Листок №ODE-1 Решение некоторых дифференциальных уравнений 2022.01

Определение 1. (*Дифференциальное уравнение **k**-того порядка*) на неизвестную функцию $y = y(x)$ переменной x — это соотношение вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}) = 0$, в которое входит x, y и первые k производных $y', y'', \dots, y^{(k)}$ от y по x. Его *решением* называется всякая функция $y = f(x)$, при подстановке которой в F вместо y получается тождественно нулевая функция от x.

Задача 1. Пусть $c = \text{const}$, дифференцируемые функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ являются решениями уравнения $y' = cy$ на некотором интервале и $g(x) \neq 0$ на этом интервале. Чему может быть равно отношение $f(x)/g(x)$?

Задача 2. Найдите все решения дифференциального уравнения $y' = cy$ на любом интервале.

Задача 3. Найдите все функции $(0, 1) \to^f \mathbb{R}$, такие что $f' = -2f$ всюду на $(0, 1)$ и $f(1/2) = 1$.

Задача 4. Пусть на некотором интервале ненулевая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению $y' - cy = 0$, а функция $z = z(x)$ — уравнению $z' - cz = h(x)$, где $c = \text{const}$, а $h(x)$ — данная функция. Выразите z/y через c и h и найдите все решения обоих уравнений.

Задача 5. Найдите все решения уравнений: **а)** $y' - 2y = x$ **б)** $y' + y = e^{2x}$ **в)** $y' + 3y = \cos(2x)$

Задача 6°. Пусть $l_1, l_2, \dots, l_k$ — это все корни многочлена $l^k + a_{k-1}l^{k-1} + \dots + a_1 l + a_0$. Верно ли, что $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \left(\frac{d}{dx} - l_1\right)\left(\frac{d}{dx} - l_2\right)\cdots\left(\frac{d}{dx} - l_k\right) y$?

Задача 7. Найдите все решения уравнений: **а)** $y'' = y$ **б)** $y'' - y' = 2y$ **в)** $y'' + y = 2y'$.

Задача 8. Выделите в предыдущей задаче те решения, которые удовлетворяют условиям:
а) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ **б)** $y(-1) = y(1) = 1$

Определение 2. (*Комплекснозначные функции*) Любая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суть вещественнозначные функции, называемые *вещественной* и *мнимой* частями f. Положим, по определению, $f' = u' + iv'$ и $\int f\,dx = \int u\,dx + i\int v\,dx$.

Задача 9. Найдите вещественную и мнимую части функций $z = e^{(2+3i)x}$ и $z = e^{(2-3i)x}$.

Задача 10. Докажите, что комплекснозначная функция тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению вида $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ с постоянными $a_\nu \in \mathbb{R}$, когда её вещественная и мнимая части удовлетворяют этому уравнению.

Задача 11. Найдите все комплекснозначные функции $z = z(x)$, удовлетворяющие уравнениям (константа $l \in \mathbb{C}$ и комплекснозначная функция $h(x)$ заданы): **а)** $z' - lz = 0$ **б)** $z' - lz = h(x)$

Задача 12. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' = -y$.

Задача 13. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' = -2y$, удовлетворяющие условиям: **а)** $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ **б)** $y(0) = 1$, $y(\pi) = 0$.

Задача 14*. Найдите все вещественные решения дифференциального уравнения $y'' + y = e^{4x}$ с $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

Задача 15. (*разделённые переменные*) Докажите, что дифференцируемая функция y тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению $h(y)y' = g(x)$ с заданными непрерывными функциями $h(y)$, $g(x)$, когда при некотором постоянном c она удовлетворяет обычному (не дифференциальному) уравнению $H(y) = G(x) + c$, в котором H и G суть какие-либо первообразные от h и g.

Задача 16. Найдите все решения дифференциальных уравнений:
а) $(x + 1)y' = xy$ **б)** $y' = y\sin x$ **в)** $yy' + x = 1$

Задача 17. Найдите все решения дифференциального уравнения $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$ с $y(0) = -1$.

