Задача 10.1. В диване юного энтомолога Васи живут клопы и блохи, всего 2019 насекомых. Вася подсчитал, что если бы количество клопов увеличилось в 2 раза, а количество блох уменьшилось на 100, то насекомых бы стало 2018. Сколько клопов и блох живет в диване у Васи?

Ответ: 99 клопов и 1920 блох

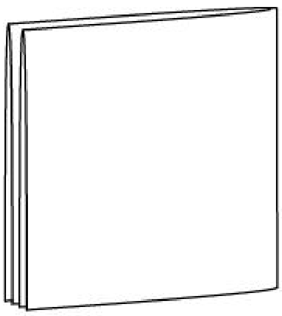
Решение. Если количество блох уменьшится на 99, а количество клопов увеличится в два раза, то число насекомых не изменится. Значит, в диване у энтомолога живут 99 клопов и $2019 - 99 = 1920$ блох. ■

Задача 10.2. Петя собрал пазл. Он посмотрел на него и решил его склеить и повесить на стену. За одну минуту Петя склеивал вместе два куска (начальных или ранее склеенных). В результате весь пазл соединился в одну цельную картину за 2 часа. За какое время собралась бы картина, если бы Петя склеивал вместе за минуту не по два, а по три куска?

Ответ: 1 час

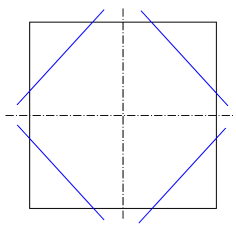
Решение. Если склеивать каждую минуту по две части пазла, то за минуту число частей будет уменьшаться на 1. Поскольку в конце получилась одна часть, значит, в начале было $1 + 60 * 2 = 121$ часть. Если за минуту склеивать по 3 части, то каждую минуту число частей будет уменьшаться на 2. В конце опять остаётся одна часть, поэтому необходимое для склеивания всех частей время $(121 - 1) : 2 = 60$ минут. ■

Задача 10.3. Квадратную салфетку сложили пополам, полученный прямоугольник сложили пополам ещё раз. Получившийся квадратик разрезали ножницами по прямой. Могла ли салфетка распасться **а)** на 2 части; **б)** на 3 части; **в)** на 4 части; **г)** на 5 частей?

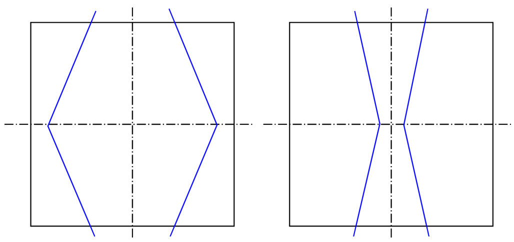


Ответ: **а**)можно; **б**)можно; **в**)можно; **г**)можно

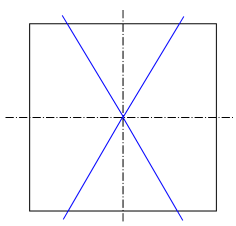
Решение. После одного взмаха ножниц у нас получатся четыре линии разреза, расположенные симметрично относительно линий сгиба. Количество частей зависит от того, пересекают разрезы линии сгиба, или нет. Рассмотрим следующие случаи: **г**) если разрез не пересекает ни одну из линий сгиба, получается 5 частей:



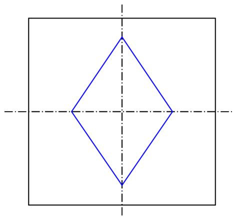
б) Если разрез пересекает ровно одну линию сгиба, получается 3 части:



в) Если разрез проходит через точку пересечения сгибов, получаются 4 части:



а) Если разрез пересекает оба сгиба, получаются 2 части:

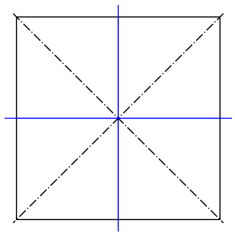


■

Задача 10.4. Можно ли квадратный лист бумаги размером 2×2 сложить так, чтобы его можно было разрезать на 4 квадрата 1×1 одним взмахом ножницами?

