Листок №69 — **Суммирование рядов** — 04.10 – 08.10.2021
14/11/8 з. на 5/4/3

Определение 1. Пусть (a_n) — любая последовательность чисел. Формальное выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ называют *рядом.* Число $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ называют *n-й частичной суммой* ряда. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится*, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$, и тогда этот предел называют *суммой ряда*; иначе говорят, что ряд *расходится.*

Задача 1. Какие из следующих рядов сходятся? Найдите их суммы.
а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{q^n}$, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$; **в)** (*гармонический ряд*) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$; **д)*** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}$;
е) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; **ж)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$; **з)*** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}$.

Задача 2. **а)** Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. **б)** Верно ли обратное?
в) (*Критерий Коши сходимости ряда.*) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что из $n \geqslant m > N$ (где $n, m \in \mathbb{N}$) следует $|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$.

Задача 3. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится, но $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \infty$?

Задача 4. Верно ли, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$?

Задача 5. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$, где $a_n = 1$, если в десятичной записи числа n нет цифры 9, и $a_n = 0$ в противном случае?

Задача 6. Пусть $a_n \geqslant 0$ при $n \in \mathbb{N}$. **а)** Докажите, что если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ сходится. **б)** Верно ли обратное?

Задача 7. Пусть $a_n \geqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция (перестановка натурального ряда). Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ (то есть, ряд слева от знака равенства сходится тогда и только тогда, когда и ряд справа, причём их суммы равны).

Задача 8*. Пусть p_n — n-е простое число, $n \in \mathbb{N}$.
а) Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-1/p_1^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-1/p_n^2}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
б) Существует ли предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-1/p_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-1/p_n}\right)$? **в)** Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{p_n}$?

Задача 9*. **а)** Пусть γ_k — сумма ряда $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$. Найдите сумму $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\gamma_k$.
б) (*Эйлер.*) Пусть A — множество всех целых чисел, представимых в виде n^k, где n, k — целые числа, большие 1. Найдите сумму $\sum\limits_{a\in A}\frac{1}{a-1}$.

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	1 е	1 ж	1 з	2 а	2 б	2 в	3	4	5	6 а	6 б	7	8 а	8 б	8 в	9 а	9 б