Определение 1. Топологическим пространством называется пара $(X, \mathcal{T})$, состоящая из множества X и набора его подмножеств $\mathcal{T} = \{U_\alpha\}$, которые называются *открытыми,* так что:
(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$, то есть пустое множество и всё множество X открыты;
(ii) если $U, V \in \mathcal{T}$, то $U \cap V \in \mathcal{T}$, то есть пересечение двух открытых открыто;
(iii) если $\{V_\beta\}$ — произвольный набор открытых множеств, то $\bigcup_\beta V_\beta \in \mathcal{T}$, то есть произвольное объединение открытых множеств открыто.

Также говорят, что X снабжено структурой топологического пространства, или что на X задана топология.

Задача 1. Придумайте несколько топологий на множестве $X = \{a, b\}$.

Определение 2. *Окрестностью* точки называется любое открытое множество, эту точку содержащее.

Задача 2. **а)** Может ли у точки в топологическом пространстве не быть окрестностей?
б) Докажите, что на любом множестве можно задать топологию.

Задача 3. Пусть (M, d) — метрическое пространство. Положим открытыми те множества, которые вместе с каждой своей точкой содержат какую-нибудь её ε-окрестность. Докажите, что таким образом M наделяется структурой топологического пространства.

Таким образом, любое метрическое пространство является топологическим. В частности $\mathbb{R}^n$ с метрикой d_2 является топологическим пространством.

Задача 4. Докажите, что метрики d_1, d_2 и d_∞ индуцируют на $\mathbb{R}^n$ одну и ту же топологию.

Задача 5. **а)** Пусть Y — некоторое непустое подмножество метрического пространства (X, d). Докажите, что метрика на X индуцирует на Y структуру метрического пространства.
б) Пусть Y — некоторое непустое подмножество топологического пространства $(X, \mathcal{T})$. Положим открытыми в Y пересечения открытых в X множеств с Y. Докажите, что это правило задаёт на Y топологию, которая называется *индуцированной.*

Задача 6. **а)** Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ можно представить как объединение интервалов (то есть множество интервалов является *базой* топологии) **б)** Докажите, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением непересекающихся интервалов и лучей.

Определение 3. Точка $x \in X$ называется *предельной точкой множества* M*,* если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M (отличную от x).

Определение 4. Множество M в топологическом пространстве называется *замкнутым,* если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 7. **а)** Докажите, что объединение и пересечение двух замкнутых множеств замкнуто; **б)** Докажите, что произвольное пересечение замкнутых также замкнуто; **в)** Покажите, что произвольное объединение замкнутых подмножеств не обязано быть замкнутым. **г)** Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

Задача 8. Докажите, что шар $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in M \mid d(x, x_0) \leqslant \varepsilon\}$ в метрическом пространстве M является замкнутым.

Задача 9. (*принцип вложенных шаров*) Докажите, что метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку.

Задача 10*. Докажите, что стремление радиусов к нулю существенно, то есть существует полное пространство и последовательность вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.
(Подсказка: Можно построить метрику на $\mathbb{N}$ так, чтобы $d(x, y) > 1$ при $x \neq y$)

Определение 5. Топологическое пространство называется *компактным,* если из любого покрытия его открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Задача 11. **а)** Докажите, что любое конечное топологическое пространство компактно.
б) Приведите пример некомпактного топологического пространства.
в) Докажите, что отрезок компактен.

Задача 12*. Докажите, что подмножество в $(\mathbb{R}^n, d_2)$ является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Задача 13. Докажите, что подмножество компактного топологического пространство компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

Задача 14. **а)** Дайте определение *непрерывной* функции $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ так, чтобы оно совпадало с определением непрерывности в случае метрических пространств.
б) Дайте определение непрерывности функции в точке. **в)*** Сформулируйте следующие утверждения как утверждения о непрерывности отображений топологических пространств (в некоторой точке): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Задача 15. Докажите, что непрерывная функция $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to \mathbb{R}$ на компактном X достигает своего наименьшего и наибольшего значения.

Задача 16. Докажите, что непрерывный образ компакта — компакт.