Листок №4д

Комбинаторика 3

4.2013

Задача 1. **а)** На бумажной полоске написано слово «снегопад». Сколькими способами эту полоску можно разрезать на 5 частей? (Резать можно только между буквами).
б) Сколькими способами можно раздать 8 одинаковых конфет 5-ти разным школьникам так, чтобы каждый что-нибудь получил?
в) А если можно давать конфеты не всем?

Задача 2. Сколько букетов из пяти роз можно составить, если имеются розы трёх сортов?

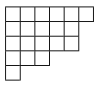
Определение 1. *Числом сочетаний с повторениями из n элементов по k* называется число способов разложить k одинаковых шаров по n различным ящикам. Обозначение: $\overline{C}_n^k$.

Задача 3. Докажите, что $\overline{C}_n^k = \overline{C}_{n-1}^k + \overline{C}_n^{k-1}$.

Задача 4. Найдите формулу для $\overline{C}_n^k$.

Задача 5. Сколькими способами натуральное число n можно представить[1] в виде суммы
а) k натуральных слагаемых;
б) k неотрицательных целых слагаемых;
в) нескольких натуральных слагаемых?

Задача 6. Автобусный билет называется счастливым, если сумма первых трёх цифр его шестизначного номера равна сумме трёх последних цифр его номера.
а) Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько номеров с суммой цифр 27.
б) Сколько имеется последовательностей из 6 неотрицательных целых чисел с суммой 27?
в) Сколько существует счастливых билетов?

Определение 2. Фигура типа  (состоящая из выравненных по левому краю клетчатых горизонтальных полосок, длина которых невозрастает сверху вниз) называется *диаграммой Юнга*. Общее число клеток в диаграмме Юнга называется её *весом*.

Задача 7. Сколько существует диаграмм Юнга
а) веса 6;
б) веса 7, имеющих не более 3 строк;
в) произвольного веса, но имеющих не более p строк и не более q столбцов?

Задача 8. Имеются 4 различных чашки, 4 одинаковых стакана, 10 одинаковых кусков сахара и 7 соломинок разного цвета. Сколькими способами можно разложить:
а) соломинки по чашкам;
б) сахар по чашкам;
в) сахар по стаканам;
г) соломинки по стаканам.

Задача 9. Как изменятся ответы в предыдущей задаче, если потребовать, чтобы после раскладывания пустых ёмкостей не оставалось?

Задача 10. Докажите, что число разбиений[2] натурального n на k натуральных слагаемых равно числу разбиений n в сумму натуральных слагаемых, наибольшее из которых равно k.

Задача 11. Докажите, что число разбиений[2] натурального n на нечётные натуральные слагаемые равно числу разбиений n на попарно различные натуральные слагаемые.

1 а	1 б	1 в	2	3	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	8 в	8 г	9	10	11

[1] Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными

[2] Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

Метод траекторий и числа Каталана

Задача 12. (*Метод траекторий*) Будем рассматривать на клетчатой плоскости пути с началом и концом в узлах клеток, состоящие из диагоналей клеток, где каждая диагональ идёт либо вправо вверх, либо вправо вниз (если двигаться по пути от начала к концу).

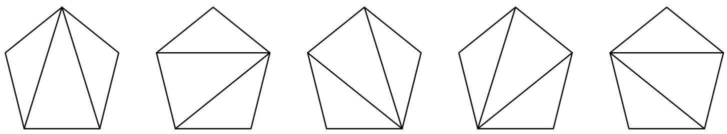
а) Сколько существует путей, выходящих из начала координат, в которых m диагоналей идут вправо вверх, а n диагоналей идут вправо вниз?

б) Сколько существует путей, соединяющих узел $(0,0)$ с узлом (x,y) (где $x,y \geqslant 0$)?

в) (*Принцип отражения*) Узлы A и B лежат над осью абсцисс, B лежит правее A. Докажите, что число путей, идущих из A в B, которые касаются оси абсцисс или пересекают её, равно числу всех путей из A' в B, где A' — узел, симметричный A относительно оси абсцисс.

Задача 13. (*Теорема о баллотировке*) Кандидат A собрал на выборах a голосов, кандидат B собрал b голосов ($a > b$). Сколько существует способов последовательного подсчёта голосов, при которых A все время будет впереди B по количеству голосов?

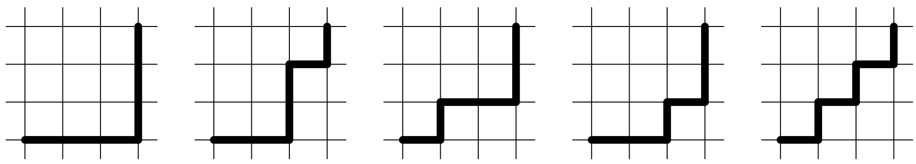
Задача 14. (*Числа Каталана*) **а)** Сколькими способами можно разрезать выпуклый $(n+2)$-угольник на n треугольников, проводя диагонали?



б) Сколькими способами можно правильно расставить в ряд n открывающих и n закрывающих скобок?

`a(b(cd))`   `(ab)(cd)`   `((ab)c)d`   `a((bc)d)`   `(a(bc))d`

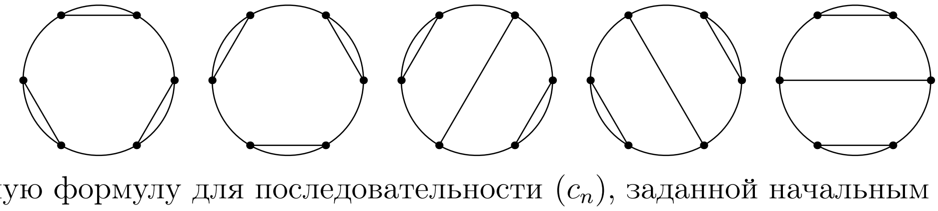
в) Сколько путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n) идут по линиям клетчатой бумаги вверх и вправо, не поднимаясь выше прямой $y = x$?



г) Сколько существует последовательностей длины $2n$, в которых n раз встречается 1, n раз встречается -1, и все частичные суммы (то есть суммы нескольких (одного, двух, трёх, …) первых членов) неотрицательны?

`1 1 1 -1 -1 -1`   `1 1 -1 1 -1 -1`   `1 -1 1 1 -1 -1`   `1 -1 1 -1 1 -1`   `1 1 -1 -1 1 -1`

д) На окружности даны $2n$ точек. Сколькими способами их можно соединить n непересекающимися хордами?



е) Найдите явную формулу для последовательности (c_n), заданной начальным условием $c_0 = 1$ и рекуррентной формулой $c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0$ (при $n \geqslant 0$). Вычислите c_1, c_2, …, c_5.

Задача 15. Найдите явные взаимно однозначные соответствия между множествами из задач 14 а, б, в, г, д.

12 а	12 б	12 в	13	14 а	14 б	14 в	14 г	14 д	14 е	15