Приближение действительных чисел рациональными: Цепные дроби

Задача 1. Охотник стоит в точке плоскости с координатой $(0,0)$, а в остальных точках с целыми координатами сидят одинаковые зайцы. Докажите, что в каком бы направлении ни выстрелил охотник, он обязательно попадет в зайца.

Задача 2. Найдите $\sup\big(\sin x + \sin\sqrt{2}x\big)$.

Задача 3. Десятичная запись числа 2^n может начинаться с любой последовательности цифр.

Определение 1. Будем говорить, что дробь $\dfrac{p}{q}$ приближает число α с *коэффициентом качества* δ, если
$$0 < \big|\alpha - \frac{p}{q}\big| \leqslant \frac{\delta}{q}.$$

Задача 4. Число α может быть сколь угодно качественно приближено дробью тогда и только тогда, когда оно иррационально.

Задача 5. Докажите, что число $e = \sum \dfrac{1}{i!}$ иррационально.

Определение 2. Число α будем называть *k-приближаемым*, если для любого $\delta > 0$ существует такая дробь $\dfrac{p}{q}$, что
$$0 < \big|\alpha - \frac{p}{q}\big| \leqslant \frac{\delta}{q^k}.$$
Если же такой дроби для некоторого $\delta > 0$ не существует, будем называть число *k-неприближаемым.*

Задача 6. **а)** Число $\sqrt{2}$ является 2-неприближаемым.
б) Алгебраическое число степени k является k-неприближаемым *(теорема Лиувилля).*

Задача 7. Число $\sum \dfrac{1}{10^{i!}}$ трансцендентно.

Задача 8. Любое иррациональное число обладает бесконечным число 2-приближений с коэффициентом 1 (в частности, является $(2-\varepsilon)$-приближаемым).

Задача 9*. Множество всех $(2+\varepsilon)$-приближаемых чисел *имеет меру ноль*[1].

Определение 3. Пусть a_0 — целое число, a_i — натуральные числа. Выражение вида
$$[a_0; a_1; \ldots] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}$$
называется *цепной дробью*; число $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; \ldots; a_n]$ называется n-й *подходящей дробью* или *конвергентой.*

Задача 10. **а)** Вычислите $[3;7;15;1]$ (с точностью до 7 знаков после запятой) и $[1;1;\ldots]$;
б) разложите в цепную дробь числа $10/7$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

Задача 11. Для любой бесконечной цепной дроби $[a_0;\ldots]$ последовательность конвергент сходится к некоторому действительному числу.

Задача 12. **а)** Ненулевое рациональное число может разложено в цепную дробь ("алгоритм Евклида"), причем ровно двумя способами: вида $[a_0;\ldots;a_n]$ и $[a_0;\ldots;a_n - 1; 1]$.
б) Иррациональное число может разложено в цепную дробь ровно одним способом.

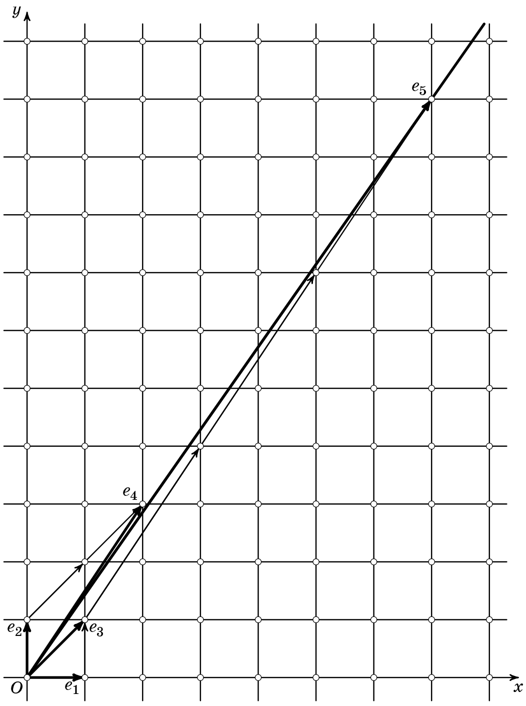
Задача 13. **а)** $[a_0; a_1; \ldots; a_n; z]$ — дробно-линейная функция от z.
б)* Функция $\frac{az+b}{cz+d}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Z})$ представима в виде $[a_0;\ldots;a_n;z] \iff \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1.$

1	2	3	4	5	6 а	6 б	7	8	9	10 а	10 б	11	12 а	12 б	13 а	13 б

[1] Т. е. для каждого положительного δ существует покрытие этого множества не более чем счетным числом интервалов, сумма длин которых не превосходит δ.

