Введение

Теория игр занимается, в основном, двумя разными задачами. Первая — понять, как действуют экономические агенты (люди, фирмы). Вторая — понять, как организовать процесс (голосования на выборах, аукционы, разбиения на пары) так, чтобы получить устойчивый и рациональный итог.

В этом листке мы изучим «задачу о марьяже» (о том, как переженить мужчин и женщин), это наиболее упрощенная модель формирования двусторонних рынков. Здесь под двусторонним рынком подразумевается некоторая совокупность экономических агентов, которая разбита на два множества, взаимодействующие между собой. Эта конструкция позволяет симулировать (а значит, и исследовать с точки зрения экономики и социологии) самые разнообразные типы взаимодействий: рынок труда (работники и фирмы), образование (школьники/студенты и школы/вузы), распределение нагрузки в интернете (пользователи и сервера), товарооборот в торговле (поставщики и магазины) и так далее. За развитие этой теории Ллойд Шепли и Элвин Рот получили Нобелевскую премию по экономике в 2012 году.

Определение 1. Пусть M — множество мужчин A_1, A_2, $\ldots$, A_k; W — множество женщин a_1, a_2, $\ldots$, a_n. *Паросочетанием* называется любое однозначное соответствие из M в W, то есть набор пар (мужчина, женщина), в котором мужчины и женщины различны. Пусть у каждого мужчины есть список женщин, упорядоченный по убыванию их "привлекательности" для него. Аналогично, у каждой женщины есть упорядоченный по тому же принципу список мужчин. Паросочетание называется *неустойчивым*, если некие мужчина A и женщина a, не состоящие в браке между собой, оба предпочитают друг друга своим супругам, и *устойчивым*, иначе.

Задача о марьяже заключается в следующем: существует ли устойчивое паросочетание? Более тонкий вопрос: если устойчивых паросочетаний несколько, какое из них надо выбрать?

Задача 1. Опишите устойчивые паросочетания при заданных предпочтениях (в строке написан порядок по убыванию):

а)

Мужчины	Порядок предпочтений	Женщины	Порядок предпочтений
Anatole	c b d a	alice	A B D C
Bob	b a c d	brigitte	C A D B
Charles	b d a c	carole	C B D A
Dave	c a d b	diana	B A C D

; **б)**

Выбор мужчин						Выбор женщин					
A:	a	b	c	d	e	a:	B	C	D	E	A
B:	b	c	d	e	a	b:	C	D	E	A	B
C:	c	d	e	a	b	c:	D	E	A	B	C
D:	d	e	a	b	c	d:	E	A	B	C	D
E:	e	a	b	c	d	e:	A	B	C	D	E

.

Задача 2. (*Пример, когда устойчивых паросочетаний много*) Приведите пример наборов предпочтений для N мужчин и N женщин, для которых существует $2^{\frac{N}{2}}$ устойчивых паросочетаний. Для простоты можно считать, что $N = 2^k$.

Алгоритм Гейла-Шепли

Рассмотрим следующий алгоритм Гейла-Шепли. Вот его i-ый шаг:

(1) каждый мужчина делает предложение самой привлекательной женщине из тех, кто ещё ему не отказал;

(2) каждая женщина отказывает всем мужчинам, сделавшим ей предложение, кроме самого привлекательного для неё.

Задача 3. Примените алгоритм к задаче 1. Правда ли, что алгоритм закончит работу и получится устойчивое паросочетание?

Задача 4. Верно ли, что

а) если женщина a отвергла мужчину A, то пара Aa не встретится ни в одном устойчивом паросочетании;

б) на каждом шаге алгоритма у любого мужчины список оставшихся предложений не пуст?

в) Докажите, что в ходе алгоритма получается устойчивое паросочетание.

Задача 5. Предположим, что мы провели алгоритм Гейла-Шепли и получили устойчивое паросочетание.

