Определение 1. *Полем* называется любое множество $\Bbbk$, на котором заданы операции *сложения* $(+)$ и *умножения* $(\cdot)$, удовлетворяющие следующим условиям (аксиомам поля):

(A1) Для любых $a, b \in \Bbbk$ выполнено равенство $a + b = b + a$ (*коммутативность сложения*).

(A2) Для любых $a, b, c \in \Bbbk$ выполнено равенство $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*ассоциативность сложения*).

(A3) В $\Bbbk$ существует такой элемент 0, что для любого $a \in \Bbbk$ выполнено равенство $a + 0 = a$ (*существование нуля*).

(A4) Для любого $a \in \Bbbk$ существует такой $b \in \Bbbk$, что $a + b = 0$ (*существование противоположного элемента*: такой элемент b называется *противоположным* к a и обозначается $-a$).

(M1) Для любых $a, b \in \Bbbk$ выполнено равенство $a \cdot b = b \cdot a$ (*коммутативность умножения*).

(M2) Для любых $a, b, c \in \Bbbk$ выполнено равенство $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*ассоциативность умножения*).

(M3) В $\Bbbk$ существует такой элемент 1, не равный нулю, что для любого $a \in \Bbbk$ выполнено равенство $a \cdot 1 = a$ (*существование единицы*).

(M4) Для любого $a \in \Bbbk$, не равного нулю, существует такой $b \in \Bbbk$, что $a \cdot b = 1$ (*существование обратного элемента*: такой элемент b называется *обратным* к a и обозначается $\dfrac{1}{a}$ или a^{-1}).

(AM) Для любых $a, b, c \in \Bbbk$ выполнено равенство $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

Задача 1. Пусть $\Bbbk$ — поле. Докажите, что
а) в $\Bbbk$ есть только один ноль;
б) у каждого элемента только один противоположный;
в) для любого $a \in \Bbbk$ выполнено равенство $-(-a) = a$;
г) для любых $a, b \in \Bbbk$ уравнение $a + x = b$ имеет ровно одно решение в $\Bbbk$ (оно обозначается $b - a$; таким образом, в поле определена операция *вычитания*).

Задача 2. Пусть $\Bbbk$ — поле. Докажите, что
а) в $\Bbbk$ есть только одна единица;
б) у каждого ненулевого элемента только один обратный;
в) для любого ненулевого $a \in \Bbbk$ выполнено равенство $(a^{-1})^{-1} = a$;
г) для любого $b \in \Bbbk$ и любого ненулевого $a \in \Bbbk$ уравнение $a \cdot x = b$ имеет ровно одно решение в $\Bbbk$ (оно обозначается $\dfrac{b}{a}$; таким образом, в поле определена операция *деления* на ненулевые элементы).

Задача 3. Пусть $\Bbbk$ — поле. Докажите, что
а) для любого $a \in \Bbbk$ выполнено равенство $a \cdot 0 = 0$;
б) если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.
в)* Останется ли верным утверждение пункта б), если исключить из аксиом поля аксиому M4?

Задача 4. Пусть $\Bbbk$ — поле. Докажите, что для любого $a \in \Bbbk$ выполнены равенства
а) $a \cdot (-1) = -a$;
б) $(-a) \cdot (-a) = a \cdot a$;
в) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$, если $a \neq 0$.

Задача 5. Пусть $\Bbbk$ — поле. Докажите, что для любых $a, c \in \Bbbk$ и любых ненулевых $b, d \in \Bbbk$ выполнено равенство
а) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$; **б)** $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

Задача 6. Какие из следующих числовых множеств являются полями: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$?

Задача 7. Является ли полем множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$ (сложение и умножение обычные)?

Задача 8. Пусть $\mathbb{R}(x)$ — множество $\left\{ \dfrac{P(x)}{Q(x)} \;\middle|\; P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x],\ Q(x) \text{ не равен нулевому многочлену} \right\}$. Является ли $\mathbb{R}(x)$ полем (с обычным сложением и умножением)?

Задача 9. Существует ли поле из **а)** одного элемента; **б)** двух элементов; **в)** трёх элементов?

Задача 10*. Постройте поле из p элементов, где p — произвольное простое число.

Задача 11*. Постройте поле из четырёх элементов.