Листок №24 Вторая производная, выпуклость и асимптоты 10.2014

Определение 1. Функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз* на $(a;b)$, если для каждого отрезка $[x_1;x_2] \subseteq (a;b)$ выполнено условие: график функции f лежит не выше графика прямой L, соединяющей точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$, то есть $f(x) \leqslant L(x)$ при любом $x \in [x_1; x_2]$.

Задача 1. Пусть функция f определена и два раза дифференцируема на интервале (a,b). Выясните, какие из следующих условий эквивалентны тому, что f выпукла вниз на (a,b):
а) $\alpha \cdot f(x) + (1-\alpha)\cdot f(y) \geqslant f(\alpha \cdot x + (1-\alpha)\cdot y)$ для любых $x, y \in (a,b)$ и любого $\alpha \in [0,1]$;
б) надграфик f на $(a;b)$, то есть $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a,b), y \geqslant f(x)\}$ — выпуклое множество;
в) f' монотонно неубывает на интервале (a,b);
г) $f''(x) \geqslant 0$ для любого $x \in (a,b)$;
д) любая касательная l к графику f расположена не выше его: $f(x) \geqslant l(x)$ при всех $x \in (a,b)$;
е) (*неравенство Йенсена*) для любых чисел $x_1, \dots, x_n \in (a,b)$ и любых положительных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ выполнено неравенство:

$$\frac{\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \geqslant f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\right)$$

Задача 2. Дайте эквивалентные определения функции, выпуклой вверх на (a,b) (можно устно).

Задача 3. Найдите промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз следующих функций:
а) $\sin x$; **б)** x^3; **в)** $\sqrt{|x|}$; **г)** $(x(x-1))^{-1}$; **д)** $x^2 + \frac{1}{x}$.

Задача 4. Что больше: $\sqrt[3]{60}$ или $2 + \sqrt[3]{7}$?

Задача 5. Докажите неравенства:
а) $\left(\dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leqslant \dfrac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}$ для любых чисел $x_1, \dots, x_n$;
б) (*неравенство Коши-Буняковского*) $(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$;
в)* $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \leqslant 3\sqrt{3}/8$, если α, β, γ — углы некоторого треугольника.

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что f выпукла вниз на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и выпукла вверх на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (или наоборот).

Задача 6. Пусть функция f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.
а) Пусть x_0 — точка перегиба функции f. Верно ли, что $f''(x_0) = 0$? Верно ли обратное?
б) Докажите, что x_0 — точка перегиба f если и только если f'' меняет знак в точке x_0.

Задача 7. Нарисуйте графики функций из задачи 3 и найдите точки перегиба этих функций.

Задача 8. Пусть f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причём $f'(x_0) = 0$ и **а)** $f''(x_0) > 0$; **б)** $f''(x_0) < 0$. Имеет ли f в x_0 локальный экстремум, и если да, то какого типа?

Определение 3. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to +\infty$. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 слева, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$.

Задача 9. Дайте определение асимптот графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to x_0 + 0$.

Задача 10. Верно ли, что график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда существуют пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$?

Задача 11. Найдите асимптоты следующих функций:
а) $x + \frac{1}{x}$; **б)** $\dfrac{x+3}{2-x}$; **в)** $\sqrt{x\,(1+x)}$;

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	1 е	2	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	7	8 а	8 б	9	10	11 а	11 б	11 в