Задача 7.1. Можно ли расставить числа от 1 до 20 в вершинах и серединах ребер куба, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?

Ответ: Нет, нельзя.

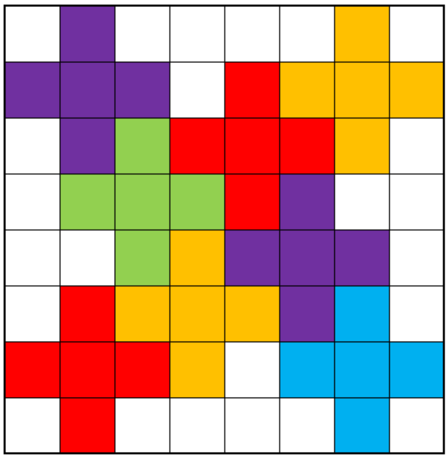
Решение. Числа в вершинах одной четности, 1 и 20 не могут быть полусуммой других, но они разной четности и не могут стоять в вершинах ■

Задача 7.2. В ряд стояло 10 детей. В сумме у девочек и у мальчиков орехов было поровну. Каждый ребёнок отдал по ореху каждому из стоящих правее его. После этого у девочек стало на 25 орехов больше, чем было. Сколько в ряду девочек?

Ответ: 5 девочек.

Решение. Первый слева ребёнок отдал 9 орехов, то есть у него стало на 9 орехов меньше, второй ребёнок отдал 8 орехов, а получил 1, то есть у него стало на 7 орехов меньше. Продолжая аналогичные рассуждения, заметим, что у первых пяти детей стало меньше на 9, 7, 5, 3 и 1 орехов соответственно, а у следующих пяти – больше на 1, 3, 5, 7 и 9 орехов соответственно. Так как $1+3+5+7+9=25$, то девочками могли быть только последние пять детей. ■

Задача 7.3. Какое наибольшее количество "крестов" из 5 клеток можно вырезать по клеткам из квадрата 8×8?



Ответ: 8 крестов.

Решение.

Рассмотрим верхний ряд клеток. В нем 8 клеток, При этом клеток, принадлежащих крестам будет не более двух. Значит, вдоль любого края доски будет не менее 6 клеток, не принадлежащих крестам, а всего на доске таких не менее 20. Следовательно, крестам могут принадлежать не более 44 клеток. Каждый крест занимает ровно 5 клеток, значит, более 8 фигур расположить нельзя.

Как вырезать 8 крестов, показано на рисунке. ■

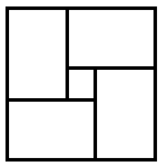
Задача 7.4. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клетки и связная[1] фигура неизвестной формы, состоящая из 101 клетки. Какое наибольшее число таких фигур можно с гарантией вырезать из этого квадрата?

Ответ: 4 фигуры

Решение. Лемма. *Всякую связную фигуру, составленную из 101 клетки, можно заключить в прямоугольник с такими сторонами a и b , что $a+b=102$.*

Возьмем две клетки нашей фигуры, имеющие общую сторону. Они образуют прямоугольник 1×2, сумма сторон которого равна 3. В силу связности данной нам фигуры в ней найдется клетка, примыкающая к этому прямоугольнику по стороне. Присоединим к нему эту клетку. Получившуюся конфигурацию из трех клеток можно заключить в прямоугольник с суммой сторон 4, если удлинить на 1 одну из сторон прямоугольника 1×2. Будем повторять описанную процедуру, пока в конфигурацию не войдут все клетки фигуры. Всего процедура будет совершена не более, чем 99 раз, поэтому сумма сторон прямоугольника, в который в итоге окажется заключена фигура, окажется не больше 102.

Из леммы сразу следует, что четыре фигуры, равные данной, удастся вырезать всегда: для этого достаточно заключить ее в прямоугольник с суммой сторон 102, а затем вырезать из данного квадрата четыре таких прямоугольника так, как показано на рисунке. Теперь рассмотрим фигуру в форме креста, каждый луч которого состоит из 25 клеток. В ней $4\times 25+1=101$ клетка.



[1]Фигура, составленная из клеток, называется связной, если любые две ее клетки можно соединить цепочкой ее клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.

