Программа зачёта: прогрессии, множества, комбинаторика, целые числа

Прогрессии

1. Определение арифметической прогрессии. Две формулы суммы арифметической прогрессии.
2. Определение геометрической прогрессии. Формула суммы геометрической прогрессии.
3. Числа Фибоначчи. Явная формула.

Теория множеств

4. Множества и их подмножества. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, декартово произведение) и их свойства.
5. Формула включений-исключений для $n = 3$.
6. Отображения множеств. Образы, прообразы и их свойства. Композиция отображений.
7. Взаимно однозначное отображение. Обратимое и обратное отображения. Критерий обратимости отображения.

Комбинаторика

8. Число сочетаний и число перестановок. Явные формулы.
9. Основные комбинаторные свойства сочетаний (и их комбинаторные доказательства).
10. Треугольник Паскаля и его свойства.
11. Бином Ньютона.

Математическая индукция

12. Формулировка принципа математической индукции и обобщённого принципа математической индукции.
13. Неравенство Бернулли и иррациональность $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, и т.д.
14. Формулы сокращённого умножения. Формулы для сумм $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ при $k = 1; 2; 3$.

Целые числа

15. Понятие делимости целых чисел и его основные свойства. Делимое, делитель и частное.
16. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9 и 11.
17. Деление с остатком (существование и единственность неполного частного и остатка).
18. Наибольший общий делитель двух целых чисел и его простейшие свойства. Его представимость в виде линейной комбинации.
19. Алгоритм Евклида. Его использование при поиске выражения для наибольшего общего делителя двух чисел через их целочисленную линейную комбинацию.
20. Линейные диофантовы уравнения и общий метод их решения.
21. Основная теорема арифметики.
22. Теорема Лежандра о каноническом разложении числа $n!$.
23. Наименьшее общее кратное и его простейшие свойства. Связь наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух чисел с этими числами.

1. Определение арифметической прогрессии. Две формулы суммы арифметической прогрессии.

2. Определение геометрической прогрессии. Формула суммы геометрической прогрессии.

3. Числа Фибоначчи. Явная формула.

4. Множества и их подмножества. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, декартово произведение) и их свойства.

5. Формула включений-исключений для $n = 3$.

6. Отображения множеств. Образы, прообразы и их свойства. Композиция отображений.

7. Взаимно однозначное отображение. Обратимое и обратное отображения. Критерий обратимости отображения.

8. Число сочетаний и число перестановок. Явные формулы.

9. Основные комбинаторные свойства сочетаний (и их комбинаторные доказательства).

10. Треугольник Паскаля и его свойства.

11. Бином Ньютона.

12. Формулировка принципа математической индукции и обобщённого принципа математической индукции.

13. Неравенство Бернулли и иррациональность $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, и т.д.

14. Формулы сокращённого умножения. Формулы для сумм $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ при $k = 1; 2; 3$.

15. Понятие делимости целых чисел и его основные свойства. Делимое, делитель и частное.

16. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 и 11.

17. Деление с остатком (существование и единственность неполного частного и остатка).

18. Наибольший общий делитель двух целых чисел и его простейшие свойства. Его представимость в виде линейной комбинации.

19. Алгоритм Евклида. Его использование при поиске выражения для наибольшего общего делителя двух чисел через их целочисленную линейную комбинацию.

20. Линейные диофантовы уравнения и общий метод их решения.

21. Основная теорема арифметики.

22. Теорема Лежандра о каноническом разложении числа $n!$.

23. Наименьшее общее кратное и его простейшие свойства. Связь наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух чисел с этими числами.

Теория множеств

Задача 1. Докажите, что для любых множеств A, B, C
а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; **б)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

Задача 2. Докажите, что для любых множеств A, B, C
а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; **б)** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Задача 3. Верно ли, что для любых множеств A, B, C
а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; **б)** $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

Задача 4. Верно ли, что для любых множеств A, B, C
а) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$; **б)** $(A \setminus B) \cup B = A$;

Задача 5. Верно ли, что для любых множеств A, B, C
а) $(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus A$; **б)** $(B \setminus A) \cup C = (B \cup C) \setminus (A \setminus C)$;

Задача 6. Верно ли, что для любых множеств A, B, C
а) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$; **б)** $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$?

