Использование комплексных чисел в планиметрии основано на том, что их можно отождествить с точками плоскости: числу $z = a + bi$ соответствует точка с координатами (a, b). При этом квадрат расстояния между точками z и w равен $|z - w|^2 = (z - w)(\overline{z} - \overline{w})$.

Задача 1. (*Эйлер*) Сумма квадратов длин сторон четырёхугольника отличается от суммы квадратов диагоналей на учетверённый квадрат длины отрезка, соединяющего середины диагоналей.

Задача 2. Пусть M — точка на плоскости, S — окружность, AB — её диаметр. Докажите, что величина $MA^2 + MB^2$ не зависит от выбора диаметра AB.

Задача 3. (*Теорема Лейбница*) Пусть F — центр масс (то есть, точка пересечения медиан) треугольника ABC. Докажите, что для любой точки M на плоскости выполнено равенство:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2 + 3MF^2.$$

Задача 4. На плоскости задано 3 точки A, B, C. Точка A_1 — образ точки C при повороте вокруг точки A на 90° против часовой стрелки; точка B_1 — образ точки C при повороте вокруг точки B на 90° по часовой стрелке. Пусть K — середина A_1B_1, M — середина AB. Докажите, что отрезки KM и AB перпендикулярны. Как соотносятся их длины?

Задача 5. На сторонах треугольника $A_1A_2A_3$ во внешнюю сторону построены квадраты с центрами B_1, B_2, B_3. Докажите, что отрезки B_1B_2 и A_3B_3 равны по длине и перпендикулярны.

Задача 6. Пусть $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ — правильные треугольники, причём их вершины занумерованы в порядке обхода против часовой стрелки. Докажите, что середины отрезков A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 — вершины правильного треугольника.

Определение 1. *Простое отношение* тройки точек z_1, z_2 и z_3 — это комплексное число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$.

Задача 7. Докажите, что три точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их простое отношение вещественно.

Задача 8. (*Прямая Эйлера*) В любом треугольнике центр тяжести треугольника, его ортоцентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой.

Задача 9. Докажите, что три точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника тогда и только тогда, когда $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$.

Определение 2. *Двойное отношение* четвёрки точек z_1, z_2, z_3 и z_4 — это число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$.

Задача 10. **а)** Пусть четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности. Докажите, что тогда их двойное отношение вещественно. **б)** Пусть двойное отношение четырёх точек вещественно. Что можно сказать об их взаимном расположении?

Задача 11. **а)** Докажите, что $(z_1 - z_2)(z_4 - z_3) + (z_2 - z_3)(z_4 - z_1) = (z_2 - z_4)(z_3 - z_1)$. **б)** (*Птолемей*) Докажите, что в любом четырёхугольнике произведение длин диагоналей не превосходит сумму произведений длин противоположных сторон. Когда достигается равенство?

Задача 12. **а)** Пусть z_1 и z_2 — две точки на единичной окружности $|z| = 1$. Найдите комплексное число, задающее точку пересечения касательных к этой окружности, проходящих через точки z_1 и z_2. **б)** (*Задача Ньютона*) В описанном около окружности четырёхугольнике середины диагоналей и центр окружности лежат на одной прямой.

Задача 13*. Каждую сторону n-угольника в процессе обхода против часовой стрелки продолжили на её длину. Оказалось, что концы построенных отрезков служат вершинами правильного n-угольника. Докажите, что исходный n-угольник — тоже правильный.

Задача 14*. (*Теорема Морли*) Трисектрисой угла называют луч, исходящий из вершины угла и отсекающий от угла втрое меньший угол. Понятно, что каждый угол имеет две трисектрисы. В треугольнике ABC пусть M — точка пересечения двух трисектрис, примыкающих к стороне BC, Q — точка пересечения двух трисектрис, примыкающих к стороне CA и P — точка пересечения трисектрис, примыкающих к AB. Докажите, что треугольник MPQ правильный.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12 а	12 б	13	14