

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &\stackrel{\text{def}}{=} (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &\stackrel{\text{def}}{=} (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

Множество комплексных чисел обозначается буквой \mathbb{C} .

$$-4, \quad 1+i, \quad 1-i\sqrt{3}, \quad \sin \alpha + i \cos \alpha, \quad \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}, \quad 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha.$$
[illegible]

Докажите, что $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

Задача 16. Выразите $\sin^4 x$ и $\cos^5 x$ в виде суммы чисел вида $\alpha \sin kx$ и $\beta \cos lx$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Задача 18. Докажите, что многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет не более n комплексных корней.

Задача 20. а) Вычислите сумму и произведение всех корней степени n из 1. б) Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — все корни степени n из 1, $\alpha_1 = 1$. Найдите $\alpha_1^s + \dots + \alpha_n^s$ (где $s \in \mathbb{N}$) и $(1 - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (1 - \alpha_n)$.

Задача 21. Пусть P — многочлен степени k с коэффициентами из \mathbb{C} . Докажите, что среднее арифметическое значений P в вершинах правильного n -угольника равно значению P в центре многоугольника, если $n \geq k$.

б) Докажите, что $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \notin \mathbb{Q}$.

Задача 23. Пусть $z, v, w \in \mathbb{C}$, причём $z + v + w = z^2 + v^2 + w^2 = z^3 + v^3 + w^3 = 0$. Верно ли, что $z^4 + v^4 + w^4 = 0$?

а) $z^n + 1 = 0$; **б)** $|z - i| \leq 2$; **в)** $|z - 1| = 2|z - i|$; **г)** $z^2 + \bar{z}^2 = 4$,
д) $|z - 1| - |z + 1| \leq 3$; **е)** $|z - 1| + |z + 1| = 3$; **ж)** $z + \bar{z} = 2|z - 1|$.

а) $z \mapsto \bar{z}$; б) $z \mapsto (\cos \varphi + i \sin \varphi)z$, где $\varphi \in \mathbb{R}$;
в) $z \mapsto \lambda z$, где $\lambda \in \mathbb{R}$; г) $z \mapsto wz$, где $w \in \mathbb{C}$?

- а) ортогональную проекцию на ось x ;
- б) симметрию относительно оси y ;
- в) центральную симметрию с центром A ;
- г) поворот на угол φ относительно точки A ;
- д) гомотетию с коэффициентом k и центром A ;
- е) симметрию относительно прямой $y = 3$ со сдвигом на 1 влево;
- ж) поворот, переводящий ось x в прямую $y = 2x + 1$;
- з) симметрию относительно прямой $y = 2x + 1$.

б) полярную координатную сетку; в) окружность $|z + i| = 1$;

Задача 29. Куда отображение $z \mapsto \sqrt{z}$ переводит верхнюю полуплоскость (без границы)?

6)* Тот же вопрос для отображения $z \mapsto \frac{z + 1/z}{2}$.

[illegible]