

Всюду в этом листке, где упоминается пространство  $\mathbb{R}^n$ , имеется в виду, что оно снабжено евклидовой метрикой  $d_2$ .

Под словом «функция» подразумевается отображение в  $\mathbb{R}$ .

**Определение 1.** Подмножество  $U$  метрического пространства  $M$  называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит какую-нибудь её  $\varepsilon$ -окрестность.

**Определение 2.** Подмножество  $B$  метрического пространства  $M$  называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

**Задача 1.** Докажите, что  $U \subset M$  открыто тогда и только тогда, когда  $M \setminus U$  замкнуто.

**Задача 2.** Пусть  $M$  снабжено дискретной метрикой. Опишите все его открытые подмножества.

**Задача 3.** Множество  $X$  на плоскости обладает таким свойством, что его пересечение с любой прямой есть открытое подмножество этой прямой. Обязательно ли  $X$  открытое? Тот же вопрос, если все слова «открытое» заменить на «замкнутое».

**Определение 3.** Отображение  $f: M \rightarrow N$  *непрерывно в точке*  $t \in M$ , если для любой последовательности  $(x_i)$ , сходящейся к  $t$ , последовательность  $(f(x_i))$  сходится к  $f(t)$ . Если  $f$  непрерывно во всех точках множества  $M$ , то говорят, что  $f$  *непрерывно на*  $M$ .

**Определение 4.** Отображение  $f: M \rightarrow N$  *непрерывно на*  $M$  (или просто *непрерывно*), если прообраз любого открытого множества открыт.

**Задача 4.** Докажите эквивалентность определений 3 и 4.

**Задача 5.** Рассмотрим на  $\mathbb{R}^2$  функции вычисления суммы, разности, произведения и частного координат. Докажите, что они непрерывны на своей области определения.

**Задача 6.** Докажите, что композиция непрерывных отображений непрерывна.

**Задача 7.** Докажите, что сумма и произведение непрерывных функций непрерывны.

**Задача 8.** Докажите, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

**Задача 9.** Верно ли, что при непрерывном отображении открытые множества переходят в открытые? А замкнутые в замкнутые?

**Задача 10.** Пусть пространство  $M$  таково, что для любого метрического пространства  $N$  любое отображение  $f: M \rightarrow N$  непрерывно. Что можно сказать об  $M$ ?

**Задача 11.** Пусть пространство  $N$  таково, что для любого метрического пространства  $M$  любое отображение  $f: M \rightarrow N$  непрерывно. Что можно сказать об  $N$ ?

**Определение 5.** Множество  $X$  называется *связным*, если из того, что  $X$  принадлежит объединению двух открытых непересекающихся множеств, следует, что оно принадлежит одному из этих множеств.

**Определение 6.** Множество  $X$  называется *линейно-связным*, если для любых двух его точек  $x_0$  и  $x_1$  существует путь из  $x_0$  в  $x_1$  (то есть непрерывное отображение  $f: [0; 1] \rightarrow X$  такое, что  $f(0) = x_0$  и  $f(1) = x_1$ ).

**Задача 12.** Докажите, что образ связного множества при непрерывном отображении связан.

**Задача 13.** Докажите, что образ линейно-связного множества при непрерывном отображении линейно-связен.

**Задача 14.** Верно ли, что прообраз связного множества при непрерывном отображении связан?

**Задача 15.** Докажите, что если множество линейно-связно, то оно связно.

**Задача 16.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  открыто и связно. Докажите, что оно линейно-связно.

**Задача 17. (задача-шутка)** Множество  $X$  делит плоскость на две части (то есть его дополнение является несвязным объединением двух связных множеств). Обязательно ли  $X$  связно?

**Задача 18.** Приведите пример связного, но не линейно-связного подмножества в  $\mathbb{R}^n$  для какого-нибудь  $n$ .

**Задача 19.** Пусть  $f: M \rightarrow N$  непрерывное взаимно-однозначное отображение. Верно ли, что  $f^{-1}$  тоже непрерывно?

**Определение 7.** Непрерывное взаимно-однозначное отображение  $f: M \rightarrow N$  называется *гомеоморфизмом*, если отображение  $f^{-1}$  непрерывно. В этом случае говорят, что  $M$  *гомеоморфно*  $N$  (обозначение:  $M \cong N$ ).

**Задача 20.** Какие из следующих пар множеств гомеоморфны между собой:

**а)** открытый круг и открытый квадрат; **б)** открытый круг и плоскость; **в)** прямая и плоскость; **г)** прямая и окружность; **д)** сфера с выколотой точкой и плоскость; **е)** прямая и гипербола; **ж)** прямая и парабола; **з)** прямая и интервал; **и)** интервал и отрезок?

**Задача 21.** Пусть  $M$  и  $N$  таковы, что существуют непрерывное взаимно-однозначное отображение  $f: M \rightarrow N$  и непрерывное взаимно-однозначное отображение  $g: N \rightarrow M$ . Верно ли, что  $M \cong N$ ?

**Определение 8.** Множество называется *компактным* (или просто *компактом*), если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

**Задача 22.** Докажите, что компактное множество замкнуто и ограничено. Верно ли обратное?

**Задача 23.** Докажите, что образ компакта при непрерывном отображении — компакт.

**Задача 24.** Докажите, что непрерывная функция достигает на компакте своего максимума и минимума.

**Задача 25.** Выполняется ли принцип вложенных компактов для произвольного метрического пространства?

**Задача 26.** Известно, что  $f: [0; 1] \rightarrow M$  непрерывно и взаимно-однозначно. Докажите, что  $f$  — гомеоморфизм.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 а	20 б	20 в	20 г	20 д	20 е	20 ж	20 з	20 и	21	22	23	24	25	26