Задача 5.1. Используя ровно пять раз цифру 3, знаки арифметических действий и скобки, получите любое целое число от 0 до 11.

Ответ:

Решение. $3 \cdot 3 - 3 - 3 - 3 = 0$

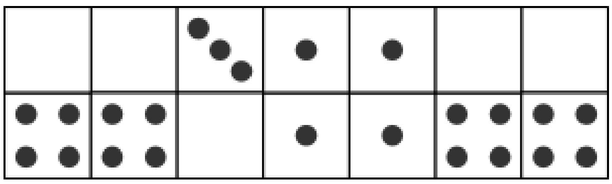
$(3 \cdot 3 - 3 - 3) : 3 = 1$
$(3 + 3 + 3 - 3) : 3 = 2$
$3 + 3 + 3 - 3 - 3 = 3$
$(3 + 3 + 3 + 3) : 3 = 4$
$(3 \cdot 3 + 3 + 3) : 3 = 5$
$(3 \cdot 3 + 3 \cdot 3) : 3 = 6$
$3 \cdot 3 - (3 + 3) : 3 = 7$
$(3 \cdot 3 \cdot 3 - 3) : 3 = 8$
$3 + 3 + 3 - 3 + 3 = 9$
$(3 \cdot 3 \cdot 3 + 3) : 3 = 10$
$3 \cdot 3 + (3 + 3) : 3 = 11$ ■

Задача 5.2. Когда Гулливер попал в Лилипутию, он обнаружил, что там все вещи ровно в 5 раз короче, чем на его родине. Сможете ли Вы сказать, сколько лилипутских спичечных коробков поместится в спичечный коробок Гулливера?

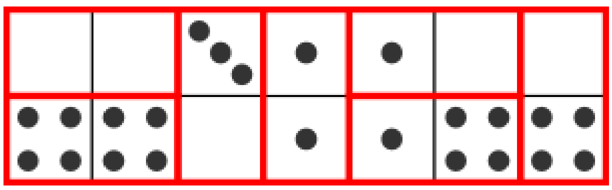
Ответ: 125

Решение. Вдоль одной стороны спичечного коробка Гулливера можно выстроить в ряд 5 лилипутских спичечных коробков. Чтобы замостить дно спичечного коробка Гулливера лилипутскими коробками, понадобится 5 таких рядов, или $12 \cdot 12 = 25$ коробков. А чтобы заполнить весь коробок Гулливера коробками лилипутов, понадобится 5 таких слоёв, то есть $25 \cdot 5 = 125$ коробков. ■

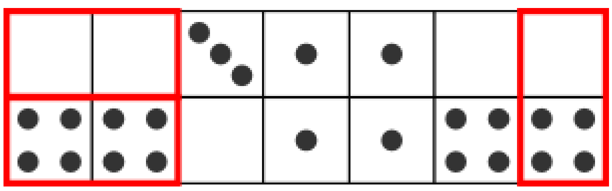
Задача 5.3. В коробке лежат костяшки домино (см. рисунок). Как расположены кости?



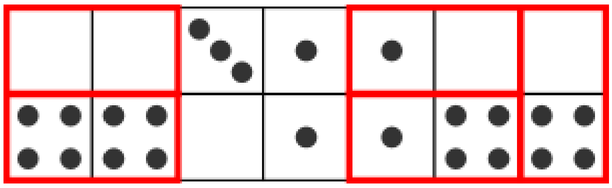
Ответ:



Решение. Если самая левая кость расположена вертикально: (4 0), то следующая тоже будет (4 0) и при вертикальном, и при горизонтальном расположении. Следовательно, левые крайние комти расположены горизонтально: (4 4) и (0 0). Тогда самая правая, чтобы не было повторений, располагается вертикально: (4 0).



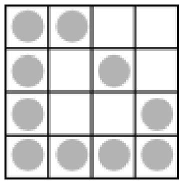
Чтобы не было повторов, располагаем следующие справа кости горизонтально: (1 0) и (1 4).



