Задача 6.1. На доску выписали 20 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 11 чисел делятся на 13, а 13 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 500.

Решение. От противного. Есть как минимум 4 числа, которые делятся и на 11, и на 13. Наибольшее из них не меньше $13 \cdot 11 \cdot 4 = 572 > 500$. ■

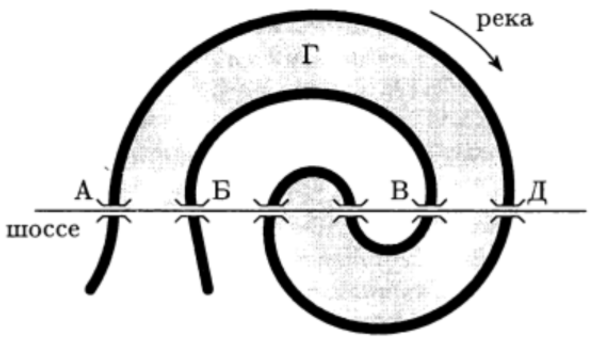
Задача 6.2. Утром в луже плавало 20 синих и 11 красных амеб. Иногда они сливались: если сливаются две красные, то получается одна синяя амеба, если сливаются две синие, то получившаяся амеба тут же делится и в итоге образуются 4 красные амебы, наконец, если сливаются синяя и красная амебы, то это приводит к появлению трех красных амеб. Вечером в луже оказалось 50 амеб. Сколько среди них синих?

Ответ: 1 синяя амеба.

Решение. Заметим, что после деления первого типа общее количество амеб уменьшается на 1, а количество синих амеб увеличивается на 1; после деления второго типа общее количество амеб увеличивается на 2, а количество синих амеб уменьшается на 2; после деления третьего типа общее количество амеб увеличивается на 1, а количество синих амеб уменьшается на 1. Другими словами, число синих амеб увеличивается настолько, насколько уменьшается общее количество амеб и наоборот. Число амеб увеличилось на 19, значит количество синих амеб уменьшилось на 19 и стало равным 20-19=1. ■

Задача 6.3. Река Меандровка, имеющая много излучин, пересекает прямолинейное шоссе под несколькими мостами. Обязательно ли найдутся два моста, соседние и по реке, и по шоссе? (Мосты называются соседними по реке, если на участке реки между ними нет других мостов; мосты называются соседними по шоссе, если на участке шоссе между ними нет других мостов. Других рек и дорог в этой местности нет.)

Ответ: Да, обязательно.



Решение. Рассмотрим все пары соседних по реке мостов и выберем из них пару с наименьшим расстоянием по шоссе между ними. Обозначим эти мосты через А и В. Докажем, что эти мосты являются соседними и по шоссе. Пусть это не так. Участок дороги от А до В и участок реки от А до В не пересекаются, так как мосты А и В соседние по реке. Значит, участок дороги от А до В и участок реки от А до В ограничивают некоторую область (на рисунке она выделена серым цветом). Обозначим эту область через Г. Если река не пересекает область Г в точках, отличных от А и В, то мосты А и В - соседние по шоссе, и все доказано.

Пусть река пересекает область Г в точках, отличных от А и В. Тогда таких точек пересечения четное число, а значит, хотя бы две. Рассмотрим две соседние по реке точки пересечения. Это какие-то два моста. Но расстояние между ними меньше, чем между мостами А и В, что противоречит выбору мостов А и В ! Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Задача 6.4. На фестивале камерной музыки собралось шесть музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?

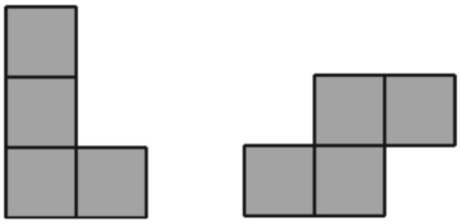
Ответ: 4

Решение. Пример прослушиваний: 1-й концерт: A, B, C; 2-й концерт: A, D, E; 3-й концерт: B, D, F; 4-й концерт: C, E, F.

Решение 1. Назовём музыкантов A, B, C, D, E и F. Пусть концертов три. Тогда в некотором концерте (скажем, в первом) играют не менее двух музыкантов. Пусть в нём играют, в частности, A и B. Допустим, что во время второго концерта A слушает B из зала, а во время третьего концерта B слушает A. Тогда музыканты C, D, E и F должны играть и во втором концерте, и в третьем, чтобы их могли услышать и A, и B, а одного первого концерта недостаточно, чтобы все они смогли послушать друг друга.

