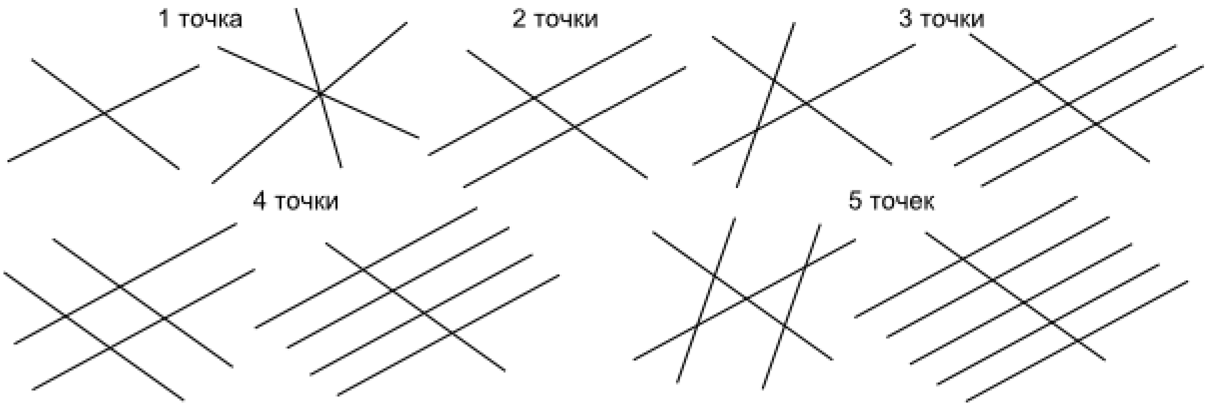
Задача 4.1. Пятиклассник Петя нарисовал 5 рисунков. На каждом рисунке он изобразил несколько прямых и отметил все их точки пересечения друг с другом. В результате на первом рисунке он отметил всего 1 точку, на втором — 2, на третьем — 3, на четвертом — 4 и на пятом — 5. **а)** Приведите примеры таких рисунков. **б)** Про какие из Петиных рисунков можно наверняка сказать, сколько на них проведено прямых?

Ответ: **а)**на рисунке; **б)**на первом — 2, на втором — 3



Решение. **б)**Две точки пересечения можно получить только из трёх прямых, если две из них параллельны. В остальных случаях может быть несколько вариантов. ■

Задача 4.2. **а)** В клетках квадрата 3×3 расставлены целые числа так, что сумма чисел в любом уголке из трёх клеток неотрицательна. Может ли сумма всех чисел в квадрате быть отрицательной? **б)** Тот же вопрос для квадрата 4×4.

Ответ:
а)Да, может; **б)**Не может.

-2	1	-2
1	3	1
-2	1	-2

Решение. **а)**Например так, как показано на рисунке справа.

б)Возьмём каждую угловую доминошку три раза, а каждую центральную — 1 раз, сложим все суммы в этих уголках. Получится неотрицательное число. При этом легко видеть, что каждое слагаемое встречается 3 раза, значит должна получиться утроенная сумма чисел в табличке, то есть число отрицательное. Противоречие.
■

Задача 4.3. **а)** Можно ли покрыть квадрат 4×4 уголками из трёх клеток в несколько слоёв так, чтобы над каждой клеткой квадрата было одинаковое количество уголков? (Уголки не должны вылезать за пределы квадрата.) **б)** Тот же вопрос для квадрата 3×3.

Ответ: **а)**Да, можно; **б)**Нет, нельзя.

Решение. **а)**Это покрытие описано в решении пункта б) предыдущей задачи. **б)**Это следует из решении пункта а) предыдущей задачи. Ведь если такое покрытие возможно, то, расставив соответствующие числа, мы получим, что сумма в каждом уголке неотрицательна, значит, так как каждое число встречается одинаковое число раз, также должна быть неотрицательна и сумма чисел во всей таблице. Но это не так. Противоречие. ■

Задача 4.4. Планетная система Ух-ты состоит из 9 планет, каждая из которых обитаема. С незапамятных времён все планеты жили дружно. Но после того, как в Ух-ты побывали космические пираты Весельчак и Глот, некоторые планеты разорвали дипломатические отношения. Однако среди любых 4-х планет какие-то 2 по-прежнему дружат между собой.

Системе Ух-ты угрожает вторжение сумчатых бегемотов, противостоять которому могут только обьединенные силы трех планет. Докажите, что сумчатым бегемотам не одолеть систему Ух-ты.

Решение.

