Задача 9.1. Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но все же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

Ответ: 21 конфета

Решение. Выберем из детей одного – к примеру, Петю. Если из всех остальных конфет забрать 7, останется столько же, сколько у Пети. Поэтому удвоенное число конфет Пети равно общему числу конфет без семи. То же можно сказать про любого из детей, значит, у всех детей конфет поровну – скажем, по одной кучке. Ясно, что каждый съел на целое число кучек меньше остальных вместе. Поэтому 7 делится на размер кучки. Значит (так как по условию каждый съел больше одной конфеты), в кучках по 7 конфет, то есть каждый съел на кучку меньше, чем все остальные. Петя съел одну кучку, следовательно, остальные – две. Значит, всего кучек три, а конфет – 21. ■

Задача 9.2. Из двузначного числа, умноженного на однозначное, вычли однозначное и получили 1. Какие это были числа?

Ответ: 10, 1 и 9 в том же порядке.

Решение. После перемножения двузначного и однозначного числа, мы не можем получить меньше 10. А однозначное число не может быть больше 9. $10-9=1$. Если уменьшаемое будет больше 10, то разница будет больше 1. Если вычитаемое будет меньше 9, то разница будет больше 1. Значит, произведение первых двух чисел из условия равно 10, а последнее число из условия — 9. Произведение однозначного и двузначного может быть равно 10 только когда это числа 1 и 10. При увеличении любого из них произведение увеличится.
Примечание. Отдельного внимания, возможно, заслуживает случай, первое однозначное число — 0. Но в этом случае произведение будет равно 0, а разность будет меньше уменьшаемого, то есть, меньше 0. Чего не может быть, поскольку разность равна 1. ■

Задача 9.3. На пальме сидело много мартышек. Вдруг 20 из них получили по пинку. Пнутая мартышка срывает с пальмы 3 финика и раздает подружкам. Мартышка, получившая 2 финика, съедает их и пинает другую мартышку. После того как произошло 30 новых пинков, мартышки успокоились. Сколько фиников осталось у мартышек?

Ответ: 90 фиников.

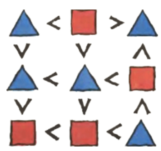
Решение. Пнутая мартышка срывает три финика. Таким образом, было сорвано $3*(20+30)=150$ фиников. Новый пинок делает мартышка, съевшая 2 финика. Новых было 30, значит мартышки съели $2*30=60$ фиников. Итого, было сорвано 150 фиников и из них съедено 60 фиников. Значит, осталось $150-60=90$ фиников. ■

Задача 9.4. В чемпионате мира среди профессионалов по крестикам-ноликам на бесконечной клетчатой доске участвовали 10 игроков. Проигравший партию, потеряв надежду на главный приз, уезжал с чемпионата. Какое максимальное число участников могло выиграть по две партии?

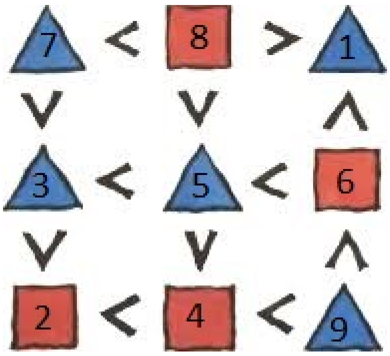
Ответ: Четверо.

Решение. Заметим, что каждая партия заканчивается отъездом одного из участников, поэтому чемпион определяется ровно за 9 партий. Если игроков, одержавших победу два раза, будет 5 или больше, то отъехавших после этих побед игроков будет не менее $5\cdot 2=10$ человек, что больше 9. Значит, это невозможно. Осталось только привести пример, когда могли ровно четыре игрока одержать победу в двух партиях каждый.
Пример. Пётр выиграл у Виктора и Тимофея, Чарльз — у Петра и Павла, Шоди — у Чарльза и Станислава, Василий — у Шоди и Дмитрия, Даниил — у Василия. ■

Задача 9.5. В треугольники и квадраты, изображённые на рисунке, впишите первые девять натуральных чисел, причём в треугольники — нечётные числа, а в квадраты — чётные числа



так, чтобы все двенадцать соотношений «больше-меньше» были верными.