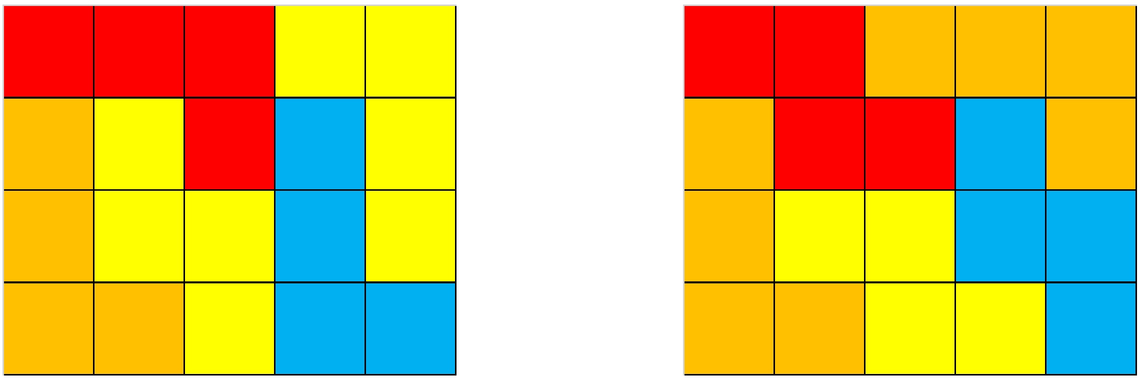
Решение 2. Всего упорядоченных пар музыкантов $6 \cdot 5 = 30$. Во время каждого прослушивания мы "проигрываем" некоторые упорядоченные пары. Все они должны быть "проиграны". Наибольшее количество упорядоченных пар, проигрываемых за раз, равно 9 (проверяется перебором: $1 \cdot 5 < 2 \cdot 4 < 3 \cdot 3$. Значит, нужно минимум 4 прослушивания. ■

Задача 6.5. Можно ли расставить числа в клетках прямоугольника 4×5 так, чтобы в каждой фигурке из четырёх клеток вида «L» сумма чисел была равна 6, а в каждой фигурке вида «S» сумма чисел была равна 7?



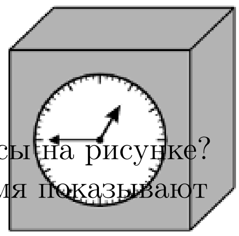
Ответ: Нет, нельзя.

Решение. От противного. Тогда если разрезать прямоугольник так, как на левом рисунке, общая сумма чисел будет равна 31, а если так, как на правом, то она должна будет равняться 33. Противоречие.



Так же можно решать, используя соображение, что если в двух фигурках сумма чисел одинакова, то она также одинакова в тех частях, которые останутся, если выкинуть из фигурок общую часть. А фигурки типа «L» можно расположить так, чтобы одна отличалась от другой всего на одну клетку. ■

Задача 6.6. Настольные часы имеют форму куба с круглым циферблатом в центре одной из граней. На корпусе часов нет никаких пометок, показывающих, где у них верх, а на циферблате есть деления, но нет цифр. Поэтому иногда кто-то случайно может поставить часы на бок или даже вверх ногами. **а)** Какое время показывают часы на рисунке? **б)** Есть ли в сутках хотя бы один такой момент, когда нельзя будет определить, какое время показывают эти часы?



