Задача 7.1. Можно ли 7 Чебурашкам раздать 28 шариков так, чтобы **а)** каждому Чебурашке досталось нечётное число шариков? **б)** всем Чебурашкам досталось попарно различное число шариков (и не меньше одного шарика)?

Ответ: **а**) нельзя; **б**) можно

Решение. **а**) Чебурашек нечётное число, если им раздать по нечётному числу шариков, то в сумме может получиться только нечётное число. А 28 — число чётное. **б**) $1+2+3+4+5+6+7=28$ ■

Задача 7.2. Четверо школьников: Аня, Боря, Вася и Галя — получили оценки за контрольную работу по математике. Оценку ниже тройки никто не получил. О своих оценках они сказали так:

Аня: Галя получила не тройку.

Боря: Половина из нас получила пятерки.

Вася: Я получил оценку лучше, чем Галя.

Галя: Оценки мальчиков отличаются не более, чем на один балл.

Известно, что три из этих сообщений были верными и одно неверным, причем неверную информацию предоставил единственный троечник. Кто какую оценку получил?

Ответ: Аня — 5, Боря — 4, Вася — 3, Галя — 5

Решение. Если Аня соврала, то получается, что соврали двое. Поэтому делаем вывод, что Аня и Галя сказали правду. Значит, получил тройку и соврал кто-то из мальчиков.

Если Вася сказал правду, то у него может быть только 5. Но Галя сказала, что оценки мальчиков отличаются не более, чем на один балл, тогда у Бори должно быть 4, и 3 не получил никто. Следовательно, Вася врёт, у него оценка 3, а у Бори 4.

Боря сказал правду, следовательно, Аня и Галя получили по 5. ■

Задача 7.3. Костя за минуту успевает вырезать 3 кружочка. **а)** Сколько времени ему нужно, чтобы вырезать 18 кружочков? После этого к нему присоединился младший брат, который за минуту успевает уничтожить 5 кружочков. **б)** Сколько времени потребуется Мише, чтобы уничтожить все целые кружочки, если Костя продолжает вырезать кружочки с прежней скоростью?

Ответ: **а**) 6 минут; **б**) 9 минут

Решение. **а**) $18:3=6$ минут. **б**) За 1 минуту Костя вырезает 3 кружочка, а Миша уничтожает 5, в итоге число кружочков уменьшается на 2. $18:2=9$ минут. ■

Задача 7.4. Покажите, как разрезать фигуру, изображённую на рисунке слева, на две равные части и сложить из этих частей фигуру, изображённую на рисунке справа.

Решение.

Для начала, вспомним, как решать такие задачи. Они решаются очень просто — сначала делается предположение, затем делается перебор, точнее даже подбор, пока не получится решение. Ещё полезно заметить какую-нибудь особенность, она обычно помогает решить задачу.

Однако, на словах всё просто, а на деле оказывается гораздо сложнее. Потому что предположение нужно сделать так, чтобы из него всё хорошо получалось, перебор нужно выполнить так, чтобы затратить на него чуть меньше, чем вечность. Да ещё попробуй поищи эту самую особенность. Что это вообще такое?

Поэтому, для успешного решения задач подобного типа необходимо нарешать их в достаточном количестве, чтобы ответы на все эти вопросы были очевидны даже если их не в состоянии сформулировать.

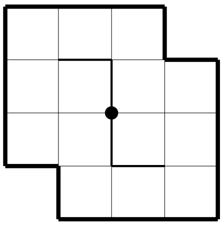
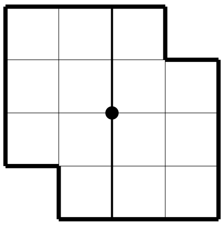
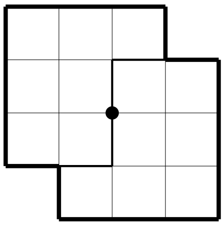
Итак, решение!

Для начала, решение переборное.