Ответ: 

Решение. Заметим, что число «9» — самое большое, ничего не может быть больше него. Аналогично, 1 — самое маленькое. Соответственно, очевидно, где они могут стоять. Из оставшихся нечётных больше центрального два чётных числа, больше левого верхнего — только одно. А последнее меньше всех оставшихся нечётных. Так мы получаем, где может находиться тройка. Больше семёрки может быть только одно чётное число, поэтому в центре стоит пятёрка, а семёрка — на последнем свободном месте для нечётного числа. Теперь — чётные числа. Одно должно быть больше семёрки, а другое меньше тройки. Это восьмёрка и двойка соответственно. Из оставшихся одно больше пятёрки, а другое — меньше. Это шестёрка и четвёрка соответственно. ■

Задача 9.6. Кузнецу принесли 5 обрывков цепи, по 3 звена в каждом. Какое минимальное число звеньев нужно разъединить, а затем вновь соединить, чтобы все обрывки образовали одну цепь?

Ответ: Три звена.

Решение.
Пример. Разъединяем все три звена первой цепи. После этого, соединяем вторую и третью цепи первым кольцом первой цепи, третью и четвёртую вторым кольцом первой цепи, четвёртую и пятую третьим кольцом первой цепи.
Оценка. Предположим, получилось обойтись меньшим количеством звеньев. То есть, мы разъединили либо одно, либо два звена. Тогда в каждом из пяти обрывков осталось хотя бы по одному целому звену. Тогда мы имеем пять кусков, которые нужно соединить. Соединять мы можем только разъединёнными звеньями. Значит, нам нужно не менее четырёх разъединённых звеньев. Тогда ничего не получится. ■

Задача 9.7. В клеточки рисунка впишите все десять цифр так, чтобы по горизонталям получились четыре квадрата натуральных чисел. Сколько существует способов это сделать?

Ответ:

9	9	9	1
8 1	1 6	8 1	3 6
5 7 6	7 8 4	3 2 4	7 8 4
2 3 0 4	3 0 2 5	7 0 5 6	9 0 2 5

Решение. Для начала, выпишем квадраты чисел от 1 до 10000. Их 99, к сожалению, но это нужно сделать. Далее, обратим внимание, что ноль может быть только в четырёхзначном числе. А семёрка — либо в трёхзначном, либо в четырёхзначном.
Четырёхзначные числа, содержащие ноль: 1024, 1089, 1600, 2025, 2209, 2304, 2401, 2500, 2601, 2704, 2809, 3025, 3600, 4096, 4900, 5041, 6084, 6400, 7056, 8100, 9025, 9409, 9604, 9801. Однако, нам подходят только числа без повторяющихся цифр. Вот они: 1024, 1089, 2304, 2401, 2601, 2704, 2809, 3025, 4096, 5041, 6084, 7056, 9025, 9409, 9604, 9801. Рассмотрим сначала числа, не содержащие семёрку и посмотрим, какие из них могут стоять в нашей табличке.
Для этого, посмотрим, какие трёхзначные числа содержат семёрку. Это 576, 729 и 784.

Четырёхзначное число	Совпадающие цифры		
	576	729	784
1024	НЕТ	есть	есть
1089	НЕТ	есть	есть
2304	НЕТ	есть	есть
2401	есть	есть	есть
2601	есть	есть	НЕТ
2809	НЕТ	есть	есть
3025	есть	есть	НЕТ
4096	есть	есть	есть
5041	есть	НЕТ	есть
6084	есть	НЕТ	есть
9025	есть	есть	НЕТ
9801	НЕТ	есть	есть

Как можно заметить, для каждого случая вариант либо один, либо его нет совсем. Тогда посмотрим, какие остались цифры в каждом случае и какие возможны варианты первых двух строчек.

