Цепные дроби

Определение 1. Цепной дробью (конечной или бесконечной) $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2 \ldots \in \mathbb{N}$ называется выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} .$$

Рациональные число $S_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ называется n-ой подходящей дробью цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Числитель n-ой подходящей дроби S_n обозначается p_n, знаменатель — q_n, так что и p_n, и q_n являются многочленами от букв $a_0, \ldots, a_n$, например, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$.

Задача 1. **а)** Выразите p_n и q_n через числители и знаменатели S_{n-1} и S_{n-2}.
б) докажите тождество: $S_{n+1} - S_n = \dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$.
в) докажите, что всякая подходящая дробь несократима.

Задача 2. Докажите, что для всякой цепной дроби последовательность подходящих дробей имеет предел.

Таким образом, корректно определено *значение* цепной дроби.

Задача 3. Для всякой конечной цепной дроби $[a_0; a_1, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, \ldots, a_n - 1, 1]$. Докажите, что это единственный случай, когда разные цепные дроби могут иметь одинаковые значения.

Задача 4. Докажите, что всякое вещественное число единственным (в смысле предыдущей задачи) образом представляется в виде цепной дроби. Опишите алгебраически и геометрически алгоритм представления числа в виде цепной дроби.

Задача 5. **а)** Пусть НОД$(m, n) = 1$. Как, зная разложение m/n в цепную дробь, найти решение диофантова уравнения $mx + ny = 1$?
б) Пусть m и n - целые ненулевые числа. Как найти НОД(m, n) из представления m/n в виде цепной дроби? Какое отношение к представлению рациональных чисел цепными дробями имеет алгоритм Евклида?

Задача 6. **а)** Вещественное число называется *квадратичной иррациональностью*, если оно является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Докажите, что цепная дробь, представляющая квадратичную иррациональность, периодична.
б)* докажите обратное утверждение: если цепная дробь периодична, то она представляет квадратичную иррациональность.

Определение 2. Показателем качества (или коэффициентом качества) приближения p/q числа α (где $p, q \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{Q}$) называется число $q \cdot |\alpha - \frac{p}{q}|$. Из двух приближений лучшим считается то, у которого показатель качества меньше.

Задача 7. Пусть α - вещественное число. Докажите, что для любого $q \in \mathbb{N}$ существует рациональное приближение p/q числа α с показателем качества меньшим $1/2$.

Задача 8. **а)** Какое из приближений числа $\sqrt{2}$ лучше: $3/2; 7/5$; или $1,41$?
б) Какое из приближений числа π лучше: $3; 3,14$; или $22/7$?

Задача 9. **а)** Докажите, что n-я подходящая дробь приближает значение цепной дроби с показателем качества не более $1/q_{n+1}$
б)* Докажите, что абсолютная погрешность приближения $\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}$ иррационального числа α n-ой подходящей дробью является наименьшей среди приближений дробями со знаменателями, не превосходящими q_n.

Задача 10. **а)** Найдите три первых подходящих дроби числа π (соответственно, приближения Архимеда и Меция). Каковы у них показатели качества?
б)* Длина астрономического года равна 365 дней 5 часов 48 минут 46 секунд. На каком приближении основан юлианский календарь? Можете предложить что-либо лучшее (например, система Омара Хаяма дает погрешность в 19 секунд в отличие от 11 минут Цезаря)