Определение 1. (*Постановка задачи.*) На плоскости XOY заданы: прямоугольник

$$\Pi = \{ (x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b\,,\ c \leqslant y \leqslant d \}\ ,$$

точка (x_0, y_0), лежащая строго внутри него, и дифференциальное уравнение $y' = F(x, y)$, правая часть которого $\Pi \to^F \mathbb{R}$ является непрерывной функцией на Π. Мы докажем, что существует ε-окрестность U_ε точки x_0 и дифференцируемая функция $U_\varepsilon \to^f [c, d]$, такие что $f'(x) = F(x, f(x)) \quad \forall\, x \in U_\varepsilon$ и $f(x_0) = y_0$.

Задача 1. Зададимся некоторой ε-окрестностью U_ε точки x_0 и рассмотрим следующие два множества дифференцируемых функций $U_\varepsilon \to^\varphi [c, d]$, заданных на этой окрестности:

$$\mathcal{F}^{\uparrow} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \mid\ \forall\, x \in U_\varepsilon\ \ \varphi'(x) > F(x, \varphi(x)) \}$$

$$\mathcal{F}_{\downarrow} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \mid\ \forall\, x \in U_\varepsilon\ \ \varphi'(x) < F(x, \varphi(x)) \}$$

Докажите, что $\exists\ \varepsilon$: оба множества $\mathcal{F}^{\uparrow}$, $\mathcal{F}_{\downarrow}$ непусты, и справа от x_0 график любой функции из $\mathcal{F}^{\uparrow}$ лежит выше графика любой функции из $\mathcal{F}_{\downarrow}$, а слева — наоборот.

Задача 2. Определим функцию $f(x)$ справа от x как $\inf\limits_{\varphi \in \mathcal{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$, а слева от x как $\sup\limits_{\varphi \in \mathcal{F}^{\uparrow}} \varphi(x)$. Докажите, что f существует, непрерывна, дифференцируема и удовлетворяет уравнению $y' = F(x, y)$.

Определение 2. (*Обозначения.*) Пусть $C = \sup\limits_{\Pi} |F(x, y)|$. Обозначим через D_δ отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где δ выбрано так, чтобы «бабочка» $B_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \mid x \in D_\delta, |y - y_0| \leqslant C|x - x_0|\}$ лежала целиком внутри Π. Обозначим через $\mathcal{M}_\delta$ множество всех непрерывных функций $D_\delta \to^\varphi [c, d]$, график которых содержится в B_d.

Задача 3. Докажите, что $\mathcal{M}_\delta$ является полным метрическим пространством с расстоянием $\rho(\varphi, \psi) = \sup\limits_{x \in D_\delta} |\varphi(x) - \psi(x)|$.

Задача 4. (*лемма Асколи–Арцела*) Дано некоторое множество $\mathcal{F}$ непрерывных функций на отрезке. Докажите, что любая ограниченная последовательность функций из $\mathcal{F}$ содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность[1] тогда и только тогда, когда все функции в $\mathcal{F}$ ограничены общей константой и *в равной степени* непрерывны (т. е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$ сразу для всех $\varphi \in \mathcal{F}$).

Задача 5. (*ломаные Эйлера*) Разобъём D_δ на $2n$ равных частей длины $h = \delta/n$ и определим непрерывную функцию $\varphi_n(x)$, полагая $\varphi(x_0) = y_0$, и далее продолжая её влево и вправо индуктивным правилом: над отрезком $[x_0 + kh, x_0 + (k+1)h]$ (где $k = 0, 1, 2, \dots$) и над отрезком $[x_0 + (k-1)h, x_0 + kh]$ (где $k = 0, -1, -2, \dots$) $\varphi(x)$ есть прямая с угловым коэффициентом $F(x_0 + kh, \varphi(x_0 + kh))$ (значение $\varphi(x_0 + kh)$ определено по индуктивному предположению). Докажите, что все φ_n лежат в $\mathcal{M}_\delta$ и из них можно выбрать подпоследовательность, имеющую поточечный предел, также лежащий в $\mathcal{M}_\delta$.

Задача 6. Явно опишите последовательность ломаных Эйлера для уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ и шагом $h = 1/n$, и честно найдите её предел при $n \to \infty$.

Задача 7. Докажите, что поточечный предел любой сходящейся последовательности ломаных Эйлера из 5 является дифференцируемой функцией, удовлетворяющий уравнению $y' = F(x, y)$ (мы ещё вернёмся к этой задаче в следующем листке).

1	2	3	4	5	6	7

[1] предел которой не обязан принадлежать $\mathcal{F}$