Листок №41АлГ — Плоские алгебраические кривые — 01.2009

Часть 3. Приложения к геометрии

Задача 1. (*Замена координат*) На плоскости Oxy рассмотрим две непараллельные прямые, задающиеся уравнениями $l_1(x, y) = 0$, $l_2(x, y) = 0$, где l_1 и l_2 — многочлены первой степени. Примем их точку пересечения за новое начало координат O_1, а сами прямые за новые оси координат: l_1 за ось z, а l_2 за ось t. Тогда прямые l_1 и l_2 будут иметь в новых координатах простые уравнения $t = 0$, $z = 0$ соответственно.

а) Докажите, что можно так выбрать базисные вектора на осях O_1z, O_1t, что новые координаты (z, t) точки будут вычисляться через ее старые координаты (x, y) по формулам $z = l_2(x, y)$, $t = l_1(x, y)$.

б) Докажите, что из уравнений $z = l_2(x, y)$, $t = l_1(x, y)$ можно выразить старые координаты x и y через новые z и t.

в) Пусть $A(x, y)$ — многочлен. Подставив в него вместо x и y их выражения через z и t, получим запись многочлена A в новых координатах z, t. Докажите, что при этом степень многочлена не изменится: $\deg A(x, y) = \deg A(z, t)$.

Задача 2. Докажите, что задаваемая уравнением $z^2 + 2zt + t^2 + \sqrt{2}z - \sqrt{2}t + 1 = 0$ кривая имеет ось симметрии.

Определение 1. Кривую, задающуюся многочленом второй степени, будем называть *коникой.*

Задача 3. Пусть никакие три из точек A, B, C, D плоскости Oxy не лежат на одной прямой. Пусть прямые AB, BC, CD, DA задаются многочленами первой степени $l_1(x, y)$, $m_1(x, y)$, $l_2(x, y)$, $m_2(x, y)$ соответственно. Докажите, что любую конику, проходящую через точки A, B, C, D, можно задать уравнением вида $\lambda l_1 l_2 + \mu m_1 m_2 = 0$, где λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

Задача 4. **а)** Пусть никакие три из точек A, B, C, D, E на плоскости не лежат на одной прямой. Докажите, что через эти точки проходит ровно одна коника.

б) Докажите, что в пункте а) достаточно потребовать, чтобы никакие четыре из точек A, B, C, D, E не лежали на одной прямой.

Задача 5. В обозначениях задачи 3 выясните, является ли четырехугольник $ABCD$ вписанным в окружность, если **а)** $l_1 = 6x - y + 1$, $m_1 = 3x + 55y - 388$, $l_2 = x - 9$, $m_2 = x + 9y - 9$; **б)** $l_1 = 4x - 5y - 35$, $m_1 = 7x + 5y + 35$, $l_2 = 83x - 93y + 415$, $m_2 = x + y - 11$.

Задача 6. Пусть три красные прямые пересекают три синие прямые в девяти черных точках (на рисунке слева красные прямые изображены сплошными линиями, а синие — пунктирными). Докажите, что если восемь из этих черных точек лежат на некоторой *кубической* кривой (то есть на кривой, задающейся многочленом третьей степени), то и оставшаяся девятая черная точка лежит на той же кубической кривой.

Определение 2. *Шестиугольником* будем называть всякую замкнутую шестизвенную ломаную, никакие три из шести вершин которой не лежат на одной прямой.

Задача 7. (*Теорема Паскаля*) Пусть вершины шестиугольника $ABCDEF$ лежат на кривой, задающейся неприводимым многочленом второй степени. Докажите, что тогда точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой (смотрите рисунок справа).

Задача 8. Сформулируйте и докажите теорему, обратную к теореме Паскаля.

Задача 9. (*Теорема Паппа*) Пусть точки A, B, C и A', B', C' лежат на прямых l и l' соответственно. Докажите, что тогда точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ лежат на одной прямой (см. рис. слева).

Задача 10. (*Теорема Дезарга*) Пусть никакие три из точек A, B, C, A', B', C' не лежат на одной прямой. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке, тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ лежат на одной прямой (см. рис. справа).

Определение 3. Назовем два шестиугольника *сопряженными,* если один из них образован точками пересечения неглавных диагоналей другого. (Например, изображенные на рисунке слева черные шестиугольники сопряжены.) Из определения следует, что для каждого шестиугольника имеется ровно два с ним сопряженных.

Задача 11. (*С.А.Дориченко*) Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения противоположных сторон сопряженного с ним шестиугольника лежат на одной прямой.