Определение 1. Топологическим пространством называется пара $(X, \mathcal{T})$, состоящая из множества X и набора его подмножеств $\mathcal{T} = \{U_\alpha\}$, которые называются *открытыми,* так что:
(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$, то есть пустое множество и всё множество X открыты;
(ii) если $U, V \in \mathcal{T}$, то $U \cap V \in \mathcal{T}$, то есть пересечение двух открытых открыто;
(iii) если $\{V_\beta\}$ — произвольный набор открытых множеств, то $\bigcup_\beta V_\beta \in \mathcal{T}$, то есть произвольное объединение открытых множеств открыто.

Также говорят, что X снабжено структурой топологического пространства, или что на X задана топология.

Задача 1. Придумайте несколько топологий на множестве $X = \{a, b\}$.

Определение 2. *Окрестностью* точки называется любое открытое множество, эту точку содержащее.

Задача 2. а) Может ли у точки в топологическом пространстве не быть окрестностей?
б) Докажите, что на любом множестве можно задать топологию.

Задача 3. Пусть (M, d) — метрическое пространство. Положим открытыми те множества, которые вместе с каждой своей точкой содержат какую-нибудь её ε-окрестность. Докажите, что таким образом M наделяется структурой топологического пространства.

Таким образом, любое метрическое пространство является топологическим. В частности $\mathbb{R}^n$ с метрикой d_2 является топологическим пространством.

Задача 4. Докажите, что метрики d_1, d_2 и d_∞ индуцируют на $\mathbb{R}^n$ одну и ту же топологию.

Задача 5. а) Пусть Y — некоторое непустое подмножество метрического пространства (X, d). Докажите, что метрика на X индуцирует на Y структуру метрического пространства.
б) Пусть Y — некоторое непустое подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Положим открытыми в Y пересечения открытых в X множеств с Y. Докажите, что это правило задаёт на Y топологию, которая называется *индуцированной.*

Задача 6. а) Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ можно представить как объединение интервалов (то есть множество интервалов является *базой* топологии) **б)** Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением непересекающихся интервалов и лучей.

Определение 3. Точка $x \in X$ называется *предельной точкой множества M,* если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M (отличную от x).

Определение 4. Множество M в топологическом пространстве называется *замкнутым,* если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 7. а) Докажите, что объединение и пересечение двух замкнутых множеств замкнуто;
б) Докажите, что произвольное пересечение замкнутых также замкнуто;
в) Покажите, что произвольное объединение замкнутых подмножеств не обязано быть замкнутым.
г) Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

1	2 а	2 б	3	4	5 а	5 б	6 а	6 б	7 а	7 б	7 в	7 г

Задача 8. Докажите, что шар $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in M \mid d(x, x_0) \leqslant \varepsilon\}$ в метрическом пространстве M является замкнутым.

Задача 9. (*принцип вложенных шаров*) Докажите, что метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку.

Задача 10*. Докажите, что стремление радиусов к нулю существенно, то есть существует полное пространство и последовательность вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.
(Подсказка: Можно построить метрику на N так, чтобы $d(x, y) > 1$ при $x \neq y$)

Определение 5. Топологическое пространство называется *компактным,* если из любого покрытия его открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Задача 11. **а)** Докажите, что любое конечное топологическое пространство компактно.
б) Приведите пример некомпактного топологического пространства.
в) Докажите, что отрезок компактен.

Задача 12*. Докажите, что подмножество в $(\mathbb{R}^n, d_2)$ является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Задача 13. Докажите, что подмножество компактного топологического пространство компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

Задача 14. **а)** Дайте определение *непрерывной* функции $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ так, чтобы оно совпадало с определением непрерывности в случае метрических пространств.
б) Дайте определение непрерывности функции в точке. **в)*** Сформулируйте следующие утверждения как утверждения о непрерывности отображений топологических пространств (в некоторой точке): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Задача 15. Докажите, что непрерывная функция $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to \mathbb{R}$ на компактном X достигает своего наименьшего и наибольшего значения.

Задача 16. Докажите, что непрерывный образ компакта — компакт.

8	9	10	11 а	11 б	11 в	12	13	14 а	14 б	14 в	15	16

При изучении топологических пространств часто оказывается, что какие-то их них в некотором смысле одинаковые, то есть задавая интересующие нас вопросы (Является ли оно компактным? Является ли оно связным? Какие на нём бывают непрерывные функции? ...), мы получаем одинаковые ответы. Странно было бы отдельно доказывать компактность дуги окружности, когда уже известна компактность отрезка. Один из способов определить такую "одинаковость" — это отношение *гомеоморфности*.

