Часть 2. Теорема Безу

Определение 1. *Плоской алгебраической кривой* называют множество точек плоскости, координаты x_0, y_0 которых удовлетворяют уравнению $A(x_0, y_0) = 0$, где $A(x, y)$ — некоторый многочлен из $\mathbb{R}[x, y]$. Говорят, что многочлен A *задает* эту кривую.

Задача 1. Нарисуйте плоские кривые, задающиеся следующими многочленами:
а) $x-y$; **б)** x^2-y^2; **в)** $y-x^2$; **г)** x^2+y^2-1; **д)** $xy-1$; **е)** x^2y-xy^2+y-x; **ж)** ax^2+by^2-1, где a, b — такие числа, что $a > b > 0$; **з)** ax^2-by^2-1, где a, b — такие числа, что $a > b > 0$; **и)** y^2-x^3; **к)** $y-1-x^3$; **л)** y^2-1-x^3; **м)** y^2-x-x^3; **н)** $y^2-x^2-x^3$.

Задача 2*. (*Р.Хартсхорн*) Какому из уравнений соответствует каждая из кривых, изображённых на рис. справа:
а) $x^2 = x^4 + y^4$;
б) $xy = x^6 + y^6$;
в) $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$;
г) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

Задача 3. Пусть $A(x, y)$ — такой многочлен из $\mathbb{R}[x, y]$, что $A(x_0, y_0) = 0$ при всех $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$. Докажите, что тогда $A(x, y)$ — нулевой многочлен.

Задача 4. Пусть A, B — различные многочлены из $\mathbb{R}[x, y]$. Может ли система $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ иметь конечное число решений, бесконечное число решений?

Задача 5. Дайте определение взаимно простых многочленов в $\mathbb{R}[x, y]$ и в $\mathbb{R}(y)[x]$.

Задача 6. **а)** Верно ли, что для любых двух взаимно простых многочленов A, B из $\mathbb{R}[x, y]$ найдутся такие многочлены U, V из $\mathbb{R}[x, y]$, что $AU + BV = 1$? **б)** Верно ли, что для любых двух взаимно простых многочленов A, B из $\mathbb{R}(y)[x]$ найдутся такие многочлены U, V из $\mathbb{R}(y)[x]$, что $AU+BV = 1$? **в)** Докажите, что для любых двух взаимно простых многочленов A, B из $\mathbb{R}[x, y]$ найдутся такие многочлены U, V из $\mathbb{R}(y)[x]$, что $AU + BV = 1$.

Соглашение. Все рассматриваемые далее многочлены принадлежат $\mathbb{R}[x, y]$.

Задача 7. Докажите, что если многочлены $A(x, y)$ и $B(x, y)$ взаимно просты, то система $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ имеет конечное число решений.

Задача 8. Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} 6y^2 + 2x^2 - 23xy + 39y + 6x & = & 0, \\ 6y^3 + 2x^3 - 2xy^2 + 6x^2 - 9xy - 6y^2 - 27y & = & 0. \end{array}\right.$$

Задача 9. Пусть $A(x, y)$, $B(x, y)$ — ненулевые многочлены. Докажите, что если система $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ имеет бесконечное число решений и B неприводим, то A делится на B.

Задача 10. Можно ли на плоскости задать многочленом ветвь гиперболы?

Задача 11. Еще Исаак Ньютон заметил следующий интересный факт, называемый *теоремой Безу: если $A(x, y)$ и $B(x, y)$ — ненулевые взаимно простые многочлены, то система $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ имеет не более* $\deg A \cdot \deg B$ *решений.* Докажите теорему Безу для произвольного ненулевого многочлена A, взаимно простого с многочленом B, если B —
а) ненулевое число; **б)** многочлен первой степени; **в)** произведение нескольких многочленов первой степени; **г)** многочлен $x-y^2$; **д)** многочлен $xy-1$; **е)** многочлен y^2-x^3; **ж)*** многочлен x^2+y^2-1; **з)*** неприводимый многочлен второй степени.

Задача 12.** Докажите теорему Безу в общем случае.

Задача 13. (*М.Берже, С.В.Маркелов*) На плоскости даны парабола $y = x^2$ и окружность, имеющие ровно две общие точки: A и B. Оказалось, что касательные к окружности и параболе в точке A совпадают. Обязательно ли тогда касательные к окружности и параболе в точке B также совпадают?