Экспонента и всё-всё-всё

Шашков С.

Основная цель этой лекции — полностью разобраться с экспонентой, пределами, с нею связанными, её производной и обратной функцией. Итак, поехали.

Экспонента

Определение 1. Числом e называется предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Кхм-кхм-кхм! А почему этот предел вообще существует? Докажем, что эта последовательность монотонна и ограничена, тогда по теореме Вейерштрассе этот предел будет существовать. Нам понадобится странная

Лемма 1. *Пусть $a, b > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда выполнено неравенство* $\dfrac{a^{n+1}}{b^n} \geqslant (n+1)a - nb$.

□ Доказать эту лемму можно по индукции, но мы вместо этого воспользуемся неравенством Бернулли. Поделим только перед этим обе стороны неравенства на b.

$$\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \left(1+\left(\frac{a}{b}-1\right)\right)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\cdot\left(\frac{a}{b}-1\right) = (n+1)\cdot\frac{a}{b} - n = \frac{(n+1)a-nb}{b}$$

■

Лемма 2. *Последовательность $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает.*

□ Достаточно доказать, что для любого натурального n отношение e_{n+1}/e_n больше либо равно 1. Обозначим $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ через a, а $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ — через b. Заметим, что эти числа положительны. Тогда по лемме 1:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a^{n+1}}{b^n} \geqslant (n+1)a - nb = (n+1)\cdot\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right) - n\cdot\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = 1.$$

■

Лемма 3. *Последовательность $E_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает.*

□ Опять же, достаточно доказать, что для любого натурального n отношение E_{n+1}/E_n меньше либо равно 1. Так как мы собираемся использовать всё ту же лемму, то сделаем следующий трюк: заменим числа в числителе и знаменателе на их обратные (то есть заменим x на $\frac{1}{x}$). Обозначим $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$ через a и $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ через b. Далее

$$\frac{\frac{1}{E_{n+1}}}{\frac{1}{E_n}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{a^{n+2}}{b^{(n+1)}} \geqslant \big(n+2\big)\cdot a - \big(n+1\big)\cdot b = (n+2)\cdot\left(\tfrac{n+1}{n+2}\right) - (n+1)\cdot\left(\tfrac{n}{n+1}\right) = 1.$$

■

Лемма 4. *Последовательности (e_n) и (E_n) имеют пределы и* $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

□ Заметим, что $E_n/e_n = (1+\frac{1}{n}) > 1$, поэтому $e_n < E_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательности e_n и E_n монотонны и ограничены, поэтому по теореме Вейерштрассе имеют пределы. Далее

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} E_n}{\lim\limits_{n\to\infty} e_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{E_n}{e_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

■

Итак, вернёмся к числу e. Чудесным образом, предел последовательности $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ существует, и именно он зовётся числом e.

Кстати, последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится к e весьма неспешно. Скорость этой сходимости мы можем оценить следующим образом. Мы уже знаем, что $e_n < e < E_n$. Следовательно,

$$|e-e_n| < E_n - e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{e}{n}.$$

То есть чтобы гарантировать точность 10^{-6}, потребуется взять $n > e \cdot 10^6$.

Оказывается, для любого действительного x существует предел последовательности $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, равный e^x. Несложно доказать аналоги лемм 2, 3 и 4 для последовательностей $e_n = (1+\frac{x}{n})^n$ и $E_n = (1+\frac{x}{n})^{n+x}$, однако это лишь докажет, что предел существует. Для того, чтобы всё-таки разобраться с этим пределом, потребуется ещё несколько шагов.

Лемма 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$.

□

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right)} = \frac{1}{e}$$

■

Лемма 6. *Для любой бесконечно большой последовательности t_n существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t_n}\right)^{t_n} = e$.

□ Предположим для начала, что все числа t_n целые. Будем действовать по определению предела последовательности. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Мы знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n} = e$. Найдём такое N_1, что при $n > N_1$ выполнено неравенство $\left|(1+\frac{1}{n})^n - e\right| < \varepsilon$, а также такое N_2, что при $n > N_2$ выполнено неравенство $\left|(1-\frac{1}{n})^{-n} - e\right| < \varepsilon$. Так как последовательность t_n бесконечно большая, то найдётся такое число N, что $|t_n| > \max(N_1, N_2)$ при $n > N$. Но тогда $\left|(1+\frac{1}{t_n})^{t_n} - e\right| < \varepsilon$ при $n > N$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} = e$.

Теперь заметим[1], что для любого $t \neq 0$

$$\left(1+\frac{1}{\lceil t\rceil}\right)^{\lfloor t\rfloor} \leqslant \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leqslant \left(1+\frac{1}{\lfloor t\rfloor}\right)^{\lceil t\rceil} \text{ при } t>1,\ \left(1+\frac{1}{\lfloor t\rfloor}\right)^{\lceil t\rceil} \leqslant \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leqslant \left(1+\frac{1}{\lceil t\rceil}\right)^{\lfloor t\rfloor} \text{ при } t<-1.$$

Поэтому общий случай сводится к случаю целочисленных последовательностей при помощи теоремы о двух милиционерах. ■

Теорема 1. *Для любого действительного x существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

□ Если $x = 0$, то всё очевидно. Иначе рассмотрим бесконечно большую последовательность $t_n = \frac{n}{x}$. По лемме 6 предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} = e$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n x} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right)^x = e^x.$$

■

[1] Напомним: $\lfloor t\rfloor$ — t, округлённое вниз, аналогично $\lceil t\rceil$ — t, округлённое вверх

Ряд для e^x

Теорема 2. *Для любого действительного числа x существует предел*
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^1}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x.$$

$\square$ Обозначим число $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ через e_n, а сумму $1+\frac{x^1}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ — через s_n. Для начала раскроем скобки в выражении $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ по биному Ньютона:
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+C_n^1\frac{x^1}{n}+C_n^2\frac{x^2}{n^2}+\ldots+C_n^n\frac{x^n}{n^n}=1+\frac{x^1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{n\cdot n}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}.$$
Обозначим множитель перед $\dfrac{x^i}{i!}$, равный $\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-i+1)}{n^i}$, через $\alpha_i(n)$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_i(n)=1$ для всех i. Хочется сказать, что для каждый множитель $\alpha_i(n)$ стремится к 1, поэтому получившаяся сумма стремится к $\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{x^i}{i!}$. Однако здесь кроется опасность: хотя каждая «ошибка» стремится к 0, их общее число стремится к бесконечности.

Разберём сначала случай $x>0$. Зафиксируем натуральное число N, и рассмотрим произвольное $n>N$. Заметим, что каждое из чисел $\alpha_i(n)$ меньше либо равно 1, поэтому $e_N\leqslant s_N$. «Откусим» от e_n первые N слагаемых и получим:
$$1+\frac{x^1}{1!}\alpha_1(n)+\ldots+\frac{x^N}{N!}\alpha_N(n)\leqslant e_n.$$
При $n\to\infty$ левая часть неравенства стремится к s_N, а правая — к e^x. Отсюда заключаем, что $s_N\leqslant e^x$. Таким образом, $e_N\leqslant s_N\leqslant e^x$ для всех натуральных N, откуда по теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=e^x$.

Упражнение 1. Разобраться со случаем $x<0$.

$\blacksquare$

Оценим, насколько быстро ряд $\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{i!}$ стремится к e:
$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}-e\right|=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2+\ldots\right)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{n+2}{(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{n!n}$$
То есть чтобы гарантировать точность 10^{-6} достаточно взять $n>8$. Напомним, что последовательность $(1+\frac{1}{n})^n$ давала точность порядка $\frac{e}{n}$, и $n=10^6$ было недостаточно.

