Мощность множества

Напомним, что множество полностью определяется тем, какие элементы в него входят. Таким образом, множества $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{1\}$ — различны. Иногда бывает необходимо понять, «сколько» элементов в множестве. Если множество конечно, проблем не возникает, а если бесконечно?

Упражнение 1. Придумайте способ «сравнивать» множества.

Определение 1. Два множества называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Обозначение: $|A| = |B|$, $\#A = \#B$.

Пример 1. Конечные множества равномощны, если в них одинаковое количество элементов;

Пример 2. Множество натуральных чисел равномощно множеству чётных натуральных чисел, отображение $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ осуществляет *биекцию* — взаимно однозначное соответствие;

Пример 3. Отрезки $[0,1]$ и $[0,2]$ равномощны, для них отображение $x \mapsto 2x$ осуществляет искомое соответствие.

Упражнение 2. Докажите, что интервал $(0,1)$ и луч $(1,+\infty)$ равномощны.

Упражнение 3. Докажите, что для любых множеств A, B, и C верно:
(i) $|A| = |A|$. Это свойство называется *рефлексивностью*;
(ii) Если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$. Это свойство называется *симметричностью*;
(iii) Если $|A| = |B|$, $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$. Это свойство называется *транзитивностью*.

Изучим, какими бывают равномощные множества. Рассмотрим перед этим несколько примеров.

Упражнение 4. Множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц равномощно $2^{\mathbb{N}}$.

Пример 4. Множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц равномощно множеству бесконечных последовательностей из нулей, единиц, двоек и троек. Здесь 0 будем заменять на 00, 1 — на 01, 2 — на 10, 3 — на 11. Несложно показать, что это — биекция.

Определение 2. Все множества, равномощные множеству натуральных чисел называются *счётными*.

Элементы таких множеств можно занумеровать натуральными числами. Например, множество целых чисел, являющихся полными квадратами, является счётным: ведь числу n^2 можно дать номер n. Счётные множества являются в некотором смысле «самыми маленькими» бесконечными множествами:

Упражнение 5. Докажите, что любое бесконечное множество имеет счётное подмножество.

Наверное, Вы начинали решение предыдущего упражнения со слов «Выберем какой-нибудь элемент a». Тут есть некоторая тонкость, ибо априори у нас нет никакого правила для выбора этого элемента. На самом деле, в таких случаях считают верной *аксиому выбора*.

Аксиома 1. (*Аксиома выбора*) Для каждого семейства A непустых непересекающихся множеств существует множество B, имеющее один и только один общий элемент с каждым из множеств X, принадлежащих A.

Простым следствием является то, что по любому непустому множеству A можно построить множество $\{a\}$, где $a \in A$, то есть выбрать элемент из A.
В середине XX века Курт Гёдель доказал, что аксиому выбора нельзя опровергнуть, пользуясь остальными аксиомами теории множеств. Еще через несколько лет математик Пол Дж. Коэн доказал, что её нельзя вывести из остальных аксиом.

Упражнение 6. (*Теорема Кантора*) Докажите, что множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц несчётно.

Доказательство этого факта Георг Кантор опубликовал в 1874 году.

Определение 3. Про множества, равномощные множеству бесконечных последовательностей из нулей и единиц говорят, что они имеют мощность *континуум*.

Упражнение 7. Приведите как можно больше примеров континуальных множеств.

Упражнение 8. Докажите, что отрезок имеет мощность континуума. Докажите, что отрезок на прямой равномощен квадрату с внутренностью на плоскости. (Вообще-то у нас нет строгого определения отрезка, поэтому со строгим доказательством могут возникнуть сложности.)

Этот удивительный факт в 1877 году впервые обнаружил математик Георг Кантор.

Теперь попробуем сравнить различные множества A и B. Рассмотрим несколько возможностей: а) A равномощно B, то есть можно установить биекцию между элементами A и всеми элементами B; б) Можно установить биекцию между множеством A и некоторым подмножеством $B' \subset B$, то есть A можно вложить в множество B. в) Можно установить биекцию между множеством B и некоторым подмножеством $A' \subset A$, то есть B можно вложить в множество A. г) Нельзя установить никакую биекцию из пунктов б) и в).

С ситуацией пункта а) мы уже разобрались.

Упражнение 9. Докажите, что случай г) на самом деле невозможен.

Теперь разберёмся с случаями б) и в). Эти случаи симметричны, поэтому достаточно рассмотреть пункт б). Для этого разберём несколько примеров.

Пример 5. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$ устанавливает биекцию между множеством $A = \mathbb{N}$ натуральных чисел и подмножеством $X = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ множества $B = \mathbb{N}$.

Пример 6. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n^2$ устанавливает биекцию между множеством $A = \mathbb{N}$ натуральных чисел и подмножеством $X = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ множества $B = \mathbb{R}$.

Чем отличаются примеры 5° и 6°? В примере 5° можно установить взаимно однозначное соответствие между B и каким-нибудь подмножеством $A' \subset A$, а вот в примере 5° — нельзя. Отсюда

Определение 4. Множество B *мощнее* множества A, если A можно вложить[1] в B, но при этом B нельзя вложить в A.

Упражнение 10. (*Теорема Кантора–Бернштейна*) Если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B, а B равномощно некоторому подмножеству множества A, то множества A и B равномощны.

Эта теорема была сформулирована Кантором в 1883 году. При этом не известно, была ли она им доказана. Так или иначе, она была доказана Шрёдером в 1896 году и Бернштейном в 1897 году.

Дадим некоторую подсказку: пусть указанные биекции устанавливают отображения $f\colon A \hookrightarrow B$ и $g\colon B \hookrightarrow A$. Возьмите некоторый элемент $a \in A$ (опять аксиома выбора) и рассмотрите множество точек $\ldots,\ f^{-1}(g^{-1}(a)),\ g^{-1}(a),\ a,\ f(a),\ g(f(a)),\ f(g(f(a))),\ \ldots$ (если соответствующие прообразы существуют). Изучите разные возможности таких цепочек и постройте биекцию между множествами A и B.

С помощью теоремы Кантора-Бернштейна очень удобно доказывать равномощность различных множеств. Например, докажем, что множество A бесконечных последовательностей из двоек и единиц равномощно множеству B бесконечных последовательностей из натуральных чисел. Вложим A в B тождественно, то есть последовательность переходит в себя же. Вложим B в A следующим образом: будем заменять число n на кусок $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n}$. Несложно показать, что указанные отображения действительно являются вложениями. Значит, множества A и B равномощны.

Мы уже знаем, что существуют конечные, счётные, континуальные множества. А какие ещё бывают множества?

В 1878 году Кантором была сформулирована *континуум-гипотеза*: всякое подмножество отрезка либо континуально, либо счётно, либо конечно. Ситуация с континуум-гипотезой и аксиомой выбора совершенно одинакова: в зависимости от того, принята ли континуум-гипотеза или нет, получаются разные теории множеств; континуум-гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть, пользуясь остальными аксиомами.

Пусть теперь нам дано непустое множество A. Построим множество, более мощное, чем A. Оказывается, в этой роли может выступить множество 2^A.

Упражнение 11. Пусть $f\colon A \hookrightarrow 2^A$ — инъективное отображение множества в множество его подмножеств. Постройте пример подмножества, которое не лежит в образе отображения f, то есть такое подмножество $B \subset A$, что не существует элемента $b \in A$, что $f(b) = B$.

[1]Напоминаем, что *вложением* называется отображение, не склеивающее элементы, то есть $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.