Определение 1. Пусть (a_n) — числовая последовательность. Формальное выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *рядом.* Число $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ называется *n-ой частичной суммой* ряда.
Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и имеет сумму A*, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$. Тогда пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Задача 1. Пусть $a_n \geqslant 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда ограничено множество его частичных сумм $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, причём в этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Задача 2. Какие из следующих рядов сходятся? Найдите их суммы.
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; **в)** (*геометрическая прогрессия*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$;
г) (*гармонический ряд*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; **е)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; **ж)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Задача 3. **а)** Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Верно ли обратное?
б) (*Критерий Коши сходимости ряда.*) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что из $n \geqslant m > N$ (где $n, m \in \mathbb{N}$) следует $|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$.

Задача 4. Верно ли, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

Задача 5. Сходятся ли следующие ряды: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;

Задача 6. Докажите: **а)** ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$; **в)** $e - \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n!} < \frac{1}{m!\,m}$; **г)** число e иррационально.

Задача 7. Пусть $a_n \geqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение (перестановка натурального ряда). Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ (то есть если сходится ряд в левой части равенства, то сходится и ряд в правой части, причём их суммы равны; если ряд в левой части расходится, то и ряд в правой части расходится).

Задача 8*. Пусть p_n — n-е простое число, $n \in \mathbb{N}$.
а) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-1/p_1^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-1/p_n^2} \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
б) Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-1/p_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-1/p_n} \right)$? **в)** Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$?

Задача 9*. **а)** Пусть γ_k — сумма ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. Найдите сумму $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \gamma_k$.
б) (*Эйлер.*) Пусть A — множество всех целых чисел, представимых в виде n^k, где n, k — целые числа, большие 1. Найдите сумму $\sum\limits_{a\in A} \frac{1}{a-1}$.