Задача 1. Докажите, что если уравнение $x^2 - my^2 = 1$ имеет нетривиальное (т.е., отличное от решения $x = 1$, $y = 0$) решение в целых числах, то m не есть полный квадрат.

Задача 2. **а)** Покажите, что преобразование $(x, y) \mapsto T(x, y) = (3x + 2y, 4x + 3y)$ переводит всякую гиперболу семейства $x^2 - my^2 = c$ в себя и всякое целочисленное решение уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ в другое целочисленное решение.

б) Покажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

в) Докажите, что всякое положительное целочисленное решение уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ может быть получено из тривиального решения $(1, 0)$ посредством многократного применения преобразования T.

г)* Приведите общую формулу решений уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$.

Задача 3. **а)** Докажите, что вещественные числа вида $a + b\sqrt{m}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ замкнуты относительно операций сложения, вычитания и умножения. Это множество обозначается $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ и называется кольцом целых гауссовых чисел.

б) Докажите, что вещественные числа вида $a + b\sqrt{m}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ замкнуты относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления при $a \neq 0$. Это множество называется полем квадратичного расширения $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$.

в) Каждому гауссову числу $z = a + b\sqrt{m}$ сопоставим сопряженное гауссово число $\bar{z} = a - b\sqrt{m}$. Назовем нормой $N(z)$ гауссова числа z целое число $z\bar{z} = a^2 - mb^2$. Докажите мультипликативность нормы: $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

г) Пусть $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{m}$ и $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{m}$ - два целых гауссовых числа, причем модуль нормы z_2 равен n. Тогда, если $a_1 = a_2 \mod n$ и $b_1 = b_2 \mod n$, то z_1 делится на z_2 в $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$.

Задача 4. **а)** Решения уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с целыми гауссовыми числами из $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ с нормой, равной единице. Объясните это.

б) Докажите, что на множестве решений уравнения Пелля определена операция умножения, а роль единицы играет тривиальное решение $(1, 0)$.

в) Переформулируйте результаты задачи 2 в терминах гауссовых чисел.

г) Назовем фундаментальным решением уравнения Пелля положительное решение с минимальной нормой соответствующего гауссова числа (если таковое существует). Покажите, что положительные решения уравнения исчерпываются степенями фундаментального.

д) Покажите, что для доказательства существования нетривиального решения уравнения Пелля достаточно показать, что существует гипербола $x^2 - my^2 = c$, содержащая бесконечно много целых точек.

Задача 5. **а)** Докажите, что если множество M на плоскости имеет площадь, большую 1, то найдутся две точки $A, B \in M$ такие, что вектор $\overrightarrow{AB}$ целочисленный.

б) (лемма Минковского) Докажите, что всякое центрально-симметричное множество площади больше 4 содержит целочисленную точку, отличную от начала координат.

в) Пусть m не есть полный квадрат. Выведите из задач 4д и 5б существование нетривиального решения у любого уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$.

Задача 6. Пусть пара (x, y) - положительное решение уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$. Тогда $\left|\frac{x}{y} - \sqrt{m}\right| < \frac{1}{2y^2}$.

Таким образом, рациональное число x/y хорошо приближает $\sqrt{m}$ и потому является подходящей дробью для $\sqrt{m}$. Более точно, это следует из такого свойства приближений: если несократимая дробь p/q такова, что $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{2q^2}$, то она является подходящей дробью для иррационального числа α. Однако, не всякая подходящая дробь для $\sqrt{m}$ определяет решение соответствующего уравнения Пелля. Попробуйте разобраться с этим на примерах уравнений Пелля с $m = 2$ и $m = 3$.

Задача 7*. Докажите, что все целые неотрицательные решения уравнения $x^2 - mxy + y^2 = 1$ описываются как соседние члены рекуррентной последовательности $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1$, $\varphi_{k+1} = m\varphi_k - \varphi_{k-1}$.