При изучении топологических пространств часто оказывается, что какие-то их них в некотором смысле одинаковые, то есть задавая интересующие нас вопросы (Является ли оно компактным? Является ли оно связным? Какие на нём бывают непрерывные функции? ...), мы получаем одинаковые ответы. Странно было бы отдельно доказывать компактность дуги окружности, когда уже известна компактность отрезка. Один из способов определить такую "одинаковость" — это отношение *гомеоморфности.*

Определение 1. *Гомеоморфизмом* называется взаимно-однозначное отображение топологических пространств $f\colon X \to Y$, такое что f и f^{-1} непрерывны. Если такое отображение существует, то пространства X и Y называются *гомеоморфными.* Обозначение $X \cong Y$.

Задача 1. Докажите, что гомеоморфность является отношением эквивалентности, то есть выполняются свойства:
(i) [Рефлексивность] $X \cong X$.
(ii) [Симметричность] Если $X \cong Y$, то $Y \cong X$.
(iii) [Транзитивность] Если $X \cong Y$ и $Y \cong Z$, то $X \cong Z$.

Задача 2. Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно-однозначное непрерывное отображение. Верно ли, что f — гомеоморфизм?

Задача 3. Привести пример двух негомеоморфных топологических пространств X и Y, таких что существуют взаимно-однозначные непрерывные отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$.

Определение 2. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любых двух его точек найдутся непересекающиеся окрестности.

Задача 4. **а)** Приведите пример нехаусдорфова топологического пространства. **б)** Доказать, что любое метрическое пространство хаусдорфово.

Задача 5. Пусть X — хаусдорфово компактное топологическое пространство. Докажите, что любой компакт в X замкнут.

Задача 6. **а)** Пусть X, Y — хаусдорфовы компактные топологические пространства. Пусть также $f\colon X \to Y$ непрерывное взаимно-однозначное отображение. Докажите, что f — гомеоморфизм. **б)** Верно ли это утверждение, если не требовать хаусдорфовости пространств?

Определение 3. *Путём* в пространстве X называется образ любого непрерывного отображения $f\colon [0,1] \to X$. Точки $f(0)$ и $f(1)$ называются соответственно *началом* и *концом* данного пути.

Задача 7. Докажите, что образ пути при гомеоморфизме также является путём.

Задача 8. В этой задаче считаем рассматриваемые пространства метрическими с метрикой d_2. Гомеоморфны ли: **а)** отрезок и прямая? **б)** квадрат и круг? **в)** точка и отрезок? **г)** интервал и прямая? **д)** отрезок и окружность? **е)** эллипс и окружность? **ж)** множество натуральных чисел и множество целых чисел? **з)** множество целых чисел и множество рациональных чисел?

Задача 9. Разбейте все буквы русского алфавита на классы гомеоморфности.

Определение 4. Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух непустых непересекающихся открытых подмножеств. Топологическое пространство называется *линейно-связным*, если для любых двух его точек найдётся путь, начинающийся в одной из них и заканчивающийся в другой.

Задача 10. Являются ли связными или линейно-связными следующие метрические пространства с естественной топологией? **а)** Пустое множество. **б)** Отрезок. **в)** n-мерный шар. **г)** n-мерная сфера (множество точек $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемых уравнением $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$). **д)** Множество рациональных чисел. **е)** Множество целых чисел. **ж)** Подмножество $\mathbb{R}^4$, задаваемое неравенством $x_1x_2 \neq x_3x_4$. **з)** Подмножество $\mathbb{R}^4$, задаваемое неравенством $x_1x_2 > x_3x_4$.

Задача 11. **а)** Правда ли, что любое связное топологическое пространство является линейно-связным? **б)** Правда ли, что любое линейно-связное топологическое пространство является связным? **в)** Те же вопросы для метрических пространств.

Задача 12. Докажите, что если топологическое пространство обладает свойством связности или линейной связности, то таким же свойством обладает его образ при непрерывном отображении.

Задача 13*. Докажите, что если из $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ выбросить конечное или счётное число точек, то оставшееся множество будет связным.

Задача 14. **а)** Опишите все линейно-связные множества на прямой. **б)** Опишите все связные множества на прямой. **в)** Гомеоморфны ли прямая и плоскость?

Задача 15. Пусть X — топологические пространство обладающее следующим свойством: у любой его точки найдётся окрестность, гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$ (для некоторого n). Докажите, что свойства связности и линейной связности для X равносильны.

Задача 16. Приведите пример открытого множества $X \subset \mathbb{R}^2$ и точки x его границы, таких что не существует непрерывного отображения $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ с условиями $f(a) \in X$, при $a < 1$ и $f(1) = x$.