1	2	3	4	5 а	5 б	5 в	6	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	9	10	11 а	11 б	12	13 а	13 б	14	15	16 а	16 б	16 в	17

Определение 1. (*Постановка задачи.*) На плоскости XOY заданы: прямоугольник

$$\Pi = \{\, (x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b\,,\ c \leqslant y \leqslant d \,\}\ ,$$

точка (x_0, y_0), лежащая строго внутри него, и дифференциальное уравнение $y' = F(x,y)$, правая часть которого $\Pi \to^F \mathbb{R}$ является непрерывной функцией на Π. Мы докажем, что существует ε-окрестность U_ε точки x_0 и дифференцируемая функция $U_\varepsilon \to^f [c,d]$, такие что $f'(x) = F(x, f(x)) \quad \forall\, x \in U_\varepsilon$ и $f(x_0) = y_0$.

Задача 1. Зададимся некоторой ε-окрестностью U_ε точки x_0 и рассмотрим следующие два множества дифференцируемых функций $U_\varepsilon \to^\varphi [c,d]$, заданных на этой окрестности:

$$\mathcal{F}^{\uparrow} \overset{\text{def}}{=} \{\, \varphi \mid\ \forall\, x \in U_\varepsilon\ \ \varphi'(x) > F(x, \varphi(x)) \,\}$$

$$\mathcal{F}_{\downarrow} \overset{\text{def}}{=} \{\, \varphi \mid\ \forall\, x \in U_\varepsilon\ \ \varphi'(x) < F(x, \varphi(x)) \,\}$$

Докажите, что $\exists\ \varepsilon$: оба множества $\mathcal{F}^{\uparrow}$, $\mathcal{F}_{\downarrow}$ непусты, и справа от x_0 график любой функции из $\mathcal{F}^{\uparrow}$ лежит выше графика любой функции из $\mathcal{F}_{\downarrow}$, а слева — наоборот.

Задача 2. Определим функцию $f(x)$ справа от x как $\inf\limits_{\varphi \in \mathcal{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$, а слева от x как $\sup\limits_{\varphi \in \mathcal{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$. Докажите, что f существует, непрерывна, дифференцируема и удовлетворяет уравнению $y' = F(x,y)$.

Определение 2. (*Обозначения.*) Пусть $C = \sup\limits_{\Pi} |F(x,y)|$. Обозначим через D_δ отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где δ выбрано так, чтобы «бабочка» $B_\delta \overset{\text{def}}{=} \{\, (x,y) \mid x \in D_\delta, |y - y_0| \leqslant C|x - x_0| \}$ лежала целиком внутри Π. Обозначим через $\mathcal{M}_\delta$ множество всех непрерывных функций $D_\delta \to^\varphi [c,d]$, график которых содержится в B_d.

Задача 3. Докажите, что $\mathcal{M}_\delta$ является полным метрическим пространством с расстоянием $\rho(\varphi, \psi) = \sup\limits_{x \in D_\delta} |\varphi(x) - \psi(x)|$.

Задача 4. (*лемма Асколи–Арцела*) Дано некоторое множество $\mathcal{F}$ непрерывных функций на отрезке. Докажите, что любая ограниченная последовательность функций из $\mathcal{F}$ содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность[1] тогда и только тогда, когда все функции в $\mathcal{F}$ ограничены общей константой и *в равной степени* непрерывны (т. е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$ сразу для всех $\varphi \in \mathcal{F}$).

Задача 5. (*ломаные Эйлера*) Разобъём D_δ на $2n$ равных частей длины $h = \delta/n$ и определим непрерывную функцию $\varphi_n(x)$, полагая $\varphi(x_0) = y_0$, и далее продолжая её влево и вправо индуктивным правилом: над отрезком $[x_0 + kh, x_0 + (k+1)h]$ (где $k = 0, 1, 2, \dots$) и над отрезком $[x_0 + (k-1)h, x_0 + kh]$ (где $k = 0, -1, -2, \dots$) $\varphi(x)$ есть прямая с угловым коэффициентом $F(x_0 + kh, \varphi(x_0 + kh))$ (значение $\varphi(x_0 + kh)$ определено по индуктивному предположению). Докажите, что все φ_n лежат в $\mathcal{M}_\delta$ и из них можно выбрать подпоследовательность, имеющую поточечный предел, также лежащий в $\mathcal{M}_\delta$.

Задача 6. Явно опишите последовательность ломаных Эйлера для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и шагом $h = 1/n$, и честно найдите её предел при $n \to \infty$.

