

Гомотопии

Определение 1. Пусть X, Y — топологические пространства, f, g — два непрерывных отображения X в Y . Отображения f и g называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение $F : [0, 1] \times X \rightarrow Y$, что $F(0, x) = f(x)$, $F(1, x) = g(x)$ для любого $x \in X$. Отображение F называется *гомотопией*, связывающей f с g .

Задача 1. Докажите, что гомотопность отображений — отношение эквивалентности.

Задача 2. Докажите, что любые два непрерывных отображения из X в Y гомотопны, если а) X — любое, $Y = [0, 1]$; б) X — любое, $Y = \mathbb{R}$; в) $X = [0, 1]$, Y — линейно связное.

Определение 2. Пусть X — метрическое пространство, a, b — две его точки, $f(t), g(t)$ — два пути с началом в точке a и концом в точке b . Пути f и g называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$, что $F(0, t) = f(t)$, $F(1, t) = g(t)$, $F(\tau, 0) = a$, $F(\tau, 1) = b$ для любых $t, \tau \in [0, 1]$. Отображение F называется *гомотопией*, связывающей f с g .

Напоминание. Мы обозначаем через S^1 окружность единичного радиуса в плоскости \mathbb{R}^2 с центром в начале координат, причем саму плоскость мы отождествляем со множеством комплексных чисел \mathbb{C} . Таким образом,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi it} \mid t \in [0, 1]\}.$$

Задача 3. Пусть f, g — два пути в X . Определим отображение h окружности S^1 в X , положив

$$h(e^{2\pi it}) = \begin{cases} f(2t), & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2-2t), & \text{при } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Докажите, что пути f и g гомотопны тогда и только тогда, когда отображение h гомотопно постоянному отображению (то есть, переводящему окружность S^1 в одну точку).

Степень отображения

Степенью непрерывного отображения окружности в себя называется, говоря неформально, число раз, которое окружность на себя «наматывается» при этом отображении. Для того, чтобы дать точное определение, нам понадобится некоторая подготовка.

Определение 3. Пусть $f : X \rightarrow S^1$ и $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные отображения метрического пространства X . Отображение g называется *поднятием* отображения f на \mathbb{R} , если $f(x) = e^{2\pi i g(x)}$ для любого $x \in X$.

Задача 4. Пусть $X = [0, 1]$, $f(x) = e^{2\pi i x}$. Опишите все поднятия отображения f на \mathbb{R} .

Задача 5. Пусть $X = S^1$, $f(x) = x$. Существует ли поднятие у этого отображения?

Задача 6. Пусть f — некоторый путь в окружности S^1 , то есть непрерывное отображение $f : [0, 1] \rightarrow S^1$.

а) Докажите, что у пути f существует поднятие на прямую \mathbb{R} .

б) Пусть g_1, g_2 — поднятия f на \mathbb{R} . Докажите, что $g_1(t) - g_2(t) = k$, где k — некоторая целая константа.

Задача 7. (с пунктами) а) (простой) раз б)* два в)** три.

Задача 8*. (с пунктами) а) раз б)* два в)** три.

Задача 9.** (с пунктами) а) раз б)* два в)** три.

Указание. Рассмотрите сначала путь f , лежащий в полуокружности; затем воспользуйтесь равномерной непрерывностью непрерывной функции на отрезке.

доп раздел

Определение 4. Пусть $h : S^1 \rightarrow S^1$ — непрерывное отображение. Рассмотрим путь $f(t) = h(e^{2\pi it})$ и его поднятие $g(t)$. Число $g(1) - g(0)$ называется *степенью отображения* h .

Задача 10. Докажите, что степень отображения $h : S^1 \rightarrow S^1$ определена корректно (то есть не зависит от выбора поднятия).

Задача 11. Чему равна степень отображения $h(z) = z^n$, где n — целое число?

Задача 12. Пусть $h : S^1 \rightarrow S^1$ — непрерывное отображение, $w_0 \in S^1$. Назовем точку $z_0 \in S^1$ *положительным прообразом* точки w_0 , если $h(z_0) = w_0$ и при проходе z через z_0 против часовой стрелки значение $h(z)$ проходит через w_0 в том же направлении. Строго последнее условие записывается так: для всех z из некоторой окрестности точки z_0 комплексное число $h(z)/w_0$ имеет мнимую часть того же знака, что и мнимая часть z/z_0 . Аналогично определяем *отрицательный прообраз* точки w_0 (при проходе через него против часовой стрелки $h(z)$ проходит через w_0 по часовой стрелке).