Оставшиеся две могут быть расположены только вертикально: (3 0) и (1 1), так как иначе получается кость (1 0), которая уже есть. ■

Задача 5.4. В каждой клетке доски 4×4 лежит пончик. Уберите 6 пончиков так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке осталось четное число пончиков.

Ответ:



Решение.

■

Задача 5.5. Три друга — Степан, Иван и Кирсан — преподают арифметику, этику и эстетику в школах Казани, Рязани и Лозанны. Степан работает не в Рязани, Иван — не в Казани, казанец преподает эстетику, рязанец — не этику, Иван — не арифметику. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из них?

Ответ: Степан преподаёт эстетику в Казани, Иван — этику в Лозанне, Кирсан — арифметику в Рязани.

Решение. Составляем табличку с именами и городами и вычёркиваем клетки в соответствии с условиями:

	Казань	Рязань	Лозанна
Степан		x	
Иван	x		
Кирсан			

Допишем к городам предмет, который там преподаётся: в Казани — эстетику, в Рязани — не этику и не эстетику, по предыдущему условию. Значит, в Рязани — арифметику, а этику — в Лозанне. Последнее условие означает, что Иван работает не в Рязани.

	Казань	Рязань	Лозанна
	эстетика	арифметика	этика
Степан		x	
Иван	x	x	
Кирсан			

Теперь остаётся поставить "плюсики" в оставшихся ячейках:

	Казань	Рязань	Лозанна
	эстетика	арифметика	этика
Степан	+	x	x
Иван	x	x	+
Кирсан		+	

■

Задача 5.6. Из набора гирек с массами $1, 2, \ldots, 101$ г потерялась гирька массой 19 г. Можно ли оставшиеся 100 гирек разложить на две кучки по 50 гирек в каждой так, чтобы массы обеих кучек были одинаковы?

Ответ: Да, можно.

Решение. Среди чисел от 1 до 101 будет 51 нечётное. Значит, общий вес всех гирек набора — нечётное число. А если из него вычесть вес потерявшейся гирьки, получается число чётное. Значит, реально разложить гирьки на две равные по весу кучки. Теперь нужно показать, как именно.

Рассмотрим сначала гирьки весом от 1 до 18 грамм. Поделим их на пары, чтобы в сумме получалось 19. Всего наберётся 9 таких пар: $18 u 1, 17 u 2, \ldots, 10 u 9$. Разложим первые 8 пар по двум кучкам, а последнюю (10 и 9) пока отложим. Получится $19 \cdot 4 = 76$ грамм в каждой кучке.

Теперь рассмотрим гирьки от 20 до 101 грамма. Их можно распределить по парам так, чтобы вес каждой пары был равен 121 грамму: $20 u 101, 21 u 100, \ldots, 60 u 61$. Всего получится 41 пара. Распределим первые 40 пар гирек по двум кучкам: в каждую добавим по $121 \cdot 20 = 2420$ грамма. У нас осталось 4 гирьки весом 9, 10, 60, 61 грамм. В одну кучку добавим гирьки 9 и 61 грамм, в другую — 10 и 60 грамм. Итого в каждой кучке будет по $76 + 2420 + 70 = 2566$ грамм.

■

Задача 5.7. У Вики было несколько камней. Половину и еще один камень Вика кинула в окно; затем половину от оставшегося и еще один Вика кинула в мусорное ведро; потом Вика кинула половину от оставшегося и еще один камень в реку. Оставшийся камень Вика предпочла подарить Серёже. Сколько камней было у Вики изначально?

Ответ: 22 камня

Решение. Решаем задачу с конца. Когда Вика кинула половину от оставшегося и ещё один камень в реку, у неё остался один камень. Добавляем этот «ещё один камень» к остатку — получаем половину. Значит, до этого у неё было $(1 + 1) \cdot 2 = 4$ камня. Повторяем те же операции. $(4 + 1) \cdot 2 = 10$ — столько камней было у Вики перед тем, как она их кинула в фонарь. $(10 + 1) \cdot 2 = 22$ камня было у Вики в самом начале. ■

Задача 5.8. Я и мой друг вместе приобрели за 3 дня 18 марок. Сегодня я купил столько марок, сколько мой друг вчера и сегодня, но зато позавчера он купил на 2 марки больше, чем я вчера и позавчера. Сколько же марок приобрёл каждый из нас?

