Признаки сходимости рядов

Задача 1. **а)** (*Признак сравнения Вейерштрасса*) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с неотрицательными членами. Пусть найдётся такой номер k, что при всех $n > k$, $n \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $b_n \geqslant a_n$. Тогда если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

б) (*Признак д'Аламбера*) Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны, и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Если $q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится. Что можно сказать о сходимости, если $q = 1$?

в) (*Признак Коши*) Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны, и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Если $q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится. Что можно сказать о сходимости ряда, если $q = 1$?

г) Приведите пример сходящегося ряда с положительными членами, к которому применим признак Коши, но не применим признак д'Аламбера. Бывает ли наоборот?

Задача 2. Исследуйте ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; **б)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$.

Задача 3. **а)** (*Теорема Лейбница*) Пусть $a_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и кроме того, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Тогда знакочередующийся ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$ сходится.

б) Верно ли утверждение теоремы без условия монотонности (a_n)?

Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Задача 4. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Задача 5. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится. Тогда абсолютно сходится произвольный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный из него перестановкой слагаемых, причём $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Задача 6. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

а) Докажите, что ряд, составленный из его положительных (или отрицательных) членов, расходится.

б) (*Теорема Римана.*) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно превратить перестановкой слагаемых как в расходящийся ряд, так и в сходящийся с произвольной наперёд заданной суммой.

в) Докажите, что можно так сгруппировать члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (не переставляя их), что ряд станет абсолютно сходящимся.

г)* Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд, составленный из комплексных чисел, S — множество всех перестановок σ натурального ряда, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится. Каким может быть множество $\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S\}$?

Задача 7. Пусть s — сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Найдите суммы

а) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$; **б)** $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$.

в) Переставьте члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ так, чтобы он стал расходящимся.

Задача 8. Существует ли такая последовательность (a_n), $a_n \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}$, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$ сходятся? Можно ли выбрать такую последовательность из положительных чисел?

Задача 9*. Существует ли такая последовательность (a_n), что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится?

Задача 10*. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любого сходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $\sum f(a_n)$ сходится. Докажите, что тогда найдётся такое число $C \in \mathbb{R}$, что $f(x) = Cx$ в некоторой окрестности нуля.