Если такой крест вырезан из квадрата, то его центр должен лежать вне каемки шириной в 25 клеток, примыкающей к границе квадрата. Это означает, что этот центр должен лежать в квадрате со стороной 52, получающемся после удаления каемки. Разделим этот квадрат на четыре равных квадрата со стороной 26.

Нетрудно видеть, что если из листа бумаги вырезано несколько непересекающихся крестов, то в каждом из этих четырех квадратов может находиться центр только одного креста (иначе два креста будут пересекаться). Поэтому больше четырех крестов из листа вырезать не удастся, что завершает доказательство. ■

Задача 7.5. 5 человек сидят за круглым столом. У первого есть 81 яблоко, у остальных – разное количество. Вначале первый дает каждому из остальных столько яблок, сколько у того уже есть. После этого остальные делают то же самое. Когда они закончили, яблок у всех стало поровну. Сколько яблок было у каждого вначале?

Ответ: У первого 81 яблоко, у второго — 41, у третьего — 21, у четвёртого — 11, у пятого — 6.

Решение. Идём с конца обратным ходом. Пусть в конце у всех было x. Тогда получаем следующую последовательность преобразований:

Номер переливания	1й	2й	3й	4й	5й
5	x	x	x	x	x
4	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$3x$
3	$\frac{x}{4}$	$\frac{x}{4}$	$\frac{x}{4}$	$\frac{11x}{4}$	$\frac{3x}{2}$
2	$\frac{x}{8}$	$\frac{x}{8}$	$\frac{21x}{8}$	$\frac{11x}{8}$	$\frac{3x}{4}$
1	$\frac{x}{16}$	$\frac{41x}{16}$	$\frac{21x}{16}$	$\frac{11x}{16}$	$\frac{3x}{8}$
Первоначально	$\frac{81x}{32}$	$\frac{41x}{32}$	$\frac{21x}{32}$	$\frac{11x}{32}$	$\frac{3x}{16}$

Откуда получаем, что $x = 1$. Значит, у первого 81 яблоко, у второго — 41, у третьего — 21, у четвёртого — 11, у пятого — 6.

■

Задача 7.6. Путешественник на острове лжецов и рыцарей встретил четырёх аборигенов. Ему известно, что их зовут Дыр, Бул и Щил и Круч, но неизвестно, кого как. Он спросил одного из них: «Сколько рыцарей в тройке Дыр, Бул и Щил?» и получил ответ «Ноль». Он спросил другого: «Сколько рыцарей в тройке Щил, Круч и Дыр?» и снова получил ответ «Ноль». Тогда он спросил третьего: «Сколько рыцарей в тройке Бул, Щил и Круч?» — и тоже получил ответ «Ноль». Сколько всего рыцарей среди этих четырёх аборигенов?

Ответ: Один.

Решение. Допустим, все три ответа ложны. Тогда среди четверых есть трое лжецов и хотя бы один рыцарь, то есть рыцарь ровно один. Допустим, среди ответов есть верный. Тогда тот, кто его дал, рыцарь, а трое, о которых спрашивали, — лжецы, то есть рыцарь снова один. ■

Задача 7.7. По прямой в одном направлении на некотором расстоянии друг от друга движутся пять одинаковых шариков, а навстречу им движутся пять других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдёт между шариками?

Ответ: 25.

Решение. После столкновения шарики разлетаются с той же скоростью, Поэтому ситуация не изменится, если мы разрешим шарикам при столкновении проскакивать друг сквозь друга, сохраняя скорость. Тогда каждый шарик, катящийся "справа", встретит по одному разу каждый из шариков, катящихся "слева", то есть встреч будет 25. ■

Задача 7.8. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 99, 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

Ответ: Нельзя.

Решение. Предположим, что можно разложить гирьки в соответствии с условием задачи. Сумма масс всех гирек равна 5050. Значит, масса самой тяжёлой кучки не меньше $5050 : 10 = 505$. Так как в наборе нет гирек массы больше 100, то в этой кучке не меньше 6 гирек. Значит, общее количество гирек не меньше чем $6 + 7 + 8 + \ldots + 15 = 105 > 100$. Противоречие. ■

Дополнительные задачи

Задача 7.9. N мудрецам пишут на лбу натуральные числа не больше N, не обязательно разные. По свистку злобного падишаха каждый пишет на бумажке число, которое у него, как он считает, написано. Бумажки проверяют, мудрецы выживают, если угадал один и только один. Мудрецам дают время договориться перед испытанием, но вся их стратегия будет известна злобному падишаху, который будет писать числа. Есть ли у них возможность договориться так, чтобы выжить?

