Задача 6.1. В бусах несколько чёрных и белых бусин, причём известно, что белых бусин в них 12, а также, что любые две соседние бусины отличаются по цвету. Сколько всего в ожерелье может быть бусин?

Ответ: 24

Решение. Чтобы любые две соседние бусины отличались по цвету, нужно чередовать цвета: Ч-Б-Ч-Б, и последняя бусина должна быть не такого цвета, как первая. Тогда получается, что чёрных и белых бусин в бусах поровну, а всего в нём 24 бусины. ■

Задача 6.2. Глиссарский хребет протянулся с севера на юг и насчитывает 25 вершин. Оказалось, что южный сосед каждой вершины выше её северного соседа. Может ли самая северная вершина хребта быть выше, чем самая южная?

Ответ: Нет, не может

Решение. Пронумеруем вершины с севера на юг. Первая и третья являются соседями второй, поэтому третья вершина выше первой. Третья и пятая — соседи четвёртой, поэтому пятая выше третьей. Так, если мы возьмём все нечётные вершины, то окажется, что они выстроены по росту с самой маленькой на севере до самой высокой на юге. Поскольку самая южная вершина имеет нечётный номер, она обязательно будет выше самой северной. ■

Задача 6.3. Когда идет дождь, кошка сидит в комнате или в подвале. Когда кошка в комнате, мышка сидит в норке, а сыр лежит в холодильнике. Если сыр на столе, а кошка в подвале, то мышка в комнате. Сейчас идет дождь, а сыр лежит на столе. Где сейчас мышка?

Ответ: мышка в комнате

Решение. Сейчас идёт дождь, следовательно кошка в комнате или в подвале. Если кошка в комнате, то сыр лежит в холодильнике. Но нам известно, что он на столе, следовательно, этот вариант не подходит. Итак, кошка в подвале, а сыр на столе. Следовательно, мышка в комнате. ■

Задача 6.4. Мышке до норки 20 шагов. Кошке до мышки 5 прыжков. Пока кошка совершает один прыжок, мышка делает 3 шага; а один кошачий прыжок равен по длине 10 мышиным шагам. Догонит ли кошка мышку?

Ответ: Нет, не догонит

Решение. Пока кошка делает 5 прыжков, мышка успеет пробежать $3 \cdot 5 = 15$ шагов. Теперь мышке до норки осталось 5 шагов, а кошке до той же норки 20 мышиных шагов, или 2 кошачьих прыжка. Пока кошка прыгает, мышка успеет пробежать 6 шагов и юркнуть в норку. ■

Задача 6.5. Останкинская телебашня высотой 530 метров весит 30 000 тонн. Сколько весит точная модель этой башни высотой 53 см?

Ответ: 30 г

Решение. Точная модель башни должна быть сделана из материала такой же плотности, что и оригинал. Поэтому, чтобы найти массу модели, нужно узнать, во сколько раз её объём меньше, чем объём оригинала. Мысленно построим вокруг модели кубик с ребром 53 см, а вокруг оригинала — куб с ребром 530 м. Поскольку модель точная, она занимает ровно такую же часть кубика, какую часть куба занимает оригинал. Осталось выяснить, во сколько раз куб по объёму больше кубика.

Сторона куба в $530 \cdot 100 : 53 = 1000$ раз больше, чем сторона кубика. Следовательно, объём, а, значит, и масса, больше в миллиард раз.

$$30000 тонн = 30000 \cdot 1000 кг = 30000 \cdot 1000000 г = 30 г \cdot 1000000000$$

■

Задача 6.6. С числами можно выполнять следующие операции: умножать на три или произвольным образом переставлять цифры (нельзя только ставить нуль на первое место). Можно ли с помощью таких операций из 1 получить **а)** 84? **б)** 2019?

Ответ: **а**) Нельзя; **б**) Нельзя

Решение. *Решение 1.* **а**) С конца: если последнее действие — умножение на 3, то перед этим было число $84 : 3 = 28$. Ни 28, ни 82 на 3 не делятся. Если последнее действие — переставление цифр, то предыдущее число 48, а перед ним — 16 и 61, ни одно из которых не делится на 3.

