Определение 1. *Радикальная ось* двух неконцентрических окружностей — это множество таких точек M, что касательные, проведённые из M к этим окружностям, имеют равные длины.

Задача 1. Докажите, что радикальная ось двух непересекающихся окружностей — прямая. Напишите уравнение этой прямой, если радиусы окружностей имеют длины r_1 и r_2, а их центры имеют координаты $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ соответственно. Нарисуйте окружности и их радикальную ось, если $a = 5$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ и если $a = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 6$.

Задача 2. Найдите радикальную ось двух **а)** пересекающихся; **б)** касающихся окружностей.

Определение 2. Пусть дана окружность S радиуса r с центром в точке O. *Степень точки M относительно окружности S* — это число, равное $MO^2 - r^2$.

Задача 3. Прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность S в точках A и B. Докажите, что степень точки M относительно окружности S равняется произведению длин отрезков MA и MB, взятому со знаком («+», если векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ одинаково направлены, и «−», если векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ противоположно направлены).

Задача 4. Даны две окружности S_1 и S_2. Опишите геометрическое место таких точек M, что степень M относительно S_1 такая же, как и степень M относительно S_2.

Определение 3. Две окружности, пересекающиеся в точках A и B, называют *перпендикулярными,* если касательные, проведённые к ним в точке A, пересекаются под прямым углом.

Задача 5. Докажите, что радикальная ось двух неконцентрических окружностей S_1 и S_2 совпадает с множеством центров окружностей, перпендикулярных одновременно и S_1, и S_2.

Пучки окружностей

Определение 4. *Пучок окружностей* — это множество всех окружностей и прямых, перпендикулярных к двум данным окружностям S_1 и S_2 (или к окружности и прямой, или к двум прямым). Говорят, что S_1 и S_2 *задают* этот пучок.

Задача 6. Нарисуйте пучки, задаваемые двумя неконцентрическими окружностями, которые
а) пересекаются (но не касаются); **б)** касаются; **в)** не пересекаются.

Задача 7. Нарисуйте пучок, задаваемый двумя
а) параллельными прямыми;
б) пересекающимися прямыми;
в) концентрическими окружностями.

Задача 8. Какие пучки могут задаваться прямой и окружностью (нарисуйте)?

Задача 9. Докажите, что окружность, перпендикулярная некоторым двум окружностям одного пучка, перпендикулярна всем окружностям этого пучка.

Задача 10. Докажите, что множество окружностей и прямых, перпендикулярных всем окружностям данного пучка, также является пучком (он называется *перпендикулярным* данному).

Задача 11. Нарисуйте пучки, перпендикулярные пучкам **а)** из задачи 6; **б)** из задачи 7.

Задача 12. Докажите, что радикальная ось любых двух окружностей одного пучка проходит через центры окружностей, задающих этот пучок. (Таким образом, радикальная ось — одна и та же для каждых двух окружностей одного пучка.)

Задача 13. **а)** Любые ли две окружности принадлежат некоторому пучку окружностей? **б)** Если такой пучок существует, то однозначно ли он определяется?

Задача 14. **а)** Пусть пучок задан двумя пересекающимися (но не касающимися) окружностями. Докажите, что через каждую точку плоскости проходит единственная окружность или прямая пучка. **б)** Что можно сказать в случае, когда окружности, задающие пучок, касаются? **в)** А если окружности, задающие пучок, не пересекаются?

Задача 15. **а)** Даны две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 из некоторого пучка. Пусть S — ещё одна окружность из того же пучка. Докажите, что для всех точек M на окружности S отношение степени M относительно S_1 к степени M относительно S_2 одно и то же (обозначим его $k(S)$) и равно OO_1/OO_2, где O, O_1, O_2 — центры S, S_1, S_2 соответственно. **б)** Верно ли, что для различных окружностей S и S' нашего пучка числа $k(S)$ и $k(S')$ также различны? **в)** Для каких чисел k найдется окружность S из нашего пучка, у которой $k(S) = k$? **г)** Что можно сказать, если исходные окружности S_1 и S_2 касаются или пересекаются?

Задача 16. Прямая l пересекает две неконцентрические окружности S_1 и S_2 в точках A, B и C, D соответственно. Пусть l_A, l_B, l_C, l_D — касательные, проведённые к S_1 и S_2 в соответствующих точках. Докажите, что точки пересечения прямых l_A, l_B с прямыми l_C, l_D **а)** лежат на радикальной оси S_1 и S_2, если l проходит через центр подобия этих окружностей; **б)** лежат на некоторой окружности S в противном случае. **в)** Докажите, что окружность S принадлежит тому же пучку, что и окружности S_1 и S_2.

Разные задачи

Задача 17. Даны три окружности с различными центрами. Проведём для каждой пары из этих окружностей прямую, содержащую радикальную ось этой пары. Докажите, что три проведённые прямые либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

Задача 18*. **а)** Шестиугольник описан около окружности. Докажите, что найдутся три окружности с таким свойством: каждая главная диагональ нашего шестиугольника будет лежать на радикальной оси каких-то двух из этих окружностей. **б)** (*Теорема Брианшона*) Шестиугольник описан около окружности. Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке.

Задача 19. Докажите, что прямые, проведённые через общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей, пересекаются в одной точке или параллельны друг другу.

Задача 20. Дана окружность S_1 и точка M вне её. Через точку M проводится переменная окружность S, пересекающая S_1 в точках A и B. Найдите геометрическое место точек пересечения прямой AB с касательной к S в точке M.

Задача 21. Как циркулем и линейкой построить радикальную ось двух данных окружностей?

Задача 22*. **а)** Даны точка A и две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Всегда ли найдётся окружность, проходящая через точку A и перпендикулярная окружностям S_1 и S_2? **б)** Как с помощью циркуля и линейки построить такую окружность (если она существует)?

Задача 23*. **а)** В выпуклом бумажном многоугольнике сделаны несколько одинаковых круглых дырок. Можно ли разрезать этот многоугольник на несколько меньших выпуклых многоугольников так, чтобы в каждом из них оказалось ровно по одной дырке? **б)** А если дырки круглые, но не обязательно одинаковые?

1	2 а	2 б	3	4	5	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	7 в	8	9	10	11 а	11 б	12	13 а	13 б	14 а	14 б	14 в	15 а	15 б	15 в	15 г	16 а	16 б	16 в	17	18 а	18 б	19	20	21	22 а	22 б	23 а	23 б