Ряд для экспоненты насколько важен, что приведём ещё одно независимое доказательство его сходимости. Перед этим только заметим, что понятие предела последовательности один в один можно применить к комплексным последовательностям. Теперь докажем, что для любого комплексного числа z существует предел
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{z^i}{i!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z^1}{1!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}\right).$$
$\square$ Воспользуемся критерием Коши (который отлично работает и для комплексных чисел). Обозначим $|z|$ через t, и рассмотрим пару натуральных чисел $m<n$, больших t. Тогда
$$\left|\sum_{i=m}^{n}\frac{z^i}{i!}\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=m}^{n}\frac{t^i}{i!}=\frac{t^m}{m!}\cdot\left(1+\frac{t}{(m+1)}+\ldots+\frac{t^{n-m}}{(m+1)\cdot\ldots\cdot n}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{t^m}{m!}\cdot\left(1+\frac{t}{(m+1)}+\ldots+\left(\frac{t}{(m+1)}\right)^{n-m}+\ldots\right)\leqslant\frac{t^m}{m!}\cdot\frac{1}{1-\frac{t}{(m+1)}}.$$

Теперь зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Последовательность $\dfrac{t^m}{m!} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{t}{(m+1)}}$ — бесконечно малая, поэтому найдётся такое число N, что $\left| \dfrac{t^m}{m!} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{t}{(m+1)}} \right| < \varepsilon$ при $m > N$. Но тогда при $m, n > N$ выполнено неравенство $\left| \sum_{i=m}^{n} \frac{z^i}{i!} \right| < \varepsilon$, и по критерию Коши последовательность имеет предел. ■

Второй замечательный предел и производная экспоненты

Напомним, что из лемм 2 и 3 следует, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$. Извлечём корень степени n из этого неравенства, вычтем из всех частей единицу, умножим на n и применим теорему о двух милиционерах:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}} \leqslant 1 + \frac{1}{n-1} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n-1} \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \leqslant \frac{n}{n-1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1.$$

Если же неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ «перевернуть» да дробь преобразовать, то получится неравенство $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \geqslant e^{-1} \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. После повторения предыдущей цепочки (корни, единицы, милиционеры), получим предел $\lim\limits_{n \to \infty} -n(e^{\frac{1}{-n}} - 1) = 1$.

Теорема 3. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$.

□ Будем действовать по определению предела по Коши. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Воспользуемся тем, что

$$\lim_{n \to \infty} (n+1)(e^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \to \infty} n(e^{\frac{1}{n+1}} - 1) = \lim_{n \to \infty} -(n+1)(e^{\frac{1}{-n}} - 1) = \lim_{n \to \infty} -n(e^{\frac{1}{-(n+1)}} - 1) = 1.$$

Найдём такое число N, что при $n > N$ члены каждой из последовательностей отличаются от 1 менее, чем на ε. Теперь возьмём в качестве δ число $\frac{1}{N}$. Тогда если $t \in U_\delta(0)$, то либо $\frac{1}{t} > N$, либо $\frac{1}{t} < -N$. Сопло на данном этапе мы сделаем из дерева, чтобы лучше горело. Вне зависимости от знака t, число $\left| \dfrac{e^t - 1}{t} - 1 \right|$ находится между числами $\left| \dfrac{e^{\lfloor t \rfloor} - 1}{\lceil t \rceil} - 1 \right|$ и $\left| \dfrac{e^{\lceil t \rceil} - 1}{\lfloor t \rfloor} - 1 \right|$, каждое из которых по предположению меньше ε. ■

Следствие 1. $(e^x)' = e^x$ и $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

□

$$(e^x)' = \lim_{t \to 0} \frac{e^{x+t} - e^x}{t} = e^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^x;$$
$$(\ln x)' = \frac{(\ln x)' \cdot x}{x} = \frac{(\ln x)' \cdot e^{\ln x}}{x} = \frac{(e^{\ln x})'}{x} = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}.$$

■

Задача 1. (*Ещё один замечательный предел*) Докажите, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.