а) Покажите, что те, кто не попал в это паросочетание (при неравном количестве мужчин и женщин) не попадёт ни в одного другое устойчивое паросочетание.

б) Покажите, что данное паросочетание самое лучше (из всех устойчивых паросочетаний) с точки зрения мужчин и самое худшее с точки зрения женщин.

Задача 6. Проведём алгоритм Гейла-Шепли сначала, когда мужчины делают предложения, а женщины отказывают; а потом — когда женщины делают предложения, а мужчины отказывают. Пусть получилось одно и тоже паросочетание. Верно ли, что при данных упорядочиваниях устойчивое паросочетание единственно?

Задача 7. Покажите, что алгоритм Гейла-Шепли можно обобщить на случай «абитуриенты» — «университеты». А именно, теперь в одном из множеств (в данном случае, университеты) элементы могут связываться с несколькими абитуриентами. Будем считать, что у каждого университета помимо упорядочивания задача ещё и *мощность,* то есть количество пар, которые он хочет образовать.

Задача 8. Сколько устойчивых паросочетаний может быть, если мужчин и женщин по три?

Задача 9. Пусть $M = (Aa, Bb, \ldots, Zz)$ и $M_0 = (Aa_0, Bb_0, \ldots, Zz_0)$ — два произвольных устойчивых паросочетания. Докажите, что набор $M \vee M_0 = (A \max_A(a, a_0), B \max_B(b, b_0), \ldots, Z \max_Z(z, z_0))$

а) является паросочетанием; **б)** является устойчивым паросочетанием.

(Здесь $\max_A(a, a_0)$ есть женщина, наиболее предпочтительная для A из двух кандидатур a и a_0.)

в) Докажите аналогичное утверждение про $M \wedge M_0 = (A \min_A(a, a_0), B \min_B(b, b_0), \ldots, Z \min_Z(z, z_0))$.

1 а	1 б	2	3	4 а	4 б	4 в	5 а	5 б	6	7	8	9 а	9 б	9 в

Постановка задачи

Предположим, что имеется N игроков. Для удобства занумеруем их числами $1, 2, \ldots, N$. Подмножество $S \subset \{1, \ldots, N\}$ будем называть *коалицией* игроков.

Коалиционная игра в характеристической форме (coalitional game или cooperative game in characteristic form) — это множество игроков $\{1, \ldots, N\}$ с заданной характеристической функцией $v : 2^N \to \mathbb{R}$. Для краткости будем называть такую игру «игра, заданная функцией v» или просто «игра v».

Для коалиции S значение $v(S)$ обозначает сумму денег, которую эта коалиция может заработать самостоятельно. Характеристическая функция может принимать отрицательные значения (например, при дележе расходов). Будем считать, что пустая коалиция (куда никто не входит), не может заработать денег и никому ничего не должна, т.е. $v(\varnothing) = 0$.

В такой игре у игроков есть интерес в создании большой коалиции и дележе полученного $v(N)$. Вопрос в том, как поделить $v(N)$? Мы обсудим две концепции решения — устойчивые решения (т.н. *ядро)* и справедливое решение (т.н. *вектор Шепли)*.

Ядро игры

Предположим, что большая коалиция решила каким-то образом разделить $v(N)$. Такой делёж устойчив, если никакая коалиция $S \subset N$ не захочет отделиться и более выгодным для себя способом переделить имеющийся у них запас средств $v(S)$.

Определение 1. Будем называть *дележом* игры, заданной функцией v любой набор $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, для которого $x_1 + \ldots + x_N = v(N)$.

Ядерным дележом или *устойчивым дележом* называется такой делёж игры v, что для любой непустой коалиции $S \subset \{1, \ldots, N\}$ выполнено неравенство $\sum_{i \in S} x_i \geqslant S$.

Ядром игры v называется множество устойчивых дележей.

В Задачах 1-6 необходимо задать характеристическую функцию и найти ядро игры.

