Определение 1. Вершина V графа G называется висячей, если $\deg V=1$.

Задача 1. а) Сколько висячих вершин может иметь граф с *n* вершинами?

- **б)** Сколько висячих вершин может иметь связный граф с n вершинами?
- **в)** Сколько висячих вершин может иметь дерево с n вершинами?

Определение 2. Граф O называется *остовом* связного графа G, если O имеет те же вершины, что и G, является деревом и получается из G удалением некоторых рёбер.

Задача 2. Всякий ли связный граф имеет остов? Может ли граф иметь несколько различных остовов?

Задача 3. Всегда ли можно удалить некоторую вершину связного графа вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы граф остался связным?

Задача 4. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Определение 3. Говорят, что граф *плоский (планарный)*, если его рёбра не пересекаются (нигде, кроме вершин). Такой граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа.

Задача 5. Докажите, что связный плоский граф является эйлеровым если и только если его грани можно раскрасить в два цвета так, чтобы грани с общим ребром были разного цвета.

Задача 6. (Φ ормула Эйлера) Докажите, что если связный плоский граф имеет V вершин, E рёбер и F граней, то справедливо равенство: V - E + F = 2.

Задача 7. Является ли плоским полный граф с n вершинами, если **a)** n=4; **б)** n=5; **в)** n произвольно?

Задача 8. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

Задача 9. Пусть G — простой плоский граф. Докажите, что

- а) в графе G есть вершина степени меньше 6;
- **б)** вершины графа G можно правильно раскрасить в 5 или менее цветов.

1 a	<u>1</u> б	1 B	2	3	4	5	6	7 a	7 б	7 B	8	9 a	9 6

Листок №7д Страница 2

Задача 10. Докажите формулу Эйлера

а) для произвольного связного графа с непересекающимися рёбрами, нарисованного на сфере;

- б) для произвольного выпуклого многогранника.
- Задача 11. Дан выпуклый многогранник, грани которого являются n-угольниками, и в каждой вершине сходится k граней. Докажите, что 1/n + 1/k = 1/2 + 1/r, где r число его рёбер.
- **Задача 12.** Выпуклый многогранник называют *правильным*, если все его грани правильные n-угольники, и в каждой его вершине сходится k граней. Докажите, что любой такой многогранник либо тетраэдр, либо куб, либо октаэдр, либо додекаэдр, либо икосаэдр.
- **Замечание 1.** В каждой вершине тетраэдра сходится три треугольника. В каждой вершине октаэдра сходится четыре треугольника. В каждой вершине икосаэдра сходится пять треугольников. И, наконец, в каждой вершине додекаэдра сходится три пятиугольника.
- **Задача 13*.** В лесу $k \cdot l$ тропинок и несколько полянок. Каждая тропинка соединяет две полянки. Известно, что тропинки можно раскрасить в l цветов так, чтобы к каждой полянке сходились тропинки разного цвета. Докажите, что это можно сделать, покрасив каждым цветом ровно k тропинок.
- **Задача 14*.** В графе n вершин A_1, \ldots, A_n и n рёбер b_1, \ldots, b_n . Известно, что любые две вершины A_i и A_j этого графа соединены ребром если и только если рёбра b_i и b_j выходят из одной вершины. Докажите, что степень каждой вершины равна двум.
- Задача 15*. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Двое играют в такую игру: они по очереди соединяют какие-то две ещё не соединённые точки отрезком так, чтобы отрезки не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Зависит ли исход этой игры от того, как играют соперники?
- **Задача 16*.** Сколько остовов имеет граф с вершинами V_0, \dots, V_n и (2n-1) ребром, где вершина V_0 соединена рёбрами с остальными вершинами, и при $1 \le i < n$ соединены ребром вершины V_i и V_{i+1} ?
- **Задача 17*.** В гости ожидают m или n человек, где (m,n)=1. На какое наименьшее число секторов надо разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как m, так и n одинаковых кусков?
- **Задача 18*.** (*Теорема Кели*) Докажите, что полный граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

10 a	10 6	11	12	13	14	15	16	17	18