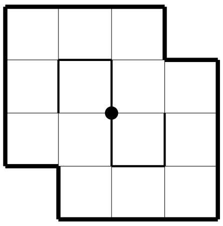
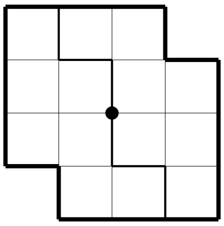
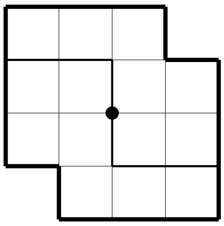
Начнём с предположения, которое, к нашему вящему удивлению, приведёт-таки нас к решению. Заметим, что если в центр исходной фигуры вбить гвоздик, и повернуть нашу фигуру, то фигура в некоторый момент до того, как мы сделаем полный оборот совпадёт со своим исходным положением. Так вот, наше предположение будет состоять в том, что *центр фигуры лежит на границе,* по которой мы будем делать разрез. Более того, части, на которые мы разрежем фигуру, также будут совпадать при таком повороте, но условно левая будет совмещаться с условно правой и наоборот.

Ещё одно предположение будет состоять в том, что можно решить эту задачу, делая разрезы по границам клеток. Этого в условии не сказано, но нам так удобнее будет делать перебор. Вообще, когда мы делаем предположения, главное, чего нам нужно добиться — это удобства. А вот на вопрос, что такое это самое «удобство» мы отвечать не будем.

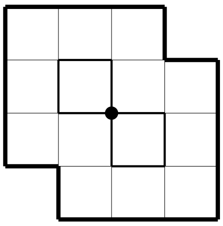
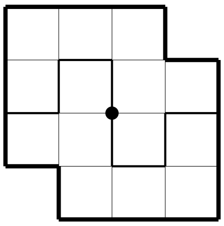
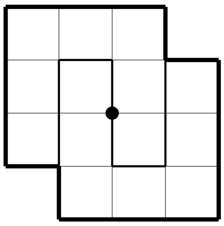
Рассмотрим нашу исходную фигуру и точку, которую мы считаем частью границы. Понятно, что исходя из второго предположение, граница от нашей точки может идти либо вверх и вниз, либо влево и вправо. Посмотрим, что будет с вертикальным вариантом. Из него возможны три варианта — граница после этого пойдёт из верхней точки влево, вверх или вправо. Для нижней точки всё должно быть аналогично — симметрично.

Последние два варианта очевидно являются законченным разрезанием, причём достаточно очевидно, что как ни составляй полученные части, требуемого ответа мы не получим. Осталось разобраться с первым вариантом. Из него вытекают также три варианта.

Последние два случая также превращаются в законченные разрезания и также не являются решением путём несложного перебора. А первый снова даёт три варианта.

Очевидно, что первый из них — это разрезание на все три части, последний не приводит к решению путём перебора или догадки. А вот из центрального варианта решение получается.

Решение получилось. Однако, хочется обратить внимание на один факт — мы сделали почти полный перебор. Почему «почти»? Потому что мы рассмотрели только случай вертикальной границы, проходящей через отмеченную точку. А случай горизонтальной — не рассмотрели. Но надо ли? Можно заметить, что если мы говорим о решении задачи на клетчатой бумаге, то перевернув наш листок и слегка его повернув, мы получим, что случай горизонтальной и вертикальной границ в сущности одно и то же.

Вот теперь у нас полный перебор. А что, если бы в результате этого полного перебора не получилось бы найти решение? Что из этого следовало бы?

Здесь нужно сначала дождаться, пока из детей родится словосочетание «предположение неверно», а потом обсудить с ними, какое предположение. Полезно попросить их сформулировать. Разумеется, своими словами — проблема в том, что половина детей не вспомнит ни одного предположения. А вторая не сможет разобраться с тем, какое неверно. Можно также после выяснения количества предположений написать их на доске и предложить детям подумать пол минутки, какое из них должно быть неверно.

Кроме того, можно рассмотреть ещё и более теоретическое решение.

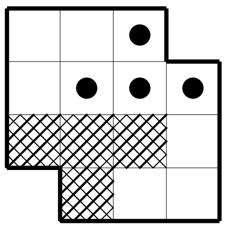
На этот раз, предположение будет состоять только в том, что можно решить эту задачу, делая разрезы по границам клеток.

Далее, пойдём не по порядку — посмотрим на особенности. Особенность мы будем искать на фигуре, которую нам нужно будет получить. Тогда, с учётом второго предположения про разрезы по границам клеток, особенность видно невооружённым глазом — она торчит вверх и вниз. Тогда очевидно, что эти торчащие отростки должны принадлежать разным фигурам.