Четырёхзначное число	Трёхзначное число	Оставшиеся цифры	Варианты квадратов
1024	576	3, 8, 9	НЕТ
1089	576	2, 3, 4	НЕТ
2304	576	1, 8, 9	81 и 9
2601	784	3, 5, 9	НЕТ
2809	576	1, 3, 4	НЕТ
3025	784	1, 6, 9	16 и 9
5041	729	3, 6, 8	НЕТ
6084	729	1, 3, 5	НЕТ
9025	784	1, 3, 6	36 и 1
9801	576	2, 3, 4	НЕТ

Осталось разобраться с отложенными 2704 и 7056. Для этого выпишем все трёхзначные квадраты без совпадающих цифр и без семёрок и посмотрим, с какими из них могут сочетаться наши.

Трёхзначное число	Совпадения	
	2704	7056
169	НЕТ	есть
196	НЕТ	есть
256	есть	есть
289	есть	НЕТ
324	есть	НЕТ
361	НЕТ	есть
529	есть	есть
625	есть	есть
841	есть	НЕТ
961	НЕТ	есть

Тогда рассмотрим полученные возможности.

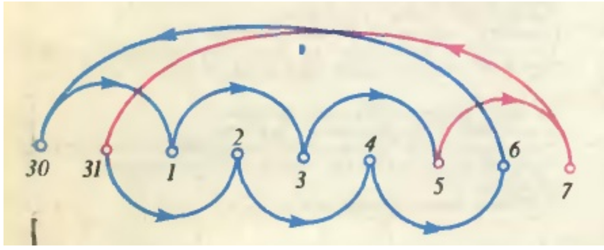
Четырёхзначное число	Трёхзначное число	Оставшиеся цифры	Варианты квадратов
2704	169	3, 5, 8	НЕТ
2704	196	3, 5, 8	НЕТ
2704	361	5, 8, 9	НЕТ
2704	961	3, 5, 8	НЕТ
7056	289	1, 3, 4	НЕТ
7056	324	1, 6, 9	16 и 9
7056	841	2, 3, 9	НЕТ

Отсюда получаем четыре возможных решения. Причём, поскольку перебор был достаточно полным, мы можем сделать вывод, что мы получили все возможные решения. ■

Задача 9.8. Вот уже много лет барон Мюнхгаузен ежедневно ходит к озеру охотиться на уток. Начиная с 1 августа 2018 года он каждый день говорит своему повару: «Сегодня я подбил уток больше, чем два дня назад, но меньше, чем неделю назад». Какое наибольшее число дней барон может произносить эту фразу? (Не забывайте, что Мюнхгаузен никогда не лжёт.)

Ответ: 6 дней.

Решение. Чтобы показать, что семи дней не может быть, нанесём на прямой точки, соответствующие рассматриваемым дням, и соединим стрелочками те дни, про которые известно, что в один из этих дней (оттуда стрелочка выходит) Мюнхгаузен убил меньше уток, чем в другой (туда стрелочка приходит). Поскольку цепочка замкнулась, то предположение о том, что Мюнхгаузен мог говорить свою фразу семь дней, привело к противоречию.



Если рассмотреть лишь шесть дней, то легко построить пример результатов охоты, удовлетворяющий условиям задачи: 31 июля была убита одна утка, 2 августа — две, 4 августа — три и так далее. На конец 5 августа — восемь, а во все дни, предшествующие 30 июля, Мюнхгаузен убивал, скажем, по 179 уток. ■

Задача 9.9. 16 богатырей сражались со Змеем Горынычем. В каждой схватке погибала половина живых богатырей, но каждый богатырь в каждой схватке срубал по голове у Змея, даже если потом погибал. Между схватками на каждые две живые головы появлялась третья. Так продолжалась до тех пор, пока в живых не остался один Илья Муромец, он-то и одолел Змея Горыныча. Сколько голов у змея было вначале?

