Задача 8.1. Среднее арифметическое всех Володиных оценок по геометрии за четверть — целое число. Если заменить все двойки — тройками, тройки — четверками, а четверки — пятерками, то среднее арифметическое оценок опять-таки будет целым. Что Володя получил в четверти, если известно, что не все его оценки — одинаковые?

Ответ: тройку

Решение. Пусть Володя получил за четверть n оценок. Рассмотрим их сумму. Так как при указанной замене каждое слагаемое увеличилось не более, чем на 1, то сумма увеличилась не более, чем на n, а среднее арифметическое – не более, чем на 1. Для того, чтобы среднее арифметическое увеличилось ровно на 1 (и осталось целым), необходимо, чтобы на 1 увеличилась каждая Володина оценка, значит, ни пятерок, ни единиц у него не было. Так как не все Володины оценки одинаковые, то среди Володиных оценок должны быть оценки выше двойки, и должны быть оценки ниже четверки. Тогда среднее арифметическое чисел набора больше, чем 2, но меньше, чем 4. Значит оно равно 3.

Отметим, что описанная в задаче ситуация возможна, если Володя получил по геометрии одинаковое количество двоек и четверок и произвольное количество троек. ■

Задача 8.2. Найдите пять чисел, зная, что их суммы по три соответственно равны 3, 5, 6, 9, 10, 10, 12, 14, 16 и 17.

Ответ: $-2, 2, 3, 5, 9$

Решение. Пусть числа равны $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Сложим все эти суммы. Получится 102. При этом каждое из исходных чисел участвовало в 6 суммах. Значит, сумма исходных чисел равна 17. При этом $a+b+c=3$. Значит, $d+e=14$. Значит, $c=3, a+b=0$. Понятно, что $a+b+d=5$. Тогда $d=5$. Аналогично, понятно, что $b+d+e=16$. Значит, $b=2$. Тогда $a=-2$. А $e=9$. Нетрудно проверить, что при сложении этих чисел по три возникнут все возможные суммы. ■

Задача 8.3. На шахматной доске расставлены ладьи так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали находится ровно одна ладья. Доску разбили на четыре равных квадрата. Верно ли, что число ладей в правом верхнем квадрате равно числу ладей в левом нижнем квадрате?

Ответ: Верно.

Решение. Обозначим через k число ладей, которые стоят в левом верхнем квадрате. Поскольку на верхних 4 строках стоит ровно 4 ладьи, то в правом верхнем квадрате стоит $4-k$ ладей. Аналогичным образом, рассматривая 4 левых столбца, получим, что в левом нижнем квадрате стоит $4-k$ ладей. ■

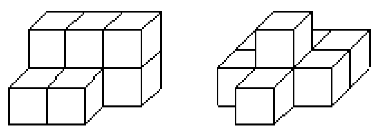
Задача 8.4. Каждый из трех игроков записывает 100 слов, после чего записи сравнивают. Если слово встретилось хотя бы у двоих, то его вычеркивают из всех списков. Могло ли случиться так, что у первого игрока осталось 54 слова, у второго — 75 слов, а у третьего — 80 слов?

Ответ: Нет, не могло.

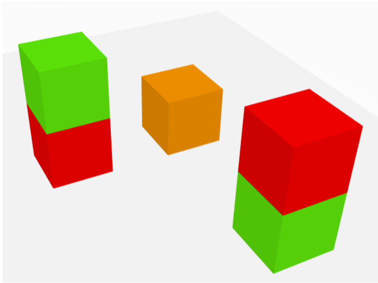
Решение. **Решение 1.** У первого игрока вычеркнуто 46 слов, у второго — 25 слов, а у третьего — 20 слов. Но $20+25<46$, значит все слова, вычеркнутые у первого участника, не могли встретиться у кого-то из двух других участников.

Решение 2. Первый игрок всего вычеркнул 46 слов. Заметим, что каждый раз, когда он вычеркивал одно из своих слов, хотя бы один из двух оставшихся игроков должен был также вычеркнуть такое же слово. Значит оба других игрока вместе должны были вычеркнуть не менее 46 слов. Однако они вычеркнули $25+25=45$ слов. Приходим к противоречию, значит описанная в задаче ситуация невозможна. ■

Задача 8.5. Как на стол поставить **а)** как можно меньше, **б)** ровно 8 одинаковых кубиков так, чтобы полностью были видны ровно 23 грани кубиков, а остальные грани видны не были?



Ответ: **а**)Пример показан на картинке; **б**)Необходимо хотя бы 5 кубиков.



Решение. **б**)У каждого кубика всего 6 граней, на одной он стоит, значит, видно максимум 5. Если кубиков четыре или меньше, то граней видно 20 или меньше, а нам нужно 23 — не хватает. ■

Задача 8.6. Какова величина угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающими 16 ч 40 мин? Укажите следующий момент времени, когда между ними будет такой угол.

Ответ: $130\dfrac{10}{11}$ минуты.