Необходимо доказать, что в графе дипломатических отношений 9 планет найдётся треугольник. Будем отталкиваться от задачи про то, что среди людей найдётся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. Заметим, что если найдётся планета, **не** имеющая дипломатических отношений с 6 и более планетами, что среди тех планет, с которыми она не имеет отношений, найдётся либо три планеты, попарно не имеющих дипломатических отношений, и тогда мы получим 4 планеты, не имеющих дипломатических отношений, что противоречит условию, либо три нужные нам планеты. Значит, степень каждой вершины не менее 3. Но все вершины не могут иметь степень 3, так как тогда получится граф, где 9 вершин нечётной степени. Рассмотрим ту вершину, степень которой не менее 4. Среди тех вершин, которые с ней связаны, есть 2, связанные ребром (по условию). Мы нашли нужные нам планеты! ■

Задача 4.5. У электромонтёра был кусок провода длиной 25 м, из которого утром он собирался вырезать необходимые для работы куски в 1 м, 2 м, 3 м, 6 м и 12 м. Но утром обнаружилось, что ночью какой-то хулиган разрезал провод на две части. Сможет ли монтёр выполнить намеченные работы?

Ответ: Сможет.

Решение. Из двух частей, на которые разрезан провод, хотя бы одна длиннее 12 м (иначе общая длина провода не превышала бы 24 м), поэтому от неё монтёр может отрезать кусок длиной 12 м.

Оставшиеся после отрезания двенадцатиметрового куска две части в сумме составляют $25 - 12 = 13$ м, поэтому хотя бы одна из этих частей длиннее 6 м. От этой части монтёр может отрезать шестиметровый кусок.

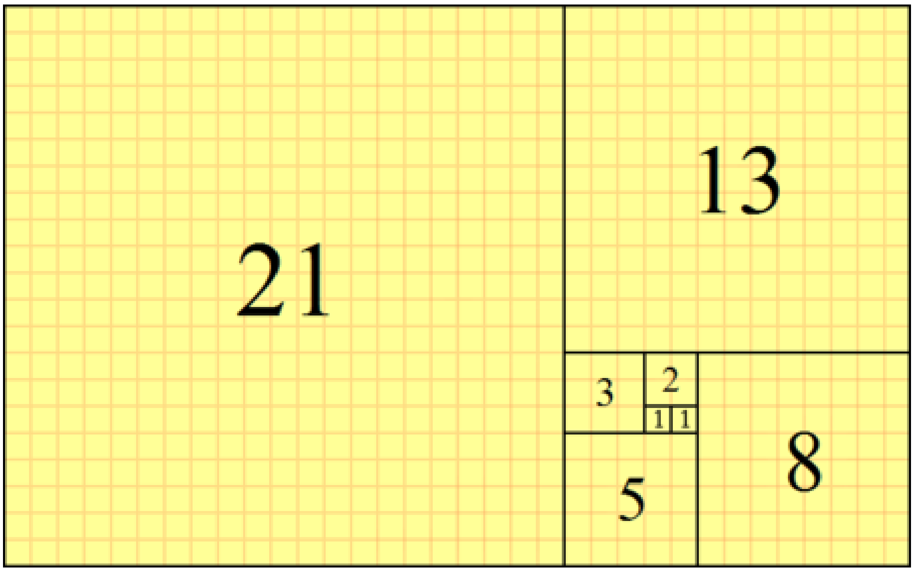
Оставшиеся две части в сумме составляют $13 - 6 = 7$ м, поэтому от одной из этих частей монтёр может отрезать трёхметровый кусок.

Оставшиеся две части в сумме составляют $7 - 3 = 4$ м, поэтому хотя бы одна из них не короче 2 м, значит, и двухметровый кусок монтёр сможет отрезать.

Из последних двух частей хотя бы одна не короче метра, поэтому монтёр сможет получить и метровый кусок. ■

Задача 4.6. Можно ли замостить всю плоскость квадратами, среди которых всего два одинаковых?

Ответ: Да, можно. См рисунок ниже. Решение основывается на числах Фибоначчи.



Решение.

■

Задача 4.7. В заповеднике живут 16 жирафов, все разного роста. Возможно ли построить этих жирафов в ряд так, что, какие бы 11 из них ни убежали, оставшиеся пятеро будут стоять не по росту? (По росту — значит в порядке убывания роста или в порядке возрастания роста.)

Ответ: Да, могут.

Решение. Рассмотрим такую расстановку жирафов: 17, 18, 19, 20, 13, 14, 15, 16, 9, 10, 11, 12, 5, 6, 7, 8. Какие-то два оставшихся два жирафа попадут в одну четвёрку, и не все жирафы могут быть из одной четвёрки, это и даёт нам возможность сказать, что жирафы не могут стоять по росту. ■

Задача 4.8. Петя копал полчаса, и вместо клада нашёл табличку с надписью: „Иди на север 1 м, там поверни направо на угол 60°, потом прямо 2 м, направо на 60°, прямо 3 м, направо на 60°, ..., направо на 60°, прямо 60 м. Полчаса покопай, и найдешь клад". Как Пете дойти до клада напрямик?

