Задача 5.1. На каждой из одиннадцати карточек написано по цифре, не превосходящей пяти. Расположив эти карточки в ряд, Миша получил одно 11-значное число; затем, расположив те же карточки по-другому, Миша получил второе 11-значное число. Докажите, что сумма двух этих чисел будет содержать хотя бы одну четную цифру в своей десятичной записи.

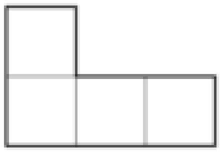
Решение. Обязательно будут разряды, в которых складываются числа одной чётности (если это не так, то нечётных чисел в первой перестановке будет столько же, сколько и чётных во второй, а так как переставляются одни и те же цифры, их будет столько же, сколько и в первой, что невозможно, так как всего цифр нечётное число). Рассмотрим первый такой разряд. До него переноса не будет (так как складываются числа разной чётности, не превосходящие пяти), значит, сумма в этом разряде будет чётной. ■

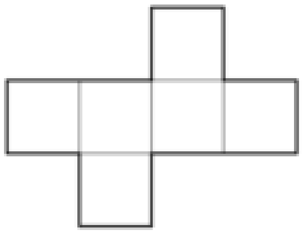
Задача 5.2. Можно ли соединить некоторые концы отрезков, изображённых на рисунке, отрезками так, чтобы получилась одна несамопересекающаяся ломаная?

Ответ: Нет, нельзя.

Решение. Отрезки, выходящие из самых нижних концов, должны идти к концам, следующим по высоте. Так можно рассуждать для каждой "строны" этой "треугольной" фигуры. Но провести два отрезка не получится - не получится тогда всё объединить в одну ломаную. Значит, у нашей ломаной должно быть три конца, что невозможно. ■

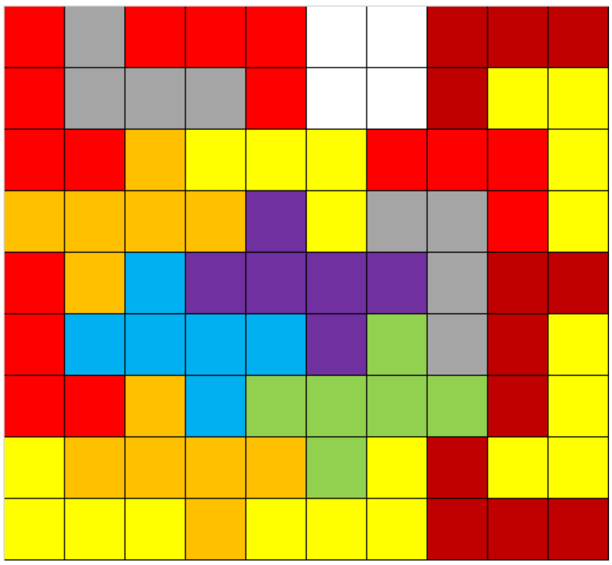
Задача 5.3. Можно ли из фигурок, нарисованных ниже сложить квадрат, используя фигурки обоих видов? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.





Ответ: Да, можно.

Решение. Алгоритм следующий. Сложим из фигурок прямоугольник, а дальше из этих прямоугольников уже нетрудно сложить квадрат. При этом нетрудно сделать прямоугольник, взяв две фигуры, изображённые на рисунке ниже, и прямоугольник 2×4, который составлен из двух фигурок «Г» из четырёх клеток.



■

Задача 5.4. На математическом конкурсе было предложено несколько простых и несколько сложных задач. Участнику давали 3 очка за решение сложной и 2 очка за решение простой задачи. Кроме того, за каждую нерешенную простую задачу списывалось 1 очко. Рома решил 10 задач и набрал 14 очков. Сколько было простых задач?

Ответ: 16 задач.

Решение. Решение 1. Если все задачи на конкурсе были сложными, Рома набрал бы 3*10=30 очков. На каждой же простой задаче, независимо от того, решил ее Рома или нет, н теряет 1 очко (т.е. получает на одно очко меньше, чем если бы та же задача считалась сложной). Так как 14=30-16, простых задач было 16.

Решение 2. Предположим, что Рома не решил бы на конкурсе ни одной задачи, а всего простых задач на конкурсе было n. Тогда он набрал бы отрицательное число очков $-n$. С каждой решенной задачей он увеличивает количество очков по сравнению с описанной ситуацией на 3: если решает сложную задачу, то ему дают 3 очка, если решает простую задачу, то -1 очко за отсутствие ее решения исчезает и он получает еще 2 очка. Таким образом, решив 10 задач, он набрал на 30 очков больше худшего возможного результата. Можем записать уравнение $-n + 30 = 14$, откуда $n = 16$, значит всего на конкурсе было 16 простых задач. ■

Задача 5.5. В числах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры). Известно, что у этих чисел произведения цифр равны. Могут ли оба числа быть нечётными?

