

[illegible]

Определение 6. Множество X называется *связным*, если из того, что X принадлежит объединению двух открытых непересекающихся множеств, следует, что оно принадлежит одному из этих множеств.

Определение 7. Множество X называется *линейно-связным*, если для любых двух его точек x_0 и x_1 существует путь из x_0 в x_1 (то есть непрерывное отображение $f: [0, 1] \rightarrow X$ такое, что $f(0) = x_0$ и $f(1) = x_1$).

Задача 12°. Докажите, что образ связного множества при непрерывном отображении связан.

Задача 13°. Докажите, что образ линейно-связного множества при непрерывном отображении линейно-связен.

Задача 14. Верно ли, что прообраз связного множества при непрерывном отображении связан?

Задача 15. Докажите, что если множество линейно-связно, то оно связно.

Задача 16. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто и связно. Докажите, что оно линейно-связно.

Задача 17. (*задача-шутка*) Множество X делит плоскость на две части (то есть его дополнение является несвязным объединением двух связных множеств). Обязательно ли X связно?

Задача 18*. Приведите пример связного, но не линейно-связного подмножества в \mathbb{R}^n для какого-нибудь n .

Задача 19. Пусть $f: M \rightarrow N$ непрерывное взаимно-однозначное отображение. Верно ли, что f^{-1} тоже непрерывно?

Определение 8. Непрерывное взаимно-однозначное отображение $f: M \rightarrow N$ называется *гомеоморфизмом*, если отображение f^{-1} непрерывно. В этом случае говорят, что M *гомеоморфно* N (обозначение: $M \cong N$).

Задача 20. Какие из следующих пар множеств гомеоморфны между собой:

а) прямая и парабола; б) прямая и гипербола; в) прямая и интервал;
г) открытый круг и плоскость; д) сфера с выколотой точкой и плоскость;
е) интервал и отрезок; ж) прямая и окружность; з) прямая и плоскость?

Задача 21*. Пусть множества M и N таковы, что существуют непрерывное взаимно-однозначное отображение $f: M \rightarrow N$ и непрерывное взаимно-однозначное отображение $g: N \rightarrow M$. Верно ли, что $M \cong N$?

Определение 9. Множество называется *компактным* (или просто *компактом*), если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 22°. Докажите, что компактное множество замкнуто и ограничено. Верно ли обратное?

Задача 23°. Докажите, что образ компакта при непрерывном отображении — компакт.

Задача 24. Докажите, что непрерывная функция достигает на компакте своего максимума и минимума.

Задача 25. Выполняется ли принцип вложенных компактов для произвольного метрического пространства?

Задача 26. Известно, что $f: [0, 1] \rightarrow M$ непрерывно и взаимно-однозначно. Докажите, что f — гомеоморфизм.

12	13	14	15	16	17	18	19	20 а	20 б	20 в	20 г	20 д	20 е	20 ж	20 з	21	22	23	24	25	26