Задача 3.1. Артём по одному выставляет королей на шахматную доску, записывая для каждого, сколько ранее выставленных королей он побил. Доска заполнилась. Докажите, что сумма выписанных чисел не зависит от порядка выставления. Чему она равна?

Ответ: 210.

Решение. Получается, надо посчитать количество рёбер в графе, где вершины — клетки доски, а рёбрами соединены соседние по стороне клетки. Получается, будет 4 клетки степени 3, 6*4 клетки степени 5, 6*6 клеток степени 8. Суммарная степень равна 420. Рёбер же в два раза меньше, откуда ответ. ■

Задача 3.2. На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

Решение. *Решение в предположении, что фишки не могут стоять на одной клетке.* Поделим позиции фишек на "чётные" (когда фишки стоят на клетках одного цвета) и "нечётные" (когда они стоят на клетках разных цветов). Легко видеть, что чётные позиции чередуются с нечётными. Поэтому их количество (в предположении, что все позиции встретились ровно один раз) должно различаться на 1 или 0. При этом общее количество "чётных" позиций равно $2 \cdot \frac{32 \cdot 31}{2} + 64$ (так как фишки могут стоять на одной клетке) а нечётных — $32 \cdot 32$. Первое количетсво больше второго на 32. Значит, не получится.

Решение в предположении, что фишки могут стоять на одной клетке. Поделим позиции фишек на "чётные" (когда фишки стоят на клетках одного цвета) и "нечётные" (когда они стоят на клетках разных цветов). Легко видеть, что чётные позиции чередуются с нечётными. Поэтому их количество (в предположении, что все позиции встретились ровно один раз) должно различаться на 1 или 0. При этом общее количество "чётных" позиций равно $2 \cdot (\frac{32 \cdot 31}{2})$ (так как фишки могут стоять на одной клетке) а нечётных — $32 \cdot 32$. Первое количетсво меньше второго на 32. Значит, не получится. ■

Задача 3.3. Есть 16 кубиков, каждая грань которых покрашена в белый, чёрный или красный цвет (различные кубики могут быть покрашены по-разному). Посмотрев на их раскраску, барон Мюнхгаузен сказал, что может так поставить их на стол, что будет виден только белый цвет, может поставить так, что будет виден только чёрный, а может и так, что будет виден только красный. Могут ли его слова быть правдой?

Ответ: Да, могут.

Решение. Выстроим кубики в виде параллелепипеда размером $4 \times 2 \times 2$. Заметим, что у четырёх верхних угловых кубиков видно по три грани, сходящихся в одной вершине, у четырёх нижних не угловых кубиков видно по одной грани, а у восьми оставшихся кубиков видно по две соседние грани.

Таким образом, кубики могут быть покрашены так: у четырёх кубиков – 3 белые грани с общей вершиной, 2 чёрные с общим ребром и одна красная; еще у четырёх кубиков – 3 чёрные грани с общей вершиной, 2 красные с общим ребром и одна белая; у следующих четырёх – 3 красные с общей вершиной, 2 белые с общим ребром и одна чёрная грань, а у оставшихся четырёх кубиков – по две грани каждого цвета с общим ребром. В этом случае для каждого цвета найдутся четыре кубика с тремя гранями, восемь кубиков с двумя гранями и четыре кубика с одной гранью этого цвета. Следовательно, их можно будет поставить на соответствующие места параллелепипеда, и слова Мюнхгаузена будут правдой. ■

Задача 3.4. Решая числовой ребус ДВА + ТРИ = ПЯТЬ, Вася получил 150 правильных ответов. Верно ли, что Вася нашел все возможные решения ребуса?

Ответ: Нет, неверно.

Решение. Можно менять друг с другом значения А и И, В и Р, поэтому количество решений должно делиться на 4. ■

Задача 3.5. Во время стоянки между двумя рейсами матросу исполнилось 20 лет. По этому случаю в кают-компании собрались все шесть членов команды. – Я вдвое старше юнги и на 6 лет старше машиниста, — сказал рулевой. – А я на столько же старше юнги, на сколько моложе машиниста, — заметил боцман. — Кроме того, я на 4 года старше матроса. – Средний возраст команды — 28 лет, — дал справку капитан. Сколько лет капитану?

Ответ: 40 лет.

Решение. Перечислим все условия:
1) матросу 20 лет;
2) в команде шесть человек;
3) рулевой вдвое старше юнги;
4) рулевой на 6 лет старше машиниста;
5) юнге и машинисту в сумме в два раза больше лет, чем боцману;
6) боцман на 4 года старше матроса;
7) средний возраст команды 28 лет.

Из условий 2 и 7 следует, что сумма возрастов всех членов команды $28 \times 6 = 168$ лет. Из условий 1 и 6 следует, что боцману 24 года. Отсюда и из условия 5 следует, что юнге и машинисту вместе 48 лет. Отсюда и из условий 3 и 4 мы можем определить возраст юнги и машиниста: Ю + М = 48, 2Ю = М + 6. Решив эту систему уравнений, определим, что юнге 18 лет, а машинисту – 30. Отсюда и из условий 3 и 4 следует, что рулевому 36 лет. Зная возраст пяти членов команды и сумму возрастов всех членов команды, можно определить возраст капитана: $К = 168 - (20 + 24 + 18 + 30 + 36) = 40$. ■

Задача 3.6. У Игоря и Вали есть по белому квадрату 8×8, разбитому на клетки 1×1. Они закрасили по одинаковому числу клеток на своих квадратах в синий цвет. Докажите, что удастся так разрезать эти квадраты на доминошки 2×1, что и из доминошек Игоря и из доминошек Вали можно будет сложить по квадрату 8?8 с одной и той же синей картинкой.