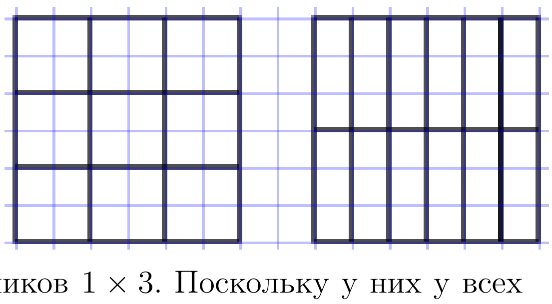
Ответ: Ответ: Я — 8 марок, а мой друг — 10.

Решение. Получается, что друг за три дня купил на 2 марки больше, чем я. Поскольку всего было куплено 18 марок, отложим эти «лишние» марки в сторону и разделим оставшееся пополам. Я купил $(18 - 2) : 2 = 8$ марок, а мой друг $18 - 8 = 10$ марок. ■

Дополнительные задачи

Задача 5.9. Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратиках 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.

Ответ:



Решение. Разделим квадрат 6×6 на непересекающиеся квадраты 2×2. Всего их получится 9. Поскольку в любых квадратах 2*2 одинаковое число закрашенных клеток, то в этих число закрашенных клеток тоже одинаково. Общее число закрашенных клеток может быть равно 9, 18, 27 или 36 (когда закрашены все клетки).

Теперь разделим квадрат на 12 непересекающихся прямоугольников 1×3. Поскольку у них у всех должно быть одинаковое число закрашенных клеток, то в сумме может получиться 12, 24 или 36 клеток. Единственный вариант, удовлетворяющий сразу обоим условиям — когда закрашены все 36 клеток. ■

Задача 5.10. В предлагаемой шифровке значками зашифрованы цифры и знаки $+, -, \cdot, =$. Каждая строчка шифровки содержит запись одного из арифметических действий над натуральными числами типа 25 +

184 = 209 или 2568 = 2573 – 5 (участвовать могут и другие числа). Определите, какой цифре или знаку соответствует каждый из значков.

$$>\ \sqsupset\ \ominus\ \sqcap\ \vee\ \oplus\ \ominus\ <\ \square\ \square\ \sqcup$$

$$\vee\ \wedge\ \ominus\ \varobar\ >\ \vee\ \sqcap\ \square\ \sqcup\ \square\ \wedge$$

$$\oplus\ \wedge\ \sqcup\ \ominus\ \sqcap\ \oplus\ \square\ \vee\ \vee\ \varobar\ \sqsubset$$

$$\square\ \sqcup\ \sqsubset\ \sqsubset\ <\ >\ \vee\ \sqcap\ \vee\ \bigcirc\ \bigcirc$$

Ответ:

8 7 3 = 9 6 3 − 1 1 0
9 2 3 + 8 9 = 1 0 1 2
6 2 0 3 = 6 1 9 9 + 4
1 0 4 4 − 8 9 = 9 5 5

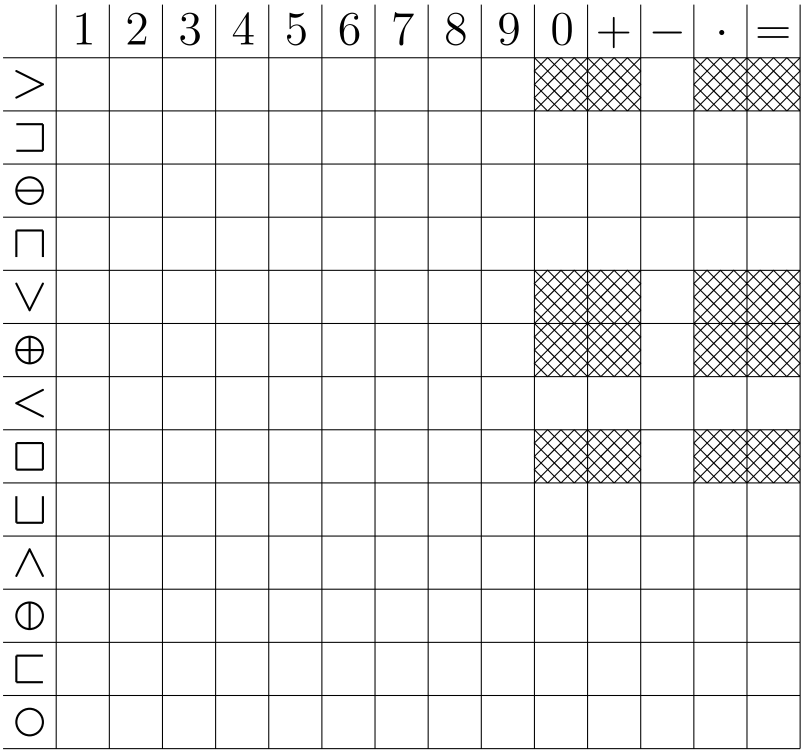
Решение.

Итого, имеем таблицу на 14 столбцов (цифры и знаки арифметических действий) и 13 строк (символы из шифровки).

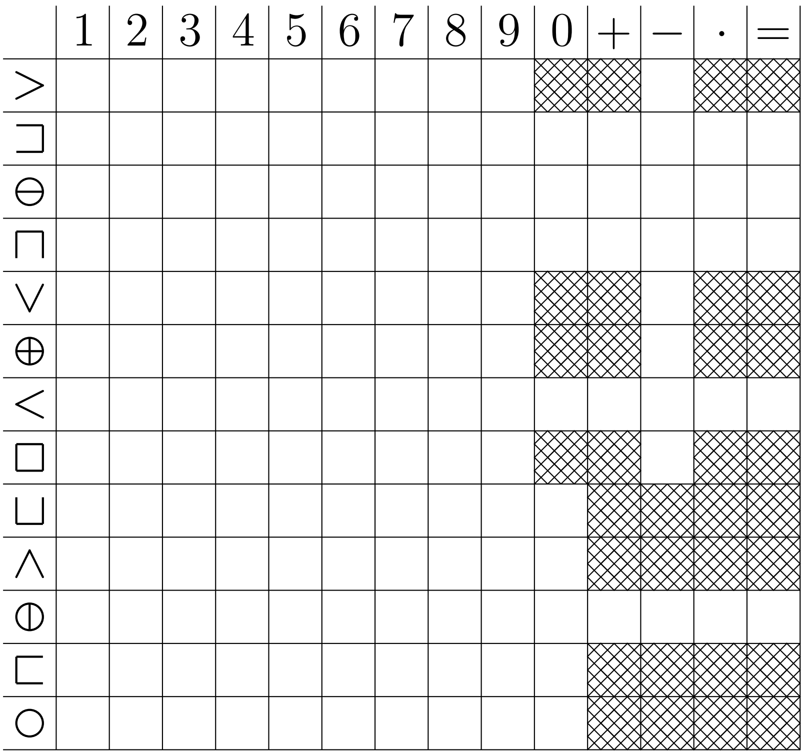
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	+	−	·	=
$>$														
$\sqsupset$														
$\ominus$														
$\sqcap$														
$\vee$														
$\oplus$														
$<$														
$\square$														
$\sqcup$														
$\wedge$														
$\varobar$														
$\sqsubset$														
$\bigcirc$														

Будем её заполнять.

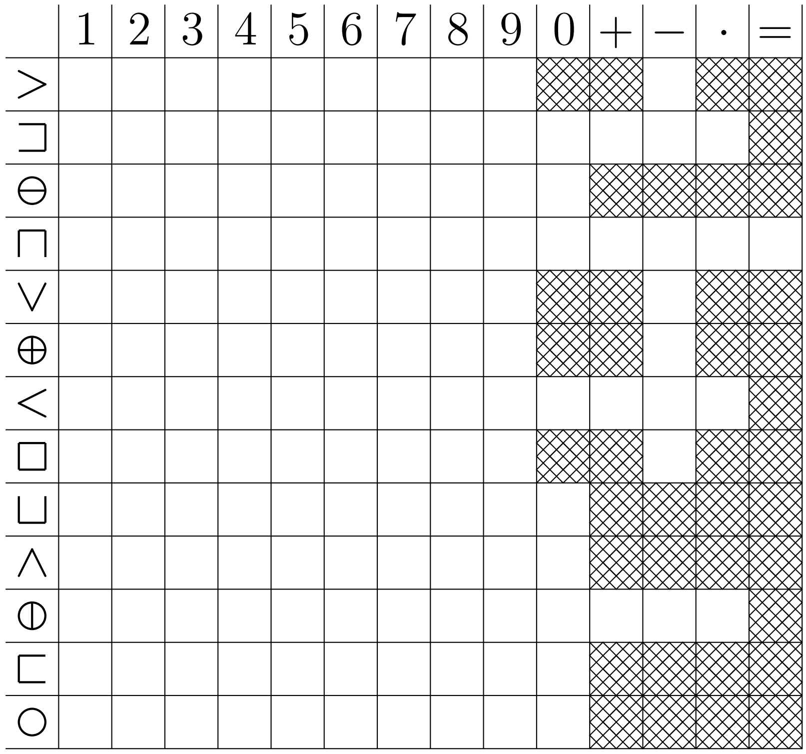
Очевидно, что запись выражения не может начинаться со знаков равенства, сложения или умножения или с цифры 0. Здесь речь идёт о символах $>$, $\vee$, $\oplus$ и $\square$.



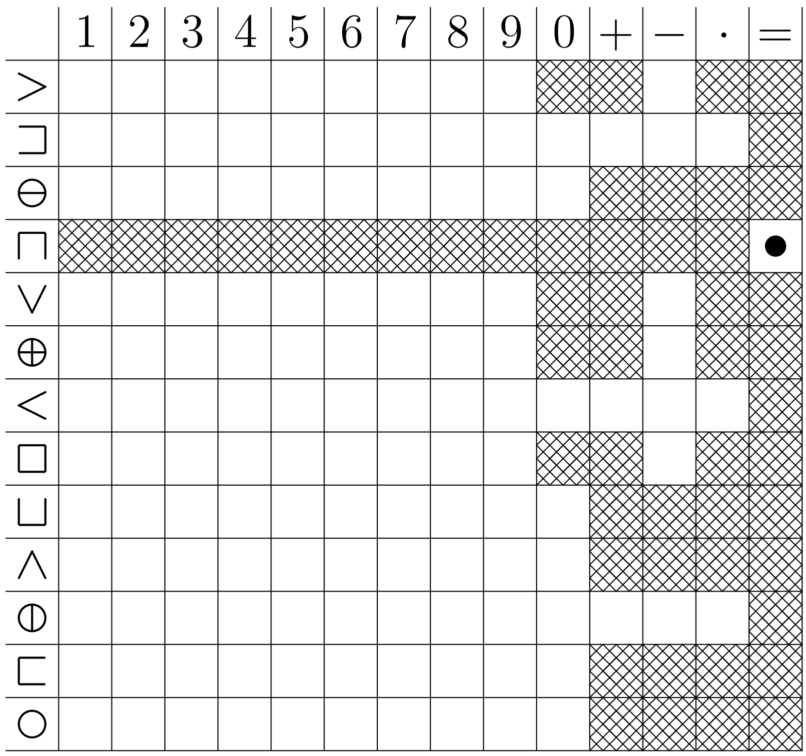
Также, запись выражения не может заканчиваться на знак равенства и на знак арифметических действий. Здесь речь идёт о символах ⊔, ∧, ⊏ и ○.



И ни знак равенства, ни знак арифметических действий не могут встречаться по два раза в одной строчке. Из оставшихся знаков ⊐, ⊖, ⊓, < и ⏀ это можно сказать про ⊖ (первый пример). А знак равенства должен быть в каждой строчке. Это не выполняется для ⊐ (второй пример), < (второй пример) и ⏀ (первый пример).



Значит, знаку равенства соответствует $\sqcap$.



Заметим, что знак вычитания не может идти сразу за знаком вычитания. Так мы исключаем для знака вычитания $\square$ и $\vee$. Символ же $>$ не может быть знаком вычитания поскольку в первом примере тогда имеем отрицательное двузначное число равно чему-то. А в этом случае, в правой части равенства должен быть ещё один знак вычитания при любом действии — при сложении ли, вычитании или умножении — либо как знак действия, либо для отрицательного числа. И символ $\oplus$ не может соответствовать знаку вычитания, поскольку тогда мы получаем, что трёхзначное число из первого примера равно однозначному, уменьшенному на пятизначное.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	+	−	·	=
>										▩	▩	▩	▩	▩
⊐														▩
⊖											▩	▩	▩	▩
⊓	▩	▩	▩	▩	▩	▩	▩	▩	▩	▩	▩	▩	▩	●
∨										▩	▩	▩	▩	▩
⊕										▩	▩	▩	▩	▩
<														▩
□										▩	▩	▩	▩	▩
⊔											▩	▩	▩	▩
∧											▩	▩	▩	▩
⦶														▩
⊏											▩	▩	▩	▩
○											▩	▩	▩	▩

Запишем полученные знания и посмотрим на них.

_ _ _ = _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ = _ _ _ _

_ _ _ _ = _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ = _ _ _

И отметим, где может находиться знак арифметического действия согласно нашей таблице (по одной позиции на каждый возможный вариант).

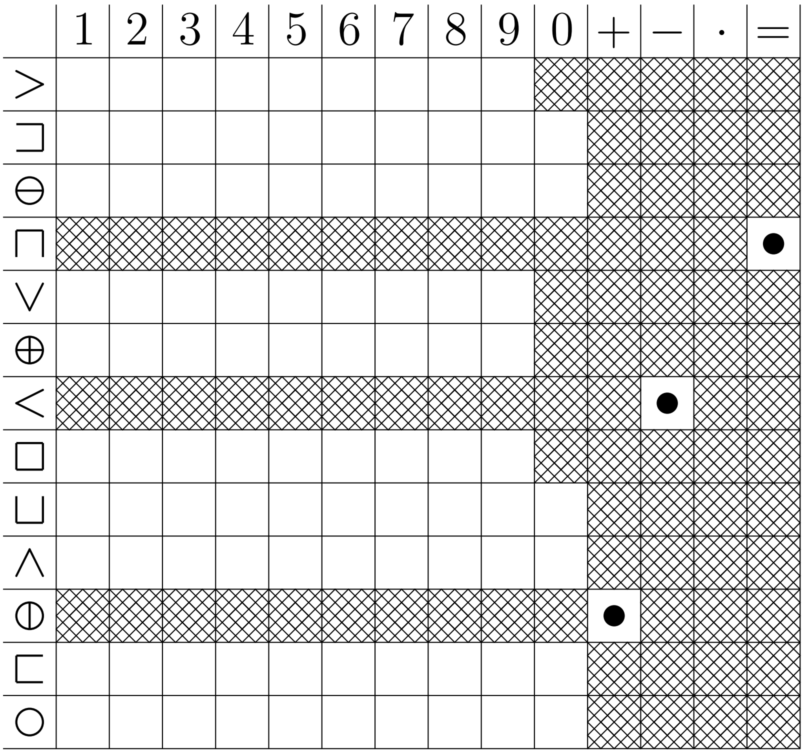
_ • _ = _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ = _ _ _ _

_ _ _ _ = _ _ _ _ • _

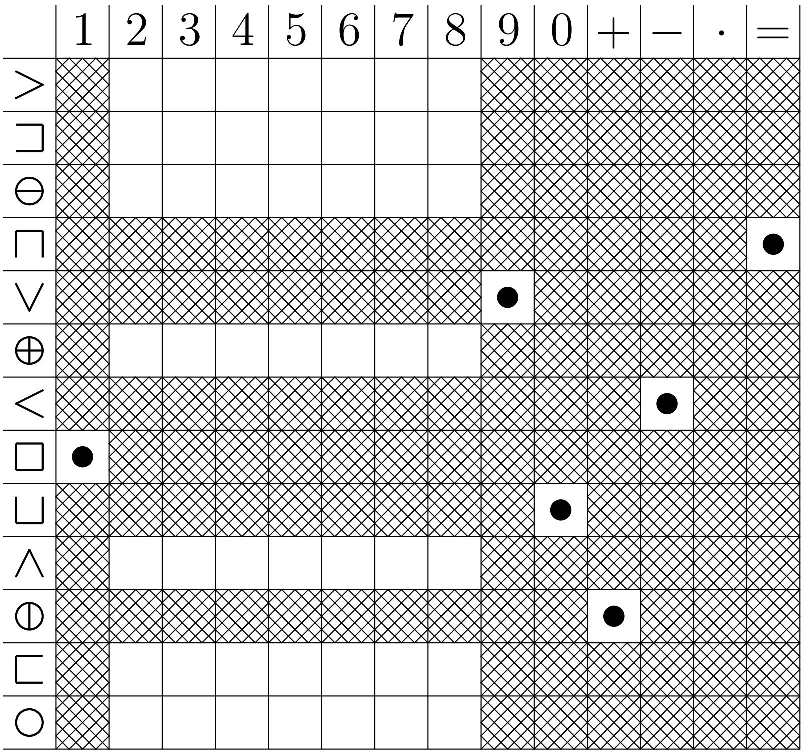
_ _ _ _ • _ _ = _ _ _

Для начала докажем, что ни на одной позиции не может стоять знак умножения. Понятно, что вариант первого примера невозможен — произведение двух однозначных чисел не может быть столь велико. Невозможен и вариант из третьего примера — два четырёхзначных числа из левой и правой частей начинаются с одной и той же цифры, значит однозначное число из правой части равно единице, однако четырёхзначные числа не равны. Вариант же из четвёртого примера невозможен, поскольку идёт умножение четырёхзначного числа на двузначное, что никак не может дать трёхзначное. Кроме того, из первого примера видно, что символ ⊐ не может быть и ни знаком сложения, ни знаком вычитания — ни сумма, ни разность двух однозначных чисел не может равняться числу семизначному. Из последнего же примера видно, что < может быть только знаком вычитания. Из тех же соображений про порядок чисел. А значит, Φ соответствует знаку сложения.



_ _ _ = _ _ _ − _ _ _
_ _ _ + _ _ = _ _ _ _
_ _ _ _ = _ _ _ _ + _
_ _ _ _ − _ _ = _ _ _

Из четвёртого примера получаем, что $\vee$ соответствует девятке, $\square$ — единице, а $\sqcup$ — нулю: 1 0 _ _ − _ _ = 9 _ _.



_ _ _ = 9 _ _ − 1 1 0
9 _ _ + _ 9 = 1 0 1 _
_ _ 0 _ = _ 1 9 9 + _
1 0 _ _ − _ _ = 9 _ _

Тогда из третьего примера видно, где находится двойка. _ 2 0 _ = _ 1 9 9 + _. Это был символ $\wedge$.

_ _ _ = 9 _ _ − 1 1 0
9 2 _ + _ 9 = 1 0 1 2
_ 2 0 _ = _ 1 9 9 + _

1 0 _ _ − _ _ = 9 _ _

Тогда из второго примера видно, где находится тройка. 9 2 3 + _ 9 = 1 0 1 2. Это был символ ⊖, а тогда понятно, что оставшийся символ в этом примере восьмёрка. Это был символ >.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	+	−	·	=
>	×	×	×	×	×	×	×	●	×	×	×	×	×	×
⊐	×	×	×					×	×	×	×	×	×	×
⊖	×	×	●	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
⊓	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	●
∨	×	×	×	×	×	×	×	×	●	×	×	×	×	×
⊕	×	×	×					×	×	×	×	×	×	×
<	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	●	×	×
□	●	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
⊔	×	×	×	×	×	×	×	×	×	●	×	×	×	×
∧	×	●	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
⦶	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	●	×	×	×
⊏	×	×	×					×	×	×	×	×	×	×
○	×	×	×					×	×	×	×	×	×	×

8 _ 3 = 9 _ 3 − 1 1 0

9 2 3 + 8 9 = 1 0 1 2

_ 2 0 3 = _ 1 9 9 + _

1 0 _ _ − 8 9 = 9 _ _

Тогда из третьего примера понятно, где находится четвёрка. _ 2 0 3 = _ 1 9 9 + 4. Это был символ ⊏.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	+	−	·	=
>	×	×	×	×	×	×	×	●	×	×	×	×	×	×
⊐	×	×	×	×				×	×	×	×	×	×	×
⊖	×	×	●	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
⊓	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	●
∨	×	×	×	×	×	×	×	×	●	×	×	×	×	×
⊕	×	×	×	×				×	×	×	×	×	×	×
<	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	●	×	×
□	●	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
⊔	×	×	×	×	×	×	×	×	×	●	×	×	×	×
∧	×	●	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
⦶	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	●	×	×	×
⊏	×	×	×	●	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
○	×	×	×	×				×	×	×	×	×	×	×

8 _ 3 = 9 _ 3 − 1 1 0

9 2 3 + 8 9 = 1 0 1 2

_ 2 0 3 = _ 1 9 9 + 4

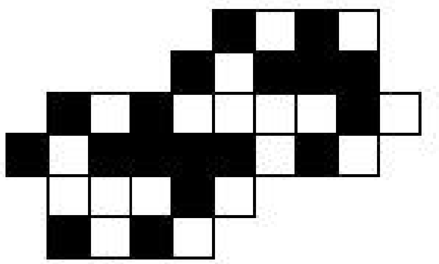
1 0 4 4 − 8 9 = 9 _ _

Тогда становится понятно, что в четвёртом равенстве должна стоять пятёрка на последнем месте. И на предпоследнем тоже. А это символ ○. Тогда остаются символы ⊐ и ⊕. И цифры 6 и 7. Но из первого примера видно, что ⊐ на единицу больше, а значит, это семёрка. И ⊕ соответственно шестёрка.

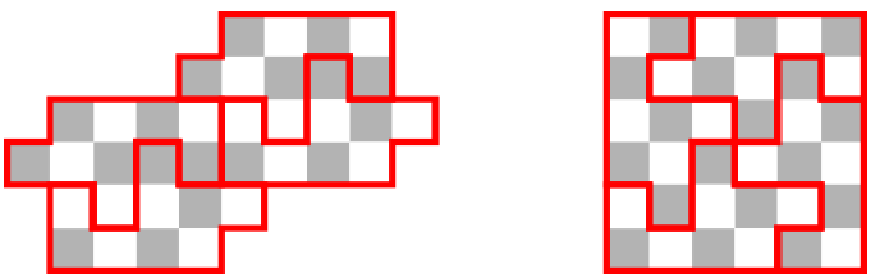
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	+	−	·	=
$>$								●						
$\sqsupset$							●							
$\ominus$			●											
$\sqcap$														●
$\vee$									●					
$\oplus$						●								
$<$												●		
$\square$	●													
$\sqcup$										●				
$\wedge$		●												
$\varobar$											●			
$\sqsubset$				●										
$\bigcirc$					●									

$873 = 963 - 110$
$923 + 89 = 1012$
$6203 = 6199 + 4$
$1044 - 89 = 955$
■

Задача 5.11. Разрежьте изображенную на рисунке фигуру на четыре одинаковые части так, чтобы из них можно было сложить квадрат размером 6×6 с шахматной раскраской.



Ответ:



Решение.
■

Задача 5.12. На математическом конкурсе было предложено несколько простых и несколько сложных задач. Участнику давали 3 очка за решение сложной и 2 очка за решение простой задачи. Кроме того, за каждую нерешенную простую задачу списывалось 1 очко. Рома решил 10 задач и набрал 14 очков. Сколько было простых задач?

Ответ: 16 лёгких задач.

Решение. Если бы все решённые Ромой задачи были сложными, и в задании не было бы ни одной простой, то Рома получил бы 30 баллов. Каждая нерешённая простая задача отнимает у него один балл. Если вместо сложной Рома решил простую задачу, то у него тоже будет на один балл меньше. Поскольку он получил 14 баллов, а не 30, значит простых задач (решённых и нерешённых в сумме) было $30 - 14 = 16$. ■