Ответ: можно

Решение.



■

Задача 10.5. В Солнечном городе живут 25 коротышек. У каждого из них есть три воздушных шарика: красный, синий и желтый. Смогут ли они так поменяться шариками, чтобы у каждого все три шарика оказались одноцветными?

Ответ: нет, не смогут

Решение. Поскольку коротышек всего 25, то шариков каждого цвета тоже 25. Поскольку это число делится на 3 с остатком, то кому-то не достанется трёх шариков одного цвета. ■

Задача 10.6. Вдоль аллеи стоят 20 столбиков, каждый из которых имеет высоту 1 м, 2 м или 3 м. Вася, пока шёл в одну сторону, насчитал 13 пар соседних столбиков, в которых первый столбик был ниже второго. Когда он шёл обратно, то насчитал 5 таких пар. Не ошибся ли Вася в расчётах?

Ответ: Вася ошибся.

Решение. Всего пар соседних столбиков 19.

Таких пар, где первый столбик ниже второго, подряд может быть не больше двух (1м — 2м — 3м). Затем обязательно будет по крайней мере одна пара столбиков, где первый выше второго. Таким образом на 12 возрастающих пар должно быть не меньше 5 убывающих (по одной между каждыми двумя возрастающими). Чтобы из оставшихся двух пар одна была возрастающей, другая должна быть убывающей — 6-й по счёту.

■

Задача 10.7. Электрик, монтажник и инженер, фамилии которых Бауманн, Эйхлер и Хаан (не обязательно в таком порядке!), летели рейсом из Праги в Каир. Из разговора, который они вели в самолете, выяснилось, что:

- Хаан старше, чем инженер.
- Бауманн и инженер собирались работать на строительстве;
- электрик и Хаан живут постоянно в Берлине;
- Эйхлер моложе, чем монтажник;

Назовите фамилии инженера и электрика (ответ нужно обосновать!).

Ответ: фамилия инженера Эйхлер, а электрика — Бауманн.

Решение. Составляем табличку и отмечаем «-» варианты, которых точно не может быть:

	Бауманн	Эйхлер	Хаан
электрик			—
монтажник		—	
инженер	—		—

Из таблицы видно, что инженером может быть только Эйхлер, а Хаан может быть только монтажником. Следовательно, электрик — Бауманн:

	Бауманн	Эйхлер	Хаан
электрик	+	—	—
монтажник	—	—	+
инженер	—	+	—

■

Задача 10.8. На доске написали в строку 25 чисел "-1". Каждым ходом какие-то два соседних числа заменяли на "1", если они имеют один и тот же знак, и на "-1", если они имеют разные знаки. После нескольких таких ходов на доске осталось одно число. Могло ли оно быть равно 1?

Ответ: нет

Решение.

Решение 1. Можно заметить, что при замене -1 и -1 на 1 количество «-1» уменьшается на 2; при заменах 1 и 1 на 1; 1 и -1 на -1 количество «-1» не меняется. Поскольку вначале имеется нечётное число «-1», то количество «-1» будет оставаться нечётным при любых заменах. Значит, оставшееся одно число могло быть только -1.

Решение 2. Также можно заметить, что каждый раз мы вместо двух чисел пишем ровно их произведение. Поэтому когда после нескольких таких ходов образуется какое-то число, оно обязательно равно произведению исходных чисел, то есть $\underbrace{(-1)\cdot(-1)\ldots(-1)\cdot(-1)}_{25 \text{ раз}} = -1$. ■

Дополнительные задачи

Задача 10.9. В городе Васюки каждая семья занимала отдельный дом. В один прекрасный день каждая семья переехала в дом, ранее занятый другой семьей. В ознаменование этого дня Васюксовет решил покрасить все дома в красный, синий или жёлтый цвета, причём так, чтобы ни для какой семьи цвета старого и нового домов не совпадали. Удастся ли Васюксовету это сделать?