Задача 14. Если разложение иррационального числа в цепную дробь периодично, то это квадратичная иррациональность[2].

Задача 15. Пусть α — положительное число. Рассмотрим последовательность векторов (e_i): $e_1 = (1\ 0)$, $e_2 = (0\ 1)$; $e_{i+1} = e_{i-1} + a_{i-2}e_i$, где в качестве a_{i-2} берется наибольше натуральное число, при котором e_{i+1} остается с той же стороны от прямой $y = \alpha x$, что и e_{i-1} (“алгоритм вытягивания носов”).



а) Пара векторов (e_i, e_{i+1}) — базис целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$.
б) Вектора (e_{2k-1}) и (e_{2k}) являются вершинами выпуклой оболочки части $\mathbb{Z}^2$ под и над прямой $y = \alpha x$ соответственно.
в) $\alpha = [a_0; a_1; \ldots]$, $e_{n+2} = (q_n\ p_n)$.
г) n-я подходящая дробь является наилучшим (в смысле коэффициента качества приближения $q|\alpha - \frac{p}{q}|$) приближением к α среди дробей со знаменателем, не превосходящим q_n.

Задача 16. **а)** $\det\begin{pmatrix} q_n & q_{n+1} \\ p_n & p_{n+1} \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}$.
б) У любого иррационального числа α бесконечно много приближений, таких что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$.

Задача 17*. У любого иррационального числа α бесконечно много приближений, таких что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, причем константу $\sqrt{5}$ нельзя улучшить (“теорема Гурвица–Бореля”).

Задача 18. Числитель и знаменатель подходящей дроби для $[1; 1; \ldots; 1]$ — два последовательных числа Фибоначчи (в частности, $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = [1; 1; \ldots]$).

Задача 19*. Последовательность (a_i) удовлетворяет некоторой линейной рекурренте тогда и только тогда, когда ее производящая функция $a_0 + a_1 t + a^2 t^2 + \ldots$ рациональна.

Определение 4. *Пути Дика* — это пути из точки $(0, 0)$ в точку $(2n, 0)$, состоящие из шагов $(1, 1)$ и $(1, -1)$ и не опускающиеся ниже прямой $y = 0$. Количество таких путей — это n-е число Каталана.

Пути Моцкина – это пути из точки $(0, 0)$ в точку $(n, 0)$, состоящие из шагов $(1, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, -1)$ и не опускающиеся ниже прямой $y = 0$. Количество таких путей называется n-м *числом Моцкина*.

Задача 20. **а)** Производящая функция для чисел Каталана равна (обобщенной) цепной дроби

$$\frac{1}{1 - \frac{t}{1 - \frac{t}{1 - \ldots}}}.$$

б) Ее k-я конвергента дает производящую функцию для путей Дика, не поднимающихся выше прямой $y = k$...
в) ...и она же равна производящей функции для плоских корневых деревьев[3], имеющих высоту не более k.

Задача 21. **а)** Производящая функция для чисел Моцкина равна (обобщенной) цепной дроби

$$\frac{1}{1 - t - \frac{t^2}{1 - t - \frac{t^2}{1 - \ldots}}}.$$

б) Ее k-я конвергента дает производящую функцию для путей Моцкина, не поднимающихся выше прямой $y = k$.

(Упражнение: придумайте несколько комбинаторных интерпретаций чисел Моцкина, аналогичных вашим любимым интерпретациям чисел Каталана; попробуйте описать подмножества этих объектов, соответствующие конвергентам цепной дроби.)

14	15 а	15 б	15 в	15 г	16 а	16 б	17	18	19	20 а	20 б	20 в	21 а	21 б

[2] Как мы увидим позже, верно и обратное (“теорема Лагранжа”).
[3] Ср. с задачей 7 листка «Числа Каталана».