Решение. Докажем даже больше, чем требуется в условии: как бы Игорь и Валя ни разрезали свои квадраты на доминошки, они всегда смогут составить квадраты с одинаковыми картинками. Доминошки могут быть трёх сортов: белые, синие и двухцветные. Пусть Игорь и Валя отложат в сторону те доминошки, которые у них совпадают. После этого у них должно остаться поровну как синих, так и белых клеток. Ясно, что у одного из них (пусть у Игоря) останутся только двухцветные доминошки, а у другого – только белые и синие. Синих и белых клеток у Игоря поровну, значит у Вали – тоже. Тогда у неё чётное число доминошек, значит, у Игоря тоже. Но из каждой пары двухцветных доминошек можно сложить такой же квадратик, что и из одной синей и одной белой. Такие квадратики и отложенные доминошки будут совершенно одинаковыми наборами деталек у Игоря и Вали. ■

Задача 3.7. Придумайте число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр, равную 56.

Ответ: $\underbrace{10011001\ldots1001}_{\text{1001 взяли 18 раз}}100856$

Решение. Нетрудно придумать пример, исходя из признака делимости на 8 и того, что 1001 делится на 7. ■

Задача 3.8. Два стрелка произвели по 5 выстрелов, причем попадания были следующие: 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2. Первыми тремя выстрелами они выбили одинаковое количество очков, но тремя последними выстрелами первый стрелок выбил втрое больше очков, чем второй. Сколько очков набрал каждый из них третьим выстрелом?

Ответ: Первый - 10 очков, второй — 2 очка.

Решение. Задача решается путём оценок сумм выбитых очков.

По условию сумма очков второго стрелка за последние три выстрела не меньше $2 + 3 + 4 = 9$ (мы взяли наименьшую сумму очков), а сумма очков второго стрелка за последние три выстрела не больше $10 + 9 + 9 = 28$ (мы взяли наибольшую сумму очков) и кратна 3. Значит, сумма второго стрелка равна 9 очка, то есть он набрал за последние три выстрела в каком-то порядке 2, 3, 4 очка, а сумма второго стрелка равна 27 очков, и он набрал 10, 9, 8 очков в каком-то порядке, и, значит, за первые два выстрела стрелками выбито 4, 5, 8, 9 очков в каком-то порядке. Заметим, что если за какой-то из первых двух выстрелов первый набрал 8 или 9 очков, то за первые три выстрела он набрал не меньше $4 + 8 + 8 = 20$ очков, а второй — не больше $9 + 5 + 4 = 18$ очков. Противоречие. Значит, первый игрок за первые два выстрела выбил 4, 5, очков, а второй 8, 9 очков (в каком-то порядке). Мы можем найти разницу между третьим выстрелом первого и второго игрока, она равна $8 + 9 - (4 + 5) = 8$, отсюда получается единственный вариант, что первый выбил 10 очков, а второй — 2. ■

Дополнительные задачи

Задача 3.9. Расставьте в вершинах пятиугольника действительные числа так, чтобы сумма чисел на концах некоторой стороны была равна 1, на концах некоторой другой стороны была равна 2, ..., на концах последней стороны — равна 5.

Ответ: Например, так: $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$.

Решение. *Пример рассуждений:* Поставим в 1-й вершине число x, во 2-й поставим 1˘x, в 3-й $-1 + x$, в 4-й $-$2˘x, в 5-й $-2 + x$. Тогда при любых значения x суммы чисел на четырёх сторонах составят, соответственно, 1, 2, 3, 4. Чтобы сумма чисел на 5-й стороне была равна 5, надо подобрать x из условия $x + (2 + x) = 5$. Отсюда $x = 1{,}5$. ■

Задача 3.10. Вокруг стола пустили пакет с семечками. Первый взял 1 семечку, второй – 2, третий – 3 и так далее: каждый следующий брал на одну семечку больше. Известно, что на втором круге было взято в сумме на 100 семечек больше, чем на первом. Сколько человек сидело за столом?

Ответ: 10 человек.

Решение. Пусть за столом сидело n человек. Тогда на втором круге каждый взял на n семечек больше, чем на первом, а все – на $n \cdot n = n^2$ больше семечек, чем на первом. Так как $n^2 = 100$, то $n = 10$. ■

Задача 3.11. 15 команд играют турнир в один круг. Расписание турнира несовершенно, поэтому в каждый момент времени могут быть команды, сыгравшие разное число матчей. Докажите, что в некотором матче встретятся команды, сыгравшие в сумме перед этим нечетное число матчей.

Решение. Первый способ. Сложим эти суммы для всех игр. Каждая из 15 команд вносит в результат нечётный вклад: $0 + 1 + 2 + \ldots + 13$. Значит, в результате получится нечётное число. Следовательно, хотя бы одно из слагаемых-сумм было нечётным.

Второй способ. Предположим противное: все игры делятся на чётные (к которым обе команды подошли с чётным "багажом") и нечётные. Каждая команда участвовала в семи чётных играх, значит, всего чётных игр $15 \cdot 7 : 2$ – нецелое число. Противоречие. ■

Задача 3.12. Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 24 карточки, пронумерованные числами от 1 до 24. Он выбирает из них 13 карточек и передает первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 11 карточек и, перемешав, передает эти три карточки второму фокуснику. Каким образом фокусники могут договориться так, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трех карточек добавил зритель?

Решение. Разобьём натуральные числа от 1 до 24 на 12 пар. Фокусники могут заранее договориться, как именно это сделать. Например, 1, 24, 2, 23, 3, 22 и так далее. Среди тринадцати карточек, выбранных зрителем, найдутся две, на которых записаны числа из одной и той же пары. Именно их и должен вернуть зрителю первый фокусник. В этом случае зрителю придётся добавить к ним "непарную" карточку, которую сможет опознать второй фокусник. ■
