

**Определение 1.** Пусть  $L/K$  — расширение полей (т. е.  $K$  — подполе поля  $L$ ). Тогда  $L$  можно рассматривать как векторное пространство над  $K$ . Размерность  $[L : K]$  этого пространства называется *степенью расширения*. Расширение, имеющее конечную степень, называется *конечным*.

**Задача 1.** Чему равна **а)** степень  $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$ ; **б)** степень  $[\mathbb{F}_4 : \mathbb{F}_2]$ ?

**Задача 2.** **а)** Если поле из  $p$  элементов вложено в поле из  $q$  элементов, то число  $q$  — степень числа  $p$ .  
**б)** Количество элементов конечного поля — степень простого числа.

**Задача 3.** **а)** Расширение  $K(\sqrt{d})/K$  имеет степень 2.  
**б)** Если  $P$  — неприводимый многочлен степени  $n$ , то  $[K[x]/(P) : K] = n$ .

**Задача 4.** **а)** Если есть башня из трех полей  $F \subset K \subset L$ , то  $[L : F] = [L : K] \cdot [K : F]$ .  
**б)** Если  $L/F$  — расширение полей степени  $n$ , то степень любого промежуточного расширения  $K/F$  делит число  $n$ .

**Задача 5.** Найдите **а)**  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$ ; **б)**  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ ; **в)**  $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ .

**Определение 2.** Пусть на плоскости введена система координат. Будем сопоставлять каждому набору  $\mathcal{K}$  точек подполе  $K$  действительных чисел, порожденное всеми координатами этих точек.

**Задача 6.** Коэффициенты уравнения  
**а)** прямой, проходящей через пару точек из  $\mathcal{K}$ ;  
**б)** окружности с центром в точке из  $\mathcal{K}$  и проходящей через точку из  $\mathcal{K}$  лежат в  $K$ .

**Задача 7.** Пусть  $\mathcal{L}$  получается из  $\mathcal{K}$  добавлением точки пересечения  
**а)** двух прямых; **б)** прямой и окружности; **в)** двух окружностей с коэффициентами из  $K$ .  
Чему может равняться степень расширения  $L/K$ ?

**Задача 8.** Если число  $\alpha$  можно получить из элементов поля  $K \subset \mathbb{R}$  при помощи циркуля и линейки, то  $[K(\alpha) : K]$  — степень двойки.

**Задача 9.** Циркулем и линейкой нельзя построить отрезок в  $\sqrt[3]{2}$  длиннее данного (то есть задача об удвоении куба не имеет решения).

**Задача 10.** Найдите минимальный многочлен числа **а)**  $\cos \frac{\pi}{9}$ ; **б)**  $\cos \frac{\pi}{5}$ ; **в)\***  $\cos \frac{\pi}{7}$ .  
УКАЗАНИЕ. Используйте равенства вида  $\cos n\varphi = \cos m\varphi$ .

**Задача 11.** Задача о трисекции угла не имеет решения.

**Задача 12.** **а)** Конечное расширение алгебраично<sup>1</sup>. (Верно ли обратное?)  
**б)** Если расширение порождено (как поле) конечным набором алгебраических элементов, то оно конечно и его степень не превосходит произведения степеней этих элементов.

**Задача 13.** Если  $L/K$  — произвольное расширение, то множество его элементов, алгебраичных над  $K$ , образует поле (в частности, алгебраические числа образуют поле).

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	7	8	9	10	10	10	11	12	12	13
а	б	а	б	а	б	а	б	а	б	в	а	б	а	б	в			а	б	в		а	б	

<sup>1</sup>Определение можно найти в листке «Расширения полей I».