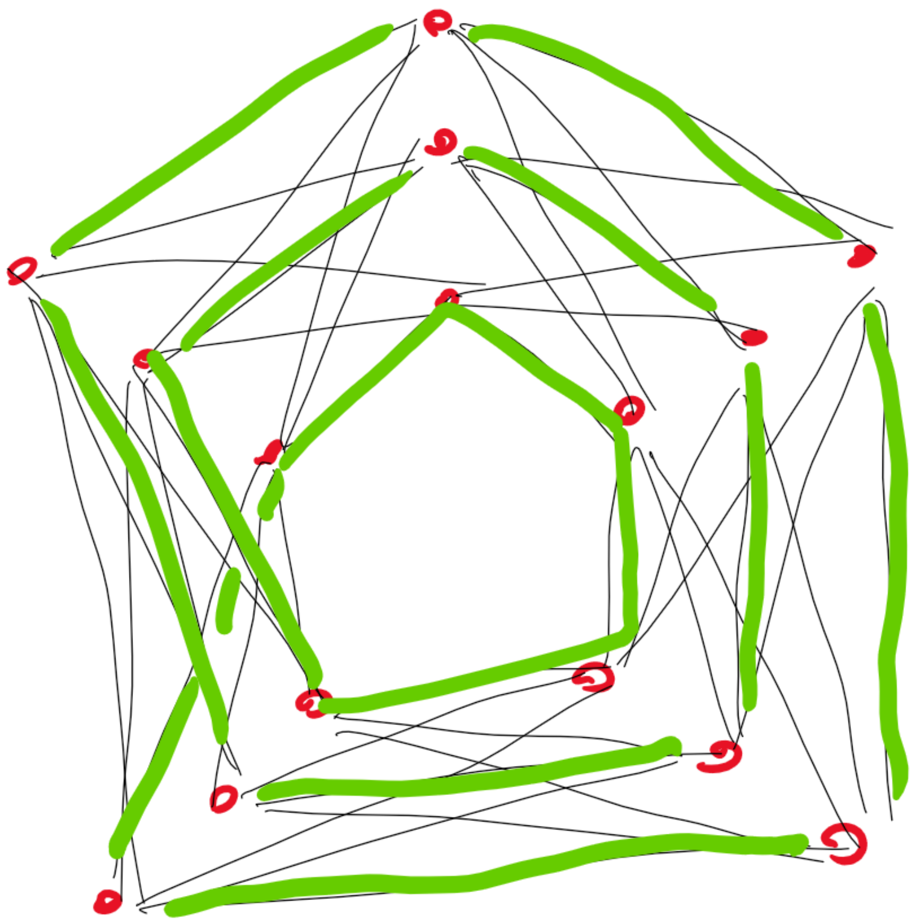
Ответ: **а**)4 часа; **б**) такого момента нет.

Решение. **а**) Обе стрелки показывают на часовые деления, поэтому на часах целое число часов. Значит, минутная стрелка стоит на 12 часах, часовая – на 4 часах, а сами часы лежат на правом боку. **б**) Положение часовой стрелки в промежутке от одного часового деления до следующего однозначно определяет, на сколько сдвинулась минутная стрелка с деления, обозначающего 12 часов. Поэтому можно найти это деление, а значит, и узнать время, которое показывают часы.
■

Задача 6.7. За круглым столом сидят 15 гостей так, что любой из них сидит рядом со своими знакомыми. **а)** Может ли быть так, что каждый из гостей знаком ровно с шестерыми из остальных? **б)** А может ли вдобавок быть так, что среди гостей нет трёх попарно знакомых?

Ответ: **а**)Да ; **б**) да.

Решение. Ниже пример на оба пункта. Показан цикл. То, что не найдётся треугольников, кажется, требует пояснений не больше, чем то, почему нет треугольников в пятиугольнике.

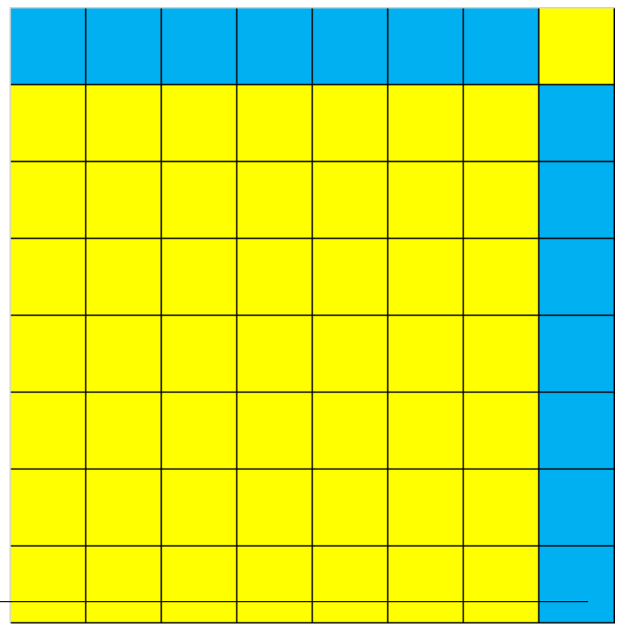


■

Задача 6.8. **а)** На шахматной доске расставлено 15 фигур так, что *в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду стоит хотя бы одна фигура*. Докажите, что с доски можно убрать одну фигуру так, что оставшиеся фигуры будут удовлетворять тому же требованию. **б)** А если фигур 14?

Ответ: **б)**Это не всегда верно.

Решение.



