**Задача 1.** Как перелётным птицам проще лететь: по ветру или против ветра? (в каком смысле «проще» следует понять самостоятельно)

**Задача 2.** Астрономы считают, что все галактики разлетаются прямолинейно по направлениям от нашей со скоростями, пропорциональными расстояниям до них. Означает ли это, что наша галактика — центр вселенной?

**Задача 3.** Крючок безмена заменили на более тяжёлый и одновременно параллельно сдвинули вниз шкалу, так чтобы нуль совпал с новым положением стрелки. Будет ли безмен после этого правильно измерять вес?

**Определение 1.** Векторным пространством  $\mathbb{R}^n$  называется множество всевозможных наборов  $(x_1, \dots, x_n)$  действительный чисел вместе с операциями сложения  $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$  и умножения на числа  $\lambda (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ .

**Определение 2.** Отображение  $\mathbb{R}^m \overset{f}{\longmapsto} \mathbb{R}^n$  называется линейным, если для всех векторов  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  и всех чисел  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  выполняется равенство  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ . Отображение  $\mathbb{R}^m \overset{g}{\longmapsto} \mathbb{R}^n$  называется аффинным, если существует  $a \in \mathbb{R}^m$ , такое что отображение  $x \longmapsto g(x+a) - g(a)$  линейно. Будем опускать лишние скобки в выражении  $f((x_1, \dots, x_m))$  и писать просто  $f(x_1, \dots, x_m)$ . Например, будем писать f(x) вместо f(x) для  $x \in \mathbb{R}^1$ , f(x,y) вместо f((x,y)) для  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ .

Задача 4. Являются ли следующие отображения аффинными или линейными?:

- a)  $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ , f(x) = (0); 6)  $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ ,  $f(x) = (x^2 + 1)$ ; B)  $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ , f(x) = (57x, 179x + 57);
- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, f(x_1, x_2) = -3(x_1 x_2);$ д)  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_2 x_1 1, x_1);$
- e)  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2 + 1, x_1^2 + x_2^2)$ ?

**Задача 5.** Изменим в определении аффинного отображения фразу «существует  $a \in \mathbb{R}^m$ » на фразу «для любого  $a \in \mathbb{R}^m$ ». Будет ли новое определение эквивалентно исходному?

**Задача 6.** На плоскости фиксированы три точки: O, A и B. Нарисуйте множество точек  $\lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$  при **a)**  $\lambda + \mu = 1$ ; **б)**  $\lambda, \mu > 0$ .

**Задача 7.** Пусть линейное отображения  $\mathbb{R}^2 \stackrel{f}{\longmapsto} \mathbb{R}^2$  переводит базисные векторы  $e_1 = (1,0)$  и  $e_2 = (0,1)$  в векторы (a,c) и (b,d) соответственно. Куда оно переведёт вектор (x,y)?

Задача 8. Опишите все линейные и все аффинные отображения

a) 
$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$$

6) 
$$\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{B}) \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

r) 
$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

**Задача 9.** Докажите, что множество всех линейных отображений  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  образует коммутативную группу по сложению (то есть сложение коммутативно, ассоциативно и имеет обратный элемент).

**Задача 10.** Пусть задано некоторое биективное отображение  $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ . Известно, что точка в  $\mathbb{R}^m$  движется равномерно и прямолинейно тогда и только тогда, когда её образ движется равномерно и прямолинейно. Докажите, что преобразование f аффинно.

Задача 11. Докажите, что в классической механике преобразование координат между инерциальными системами отсчёта аффинно.

**Определение 3.** Набор векторов  $\{v_1,\ldots,v_n\}\subset\mathbb{R}^m$  называется базисом, если для любого вектора  $w\in\mathbb{R}^m$  найдётся единственный набор чисел  $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$  (который называется координатами вектора w в этом базисе) такой, что  $w=\lambda v_1+\ldots+\lambda_n v_n.$ 

**Задача 12.** а) Опишите все базисы в  $\mathbb{R}^1$ ; б) Докажите, что в любом базисе в  $\mathbb{R}^2$  ровно два вектора. в)\* Докажете, что в любом базисе в  $\mathbb{R}^m$  ровно m векторов.

1	2	3	4 a	4 6	4 B	4 Г	4 Д	4 e	5	6 a	6 6	7	8 a	8 6	8 B	8 Г	9	10	11	12 a	12 6	12 B