Ряд обратных квадратов

Поршнев Е.

В этой лекции мы докажем следующую теорему:

Теорема 1. (Сумма обратных квадратов)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Но вначале обсудим несколько вспомогательных фактов.

Рассмотрим многочлен $P(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i$. Предположим, что мы знаем все его корни: $z_1, \ldots, z_n$. Тогда $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$. Если раскрыть в этом произведении скобки, получится выражение вида

$$P(z) = a_n(z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} - \ldots).$$

Чему равны величины σ_i? Чтобы получился моном z^{n-k} необходимо, чтобы при раскрытии скобок мы выбрали z в точности из $n-k$ сомножителей, а из остальных k — какие-то корни z_s. Это можно сделать C_n^k способами, и коэффициент при z^{n-k} будет равен сумме всевозможных произведений k различных корней:

$$\sigma_k(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{1 \leqslant s_1 < \ldots < s_k \leqslant n} \left(\prod_{i=1}^{k} z_{s_i} \right).$$

В частности, $\sigma_1 = \sum\limits_{s=1}^{n} z_s$; $\sigma_2 = \sum\limits_{1 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant n} z_{s_1} z_{s_2}$; $\sigma_n = \prod\limits_{i=1}^{n} z_i$.

Определение 1. Многочлены σ_k называются *элементарными симметрическими многочленами.*

Но вернёмся к $P(z)$. Из наших выкладок следует, что верна

Теорема 2. (Виета)

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Отлично! Запомним её на будущее, и докажем ещё пару лемм.

Лемма 1. *При* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *выполнено неравенство*

$$0 < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1.$$

□ Мы знаем, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Отсюда

$$\frac{1}{\sin^2 x} > \frac{1}{x^2} > \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$0 < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 1.$$

■

Лемма 2. *При* $n > 1$ *выполнено равенство*

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left(-i \operatorname{ctg} \frac{\pi m}{n} \right)^2 = -\frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

$\square$ Оказывается, в левой части равенства написана сумма квадратов корней уравнения

$$(z+1)^n = (z-1)^n. \tag{1}$$

Проверим это. Уравнение 1 можно переписать в виде $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$. Значит, $\frac{z+1}{z-1} = \sqrt[n]{1}$. Решая это уравнение, получаем $z = \frac{\sqrt[n]{1}+1}{\sqrt[n]{1}-1}$.
Запишем число $\sqrt[n]{1}$ в тригонометрической форме: $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогда

$$z = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi + 1}{\cos\varphi + i\sin\varphi - 1} = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi + 1)(\cos\varphi - i\sin\varphi - 1)}{(\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi - (i\sin\varphi + 1)^2}{\cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 1 + \sin^2\varphi}$$
$$= \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 2i\sin\varphi - 1}{2 - 2\cos\varphi} = \frac{-i\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = -i\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = -i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Корнями n-ой степени из единицы являются числа $\cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n}, \quad 0 \leqslant m < n$, поэтому корнями уравнения 1 будут числа $z = -i\operatorname{ctg}\frac{\pi m}{n}, \quad 0 < m < n$.
Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы посчитать сумму квадратов корней уравнения 1. Для этого раскроем в нём скобки по биному Ньютона:

$$z^n + C_n^1 z^{n-1} + C_n^2 z^{n-2} + C_n^3 z^{n-3} + \ldots = z^n - C_n^1 z^{n-1} + C_n^2 z^{n-2} - C_n^3 z^{n-3} + \ldots$$
$$\Updownarrow$$
$$2C_n^1 z^{n-1} + 2C_n^3 z^{n-3} + \ldots = 0$$

Значит, по теореме Виета $\sigma_1(z_1, \ldots, z_{n-1}) = 0$, $\sigma_2(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \frac{2C_n^3}{2C_n^1} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6n} = \frac{(n-1)(n-2)}{6}$.
Выразим сумму квадратов через σ_1 и σ_2:

$$\sum_{s=1}^{n-1} z_s^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = -\frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

Это равенство завершает доказательство леммы. $\blacksquare$

Следствие 1. При $n > 1$ выполнено равенство

$$\sum_{m=1}^{n-1} \operatorname{ctg}^2\frac{\pi m}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

Следствие 2. При $n > 1$ выполнено равенство

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\frac{\pi m}{n}} = \frac{n^2-1}{3}.$$

$\square$

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\frac{\pi m}{n}} = \sum_{m=1}^{n-1}\left(1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi m}{n}\right) = n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{3} = \frac{(3n-3) + (n^2-3n+2)}{3} = \frac{n^2-1}{3}.$$

$\blacksquare$

Теперь можно перейти непосредственно к доказательству теоремы 1.

$\square$ Рассмотрим частичную сумму ряда $S_k = \sum\limits_{m=1}^{k} \dfrac{1}{m^2}$ и покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \dfrac{\pi^2}{6}$.
Обозначим $n = 2k+1$, тогда $k = \frac{n-1}{2}$. По лемме 1 при $1 \leqslant m \leqslant k$ выполнено неравенство

$$0 < \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi m}{n}} - \frac{1}{\left(\frac{\pi m}{n}\right)^2} < 1.$$

Просуммируем эти неравенства по всем m от 1 до k:

$$0 < \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi m}{n}} - \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\pi m}{n}\right)^2} < \frac{n-1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi m}{n}} - \frac{n^2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{m^2} < \frac{n-1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \frac{n^2+1}{6} - \frac{n^2}{\pi^2} S_k < \frac{n-1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \frac{\pi^2(n^2+1)}{6n^2} - S_k < \frac{\pi^2(n-1)}{2n^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\pi^2(n^2+1)}{6n^2} - \frac{\pi^2(n-1)}{2n^2} < S_k < \frac{\pi^2(n^2+1)}{6n^2}$$

Применяя теорему о двух милиционерах, получаем искомое утверждение. Теорема доказана. $\blacksquare$