Задача 3.1. Дядька Черномор написал на листке число 20. Каждый из 33 богатырей стирал имеющееся на листке число и записывал вместо него число на единицу больше или меньше. Могло ли в итоге на листке оказаться число 10?

Ответ: нет

Решение. Если взять число на единицу больше или меньше, то чётность числа поменяется. То есть если проделать эту операцию с числом 20 чётное число раз, то результат будет чётный, а если нечётное число раз — то нечётный. После 33 изменений может получиться только нечётное число. ■

Задача 3.2. Ира, Витя и Коля взяли по порции всех сортов мороженого: фруктового, сливочного и шоколадного. Однако трёх порций каждому оказалось мало, и Ира взяла ещё порцию фруктового, Витя — сливочного, а Коля — шоколадного мороженого. Уходя, они уплатили: Ира — 70 коп., Витя — 80 коп., Коля — 90 коп. Сколько стоит порция каждого мороженого?

Ответ: Порция фруктового мороженого стоит 10 копеек, сливочного — 20 копеек, шоколадного — 30 копеек.

Решение. 1-й способ: Поскольку только последняя порция мороженого у всех была разная, из разницы в уплаченных деньгах можно сделать вывод, что сливочное мороженое на 10 копеек дороже фруктового, а шоколадное — на 20. Если из суммы, уплаченной Ирой, вычесть эту разницу $70-(10+20)=40$, останется стоимость четырёх порций фруктового мороженого. Следовательно, порция фруктового мороженого стоит $40:4=10$ копеек, сливочного — 20 копеек, шоколадного — 30 копеек.

2-й способ: Все дети вместе купили по 4 порции мороженого каждого вида и заплатили $70+80+90=240$ копеек. Следовательно, три порции мороженого всех видов стоят $240:4=60$ копеек. Значит, порция фруктового мороженого стоит $70-60=10$ копеек, сливочного $80-60=20$ копеек, шоколадного $90-60=30$ копеек. ■

Задача 3.3. В банке у Пети живут жуки и пауки. У жука 6 ног, у паука 8 ног. Петя утверждает, что у насекомых в его банке всего 48 ног. Сколько жуков и сколько пауков в Петином банке?

Ответ: 3 паука и 4 жука.

Решение. Поскольку в Петином банке есть хотя бы 1 паук, то максимальное число ног жуков $48-8=40$. Но 40 на 6 не делится. Если пауков два, то жукам остаётся $48-16=32$ ноги. При трёх пауках жукам достанется 24 ноги, и это число кратно 6. Других чисел, кратных 6, не получится. ■

Задача 3.4. Незнайка собрался взяться за ум. Для этого он решил задавать меньше глупых вопросов и больше умных. 15 октября он задал 1 умный вопрос и 17 глупых, а в каждый последующий день он задаёт на один умный вопрос больше и на один глупый вопрос меньше. **а)** Сколько дней он будет задавать глупые вопросы? **б)** Сколько вопросов Незнайка задавал каждый день? **в)** Сколько вопросов он задаст до конца октября? **г)** А сколько из них будут умными? глупыми?

Ответ: **а**)17 **б**)18 **в**)306 **г**)153

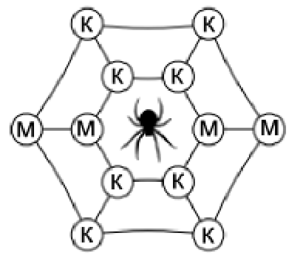
Решение. **а**)В первый день Незнайка задал 17 глупых вопросов, в 17-й — один. Всего 17 дней. **б**)Каждый день Незнайка задаёт на один глупый вопрос меньше и на один умный больше, так что число вопросов не меняется. **в**)До конца октября осталось $31 \;---15+1=17$ дней (так как надо посчитать ещё само 15 число, когда он начал задавать вопросы). $17\cdot 18=306$. **г**)Число глупых вопросов менялось от 17 до 1, а число умных — от 1 до 17. Поскольку Незнайка задал одинаковое число умных и глупых вопросов, то и тех, и других будет по $306:2=153$. ■

Задача 3.5. Папа и Миша все выходные пилили трехметровые и двухметровые бревна на меньшие, по полметра каждое. При этом было сделано 50 распилов. Двухметровых бревен было десять. Сколько всего было трехметровых бревен?

Ответ: 4 трёхметровых бревна

Решение. Чтобы распилить двухметровое бревно на брёвна по полметра каждое, нужно сделать 3 распила, а трёхметровое — 5 распилов. Поскольку двухметровых брёвен было 10, то, чтобы их все распилить, понадобилось $3 \cdot 10 = 30$ распилов. Оставшиеся 20 распилов соответствуют $20 : 5 = 4$ трёхметровым брёвнам. ■

Задача 3.6. Паук сплёл паутину, и во все её 12 узелков попалось по мухе или комару. При этом каждое насекомое оказалось соединено отрезком паутины ровно с двумя комарами. Нарисуйте пример, как это могло быть (написав внутри узелков буквы М и К).

