# Понятие степени

Поршнев Е.

Основная цель этой лекции — придать смысл выражению $a^b$ (*a в степени b*). С самого начала сформулируем те свойства степени, к которым мы все привыкли:

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.
2. $(a^b)^c = a^{bc}$.
3. $a^c \cdot b^c = (ab)^c$.
4. Пусть $a > b > 0$. Если $c > 0$, то $a^c > b^c$; если $c < 0$, то $a^c < b^c$.
5. Пусть $b > c$. Если $a > 1$, то $a^b > a^c$; если $1 > a > 0$, то $a^b < a^c$.

Напомним определение степени с натуральным показателем.

**Определение 1.** Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{N}$. Тогда по определению $a^b = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b \text{ раз}}$.

Лемма 1. *Свойства 1–5 выполняются для степени с натуральным показателем.*

□ Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения. ■

Несложно расширить определение степени на случай $b \in \mathbb{Z}$ (правда при этом придётся ограничить себя случаем $a \neq 0$).

**Определение 2.** Пусть $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Z}$. Тогда по определению

$$a^b = \begin{cases} a^b, & b \in \mathbb{N}; \\ 1, & b = 0; \\ 1/a^{-b}, & -b \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Лемма 2. *Свойства 1–5 выполняются для степени с целым показателем.*

□ Свойства степени с целым показателем обычно выводят из свойств степени с натуральным показателем. Детальное доказательство оставляется читателю в качестве упражнения. ■

Перед тем, как определять степень с рациональным показателем, введём понятие корня.

**Определение 3.** Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Арифметическим корнем n-ой степени из неотрицательного числа a* называется такое неотрицательное число $x$, что $x^n = a$.
Обозначение: $x = \sqrt[n]{a}$.

Теорема 1. *Для любого неотрицательного вещественного числа $a$ и для любого натурального числа $n$ существует корень $x = \sqrt[n]{a}$.*

□ Случай $a = 0$ тривиален, поэтому будем считать, что $a > 0$.

Рассмотрим множество $M = \{t \mid t^n \leqslant a,\ t \geqslant 0\}$. Это множество очевидно не пусто ($0 \in M$) и ограничено сверху (числом $\max(a, 1)$). Поэтому из аксиомы о точной верхней грани следует, что существует $x = \sup M$. Покажем, что $x^n = a$.

Предположим, что $x^n = a + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Рассмотрим маленькое число $\delta \in (0, x)$ и $y = x - \delta$. Оценим $y^n$.

$$|x^n - y^n| = |x - y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}| < \delta \cdot (nx^n)$$

Последнее неравенство обусловлено тем, что в силу $y < x$ каждое из слагаемых меньше, чем $x^n$, а всего слагаемых $n$. В частности, если выбрать $\delta < \dfrac{\varepsilon}{nx^n}$, то $|x^n - y^n| < \varepsilon$ и тем самым $y^n > a$. Значит, $y$ — верхняя грань множества $M$, что противоречит выбору $x$.

Предположим, что $x^n = a - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Рассмотрим маленькое число $\delta \in (0, x)$ и $y = x + \delta$. Оценим $y^n$.

$$|x^n - y^n| = |x - y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}| < \delta \cdot (n(2x)^n)$$

Последнее неравенство обусловлено тем, что $y < 2x$. Если выбрать $\delta < \dfrac{\varepsilon}{n(2x)^n}$, то $|x^n - y^n| < \varepsilon$ и тем самым $y^n < a$. Значит, $y \in M$, что противоречит выбору $x$.

Теорема доказана. ■

**Определение 4.** Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Тогда по определению $a^b = \sqrt[n]{a^m}$.

**Утверждение 1.** Определение 4 корректно, то есть не зависит от представления числа $b$ в виде дроби.

□ Пусть $b = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$. Обозначим $r_1 = \sqrt[n_1]{a^{m_1}}$, $r_2 = \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$. Нам нужно проверить, что $r_1 = r_2$.

