простых чисел бесконечно много; **б)** $\pi(x) \geqslant 0{,}5 \cdot \log x$; **в)*** ряд $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \dots$ расходится.

* * *

Задача 6. Докажите следующие утверждения:
а) $\prod\limits_{\substack{n<p\leqslant 2n,\\ p\in P}} p < C_{2n}^n < 2^{2n}$; **б)** $\prod\limits_{\substack{n+1<p\leqslant 2n+1,\\ p\in P}} p < C_{2n+1}^n < 2^{2n}$; **в)** $\prod\limits_{\substack{p\leqslant x,\\ p\in P}} p < 2^{2x}$.

Задача 7. Докажите следующие утверждения:
а) $(\pi(x) - \pi([\sqrt{x}])) \cdot \log\sqrt{x} < 2x$;
б) существует такое $c_1 \in \mathbb{R}$, что $\pi(x) \leqslant c_1 \cdot \dfrac{x}{\log x}$ при $x \geqslant 2$.

Задача 8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, p — простое число. Докажите, что p входит в каноническое разложение числа $n!$ в степени $\sum\limits_{i=1}^{m}[n/p^i]$, где $m = [\log_p n]$.

Задача 9. Пусть p — простое число, α_p — степень, в которой p входит в каноническое разложение числа C_{2n}^n. Докажите, что $\alpha_p \leqslant [\log_p 2n]$.

Задача 10. Докажите следующие утверждения: **а)** $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant C_{2n}^n$; **б)** $C_{2n}^n \leqslant \prod\limits_{\substack{p\leqslant 2n,\\ p\in P}} p^{[\log_p 2n]}$.

Задача 11. Докажите следующие утверждения:
а) $2n - \log(2n+1) \leqslant \pi(2n) \cdot \log 2n$;
б) существует такое положительное $c_2 \in \mathbb{R}$, что $\pi(x) \geqslant c_2 \cdot \dfrac{x}{\log x}$ при $x \geqslant 2$.

Задача 12*. Докажите, что для всякого достаточно большого $x \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства
$$0{,}9 \cdot \frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant 4{,}1 \cdot \frac{x}{\log x}.$$

Задача 13*. Докажите, что при всяком достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ между n и $5n$ обязательно найдется простое число.

Задача 14. В обозначениях задачи 9 докажите следующие утверждения:
а) $\alpha_p \leqslant 1$ при $p > \sqrt{2n}$; **б)** $\alpha_p = 0$ при $2n/3 < p \leqslant n$.

Задача 15*. (*Постулат Бертрана*) Докажите, что при всяком достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ между n и $2n$ обязательно найдется простое число.

1 а	1 б	2	3 а	3 б	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12	13	14 а	14 б	15