С начала: из 1 можно получить только 3, из 3 — только 9, из 9 — 27 и 72. $72 \cdot 3 = 216$ — число трёхзначное. $27 \cdot 3 = 81$. $18 \cdot 3 = 54$. Числа 81, 54 и 45 при умножении на 3 дают трёхзначные числа.

б) Сумма цифр числа 2019 не делится на 9, значит, любые числа, полученные из него перестановкой цифр, тоже не делятся на 9. Следовательно, когда мы любое из чисел, полученных перестановкой цифр из 2019, поделим на 3, получатся числа, сумма цифр которых не делится на 3, и никакая перестановка цифр не даст число, кратное 3.

Решение 2. Также можно заметить, что все более, чем однозначные числа, которые получаются в процессе, будут делиться на 9, а ни 84, ни 2019 на 9 не делятся. ■

Задача 6.7. Имеются 6 одинаковых по виду монет. Четыре из них настоящие, по 4 г каждая, а две фальшивые общим весом 8 г, одна чуть более тяжёлая, другая чуть более лёгкая. Хватит ли четырёх взвешиваний, чтобы с помощью чашечных весов (без гирь) найти обе фальшивые монеты?

Ответ: Хватит

Решение. Разделим монеты на две кучки по три монеты и взвесим. Если одна из кучек оказалась тяжелее, это значит, что в ней находится тяжёлая фальшивая монета, а в другой — лёгкая фальшивая монета. Найти одну фальшивую монету из трёх, если известно, легче она или тяжелее остальных, можно за одно действие. Взвешиваем две монеты. Если они равны, то фальшивая — та, которую отложили. Если не равны, то мы знаем, легче или тяжелее фальшивая, и можем её указать.

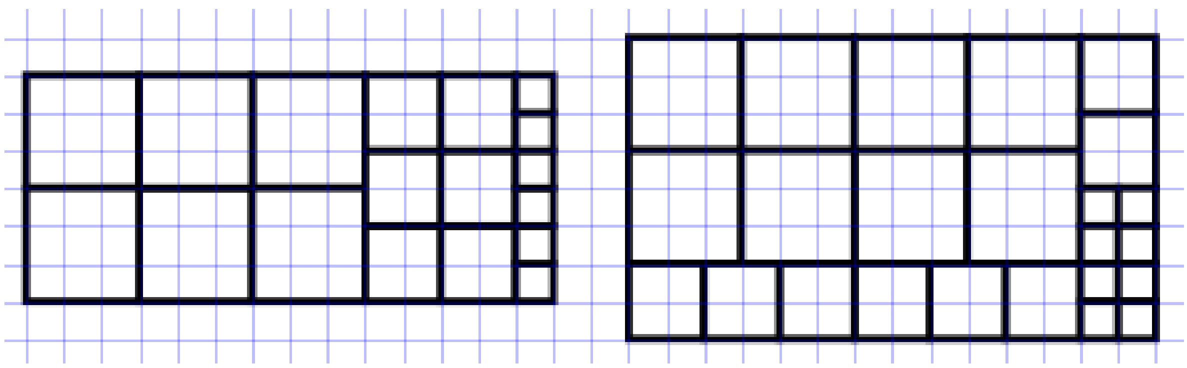
Если же первоначальные кучки оказались равны по весу, значит, обе фальшивые монеты в одной кучке. Чтобы узнать, в какой, возьмём две монеты из любой кучки и положим на весы. Если весы уравновешены, значит, все монеты в этой кучке настоящие, а в другой находятся обе фальшивые и одна настоящая. Если одна из монет перевесила, значит, в этой кучке обе фальшивые монеты, а в другой — все настоящие.

