Многочлены

Определение 1. Многочлен $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ называется *примитивным,* если числа $a_n, \dots, a_1, a_0$ взаимно просты.

Задача 1. (*Лемма Гаусса*) Произведение двух примитивных многочленов также примитивный многочлен.

Задача 2. Докажите, что многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда он неприводим над $\mathbb{Q}$.

Задача 3. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{Z}[x]$ однозначно (с точностью до постоянных множителей) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{Z}$ многочленов.

Задача 4. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — корень некоторого ненулевого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Пусть $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — ненулевой многочлен минимальной степени, такой что $Q(\alpha) = 0$.
а) Докажите, что многочлен $Q(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$;
б) Докажите, что для некоторого ненулевого целого k многочлен $kP(x)$ делится на $Q(x)$.

Задача 5. (*Теорема Гаусса*) Если действительное число α является корнем одновременно двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ из $\mathbb{Z}[x]$ и один из них, скажем $Q(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$, то многочлен $kP(x)$ при некотором ненулевом целом числе k делится на $Q(x)$.

Задача 6. Делится ли **а)** многочлен $x^{100} - 32x^{90} + x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 10x + 2$ на многочлен $x^2 - 2$?
б) многочлен $x^{11} + x^9 - 5x^8 + x^7 - 6x^6 - 7x^4 - 98x^2 - 49$ на многочлен $x^3 - 7$?

Задача 7. Докажите, что среди корней неприводимого над $\mathbb{Z}$ многочлена из $\mathbb{Z}[x]$ не менее чем второй степени не может быть рациональных.

Задача 8. Докажите, что следующие числа иррациональны:
а) $\sqrt[n]{p}$, где p — простое, $n - 1 \in \mathbb{N}$;
б) $\sqrt[n]{p_1 \dots p_k}$, где $p_1, \dots, p_k$ — различные простые, $n - 1, k \in \mathbb{N}$;
в) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$;
г)* $A(\sqrt[N]{p})$, где N — натуральное число, большее 1, p — простое, $A(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — ненулевой многочлен степени меньше N;
д)* $\alpha_1 p^{\frac{m_1}{n_1}} + \dots + \alpha_k p^{\frac{m_k}{n_k}}$, где p — простое, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — рациональные числа, не все равные нулю, $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$ — попарно различные правильные дроби.

Задача 9*. **а)** Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — корень некоторого ненулевого многочлена из $\mathbb{Q}[x]$. Пусть $G(x)$ — произвольный многочлен из $\mathbb{Q}[x]$, такой что $G(\alpha) \neq 0$. Докажите, что существует такой многочлен $H(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что $\dfrac{1}{G(\alpha)} = H(\alpha)$. **б)** Найдите такой многочлен $H(x)$, если $\alpha = \sqrt[3]{2}$ и $G(x) = x + 1$.

Задача 10*. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — корень неприводимого многочлена из $\mathbb{Q}[x]$ степени n.
а) Докажите, что множество чисел $\{P(\alpha) \mid P(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ с обычными операциям сложения и умножения является полем. (Это поле обозначается $\mathbb{Q}(\alpha)$.)
б) Докажите, что $\mathbb{Q}(\alpha) = \{q_0 + q_1\alpha + q_2\alpha^2 + \dots + q_{n-1}\alpha^{n-1} \mid q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \in \mathbb{Q}\}$.
в) Докажите, что любой элемент поля $\mathbb{Q}(\alpha)$ представляется в виде суммы из пункта б) единственным образом.

Задача 11*. Докажите, что многочлен $(x - a_1)\dots(x - a_n) - 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ при любых попарно различных целых числах $a_1, \dots, a_n$.

Задача 12*. **а)** Найдите целое число a, при котором многочлен $(x - a)(x - 10) + 1$ раскладывается на два многочлена первой степени с целыми коэффициентами. **б)** При каких попарно различных целых числах $a_1, \dots, a_n$ многочлен $(x - a_1)\dots(x - a_n) + 1$ не является неприводимым над $\mathbb{Z}$?

Задача 13*. Разложите на неприводимые множители над $\mathbb{Z}$:
а) $x^8 + x^4 + 1$; **б)** $x^5 + x + 1$; **в)** $x^9 + x^4 - x - 1$.