Определение 1. *Гомеоморфизмом* называется взаимно-однозначное отображение топологических пространств $f\colon X \to Y$, такое что f и f^{-1} непрерывны. Если такое отображение существует, то пространства X и Y называются *гомеоморфными*. Обозначение $X \cong Y$.

Задача 1. Докажите, что гомеоморфность является отношением эквивалентности, то есть выполняются свойства:
(i) [Рефлексивность] $X \cong X$.
(ii) [Симметричность] Если $X \cong Y$, то $Y \cong X$.
(iii) [Транзитивность] Если $X \cong Y$ и $Y \cong Z$, то $X \cong Z$.

Задача 2. Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно-однозначное непрерывное отображение. Верно ли, что f — гомеоморфизм?

Задача 3. Привести пример двух негомеоморфных топологических пространств X и Y, таких что существуют взаимно-однозначные непрерывные отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$.

Определение 2. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любых двух его точек найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 4. **а)** Приведите пример нехаусдорфова топологического пространства. **б)** Доказать, что любое метрическое пространство хаусдорфово.

Задача 5. Пусть X — хаусдорфово компактное топологическое пространство. Докажите, что любой компакт в X замкнут.

Задача 6. **а)** Пусть X, Y — хаусдорфовы компактные топологические пространства. Пусть также $f\colon X \to Y$ непрерывное взаимно-однозначное отображение. Докажите, что f — гомеоморфизм. **б)** Верно ли это утверждение, если не требовать хаусдорфовости пространств?

Определение 3. *Путём* в пространстве X называется образ любого непрерывного отображения $f\colon [0,1] \to X$. Точки $f(0)$ и $f(1)$ называются соответственно *началом* и *концом* данного пути.

Задача 7. Докажите, что образ пути при гомеоморфизме также является путём.

Задача 8. В этой задаче считаем рассматриваемые пространства метрическими с метрикой d_2. Гомеоморфны ли: **а)** отрезок и прямая? **б)** квадрат и круг? **в)** точка и отрезок? **г)** интервал и прямая? **д)** отрезок и окружность? **е)** эллипс и окружность? **ж)** множество натуральных чисел и множество целых чисел? **з)** множество целых чисел и множество рациональных чисел?

Задача 9. Разбейте все буквы русского алфавита на классы гомеоморфности.

1	2	3	4 а	4 б	5	6 а	6 б	7	8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	8 е	8 ж	8 з	9

Определение 4. Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух непустых непересекающихся открытых подмножеств. Топологическое пространство называется *линейно-связным*, если для любых двух его точек найдётся путь, начинающийся в одной из них и заканчивающийся в другой.

Задача 10. Являются ли связными или линейно-связными следующие метрические пространства с естественной топологией? **а)** Пустое множество. **б)** Отрезок. **в)** n-мерный шар. **г)** n-мерная сфера (множество точек $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемых уравнением $x_1^2+\dots+x_{n+1}^2=1$). **д)** Множество рациональных чисел. **е)** Множество целых чисел. **ж)** Подмножество $\mathbb{R}^4$, задаваемое неравенством $x_1x_2 \neq x_3x_4$. **з)** Подмножество $\mathbb{R}^4$, задаваемое неравенством $x_1x_2 > x_3x_4$.

Задача 11. **а)** Правда ли, что любое связное топологическое пространство является линейно-связным? **б)** Правда ли, что любое линейно-связное топологическое пространство является связным? **в)** Те же вопросы для метрических пространств.

Задача 12. Докажите, что если топологическое пространство обладает свойством связности или линейной связности, то таким же свойством обладает его образ при непрерывном отображении.

Задача 13*. Докажите, что если из $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) выбросить конечное или счётное число точек, то оставшееся множество будет связным.

Задача 14. **а)** Опишите все линейно-связные множества на прямой. **б)** Опишите все связные множества на прямой. **в)** Гомеоморфны ли прямая и плоскость?

Задача 15. Пусть X — топологические пространство обладающее следующим свойством: у любой его точки найдётся окрестность, гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$ (для некоторого n). Докажите, что свойства связности и линейной связности для X равносильны.

Задача 16. Приведите пример открытого множества $X \subset \mathbb{R}^2$ и точки x его границы, таких что не существует непрерывного отображения $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ с условиями $f(a) \in X$, при $a < 1$ и $f(1) = x$.