Теперь берём одну монету из кучки с настоящими и сравниваем последовательно с двумя монетами из другой кучки. Если получаем равновесие, откладываем настоящую монету, если неравенство — одну из фальшивых. Третью монету определяем методом исключения. Четырёх действий оказалось достаточно, чтобы указать обе фальшивые монеты. ■

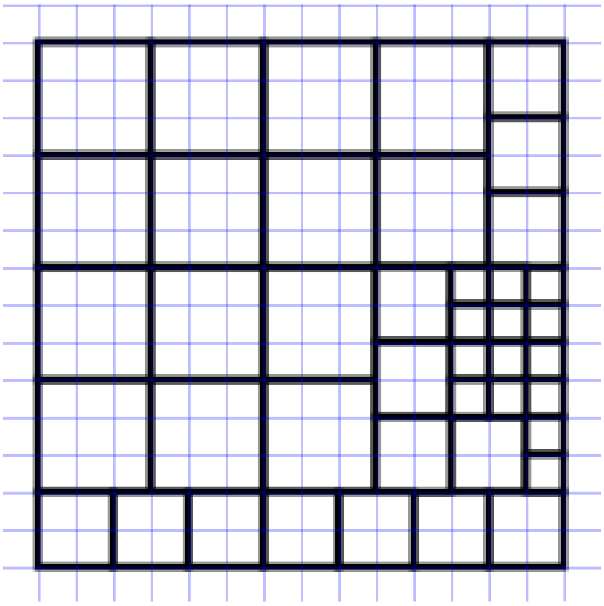
Задача 6.8. Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составьте **а)** прямоугольник **б)** квадрат.

Ответ: **а**) можно сложить прямоугольник 14×6; **б**) можно сложить квадрат 14×14

Решение. **а**) Площадь прямоугольника должна делиться на $1 + 4 + 9 = 14$. Будем рассматривать прямоугольники длиной 14 клеточек. Самая маленькая ширина, при которой все квадраты умещаются в прямоугольнике — 6 клеток. Но могут быть и другие варианты.



б) Площадь квадрата должна делиться на 14. Самый маленький такой квадрат — 14×14. В нём помещается по 14 квадратов каждого вида.



■

Дополнительные задачи

Задача 6.9. В семье трое детей, все они и родители родились в мае. В мае 2008 года родителям в сумме стало 100 лет. В мае 2018 года детям в сумме стало 100 лет. В каком году всей семье в сумме стало 100 лет, если сейчас каждому ребёнку больше 30 лет?

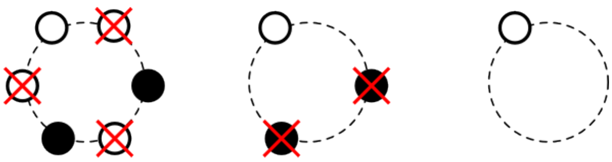
Ответ: В 1994 году

Решение. В мае 2008 каждому ребёнку было на 10 лет меньше, чем в мае 2018 года, а всем вместе — на 30 лет меньше. Значит, в 2008 году всей семье в сумме было 170 лет. Каждый год суммарный возраст семьи меняется на 5 лет (если все уже родились). На 70 лет суммарный возраст семьи изменится за 14 лет. Значит, 100 лет всем вместе было в $2008 - 14 = 1994$ году. ■

Задача 6.10. На окружности стоят 6 фишек белого и чёрного цветов. Настя убрала все белые фишки, у которых есть хотя бы один чёрный сосед. После этого Алёша убрал все чёрные фишки, у которых есть хотя бы один белый сосед. Могла ли после этого на окружности остаться одна фишка?

Ответ: Да, могла

Решение.



