Задача 1. Докажите, что набор векторов $\{e_1, \ldots, e_m\} \in \mathbb{R}^m$, где $e_i = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$, образует базис $\mathbb{R}^m$.

Задача 2. **а)** Пусть $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — биективное линейное отображение. Докажите, что набор векторов $\{e_{1'}, \ldots, e_{m'}\}$, где $e_{i'} = f(e_i)$, образует базис $\mathbb{R}^m$.
б) Пусть линейное преобразование f переводит базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в базис. Докажите, что оно биективно.

Определение 1. *Матрицей* называется произвольная прямоугольная таблица чисел.

Задача 3. Запишем координаты вектора $e_{i'}$ в столбец: $\begin{pmatrix} c_\mathbf{i}^1 \\ c_\mathbf{i}^2 \\ \vdots \\ c_\mathbf{i}^m \end{pmatrix}$, а из этих столбцов составим квадратную таблицу

$$C := \begin{pmatrix} c_\mathbf{1}^1 & c_2^1 & \cdots & c_\mathbf{m}^1 \\ c_\mathbf{1}^2 & c_2^2 & \cdots & c_\mathbf{m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_\mathbf{1}^m & c_2^m & \cdots & c_\mathbf{m}^m \end{pmatrix}$$

Эта таблица называется *матрицей преобразования* f в базисе $\{e_i\}$.

Задача 4. **а)** Пусть $w \in \mathbb{R}^m$ имеет координаты $w^1, \ldots, w^m$. То есть

$$w = \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^m \end{pmatrix} = w^1 e_1 + w^2 e_2 + \ldots + w^m e_m.$$

Найдите координаты вектора $f(w)$ в базисе $\{e_{1'}, \ldots, e_{m'}\}$.
б) Найдите координаты вектора $f(w)$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_m\}$.
в) Придумайте привило умножения матрицы C на вектор-столбец координат вектора w так, чтобы $f(w) = C \cdot w$.

Задача 5. Вычислите: **а)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$; **б)** $\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; Что это за линейное преобразование?
в) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$; **г)** $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; **д)** $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$.

Задача 6. Пусть f и g — два биективных отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Пусть $e_{i'} = fe_i$, и $e_{i''} = ge_{i'}$.
а) Докажите, что $\{e_{1''}, \ldots, e_{m''}\}$ также базис.
б) Пусть C и D — матрицы преобразований f и g в базисе $\{e_i\}$. Найдите координаты $g(f(e_1))$ в базисе $\{e_{i''}\}$, в базисе $\{e_{i'}\}$ и в базисе $\{e_i\}$.
в) Придумайте правило умножения матриц так, чтобы

$$g(f(w)) = g(C \cdot w) = D \cdot (C \cdot w) = (D \cdot C) \cdot w.$$

Задача 7. Придумайте две матрицы C и D так, чтобы: **а)** $CD = D$; **б)** $CD = DC$; **в)** $CD \neq DC$.

Задача 8. Постройте биекцию между множеством всех линейных отображений (операторов) $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ и множеством матриц размера m на m.

Задача 9. **а)** Найдите такую матрицу E, что для любой матрицы C верно: $EC = CE = C$.
б) Докажите, что такая матрица единственна.
в) Пусть C — матрица биективного линейного оператора. Докажите, что найдётся матрица D такая, что $CD = DC = E$.
г) Докажите, что множество матриц биективных линейных операторов образуют группу относительно операции умножения.

Задача 10. Придумайте, как описать аффинные преобразования с помощью матриц, векторов, их сложения и умножения.