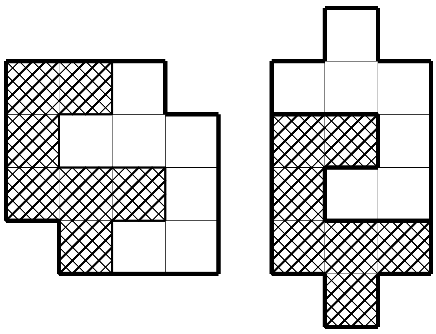
Заметим также, что «высота» исходной фигуры соответствует четырём клеткам, а «высота» конечной — шести. Значит, слой клеток (ряд), прилегающий к отростку, принадлежит той же части, что и отросток. Потому что иначе «высота» части это нарушающей была бы равна как минимум пяти. А «высота» части не может быть больше «высоты» фигуры, частью которой является эта часть.

Кроме того, второй особенностью найденной нами особенности является то, что часть нашей исходной фигуры будет иметь своеобразный «вогнутый» угол. Даже два. А на нашей исходной фигуре такой «вогнутый» угол тоже есть. Тогда сделаем ещё одно предположение: *А пускай эти «вогнутые» фигуры совпадают.* Опять-таки, нам же так удобнее.

Тогда мы получаем предварительный итог:



А в этом случае ответ догадывается очевидным образом.



■

Задача 7.5. Известно, что 3 шалтая, 3 болтая и 3 тянитолкая весят столько же, сколько 2 шалтая, 5 болтаев и 2 тянитолкая. Кроме того, тянитолкай тяжелее шалтая. Кто тяжелее: болтай или тянитолкай?

Ответ: тянитолкай тяжелее болтая

Решение. Посадим всех шалтаев, болтаев и тянитолкаев на чашечные весы. Если с каждой стороны убрать по 2 шалтая, 3 болтая и 2 тянитолкая, то на уравновешенных весах останутся 2 болтая с одной стороны, шалтай и тянитолкай — с другой. Поскольку тянитолкай тяжелее шалтая, то его вес будет больше половины веса их обоих вместе. Но половина веса — это один болтай. Следовательно, тянитолкай тяжелее болтая. ■

Задача 7.6. Можно ли поставить в клетках таблицы **а)** 4×4 **б)** 5×5 натуральные числа так, чтобы в каждой строке сумма чисел была нечётна, а в каждом столбце — чётна?

Ответ: **а**) можно; **б**) нельзя

2	2	1	2
2	2	1	2
2	2	1	2
2	2	1	2

Решение. **а**) Достаточно один столбец заполнить нечётными числами, а остальные — чётными, например, так, как на рисунке справа.

б) Допустим, нам удалось выполнить поставленное в задаче условие. Если сложить числа во всех столбцах, получится сумма 5 чётных чисел — число чётное. Если сложить числа во всех строках, получится сумма 5 нечётных чисел — число нечётное. Приходим к противоречию. ■

Задача 7.7. Соседка принесла для хозяйки и двух её сыновей корзину яблок. Когда пришёл из школы младший сын, он взял треть яблок, одно яблоко вернул в корзину для матери и пошёл на занятия кружка. Потом вернулся из школы старший сын. Не зная о поступке брата, он также взял треть оставшихся яблок, а одно яблоко положил в корзину для матери и отправился на тренировку. Когда хозяйка вернулась домой с работы, то она не смогла

разделить яблоки в корзине на три равные части, причём их было меньше десяти. Сколько яблок первоначально было в корзине?

Ответ: 12 яблок

Решение. Когда старший сын взял из корзины треть яблок, там осталось чётное число яблок ($\frac{2}{3}$ от целого). Когда он добавил 1 яблоко, получилось нечётное число, не кратное 3. 3 и 9 не подходят, остаются два варианта — 5 и 7.

После того, как младший брат взял из корзины свою треть, но ещё не вернул туда яблоко, там могло быть $(5-1):2\cdot 3-1=5$ яблок или $(7-1):2\cdot 3-1=8$ яблок.

Поскольку младший брат взял треть, значит, осталось две трети — число чётное. Первый случай не подходит. В корзине было $8:2\cdot 3=12$ яблок.

■

Задача 7.8. Имеется кран, в котором достаточно много воды, и раковина, куда можно сливать лишнюю воду. Можно ли с помощью **а)** 7-литровой банки и 11-литровой банки **б)** 6-литровой банки и 9-литровой банки набрать из крана ровно 2 литра воды ?