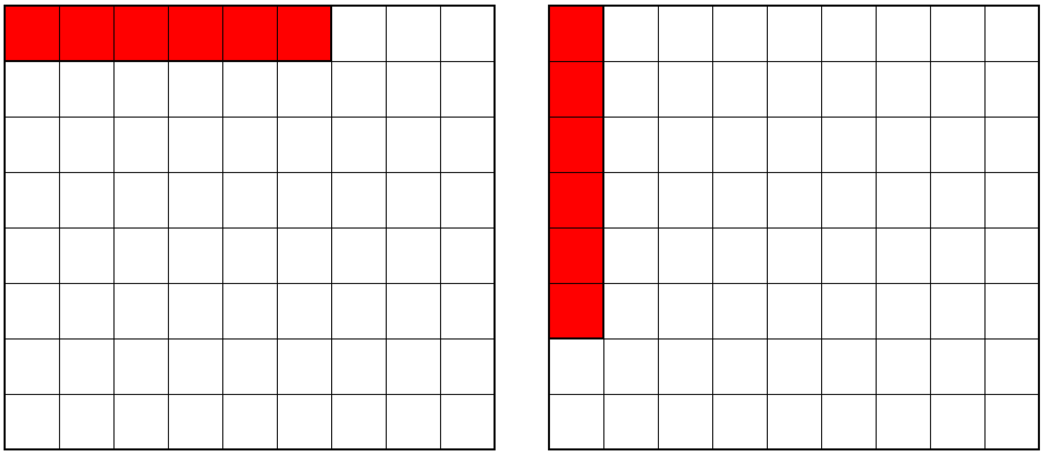
■

Задача 6.11. Толя предложил Ире разрезать прямоугольник размером 8×9 по линиям сетки на прямоугольные полоски 1×6. Сможет ли Ира это сделать?

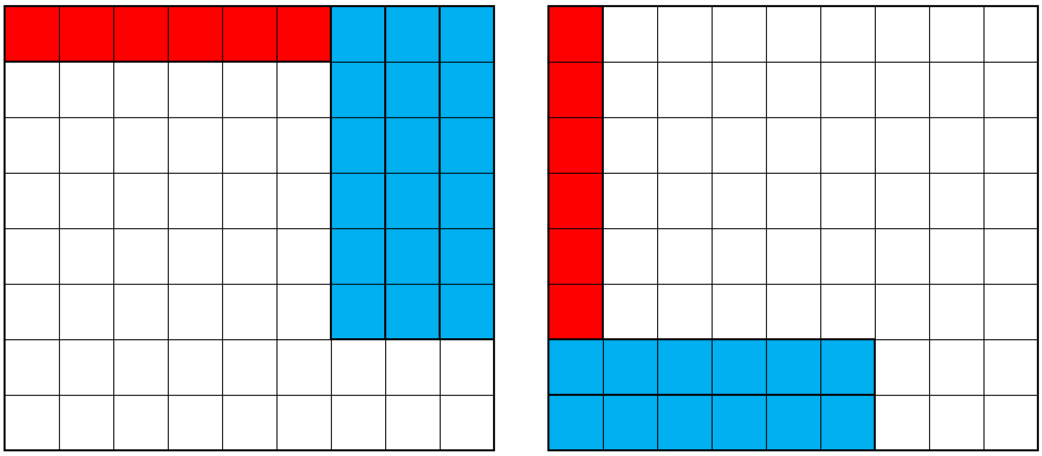
Ответ: Нет, не сможет

Решение.

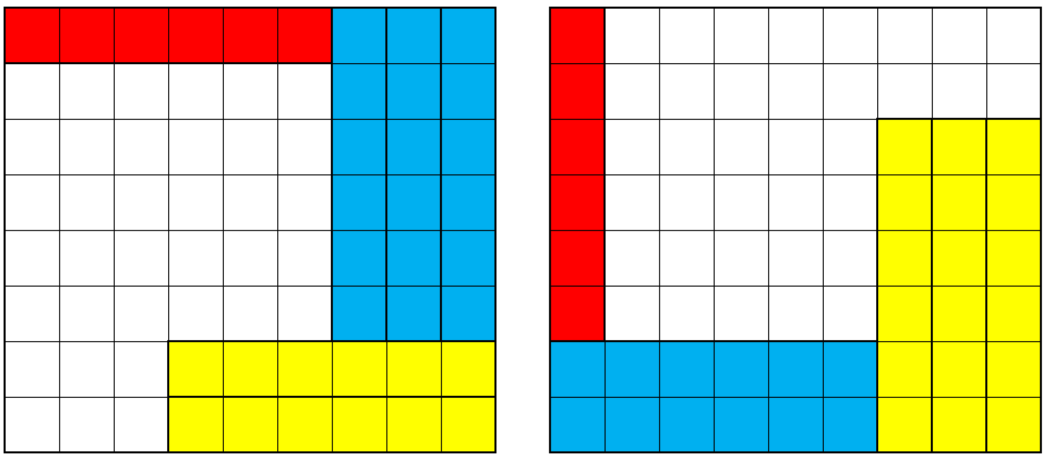
Решение 1. Рассмотрим полоску, покрывающую угловую клетку. Возможны два расположения полосок.



