Листок №CN1 Комплексные числа 11-й "Д" КЛАСС 2011 г

Определение 1. *Комплексное число* z — это выражение вида $z = a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — *мнимая единица:* символ, квадрат которого равен (-1). Число a называется вещественной частью комплексного числа z (пишется $a = \mathrm{Re}(z)$), а число b — мнимой частью z (пишется $b = \mathrm{Im}(z)$). Комплексные числа можно складывать и умножать («раскрывая скобки и приводя подобные»). Множество комплексных чисел обозначается буквой $\mathbb{C}$.

Задача 1. Напишите формулы для вещественной и мнимой части суммы и произведения комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$.

Определение 2. Сопоставим каждому комплексному числу $z = a + bi$ вектор с координатами (a, b). Длина этого вектора называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$. Пусть $z \neq 0$. Угол, отсчитанный против часовой стрелки от вектора с координатами $(1, 0)$ до вектора с координатами (a, b), называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\mathrm{Arg}(z)$. Аргумент комплексного числа определен с точностью до прибавления числа вида $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент следующих комплексных чисел:
-4, $1 + i$, $1 - i\sqrt{3}$, $\sin\alpha + i\cos\alpha$, $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$, $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Задача 3. (*Тригонометрическая форма записи*) Докажите, что для любого ненулевого комплексного числа z имеет место равенство $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$.

Задача 4. **а)** Доказать, что сумме комплексных чисел отвечает вектор, равный сумме векторов, отвечающих слагаемым. **б)** Пусть z и w — комплексные числа. Выразите $|zw|$ и $\mathrm{Arg}(zw)$ через $|z|$, $|w|$, $\mathrm{Arg}(z)$ и $\mathrm{Arg}(w)$.

Задача 5. Верно ли, что $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ при любых комплексных числах z и w?

Определение 3. Пусть $z = a + bi$. Число $\overline{z} = a - bi$ называется *комплексно-сопряжённым* к z.

Задача 6. Выразите модуль и аргумент числа $\overline{z}$ через модуль и аргумент числа z.

Задача 7. Докажите, что **а)** $|z|^2 = z\overline{z}$ для любого $z \in \mathbb{C}$; **б)** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ и $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Задача 8. Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $z \in \mathbb{C}$ и $P(z) = 0$. Докажите, что $P(\overline{z}) = 0$.

Задача 9. Докажите, что **а)** $\mathbb{C}$ — поле; **б)** из любого комплексного числа можно извлечь квадратный корень.

Задача 10. Можно ли на множестве комплексных чисел ввести отношение порядка $\leqslant$ так, чтобы получилось упорядоченное поле?

Задача 11. Вычислите: **а)** $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; **б)** $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; **в)** $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;
г) $(1 + i\sqrt{3})^{150}$; **д)** $\frac{(\sqrt{3}+i)}{(1-i)^{30}}$.

Задача 12. Решите уравнения: **а)** $z^2 = i$; **б)** $z^2 = 5 - 12i$; **в)** $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$; **г)** $\overline{z} = z^2$; **д)** $\overline{z} = z^3$.

Задача 13. Вычислите суммы: **а)** $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$; **б)** $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$.

Задача 14. (*Формула Муавра*) Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$.
Докажите, что $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Задача 15. Найдите суммы: **а)** $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$; **б)** $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$;
в) $\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \ldots + \frac{1}{2^n}\sin n\varphi$; **г)** $1 + 2\cos\varphi + 3\cos 2\varphi + \ldots + (n+1)\cos n\varphi$.

Задача 16. Выразите $\sin^4 x$ и $\cos^5 x$ в виде суммы чисел вида $\alpha\sin kx$ и $\beta\cos lx$, где α, $\beta \in \mathbb{R}$ и $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Задача 17. Выразите $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Задача 18. Докажите, что многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет не более n комплексных корней.

0.3mm6.5mm

Задача 19. **а)** Найдите (и нарисуйте) все комплексные корни многочленов: z^2-1, z^3-1, z^4-1, z^5-1, z^6-1. **б)** Сколько корней имеет уравнение $z^n=1$?

Задача 20. **а)** Вычислите сумму и произведение всех корней степени n из 1. **б)** Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — все корни степени n из 1, $\alpha_1=1$. Найдите $\alpha_1^s+\ldots+\alpha_n^s$ (где $s\in\mathbb{N}$) и $(1-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha_n)$.

Задача 21. Пусть P — многочлен степени k с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Докажите, что среднее арифметическое значений P в вершинах правильного n-угольника равно значению P в центре многоугольника, если $n>k$.

Задача 22. **а)** Пусть $z=\frac{3+4i}{5}$. Найдётся ли такое $n\in\mathbb{N}$, что $z^n=1$? **б)** Докажите, что $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\notin\mathbb{Q}$.

Задача 23. Пусть $z,v,w\in\mathbb{C}$, причём $z+v+w=z^2+v^2+w^2=z^3+v^3+w^3=0$. Верно ли, что $z^4+v^4+w^4=0$?

Задача 24. Нарисуйте множество комплексных чисел, для которых: **а)** $z^n+1=0$;
б) $|z-i|\leqslant 2$; **в)** $|z-1|=2|z-i|$; **г)** $z^2+\overline{z}^2=4$; **д)** $|z-1|-|z+1|\leqslant 3$; **е)** $|z-1|+|z+1|=3$;
ж) $z+\overline{z}=2|z-1|$.

Задача 25. Каким геометрическим преобразованиям соответствуют следующие отображения:
а) $z\longmapsto\overline{z}$;
б) $z\longmapsto(\cos\varphi+i\sin\varphi)z$, где $\varphi\in\mathbb{R}$;
в) $z\longmapsto\lambda z$, где $\lambda\in\mathbb{R}$;
г) $z\longmapsto wz$, где $w\in\mathbb{C}$?

Задача 26. Запишите в виде функции комплексного переменного:
а) ортогональную проекцию на ось x;
б) симметрию относительно оси y;
в) центральную симметрию с центром A;
г) поворот на угол φ относительно точки A;
д) гомотетию с коэффициентом k и центром A;
е) симметрию относительно прямой $y=3$ со сдвигом на 1 влево;
ж) поворот, переводящий ось x в прямую $y=2x+1$;
з) симметрию относительно прямой $y=2x+1$.

Задача 27. Куда отображение $z\longmapsto z^2$ переводит **а)** декартову координатную сетку;
б) полярную координатную сетку; **в)** окружность $|z+i|=1$;

Задача 28. Те же вопросы для отображения $z\longmapsto 1/z$.

Задача 29. Куда отображение $z\longmapsto\sqrt{z}$ переводит верхнюю полуплоскость (без границы)?

Задача 30. **а)** Куда отображение $z\longmapsto 1/z$ переводит множество $\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}(z)>0, |z|\leqslant 1\}$?
б)* Тот же вопрос для отображения $z\longmapsto\frac{z+1/z}{2}$.

1	2	3	4 а	4 б	5	6	7 а	7 б	8	9 а	9 б	10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	12 а	12 б	12 в	12 г	12 д	13 а	13 б	14	15 а	15 б	15 в	15 г	16	17	18

19 а	19 б	20 а	20 б	21	22 а	22 б	23	24 а	24 б	24 в	24 г	24 д	24 е	24 ж	25 а	25 б	25 в	25 г	26 а	26 б	26 в	26 г	26 д	26 е	26 ж	26 з	27 а	27 б	27 в	28	29	30 а	30 б

0.7mm6.5mm-10mm