Определение 1. Пусть G — группа преобразований множества X, а H — группа преобразований множества Y. Группы G и H называются *изоморфными,* если найдётся биекция $\varphi\colon G \to H$, при которой тождественное преобразование переходит в тождественное, обратное — в обратное, а композиция преобразований — в композицию преобразований, то есть:
(i) $\varphi(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_Y$;
(ii) для каждого $g \in G$ верно: $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$;
(iii) для любых $g_1, g_2 \in G$ верно: $\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$.
Отображение φ в этом случае называется *изоморфизмом.* **Обозначение:** $G \simeq H$, $G \overset{\varphi}{\simeq} H$.

Задача 1. Правда ли, что если $G \simeq H$, то **а)** $\#G = \#H$; **б)** $\#X = \#Y$?

Задача 2. Пусть $\varphi\colon G \to H$ — биекция, такая что выполнено условие (iii) определения 1. Докажите, что φ является изоморфизмом.

Задача 3. Докажите, что следующие группы изоморфны:
а) группа вращений правильной 4-угольной призмы (не являющейся кубом) и группа движений квадрата;
б) группа движений куба и группа движений октаэдра;
в) группа вращений правильного n-угольника и группа вычетов по модулю n (см. задачу 7в). Эта группа обозначается $\mathbb{Z}_n$ или $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
г)* группа движений тетраэдра и группа вращений куба.

Задача 4. Пусть $\varphi\colon G \to H$ — изоморфизм. Докажите, что для любого элемента $g \in G$ верно: $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(\varphi(g))$;

Задача 5. Какие из следующих групп изоморфны:
1) группа вращений правильного 24-угольника;
2) группа движений правильного 12-угольника;
3) группа движений правильной 6-угольной призмы;
4) группа движений правильного тетраэдра;
5) группа S_4?

Абстрактные группы

Определение 2. *Абстрактной группой* (или просто *группой*) называется множество G с операцией умножения, обладающей следующими свойствами:
(i) $(ab)c = a(bc)$ для любых $a, b, c \in G$ (*ассоциативность*);
(ii) существует такое элемент $e \in G$ (*единица*), что $ae = ea = a$ для любого $a \in G$;
(iii) для всякого элемента $a \in G$ существует такой элемент $a^{-1} \in G$ (*обратный элемент*), что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Задача 6. Докажите, что всякая группа преобразований с операцией композиции является абстрактной группой.

Задача 7. Являются ли следующие множества с указанными операциями группами:
а) $(\mathbb{Z}, +)$; **б)** $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$; **в)** (остатки по модулю $5, +$); **г)** (остатки по модулю $5, \cdot$);
д) (ненулевые остатки по модулю $5, \cdot$); **е)** то же самое по модулю 10.

Задача 8. **а)** Пусть G — группа преобразований множества X, и $h \in G$. Докажите, что отображение $L_h\colon G \to G$, $g \xmapsto{L_h} h \circ g$ является преобразованием G (такое преобразование называется *левым сдвигом);*
б) Реализуйте произвольную абстрактную группу как группу преобразования некоторого множества.

Задача 9. Докажите, что в группе может быть только одна единица, только один обратный элемент.

Задача 10. Докажите, что группы 1) вращений окружности; 2) комплексных чисел, по модулю равных 1 с операцией умножения; и 3) группа матриц вида $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ с операцией умножения $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{smallmatrix}\right)$ изоморфны.