Ответ: 24 головы.

Решение. Заметим, что поскольку богатырей было 16 и в каждой схватке погибала половина богатырей, то схваток было пять и богатырей в них было 16, 8, 4, 2 и 1. Решая задачу методом анализа с конца, получим: В последней схватке погибла одна голова и была одна голова. Значит, перед этой схваткой новых голов не вырастало. В четвёртой схватке погибло две головы. Значит, перед этой схваткой было три головы. Но три головы оставаться после третьей схватки не могло, поскольку тогда успела бы вырасти ещё одна. Значит, после третьей схватки осталось две головы, а третья выросла в перерыве. Тогда перед третьей схваткой было 6 голов. Аналогично, после второй схватки осталось 4 головы, а перед ней было 12. После первой схватки было 8 голов, а перед ней было 24. ■

Задача 9.10. В трёх ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на 10 меньше, чем в первом и третьем вместе. Сколько орехов в третьем ящике?

Ответ: 8 орехов.

Решение. Соединим оба условия и получим следующее утверждение: «В первом и втором ящиках орехов на $6 + 10 = 16$ меньше, чем в первом, втором и двух третьих». Отсюда следует, что в двух третьих ящиках 16 орехов. Значит, в третьем 8 орехов. ■

Задача 9.11. Был жаркий день, и четыре супружеские пары, гуляя, выпили в течение дня 44 стакана лимонада. Анна выпила 2 стакана, Мария — 3,Софья — 4, Дарья — 5. Андреев выпил столько же, сколько и его жена; Борисов выпил стаканов вдвое больше, чем его жена; Васильев — втрое больше своей жены, а Груздев выпил стаканов лимонада в четыре раза больше, чем его жена. Кто на ком женат?

Ответ: Груздев — муж Анны, Васильев — Марии, Борисов — Софьи и Андреев — Дарьи.

Решение. Составим таблицу, сколько выпили бы мужья, будь они женаты на каждой из девушек.

	Анна	Мария	Софья	Дарья
Андреев	2	3	4	5
Борисов	4	6	8	10
Васильев	6	9	12	15
Груздев	8	12	16	20

Заметим, что жёны выпили вместе $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ стаканов лимонада. Значит, мужья выпили вместе $44 - 14 = 30$ стаканов лимонада. На это и будем смотреть — нужно найти числа в разных строчках так, чтобы в сумме они составляли 30.

Предположим, что Груздев женат на Дарье. Тогда остальные выпили 10. Тогда Васильев выпил не 12, очевидно, и не 9 — варианта оставить один стакан на двоих у нас отсутствует. Но если Васильев выпил 6, то Борисов не меньше 6, а это уже даёт $20 + 6 + 6 = 32$ стакана, что слишком много.
Предположим, что на Дарье женат Васильев. Тогда он выпил 15 стаканов, но чтобы сумма была чётной, нужно чтобы Андреев выпил 3 стакана, поскольку других нечётных чисел не осталось. Тогда они выпили 18 стаканов вдвоём, и Борисову с Груздевым осталось на двоих 12 стаканов. Тогда Груздев выпил 8 чтобы Борисову хоть что-то осталось, но тогда Борисов должен пить тоже 8, поскольку на Марии уже женат Груздев. А тогда сумма $15 + 3 + 8 + 8 = 34$ опять слишком велика.
Предположим, что на Дарьи женат Борисов. Тогда он выпил 10 стаканов. Тогда на Софье женат Груздев, поскольку иначе сумма будет нечётной. Тогда они вместе выпили $12 + 10 = 22$ стакана. Тогда Андреев и Васильев вместе выпили либо $2 + 12 = 14$, либо $6 + 4 = 10$ стаканов. Но ни $22 + 14$, ни $22 + 10$ не дают нужной суммы.
Значит, на Дарье женат Андреев. Тогда Васильев женат на Софье из соображений чётности. Тогда они вместе выпили $5 + 9 = 14$ стаканов. Тогда Борисов и Груздев вместе выпили $8 + 8 = 16$ стаканов или $4 + 16 = 20$ стаканов. Но $14 + 20 \neq 30$, а вот $14 + 16 = 30$. Значит, Груздев женат на Анне, а Борисов — на Софье. ■

Задача 9.12. Раскрасьте клетки доски 7×7 в синий и красный цвета так, чтобы в любом квадрате 3×3 синих клеток было на одну больше, чем красных.