Из определения корня следует, что $r_1^{n_1} = a^{m_1}$ и $r_2^{n_2} = a^{m_2}$. Из свойства 2 степени с целым показателем следует, что

$$r_1^{n_1 m_2} = (r_1^{n_1})^{m_2} = (a^{m_1})^{m_2} = a^{m_1 m_2} = (a^{m_2})^{m_1} = (r_2^{n_2})^{m_1} = r_2^{n_2 m_1}.$$

Из равенства $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$ следует, что $n_1 m_2 = n_2 m_1$. А значит, в силу свойства 4 числа $r_1$ и $r_2$ совпадают. ■

**Утверждение 2.** В случае $b \in \mathbb{Z}$ определение 4 согласуется с определением 2.

□ Действительно, если $b = \frac{m}{1}$, то $\sqrt[1]{a^m} = a^m$. ■

Лемма 3. *Свойства 1–5 выполняются для степени с рациональным показателем.*

□ Свойства степени с рациональным показателем обычно выводят из свойств степени с целым показателем. Детальное доказательство оставляется читателю в качестве упражнения. ■

Ну и наконец перейдём к случаю $b \in \mathbb{R}$.

**Определение 5.** Пусть $a \geqslant 1$ — вещественное число и $b$ — любое вещественное число. Рассмотрим множество $P(a, b) = \{a^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q < b\}$. Оно не пусто и ограничено сверху. По определению $a^b = \sup P(a, b)$.
Пусть $0 < a < 1$. По определению $a^b = (1/a)^{-b}$.

**Утверждение 3.** В случае $b \in \mathbb{Q}$, определение 5 согласуется с определением 4.

□ Очевидно, что $\sup P(a, b) \leqslant a^b$. Покажем, что на самом деле достигается равенство. Мы знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (несложно выводится из неравенства Бернулли). Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a^{b-1/n} = a^b$. Однако все числа $a^{b-1/n}$ лежат в $P(a, b)$. Утверждение доказано. ■

Теорема 2. *Свойства 1–5 выполняются для степени с вещественным показателем.*

Доказательство теоремы мы разобьём на цепочку утверждений. Вначале мы будем рассматривать только случай, когда основание степени не меньше 1.

**Утверждение 4.** Пусть $a \geqslant 1$. Тогда $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

□ У нас есть три множества: $P(a, b) = \{a^q \mid q \in \mathbb{Q}, q < b\}$, $P(a, c) = \{a^q \mid q \in \mathbb{Q}, q < c\}$ и $P(a, b + c) = \{a^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q < b + c\}$. Необходимо доказать, что $\sup P(a, b) \cdot \sup P(a, c) = \sup P(a, b + c)$.

Рассмотрим произвольное рациональное число $q_{b+c} < b+c$. Его можно представить в виде суммы двух рациональных чисел $q_{b+c} = q_b + q_c$, где $q_b < b$ и $q_c < c$. Тогда $a^{q_{b+c}} = a^{q_b} \cdot a^{q_c} \leqslant \sup P(a, b) \cdot \sup P(a, c) = a^b \cdot a^c$. Значит, любой элемент множества $P(a, b+c)$ не превышает числа $a^b \cdot a^c$. Следовательно $a^b \cdot a^c \geqslant \sup P_{b+c} = a^{b+c}$.

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ число $a^b \cdot a^c - \varepsilon$ не является верхней гранью множества $P(a, b + c)$. Выберем достаточно малое число $\delta > 0$. Возьмём рациональные числа $q_b < b, q_c < c$, такие что $a^{q_b} > \sup P(a, b) - \delta = a^b - \delta$ и $a^{q_c} > \sup P(a, c) - \delta = a^c - \delta$. Тогда

$$P(a, b + c) \ni a^{q_b + q_c} = a^{q_b} \cdot a^{q_c} > (a^b - \delta)(a^c - \delta) = a^b \cdot a^c - \delta(a^b + a^c) + \delta^2 > a^b \cdot a^c - \delta(a^b + a^c).$$

Значит, достаточно выбрать $\delta < \dfrac{\varepsilon}{a^b + a^c}$.

Из сказанного следует, что $a^b \cdot a^c - \varepsilon < a^{b+c}$ для любого $\varepsilon > 0$. Объединяя полученные неравенства, заключаем, что $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$. ■

**Следствие 1.** При $a \geqslant 1$ имеем $a^{-b} = 1/a^b$.

□ $1 = a^0 = a^{b+(-b)} = a^b \cdot a^{-b}$. ■

**Утверждение 5.** Пусть $a > b \geqslant 1$. Если $c > 0$, то $a^c > b^c$; если $c < 0$, то $a^c < b^c$.

□ Пусть $c > 0$. Возьмём какое-нибудь рациональное число $q \in (0, c)$. Тогда $(a/b)^c \geqslant (a/b)^q > 1$. Значит, $a^c > b^c$.

