Листок №5 | **Отображения** | 10.2012

Определение 1. Правило f, сопоставляющее каждому элементу x множества X некоторый элемент y множества Y, называется *отображением* из множества X в множество Y.

Обозначения: $f\colon X \to Y$; $f(x) = y$; $x \overset{f}{\mapsto} y$.

Задача 1. Какие из следующих соответствий задают отображения между множествами X и Y?

а) X — множество точек декартовой плоскости, Y — множество точек оси абцисс, точке плоскости ставится в соответствие абцисса этой точки.

б) $X = Y = \mathbb{N}$, числу $x \in X$ ставится в соответствие число x^2.

в) $X = Y = \mathbb{Z}$, число $y \in Y$ ставится в соответствие тем числам $x \in X$, для которых $|x| = |y|$.

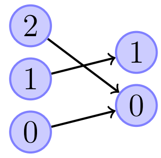
г) $X = Y = \mathbb{R}$, число $y \in Y$ ставится в соответствие тем числам $x \in X$, для которых $x^3 = y$.

д) $X = Y = \mathbb{R}$, числу $x \in X$ ставится в соответствие одно такое число $y \in Y$, что $x = y^2$.

Определение 2. Пусть $f\colon X \to Y$, $y \in Y$, $A \subset X$ и $B \subset Y$. Всякий элемент $x \in X$, такой что $f(x) = y$, называется *прообразом* элемента y при отображении f. *Полным прообразом* элемента y при отображении f называется множество $f^{-1}(y) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) = y\}$. *Образом* множества $A \subset X$ при отображении f называется множество $f(A) \overset{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in A\}$. *Прообразом множества* $B \subset Y$ называется множество $f^{-1}(B) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Задача 2. Для каждого отображения из задачи 1 найдите полный прообраз каждого элемента $y \in Y$.

Задача 3. Найдите все отображения из множества $\{0, 1, 2\}$ в множество $\{0, 1\}$ (их удобно рисовать, стрелочками обозначая, какой элемент в какой переходит, смотрите пример на рисунке справа).



Определение 3. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *взаимно однозначным* или *биекцией,* если для каждого $y \in Y$ найдётся ровно один $x \in X$, такой что $f(x) = y$.

Задача 4. Какие из отображений задачи 1 взаимно однозначны?

Определение 4. Отображение f, не «склеивающее» элементы (то есть $f(x) = f(y)$ только если $x = y$) называется *вложением* или *инъекцией* ($A \overset{f}{\hookrightarrow} B$). Отображение $f\colon A \to B$, «покрывающее» все элементы B (то есть $f(A) = B$) называется *наложением* или *сюръекцией* ($A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$).

Задача 5. Пусть A и B — конечные множества. Определите в терминах отображений: в множестве A **а)** меньше; **б)** больше элементов, чем в множестве B; **в)** столько же элементов, что и в B.

Задача 6. Каких треугольников с целыми сторонами больше:

а) тех, периметр которых равен 2002, или тех, периметр которых равен 2005?

б) тех, периметр которых равен 2003, или тех, периметр которых равен 2006?

Определение 5. *Композицией отображений* $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ называется отображение, сопоставляющее элементу x множества X элемент $g(f(x))$ множества Z. Обозначение: $g \circ f$.

Задача 7. Докажите, что для произвольных отображений $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ и $h\colon Z \to W$ выполняется равенство $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Задача 8. Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Верно ли, что если f и g взаимно однозначны, то и $g \circ f$ взаимно однозначно?

Задача 9. Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно однозначное отображение. Докажите, что существует и единственно такое отображение $g\colon Y \to X$, что $g(f(x)) = x$ при любом $x \in X$ и $f(g(y)) = y$ при любом $y \in Y$. Его называют *обратным к* f. Обозначение: f^{-1}.

Задача 10. Найдите обратные к тем отображениям задачи 1, которые взаимно однозначны.

Задача 11. Докажите, что отображение, обратное к биекции, само есть биекция.

Задача 12. Докажите, что между следующими множествами точек на прямой есть взаимно однозначное отображение: **а)** любые два отрезка; **б)** любые два интервала.

Задача 13. Найдите $g \circ f$, если

а) f и g — повороты плоскости относительно одной и той же точки O на углы α и β соответственно.

б) f и g — симметрии плоскости относительно двух параллельных прямых l_1 и l_2 соответственно.

в) f и g — симметрии плоскости относительно двух непараллельных прямых l_1 и l_2 соответственно.

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	2	3	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	7	8	9	10	11	12 а	12 б	13 а	13 б	13 в