Листок №8

Целые числа — 1

Задача 1. Докажите, что Ваше 28-летие будет в такой же день недели, в какой Вы родились.

Определение 1. Пусть a и b — целые числа, причём $b \neq 0$. Говорят, что *a делится на b*, если существует такое целое число c, что $a = bc$. В этом случае говорят, что *a кратно* числу b; число b называется *делителем* числа a, число c называется *частным* от деления a на b.
Обозначение: $a \vdots b$ (a делится на b) или $b \,\big|\, a$ (b делит a).

Задача 2. Докажите, что любые целые числа удовлетворяют следующим свойствам:
а) если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$; **б)** если $a \vdots c$ и b — произвольное целое число, то $ab \vdots c$;
в) если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$; **г)** если $a \vdots b$, то либо $a = 0$, либо $|a| \geqslant |b|$;
д) если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то $|a| = |b|$.

Задача 3. Верно ли, что любые целые числа удовлетворяют следующим свойствам:
а) если $a \vdots c$ и $b \not\vdots c$, то $(a+b) \not\vdots c$; **б)** если $a \vdots b$ и $b \not\vdots c$, то $a \not\vdots c$; **в)** если $a \not\vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \not\vdots c$;
г) если $a \not\vdots c$ и $b \not\vdots c$, то $ab \not\vdots c^2$; **д)** если $a \vdots c$, $b \vdots c$, то для любых целых x и y выполнено $(ax+by) \vdots c$?

Задача 4. Пусть m, n — целые, и $5m + 3n \vdots 11$. Докажите, что **а)** $6m + 8n \vdots 11$; **б)** $9m + n \vdots 11$.

Задача 5. Докажите, что если $(a^2 + b^2) \vdots 3$, то $a \vdots 3$ и $b \vdots 3$.

Задача 6. Докажите, что **а)** $\overline{aaa}$ делится на 37; **б)** $\overline{abc} - \overline{cba}$ делится на 99 (где a, b, c — цифры).

Задача 7. **а)** Докажите, что целое число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, делящееся на 4.
б) Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2, 5, 8, 10.

Задача 8. **а)** Из натурального числа $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ вычли сумму его цифр $a_n + \ldots + a_1 + a_0$. Докажите, что получилось число, делящееся на 9. **б)** Выведите из пункта а) признаки делимости на 3 и на 9.

Задача 9. Докажите, что число, составленное из 81 единицы, делится на 81.

Задача 10. Докажите, что целое число $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ делится на 11 если и только если знакопеременная сумма его цифр $(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n)$ делится на 11.

Задача 11*. Сформулируйте и докажите признак делимости на 7.

Задача 12. Докажите, что $m(m+1)(m+2)$ делится на 6 при любом целом m.

Задача 13. Числа a, b, c, d — натуральные. Обязательно ли число $\dfrac{(a+b+c+d)!}{a!\,b!\,c!\,d!}$ целое?

Задача 14. Докажите, что произведение n подряд идущих целых чисел делится на $n!$.

Задача 15. Целые числа a и b различны. Докажите, что $(a^n - b^n) \vdots (a-b)$ при любом натуральном n.

Задача 16. Найдите все целые n, при которых число $(n^3+3)/(n+3)$ целое.

Задача 17. Решите в натуральных числах уравнения: **а)** $x^2 - y^2 = 31$; **б)** $x^2 - y^2 = 303$.

Задача 18. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 4 нуля? А ровно на 5 нулей?

1	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	4 а	4 б	5	6 а	6 б	7 а	7 б	8 а	8 б	9	10	11	12	13	14	15	16	17 а	17 б	18

Определение 2. Натуральное число $p > 1$ называется *простым,* если оно имеет ровно два натуральных делителя: 1 и p. В противном случае оно называется *составным.*

Задача 19. Докажите, что любое натуральное число, большее 1, либо само простое, либо раскладывается в произведение нескольких простых множителей.

Задача 20. **а)** Даны натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$, большие 1. Придумайте число, которое не делится ни на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$. **б)** Докажите, что простых чисел бесконечно много. **в)** Докажите, что простых чисел вида $3k + 2$ бесконечно много (k — натуральное).

Задача 21. **а)** Могут ли 100 последовательных натуральных чисел все быть составными? **б)** Найдутся ли 100 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых?

Определение 3. Пусть a и b — целые числа, $b > 0$. *Разделить* a *на* b *с остатком* значит найти такие целые числа k (неполное частное) и r (остаток), что $a = kb + r$ и $0 \leqslant r < b$.

Задача 22. Числа a и b — целые, $b > 0$. Отметим на числовой прямой все числа, кратные b. Они разобьют прямую на отрезки длины b. Точка a лежит на одном из них. Пусть kb — левый конец этого отрезка. Докажите, что k — частное, а $r = a - kb$ — остаток от деления a на b.

Задача 23. Докажите, что частное и остаток определены однозначно.

Задача 24. Найдите частные и остатки от деления 2012 на 23, -19 на 4 и $n^2 - n + 1$ на n.

Задача 25. Какой цифрой оканчивается число **а)** 14^{14}; **б)** $14^{14^{14}}$; **в)** 7^{7^7}?

Задача 26. Найдите остатки от деления **а)** 2^{2012} на 3; **б)** 57^{2012} на 5; **в)** $(12^{14} + 14^{12})$ на 13; **г)** $(2222^{5555} + 5555^{2222})$ на 7.

Задача 27. Найдите все такие натуральные k, что $2^k - 1$ делится на 7.

Задача 28. Даны 20 целых чисел, ни одно из которых не делится на 5. Докажите, что сумма двадцатых степеней этих чисел делится на 5.

Задача 29. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть простое число или 1.

Задача 30. Докажите, что из любых 52 целых чисел можно выбрать 2 таких числа, что **а)** их разность делится на 51; **б)** их сумма или их разность делится на 100.

Задача 31*. Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно число, делящееся на n).

Задача 32*. Из чисел $1, 2, 3, \ldots, 100$ выбрали произвольным образом 51 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

Задача 33*. Числа 2, 3, 7 обладают следующим свойством: $(2 \cdot 3 + 1) \,\vdots\, 7$, $(3 \cdot 7 + 1) \,\vdots\, 2$, $(7 \cdot 2 + 1) \,\vdots\, 3$. Существуют ли ещё тройки натуральных чисел, больших 1, с таким свойством?

19	20 а	20 б	20 в	21 а	21 б	22	23	24	25 а	25 б	25 в	26 а	26 б	26 в	26 г	27	28	29	30 а	30 б	31	32	33