Решение. Пусть первый мудрец пишет число, исходя из гипотезы, что сумма чисел у них всех (включая первого) на лбу делится на N, второй — что она даёт остаток 1 от деления на N, ..., последний — что она даёт остаток $N - 1$ от деления на N. Предполагая известным остаток от деления на N, нетрудно восстановить число у себя на лбу. При этом только одна из вышеуказанных гипотез будет верна. ■

Задача 7.10. На клетчатой доске размером 20×20 расставили 13 белых и 13 черных ладей так, что каждая бьёт ровно одну ладью другого цвета. Докажите, что на доску можно поставить ещё одну белую и одну черную ладьи так, чтобы по-прежнему каждая ладья била ровно одну ладью другого цвета.

Решение. Любые две ладьи разного цвета, бьющие друг друга, занимают одну линию и бьют еще две. Таким образом, всего они занимают не более, чем 39 линий, значит, хотя бы одна горизонталь или одна вертикаль останется свободной. Без ограничения общности можно считать, что свободной оказалась горизонталь. На этой горизонтали есть клетка, которую не бьёт ни одна чёрная ладья (чёрные ладьи стоят не более чем на 13 вертикалях). В эту клетку поставим белую ладью. Анало-гично найдем на этой же горизонтали клетку, которая не бьётся белыми ладьями, и поста-вим на неё чёрную ладью. ■

Задача 7.11. Сумма чисел 1, 2 и 3 равна их произведению:

$$1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Существуют ли ещё такие тройки натуральных чисел?

Ответ: Нет, не существуют.

Решение. Пусть a, b, c — три таких натуральных числа, причём a — наибольшее. Тогда $abc = a+b+c \leqslant a+a+a =$
Сокращая на a, получаем неравенство $bc \leqslant 3$. Значит, хотя бы одно из чисел равно 1 (пусть это будет c). Получаем уравнение $a + b + 1 = ab$.

$$ab - a - b + 1 = 2$$
$$(a - 1)(b - 1) = 2$$

Значит, $b - 1 = 1, a - 1 = 2$, откуда $a = 3, b = 2$. Получается, что 3, 2, 1 — единственная тройка. ■

Задача 7.12. Толя и Саша, сыграв партию в домино, выложили все косточки. У них получилась прямоугольная рамка. Очки заменены в этой рамке буквами (пустые клетки — это «нулевые» очки). На рисунке показано, как расположены косточки в вершинах рамки (они закрашены). Положения остальных косточек неизвестны, но известно, что суммы очков по горизонтальным и вертикальным сторонам рамки все одинаковы. Восстановите расположение косточек.

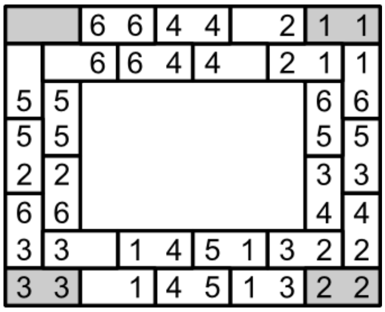
Ответ:

Решение. Посчитаем половину суммы очков на каждой стороне рамки:

(1) $А + А + Б + Б + Г + Д$
(2) $А + Б + Б + Б + В + Д + Д + Е + Е$
(3) $А + Б + В + Г + Д + Д + Е + Е$
(4) $В + В + Г + Г + Д + Е + Е$

Приравнивая (1) и (2), получаем:

$А + Г = Б + В + Д + Е + Е$



Самое большое число, которое может получиться слева, $5 + 6 = 11$, самое маленькое, которое может получиться справа, $4+3+2+1+1 = 11$. Следовательно, $Е = 1$, А и Г — либо 5, либо 6.

Приравнивая (2) и (3), получаем:

$Б + Б = Г$

Значит, Г — чётное, следовательно, $Г = 6$, $А = 5$, $Б = 3$.

Приравнивая (3) и (4), получаем:

$А + Б + Д = В + Г$

$8 + Д = В + 6$

$Д + 2 = В$

Значит, $Д = 2$, $В = 4$.

Расположение доминошек получаем, начиная от любого угла. Если исключать повторы, они раскладываются однозначно. ■