Листок №19д

Производная в задачах

май-сентябрь, 2021
$23/15/7$ з. на $5/4/3$

Задача 1. Найдется ли n, при котором многочлен $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ имеет более одного корня из $\mathbb{R}$?

Задача 2. Может ли уравнение $x(x^2-1)(x^2-1000) = \alpha$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ иметь 5 целых корней?

Задача 3. Пусть $k \in \mathbb{R}$, функция f определена на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), причем $|f'(x)| \leqslant k$ при всех $x \in (a,b)$. Докажите, что при любых $x, y \in (a,b)$ выполнено неравенство $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$.

Задача 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, n не является точной четвёртой степенью. Докажите, что тогда $\{\sqrt[4]{n}\} > \frac{1}{4}n^{-3/4}$.

Задача 5. Найдите суммы: **а)** $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$; **б)** $C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + nC_n^n x^{n-1}$.

Задача 6. **а)** Точка с координатами $(x(t), y(t))$ движется в плоскости xOy так, что в каждый момент времени t выполнено $y'(t) = 1/x(t)$, $x'(t) = -1/y(t)$. В некий момент времени точка имела координаты $(12,3)$. Может ли она в какой-нибудь другой момент иметь координаты $(6,5)$? Нарисуйте траекторию движения точки. **б)** Те же вопросы для точки, движущейся по закону $y'(t) = -x(t)$, $x'(t) = y(t)$.

Задача 7. **а)** Для каждого x из множества $\{-2, -1, -1/2, -1/3,\ 0,\ 1/3,\ 1/2,\ 1,\ 2\}$ нарисуйте на плоскости pOq график прямой, задающейся уравнением $x^3 + px + q = 0$. Докажите, что все прямые вида $x^3 + px + q = 0$ на плоскости pOq касаются некоторой кривой. Что это за кривая?
б) Задайте уравнением множество таких точек (p,q), что многочлен $x^3 + px + q$ имеет кратный корень. Нарисуйте на плоскости это множество, а также множества таких точек (p,q), что $x^3 + px + q$ имеет три разных корня, корень кратности 2, корень кратности 3, не имеет действительных корней.
в) Сколько корней у многочлена $x^3 - 10x + 12$?
г) Исследуйте геометрически число корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ на отрезке $[-1;1]$.

Задача 8. Пусть f определена на $[0,1]$ и дифференцируема на $(0,1)$, причём $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Докажите, что тогда найдутся такие различные $s, t \in [0,1]$, что $f'(s) \cdot f'(t) = 1$.

Задача 9. Петя идёт **а)** по плоскому полю; **б)** по холмистой местности из пункта A в пункт B, нигде не останавливаясь. Всегда ли на его пути найдётся точка, вектор скорости в которой параллелен AB?

Задача 10. Вычислите пятьдесят седьмую производную в нуле у функции $\arcsin(x^{13} + x^{22})$.

Задача 11. Докажите, что у многочлена $x^{1024} + a_1 x^{512} + a_2 x^{256} + \dots + a_9 x + a_{10}$, где $a_1, \dots, a_{10} \in \mathbb{R}$, может быть не более 11 различных положительных действительных корней.

Задача 12. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$, имеющий n различных корней $x_1, \dots, x_n$. Докажите, что справедливо равенство $\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \dots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0$.

Задача 13. Функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Верно ли, что f' ограничена на любом отрезке?

Задача 14*. Найдите все такие дифференцируемые $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f'(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ при любых $x \neq y$.

Задача 15*. Решите в натуральных числах: $x^y = y^x$. (*Указание:* изучите функцию $f(x) = x^{1/x}$).

Задача 16*. *(Правило Лопиталя)* Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b), причем g' не обращается в ноль на (a,b) и **а)** $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$; **б)** $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = +\infty$.
Пусть существует предел $\lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$. Докажите, что предел $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен k.

Задача 17*. Останется ли верным правило Лопиталя, если заменить в условии b и/или k на $\pm\infty$?

Задача 18*. Найдите пределы: **а)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x / x^\alpha$ при $\alpha > 0$; **в)** $\lim\limits_{x\to +0} x^x$.

Задача 19*. Пусть $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция на отрезке $[0,a]$, $f(0) = f(a) = 0$ и f'' непрерывна на отрезке $[0,a]$. **а)** Докажите, что при $a = \pi$ справедливо утверждение: «существует такая точка $\xi \in (0,a)$, что $f''(\xi) + f(\xi) = 0$». **б)** Верно ли утверждение предыдущего пункта для $a = 3$?

Задача 20.** Существует ли непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, ни в одной точке не имеющая производной?

Задача 21. **а)** Функция f дифференцируема n раз на $\mathbb{R}$, и для каждой точки $a \in \mathbb{R}$ одна из функций $f,\ f',\ f'',\ \dots,\ f^{(n)}$ обращается в ноль в точке a. Докажите, что f — многочлен степени не более чем $n-1$. **б)**** Функция f определена и бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ — ее n-тая производная. Пусть для каждого $a \in \mathbb{R}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^{(n)}(a) = 0$. Докажите, что f — многочлен.

1	2	3	4	5 а	5 б	6 а	6 б	7 а	7 б	7 в	7 г	8	9 а	9 б	10	11	12	13	14	15	16 а	16 б	17	18 а	18 б	18 в	19 а	19 б	20	21 а	21 б