Если же $c < 0$, то $a^{-c} > b^{-c}$ и из следствия 1 получаем $a^c < b^c$. ■

**Утверждение 6.** Пусть $b > c$, $a > 1$. Тогда $a^b > a^c$.

□ Возьмём какое-нибудь рациональное число $q \in (0, b - c)$. Тогда $a^{b-c} \geqslant a^q > 1$. Значит, $a^b > a^c$. ■

**Утверждение 7.** Пусть $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$. Тогда $(a^b)^c = a^{bc}$.

$\square$ Случаи $a = 1$ и $b = 0$ тривиальны. Поэтому будем считать, что неравенства строгие. Тогда из утверждения 6 следует, что $a^b > 1$.

Пусть $c > 0$. Рассмотрим $P(a^b, c) = \{(a^b)^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q < c\}$ и $P(a, bc) = \{a^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q < bc\}$. Необходимо доказать, что $\sup P(a^b, c) = \sup P(a, bc)$.

Выберем произвольное положительное рациональное число $r < bc$. Его можно представить в виде произведения двух положительных рациональных чисел $r = qs$, где $q < c$, $s < b$. Из определения степени и утверждения 5 следует, что $a^r = (a^s)^q \leqslant (a^b)^q) \leqslant \sup P(a^b, c)$. Если же $r \leqslant 0$, то $a^r \leqslant 1 < \sup P(a^b, c)$. Значит, $\sup P(a, bc) \leqslant \sup P(a^b, c)$.

Выберем произвольное положительное рациональное число $q < c$. Возьмём рациональное число $t \in (b, bc/q)$. Тогда $t > b$ и $tq < bc$. Поэтому $(a^b)^q < (a^t)^q = a^{tq} \leqslant \sup P(a, bc)$. Для $q \leqslant 0$ имеем $(a^b)^q \leqslant 1 < \sup P(a, bc)$. Поэтому $\sup P(a^b, c) \leqslant \sup P(a, bc)$.

Объединяя полученные неравенства, заключаем, что $\sup P(a^b, c) = \sup P(a, bc)$.

Теперь рассмотрим случай $c < 0$. Применяя следствие 1, получаем $(a^b)^c = \frac{1}{(a^b)^{-c}} = \frac{1}{a^{-bc}} = a^{bc}$. $\blacksquare$

**Утверждение 8.** Пусть $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$. Тогда $a^c \cdot b^c = (ab)^c$.

$\square$ Как обычно рассмотрим множества $P(a, c) = \{a^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q < c\}$, $P(b, c) = \{b^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q < c\}$ и $P(ab, c) = \{(ab)^q \mid q \in \mathbb{Q},\ q < c\}$.

Пусть $q < c$ — произвольное рациональное число. Тогда $(ab)^q = a^q \cdot b^q \leqslant \sup P(a, c) \cdot \sup P(b, c) = a^c \cdot b^c$. Значит, $(ab)^c \leqslant a^c \cdot b^c$.

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon > 0$ число $a^c \cdot b^c - \varepsilon$ не является верхней гранью множества $P(ab, c)$. Выберем достаточно малое число $\delta > 0$. Возьмём рациональное число $q < c$, такое что $a^q > \sup P(a, c) - \delta = a^c - \delta$ и $b^q > \sup P(b, c) - \delta = b^c - \delta$. Тогда

$$P(ab, c) \ni (ab)^q = a^q \cdot b^q > (a^c - \delta)(b^c - \delta) = a^c \cdot b^c - \delta(a^c + b^c) + \delta^2 > a^c \cdot b^c - \delta(a^c + b^c).$$

Значит, достаточно выбрать $\delta < \dfrac{\varepsilon}{a^c + b^c}$.

Из сказанного следует, что $a^c \cdot b^c - \varepsilon < (ab)^c$ для любого $\varepsilon > 0$. Объединяя полученные неравенства, заключаем, что $a^c \cdot b^c = (ab)^c$. $\blacksquare$

Ура! Теорему 2 мы почти доказали. Осталось рассмотреть случаи, когда основание степени меньше 1. При этом мы уже не будем непосредственно возиться с супремумами.