Решение. Чтобы условие выполнялось, нужно чтобы при сдвиге квадрата 3×3 на одну клетку по горизонтали или по вертикали цвета клеток, которые перестали принадлежать квадрату, совпадали бы с цветами новых клеток, принадлежащих квадрату. То есть, если занумеровать клетки цифрами, то на рисунке одинаковые цифры должны быть одинаковых цветов.

1	2	3	1	2	3	1
7	8	9	7	8	9	7
4	5	6	4	5	6	4
1	2	3	1	2	3	1
7	8	9	7	8	9	7
4	5	6	4	5	6	4
1	2	3	1	2	3	1

Осталось только придумать рисунок в квадрате 3×3, в котором будет 5 синих и 4 красных клетки. Это мы оставляем фантазии читателя, поскольку подойдёт любой такой рисунок.
■

Задача 9.13. Четыре юных филателиста Митя, Толя, Саша и Петя купили почтовые марки. Каждый из них покупал марки только одной страны, причём двое из них купили российские марки, один — болгарские, а один — чешские. Митя и Толя купили марки двух разных стран. Марки разных стран купили и Митя с Сашей, Петя с Сашей, Петя с Митей и Толя с Сашей. Кроме этого известно, что Митя купил не болгарские марки. Определите, марки каких стран купил каждый из них.

Ответ: Митя купил чешские, Саша — болгарские, а Толя и Петя — российские.

Решение. Из условия известно, что Митя не совпадает ни с Толей, ни с Сашей, ни с Петей. Значит, он купил не российские марки. И не болгарские, поскольку это сказано в условии тоже.
Опять же, из условия известно, что Саша не совпадает ни с Митей, ни с Толей, ни с Петей. Значит, он купил не российские марки. И не чешские, поскольку их купил Митя.
А дальше нет выбора, может быть только так, как сказано в условии. ■

Задача 9.14. В рамке 8×8 шириной в 2 клетки (см. рисунок) всего 48 клеточек. Сколько клеточек в рамке 254×254 шириной в 2 клетки?

Ответ: 2016 клеток.

Решение. Площадь рамки можно получить, если из площади квадрата 254×254 вычесть площадь внутреннего квадрата. Сторона внутреннего квадрата н 4 меньше стороны большого, поскольку это две толщины рамки. Значит, площадь рамки равна

$$254^2 - 250^2 = (254 - 250) \cdot (254 + 250) = 4 \cdot 504 = 2016.$$

■

Задача 9.15. Использовав каждую из цифр от 0 до 9 ровно по разу, запишите 5 ненулевых чисел так, чтобы каждое делилось на предыдущее.

Ответ: 1, 2, 4, 8, 975360.

Решение. Решений много.
Проще всего проверять делимость, когда числа записываются 1-2 цифрами. Последовательность 1, 2, 4, 8 прекрасно для этого подходит. Осталось построить последнее число так, чтобы оно делилось на 8. Имея цифры 6 и 0 их проще оставить в конце, причём в виде «60», а не «06», поскольку в этом случае делимость на 4 уже очевидна. Самое интересное, что остальные цифры могут стоять в любом порядке. ■

Задача 9.16. В первой строке таблицы записаны подряд все числа от 1 до 9. Заполните вторую строку этой таблицы теми же числами от 1 до 9 в каком-нибудь порядке так, чтобы сумма двух чисел в каждом столбце оказалась точным квадратом.

