Задача 2.1. В некоторых вершинах куба расставили единицы, в остальных — минус единицы. Затем на каждой грани написали произведение чисел, стоящих в ее вершинах. Может ли сумма всех четырнадцати написанных чисел равняться нулю?

Ответ:

Решение. Произведение всех чисел — четвертая степень произведения всех чисел в вершинах — четно, поэтому не может быть по 7 чисел каждого вида. ■

Задача 2.2. Квадрат 1000×1000 несколькими прямыми, параллельными его сторонам, разбит на прямоугольники. Каждый из прямоугольников состоит из клеточек 1×1, которые покрасили в шахматном порядке. Докажите, что количество черных клеточек 1×1 четно.

Решение. Количество черных клеток на каждой горизонтали одной четности. ■

Задача 2.3. На турнир приехал 101 человек. Известно, что среди любых ста из них есть человек, знакомый со всеми остальными (из этих ста). Докажите, что найдется человек, который знаком со всеми остальными.

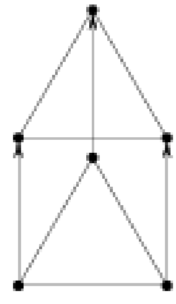
Решение. Если такого нет, то для любого А есть Б, который знаком со всеми, кроме А. Но тогда без Б со всеми должен быть знаком А. Участники разбиваются на пары. ■

Задача 2.4. В войске герцога Икторна 1000 гоблинов. Любые два гоблина либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Гоблины — существа малообщительные, разговаривают только с друзьями. К тому же все они в плохом настроении, поскольку у каждого гоблина любые два его друга враждуют, а любые два врага дружат. Докажите, что для того, чтобы все войско узнало о предстоящем наступлении на Данвин, герцог должен сообщить об этом не менее чем 200 гоблинам.

Решение. Заметим, что никто из гоблинов не имеет более двух друзей. Действительно, если какие-то двое дружат с одним и тем же гоблином, то они все враждуют между собой, что противоречит условию (двое, враждующие с третьим, должны дружить между собой). Отсюда следует, что любой гоблин вместе со своими друзьями, друзьями своих друзей и так далее, образует цепочку (возможно, циклическую), в которой первый дружит со вторым, второй — с третьим и так далее. Рассмотрим фрагмент такой цепочки из пяти гоблинов A, B, C, D, E. Так как A и C — друзья B, они должны враждовать между собой. Аналогично C и E враждуют между собой. Поэтому A и E дружат, поскольку оба являются врагами C. Итак, цепочка замкнулась, каждый из гоблинов имеет ровно двоих друзей в этой компании, и следовательно, ни с кем больше не дружит. Таким образом, длина цепочки друзей не может быть больше 5. Значит, один гоблин может передать новость (в том числе через других гоблинов) не более чем пятерым, считая его самого. Значит, если герцог сообщит о наступлении менее чем 200 гоблинам, то о нем узнают меньше чем $200 \cdot 5 = 1000$ гоблинов, то есть не все войско. ■

Задача 2.5. Отметьте на плоскости шесть точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой из них находилось ровно три из отмеченных.

Ответ: Нарисуем равносторонний треугольник со стороной 1 и сдвинем его "вверх" (или в любую другую сторону, только не под углом 60о к стороне) на 1 (см. рисунок). Вершины этих двух треугольников мы и отмечаем: они удовлетворяют условию задачи.



Решение. Догадаться до этого решения можно так. Сделаем из проволоки два равносторонних треугольника со стороной 1. Расположим их в пространстве один над другим на расстоянии 1 и соединим соответствующие вершины проволокой (получается так называемая треугольная призма). Теперь "аккуратно положим" этот проволочный каркас на плоскость. ■

Задача 2.6. Карлсону подарили пакет с конфетами: шоколадными и карамельками. За первые 10 минут Карлсон съел 20% всех конфет, причем 25% из них составляли карамельки. После этого Карлсон съел еще 3 шоколадные конфеты, и доля карамелек среди съеденных Карлсоном конфет понизилась до 20%. Сколько конфет было в подаренном Карлсону пакете?

