**Задача 1.** Докажите, что набор векторов $\{e_1, \ldots, e_m\} \in \mathbb{R}^m$, где $e_i = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$, образует базис $\mathbb{R}^m$.

**Задача 2.** **а)** Пусть $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — биективное линейное отображение. Докажите, что набор векторов $\{e_{1'}, \ldots, e_{m'}\}$, где $e_{i'} = f(e_i)$, образует базис $\mathbb{R}^m$.
**б)** Пусть линейное преобразование $f$ переводит базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в базис. Докажите, что оно биективно.

**Определение 1.** *Матрицей* называется произвольная прямоугольная таблица чисел.

**Задача 3.** Пусть $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — произвольное линейное отображение. Запишем координаты вектора $e_{i'} = f(e_i)$ в столбец: $\begin{pmatrix} c^1_{\mathbf{i}} \\ c^2_{\mathbf{i}} \\ \vdots \\ c^m_{\mathbf{i}} \end{pmatrix}$, а из этих столбцов составим квадратную таблицу $C := \begin{pmatrix} c^1_{\mathbf{1}} & c^1_2 & \cdots & c^1_{\mathbf{m}} \\ c^2_{\mathbf{1}} & c^2_2 & \cdots & c^2_{\mathbf{m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c^m_{\mathbf{1}} & c^m_2 & \cdots & c^m_{\mathbf{m}} \end{pmatrix}$

Эта таблица называется *матрицей преобразования* $f$ в базисе $\{e_i\}$.

**Соглашение 1.** В физике (линейной алгебре и аналитической геометрии) часто рассматривают различные суммы произведений. Например, если $w^i$ — координаты вектора $w$ в базисе $\{e_i\}$, то $w = \sum\limits_{al=1}^{m} w_\alpha e_a l$.
В тех случаях, когда суммирование ведётся по одному нижнему и одному верхнему индексу, знак суммы может быть опущен: пишут просто $w^\alpha e_\alpha$, имея в виду сумму по всем осмысленным значениям параметра $\alpha$. Таким образом могут быть записаны довольно длинные суммы:

$$w^\alpha c^\beta_\alpha d^\gamma_\beta e_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{m} w^\alpha c^\beta_\alpha d^\gamma_\beta e_\gamma, \qquad T^{\alpha i}_\beta \cdot K^\beta_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} T^{\alpha i}_\beta \cdot K^\beta_\alpha$$

**Задача 4.** **а)** Пусть $w \in \mathbb{R}^m$ имеет координаты $w^1, \ldots, w^m$. Будем записывать координаты вектора $w$ матрицей $m \times 1$ (то есть столбцом) его координат:

$$w = \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^m \end{pmatrix} = w^1 e_1 + w^2 e_2 + \ldots + w^m e_m = w^\alpha e_\alpha.$$

Найдите координаты вектора $f(w)$ в базисе $\{e_{1'}, \ldots, e_{m'}\}$.
**б)** Найдите координаты вектора $f(w)$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_m\}$.
**в)** Придумайте привило умножения матрицы $C$ на вектор-столбец координат вектора $w$ так, чтобы $f(w) = C \cdot w$.

**Задача 5.** Вычислите: **а)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$; **б)** $\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; Что это за линейное преобразование?
**в)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$; **г)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; **д)** $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$.

**Задача 6.** Пусть $f$ и $g$ — два биективных линейных отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. **а)** Пусть $C$ и $D$ — матрицы преобразований $f$ и $g$ в базисе $\{e_i\}$. Найдите координаты $g(f(e_1))$ в базисе $\{e_i\}$.
**б)** Придумайте правило умножения матриц так, чтобы для каждого вектора $w$

$$g(f(w)) = (D \cdot C) \cdot w.$$

**Задача 7.** Придумайте две матрицы $C$ и $D$ такие, что: **а)** $CD = D$; **б)** $CD = DC$; **в)** $CD \neq DC$.

**Задача 8.** Постройте биекцию между множеством всех линейных отображений (операторов) $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ и множеством матриц размера $m$ на $m$.

**Задача 9.** **а)** Найдите такую матрицу $E$, что для любой матрицы $C$ верно: $EC = CE = C$.
**б)** Докажите, что такая матрица единственна.
**в)** Пусть $C$ — матрица биективного линейного оператора. Докажите, что найдётся матрица $D$ такая, что $CD = DC = E$.
**г)** Докажите, что множество матриц биективных линейных операторов образуют группу относительно операции умножения.

**Задача 10.** Придумайте, как описать аффинные преобразования с помощью матриц, векторов, их сложения и умножения.