10 а	10 б	10 в	10 г	10 д	10 е	10 ж	10 з	11 а	11 б	11 в	12	13	14 а	14 б	14 в	15	16

Гомотопии

Определение 1. Пусть X, Y — топологические пространства, f, g — два непрерывных отображения X в Y. Отображения f и g называются *гомотопными,* если существует такое непрерывное отображение $F : [0,1] \times X \to Y$, что $F(0,x) = f(x)$, $F(1,x) = g(x)$ для любого $x \in X$. Отображение F называется *гомотопией, связывающей f с g.*

Задача 1. Докажите, что гомотопность отображений — отношение эквивалентности.

Задача 2. Докажите, что любые два непрерывных отображения из X в Y гомотопны, если **а)** X — любое, $Y = [0,1]$; **б)** X — любое, $Y = \mathbb{R}$; **в)** $X = [0,1]$, Y — линейно связное.

Определение 2. Пусть X — метрическое пространство, a, b — две его точки, $f(t), g(t)$ — два пути с началом в точке a и концом в точке b. Пути f и g называются *гомотопными,* если существует такое непрерывное отображение $F : [0,1] \times [0,1] \to X$, что $F(0,t) = f(t)$, $F(1,t) = g(t)$, $F(\tau,0) = a$, $F(\tau,1) = b$ для любых $t, \tau \in [0,1]$. Отображение F называется *гомотопией, связывающей f с g.*

Напоминание. Мы обозначаем через S^1 окружность единичного радиуса в плоскости $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат, причем саму плоскость мы отождествляем со множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$. Таким образом,
$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi it} \mid t \in [0,1]\}.$$

Задача 3. Пусть f, g — два пути в X. Определим отображение h окружности S^1 в X, положив
$$h\left(e^{2\pi it}\right) = \begin{cases} f(2t), & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ g(2-2t), & \text{при } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Докажите, что пути f и g гомотопны тогда и только тогда, когда отображение h гомотопно постоянному отображению (то есть, переводящему окружность S^1 в одну точку).

Степень отображения

Степенью непрерывного отображения окружности в себя называется, говоря неформально, число раз, которое окружность на себя «наматывается» при этом отображении. Для того, чтобы дать точное определение, нам понадобится некоторая подготовка.

Определение 3. Пусть $f : X \to S^1$ и $g : X \to \mathbb{R}$ — непрерывные отображения метрического пространства X. Отображение g называется *поднятием* отображения f на $\mathbb{R}$, если $f(x) = e^{2\pi i g(x)}$ для любого $x \in X$.

Задача 4. Пусть $X = [0,1]$, $f(x) = e^{2\pi ix}$. Опишите все поднятия отображения f на $\mathbb{R}$.

Задача 5. Пусть $X = S^1$, $f(x) = x$. Существует ли поднятие у этого отображения?

Задача 6. Пусть f — некоторый путь в окружности S^1, то есть непрерывное отображение $f : [0,1] \to S^1$.
а) Докажите, что у пути f существует поднятие на прямую $\mathbb{R}$.
б) Пусть g_1, g_2 — поднятия f на $\mathbb{R}$. Докажите, что $g_1(t) - g_2(t) = k$, где k — некоторая целая константа.

Указание. Рассмотрите сначала путь f, лежащий в полуокружности; затем воспользуйтесь равномерной непрерывностью непрерывной функции на отрезке.

Определение 4. Пусть $h : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение. Рассмотрим путь $f(t) = h(e^{2\pi it})$ и его поднятие $g(t)$. Число $g(1) - g(0)$ называется *степенью отображения h.*

Задача 7. Докажите, что степень отображения $h : S^1 \to S^1$ определена корректно (то есть не зависит от выбора поднятия).

Задача 8. Чему равна степень отображения $h(z) = z^n$, где n — целое число?

Задача 9. Пусть $h : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение, $w_0 \in S^1$. Назовем точку $z_0 \in S^1$ *положительным прообразом* точки w_0, если $h(z_0) = w_0$ и при проходе z через z_0 против часовой стрелки значение $h(z)$ проходит через w_0 в том же направлении. Строго последнее условие записывается так: для всех z из некоторой окрестности точки z_0 комплексное число $h(z)/w_0$ имеет мнимую часть того же знака, что и мнимая часть z/z_0. Аналогично определяем *отрицательный прообраз* точки w_0 (при проходе через него против часовой стрелки $h(z)$ проходит через w_0 по часовой стрелке).

Предположим, что у точки w_0 конечное число прообразов, причем все они либо положительные, либо отрицательные. Докажите, что степень отображения h равна разности числа положительных прообразов точки w_0 и числа ее отрицательных прообразов.

