Метрические пространства: полнота

Определение 1. Последовательность (x_n) точек метрического пространства X называется *фундаментальной,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что если $m, n > N$, то $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Задача 1. **а)** Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной. **б)** Верно ли обратное?

Определение 2. Метрическое пространство X называется *полным,* если любая фундаментальная последовательность в нём является сходящейся.

Задача 2. Докажите, что вещественная прямая с естественной метрикой полна.

Задача 3. Докажите, что пространство $C([a, b])$ с равномерной метрикой является полной.

Определение 3. Отображение $f\colon X \to X$ из топологического пространства X в себя называется *сжимающим,* если найдётся константа $0 < \theta < 1$, что для любых $x, y \in X$ верно: $d(f(x), f(y)) < \theta d(x, y)$.

Задача 4. При каких условиях гомотетия является сжимающим отображением?

Задача 5. **а)** Докажите, что сжимающее отображение f полного метрического пространства X имеет неподвижную точку, то есть найдётся $x \in X$, что $f(x) = x$. **б)** Верно ли это в не полном метрическом пространстве? Подсказка к а): докажите, что любая последовательность $(f^n(x))$ фундаментальна

Задача 6. **а)** Докажите, что композиция гомотетии с коэффициентом, не равным ± 1 и любого движения имеет неподвижную точку; **б)** Докажите, что это преобразование является гомотетией.

Задача 7. Пусть функция $\alpha(x)$ дважды непрерывно дифференцируема (то есть вторая производная непрерывна) на отрезке $[a, b]$, имеет на нём корень $\widetilde{x}$, причём $f'(x) \neq 0$ всюду на $[a, b]$. Рассмотрим функцию $f(x) = x - \dfrac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}$.

а) Докажите, что $\alpha(\widetilde{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$;
б) Докажите, что f и f' непрерывны;
в) Докажите, что найдётся такое $\delta > 0$, что f на $U_\delta(\widetilde{x})$ осуществляет сжимающее отображение.
г) Что всё это значит и как это применять?
д) Найдите $\sqrt{2}$ с точностью до трёх знаков после запятой.