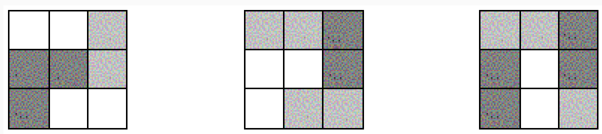
а)Еели среди 15 фигур найдется фигура такая, что и в горизонтальном ряду клеток и в вертикальном ряду клеток, в которых она стоит, есть еще хотя бы по одной фигуре, то эту фигуру можно убрать. Тогда оставшиеся 14 фигур будут удовлетворять нужному требованию. Допустим, что такая фигура не найдется. Тогда для каждой из 15 фигур можно указать либо горизонтальный, либо вертикальный ряд, в котором она стоит в одиночестве. Это означает, что в сумме найдутся 15 горизонтальных и вертикальных рядов, в каждом из которых стоит по одной фигуре. Но так как всего таких рядов 16, то либо все горизонтальные, либо все вертикальные ряды таковы, что в них стоит по одной фигуре. Это значит, что на доске стоит только 8 фигур — противоречие с условием задачи. Итак, фигура, которую можно убрать, найдется. **б)**Контрпример показан на картинке. ■

Дополнительные задачи

Задача 6.9. Дано 27 кубиков одинакового размера: 9 красных, 9 синих и 9 белых. Можно ли сложить из них куб таким образом, чтобы каждый столбик из трёх кубиков содержал кубики ровно двух цветов? (Рассматриваются столбики, параллельные всем ребрам куба, всего 27 столбиков.)

Ответ: Можно

Решение. На рисунке приведены слои кубика $3 \times 3 \times 3$, сложенные из 27 цветных кубиков.



■

Задача 6.10. По случаю избрания Мирафлореса президентом Анчурии был устроен роскошный обед. За круглый стол сели 666 гостей, большинство из которых были лысыми. Назовём двоих сидящих по обе стороны от каждого гостя его соседями; двоих сидящих через одного от него по обе стороны,— его «вторыми соседями»

и так далее. Мирафлорес заметил, что для каждого лысого ровно один из его вторых и один из его четвёртых соседей — лысые. Сколько лысых было на обеде?

Ответ: 444 лысых.

Решение. Легко заметить, что от каждого лысого идет (через одного) следующая цепочка лысых (Л) и нелысых (Н): ...ЛЛНЛЛНЛЛН... поэтому среди 333 гостей, сидящих через одного, будет 222 лысых. Поскольку лысых большинство, такая же цепочка будет для гостей, сидящих между рассмотренными, поэтому всего лысых 444. ■

Задача 6.11. Помощник фокусника просит одного из зрителей написать на доске в ряд N цифр. Затем помощник фокусника стирает ровно две из них. После этого появляется фокусник. Глядя на оставшиеся цифры, фокусник безошибочно отгадывает, что было стёрто. Придумайте, как можно организовать такой фокус. (Фокусник и его помощник заранее выбирают число N таким, каким им удобно; фокусник видит, на каких местах стояли стёртые цифры.)

Решение. Договориться можно следующим образом. Пусть $N = 20$. Помошник отдельно рассматривает первые 10 цифр и вторые 10 цифр. Находит последнюю цифру суммы этих 10 цифр. Стирает число, стоящее в позиции с таким номером (нумерация начинается с нуля). Точно также он поступает со вторыми 10 цифрами. Фокусник также рассматривает отдельно первые 10 цифр и вторые 10 цифр. Зная позицию стёртого числа может узнать последнюю цифру суммы цифр, а зная её и остальные 9 чисел, можно восстановить стёртое число, что он и делает. ■

Задача 6.12. В каждой клетке квадрата 101×101, кроме центральной, стоит один из двух знаков: "поворот" или "прямо". Машинка въезжает извне в произвольную клетку на границе квадрата, после чего ездит параллельно сторонам клеток, придерживаясь двух правил:

1. в клетке со знаком "прямо" она продолжает путь в том же направлении;
2. в клетке со знаком "поворот" она поворачивает на 90° (в любую сторону по своему выбору).

Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности врезаться в дом?

Ответ: Нельзя.

Решение. Если машинка въезжает в правый нижний угол, то какой бы знак там ни стоял, она может проехать как вверх, так и налево (в зависимости от того, въезжает она в эту клетку снизу или справа). Поэтому правый нижний угол можно выкинуть и считать, что машинка сразу въезжает в оставшуюся часть. Самую правую клетку в нижнем ряду оставшейся части можно выкинуть аналогичным образом. Повторяя это рассуждение, каждый раз можно выкидывать из доски клетку, правее и ниже которой ничего нет, пока центральная клетка не станет доступна извне. ■