Ответ: Нет, не могут.

Решение. Всего 10 разных разных букв, следовательно, одна из них - 0. И произведение цифр должно быть равно 0. Ноль может обозначать только та буква, которая есть в обоих словах. Повторяются буквы М, Л, и О. Но М и Л - начальные, следовательно, 0 быть не могут. Значит, ноль может обозначать только буква О, и первое число обязательно чётное. ■

Задача 5.6. В некотором царстве каждые двое — либо друзья, либо враги. Каждый человек может в любой момент поссориться со всеми друзьями и помириться со всеми врагами. Оказалось, что каждые три человека могут таким образом стать друзьями. Докажите, что тогда и все люди в государстве могут стать друзьями.

Решение. Для начала поймём, что в этом царстве выполняется правило "друг моего друга - мой друг." Действительно, если есть три человека А, Б, и В, такие, что А дружит с Б, Б дружит с В, а В не дружит с А, то с помощью описанных операций они познакомиться не могут (можно проверить перебором).

Точно также можно понять, что нет троих людей, попарно между собой враждующих.

Значит, в графе знакомств не более двух компонент связности, и каждая из них — полный граф. Если все люди из одной компоненты связности по очереди поссорятся, то они перейдут в другую компоненту связности. И все будут дружить. ■

Задача 5.7. Среди 25 жирафов, каждые два из которых различного роста, проводится конкурс "Кто выше?".

За один раз на сцену выходят пять жирафов, а жюри справедливо (согласно росту) присуждает им места с первого по пятое. Каким образом надо организовать выходы жирафов, чтобы после семи выходов определить первого, второго и третьего призёров конкурса?

Решение. Разобьём всех жирафов на пять групп по пять жирафов в каждой. Сравним жирафов внутри каждой группы. На это потребуется 5 выходов. Шестым выходом сравним самых высоких жирафов каждой группы. После этого обозначим группы буквами А, Б, В, Г, Д в порядке убывания роста самых высоких в группе, а жирафов внутри группы обозначим индексами 1, 2, 3, 4, 5 также в порядке убывания их роста. Составим таблицу роста жирафов.

$А_1$	$Б_1$	$В_1$	$Г_1$	$Д_1$
$А_2$	$Б_2$	$В_2$	$Г_2$	$Д_2$
$А_3$	$Б_3$	$В_3$	$Г_3$	$Д_3$
$А_4$	$Б_4$	$В_4$	$Г_4$	$Д_4$
$А_5$	$Б_5$	$В_5$	$Г_5$	$Д_5$

Заметим, что жирафы из групп Г и Д не могут быть призёрами, так как рост каждого из них меньше, чем рост жирафов А1, Б1 и В1. Также призерами не могут быть жирафы А4, Б4, В4, А5, Б5, В5. Кроме того, так как А1 > Б1 > В1 > В2 > В3, то призёрами не могут быть жирафы В2 и В3. А так как А1 > Б1 > Б2 > Б3, то и Б3 – не призер. Таким образом, призёрами могут оказаться только шесть жирафов: А1, А2, А3, Б1, Б2, В1. Но уже известно, что жираф, обозначенный А1, – самый высокий. Седьмым выходом мы сравним 5 остальных жирафов и тем самым выявим жирафов, занявших 2 и 3 место. ■

Задача 5.8. Три гангстера украли из сейфа 10 бриллиантов общей стоимостью 4 000 000 долларов. При этом они рассчитывали разделить бриллианты так, чтобы каждому досталось не меньше 1 000 000 долларов. При погоне один из бриллиантов стоимостью 600 000 долларов потерялся, и такой раздел стал невозможен. Мог ли он быть возможен вначале, или гангстеры заведомо ошибались?

Ответ: Да, мог. Пусть, например, было 2 бриллианта по 1 500 000 долларов, 1 бриллиант стоимостью 600 000 долларов, 2 бриллианта по 100 000 долларов и 5 бриллиантов по 50 000 долларов. Легко распределить их так, чтобы сначала всем досталось не меньше миллиона. А если убрать 1 бриллиант стоимостью 600 000 долларов, то это уже не удатстся - суммарная стоимость бриллиантов стоимостью меньше 1 500 000 долларов меньше миллиона, а таких крупных бриллиантов всего два.

Дополнительные задачи

Задача 5.9. Имеются три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладёт камень, и числа камней в куче, из которой он берёт камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму денег (если Сизиф не может расплатиться, то Зевс великодушно позволяет ему совершить перетаскивание в долг). В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых они лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

Ответ: 0.

