Всюду в этом листке, где упоминается пространство  $\mathbb{R}^n$ , имеется в виду, что оно снабжено евклидовой метрикой  $d_2$ .

Под словом «функция» подразумевается отображение в  $\mathbb{R}$ .

**Определение 1.** Точка a метрического пространства M называется  $npedenьной точкой множества <math>X \subset M$ , если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки a найдётся точка из X.

**Определение 2.** Подмножество U метрического пространства M называется omкрытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит какую-нибудь её  $\varepsilon$ -окрестность.

**Определение 3.** Подмножество B метрического пространства M называется  $\mathit{замкнутым}$ , если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 1°. Докажите, что  $U\subset M$  открыто тогда и только тогда, когда  $M\setminus U$  замкнуто.

**Задача 2.** Пусть M снабжено дискретной метрикой. Опишите все его открытые подмножества.

**Задача 3.** Множество X на плоскости обладает таким свойством, что его пересечение с любой прямой есть открытое подмножество этой прямой. Обязательно ли X открытое? Тот же вопрос, если все слова «открытое» заменить на «замкнутое».

**Определение 4.** Отображение  $f: M \to N$  непрерывно в точке  $m \in M$ , если для любой последовательности  $(x_i)$ , сходящейся к m, последовательность  $(f(x_i))$  сходится к f(m). Если f непрерывно во всех точках множества M, то говорят, что f непрерывно на M.

**Определение 5.** Отображение  $f: M \to N$  непрерывно на M (или просто непрерывно), если прообраз любого открытого множества открыт.

Задача 4°. Докажите эквивалентность определений 4 и 5.

**Задача 5.** Рассмотрим на  $\mathbb{R}^2$  функции вычисления суммы, разности, произведения и частного координат. Докажите, что они непрерывны на своей области определения.

Задача 6°. Докажите, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

Задача 7. Докажите, что сумма и произведение непрерывных функций непрерывны.

**Задача 8.** Докажите, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

**Задача 9.** Верно ли, что при непрерывном отображении открытые множества переходят в открытые? А замкнутые в замкнутые?

**Задача 10.** Пусть пространство M таково, что для любого метрического пространства N любое отображение  $f \colon M \to N$  непрерывно. Что можно сказать об M?

**Задача 11.** Пусть пространство N таково, что для любого метрического пространства M любое отображение  $f \colon M \to N$  непрерывно. Что можно сказать об N?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Листок №MS-3 Страница 2

**Определение 6.** Множество X называется cessins M, если из того, что X принадлежит объединению двух открытых непересекающихся множеств, следует, что оно принадлежит одному из этих множеств.

Определение 7. Множество X называется линейно-связным, если для любых двух его точек  $x_0$  и  $x_1$  существует путь из  $x_0$  в  $x_1$  (то есть непрерывное отображение  $f \colon [0,1] \to X$  такое, что  $f(0) = x_0$  и  $f(1) = x_1$ ).

Задача 12°. Докажите, что образ связного множества при непрерывном отображении связен.

**Задача 13°.** Докажите, что образ линейно-связного множества при непрерывном отображении линейно-связен.

Задача 14. Верно ли, что прообраз связного множества при непрерывном отображении связен?

Задача 15. Докажите, что если множество линейно-связно, то оно связно.

**Задача 16.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  открыто и связно. Докажите, что оно линейно-связно.

**Задача 17.** (задача- $wym\kappa a$ ) Множество X делит плоскость на две части (то есть его дополнение является несвязным объединением двух связных множеств). Обязательно ли X связно?

**Задача 18\*.** Приведите пример связного, но не линейно-связного подмножества в  $\mathbb{R}^n$  для какогонибудь n.

**Задача 19.** Пусть  $f \colon M \to N$  непрерывное взаимно-однозначное отображение. Верно ли, что  $f^{-1}$  тоже непрерывно?

**Определение 8.** Непрерывное взаимно-однозначное отображение  $f: M \to N$  называется гомеоморфизмом, если отображение  $f^{-1}$  непрерывно. В этом случае говорят, что M гомеоморфно N (обозначение:  $M \cong N$ ).

Задача 20. Какие из следующих пар множеств гомеоморфны между собой:

- а) прямая и парабола; б) прямая и гипербола; в) прямая и интервал;
- г) открытый круг и плоскость; д) сфера с выколотой точкой и плоскость;
- е) интервал и отрезок; ж) прямая и окружность; з) прямая и плоскость?

**Задача 21\*.** Пусть множества M и N таковы, что существуют непрерывное взаимно-однозначное отображение  $f \colon M \to N$  и непрерывное взаимно-однозначное отображение  $g \colon N \to M$ . Верно ли, что  $M \cong N$ ?

**Определение 9.** Множество называется *компактным* (или просто *компактом*), если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 22°. Докажите, что компактное множество замкнуто и ограничено. Верно ли обратное?

Задача 23°. Докажите, что образ компакта при непрерывном отображении — компакт.

Задача 24. Докажите, что непрерывная функция достигает на компакте своего максимума и минимума.

**Задача 25.** Выполняется ли принцип вложенных компактов для произвольного метрического пространства?

**Задача 26.** Известно, что  $f:[0,1]\to M$  непрерывно и взаимно-однозначно. Докажите, что f гомеоморфизм.

12	13	14	15	16	17	18	19	20 a	20 6	20 B	20 Г	20 Д	20 e	20 ж	20 3	21	22	23	24	25	26