Напоминание

Определение 1. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если (x_n) можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где последовательность (α_n) бесконечно малая. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Говорят также, что (x_n) *стремится к a при n, стремящемся к бесконечности* (и пишут $x_n \to a$ при $n \to \infty$).

Определение 2. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при любом натуральном $k > N$ будет выполнено неравенство $|x_k - a| < \varepsilon$. Формально: $\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, k \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n > k \;\; |x_n - a| < \varepsilon$.

Определение 3. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если в любом интервале, содержащем a, содержатся *почти все* члены (x_n) (то есть все, кроме конечного числа).

Утверждение 1. Определения 1, 2 и 3 эквивалентны.

Утверждение 2. (*Теорема Вейерштрасса*) Любая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Утверждение 3. (*Теорема Больцано-Вейерштрасса*) Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Определение 4. Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых натуральных m и n, больших k, выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.
Формально: $\forall\,\varepsilon > 0\; \exists\, k \in \mathbb{N}\; \forall\, m, n > k\colon |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Утверждение 4. (*Критерий Коши*) Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Определение 5. Пусть $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Множество $\dot{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ называется *проколотой ε-окрестностью точки a*. Множества $\dot{U}^+_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < a + \varepsilon\}$ и $\dot{U}^-_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \varepsilon < x < a\}$ называются *правой* и *левой проколотыми полуокрестностями точки a* соответственно.

Определение 6. (*Предел функции в смысле Гейне*) Пусть функция f определена на множестве M и некоторая проколотая окрестность точки a вложена в M. Число b называется *пределом функции f в точке a*, если для любой последовательности (x_n) элементов множества $M \setminus \{a\}$, сходящейся к a, последовательность $(f(x_n))$ сходится к b.
Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Определение 7. (*Предел функции в смысле Коши*) Пусть функция f определена на множестве M и некоторая проколотая окрестность точки a вложена в M. Число b называется *пределом функции f в точке a*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x из множества $\dot{U}_\delta(a) \cap M$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(b)$.
Формально: $\forall\,\varepsilon > 0\; \exists\,\delta > 0\; \forall\, x \in \dot{U}_\delta(a) \cap M :\; f(x) \in U_\varepsilon(b)$.

Утверждение 5. Определения 6 и 7 эквиваленты.

Непрерывность

Определение 8. (*непрерывность в смысле Коши*) Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Функция $f : M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке $a \in M$*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in M \cap (a - \delta, a + \delta)$ выполнено неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Задача 1. Укажите множество точек непрерывности функций: **а)** x; **б)** $\operatorname{sgn} x$; **в)** x^2; **г)** $\{x\}$; **д)** $\dfrac{1}{x}$.

Задача 2. Сформулируйте определение непрерывности, аналогичное определению предела по Гейне.

Задача 3. Запишите без отрицаний: «$f : M \to \mathbb{R}$ *разрывна* в точке $a \in M$» (для определения по Коши).

Задача 4. Будет ли функция, непрерывная и положительная в точке a
а) ограниченной; **б)** положительной в некоторой окрестности точки a?

Задача 5. Функции f, g непрерывны в точке $a \in \mathbb{R}$. Докажите:
а) $|f| \in C(a)$; **б)** $f \pm g \in C(a)$; **в)** $f \cdot g \in C(a)$; **г)** если $g(a) \neq 0$, то $f/g \in C(a)$.

Задача 6. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности композиции двух непрерывных функций.

Задача 7. Докажите непрерывность функции (во всех точках её области определения): **а)** x^n, где $n \in \mathbb{N}$; **б)** многочлен из $\mathbb{R}[x]$; **в)** $P(x)/Q(x)$, где $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \neq 0$; **г)** $\sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}$; **д)** x^α, где $\alpha \in \mathbb{R}$; **е)** $\sin x$; **ж)** e^x; **з)** a^x, где $a > 0$; **и)** $\ln x$; **к)** $\operatorname{arctg} x$.

Задача 8. Придумайте функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **а)** всюду разрывную; **б)** непрерывную лишь в одной точке; **в)** разрывную в точках вида $1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, и только в них; **г)*** разрывную в точках из $\mathbb{Q}$ и только в них; **д)**** на каждом отрезке принимающую все действительные значения.

Задача 9. Пусть функция f определена и непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$ ($f \in C([a, b])$), причём $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Всегда ли найдётся такое $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$?

Задача 10. Докажите, что любой многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Задача 11°. (*Теорема Коши о промежуточном значении*) Пусть $f \in C([a; b])$, $f(a) < f(b)$. Верно ли, что для любого числа $c \in [f(a), f(b)]$ существует такая точка $x \in [a, b]$, что $f(x) = c$?

Задача 12. (*Теорема Л. Бра́уэра о неподвижной точке для отрезка*) Пусть $f \in C([0; 1])$ и все значения функции f содержатся в отрезке $[0; 1]$. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет корень.

Задача 13°. Пусть функция непрерывна на отрезке. Докажите, что она на этом отрезке
а) (*1-я теорема Вейерштрасса*) ограничена;
б) (*2-я теорема Вейерштрасса*) достигает своего наибольшего и наименьшего значения;
в) Верны ли утверждения пунктов а), б) для функции, непрерывной на интервале или на прямой?

Задача 14. Функции f и g непрерывны на $\mathbb{R}$, причём $f(x) = g(x)$ при $x \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $f = g$.

Определение 9. *Промежутком* называют любой отрезок, полуинтервал, интервал, открытый или замкнутый луч на прямой, а также всю прямую.

Задача 15°. (*Теорема о монотонной функции*) Пусть функция непрерывна на некотором промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$. Докажите, что f обратима на этом промежутке тогда и только тогда, когда f строго монотонна на нём, причём обратная функция также будет строго монотонной и непрерывной.

Задача 16. Непостоянная функция f определена и непрерывна на множестве $I \subseteq \mathbb{R}$. Каким может быть множество значений этой функции на I, если I — это **а)** отрезок; **б)** интервал; **в)** прямая?

Задача 17. Выпуклый многоугольник M, прямая l и точка A лежат в одной плоскости. Докажите, что найдётся прямая l', которая делит M на две равновеликие части и **а)** параллельна l; **б)** проходит через A.

Задача 18. Докажите, что функция, **а)** непрерывная на некотором интервале; **б)** монотонная на некотором интервале, имеет предел как слева, так и справа в каждой точке этого интервала.

Задача 19. Докажите, что монотонная функция, определённая на промежутке, непрерывна во всех точках этого промежутка, за исключением не более чем счётного числа точек.

Задача 20*. Пусть функция f определена на промежутке и в каждой точке этого промежутка имеет конечный предел, не обязательно совпадающий со значением в точке. Насколько f может отличаться от непрерывной? Более точно, каким может быть у f множество точек разрыва?

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	2	3	4 а	4 б	5 а	5 б	5 в	5 г	6	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	7 е	7 ж	7 з	7 и	7 к	8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	9	10	11	12	13 а	13 б	13 в	14	15	16 а	16 б	16 в	17 а	17 б	18 а	18 б	19	20