Ответ: 60

Решение. В первой порции съеденных конфет шоколадных было в 3 раза больше, чем карамелек, а потом их стало в 4 раза больше. Значит, число дополнительно съеденных шоколадных конфет равно числу карамелек. Таким образом, в начале Карлсон съел 3 карамельки и 9 шоколадных конфет, и эти 12 конфет составляют 20% всех конфет. Следовательно, всего в пакете было 60 конфет. ■

Задача 2.7. Витя выложил из карточек пример на сложение (справа) и затем поменял местами две карточки. Как видите, равенство нарушилось. Какие карточки переставил Витя?

$$\begin{array}{r} 314159 \\ +\ 291828 \\ \hline \end{array}$$

Ответ: На картинке справа.

$$\begin{array}{r} 314159 \\ +\ 271828 \\ \hline 585987 \end{array}$$

Решение. Начнём проверять пример «справа налево». В разрядах единиц и десятков всё в порядке, а в разряде сотен появляется ошибка. Значит, одна из цифр этого разряда — 1, 8 или 7 — переставлена.
Если предположить, что Витя переставил две карточки "внутри" разряда сотен (единственный вариант — поменять местами 7 и 8), то ещё останется ошибка в разряде десятков тысяч. Значит, одна из цифр разряда сотен поменялась с цифрой более старшего разряда.

Чтобы восстановить равенство в разряде сотен, цифру 1 можно поменять только на 9. Цифра 9 в более старших разрядах есть только одна. Но если 1 и 9 поменять местами, то ещё сохранится ошибка в разряде десятков тысяч.

Цифру 8 можно поменять только на 6, но ни одной цифры 6 в примере нет.

Значит, остаётся единственная возможность — поменять цифру 7. Вместо неё надо поставить цифру 9. Она у нас (в более старших разрядах) только одна и, если их поменять местами, то получается верный пример. ■

Задача 2.8. 25 школьников стоят в ряд. Самый левый школьник выше самого правого. Докажите, что найдется школьник, у которого левый сосед выше правого.

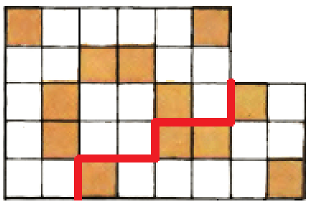
Решение. Предположим, что у каждого школьника (кроме крайних) правый сосед сосед не ниже левого. Пронумеруем школьников слева направо. Тогда третий школьник не ниже первого, пятый не ниже третьего, а значит, не ниже первого, и так далее. Таким образом, получается, что двадцать пятый школьник не ниже первого, что противоречит условию. ■

Дополнительные задачи

Задача 2.9. В клетках квадратной таблицы расставлены 10×10 расставлены 0 и 1, причем известно, что из любых четырех строчек таблицы какие-то две совпадают. Докажите, что в таблице есть какие-то два одинаковых столбца.

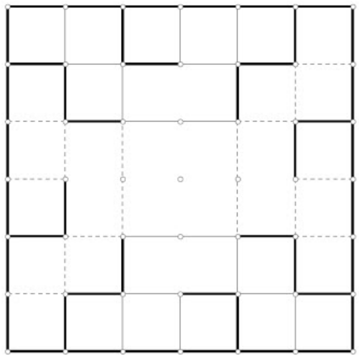
Решение. В таблице имеются строки не более чем трех видов, поэтому можно считать, что мы имеем дело с таблицей 3x10. Существует лишь 8 способов расставить 0 и 1 в столбце из 3 клеток. Поэтому в уменьшенной, а значит и в исходной, таблице найдутся 2 одинаковых столбца. ■

Задача 2.10. Разрезав фигуру, изображённую на рисунке, на две части, сложите из них квадрат так, чтобы цветные квадратики были симметричны относительно всех осей симметрии квадрата.



Ответ: Ответ показан на рисунке справа.

Задача 2.11. Есть лист жести размером 6×6. Разрешается надрезать его, но так, чтобы он не распадался на части, и сгибать. Как сделать куб с ребром 2, разделённый перегородками на единичные кубики?



Ответ: Искомая развертка изображена на рисунке. Жирные линии обозначают разрезы, тонкие и пунктирные — сгибы вверх и вниз. Центральный квадрат 2?2 соответствует горизонтальной перегородке куба.

Задача 2.12. На шахматной доске стоит восемь ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что число ладей, стоящих на черных клетках, четно.

Решение. Введём систему координат. Черные клетки имеют сумму координат одной четности, а белые — разной. Сумма занятых координат равна $2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 8)$, то есть является чётным числом. Значит, количество ладей с нечётной суммой координат чётно, а значит, и с нечётной тоже чётно. ■
