Определение 1. Пусть задана числовая последовательность (a_n). Формальное выражение $a_1+a_2+a_3+\ldots =$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ называется *рядом.* Для краткости мы вместо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ будем писать просто $\sum$. Число $s_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$ называется *n-ой частичной суммой* ряда.

Говорят, что ряд $\sum a_n$ *сходится и имеет сумму A,* если существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$. Тогда пишут $\sum a_n = A$. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то говорят, что ряд $\sum a_n$ *расходится.*

Задача 1. Пусть $a_n \geqslant 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда ограничено множество его частичных сумм $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, причём в этом случае $\sum a_n = \sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Задача 2. Какие из следующих рядов сходятся? Найдите их суммы.

а) $\sum(-1)^n$; **б)** (*геометрическая прогрессия*) $\sum q^n$; **в)** $\sum \dfrac{n}{2^n}$; **г)** $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$; **д)** $\sum n!\,q^n$; **е)** (*гармонически ряд*) $\sum \dfrac{1}{n}$; **ж)** $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$; **з)*** $\sum \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Задача 3. Докажите, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Верно ли обратное?

Задача 4. (*Критерий Коши сходимости ряда*) Докажите, что ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что из $n \geqslant m > N$ (где $n, m \in \mathbb{N}$) следует $|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$.

Задача 5.

а) Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся. Докажите, что тогда ряд $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ тоже сходится, причём выполнено равенство $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$.

б) Пусть ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum b_n$ расходится. Докажите, что тогда ряд $\sum(a_n + b_n)$ расходится.

Задача 6. Сходятся ли следующие ряды: **а)** $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$; **б)** $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; **в)** $\sum \dfrac{1}{n^2}$?

Задача 7. Докажите: **а)** ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ сходится; **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e$; **в)** $\left| e - \sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{1}{n!} \right| < \dfrac{1}{m!\,m}$;

г) число e иррационально.

(Подсказка к пункту **б**: Нужно рассмотреть первые n членов бинома Ньютона для $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ при $k \to \infty$)

Задача 8*. Докажите, что сумма ряда $\sum \dfrac{1}{2^{n^2}}$ есть число иррациональное.

Задача 9. Пусть $a_n \geqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение (перестановка натурального ряда). Тогда $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$ (то есть если сходится ряд в левой части равенства, то сходится и ряд в правой части, причём их суммы равны; если ряд в левой части расходится, то и ряд в правой части расходится).

Задача 10*. Пусть p_n — n-е простое число, $n \in \mathbb{N}$.

а) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-1/p_1^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-1/p_n^2} \right) = \sum \frac{1}{n^2}$.

б) Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-1/p_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-1/p_n} \right)$?

в) Сходится ли ряд $\sum \frac{1}{p_n}$?

0.3mm6.5mm

Задача 11*. **а)** Пусть γ_k — сумма ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Найдите сумму $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \gamma_k$.

б) (*Эйлер*) Пусть A — множество всех целых чисел, представимых в виде n^k, где n, k — целые числа, большие 1. Найдите сумму $\sum\limits_{a\in A} \frac{1}{a-1}$.

Задача 12*. (*Число Лиувилля*) Докажите, что число $\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n!}}$ является трансцендентным.

Признаки сходимости рядов

Задача 13.

а) (*Признак сравнения Вейерштрасса*) Пусть $\sum a_n$, $\sum b_n$ — ряды с неотрицательными членами. Пусть найдётся такой номер k, что при всех $n > k$, $n \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $b_n \geqslant a_n$. Тогда если $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится; если $\sum a_n$ расходится, то $\sum b_n$ расходится.

б) (*Признак д'Аламбера*) Пусть члены ряда $\sum a_n$ положительны, и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Если $q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится. Что можно сказать о сходимости, если $q = 1$?

в) (*Признак Коши*) Пусть члены ряда $\sum a_n$ неотрицательны и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Если $q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится. Что можно сказать о сходимости ряда, если $q = 1$?

г) Приведите пример сходящегося ряда с положительными членами, к которому применим признак Коши, но не применим признак д'Аламбера. Бывает ли наоборот?

Задача 14.

а) (*Теорема Лейбница*) Пусть $a_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и кроме того, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Тогда знакочередующийся ряд $\sum (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

б) Верно ли утверждение теоремы без условия монотонности (a_n)?

Задача 15. Пусть $a_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, и кроме того, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$. Докажите, что ряд $\sum a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum 2^n a_{2^n}$.

Задача 16. Исследуйте следующие ряды на сходимость:
а) $\sum \sin \dfrac{1}{n^2}$; **б)** $\sum \operatorname{tg} \dfrac{1}{n}$; **в)** $\sum \sin(n\alpha)$; **г)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$; **д)** $\sum \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$; **е)** $\sum \dfrac{n^k}{a^n}$; **ж)** $\sum \dfrac{a^n}{n!}$; **з)** $\sum \dfrac{e^n}{n!}$; **и)** $\sum \dfrac{n^3}{e^n}$; **к)** $\sum \dfrac{n!}{n^n}$; **л)** $\sum \dfrac{(n!)^2}{n^n}$; **м)** $\sum \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$; **н)** $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Задача 17. (*Дзета-функция Римана*) Исследуйте сходимость ряда $\zeta(s) = \sum \dfrac{1}{n^s}$ в зависимости от параметра $s \in \mathbb{R}$.

Задача 18. Верно ли, что если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся, то сходится и ряд $\sum a_n b_n$?

Задача 19. Известно, что $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ и ряды $\sum a_n^2$ и $\sum b_n^2$ сходятся. Докажите, что ряд $\sum a_n b_n$ тоже сходится.

Задача 20. Известно, что $a_n \geqslant 0$ и ряд $\sum a_n^2$ сходится. Можно ли утверждать, что ряд $\sum \dfrac{a_n}{n}$ сходится?

1	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	2 ж	2 з	3	4	5 а	5 б	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	7 в	7 г	8	9	10 а	10 б	10 в

11 а	11 б	12	13 а	13 б	13 в	13 г	14 а	14 б	15	16 а	16 б	16 в	16 г	16 д	16 е	16 ж	16 з	16 и	16 к	16 л	16 м	16 н	17	18	19	20

0.57mm6.5mm-10mm