

Часть 1. Многочлены от двух переменных

Определение 1. *Одночленом от двух переменных x и y (над \mathbb{R}) называется выражение вида $ax^m y^n$, где $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Сумма нескольких одночленов такого вида (с приведенными подобными) называется *многочленом от двух переменных x и y* . Сумма и произведение многочленов от двух переменных определяются аналогично сумме и произведению многочленов от одной переменной. Множество всех многочленов от x, y (над \mathbb{R}) обозначают $\mathbb{R}[x, y]$.*

Задача 1. Дайте определение степени многочлена $A \in \mathbb{R}[x, y]$ (обозначается $\deg A$).

Задача 2. Пусть $A(x, y), B(x, y)$ — ненулевые многочлены.

а) Докажите, что $\deg AB = \deg A + \deg B$. **б)** Что можно сказать о величине $\deg(A + B)$?

Задача 3. Дайте определение деления с остатком для многочленов от двух переменных. Всегда ли такое деление возможно?

Задача 4. Дайте определение неприводимого (над \mathbb{R}) многочлена из $\mathbb{R}[x, y]$.

Задача 5. Докажите неприводимость многочленов: **а)** $x^2 + y^2 - 1$; **б)** $y^2 - x$; **в)** $xy - 1$.

Задача 6. Докажите, что множество $\mathbb{R}(y) = \left\{ \frac{P(y)}{Q(y)} \mid P(y), Q(y) \in \mathbb{R}[y], Q(y) \neq 0 \right\}$ (с обычными операциями сложения и умножения) является полем.

Задача 7. Рассмотрим множество многочленов от x над полем $\mathbb{R}(y)$, т. е. множество $\mathbb{R}(y)[x]$. Каждый его элемент записывается в виде

$$a_n(y)x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \dots + a_1(y)x + a_0(y), \quad (*)$$

где $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_i(y) \in \mathbb{R}(y)$ при $i = \overline{0, n}$. Дайте определение неприводимого (над $\mathbb{R}(y)$) многочлена из $\mathbb{R}(y)[x]$. Верна ли для многочленов из $\mathbb{R}(y)[x]$ теорема о единственности разложения на неприводимые сомножители?

Определение 2. Запишем произвольный многочлен $A(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ в виде (*), где уже $a_i(y) \in \mathbb{R}[y]$ при $i = \overline{0, n}$. Скажем, что $A(x, y)$ является *примитивным (по x)*, если многочлены $a_n(y), \dots, a_0(y)$ взаимно просты.

Задача 8. Докажите, что произведение двух примитивных (по x) многочленов также является примитивным (по x) многочленом.

Задача 9. Докажите, что если многочлен из $\mathbb{R}[x, y]$ неприводим, то он неприводим и как многочлен из $\mathbb{R}(y)[x]$. Верно ли обратное?

Задача 10. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{R}[x, y]$ однозначно (с точностью до множителей из \mathbb{R}) раскладывается в произведение неприводимых над \mathbb{R} многочленов.