Предположим, что у точки w_0 конечное число прообразов, причем все они либо положительные, либо отрицательные. Докажите, что степень отображения h равна разности числа положительных прообразов точки w_0 и числа ее отрицательных прообразов.

Задача 13. а) Докажите, что у любого непрерывного отображения квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ в окружность есть поднятие на прямую. б) Пусть f_1 и f_2 — гомотопные пути в окружности. Докажите, что у них существуют гомотопные поднятия на прямую.

Задача 14. Докажите, что степень отображения $f : S^1 \rightarrow S^1$ не меняется при гомотопии.

Задача 15. а) Докажите, что если отображение $f : S^1 \rightarrow S^2$ не является сюръекцией, то оно гомотопно отображению в точку. б) Докажите, что двумерная сфера S^2 не гомеоморфна двумерному тору $T^2 = S^1 \times S^1$.

Задача 16. Отображение окружности в себя называется *нечетным*, если диаметрально противоположные точки переходят в диаметрально противоположные, и *четным*, если диаметрально противоположные точки переходят в одну и ту же точку. Докажите, что степень нечетного отображения — нечетное число, а степень четного отображения — четное число.

Порядок замкнутой кривой относительно точки

Определение 5. *Замкнутой кривой* в пространстве X называется путь, у которого конец совпадает с началом.

Определение 6. Пусть γ — замкнутая кривая на плоскости \mathbb{R}^2 , которую мы отождествляем с \mathbb{C} , а P — точка плоскости, не лежащая на кривой γ . Рассмотрим следующее отображение окружности S^1 в себя:

$$e^{2\pi it} \mapsto \frac{\gamma(t) - P}{|\gamma(t) - P|}.$$

Степень этого отображения называется *порядком кривой γ относительно точки P* и обозначается $\text{ord}_P(\gamma)$.

Задача 17. Нарисуйте кривые γ_1 и γ_2 и найдите их порядки относительно точек $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(-1, 0)$, где

$$\gamma_1(t) = (\cos(2\pi t) - 1/2, \sin(4\pi t)) \quad \text{и} \quad \gamma_2(t) = (\cos(2\pi t)/2 + 3\cos(4\pi t)/4, \sin(4\pi t)).$$

Задача 18. Пусть γ — замкнутая кривая в плоскости \mathbb{R}^2 , а P — точка плоскости, не лежащая на кривой γ . Проведем произвольный луч l из точки P . Определите понятия положительной и отрицательной точки пересечения луча l с кривой γ так, чтобы было верно утверждение: если существует лишь конечное число точек пересечения луча l с кривой γ , причем все они либо положительны, либо отрицательны, то $\text{ord}_P(\gamma)$ равен разности числа положительных и числа отрицательных точек пересечения.

Задача 19. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами. Докажите, что порядок кривой $\gamma_R(t) = f(Re^{2\pi it})$ относительно точки $0 \in \mathbb{C}$ при $R \gg 0$ равен n .

Задача 20. Поставим в соответствие каждой замкнутой кривой γ в \mathbb{R}^2 , не проходящей через точку P , отображение $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$:

$$\tilde{\gamma}(e^{2\pi it}) = \gamma(t).$$

Докажите, что если отображения $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ гомотопны, то $\text{ord}_P(\gamma_1) = \text{ord}_P(\gamma_2)$.

Задача 21. Пусть f — непрерывное отображение единичного круга в плоскость, $\gamma(t) = f(e^{2\pi it})$, P — точка, не лежащая на кривой γ . Докажите, что если $\text{ord}_P(\gamma) \neq 0$, то уравнение $f(x) = P$ имеет решение.

Задача 22. (*Основная теорема алгебры*) Докажите, что любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Задача 23. Пусть γ — замкнутая кривая на плоскости, P — точка, не лежащая на ней. Докажите, что

- а) если точка P соединена с точкой P' путем, не пересекающим кривую γ , то выполнено равенство: $\text{ord}_P(\gamma) = \text{ord}_{P'}(\gamma)$.
- б) найдется такая окрестность точки P , что относительно любой точки из нее порядок γ такой же, как и относительно P .

Задача 24. (*Н.Н.Константинов*) Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A и связанные веревкой длины 2, смогли проехать в B , не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса 1, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Задача 25. На плоскости нарисован граф Γ . Его образ при сдвиге на некоторый вектор длины 1 не пересекается с Γ . По графу ползают два круглых жука диаметром 1 (центр каждого жука все время принадлежит Γ). Могут ли они поменяться местами?