Ответ:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	6	5	4	3	9	1	7

Решение. Заполним таблицу по-другому. Будем снизу в строчках писать, какие могут получиться квадраты, указывая в скобках, сколько надо прибавлять.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4(3)	4(2)	4(1)						
9(8)	9(7)	9(6)	9(5)	9(4)	9(3)	9(2)	9(1)	
						16(9)	16(8)	16(7)

Тогда у девятки стоит семёрка. Тогда у двойки семёрка не стоит. Тогда у двойки стоит двойка. Тогда у семёрки двойка не стоит. Тогда у семёрки стоит девятка.
Также, тройка, четвёрка и пятёрка стоят соответственно у шестёрки, пятёрки и четвёрки.
Тогда у единицы не стоит тройка. Тогда у единицы стоит восьмёрка. Тогда у восьмёрки не стоит восьмёрка. Тогда у восьмёрки стоит единица. Тогда у тройки не стоит единица. Тогда у тройки стоит шестёрка. ■

Задача 9.17. Астролог считает год удачным, если сумма первой и третьей цифры в его номере равна сумме второй и четвёртой. Например, 2013 год был удачным. Сколько удачных лет в 3-м тысячелетии?

Ответ: 75.

Решение. Для подсчёта удачных лет, рассмотрим, какие суммы могут давать первая и третья цифры года. Первая всегда двойка. А третья может быть любой. Значит возможные суммы — от двух до одиннадцати. Теперь нужно понять, сколько способов представить каждую сумму в виде суммы двух цифр.
Рассмотрим некоторую сумму. В данном случае нас будут интересовать варианты с переменой мест слагаемых (например, 2013 и 2310 — разные года, хотя сумма 3 достигается там одним способом как $2+1$). Тогда первое слагаемое может быть любым от нуля до суммы. А второе слагаемое определяется по первому однозначно. Тогда к каждой сумме будет способов на единицу больше, чем сама сумма.
Тогда для подсчёта общего количества удачных лет, нужно сложить числа от 3 до 12. Это уже много раз проделывалось на занятиях, поэтому приводить эти подсчёты мы здесь не будем. ■

Задача 9.18. Какого числа какого месяца до наступления 2019 года останется 2018 часов?

Ответ: 8 октября.

Решение. Разделим 2018 на 24 с остатком. $2018 = 24 \cdot 84 + 12$. Значит, нам нужно найти день, когда до 2019 года останется больше 84 дней, но меньше 85. Это не декабрь. 84-31=53. Это не ноябрь. 53-30=23. Это октябрь. То есть, нас интересует день, когда до конца октября останется 23 дня с часами. 8 октября за момент до полуночи на 9 октября останется ровно 23 дня до конца октября. Значит, нас интересует день 8 октября. Полдень, если точнее. ■

Задача 9.19. Расставьте знаки действий и скобки, чтобы равенство стало верным:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 1\ 0 = 2018.$$

Ответ: Например, так: $1 + 23 \times 45 - 6 + 78 + 910 = 2018$.

Задача 9.20. Три брата вернулись с рыбалки. Мама спросила у каждого, сколько они вместе поймали рыб.

Вася сказал: “Больше десяти”, Петя: “Больше восемнадцати”, Коля: “Больше пятнадцати”. Сколько могло быть поймано рыб (укажите все возможности), если известно, что два брата сказали правду, а третий – неправду?

Ответ: 16, 17 или 18 рыб.

Решение. Известно, что неправду сказал только один брат. Если это был не Петя, то Петя сказал правду. Тогда рыб было больше 18, но не больше либо 10, либо 15. Такого быть не может. Значит, неправду сказал Петя.
Тогда заметим, что Васино утверждение выполняется при выполнении Колиного, которое тоже верно. Значит, рыб было больше 15. Но не больше 18 (**Внимание:** 18 не больше 18, а значит такое могло быть!) Значит, рыб было 16, 17 или 18. ■