Ответ: **а**) можно; **б**) нельзя

Решение. **а**) Наливаем из крана полную 11-литровую банку и переливаем из неё 7 л в 7-литровую. Остаётся 4 л. Переливаем их в 7-литровую, вылив предварительно из неё воду в раковину. Опять наливаем полную 11 литровую и переливаем в 7-литровую 3 л. Остаётся 8 л. Переливаем ещё 7 л, остаётся 1 л, который переливаем в 7-литровую, предварительно вылив из неё всю воду. Дальнейшие шаги можно проследить по таблице:

11-литровая банка	11	4	11	8	1	11	5	11	9	2
7-литровая банка	0	7	4	7	7	1	7	5	7	7

б) Если у нас есть 6-литровая банка и 9-литровая, то при любых переливаниях мы будем получать количества, кратные 3 л. Следовательно, 2 л получить не удастся. ■

Дополнительные задачи

Задача 7.9. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

Ответ: нельзя

Решение. Предположим, что можно разложить гирьки в соответствии с условием задачи. Сумма масс всех гирек равна 5050 г. Значит, масса самой тяжёлой кучки не меньше, чем $5050:10=505$. Так как в наборе нет гирек массы больше 100 г, то в этой кучке не меньше 6 гирек. Значит, общее количество гирек не меньше, чем $6+7+8+\ldots+15=105>100$. Получаем противоречие. ■

Задача 7.10. В ряд стояло 10 детей. В сумме у девочек и у мальчиков орехов было поровну. Каждый ребёнок отдал по ореху каждому из стоящих правее его. После этого у девочек стало на 25 орехов больше, чем было. Сколько в ряду девочек?

Ответ: 5 девочек

Решение. Первый слева ребёнок отдал 9 орехов, то есть у него стало на 9 орехов меньше, второй ребёнок отдал 8 орехов, а получил 1, то есть у него стало на 7 орехов меньше. Продолжая аналогичные рассуждения, заметим, что у первых пяти детей стало меньше на 9, 7, 5, 3 и 1 орехов соответственно, а у следующих пяти – больше на 1, 3, 5, 7 и 9 орехов соответственно. Так как $1+3+5+7+9=25$, то девочками могли быть только последние пять детей. ■

Задача 7.11. По прямой в одном направлении на некотором расстоянии друг от друга движутся пять одинаковых шариков, а навстречу им движутся пять других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдёт между шариками?

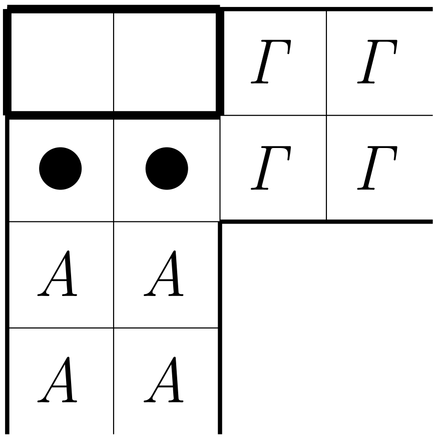
Ответ: 25 столкновений

Решение. После столкновения шарики разлетаются с той же скоростью, поэтому ситуация не изменится, если мы разрешим шарикам при столкновении проскакивать друг сквозь друга, сохраняя скорость. Тогда каждый шарик, катящийся "справа", встретит по одному разу каждый из шариков, катящихся "слева", то есть встреч будет 25. ■

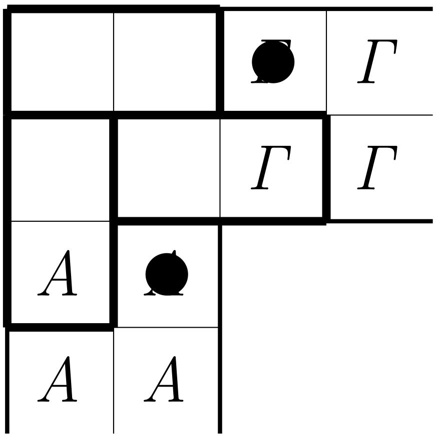
Задача 7.12. Толя и Саша, сыграв партию в домино, выложили все косточки. У них получилась прямоугольная рамка. Очки заменены в этой рамке буквами (пустые клетки — это «нулевые» очки). На рисунке показано, как расположены косточки в вершинах рамки (они закрашены). Положения остальных косточек неизвестны, но известно, что суммы очков по горизонтальным и вертикальным сторонам рамки все одинаковы. Восстановите расположение косточек.

