Аффинные преобразования плоскости

Задача 1. (*Теорема Шаля.*) Докажите, что любое движение плоскости представляет собой
а) параллельный перенос, поворот или скользящую симметрию;
б) композицию не более чем трёх осевых симметрий.

Определение 1. Пусть в пространстве заданы две плоскости π и π', параллельные или непараллельные между собой. Пусть l — прямая, не параллельная ни π, ни π'. *Параллельной проекцией π на π' вдоль l* называется отображение, сопоставляющее каждой точке $P \in \pi$ такую точку $P' \in \pi'$, что прямая PP' параллельна прямой l. Любое отображение плоскости π на плоскость π', которое можно представить в виде композиции параллельных проекций, называется *аффинным.* Аффинное отображение плоскости π на себя называется *аффинным преобразованием.*

Задача 2. Докажите, что следующие преобразования являются аффинными:
а) параллельный перенос; **б)** осевая симметрия; **в)** поворот; **г)** любое движение.

Задача 3. Зададим на плоскости прямоугольную систему координат. Докажите, что следующие отображения являются аффинными преобразованиями:
а) $(x, y) \mapsto (ax, y)$, где $a \neq 0$;
б) гомотетия с центром в начале координат;
в) любое преобразование подобия;
г) $(x, y) \mapsto (x + by, y)$, где b — любое число;
д) $(x, y) \mapsto (ax + by + \alpha, cx + dy + \beta)$, где $ad - bc \neq 0$.

Задача 4. Докажите, что аффинные преобразования
а) переводят прямые в прямые;
б) переводят отрезки в отрезки;
в) переводят параллельные прямые в параллельные прямые;
г) сохраняют отношения длин отрезков, лежащих на параллельных прямых;
д) переводят параллелограммы в параллелограммы;
е) сохраняют отношения площадей.

Задача 5. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два произвольных треугольника. Докажите, что существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$ с сохранением порядка вершин.

Применения аффинных преобразований

Задача 6. Используйте аффинные преобразования для доказательства того, что три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 7. Используйте аффинные преобразования для доказательства «замечательного свойства трапеции»: в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Задача 8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M, N, P и построены симметричные им точки M', N', P' относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что треугольники MNP и $M'N'P'$ равновелики.

Задача 9. Пусть M, N и P — точки, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC и делящие эти стороны в одинаковых отношениях ($\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$). Докажите, что

а) точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC;

б) точка пересечения медиан треугольника, образованного прямыми AN, BP и CM, совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Задача 10. Пусть у четырёхугольника $ABCD$ никакие две стороны не параллельны. Докажите, что прямая, соединяющая середины его диагоналей, делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечений продолжений противоположных сторон.

Задача 11. Докажите, что с помощью только карандаша и односторонней линейки без делений нельзя опустить перпендикуляр на данную прямую.

Задача 12. Выпуклый пятиугольник P гомотетичен пятиугольнику, построенному на серединах его сторон. Обязательно ли тогда P — правильный?

Задача 13. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбрали соответственно точки K, L и M так, что $AK : KB = BL : LC = CM : MA = 1 : \sqrt{3}$. Прямые AL, BM и CK пересекаются в точках A', B' и C', образуя новый треугольник, на сторонах которого аналогичным образом выбирают точки K', L', M' и получают треугольник $A''B''C''$, и так далее. Докажите, что на каком-то шаге мы получим треугольник, подобный исходному.

1 а	1 б	2 а	2 б	2 в	2 г	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	4 е	5	6	7	8	9 а	9 б	10	11	12	13