**Определение 1.** Интегралом функции f на отрезке [a,b] называется площадь под графиком функции fна этом отрезке (при этом на участках, где функция отрицательна, площадь считается со знаком «минус»). Обозначение:  $\int f(x) dx$ .

Дайте своё строгое определение интеграла. Оно должно работать для функций, непрерывных на отрезке: совпадать с «обычной» площадью, если её можно посчитать из геометрических соображений, и должны быть верны задачи 2-7.

Будет здорово, если класс функций, интегрируемых по вашему определению функций, будет шире (кусочно-непрерывные, со счётным множеством точек разрыва, ...).

Задача 1. Найдите: a) 
$$\int_{3}^{7} 5 dx$$
; б)  $\int_{-1}^{2} x dx$ ; в)  $\int_{-2}^{1} |x| dx$ ; г)  $\int_{0}^{1} x^{2} dx$ ; д)  $\int_{0}^{1} (x^{2} - 3x + 1) dx$ .

Задача 2. Докажите, что

$$\int_{a}^{b} (f(x) + g(x)) dx = \int_{a}^{b} f(x) dx + \int_{a}^{b} g(x) dx.$$

**Задача 3.** Пусть c — некоторое число. Докажите, что

$$\int_{a}^{b} cf(x) dx = c \int_{a}^{b} f(x) dx.$$

**Задача 4.** Пусть a < b < c. Докажите, что

$$\int_{a}^{c} f(x) dx = \int_{a}^{b} f(x) dx + \int_{b}^{c} f(x) dx.$$

**Задача 5.** Пусть при любом  $x \in [a,b]$  выполнено  $f(x) \leqslant g(x)$ . Докажите, что

$$\int_{a}^{b} f(x) \, dx \leqslant \int_{a}^{b} g(x) \, dx.$$

**Задача 6.** а) У любой ли функции, определенной на [a;b], есть интеграл на этом отрезке?

б) А если функция непрерывна?

**Задача 7.** Пусть 
$$F$$
 — многочлен,  $f$  — его производная. Докажите, что тогда **a)**  $F(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx + F(0);$  **6)**  $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a);$ 

**Задача 8.** Пусть функция f непрерывна (на  $\mathbb{R}$ ). Зафиксируем точку a и рассмотрим функцию

$$F(t) = \int_{a}^{t} f(x) \, dx$$

от переменной t.

- а) Докажите, что функция F непрерывна.
- **б)** Верно ли, что функция F дифференцируема? Если верно, то найдите производную.

**Задача 9.** У каких функций, определенных на отрезке [a;b], существует интеграл на этом отрезке (по Вашему определению)? Попробуйте найти как можно более широкий класс функций, у которых интеграл существует (например, интегрируемы ли многочлены, непрерывные функции, ...?).

1 a	<u>1</u> б	1 B	1 Г	1 д	2	3	4	5	6 a	6 6	7 a	7 6	8 a	8 6	9