

Прежде чем изучать специальную теорию относительности, необходимо немного изучить классическую теорию.

Чтобы говорить о каких-либо объектах, нам нужно ввести систему координат. Обычно это три координаты в пространстве и одна координата — время. После того, как координаты введены, мы можем изучать динамику тел.

Далее возникает естественный вопрос: что произойдёт, если взять другую систему координат. Так возникает понятие *инерциальной системы отсчёта*. И постулируется *принцип относительности Галилея*: если в двух замкнутых лабораториях, одна из которых равномерно прямолинейно (и поступательно) движется относительно другой, провести одинаковый механический эксперимент, результат будет одинаковым (или более формально: законы механики не зависят от того, в какой из инерциальных систем отсчёта мы их исследуем).

Чтобы говорить об инерциальных системах отсчёта, необходимы несколько формальных определений.

**Задача 1.** Астрономы считают, что все галактики разлетаются прямолинейно по направлениям от нашей со скоростями, пропорциональными расстояниям до них. Означает ли это, что наша галактика — центр вселенной?

**Задача 2.** Крючок безмена заменили на более тяжёлый и одновременно параллельно сдвинули вниз шкалу, так чтобы нуль совпал с новым положением стрелки. Будет ли безмен после этого правильно измерять вес?

**Определение 1.** Отображение  $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$  называется *линейным*, если для всех  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  и  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  выполняется равенство<sup>1</sup>  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ . Отображение  $\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$  называется *аффинным*, если существует  $a \in \mathbb{R}^m$ , такое что отображение  $x \mapsto g(x + a) - g(a)$  линейно.

**Задача 3.** Являются ли следующие отображения аффинными или линейными?:

- а)  $f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ ; б)  $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}$ ; в)  $f(x) = (57x, 179x + 57) \in \mathbb{R}^2$ ;  
 г)  $f(x_1, x_2) = -3(x_1 - x_2) \in \mathbb{R}$ ; д)  $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1 - 1, x_1) \in \mathbb{R}^2$ ;  
 е)  $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2 + 1, x_1^2 + x_2^2) \in \mathbb{R}^3$ ?

**Задача 4.** На плоскости фиксированы три точки:  $O$ ,  $A$  и  $B$ . Нарисуйте множество точек  $\lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$  при а)  $\lambda + \mu = 1$ ; б)  $\lambda, \mu > 0$ .

**Задача 5.** Пусть линейное отображение  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$  переводит базисные векторы  $e_1 = (1, 0)$  и  $e_2 = (0, 1)$  в векторы  $(a, c)$  и  $(b, d)$  соответственно. Куда она переведёт вектор  $(x, y)$ ?

**Задача 6.** Опишите все линейные и все аффинные отображения

- а)  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$                       б)  $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$                       в)  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$                       г)  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

**Задача 7.** Изменим в определении аффинного отображения фразу «существует  $a \in \mathbb{R}^m$ » на фразу «для любого  $a \in \mathbb{R}^m$ ». Будет ли новое определение эквивалентно исходному?

**Задача 8.** а) Докажите, что множество всех линейных отображений  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  образует группу по сложению. Обозначение:  $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  (от слова «гомоморфизм»); б) Докажите, что множество всех линейных функций  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  с операцией сложения изоморфно  $\mathbb{R}^4$ .

**Задача 9.** Пусть задано некоторое биективное отображение  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Известно, что точка в  $\mathbb{R}^m$  движется равномерно и прямолинейно тогда и только тогда, когда её образ движется равномерно и прямолинейно. Докажите, что преобразование  $f$  аффинно.

**Определение 2.** Набор векторов  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$  называется базисом, если для любого вектора  $w$  найдётся единственный набор чисел  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  (который называется координатами вектора  $w$  в этом базисе), что

$$w = \lambda v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

**Задача 10.** а) Опишите все базисы в  $\mathbb{R}^1$ ; б) Докажите, что в любом базисе в  $\mathbb{R}^2$  ровно два вектора.

<sup>1</sup> $\lambda(x_1, \dots, x_m) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_m)$  и  $(x_1, \dots, x_m) + (y_1, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m)$