Мы будем обозначать расстояние между точками A и B плоскости через $d(A, B)$. Напомним основные свойства расстояния:

- $d(A, B) \geqslant 0$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $A = B$;
- $d(A, B) = d(B, A)$;
- $d(A, B) + d(B, C) \geqslant d(A, C)$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC («неравенство треугольника»).

Определение 1. *Движением плоскости* называется взаимно однозначное отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ плоскости на себя, которое сохраняет расстояния, т. е.

$$\forall\, A, B \in \mathbb{R}^2 \quad d(A, B) = d(f(A), f(B)).$$

Задача 1. **а)** Покажите, что если f — движение, то обратное отображение f^{-1} — тоже движение. **б)** Если g — ещё одно движение, то композиция $f \circ g$ — снова движение. **в)** Выведите основные свойства движений: движения переводят прямые в прямые, окружности — в окружности; движения сохраняют параллельность и углы между прямыми и окружностями. **г)*** Докажите, что условие взаимной однозначности в определении 1 является излишним.

Определение 2. *Центральная симметрия с центром в точке O* — это такое отображение плоскости на себя, при котором точка O переходит в себя, а всякая другая точка X переходит в такую точку X', что O есть середина отрезка XX'.

Задача 2. Двое игроков выкладывают по очереди на прямоугольный стол пятаки. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 3. Докажите, что
а) центральная симметрия — движение;
б) если некоторая фигура[1] имеет два центра симметрии, то их у неё бесконечно много.

Задача 4. **а)** Дан вписанный четырёхугольник. Через середину каждой его стороны провели прямую, перпендикулярную противоположной стороне. Докажите, что проведённые прямые пересекаются в одной точке. **б)** Пусть у выпуклого n-угольника нет параллельных сторон, A — некоторая точка, не лежащая на сторонах многоугольника. Докажите, что тогда существует не более n отрезков с концами на сторонах многоугольника и с серединой в A.

Определение 3. *Осевая* (или *зеркальная*) *симметрия относительно прямой l* — это такое отображение плоскости на себя, при котором точки прямой l остаются на месте, а всякая точка X, не лежащая на этой прямой, переходит в такую точку X', что l — серединный перпендикуляр к отрезку XX'.

Задача 5. Стёпа хочет половить навагу в Баренцевом море, а селёдку — в Белом. Как следует ему выбрать кратчайший путь с началом и концом на станции Хибины, если Кольский полуостров имеет форму **а)** острого угла; **б)*** тупого угла?

1 а	1 б	1 в	1 г	2	3 а	3 б	4 а	4 б	5 а	5 б

[1] Фигурой в геометрии принято называть произвольное множество точек на плоскости.

Задача 6. Докажите, что

а) осевая симметрия — движение;

б) если некоторое движение оставляет все точки прямой неподвижными, то это либо тождественное отображение, либо симметрия относительно этой прямой;

в)* угол между двумя осями симметрии многоугольника имеет рациональную градусную меру.

Задача 7. По одну сторону от прямой l расположены точки A и B. Постройте такую точку X на прямой l, что углы между AX и BX и прямой l **а)** равны; **б)*** отличаются в два раза.

Задача 8. **а)** Докажите, что площадь любого выпуклого четырёхугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон. **б)** Когда достигается равенство?

Задача 9. Может ли луч света «застрять» в угле, образованном двумя зеркалами?

Задача 10*. Две прямые пересекаются под углом $\gamma°$. Кузнечик прыгает с одной прямой на другую; длина каждого прыжка равна 1, и кузнечик не прыгает обратно, если только это возможно. Докажите, что последовательность его прыжков периодична тогда и только тогда, когда γ рационально.

Определение 4. *Параллельный перенос* T_{AB} *на вектор* AB — это такое отображение плоскости на себя, при котором всякая точка X переходит в такую точку X', что середины отрезков AX' и BX совпадают. (Уточните это определение для случаев, когда точки B и X совпадают или точка A является серединой BX.)

Задача 11. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из A в B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми; мост перпендикулярен берегам.)

Задача 12. Докажите, что

а) параллельный перенос — движение;

б) композиция параллельных переносов на векторы AB и BC есть параллельный перенос на вектор AC.

Задача 13. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0.001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит **а)** 0.34; **б)*** 0.287.

в)* Приведите пример такой фигуры площадью не менее 0.22.

6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	8 а	8 б	9	10	11	12 а	12 б	13 а	13 б	13 в