Задача 7. Существуют ли такие множества A, B и C, что условия $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ и $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$ выполнены одновременно?

Задача 8. Пусть $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$. Верно ли, что **а)** $f(X) = Y$; **б)** $f^{-1}(Y) = X$;

Задача 9. Пусть $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$. Верно ли, что **а)** $f^{-1}(f(X)) = X$; **б)** $f(f^{-1}(Y)) = Y$;

Задача 10. Пусть $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$. Верно ли, что
а) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; **б)** $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;

Задача 11. Пусть $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$. Верно ли, что
а) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$; **б)** если $A_1 \subset A_2$, то $f(A_1) \subset f(A_2)$; **в)** если $f(A_1) \subset f(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$?

Задача 12. Пусть $f : X \to Y$, $B_1, B_2 \subset Y$. Верно ли, что
а) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; **б)** $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

Задача 13. Пусть $f : X \to Y$, $B_1, B_2 \subset Y$. Верно ли, что
а) если $B_1 \subset B_2$, то $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$; **б)** если $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$, то $B_1 \subset B_2$?

Задача 14. Пусть множество X состоит из m элементов, а множество Y из n элементов.
а) Сколько существует различных отображений из множества X в множество Y?
б) Как много среди этих отображений взаимно однозначных?

Задача 15. Верно ли, что если отображение $f : X \to Y$ удовлетворяет условиям $f(X) = Y$ и $f^{-1}(Y) = X$, то f — взаимно однозначно?

Задача 16. Пусть для отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ отображение $f \circ g$ тождественно. Верно ли, что $g = f^{-1}$?

Задача 17. Верно ли, что если $|A| = |B|$ и $|C| = |D|$, то
а) $|A \times C| = |B \times D|$; **б)** $|A \cup C| = |B \cup D|$; **в)** $|A \cap C| = |B \cap D|$.

Задача 18. Являются ли равномощными:
а) любые два отрезка на плоскости; **б)** любые две окружности на плоскости;

Задача 19. Являются ли равномощными:
а) интервал и полуокружность без концов; **б)** интервал и прямая;

Целые числа

Задача 20. Делится ли число C_{100}^{50} на 83?

Задача 21. Число 1270 при делении на некоторое число даёт неполное частное 74. Найдите делитель и остаток.

Задача 22. Число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество чётных делителей этого числа равно количеству его нечётных делителей.

Задача 23. Пусть p — простое число, a и b — целые числа. Докажите, что $(a+b)^p - a^p - b^p$ делится на p.

Задача 24. Верно ли, что из любых 5 целых чисел можно выбрать два числа, разность квадратов которых делится на 7?

Задача 25. При каких натуральных k число $(k-1)!$ не делится на k?

Задача 26. При каких целых значениях числа m дробь $\dfrac{14m+17}{21m+25}$ сократима?

Задача 27. Найдите остаток от деления **а)** $2005^{2005^{2005}}$ на 17; **б)** 7^{7^7} на 10;

Задача 28. Найдите остаток от деления **а)** $(2222^{5555} + 5555^{2222})$ на 7; **б)** $996^{996^{996}}$ на 19.

Задача 29. При каких a и b можно заплатить в кассу один рубль, имея на руках неограниченное количество a-рублёвых купюр, если в кассе есть неограниченное количество b-рублёвых купюр?

Задача 30. По окружности длины a см катится колесо, длина обода которого равна b см (a и b натуральные, $(a, b) = d$). В колесо вбит гвоздь, он оставляет отметки на окружности. Сколько отметок оставит гвоздь?

Задача 31. Решите в целых числах уравнение
а) $21x + 48y = 6$; **б)** $105x + 42y = 56$;

Задача 32. Решите в целых числах уравнение
а) $1990x - 173y = 11$; **б)** $nx + (2n-1)y = 3$.

Задача 33. Докажите, что C_{1000}^{500} не делится на 1024.