Задача 7. Докажите, что поточечный предел любой сходящейся последовательности ломаных Эйлера из 5 является дифференцируемой функцией, удовлетворяющий уравнению $y' = F(x,y)$ (мы ещё вернёмся к этой задаче в следующем листке).

1	2	3	4	5	6	7

[1] предел которой не обязан принадлежать $\mathcal{F}$

Задача 1. Найдите все решения уравнения $y' = y^{2/3}$ и укажите два различных решения, удовлетворяющие начальному условию $y(0) = 0$.

Определение 1. (*Постановка задачи.*) Всюду в этом листке константа C, прямоугольник Π, «бабочка» $B_\delta \subset \Pi$, отрезок $D_\delta \ni x_0$ и пространство $\mathcal{M}_\delta$ непрерывных функций на D_δ с графиками внутри B_δ будут те же самые, что и в предыдущем листке. Мы докажем, что если правая часть дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ удовлетворяет дополнительному условию:

$$\exists\, L \in \mathbb{R} \,:\, |F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L \cdot |y_1 - y_2| \quad \forall\, x \in [a, b] \ \ \&\ \forall\, y_1, y_2 \in [c, d] \tag{1}$$

то любые два решения дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$, графики которых проходят через точку (x_0, y_0) совпадают над некоторой δ-окрестностью точки x_0.

Задача 2. (*приближения Пикара*) Будем строить последовательные приближения $\psi_k(x) \in \mathcal{M}_\delta$ (с $k = 0, 1, 2, \dots$) к решению уравнения $y' = F(x, y)$, взяв $\psi_0(x) \equiv y_0$ и подбирая в качестве ψ_{k+1} такую дифференцируюмую функцию, производная от которой равна значениям функции F на графике предыдущего приближения ψ_k, т. е. удовлетворяющую при $x \in D_\delta$ уравнению $\psi'_{k+1}(x) = F(x, \psi_k(x))$ и такую, что $\psi_{k+1}(x_0) = y_0$. Докажите, что $\psi_{k+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, \psi_k(t))\, dt$ и проверьте, что все $\psi_k \in \mathcal{M}_\delta$.

Задача 3. Явно вычислите все приближения Пикара для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и честно найдите их предел.

Задача 4. Пусть функция F удовлетворяет условию (1). Докажите, что при достаточно малом δ правило

$P : \psi(x) \longmapsto P\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} F(t, \psi(t))\, dt$ определяет сжимающее отображение $\mathcal{M}_\delta \to^P \mathcal{M}_\delta$.

Задача 5. Докажите, что функция $\psi \in \mathcal{M}_\delta$ тогда и только тогда является решением уравнения $y' = F(x, y)$, когда $P\psi = \psi$.

Задача 6. Докажите сформулированную в начале листка теорему единственности. Как она уживается с примером из 1?

Задача 7. Пусть отображение $\mathcal{M} \to^P \mathcal{M}$ (в произвольном метрическом пространстве) является сжимающим с константой $0 < l < 1$ (т. е. $\rho(P\varphi, P\psi) \leqslant l\rho(\varphi, \psi)\ \forall\ \varphi, \psi \in \mathcal{M}$). Докажите, что расстояние от произвольной точки $\psi \in \mathcal{M}$ до неподвижной точки ψ_0 отображения P удовлетворяет неравенству $\rho(\psi, \psi_0) \leqslant \dfrac{\rho(\psi, P\psi)}{1 - l}$.

Задача 8. Докажите, что если функция F удовлетворяет условию (1), то *вся* последовательность ломаных Эйлера из **??** *равномерно* (т. е. по метрике $\mathcal{M}_\delta$, а не поточечно) сходится к решению уравнения $y' = F(x, y)$.

Задача 9*. (*теорема о непрерывной зависимости от начальных условий*) Пусть функция F удовлетворяет условию (1). Докажите, что у точки (x_0, y_0) существует окрестность $\widetilde{\Pi} \subset \Pi$, такая что при некотором фиксированном $\delta > 0$ и произвольных $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \widetilde{\Pi}$ уравнение $y' = F(x, y)$ будет обладать единственным решением $y = f(x)$, определённым всюду на D_δ и удовлетворяющим начальному условию $f(\widetilde{x}_0) = \widetilde{y}_0$, и более того, сопоставление точке $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \widetilde{\Pi}$ такого решения будет непрерывным отображением из $\widetilde{\Pi}$ в пространство непрерывных функций на D_δ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9