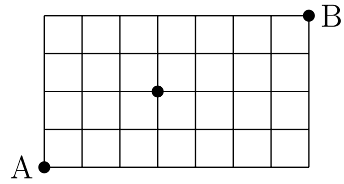
Определение 1. Обозначим через C_n^k количество k-элементных подмножеств множества из n элементов. Например, $C_4^2 = 6$, так как у множества $\{1, 2, 3, 4\}$ есть ровно 6 двухэлементных подмножеств:

$$\{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{1, 4\},\ \{2, 3\},\ \{2, 4\},\ \{3, 4\}.$$

Иначе говоря, величина C_n^k равна числу способов выбрать k предметов из n.

Задача 1. Комбинаторными методами (не используя явную формулу) докажите, что
а) $C_n^k = C_n^{n-k}$; **б)** $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$; **в)** $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$.

Задача 2. Найдите явную формулу для C_n^k.



Задача 3. **а)** На рисунке изображен план города (линии — это улицы, пересечения линий — перекрестки). На улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вверх» или «вправо». Сколько разных маршрутов ведёт из точки A в точку B?
б) Сколько из этих маршрутов не проходят через отмеченную на плане точку внутри города?

Задача 4. Сколькими способами можно высадить в ряд 3 груши и 4 яблони?

Определение 2. *Треугольником Паскаля* называется треугольная таблица (см. рисунок справа), составленная из чисел согласно следующему правилу. По краям треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух, стоящих справа и слева над ним.

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
. . . . . . . . . . .
```

Задача 5. На рисунке выписаны первые 5 строк треугольника Паскаля. Напишите следующие 5 строк.

Задача 6. Докажите, что k-ое число n-ой строки равно C_n^k (строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нуля).

Задача 7. Возьмём любое число C в треугольнике Паскаля и сложим все числа, начиная с него и идя по прямой направо-вверх. Докажите, что полученная сумма равна числу, стоящему под C справа.

Задача 8. Выведите из задачи 7 формулы для сумм $1 + \ldots + n$, $T_1 + \ldots + T_n$, $\Pi_1 + \ldots + \Pi_n$.

Задача 9*. Как из предыдущей задачи вывести формулы для $1^2 + \ldots + k^2$, $1^3 + \ldots + k^3$, $\ldots$?

Задача 10*. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечётные?

Задача 11*. Найдите сумму $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots$

Задача 12. Докажите, что при всех $n > 0$ выполнены неравенства $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant C_{2n}^n \leqslant 2^{2n-1}$.

Задача 13. (*Бином Ньютона*) Раскроем скобки и приведём подобные в выражении $(a + b)^n$. Возьмём любое слагаемое. Оно имеет вид $C \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ (почему?). Докажите, что $C = C_n^k$.

Задача 14. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$; **б)** $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$;
в) (*свёртка Вандермонда*) $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \ldots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0$; **г)*** $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$.

Задача 15. Сколько существует разбиений множества A, состоящего из n элементов,
а) на три непересекающихся подмножества A_1, A_2, A_3, состоящих из k_1, k_2 и k_3 элементов соответственно, где k_1, k_2, k_3 — такие заданные числа, что $k_1 + k_2 + k_3 = n$;
б) на m непересекающихся подмножеств $A_1, \ldots, A_m$, состоящих из $k_1, \ldots, k_m$ элементов соответственно, где $k_1, \ldots, k_m$ — такие заданные числа, что $k_1 + \ldots + k_m = n$;
в) на m непересекающихся подмножеств $A_1, \ldots, A_m$ с произвольным количеством элементов?

1 а	1 б	1 в	2	3 а	3 б	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 а	14 б	14 в	14 г	15 а	15 б	15 в