Ответ: Надо повернуть на 60 градусов правее к северу, развернуться на 180 и пройти 90 м напрямик.

Решение. Делаем через векторы. Надо идти на север (1 - 4 + 7 - ... + 55 - 58) = -30 м, на 60 градусов правее (2 - 5 + ... + 56 - 59) = -30 м, и на восток (3 - 6 + 9 - 12 + ... 57 - 60) = -30 м. Каждое смещение на север и каждое движение на восток дают два движения на 60 градусов правее севера. То есть надо повернуть на 60 градусов правее к северу, развернуться на 180 и пройти 90 м напрямик. ■

Дополнительные задачи

Задача 4.9. В строку выписано 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитана ее сумма (группы из одного числа тоже учитывались). Какое наибольшее количество сумм могло оказаться нечетными?

Ответ: 36. Например, когда все числа равны 1.

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершинами будут порядковые номера от 1 до 12, а ребро из вершины i в вершину j $(j > i)$ будет проведено, если в последовательности сумма всех чисел с номерами от i включительно до j невключительно оказывается нечётной. Нетрудно заметить, что в этом графе нет треугольников. По теореме Мантеля, в графе без треугольников на v вершинах максимум $\lfloor \frac{v^2}{4} \rfloor$ рёбер. ■

Задача 4.10. У входа в пещеру с сокровищами стоит бочка с 4 дырками по кругу в крышке. В каждой дырке можно нащупать селедку хвостом вверх или вниз. Али-Баба может просунуть руки в любые две дырки, определить положение селедок под ними и, если хочет, перевернуть одну или обе по своему усмотрению. Когда хвосты всех четырех селедок окажутся направленными в одну сторону, дверь в пещеру откроется. Однако, после того как Али-Баба вытаскивает руки, бочка некоторое время с дикой скоростью крутится, так что Али-Баба не может определить, куда именно он совал руки раньше. Как Али-Бабе открыть дверь не более чем за 10 засовываний?

Решение. 1: Первым ходом выбираем две смежные монеты и делаем обе орлами. 2: Потом выбираем две противоположные монеты и делаем обе орлами. Если мы еще не выиграли, то осталась только одна решка. 3: Опять выбираем две противоположные монеты и только одну решку, если она нам попадается. Теперь (если не выиграли) у нас два смежных орла, две смежные решки. 4: Выбираем две смежные монеты, обе переворачиваем. Если не выиграли, у нас два орла и две решки чередуются. 5: Выбираем две противоположные монеты, обе переворачиваем, выиграли.

Если обозначать монеты буквами Орел и Решка, то после второго хода монеты расположены по кругу OOOP, после третьего OOPP, после четвертого OPOP, и пятый ход выигрывает. ■

Задача 4.11. Учитель заполнил клетчатую таблицу 5×5 различными целыми числами и выдал по одной её копии Боре и Мише. Боря выбирает наибольшее число в таблице, затем вычёркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее число из оставшихся, вычёркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Миша производит аналогичные операции, каждый раз выбирая наименьшие числа. Может ли учитель так заполнить таблицу, что сумма пяти чисел, выбранных Мишей, окажется больше суммы пяти чисел, выбранных Борей?

Ответ: Не может.

Решение. Юрины числа $M_1 > M_2 > M_3 > M_4 > M_5$, Яшины – $m_5 < m_4 < m_3 < m_2 < m_1$. Ясно, что $M_1 \geqslant m_1$. Докажем, что $M_2 \geqslant m_2$. При выборе M_2 уже были вычеркнуты одна строка и один столбец, а при выборе m_2 – по три строки и столбца (число выбиралось на четвёртом шаге). В сумме вычеркнуто не более чем по четыре строки и столбца, значит, хотя бы одно число a осталось невычеркнутым в обоих случаях, откуда $M_2 \geqslant a \leqslant m2$. Аналогично доказывается, что $M_i \geqslant m_i$ при любом i, и поэтому Юрина сумма не меньше Яшиной. ■

Задача 4.12. Верно ли, что при любом покрытии шахматной доски 32-мя костяшками домино получится чётное число вертикально расположенных и чётное число горизонтально расположенных костяшек?

Ответ: Да, верно.

Решение. Пронумеруем клетки доски по порядку. Тогда горизонтальная косточка закрывает 1 нечетное и 1 четное число. Предположим,горизонтальных костей нечетное количество, тогда незакрытыми остаётся нечетное количество четных и нечетных клеток.

Заметим, что вертикальная кость закрывает либо 2 четные, либо 2 нечетные клетки. Следовательно, вертикальными костями нельзя закрыть нечетное количество нечётных/чётных клеток.

Получаем противоречие, следовательно количество горизонтальных - четное.

■
