Задача 1. В парламенте некой страны 100 депутатов. Каждый депутат либо честный, либо продажный. Известно, что среди любых двух депутатов хотя бы один — продажный. Сколько честных?

Задача 2. Три человека — A, B и C — обладают абсолютными логическими способностями. Кроме того, каждый из них знает, что двое других мыслят абсолютно логично. Этой троице показали 7 марок: 2 красных, 2 зелёных и 3 синих. Затем всем троим завязали глаза и наклеили на лоб по марке, а остальные марки спрятали. После того, как повязки с глаз были сняты, у A спросили: «Можете ли вы назвать хотя бы один цвет, которого на вас наверняка нет?», и A ответил: «Нет». Когда тот же вопрос задали B, он тоже ответил: «Нет». Про кого из A, B и C можно сказать, какая на нём марка?

Задача 3. Двум гениальным математикам сообщили по натуральному числу, сказав, что эти числа различаются на 1. После этого они по очереди задают друг другу один и тот же вопрос: «Знаешь ли ты моё число?» (отвечают только «да» или «нет»). Сможет ли каждый из математиков узнать оба числа?

Задача 4. Каждый туземец с острова Амба — либо честный, либо лжец. Честные изрекают только истинные высказывания, лжецы — только ложные.

а) Вам навстречу идут двое туземцев. На вопрос «Вы — честный?» первый из них буркает что-то неразборчивое. Второй туземец приходит Вам на помощь: «Мой друг ответил «да». Но верить ему не стоит — он лжец». Что вы можете сказать про этих туземцев?
б) Один из следующей пары туземцев говорит: «Я лжец или мой друг лжец». Ваши выводы?
в) Что вы подумаете, услышав высказывание: «Я лжец и мой друг лжец»?
г) А услышав: «Если я честный, то мой друг лжец»?

Определение 1. Назовём *высказыванием* любое повествовательное предложение, которое либо истинно, либо ложно. Если A и B — некоторые высказывания, то можно определить следующие высказывания: «не A» (обозначение $\overline{A}$) — *отрицание* высказывания A, истинно если и только если A ложно;
«A и B» ($A \wedge B$) — *конъюнкция* A и B, истинно если и только если и A, и B истинны;
«A или B» ($A \vee B$) — *дизъюнкция* A и B, истинно если и только если хотя бы одно из A и B истинно;
«если A, то B» ($A \to B$) — *импликация*, истинно если и только если A ложно или и A, и B истинны.

Задача 5. Выразите
а) $A \to B$; **б)** $A \wedge B$
через A и B, используя только дизъюнкцию и отрицание.

Задача 6. Выразите
а) $\overline{A \to B}$; **б)** $A \vee B$
через A и B, используя только конъюнкцию и отрицание.

1	2	3	4 а	4 б	4 в	4 г	5 а	5 б	6 а	6 б

Соглашение 1. Для упрощения записи логических утверждений удобно использовать *кванторы.* Квантор существования: $\exists$ (перевёрнутое «E» от *Exists*); Квантор всеобщности: $\forall$ (перевёрнутое «A» от *All*); Например, высказывание «Найдётся такой x, что $f(x) = 0$» можно записать так: «$\exists\, x\colon f(x) = 0$».

Задача 7. Локсодрома считается хорошей, если, во-первых, брахистохрона длиннее морской мили, и, во-вторых, строфоида не самопересекается. Определите без отрицания плохую (не являющуюся хорошей) локсодрому.

Задача 8. Запишите высказывания с помощью кванторов и постройте отрицания, не используя «не»:

а) Для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно: $f(n) < n^2$;

б) Найдётся $\alpha \in \mathbb{R}$, что для любого $x \in \mathbb{N}$ выполнено: $\pi(x) \leqslant \alpha \dfrac{x}{\ln x}$.

Задача 9*. Докажите, что высказывание, истинность которого зависит только от истинности высказываний $A_1, \ldots, A_n$, выражается через них с помощью только дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Задача 10. Рассмотрим два определения лёгкой контрольной:

I. *В каждом варианте каждую задачу решил хотя бы один ученик.*

II. *В каждом варианте хотя бы один ученик решил все задачи.*

Может ли контрольная быть лёгкой в смысле определения I и трудной в смысле определения II?

Задача 11. Солдату-цирюльнику пришел приказ: брить тех солдат его взвода, которые не бреются сами (а остальных не брить). Сможет ли он его выполнить?

Задача 12. Являются ли следующие утверждения истинными или ложными:

$\boxed{\text{Утверждение в рамке ложно}}$ $\boxed{\boxed{\text{Утверждение в двойной рамке истинно}}}$

Задача 13.** (*Истинное происшествие*) Н.Н.Константинов сказал участникам своего семинара: «В январе занятия проходят 13, 17, 20, 24, 27 и 31 числа. В один из этих дней вам будет предложена контрольная работа на логическую тему, но в какой именно день, вы накануне знать ещё не будете.»

а) Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 31 января.

б) Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 27 января.

в) Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 20 января.

г) Однако 20 января эта контрольная состоялась (кстати говоря, единственную задачу этой контрольной вы сейчас читаете). Ясное дело, накануне ни один участник семинара об этом не знал. Как это совместить с решением предыдущих пунктов задачи?

7	8 а	8 б	9	10	11	12	13 а	13 б	13 в	13 г