Ответ: удастся

Решение. Нарисуем граф, в котором вершины-дома соединим стрелками-рёбрами, показывающими, откуда куда переезжают жители. Все соседние вершины должны быть покрашены в разные цвета.

Каждая вершина графа соединена рёбрами ровно с двумя другими, поэтому получатся несколько замкнутых колец. Если в таком кольце чётное число вершин, то можно покрасить дома в любые два цвета через один. Если в кольце нечётное число вершин, то двух цветов уже не хватит, но трёх будет достаточно. Например, можно все дома, кроме одного, красить в два цвета через один, а последний покрасить в третий цвет, чтобы рядом не оказались дома одного цвета. ■

Задача 10.10. Имеется набор из двух карточек: $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$. За одну операцию разрешается составить выражение, использующее числа на карточках, арифметические действия, скобки. Если его значение – целое неотрицательное число, то его выдают на новой карточке. (Например, имея карточки $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ и $\boxed{7}$, можно составить выражение $\boxed{7}\boxed{5} : \boxed{3}$ и получить карточку $\boxed{25}$ или составить выражение $\boxed{3}\boxed{5}$ и получить карточку $\boxed{35}$.) Как получить карточку с числом 2018 **а)** за 4 операции; **б)** за 3 операции?

Решение. **а)** 1) $\boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{3}$, 2) $\boxed{2}\boxed{1} - \boxed{3} = \boxed{18}$, 3) $\boxed{3} - \boxed{2} - \boxed{1} = \boxed{0}$, 4) $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{18}$.

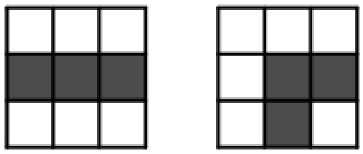
б) 1) $\boxed{2}\boxed{1} = \boxed{21}$, 2) $\boxed{21} - \boxed{1} = \boxed{20}$, 3) $\boxed{20}\boxed{21} - \boxed{1} - \boxed{2} = \boxed{2018}$. ■

Задача 10.11. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета? (Каждая клетка закрашивается целиком в один цвет.)

Ответ: 16 цветов

Решение. Разделим доску на 16 квадратов 2×2 и каждый квадрат раскрасим своим цветом. Эта раскраска в 16 цветов удовлетворяет условию.

Большего количества цветов добиться не удастся. Действительно, если клеток какого-то цвета не более трёх, то только одна из них может граничить по стороне с двумя клетками своего цвета:



Если же клеток каждого цвета не менее четырёх, то различных цветов не более шестнадцати. ■

Задача 10.12. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли еще 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовём девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика – *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь. Сколько из них были отважными?

Ответ: 10 детей

Решение. Первый способ. Посмотрим на количество пар из соседних мальчика и девочки. Изначально оно равно 1. Заметим, что если мальчик сел между двумя мальчиками, то количество таких пар не изменилось. Если же он сел между мальчиком и девочкой, то он одну такую пару "разрушил" и одну "создал", и количество таких пар тоже не изменилось. И только в случае, если мальчик был отважным, он увеличивает количество таких пар на две. Аналогичные рассуждения верны и для девочек. Так как в конце у нас таких пар 21, то отважных детей было (21˘1) : 2 = 10.

Второй способ. Каждый отважный ребёнок уменьшает количество однополых пар на 1. Каждый неотважный ребёнок увеличивает количество однополых пар на 1. В начале однополых пар не было, в конце их тоже не было. Следовательно, число отважных детей равно числу неотважных.

Третий способ. Группы мальчиков чередуются с группами девочек. Изначально было две группы. Когда садился неотважный ребенок, то он подсаживался к группе, и количество групп не менялось. Когда садился отважный ребенок, он разбивал группу другого пола на две и составлял новую группу из самого себя, увеличивая общее количество групп на 2. В конце оказалось 22 группы. Значит, отважных ребят было (22˘2) : 2 = 10. ■