**Утверждение 9.** Пусть $a < 1$. Тогда $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$.

$\square$ Из определения 5 и утверждения 4 получаем $a^b \cdot a^c = (1/a)^{-b} \cdot (1/a)^{-c} = (1/a)^{-b-c} = a^{b+c}$. $\blacksquare$

**Следствие 2.** При $a < 1$ также выполнено $a^{-b} = 1/a^b$.

$\square$ Полностью аналогично доказательству следствия 1. $\blacksquare$

**Утверждение 10.** Выполняется равенство $a^b = 1/(1/a)^b$.

$\square$ Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения. $\blacksquare$

**Утверждение 11.** Пусть $a > b > 0$. Если $c > 0$, то $a^c > b^c$; если $c < 0$, то $a^c < b^c$.

$\square$ Случай $b > 1$ рассмотрен в утверждении 5.

Предположим, что $a > 1 \geqslant b$. Тогда при $c > 0$ имеем $a^c > 1 \geqslant b^c$. При $c < 0$ имеем $a^c < 1 \leqslant b^c$ (мы воспользовались следствиями 1 и 2).

Предположим, что $1 \geqslant a > b$. Тогда $1/b > 1/a \geqslant 1$. Поэтому при $c > 0$ имеем $(1/b)^c > (1/a)^c$, откуда $1/(1/a)^c > 1/(1/b)^c$. С учётом утверждения 10 получаем $a^c > b^c$.
При $c < 0$ всё аналогично. $\blacksquare$

**Утверждение 12.** Пусть $b > c$, $a < 1$. Тогда $a^b < a^c$.

$\square$ $a^b = 1/(1/a)^b < 1/(1/a)^c = a^c$. $\blacksquare$

**Утверждение 13.** Пусть $a \geqslant 1$, $b < 0$. Тогда $(a^b)^c = a^{bc}$.

$\square$ Случай $a = 1$ тривиален. Будем считать, что $a > 1$.

Поскольку $b < 0$, число $a^b$ меньше 1. Значит, по определению $(a^b)^c = (1/a^b)^{-c}$. Из следствия 1 получаем $(1/a^b)^{-c} = (a^{-b})^{-c}$. По утверждению 7: $(a^{-b})^{-c} = a^{(-b)(-c)} = a^{bc}$. $\blacksquare$

**Утверждение 14.** Пусть $a < 1$. Тогда $(a^b)^c = a^{bc}$.

$\square$ По определению $(a^b)^c = ((1/a)^{-b})^c$. Из утверждений 7 и 13 следует, что $((1/a)^{-b})^c = (1/a)^{-bc}$. Повторно применяя определение, получаем $(1/a)^{-bc} = a^{bc}$. $\blacksquare$

**Утверждение 15.** Выполняется равенство $a^c \cdot b^c = (ab)^c$.

$\square$ Случай $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ рассмотрен в утверждении 8.

Пусть $a \geqslant 1$, $b < 1$, $ab > 1$. Тогда $a^c = (ab)^c \cdot (1/b)^c$. Значит, $(ab)^c = a^c \cdot 1/(1/b)^c = a^c \cdot b^c$.

Все остальные случаи мы охватим с помощью трюка. Выберем число $M$ заведомо большим (то есть $M > \max(1, 1/a, 1/b)$). Тогда $aM > 1$, $bM > 1$, $abM^2 > 1$. По уже доказанному выполнены равенства:

$$\begin{cases} a^c \cdot M^c = (aM)^c \\ b^c \cdot M^c = (bM)^c \\ (aM)^c \cdot (bM)^c = (abM^2)^c \\ (ab)^c \cdot (M^2)^c = (abM^2)^c \\ M^c \cdot M^c = (M^2)^c \end{cases}$$

Значит, $a^c \cdot M^c \cdot b^c \cdot M^c = (aM)^c \cdot (bM)^c = (abM^2)^c = (ab)^c \cdot (M^2)^c = (ab)^c \cdot M^c \cdot M^c$. Сокращая на $(M^c)^2$, получаем требуемое. $\blacksquare$

Теорема 2 полностью доказана.

---

**Задача 1.** Докажите лемму 3.

**Задача 2.** Докажите утверждение 10.

**Задача 3°.** Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

**а)** Докажите, что уравнение $a^x = b$ имеет решение.

**б)** Докажите, что это решение единственно.

**Задача 4*.** Возможно ли такое, что $a, b \notin \mathbb{Q}$ и $a^b \in \mathbb{Q}$.