Решение. Будем называть камни из одной кучи знакомыми, из разных – незнакомыми. Тогда доход Сизифа за одно перетаскивание равен изменению количества пар знакомых камней. Так как в конечный момент все камни оказались в исходных кучах, то общее изменение количества знакомств равно нулю, а, значит, и доход Сизифа равен нулю. ■

Задача 5.10. В копилке собрано четыре рубля медными советскими монетами (по 1, 3 и 5 копеек). Докажите, что этими монетами можно заплатить три рубля без сдачи.

Решение. Достаточно доказать, что можно заплатить без сдачи один рубль.

В копилке могут находиться монеты четырех видов: однокопеечные, двухкопеечные, трехкопеечные и пятаки. Поэтому монет какого-то вида не меньше рубля.

Если это — пятаки, двухкопеечные или однокопеечные. то ясно, что можно заплатить рубль без сдачи.

Рассмотрим поэтому случай, когда больше, чем на рубль, трехкопеечных монет, а монет каждого другого вида меньше, чем на рубль.

Если в копилке есть хотя бы одна однокопеечная монета. то, добавляя ее к 33 трехкопеечным, получаем рубль.

Если есть две двухкопеечные или два пятака, то. добавляя к 32 (соответственно к 30) трехкопеечным, получаем рубль.

Остается, таким образом, один случай, когда одноко- пеечных монет нет, двухкопеечных меньше двух, пятаков тоже меньше двух.

Если пятаков нет, то двухкопеечных монет не меньше двух (398 не делится на 3); если двухкопеечных нет. то пятаков не меньше двух (395 не делится на 3). Итак, в рассматриваемом случае есть один пятак и одна двухкопеечная, и мы можем набрать рубль, добавив один пятак и одну двухкопеечную к 31 трехкопеечной монете.

Интересно разобраться, какие вообще суммы могут быть уплачены без сдачи при четырехрублевом наборе медных монет в копилке.

Например, если в копилке только двухкопеечные монеты. то не может быть уплачена никакая нечетная сумма; если только пятаки, то — никакая сумма, не делящаяся на 5; если, наконец, в копилке 133 трехкопеечных и одна однокопеечная, то не может быть уплачена никакая сумма, которая при делении на 3 дает в остатке 2.

Значит, если некоторая сумма может быть уплачена при любом четырех рублевом наборе медных монет в копилке, то она делится на 10 и при делении на 3 не дает в остатке 2. Все ли такие суммы могут быть уплачены? ■

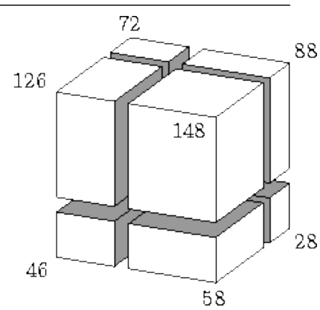
Задача 5.11. Перед Гарри Поттером в ряд лежат несколько шариков, на которых написаны ненулевые цифры (на каждом шарике одна цифра). За один взмах волшебной палочки он может удалить самый левый шарик, при этом после каждого шарика с цифрой k появятся шарики с цифрами $k+1, k+2, ..., 9$. Например, если перед Гарри лежат шарики 2, 6, 5, 9, после взмаха палочки будут шарики 6, 7, 8, 9, 5, 6, 7, 8, 9, 9. Всегда ли Гарри сможет убрать все шарики?

Ответ: Да, всегда.

Решение. Минимальное число в последовательности не уменьшается. При этом количество минимальных чисел не увеличивается.

Сначала доказываем, что исчезают все последовательности из 9. Потом доказываем, что исчезают все последовательности с меньшим минимальным числом, если исчезают все последовательности с большим. Для этого смотрим на самое левое минимальное число. То, что левее него — исчезнет. Значит, исчезнет и оно. После этого либо количество чисел, равных нашему, уменьшается, либо увеличивается минимальное число. ■

Задача 5.12. Деревянный брусок тремя распилами распилили на восемь меньших брусков. На рисунке у семи брусков указана их площадь поверхности. Какова площадь поверхности невидимого бруска?



Ответ: 22

Решение. У каждого малого бруска поверхность распилов составляет половину всей его поверхности. Будем считать только её. Раскрасим малые бруски в чёрный и белый цвета, как на рисунке (невидимый брусок – чёрный). Тогда каждые два одинаковых соприкасающихся на распиле прямоугольника – разного цвета. Поэтому сумма площадей чёрных распилов равна сумме площадей белых. А тогда и сумма площадей поверхностей белых брусков равна сумме площадей поверхностей чёрных. Отсюда площадь поверхности невидимого чёрного бруска равна $(148 + 46 + 72 + 28) - (88 + 126 + 58) = 22$. ■