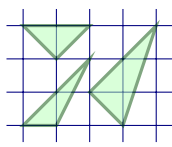


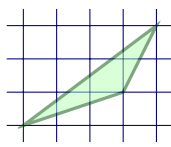
Как связаны площадь многоугольника, лежащего на клетчатой бумаге (сетке) со стороной клетки 1, и число накрытых им узлов сетки? Мы ответим на этот вопрос для многоугольников с вершинами в узлах сетки.

Задача 1. Найдите площади многоугольников, приведенных на рисунках справа:

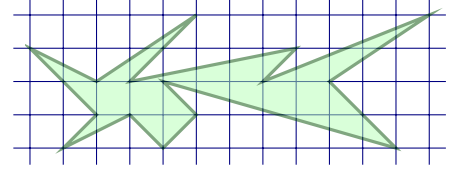
a)



6)



B)



Задача 2. Найдите формулу, выражающую площадь через i (число узлов внутри) и b (число узлов на границе)

а) для прямоугольника со сторонами, лежащими на линиях сетки;

б) для прямоугольного треугольника с вершинами в узлах и катетами, лежащими на линиях сетки.

Задача 3. а) Проверьте, верна ли полученная Вами в задаче 2 формула для примеров из задачи 1?

б) Два многоугольника (с вершинами в узлах) граничат по ломаной и составляют вместе новый многоугольник. Пусть Ваша формула верна для двух из этих многоугольников. Верна ли она для третьего?

Задача 4. Придумайте формулу, выражающую площадь через число узлов внутри и на границе для любого

а) треугольника с вершинами в узлах сетки; б) четырехугольника с вершинами в узлах сетки.

Задача 5*. Докажите, что во всяком n -угольнике ($n > 3$) найдётся диагональ, принадлежащая ему целиком. (Замечание: результатом этой задачи можно пользоваться далее без доказательства.)

Задача 6. Докажите, что всякий многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы диагонали целиком принадлежали многоугольнику и не пересекались внутри многоугольника.

Задача 7. (*Формула Пика*) Обобщите формулу из задачи 4 на любой многоугольник с вершинами в узлах сетки.

Задача 8. Король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле по разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей в пути короля, не имеет самопересечений.

а) Какую площадь может ограничивать эта ломаная? б)* Какую наибольшую длину она может иметь?

Задача 9. Докажите, что у многоугольника с вершинами в узлах сетки площадь — целое или полуцелое число, а квадраты длин сторон — целые числа.

Задача 10. Найдётся ли правильный а) треугольник; б) шестиугольник с вершинами в узлах сетки?

Задача 11. Дан правильный n -угольник M с вершинами в узлах сетки. Докажите, что существует правильный n -угольник с вершинами и центром в узлах сетки (используйте M для его построения).

Задача 12*. Для каких n существует правильный n -угольник с вершинами в узлах сетки?

Задача 13*. На плоскости провели много параллельных прямых на равном расстоянии друг от друга («тетрадь в линейку»). Для каких n можно нарисовать правильный n -угольник с вершинами на этих прямых?

Определение 1. Назовём треугольник (или параллелограмм) с вершинами в узлах сетки *простым*, если внутри него и на его сторонах нет других узлов сетки кроме его вершин.

Задача 14. а) Какова площадь простого треугольника? б) Может ли он иметь сколь угодно большой периметр?

в) Какие простые треугольники прямоугольные? г)* У любого ли простого треугольника есть неострый угол?

Задача 15*. В трёх вершинах клетки сидит по кузнечiku. Они начинают играть в чехарду: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке.

а) Докажите, что кузнечики всегда будут находиться в вершинах простого треугольника.

б) Может ли один из кузнечиков после нескольких прыжков попасть в четвертую вершину исходной клетки?

в) Из каких простых треугольников можно прыжком получить треугольник с меньшей наибольшей стороной?

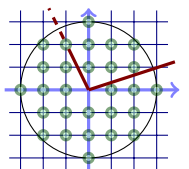
г) В вершинах каких простых треугольников могут после нескольких прыжков оказаться наши кузнечики?

Задача 16. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ с вершинами в узлах сетки является простым тогда и только тогда, когда все параллелограммы, полученные из $ABCD$ параллельными переносами, сдвигающими узел A в разные узлы сетки, покрывают плоскость и не накладываются друг на друга.

Задача 17*. а) На плоскости дана клякса площади больше 1. Докажите, что у каких-то двух её точек разности соответствующих координат целые. б) (*Теорема Минковского*) На плоскости дана центрально-симметричная (относительно узла) выпуклая фигура площади больше 4. Докажите, что она содержит больше одного узла.

Задача 18*. Каждый узел, кроме узла O , клетчатой бумаги со стороной клетки 1 см накрыли кругом с центром в этом узле и радиусом 0,000001 см. Можно ли из узла O выпустить луч, не пересекающий ни одного круга?

Задача 19*. В парке, имеющем форму круга радиуса s м (s — целое число), деревья посажены во всех вершинах квадратной сетки со стороной квадратов 1 м, кроме центра (пример для $s = 3$ см. на рисунке). Докажите, что вид из центра **а)** полностью заслонён, если радиусы всех деревьев больше $\frac{1}{s}$ м; **б)** заслонён не полностью, если радиусы всех деревьев меньше $\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$ м.

[illegible]