Решение.

Для начала, обратим внимание на левый верхний угол таблички.



И посмотрим на выделенные клетки. Очевидно, что две отмеченные клетки не могут составлять одну косточку, потому что тогда получится повторение «дубля пустышки». Значит, левая отмеченная клетка является частью вертикальной доминошки. Но тогда правая — частью горизонтальной, поскольку иначе эти две вертикальные доминошки совпадут. Получаем новый рисунок.



Здесь уже без относительно значений клеток однозначным образом выстраиваются доминошки на отмеченных клетках.

Действуя аналогичным образом, получаем решение.

		Г	Г	В	В		Д	Е	Е
		Г	Г	В	В		Д	Е	Е
А	А							Г	Г
А	А							А	А
Д	Д							Б	Б
Г	Г							В	В
Б	Б		Е	В	А	Е	Б	Д	Д
Б	Б		Е	В	А	Е	Б	Д	Д

Осталось разобраться только с тем, какая буква какому количеству точек соответствует.

Для начала, выпишем выражения для суммы вдоль каждой границы.

Левая вертикаль: $2 \cdot А + 2 \cdot Б + Г + Д$;

Верхняя горизонталь: $2 \cdot Г + 2 \cdot В + Д + 2 \cdot Е$;

Правая вертикаль: $2 \cdot Е + Г + А + Б + В + 2 \cdot Д$;

Нижняя горизонталь: $2 \cdot Д + 2 \cdot Е + А + В + 3 \cdot Б$.

Поскольку мы знаем, что эти суммы равны между собой, то можно сделать выводы:

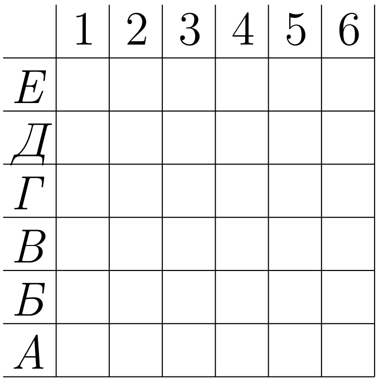
Из последних двух выражений: $Г = 2 \cdot Б$.

Из второго и третьего: $Б + В = А + Д$.

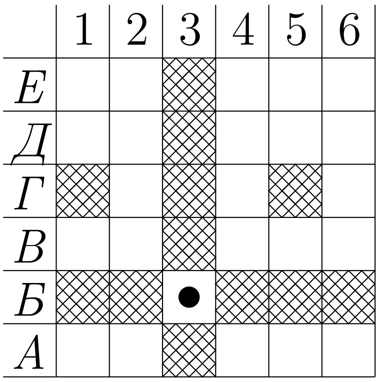
Из первых двух: $А = В + Е$.

И из двух самых последних: $Б = Е + Д$.

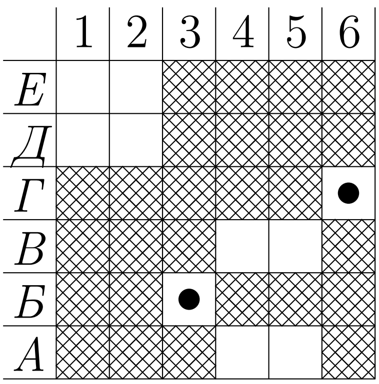
Тогда нарисуем таблицу и начнём её заполнять.



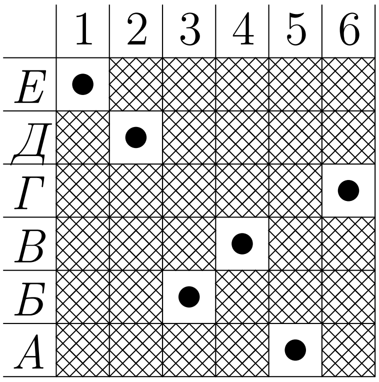
Поскольку $Г = 2 \cdot Б$, понятно, что $Г$ чётное, а $Б$ не больше трёх. С другой стороны, поскольку $Б = Е + Д$, то $Б$ не меньше трёх.



Но тогда понятно, что $Г = 6$, а $Д$ и $Е$ соответствуют единице и двойке.



Тогда можно заметить, что $А$ и $В$ различаются на единицу. Но мы уже знаем, что $А = В + Е$. Отсюда получаем итоговое решение.


1 2 3 4 5 6
Е
Д
Г
В
Б
А

■