Листок №30 # Производная. Выпуклость и точки перегиба 09.2016

Выпуклые функции

Определение 1. Функция $f : I \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз* на промежутке I, если для каждого отрезка $[x_1; x_2] \subseteq I$ выполнено: в каждой точке этого отрезка $f(x) \leqslant L(x)$, где L — прямая, соединяющая точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$. Если всегда (кроме концов отрезков) верно строгое неравенство $f(x) < L(x)$, говорят о *строгой* выпуклости вниз. Аналогично вводится понятие (строгой) выпуклости вверх.

Задача 1. Пусть функция f определена на интервале (a, b). Докажите, что f выпукла вниз на (a, b) тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:
а) надграфик f на $(a; b)$, то есть $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b), y \geqslant f(x)\}$ — выпуклое множество;
б) $\alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(y) \geqslant f(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y)$ для любых $x, y \in (a, b)$ и любого $\alpha \in [0, 1]$;
в) *(неравенство Йенсена)* $\frac{\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \geqslant f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\right)$ для любых чисел $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ и любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Задача 2. Пусть f положительна и выпукла вниз на $[a; b]$. Обязательно ли $1/f$ выпукла вверх на $[a; b]$?

Задача 3. Докажите, что если функция f выпукла вниз на (a, b), то $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$ при любых $x_1 < x < x_2$, где $x, x_1, x_2 \in (a, b)$.

Задача 4. Пусть функция f дважды дифференцируема (f и f' дифференцируемы) на интервале (a, b). Докажите, что f выпукла вниз на (a, b) если и только если выполнено любое из следующих условий:
а) f' монотонно неубывает на интервале (a, b); **б)** $f''(x) \geqslant 0$ для любого $x \in (a, b)$;
в) любая касательная l к графику f расположена не выше его: $f(x) \geqslant l(x)$ при всех $x \in (a, b)$.

Задача 5. Найдите промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз следующих функций:
а) $\sin x$; **б)** x^2; **в)** x^3; **г)** x^4; **д)** $\sqrt{|x|}$; **е)** $5x^4 + 7x^3$; **ж)** $\sin x + \cos x$; **з)** $(x(x-1))^{-1}$; **и)** $x^2 + \frac{1}{x}$.

Задача 6. Докажите, что **а)** $\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}$; **б)** $(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$.

Задача 7. Докажите для положительных $x_1, \ldots, x_n$ неравенство Коши: $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$.
Указание: вам поможет функция $\ln$.

Задача 8. Что больше: $\sqrt[3]{60}$ или $2 + \sqrt[3]{7}$?

Задача 9*. Пусть f выпукла (вниз или вверх) на (a, b). **а)** Докажите, что $f(x)$ непрерывна на (a, b).
б) Верно ли, что f имеет в каждой точке из (a, b) правую и левую касательные?
в) Докажите, что f дифференцируема на (a, b) везде кроме счётного числа точек.

Точки перегиба

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что f строго выпукла вниз на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и строго выпукла вверх на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (или наоборот).

Задача 10. Пусть f дважды дифференцируема в некой окрестности точки x_0.
а) Пусть x_0 — точка перегиба функции f. Верно ли, что $f''(x_0) = 0$? Верно ли обратное?
б) Докажите, что x_0 — точка перегиба f если и только если f'' меняет знак в точке x_0.

Задача 11. Нарисуйте графики функций из задачи 5 и найдите точки перегиба этих функций.

Задача 12. Пусть f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причём $f'(x_0) = 0$ и **а)** $f''(x_0) > 0$; **б)** $f''(x_0) < 0$. Имеет ли f в x_0 локальный экстремум, и если да, то какого типа?

Задача 13. Сколько перегибов у графика $y = (x+1)/(x^2+1)$? Лежат ли они на одной прямой?

Асимптоты

Определение 3. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$ (справа или слева).

Задача 14. Пусть $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$. Найдите $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$.

Задача 15. Пусть существует $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Обязательно ли тогда функция $f(x)$ имеет асимптоту?

1 а	1 б	1 в	2	3	4 а	4 б	4 в	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	5 е	5 ж	5 з	5 и	6 а	6 б	7	8	9 а	9 б	9 в	10 а	10 б	11	12 а	12 б	13	14	15