1	2 а	2 б	2 в	3	4	5	6 а	6 б	7	8	9

Задача 10. **а)** Докажите, что у любого непрерывного отображения квадрата $[0,1]\times[0,1]$ в окружность есть поднятие на прямую. **б)** Пусть f_1 и f_2 — гомотопные пути в окружности. Докажите, что у них существуют гомотопные поднятия на прямую.

Задача 11. Докажите, что степень отображения $f: S^1 \to S^1$ не меняется при гомотопии.

Задача 12. **а)** Докажите, что если отображение $f : S^1 \to S^2$ не является сюрьекцией, то оно гомотопно отображению в точку. **б)** Докажите, что двумерная сфера S^2 не гомеоморфна двумерному тору $T^2 = S^1 \times S^1$.

Задача 13. Отображение окружности в себя называется *нечетным,* если диаметрально противоположные точки переходят в диаметрально противоположные, и *четным,* если диаметрально противоположные точки переходят в одну и ту же точку. Докажите, что степень нечетного отображения — нечетное число, а степень четного отображения — четное число.

Порядок замкнутой кривой относительно точки

Определение 5. *Замкнутой кривой* в пространстве X называется путь, у которого конец совпадает с началом.

Определение 6. Пусть γ — замкнутая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$, которую мы отождествляем с $\mathbb{C}$, а P — точка плоскости, не лежащая на кривой γ. Рассмотрим следующее отображение окружности S^1 в себя:

$$e^{2\pi it} \mapsto \frac{\gamma(t)-P}{|\gamma(t)-P|}.$$

Степень этого отображения называется *порядком кривой* γ *относительно точки* P и обозначается $\mathrm{ord}_P(\gamma)$.

Задача 14. Нарисуйте кривые γ_1 и γ_2 и найдите их порядки относительно точек $(0,0)$, $(1,0)$ и $(-1,0)$, где

$$\gamma_1(t) = (\cos(2\pi t) - 1/2, \sin(4\pi t)) \quad \text{и} \quad \gamma_2(t) = (\cos(2\pi t)/2 + 3\cos(4\pi t)/4, \sin(4\pi t)).$$

Задача 15. Пусть γ — замкнутая кривая в плоскости $\mathbb{R}^2$, а P — точка плоскости, не лежащая на кривой γ. Проведем произвольный луч l из точки P. Определите понятия положительной и отрицательной точки пересечения луча l с кривой γ так, чтобы было верно утверждение: если существует лишь конечное число точек пересечения луча l с кривой γ, причем все они либо положительны, либо отрицательны, то $\mathrm{ord}_P(\gamma)$ равен разности числа положительных и числа отрицательных точек пересечения.

Задача 16. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами. Докажите, что порядок кривой $\gamma_R(t) = f(Re^{2\pi it})$ относительно точки $0 \in \mathbb{C}$ при $R \gg 0$ равен n.

Задача 17. Поставим в соответствие каждой замкнутой кривой γ в $\mathbb{R}^2$, не проходящей через точку P, отображение $\check{\gamma} : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$:

$$\check{\gamma}(e^{2\pi it}) = \gamma(t).$$

Докажите, что если отображения $\check{\gamma}_1$ и $\check{\gamma}_2$ гомотопны, то $\mathrm{ord}_P(\gamma_1) = \mathrm{ord}_P(\gamma_2)$.

Задача 18. Пусть f — непрерывное отображение единичного круга в плоскость, $\gamma(t) = f(e^{2\pi it})$, P — точка, не лежащая на кривой γ. Докажите, что если $\mathrm{ord}_P(\gamma) \neq 0$, то уравнение $f(x) = P$ имеет решение.

Задача 19. (*Основная теорема алгебры*) Докажите, что любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Задача 20. Пусть γ — замкнутая кривая на плоскости, P — точка, не лежащая на ней. Докажите, что
- **а)** если точка P соединена с точкой P' путем, не пересекающим кривую γ, то выполнено равенство: $\mathrm{ord}_P(\gamma) = \mathrm{ord}_{P'}(\gamma)$.
- **б)** найдется такая окрестность точки P, что относительно любой точки из нее порядок γ такой же, как и относительно P.

Задача 21. (*Н.Н.Константинов*) Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A и связанные веревкой длины 2, смогли проехать в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса 1, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Задача 22. На плоскости нарисован граф Г. Его образ при сдвиге на некоторый вектор длины 1 не пересекается с Г. По графу ползают два круглых жука диаметром 1 (центр каждого жука все время принадлежит Г). Могут ли они поменяться местами?

10 а	10 б	11	12 а	12 б	13	14	15	16	17	18	19	20 а	20 б	21	22