

В этом листке мы будем часто использовать следующие обозначения:

$p_n - n$ -е простое число ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$); P — множество всех простых чисел ($P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$); $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих $x \in \mathbb{N}$; $\log x$ — двоичный логарифм x (т. е. $\log_2 x$).

История определения асимптотики функции $\pi(x)$ такова:

1. Евклид: $\pi(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$;
2. Эйлер: $\frac{\pi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$;
3. Чебышёв (1848 г.): Если предел $\frac{\pi(x) \ln(x)}{x}$ существует, то он равен 1;
4. Адамар и Валле-Пуссен (1896 г.): $\frac{\pi(x) \ln(x)}{x} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$.

Задача 1. Докажите, что при $n \in \mathbb{N}$ а) $p_{n+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$; б) $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$.

Задача 2. Докажите, что $\pi(x) \geq \log \log x$ при $x \geq 2$.

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим функцию $F^n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом: F^n есть количество натуральных чисел, не превосходящих x , все простые делители которых принадлежат множеству $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Задача 3. а) Найдите $F^3(57)$; б) Найдите $F^n(x)$ при $x < p_{n+1}$.

Задача 4. Докажите, что $F^n(x) \leq 2^n \cdot \sqrt{x}$.

Задача 5. Докажите следующие утверждения:

а) простых чисел бесконечно много; б) $\pi(x) \geq 0,5 \cdot \log x$; в)* ряд $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots$ расходится.

Задача 6. Докажите следующие утверждения:

$$\text{a)} \prod_{\substack{n < p \leq 2n, \\ p \in P}} p < C_{2n}^n < 2^{2n}; \quad \text{б)} \prod_{\substack{n+1 < p \leq 2n+1, \\ p \in P}} p < C_{2n+1}^n < 2^{2n}; \quad \text{в)} \prod_{\substack{p \leq x, \\ p \in P}} p < 2^{2x}.$$

Задача 7. Докажите следующие утверждения:

а) $(\pi(x) - \pi([\sqrt{x}])) \cdot \log \sqrt{x} < 2x$;
 б) существует такое $c_1 \in \mathbb{R}$, что $\pi(x) \leq c_1 \cdot \frac{x}{\log x}$ при $x \geq 2$.

Задача 8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, p — простое число. Докажите, что p входит в каноническое разложение числа $n!$ в степени $\sum_{i=1}^m [n/p^i]$, где $m = [\log_p n]$.

Задача 9. Пусть p — простое число, α_p — степень, в которой p входит в каноническое разложение числа C_{2n}^n . Докажите, что $\alpha_p \leq [\log_p 2n]$.

Задача 10. Докажите следующие утверждения: а) $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq C_{2n}^n$; б) $C_{2n}^n \leq \prod_{\substack{p \leq 2n, \\ p \in P}} p^{\lfloor \log_p 2n \rfloor}$.

Задача 11. Докажите следующие утверждения:

а) $2n - \log(2n + 1) \leq \pi(2n) \cdot \log 2n$;
 б) существует такое положительное $c_2 \in \mathbb{R}$, что $\pi(x) \geq c_2 \cdot \frac{x}{\log x}$ при $x \geq 2$.

Задача 12*. Докажите, что для всякого достаточно большого $x \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$0,9 \cdot \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq 4,1 \cdot \frac{x}{\log x}.$$

Задача 13*. Докажите, что при всяком достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ между n и $5n$ обязательно найдется простое число.

Задача 14. В обозначениях задачи 9 докажите следующие утверждения:

а) $\alpha_p \leq 1$ при $p > \sqrt{2n}$; **б)** $\alpha_p = 0$ при $2n/3 < p \leq n$.

Задача 15*. (*Постулат Бертрана*) Докажите, что при всяком достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ между n и $2n$ обязательно найдется простое число.

1 a	1 $\bar{6}$	2	3 a	3 $\bar{6}$	4	5 a	5 $\bar{6}$	5 B	6 a	6 $\bar{6}$	6 B	7 a	7 $\bar{6}$	8	9	10 a	10 $\bar{6}$	11 a	11 $\bar{6}$	12	13	14 a	14 $\bar{6}$	15