Задача 34. Найдите каноническое разложение на простые множители числа C_{50}^{25}.

Задача 35. Может ли $n!$ делиться на 2^n при каком-либо натуральном n?

Задача 36. При каких n число $3(n^2+n)+7$ делится на 5?

Задача 37. В некотором числе переставили цифры и получили число, в 3 раза меньшее исходного. Докажите, что исходное число делится на 27.

Задача 38. Докажите, что число, составленное из 81 единицы, делится на 81.

Задача 39. В последовательности Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) каждый член равен сумме двух предыдущих. Заменим каждое число в этой последовательности остатком от деления его на 11. Найдите 1000-ый член получившейся последовательности.

Задача 40. В последовательности Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) каждый член равен сумме двух предыдущих. Заменим каждое число в этой последовательности остатком от деления его на 57^{2010}. Правда ли, что получившаяся последовательность будет периодической?

Задача 41. Докажите, что из любых 52 целых чисел можно выбрать 2 таких числа, что
а) их разность делится на 51; **б)** их сумма или их разность делится на 100.

Задача 42. Пусть $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n. Найдите произведение всех натуральных делителей n.

Задача 43. Найдите число, произведение делителей которого равно **а)** 108; **б)** $3^{30} \cdot 5^{40}$.

Задача 44. Число имеет вид $2^l \cdot 3^m$, где l и m — неотрицательные целые числа. Найдите данное число, если сумма его делителей равна 403.

Математическая индукция

Задача 45. Верно ли следующее рассуждение?

«Для любого натурального n произвольные n точек плоскости лежат на одной прямой. При $n = 1$ утверждение, очевидно, верно. Предположив, что утверждение верно для $n = k$, докажем его для $n = k+1$. Возьмём произвольные $k+1$ точек. Точки $1, \ldots, k$ лежат на одной прямой, точки $2, \ldots, k+1$ лежат на одной прямой (по предположению индукции), следовательно, все они лежат на единственной прямой, проходящей через точки $2, \ldots, k$»

Задача 46. Дано n прямых на плоскости. Докажите, что части, на которые эти прямые делят плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние части (граничащие по отрезку, по лучу или по прямой) были окрашены в разные цвета.

Задача 47. Про последовательность чисел a_1, a_2, a_3, … известно, что $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ при всех натуральных $n > 2$. Докажите, что $a_{n+6} = a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Задача 48. Докажите, что а) $2^n > n$; б) $2^n > n^2$ при $n > 4$; в) $n! > 2^n$ при $n > 3$.

Задача 49. Найдите все натуральные n, при которых $2^n > n^3$.

Задача 50. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

Задача 51. Докажите, что при любом натуральном n выполняются равенства:
а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

Задача 52. Докажите, что при любом натуральном n выполняются равенства:
а) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Задача 53. Докажите, что при любом натуральном n выполняется неравенство

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Задача 54. Докажите, что число $11^{2n} - 2^{6n}$ делится на 57 при любом натуральном n.

Задача 55. Докажите, что $(2^{5n-2} + 5^{n-1}\cdot 3^{n+1})$ делится на 17 при любом натуральном n.

Задача 56. Докажите, что $\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ раз}}\underbrace{88\ldots8}_{n-1\text{ раз}}9 = (\underbrace{66\ldots6}_{n-1\text{ раз}}7)^2$.

Задача 57. Докажите, что сумма кубов любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

Задача 58. Дана последовательность чисел Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ при всех натуральных $k > 1$. Докажите, что $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m-1}$ для любых натуральных $m, n \geqslant 2$.

Задача 59. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки (возможно, включая нулевую степень).

Задача 60. Докажите, что если число $a + \dfrac{1}{a}$ — целое, то и $a^n + \dfrac{1}{a^n}$ — тоже целое.

Задача 61. Докажите, что всякие n квадратов можно разрезать конечным числом прямолинейных разрезов на части так, что из полученных частей можно сложить квадрат.

Задача 62. На окружности расставлены 2^n чисел, каждое из которых равно 1 или -1. Каждую секунду все числа одновременно умножаются на своего правого соседа. Докажите, что настанет момент, когда все числа будут равны 1.

