Листок №GEO-1 **Кватернионы и вращения** 2022.01

Определение 1. Пусть V — трехмерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом i, j, k. Алгеброй *кватернионов* называется векторное пространство $\mathbb{H} := \mathbb{R} \oplus V$ с ассоциативным умножением, определямым правилом $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Задача 1. Составьте таблицу умножения базисных элементов 1, i, j, k.

Задача 2*. Проверьте, что умножение, задаваемое таблицей из предыдущей задачи, действительно ассоциативно.
Утверждением этой задачи можно далее пользоваться без доказательства.

Определение 2. *Нормой* кватерниона $q = a + bi + cj + dk$ называется действительное число $N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. *Сопряженным* к кватерниону $q = a + v$ называется кватернион $\bar{q} := a - v$.

Задача 3. **а)** $N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q$; **б)** $N(q_1 q_2) = N(q_1)N(q_2)$.

Задача 4. **а)** Если два целых числа представимы в виде суммы четырех квадратов, то и их произведение представимо в виде суммы четырех квадратов.
б) Аналогичное утверждение для сумм трех квадратов неверно.

Задача 5. Кватернионы образуют *тело*: для них выполнены все аксиомы поля, за исключением коммутативности умножения.

Задача 6. Выразите $(q_1 q_2)^{-1}$ через q_1^{-1} и q_2^{-1}.

Определение 3. *Векторным произведением* двух векторов u и v в $\mathbb{R}^3$ называется вектор $[u, v]$, перпендикулярный плоскости векторов u и v и имеющий длину $|u| \cdot |v| \cdot \sin\varphi$.

Задача 7. Если u и v два вектора, то $uv = -(u, v) + [u, v]$, где $(-, -)$ — скалярное произведение, а $[-, -]$ — векторное произведение.

Задача 8. Выясните, в какие тождества для скалярного и векторного произведения превращается ассоциативность кватернионного умножения $(uv)w = u(vw)$ и докажите тождество Якоби, $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$.

Задача 9. **а)** Если v — вектор единичной длины, то $v^2 = -1$.
б) Если u и v два ортогональных вектора, то $uv = -vu$.

Задача 10. Отображение $\mathrm{Ad}_q : v \mapsto qvq^{-1}$ **а)** переводит вектора в вектора; **б)** является движением.

Задача 11. Найдите матрицу оператора Ad_q для **а)** $q = i$; **б)** $q = \cos\varphi + i\sin\varphi$; что это за движение?

Задача 12. **а)** Любой поворот вокруг оси можно представить в виде Ad_q для некоторого кватерниона q единичной нормы.
б) Сколькими способами это можно сделать?

Задача 13. **а)** Композиция сохраняющих начало координат вращений трехмерного пространства — вращение.
б) Движение пространства, сохраняющее ориентацию и имеющее неподвижную точку, является поворотом вокруг некоторой оси.

1	2	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6	7	8	9 а	9 б	10 а	10 б	11 а	11 б	12 а	12 б	13 а	13 б

Задача 14. **а)** Пусть r — поворот на угол $\dfrac{\pi}{2}$ вокруг оси $(1,0,0)$, а t — на угол $\dfrac{2\pi}{3}$ вокруг оси $(1,1,1)$. Найдите ось и угол поворота $s = rt$.

б) Сколько всего вращений можно получить, компонуя преобразования r и t?

Задача 15. Рассмотрим кватернионы как двумерное комплексное векторное пространство: $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$.

а) Найдите матрицы (левого) умножения на элементы 1, i, j, k.

б) Алгебра кватернионов изоморфна алгебре комплексных матриц[1] 2×2 вида $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$.

Задача 16. Убедитесь, что отображение Ad задает сюръективный гомоморфизм $Sp_1 \to SO_3$ и найдите его ядро.

Задача 17. **а)** Найдите группу вращений тетраэдра.

б) Опишите явно прообраз $2T$ этой группы при гомоморфизме $Sp_1 \to SO_3$.

(Совет: тетраэдр удобно взять вписанным в стандартный единичный куб.)

в)* Выпуклая оболочка точек из $2T$ образует правильный 4-мерный многогранник (какие у него гиперграни и сколько их?).

Задача 18. **а)** Найдите группу вращений куба (или октаэдра).

б) Опишите явно прообраз этой группы при гомоморфизме $Sp_1 \to SO_3$.

Предупреждение: выпуклая оболочка этих точек правильного многогранника *не* образует.

Задача 19*. **а)** Группа вращений додекаэдра (или икосаэдра) изоморфна группе A_5.

б) Опишите явно прообраз $2I$ этой группы при гомоморфизме $Sp_1 \to SO_3$.

в) Выпуклая оболочка точек из $2I$ образует правильный 4-мерный многогранник (какие у него гиперграни и сколько их?).

Задача 20. Если q — кватернион единичной нормы, то отображение $\mathbb{H} \to \mathbb{H}, v \mapsto -q\bar{v}q$ является отражением 4-мерного пространства относительно 3-мерного подпространства с нормалью q.

Задача 21. **а)** Если l и r — кватернионы единичной нормы, то $m_{l,r}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, v \mapsto lvr^{-1}$ — движение 4-мерного пространства.

б) Отображение $m\colon Sp_1 \times Sp_1 \to SO_4$ является сюръективным гомоморфизмом.

в) Найдите ядро этого гомоморфизма.

14 а	14 б	15 а	15 б	16	17 а	17 б	17 в	18 а	18 б	19 а	19 б	19 в	20	21 а	21 б	21 в

[1]Отсюда следует, в частности, ассоциативность кватернионного умножения.