Для изучения сложных вопросов необходимо изучить преобразования, связывающие две различные инерциальные системы отсчёта. Все законы, которые мы будем формулировать, должны быть инварианты относительно таких преобразований.

Пространство $\mathbb{R}^4$ будем называть *пространством-временем*. Выберем в $\mathbb{R}^4$ базис $e_1 = e_x = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = e_y = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = e_z = (0, 0, 1, 0)$ и $e_t = (0, 0, 0, 1)$. Каждая точка $p \in \mathbb{R}^4$ имеет три пространственных координаты (x, y, z) и временную координату t, так что $p = (x, y, z, t) = xe_x + ye_y + ze_z + te_t = (\vec{v}, t)$. Эту систему координат будем называть *системой отсчёта лаборатории.*

Например, яблоко в момент времени 5 и координатами $(2, -3, 10)$ будем описывать точкой $(2, -3, 10, 5)$. Равноускоренное падение этого яблока вниз из этой точки — это набор точек $(2, -3, 10 - g\tau^2/2, 5 + \tau)$. Равномерное движение мотоциклиста — например, набор точек $(30t, 40t, 150, t)$. Множество точек в $\mathbb{R}^4$, соответствующих данной частице во все моменты времени, называется *мировой линией* частицы.

Задача 1. Опишите мировую линию **а)** покоящейся частицы;
б) равномерно двигающейся частицы;
в) Как выглядит в пространстве-времени покоящийся стержень?
г) Равномерно без вращения двигающийся стержень?

Другая система, называется *инерциальной,* если любая точка двигается в ней равномерно и прямолинейно тогда и только тогда, когда она двигается равномерно и прямолинейно в системе отсчёта лаборатории.

Системе отсчёта лаборатории всегда будет противопоставляться система отсчёта «ракеты». В нашей ракете мы будем проводить ровно те же опыты, что в лаборатории. Мы постулируем, что результаты экспериментов, проведённых в лаборатории и ракете, подчиняются одним и тем же законам (этот постулат — результат множества проведённых экспериментов). В ракете есть свои часы и своя метровая линейка, они были взяты из лаборатории перед стартом и не отличались от своих копий в лаборатории. С помощью этих часов и линейки мы можем найти координаты любого события в пространстве-времени в координатах ракеты.

Обозначения: Для того, чтобы не путать разные системы координат, мы будем добавлять штрихи в системе координат «ракеты»: O' для начала координат, $e_{1'} = e_{x'}$, $e_{2'} = e_{y'}$, $e_{3'} = e_{z'}$ и $e_{t'}$ — для базисных векторов; $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, t')$ или (x', y', z', t') — для координат.

Задача 2. Покажите, если некоторое (не обязательно линейное) преобразование связывает две инерциальных системы отсчёта, то оно аффинно.

Задача 3. Пусть f — аффинное преобразование $\mathbb{R}^4$.
а) Докажите, что $f(p) - f(0)$ — линейное преобразование. Обозначим его через A.
б) Докажите, что $f(p) = Ap + f(0)$.

Задача 4. Пусть $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ — замена координат. По предыдущей задаче $f(\vec{p}) = A\vec{p} + \vec{v}$. В классической теории мы не властны над временем. Это означает, что $A(x, y, z, t) = (x', y', z', t)$. Как может выглядеть матрица A и вектор v (в координатах лаборатории и ракеты)?

Задача 5. Найдите A и $\vec{v}$, которые позволяют вычислить координаты события p в пространстве-времени в системе отсчёта ракеты, если известны координаты p в системы отсчёта лаборатории, и
а) оси ракеты сонаправлены с осями лаборатории, начало координат ракеты (то есть сама ракета) движется вдоль оси x со скоростью u, в момент времени 0 центры совпадают;
б) в момент времени 0 ракета находится в точке $(3, 4, 5)$ и движется вдоль оси y со скоростью u.

Задача 6. Какие элементы в матрице A отвечают за вектор скорости ракеты?

Далее всегда считаем, что в момент времени 0 центры систем отсчёта совпадают, то есть f линейно.

Задача 7. **а)** Опишите мировую линию лаборатории (она находится в точке $(0, 0, 0)$ в своей системе отсчёта) в координатах лаборатории и в координатах ракеты из задачи 5а).
б) Пусть ракета летит так, что в момент времени 1 она находится в точке $\vec{v} = (v^x, v^y, v^z)^\top$. Как выглядит матрица перехода в систему отсчёта ракеты?
в) В системе лаборатории ракета летит со скоростью $\vec{v}$, в системе отсчёта ракеты табуретка летит со скоростью $\vec{w}$. Как получить матрицу перехода из системы лаборатории в систему табуретки? С какой скоростью летит табуретка в системе лаборатории?

Задача 8. Опишите множество точек в пространстве-времени в координатах лаборатории и в координатах ракеты из 5а), которые соответствуют покоящемуся в лаборатории стержню длины 1 м направленному вдоль **а)** оси Ox; **б)** оси Oy; **в)** лежащему в плоскости xOy под углом φ к оси Ox.

Задача 9. В плоскости xOy под углом φ к оси Ox в системе отсчёта лаборатории со скоростью u запустили шарик. Найдите его мировую линию и угол к оси $O'x'$ в системе ракеты из 5а) (выразите его косинус и тангенс через $\cos\varphi$ и $\operatorname{tg}\varphi$ соответственно).