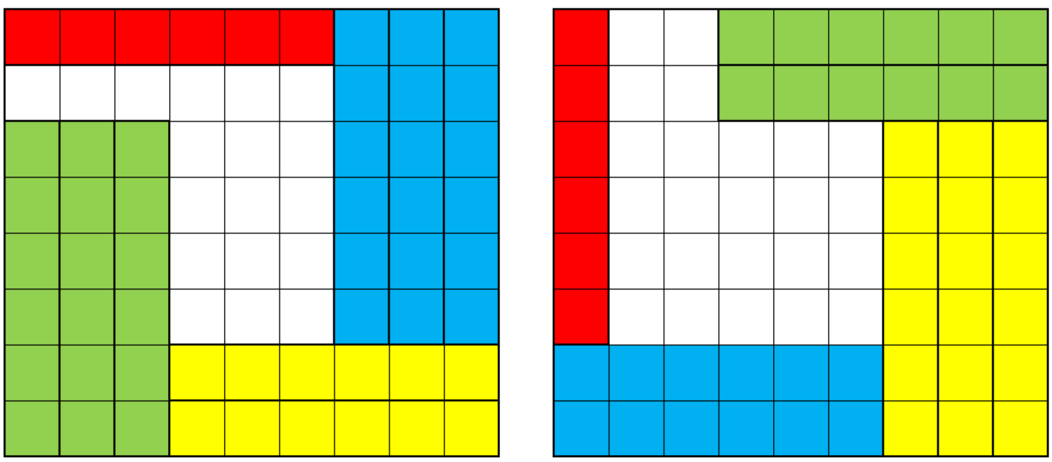
В каждом из них однозначно восстанавливается расположение нескольких полосок.



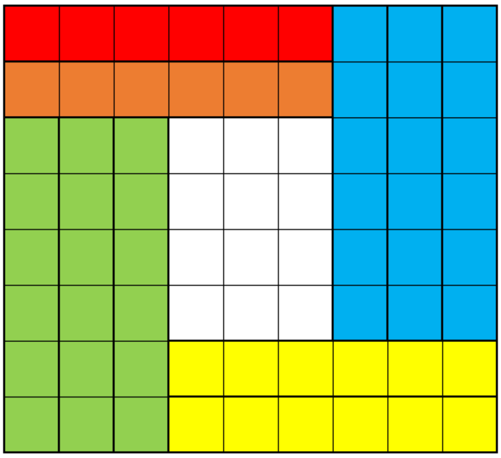
Потом ещё нескольких.

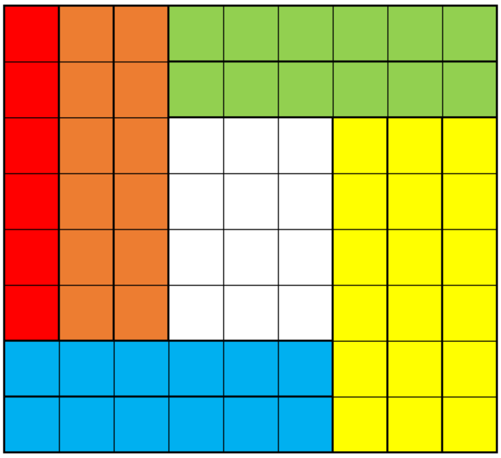


И ещё.

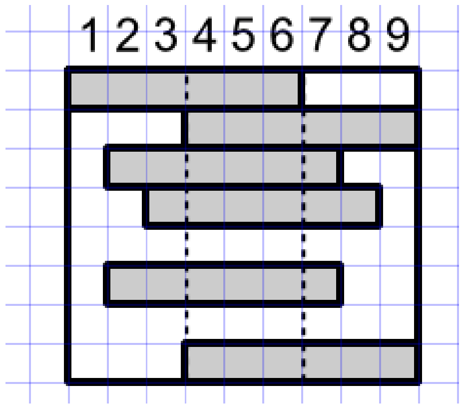


И ещё.





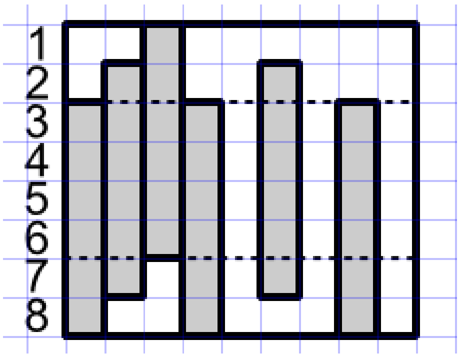
А после этого получается, что нужно разрезать на полоски 1×6 прямоугольник 4×3, что, очевидно, невозможно.



