Метрические пространства

Определение 1. *Метрическим пространством* называется множество X с заданной функцией «расстояния» или *метрикой* $d(x,y)$, определенной для любых $x,y \in X$ и удовлетворяющей следующим аксиомам:

1. $d(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;
2. $d(x,y)=d(y,x)$ (симметричность);
3. $d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$ (неравенство треугольника).

Подмножество Y метрического пространства X, рассматриваемое как метрическое пространство (с той же метрикой), называется *подпространством* пространства X.

Задача 1. Пусть X — метрическое пространство с метрикой d. Докажите, что $d(x,y) \geqslant 0$ для любых $x,y \in X$.

Задача 2. Поездка на московском метрополитене от станции A до станции B требует времени, которое зависит от выбранного маршрута, времени ожидания поездов и т.п. Выберем из всех возможных случаев тот, при котором затраченное время окажется наименьшим, и назовём это время расстоянием от станции A до станции B. Является ли такое расстояние метрикой на множестве станций московского метро? Если нет, предложите дополнительные условия, при которых введённое расстояние будет метрикой.

Задача 3. Приведите несколько примеров полезных метрических пространств.

Определение 2. Множество последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ длины n, состоящих из действительных чисел, называется *n-мерным арифметическим пространством* $\mathbb{R}^n$. (Обычные прямая, плоскость и пространство — это $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно).

Задача 4. Является ли метрическим пространством $\mathbb{R}^n$ с метрикой

а) $d_1(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k-x_k|$;

б) $d_2(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}$ *(евклидова метрика)*;

в) $d_\infty(x,y)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|y_k-x_k|$?

Определение 3. Пусть X — метрическое пространство, $x_0 \in X$ — произвольная точка, $\varepsilon>0$ — действительное число. Множество $U_\varepsilon(x_0)=\{x \in X \mid d(x,x_0)<\varepsilon\}$ называется ε-окрестностью точки x_0 (или *открытым шаром* с центром x_0 и радиусом ε). Множество $B_\varepsilon(x_0)=\{x \in X \mid d(x,x_0)\leqslant\varepsilon\}$ называется *замкнутым шаром* с центром x_0 и радиусом ε.

Задача 5. Как выглядят шары в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ относительно метрик из задачи 4?

Задача 6. Докажите, что множество $C[a,b]$ всех непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, снабженное метрикой $d(f,g)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-g(t)|$ (эта метрика называется *равномерной),* является метрическим пространством.

Задача 7. Дайте определения предельной точки подмножества метрического пространства, предела последовательности точек метрического пространства, предела отображения метрических пространств $F: X\to Y$ в точке $x_0 \in X$, непрерывности отображения метрических пространств $F: X \to Y$ в точке $x_0 \in X$ (в двух вариантах: по Коши и по Гейне).

Определение 4. Подмножество U в метрическом пространстве X называется *открытым,* если для любой точки $x \in U$ найдётся некоторая ε-окрестность, целиком содержащаяся в U.

Задача 8. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств непрерывно всюду тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт.