Задача 10.1. Когда Петя начал решать эту задачу, он заметил, что часовая и минутная стрелки его часов образуют прямой угол. Пока он решал ее, угол все время был тупым или развёрнутым, а в тот момент, когда Петя закончил решение, угол снова стал прямым. Сколько времени Петя решал эту задачу?

Ответ: $32\dfrac{8}{11}$ минуты.

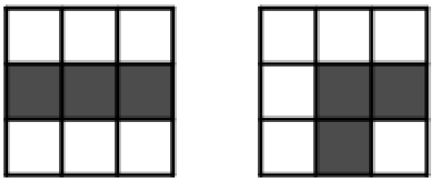
Решение. Эта задача решается аналогично задаче 8.6. За каждую последующую минуту угол между часовой и минутной стрелкой изменяется на $6 - 1/2 = 11/2°$. Поделим 180 на это число, и узнаем, когда суммарно угол изменится на $180°$ и снова будет равен $90°$. Получается $\frac{360}{11} = 32\dfrac{8}{11}$ минуты. ■

Задача 10.2. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета? (Каждая клетка закрашивается целиком в один цвет.)

Ответ: В 16 цветов.

Решение. Разделим доску на 16 квадратов 2×2 и каждый квадрат раскрасим своим цветом. Эта раскраска в 16 цветов удовлетворяет условию.

Большего количества цветов добиться не удастся. Действительно, если клеток какого-то цвета не более трёх, то только одна из них может граничить по стороне с двумя клетками своего цвета (см. рис.).



■

Задача 10.3. Вдоль аллеи стоят 20 столбиков, каждый из которых имеет высоту 1 м, 2 м или 3 м. Вася, пока шёл в одну сторону, насчитал 13 пар соседних столбиков, в которых первый столбик был ниже второго. Когда он шёл обратно, то насчитал 5 таких пар. Не ошибся ли Вася в расчётах?

Ответ: Вася ошибся.

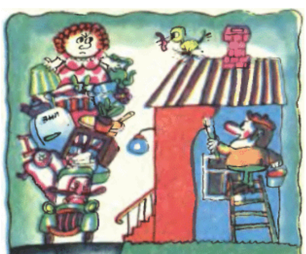
Решение. Всего пар соседних столбиков 19. Получается, что если идти в первоначальном направлении, то в 13 из них высота возрастает, в 5 — убывает и в $19 - 13 - 5 = 1$ — не меняется.

Всякий раз, когда высота возрастает, она возрастает минимум на 1, а когда убывает, она убывает максимум на 2. То есть за весь путь высота возросла минимум на $13\cdot1 - 5\cdot2 = 3$м, чего быть не может, так как максимальная высота последнего столбика — 3м, то есть максимальное возрастание — 3 - 1 = 2м. ■

Задача 10.4. На плоскости проведено 100 прямых. Оказалось, что среди любых четырёх из них найдутся две параллельных. Докажите, что среди любых семи из них найдутся три параллельных.

Решение. Выберем наибольшее количество попарно непараллельных прямых из набора. Их получится не больше 3. Назовём их *основными* Тогда всякая другая прямая параллельна одной из выбранных нами прямых. Возьмём теперь произвольные семь прямых. Какие-то две прямые из этих семи будут параллельны одной и той же основной прямой, а значит, параллельны друг другу. ■

Задача 10.5. В городе Васюки каждая семья занимала отдельный дом. В один прекрасный день каждая семья переехала в дом, ранее занятый другой семьей. В ознаменование этого дня Васюксовет решил покрасить все дома в красный, синий или жёлтый цвета, причём так, чтобы ни для какой семьи цвета старого и нового домов не совпадали. Удастся ли Васюксовету это сделать?



Ответ: Удастся.

Решение. Нарисуем граф, в котором вершины-дома соединим стрелками-рёбрами, показывающими, откуда куда переезжают жители. Все соседние вершины должны быть покрашены в разные цвета.

Каждая вершина графа соединена рёбрами ровно с двумя другими, поэтому получатся несколько замкнутых колец. Если в таком кольце чётное число вершин, то можно покрасить дома в любые два цвета через один. Если в кольце нечётное число вершин, то двух цветов уже не хватит, но трёх будет достаточно. Например, можно все дома, кроме одного, красить в два цвета через один, а последний покрасить в третий цвет, чтобы рядом не оказались дома одного цвета. ■

Задача 10.6. 60 детей построились парами и пошли в музей. По пешеходному переходу они шли толпой, а после него снова построились парами (но некоторые пары могли стать другими). Докажите, что в музее детей можно разбить на три равные группы так, что дети в одной группе ни разу не были в одной паре.

Решение. Отложим в сторону тех школьников, которые дважды были в одной и той же паре. Построим граф, в котором рёбрами будут соединены школьники, однажды бывшие в одной паре. Заметим, что он будет представлять собой набор из циклов, причём каждый цикл будет иметь чётную длину.

Разрежем все эти циклы и выстроим в цепочку, включая пары с школьниками, которые были дважды в одной паре.

Будем теперь красить их в 3 цвета так, чтобы соединённые ребром школьники были разных цветов, и при этом школьников каждого цвета было 20 человек.

Для этого первые 20 человек, чередуясь, будут краситься в 1 и 2 цвет, начиная с 1, затем 20 человек будут краситься в 1 и 3 цвет, начиная опять-таки с 1, и последние 20 человек будут краситься во 2 и 3, начиная со 2. Проверим, что при такой раскраске школьники, находящиеся в одном цикле, будут покрашены в разные цвета. Если они находятся в одной двадцатке, это понятно. И если школьники соседние в развёрнутой цепочке, это тоже понятно. То есть нужно проверить только для школьников, находящихся на концах цепочки, и попавших в разные двадцатки. Если двадцатки соседние, это тоже верно, так как общий цвет продолжает чередоваться. Если же цепочка такая длинная, что попадает в первую и третью двадцатку, то заметим, что первый школьник этой цепочки обязательно покрашен в 1 цвет (так как все циклы имеют чётную длину), а в третьей двадцатки находятся школьники только 2 и 3 цвета. Так что раскраска удовлетворяет требуемым условиям. Поэтому из школьников каждого из цветов можно сформировать необходимую группу. ■

Задача 10.7. С крыши дома на землю спущена лестница. На каждой её ступеньке укреплен указатель-стрелка, направленный либо вверх, либо вниз. В начальный момент на одной из ступенек лестницы стоит человек. Далее он передвигается на соседнюю ступеньку в соответствии с указателем, после чего этот указатель меняет направление на противоположное. Со следующей ступеньки человек опять переступает на соседнюю в соответствии с её указателем, после чего этот указатель тоже меняет положение на противоположное. Далее он снова и снова переходит со ступеньки на ступеньку по таким же правилам. Докажите, что при любых начальных направлениях стрелок и любом исходном положении человек рано или поздно сойдёт с лестницы либо на крышу, либо на землю.

Решение. Допустим, человек никогда не выйдет за пределы лестницы, даже если сделает бесконечное число шагов. Тогда на какую- то ступеньку А он наступит бесконечное число раз. Так как направление указатели при каждом попадании человека на ступеньку меняется на противоположное, то при его «насту паниях» на ступеньку А указатель бесконечное число раз будет показывать вверх и бесконечное же число раз — вниз. Поэтому, ступая в соответствии с указателем, человек бесконечное число раз наступит на каждую из двух ступенек, соседних со ступенькой А. Далее, рассуждая таким же образом, можно сделать вывод, что он бесконечное число раз наступит на все ступеньки, соседние с этими ступеньками, и так далее. В конечном счете окажется, что он бесконечное число раз наступит на каждую ступеньку лестницы, в том числе и на самую верхнюю (и самую нижнюю тоже). Но самое позднее при втором «наступании» на самую верхнюю ступеньку он с нее будет вынужден подняться вверх на крышу (указатель-то каждый раз меняет направление!). Противоречие. Следовательно, наше предположение было неверным, и человек рано или поздно сойдет с лестницы, что и требовалось доказать. ■

Задача 10.8. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли еще 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовём девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика – *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь. Сколько из них были отважными?

Ответ: 10 детей

Решение. Первый способ. Посмотрим на количество пар из соседних мальчика и девочки. Изначально оно равно 1. Заметим, что если мальчик сел между двумя мальчиками, то количество таких пар не изменилось. Если же он сел между мальчиком и девочкой, то он одну такую пару "разрушил" и одну "создал", и количество таких пар тоже не изменилось. И только в случае, если мальчик был отважным, он увеличивает количество таких пар на две. Аналогичные рассуждения верны и для девочек. Так как в конце у нас таких пар 21, то отважных детей было (21˘1) : 2 = 10.

Второй способ. Каждый отважный ребёнок уменьшает количество однополых пар на 1. Каждый неотважный ребёнок увеличивает количество однополых пар на 1. В начале однополых пар не было, в конце их тоже не было. Следовательно, число отважных детей равно числу неотважных.

Третий способ. Группы мальчиков чередуются с группами девочек. Изначально было две группы. Когда садился неотважный ребенок, то он подсаживался к группе, и количество групп не менялось. Когда садился отважный ребенок, он разбивал группу другого пола на две и составлял новую группу из самого себя, увеличивая общее количество групп на 2. В конце оказалось 22 группы. Значит, отважных ребят было (22˘2) : 2 = 10. ■

Дополнительные задачи

Задача 10.9. Имеется набор из двух карточек: $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$. За одну операцию разрешается составить выражение, использующее числа на карточках, арифметические действия, скобки. Если его значение – целое неотрицательное число, то его выдают на новой карточке. (Например, имея карточки $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ и $\boxed{7}$, можно составить выражение $\boxed{7}\boxed{5} : \boxed{3}$ и получить карточку $\boxed{25}$ или составить выражение $\boxed{3}\boxed{5}$ и получить карточку $\boxed{35}$.) Как получить карточку с числом 2018 **а)** за 4 операции; **б)** за 3 операции?

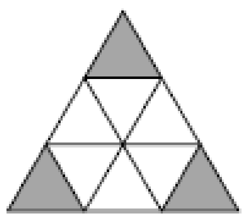
Решение. а) 1) $\boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{3}$, 2) $\boxed{2}\boxed{1} - \boxed{3} = \boxed{18}$, 3) $\boxed{3} - \boxed{2} - \boxed{1} = \boxed{0}$, 4) $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{18}$.

б) 1) $\boxed{2}\boxed{1} = \boxed{21}$, 2) $\boxed{21} - \boxed{1} = \boxed{20}$, 3) $\boxed{20}\boxed{21} - \boxed{1} - \boxed{2} = \boxed{2018}$. ■

Задача 10.10. Петя утверждает, что он сумел согнуть бумажный равносторонний треугольник так, что получился четырёхугольник, причём всюду трёхслойный. Как это могло получиться?

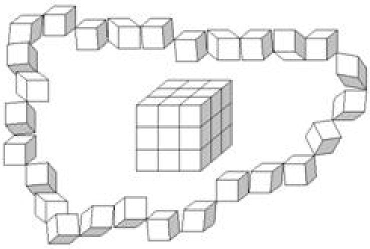
Решение.

Разобьём треугольник на 9 равносторонних треугольников (см. рис.). Загнём "внутрь" части, отмеченные цветом, и получим шестиугольник.



Этот шестиугольник можно перегнуть по любой диагонали, соединяющей противоположные вершины, и получить трёхслойный четырёхугольник (трапецию). ■

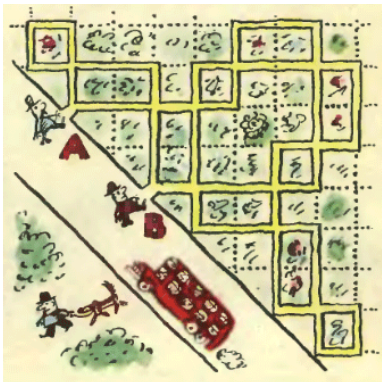
Задача 10.11. 27 единичных кубиков просверлены по диагонали и плотно нанизаны на нить, которую затем связали в кольцо, то есть, вершина первого кубика соединилась с вершиной последнего. Можно ли такое «ожерелье» упаковать в кубическую коробку с ребром длины 3?



Ответ: Нет, нельзя.

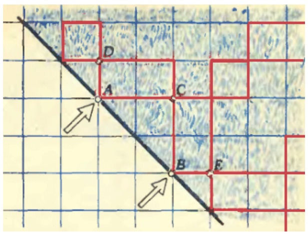
Решение. Представим, что удалось упаковать «ожерелье» в форме куба $3 \times 3 \times 3$. Тогда раскрасим вершины всех единичных кубиков «поэтажной в два цвета, например, слой белых вершин, слой черных, и т. д. так, чтобы цвета чередовались. Заметим, что концы каждой диагонали лежат в соседних слоях, значит они разного цвета. Поэтому в «ожерелье» цвет вершин-шарниров тоже должен чередоваться. Но это невозможно, потому что в замкнутом «ожерелье» из 27 кубиков содержится нечётное количество вершин-шарниров. Значит «ожерелье» нельзя упаковать в кубическую коробку с ребром длины 3. ■

Задача 10.12. Два джентльмена одновременно вошли в парк: один в пункте A, а другой — в пункте B (см. план парка на рисунке, жирным выделены дорожки). Каждый джентльмен решил обойти этот парк, пройдя по одному разу по каждой дорожке. Докажите, что если они всё время будут идти с одинаковыми скоростями, то обязательно встретятся.



Ответ:

Решение. Будем считать, что сторону квадрата каждый джентльмен проходит за одну минуту.



Если первый джентльмен входит в парк по дорожке AD, то выходит из парка по дорожке CA, и наоборот; аналогично, если второй джентльмен входит в парк по дорожке BE, то выходит по дорожке CB, и наоборот. Если первый джентльмен пошёл по AC, а второй по BC, то через 2 минуты они встретятся в точке C. Если первый джентльмен пошёл по AD, а второй по BC, то второй обязан идти к точке D (поскольку в противном случае он не сможет туда попасть, не проходя дважды по одной дорожке), и джентльмены встречаются в точке D через 5 минут после входа в парк.

Маршруты, начинающиеся с AD и BE, обратны маршрутам первого случая, и джентльмены встречаются в точке C за 2 минуты до выхода из парка, а маршруты, начинающиеся с AC и BE, обратны маршрутам второго случая, и встреча произойдёт за 5 минут до выхода джентльменов из парка. ■