Задача 1. (*Делёж богатства*) Трое нашли на дороге 100 долларов. Деньги можно делить произвольным образом между игроками. Решение о дележе принимается большинством, то есть если двое договорились, то третий не может возразить.

Задача 2. (Простая игра или модель голосования) Предположим, что есть N игроков (членов парламента) и задана *ключевая коалиция* K, то есть такая, что для принятия закона необходимо и достаточно того, чтобы все члены коалиции K проголосовали за закон. То есть можно положить $v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } K \subset S \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$.

Задача 3. (*Музыканты*) Оркестр из трех музыкантов (A, B, C) играет в подземном переходе. Поодиночке они могли бы заработать, соответственно, 6, 18 и 30 рублей в час. Играя по двое, они бы получили: A и B — 36, A и C — 48 , B и C — 54 рубля в час. А вместе они имеют 72 рубля в час.

Задача 4. (*Простая модель рынка*) Имеется множество продавцов K и множество покупателей L. Каждый продавец имеет 1 единицу товара, каждый из покупателей хочет купить 1 единицу товара. Выигрыш коалиции $S \subset K \cup L$ равен количеству проданных товаров.

Задача 5. (*Семейные вечера*) По вечерам семья любит слушать музыку. Мама обожает Аллу Пугачеву (точка 0 на прямой), сын больше всего любит группу Чайф (точка 0.5 на той же прямой), а папа тащится от Шнура из группы «Ленинград» (точка 1 на прямой). Удовольствие от музыки равно 1 минус расстояние от нее до своей любимой музыки. Установка воспроизводящего устройства требует одну секунду издержек. Любая пара членов семьи или любой член семьи в отдельности могут уйти в одну из свободных комнат, самостоятельно установить проигрывающее устройство и слушать музыку там. Персональные издержки от прослушивания нелюбимой музыки могут компенсироваться другими членами «группы по интересам».

Задача 6. (*Делёж пирога*) Остался последний кусочек пирога. Три брата не знают, как его поделить. Папа спрашивает: «Сколько стоил пирог в магазине?» Сначала отвечает старший сын, затем средний, затем младший. Называть одинаковые цены нельзя. Для простоты будем считать, что деньги бесконечно делимы, а стоимость пирога — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0; 1]$. Тот из братьев, чья версия ближе всего к правильной, получает пирог (если таких двое, кусок делится пополам). Будем считать, что цена коалиции — это супремум достижимых коалицией платежей.

Задача 7. **а)** Может ли ядро быть пустым? **б)** Докажите, что если ядро непусто, то оно является выпуклым множеством. **в)** Пусть $N = 3$. Может ли ядро быть точкой? отрезком? треугольником? 4-угольником? 6-угольником? Приведите примеры в каждом из случаев.

Вектор Шепли

С каждой перестановкой игроков $\tau : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ свяжем следующий делёж x^τ: игрок $\tau(i)$ получает полезность $v(\tau\{1, \dots, i\}) - v(\tau\{1, \dots, i-1\})$. Другими словами, игрок получает тот прирост, который он привносит своим присоединением к коалиции предыдущих игроков.

Вектором Шепли игры v называется вектор $\Phi(v) \in \mathbb{R}^N$, задаваемый формулой:

$$\Phi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau} x^\tau.$$

Задача 8. Найдите вектор Шепли для игры **а)** делёж богатства; **б)** простой игры с ключевой коалицией K; **в)** музыканты; **г)** семейные вечера; **д)** делёж пирога. **е)** В каких пунктах вектор Шепли лежит в ядре?

Задача 9. Докажите, что вектор Шепли $\Phi(v)$ игры v обладает следующими свойствами:

(1) (*эффективность*) $\sum_{i=1}^{N} \Phi(v)_i = v(N)$.

(2) (*симметричность*) Для любой перестановки $\sigma : N \to N$ выполнено $\Phi[\sigma v] = \sigma \Phi[v]$.