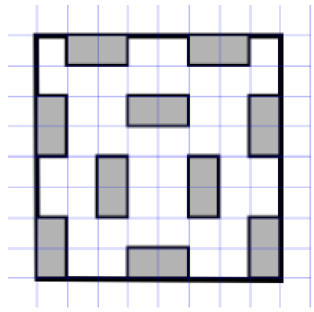


Ответ: На рисунке.

Задача 3.7. На острове живут два племени: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Путешественник встретил двух аборигенов. На его вопрос: «Вы — рыцарь?» первый из них буркает что-то неразборчивое. Второй абориген приходит на помощь: «Мой друг ответил «да». Но верить ему не стоит — он лжец». Что можно сказать про этих аборигенов?

Ответ: первый — лжец, второй — рыцарь

Решение. На вопрос «Вы — рыцарь?» и рыцарь, и лжец ответят «да». Следовательно, второй абориген говорит правду. Значит, его второе утверждение тоже правдиво, и первый — лжец. ■

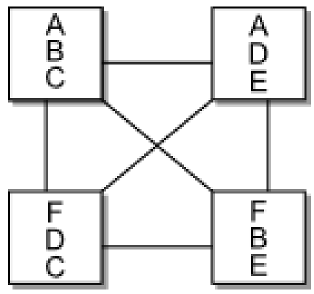


Задача 3.8. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

Ответ: на рисунке

Дополнительные задачи

Задача 3.9. Среди 4-х людей нет трех с одинаковым именем, одинаковым отчеством или одинаковой фамилией, но у любых двух людей совпадают либо имя, либо отчество, либо фамилия. Может ли так быть?



Ответ: на рисунке.

Решение. Нарисуем граф с четырьмя вершинами — людьми. От каждого к каждому проведём рёбра, соответствующие одному из совпадений. Поскольку из каждой вершины выходят по три ребра, у каждого получится по три совпадения — с одним по имени, с другим — по отчеству, с третьим — по фамилии. ■

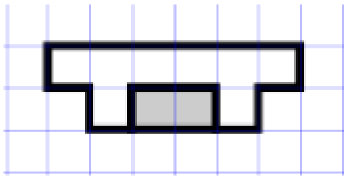
Задача 3.10. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй – 2, третий – 3 и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом?

Ответ: 10 человек

Решение. Если в кругу сидело N человек, то на втором круге каждый взял на N семечек больше, чем на первом. В сумме все взяли на втором круге на $N \cdot N$ емечек больше, чем на первом. Поскольку $N^2 = 100, N = 10$. ■

Задача 3.11. Оказывается, можно придумать фигуру, которую нельзя разрезать на "доминошки" (прямоугольники из двух клеток), но если к ней пририсовать доминошку – получившуюся фигуру уже можно будет разрезать на доминошки. Нарисуйте по клеточкам (по линиям сетки) такую фигуру (она не должна распадаться на части), пририсуйте к ней доминошку (заштрихуйте её) и покажите, как разрезать результат на доминошки.

Ответ: на рисунке ниже.



Задача 3.12. Есть 16 кубиков, каждая грань которых покрашена в белый, чёрный или красный цвет (различные кубики могут быть покрашены по-разному). Посмотрев на их раскраску, барон Мюнхгаузен сказал, что может так поставить их на стол, что будет виден только белый цвет, может поставить так, что будет виден только чёрный, а может и так, что будет виден только красный. Могут ли его слова быть правдой?

Ответ: Да, могут.

Решение. Выстроим кубики в виде параллелепипеда размером $4 \times 2 \times 2$. Заметим, что у четырёх верхних угловых кубиков видно по три грани, сходящихся в одной вершине, у четырёх нижних не угловых кубиков видно по одной грани, а у восьми оставшихся кубиков видно по две соседние грани.

Таким образом, кубики могут быть покрашены так: у четырёх кубиков – 3 белые грани с общей вершиной, 2 чёрные с общим ребром и одна красная; еще у четырёх кубиков – 3 чёрные грани с общей вершиной, 2 красные с общим ребром и одна белая; у следующих четырёх – 3 красные с общей вершиной, 2 белые с общим ребром и одна чёрная грань, а у оставшихся четырёх кубиков – по две грани каждого цвета с общим ребром. В этом случае для каждого цвета найдутся четыре кубика с тремя гранями, восемь кубиков с двумя гранями и четыре кубика с одной гранью этого цвета. Следовательно, их можно будет поставить на соответствующие места параллелепипеда, и слова Мюнхгаузена будут правдой. ■