Задача 63. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх вне зависимости от того, как Петя выбирает пачки. (Примечание: если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз.)

Задача 64. Докажите, что квадрат $2^n \times 2^n$, из которого вырезана произвольная клетка, можно разрезать на «уголки» из трёх клеток («уголок» — это квадрат 2×2 без одной клетки).

Задача 65. Докажите, что длина любой стороны произвольного n-угольника меньше суммы длин остальных его сторон.

Задача 66. Докажите, что любое натуральное число, не превосходящее $n!$, можно представить в виде суммы не более, чем n попарно различных слагаемых, каждое из которых является делителем числа $n!$.

Задача 67. Последовательность a_n удовлетворяет соотношению $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$. Известно, что числа a_1 и a_0 натуральны, причём $a_1 > a_0$. Докажите, что $a_n \geqslant 2^n$.

Комбинаторика

Задача 68. Сколько различных диагоналей можно провести в выпуклом n-угольнике?

Задача 69. Сколькими способами можно посадить за круглый стол пять мужчин и пять женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

Задача 70. Сколькими способами можно распределить $3n$ различных предметов между тремя людьми так, чтобы каждый получил n предметов?

Задача 71. Сколько слагаемых получится, если в выражении $(1 + x + y)^{20}$ раскрыть скобки, но не привести подобные члены?

Задача 72. В школьной столовой имеются булочки m разновидностей. Вася хочет купить n булочек. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 73. В каком количестве шестизначных чисел хотя бы 2 цифры совпадают?

Задача 74. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске двух королей так, чтобы они не били друг друга (короли бьют друг друга, если они находятся в клетках, имеющих общую вершину).

Задача 75. Имеется $2m$ одинаковых белых шаров и $3n$ одинаковых чёрных шаров. Сколькими способами из всего этого набора можно взять $(m+n)$ шаров?

Задача 76. Сколькими способами можно выложить в ряд m белых и n чёрных шаров так, чтобы никакие два чёрных шара не лежали рядом?

Задача 77. Из 245 кубиков 88 имеют красную грань, 93 — синюю и 103 — зелёную. При этом красную и зелёную грани имеют 32 кубика, красную и синюю — 28 кубиков, зелёную и синюю — 37 кубиков, а грани всех трёх цветов имеет 13 кубиков. Сколько кубиков не имеют грани ни одного из указанных цветов?

Задача 78. В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак $+$. Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем — перед каждой пятой, а затем — перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

Задача 79. Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n разных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (за раз он может съесть от 0 до n разных блюд). **а)** Сколько дней ему удастся это делать? **б)** Сколько блюд он съест за это время?

Задача 80. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах **а)** $\underbrace{AA\ldots A}_{a\text{ букв}}\underbrace{BB\ldots B}_{b\text{ букв}}$, **б)** $\underbrace{A_1A_1\ldots A_1}_{a_1\text{ букв}}\underbrace{A_2A_2\ldots A_2}_{a_2\text{ букв}}\ldots\underbrace{A_nA_n\ldots A_n}_{a_n\text{ букв}}$?

Задача 81. Пусть множество C содержит n элементов. Сколькими способами можно выбрать такие два его подмножества A и B, что **а)** $A\cap B=\varnothing$; **б)** $A\subset B$?

Задача 82. Сколькими способами семь школьников могут вместе покататься **а)** на аттракционе «поезд», состоящем из 7 одноместных вагончиков; **б)** на аттракционе «поезд», состоящем из 11 одноместных вагончиков;

Задача 83. Сколькими способами семь школьников могут вместе покататься **а)** на карусели, у которой 7 мест; **б)** на карусели, у которой 11 мест; **в)** на аттракционе «поезд», состоящем из 7 двухместных каруселей?

Задача 84. Сколькими нулями оканчивается число **а)** $11^{100}-1$; **б)** $9^{11}+1$?

Задача 85. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, каждое из которых можно записать с помощью цифр 1, 2, 3 и 4 (цифры могут повторяться).

Задача 86. Сколько телефонных номеров содержат комбинацию 12?