(3) (*линейность*) Множество игр в характеристической форме имеет структуру векторного пространства с естественными операциями: сумма игр определяется как $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$, умножение на коэффициент как $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$. Линейность означает линейность вектора Шепли как оператора на этом пространстве, то есть для любых игр v_1, v_2, v и коэффициента $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$\Phi(v_1) + \Phi(v_2) = \Phi(v_1 + v_2)$; $\alpha \Phi(v) = \Phi(\alpha v)$.

(4) (*болваны не получают ничего*) Игрок i называется *болваном*, если для любой коалиции K выполнено $v(K \cup \{i\}) = v(K)$. Для любого болвана соответствующая координата вектора Шепли равна 0.

Задача 10*. Пусть есть *правило* (нахождения справедливого дележа), то есть отображение Φ из множества игр (с побочными платежами и множеством игроков N) в $\mathbb{R}^N$; значение Φ на игре v обозначим через $\Phi(v)$. Докажите, что если для Φ выполнены свойства (1)-(4), то $\Phi(v)$ — вектор Шепли.

Из последних двух задач следует то, что вектор Шепли — разумный способ определить «справедливый» делёж в игре v. А если вектор Шепли ещё и лежит в ядре, то мы с уверенностью можем прогнозировать, что реализуется именно этот делёж. Однако, как показывает задача 8, вектор Шепли не всегда лежит в ядре, даже когда ядро непусто. Определим класс игр, для которых «всё хорошо»: и ядро непусто, и вектор Шепли там лежит. Более того, ядро образует многогранник, центром которого и является вектор Шепли.

Игру v будем называть *супемодулярной* или выпуклой, если для любых двух коалиций K и K' выполняется неравенство $v(K) + v(K') \leqslant v(K \cap K') + v(K \cup K')$.

Задача 11. Докажите, что игра v супермодулярна тогда и только тогда, когда для любых коалиций $K \subset L$ и игрока i выполнено неравенство $v(K \sqcup i) - v(K) \leqslant v(L \sqcup i) - v(L)$.

Задача 12. Какие из игр 1-6 являются супермодулярными?

Задача 13. Илья Муромец, Алеша Попович и Добрыня Никитич охотятся на Змеев-Горынычей. В одиночку никто из них не может одолеть ни одного Змея-Горыныча. Втроем — могут одолеть одного Змея-Горыныча за час, вдвоем — одолевают $\alpha \in (0; 1)$ Змеев-Горынычей в час.

а) Найдите ядро и вектор Шепли в зависимости от α. **б)** При каких α игра будет супермодулярной?

Задача 14. От шоссе до деревни Малое Гадюкино идет грунтовая дорога. Осенью дорога приходит в ужасное состояние, поэтому Малые Гадюкинцы на общем собрании решили заасфальтировать ее. При распределении затрат необходимо учесть тот факт, что деревня растянута вдоль дороги, и фактически Гадюкинцы живут на разных расстояниях от шоссе.

Всего в Малом Гадюкино обитает n семей, на расстояниях от шоссе, равных x_1, x_2,… x_n метров. За 1 рубль можно заасфальтировать 1 метр.

а) Сформулируйте данную игру как игру в характеристической форме, найдите в ней вектор Шепли. **б)** Будет ли игра супермодулярной?

Задача 15. **а)** Докажите, что вектор x^τ из определения вектора Шепли является ядерным дележом в случае супермодулярной игры. **б)** (*Теорема Шепли*) Докажите, что если игра v супермодулярна, то ядро непусто, а вектор Шепли лежит в ядре. **в)*** Докажите, что ядро состоит из выпуклых линейных комбинаций x^τ. Выведите отсюда, что вектор Шепли является центром ядра.

1	2	3	4	5	6	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	8 е	9	10	11	12	13 а	13 б	14 а	14 б	15 а	15 б	15 в