

Определение 1. Если число d делит числа a и b , то d называется *общим делителем* чисел a и b . Наибольший среди общих делителей чисел a и b называется *наибольшим общим делителем* a и b (обозначение: (a, b)). В том случае, когда $(a, b) = 1$, говорят, что числа a и b *взаимно простые*.

Задача 1. Для каких целых a и b число (a, b) существует?

Задача 2. Докажите, что **а)** для каждого целого x справедливо $(a, b) = (a, b + ax)$; **б)** если a кратно b , то $(a, b) = |b|$; **в)** если r — остаток от деления a на b , то $(a, b) = (b, r)$.

Задача 3. Найдите а) $(n, 1)$; б) $(n, n + 1)$; в) $(2n + 3, 7n + 6)$; г) $(n^2, n + 1)$.

Задача 4. Пусть a и b — два фиксированных целых числа. Обозначим через I множество всех чисел, представимых в виде $ax + by$ (x и y — целые числа). Пусть d — наименьшее положительное число в I . Докажите, что

а) каждое число из I делится на любой общий делитель чисел a и b (а значит, и на (a, b));

б) каждое число из I делится на d ;

B) $d = (a, b)$.

Задача 5. Пусть a и b — два фиксированных целых числа. Обозначим через d наименьшее натуральное число, делящееся на любой общий делитель a и b . Докажите, что $d = (a, b)$.

Задача 6. (*Алгоритм Евклида*) Пусть a и b — два фиксированных натуральных числа. Будем последовательно заменять большее из этих чисел на их разность. Докажите, что:

а) в некоторый момент мы получим пару $(d, 0)$, $d \neq 0$; **б)** $(a, b) = d$;

в) все промежуточные числа представимы в виде $ax + by$ для некоторых целых x и y ;

г) найдутся целые числа x и y , что $ax + by = (a, b)$;

Задача 7. Найдите а) $(7777777, 7777)$; б) $(3289, 969)$; в) $(7581, 1767)$; г) $(10946, 17711)$; д)* $(2^m - 1, 2^n - 1)$; е)* $(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1)$.

Задача 8. Как для данных чисел a и b при помощи алгоритма Евклида найти такие целые числа x и y , что $ax + by = (a, b)$?

Задача 9. Найдите целые числа x и y такие, что $ax + by = (a, b)$, в следующих случаях:

а) $a = 525, b = 231$; **б)** $a = 645, b = 381$.

Задача 10. а) Докажите, что для любого натурального k выполнено $(ka, kb) = k \cdot (a, b)$.

б) Докажите, что если m — общий натуральный делитель чисел a и b , то $(a/m, b/m) = (a, b)/m$.

Задача 11. Докажите, что числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие целые x и y , что $ax + by = 1$.

Задача 12. Числа a , b и c целые, $(a, b) = 1$. Докажите, что

а) если $a \in b$, то $c \in b$; **б)** если $c \in a$ и $c \in b$, то $c \in ab$.

Задача 13*. Даны m целых чисел. За один ход разрешается прибавить по единице к любым n из них. При каких m и n всегда можно за несколько таких ходов сделать все числа одинаковыми?

[illegible]