Решение 2. Предположим, что это можно сделать. Тогда либо горизонтальных, либо вертикальных полосок будет 6 или больше (поскольку всего их должно получиться 12).

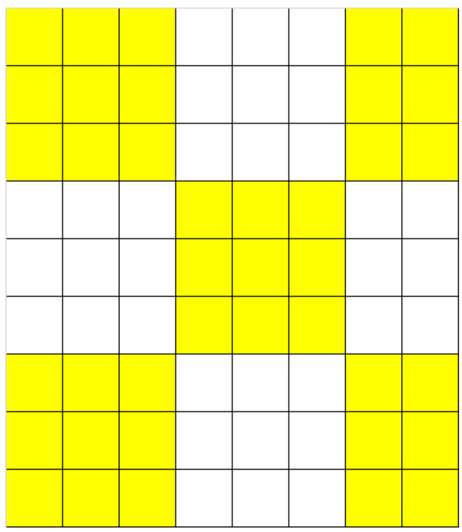
Допустим, имеется 6 горизонтальных полосок. Так как столбцов 9, а длина полосок 6, то в каждом из трёх центральных столбцов (4, 5, 6 на рисунке) горизонтальными полосками будут заняты все клетки, кроме двух. Вертикальные полоски в этих столбцах поместиться не смогут, значит, должны быть ещё две горизонтальные, остальные — вертикальные.

Пронумеруем столбцы от 1 до 9. Если в 1-м столбце находится вертикальная полоска, то в 7-м горизонтальными занято не меньше 6 клеток, и вертикальная полоска там не поместится (и наоборот).
Если вертикальная полоска в 9 столбце, то не удастся разместить полоску в 3-м столбце. Точно так же вертикальная полоска может размещаться либо во 2-м, либо в 8-м столбце, но не одновременно в обоих. Таким образом у нас получится не больше 11 полосок, а должно быть 12. Приходим к противоречию.



Допустим, имеется 6 вертикальных полосок. Так как рядов 8, а длина полоски 6, то в средних 4-х рядах вертикальными полосками будут заняты все клетки, кроме 3-х. Поскольку горизонтальные полоски в эти 3 клетки не поместятся, значит, они принадлежат вертикальным, которых должно получиться 9.

Осталось разместить 3 горизонтальные полоски. Если горизонтальная полоска оказалась в 1-й строке, то в 7-й не меньше 6 клеток занято вертикальными, и горизонтальную там уже разместить нельзя (и наоборот). Другая горизонтальная полоска может размещаться либо в 9-й строке, либо во второй, но не может быть двух полосок сразу и в 9-й строке, и во второй. Всё, для последней полоски места не осталось. Опять приходим к противоречию.



Решение 3. Также можно решать с помощью раскрасок. Нетрудно видеть, что при двухцветной раскраске, как на рисунке, в полоске будет каждого цвета поровну. А всего в прямоугольнике их не поровну. ■

Задача 6.12. Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов?

Ответ: 45 обезьян

Решение. Можно сделать так, чтобы каждая 45 обезьян получили разные фрукты: 5 обезьян получат мандарин, грушу и банан, 15 получат мандарин, грушу и персик, 25 получат мандарин, банан и персик.

Решение 1. Всего фруктов $20 + 30 + 40 + 50 = 140 = 46 \cdot 3 + 2$. Не больше 46 обезьян может получить по 3 фрукта (не обязательно разных). Поскольку $50 > 46$, то каждой счастливой обезьяне обязательно достанется по мандарину. Остальных фруктов $20 + 30 + 40 = 90$, их хватит на 45 обезьян.

Решение 2. Отложим пока мандарины в сторону. Осталось $20 + 30 + 40 = 90$ фруктов. Поскольку обезьяне мы скармливаем не более одного мандарина, каждая обезьяна съест из этих 90 фруктов по крайней мере два. Значит, обезьян не более чем $90 : 2 = 45$. ■
