Листок №9д — **Группы преобразований: орбиты и стабилизаторы** — 03.2014

Определение 1. *Орбитой* элемента $x \in X$ при действии группы преобразований G называется множество $\{g(x) \mid g \in G\} \subset X$. **Обозначение** Gx.

Задача 1. Найдите орбиту каждой точки при действии группы движений
а) квадрата; **б)** куба; **в)** правильного m-угольника.

Задача 2. **а)** Опишите группу движений единичного круга; **б)** Найдите орбиту каждой точки при действии этой группы; **в)** Найдите преобразование, не имеющее конечного порядка.

Задача 3. Докажите, что любые две орбиты либо совпадают, либо не пересекаются. Следует ли отсюда, что всё множество X есть объединение непересекающихся орбит?

Задача 4. Докажите, что для любых двух элементов одной орбиты $a, b \in Gx$ найдётся элемент $g \in G$, такой что $g(a) = b$.

Определение 2. *Стабилизатором* элемента $x \in X$ при действии группы преобразований G называется множество $\{g \mid g(x) = x\} \subset G$. **Обозначение:** G_x.

Задача 5. Найдите стабилизаторы каждой из точек следующих множеств при действии их групп движений: **а)** квадрата; **б)** куба; **в)** правильного m-угольника.

Задача 6. Рассмотрим группу движений куба G. Эта группа также является группой преобразований следующих множеств: **а)** множества вершин куба; **б)** множества диагоналей куба; **в)** множества граней куба; **г)*** множества пар вершин куба. Опишите орбиты и стабилизаторы во всех случаях.

Задача 7. Пусть задана группа преобразований G множества X. Докажите, что стабилизатор любого элемента $x \in X$ также является группой преобразований множества X.

Задача 8. Пусть группа G конечна. Докажите, что для любых двух элементов одной орбиты $a, b \in Gx$ выполнено $|G_a| = |G_b|$.

Задача 9. Пусть группа G конечна. Докажите, что для любого $x \in X$ верно $|G| = |Gx| \cdot |G_x|$.

Задача 10. Пусть p — простое число. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}_p$ остатков по модулю p, ненулевой остаток a и группу G, действующую на $\mathbb{Z}_p$ домножениями на a^k (т.е. $G = \{g_0, g_1, g_2, \ldots\}$ и $g_k(x) = x \cdot a^k$).
а) Найдите орбиты действия этой группы;
б) (*малая теорема Ферма*) Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Определение 3. Функция, равная количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним, называется *функцией Эйлера* и обозначается через $\varphi(n)$.

Задача 11. (*теорема Эйлера*) Докажите, что если числа a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Задача 12. Образует ли группу множество преобразований плоскости, переводящих прямые в прямые?

Задача 13. **а)** Пусть G — группа преобразований множества X, и $h \in G$. Докажите, что отображение $\mathrm{ad}_h \colon G \to G$, $g \xmapsto{\mathrm{ad}_h} (h \circ g \circ h^{-1})$ является преобразованием G (такое преобразование называется *сопряжением*); **б)** Обозначим через $\widetilde{G} = \{\mathrm{ad}_h \mid h \in G\}$ множество всех сопряжений группы G. Докажите, что $\widetilde{G}$ образует группу;

Задача 14.** (*кубик Рубика*) Опишите геометрию кубика Рубика[1]:
а) Придумайте, как описать группу преобразований кубика Рубика;
б) Сколько различных состояний у кубика Рубика (чему равна $\#X$)?
в) Сколько состояний в орбите собранного кубика Рубика?
г) Сколько из этих состояний различимы у реального кубика?

1а	1б	1в	2а	2б	2в	3	4	5а	5б	5в	6а	6б	6в	6г	7	8	9	10а	10б	11	12	13а	13б	14а	14б	14в	14г

[1]У кубика Рубика 2125922464947725402112000 $\approx 2.126 \cdot 10^{24}$ различных состояний. Известно, что если кубик можно собрать, то это можно сделать за 20 хода. Примечательно, что ещё в 2009 году в этом листке вместо 20 стояло число 22.