Решение. За 40 минут часовая стрелка прошла $2/3$ пути от 3 до 4. То есть она отстоит на $10°$ от 3. Минутная стрелка тоже прошла $2/3$ полного круга. То есть она сейчас показывает на 8. Значит, угол между ними равен $15 * (8 - 4) + 10 = 70°$.

За каждую последующую минуту угол между часовой и минутной стрелкой уменьшится на $1/4 - 3 = -11/4°$. Поделим -360 на это число, и узнаем, когда суммарно угол изменится на $360°$. Получается $\frac{1440}{11} = 130\dfrac{10}{11}$ минуты. ■

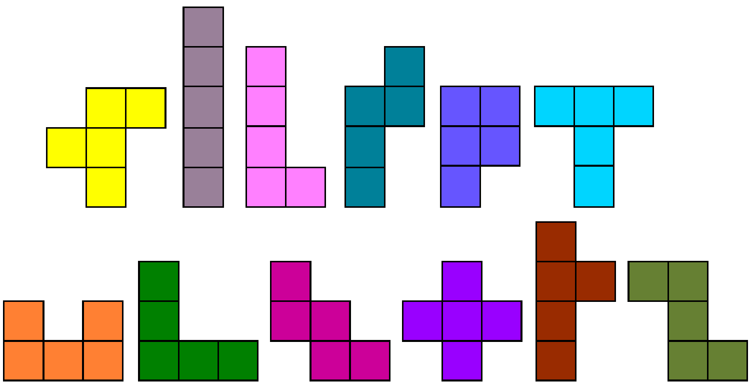
Задача 8.7. Дан клетчатый квадрат 10×10. Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

Решение. У многоугольников разбиения площадь равна 5. При этом сумма их периметров равна $40+2\cdot 80 = 200$. Если доказать, что существует единственный пятиклеточный многоугольник с периметром не больше 10, то задача решена.

Решение 1. Посмотрим на наименьший прямоугольник, в котором помещается этот пятиклеточный многоугольник. Его периметр не меньше периметра многоугольника. Значит, возможен только вариант с прямоугольником 2×3 (сразу вычеркнуты прямоугольники площади меньше 5). Существует только два пятиклеточных многоугольника: в виде буквы "C" и в виде буквы "P". Буква "C" не подходит, у неё периметр равен 12.

Решение 2. Периметр такого многоугольника равен сумме периметров пяти клеток минус удвоенное количество общих границ, соединяющих клетки. Значит, на пять клеток приходится не менее пяти соединений. Поэтому найдётся цикл из клеток многоугольника. Но тогда он содержит квадрат 2×2, любое добавление клетки к которому даст один и тот же многоугольник периметра 10.

Решение 3. Также можно перебрать все пятиклеточные многоугольники, и для каждого посчитать периметр. Всего их 12 штук, они нарисованы на картинке ниже.



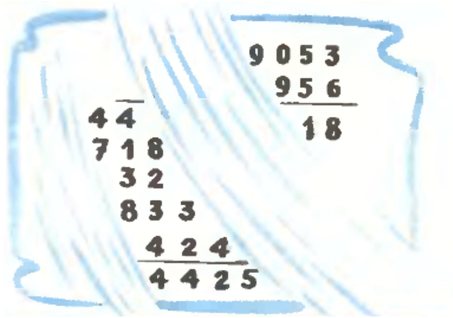
■

Задача 8.8. На циферблате правильно идущих часов барона Мюнхгаузена есть только часовая, минутная и секундная стрелки, а все цифры и деления стёрты. Барон утверждает, что может определять время по этим часам, поскольку, по его наблюдению, на них в течение дня (с 8.00 до 19.59) не повторяется два раза одно и то же расположение стрелок. Верно ли наблюдение барона? (Стрелки имеют различную длину, движутся равномерно.)

Ответ: Верно.

Решение. Допустим, что относительное расположение стрелок повторилось. Это значит, что и минутная, и секундная стрелки совершили целое число оборотов относительно часовой. Так как относительно циферблата минутная стрелка вращается в 12, а секундная – в 720 раз быстрее часовой, то их скорости относительно часовой относятся как (12 – 1) : (720 – 1).

Значит, когда минутная сделает k оборотов относительно часовой, секундная совершит 719/11k оборотов. Последнее число будет целым только при k, кратном 11. Но 11 оборотов относительно часовой минутная стрелка совершит не ранее, чем через 12 часов. Следовательно, барон прав. ■



Дополнительные задачи

Задача 8.9. В одиночных камерах сидят 4 друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке различны, двузначны, и один из этих номеров равен сумме трёх других. Но, даже узнав номера троих других, никто из них не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера?

Ответ: 10; 11; 33; 54.

Решение.

Пусть $10 \leqslant x < y < z < t < 100$ – искомые номера, тогда $t = x + y + z$. Так как математик с номером t не смог узнать свой номер, то $z-(x+y) \geqslant 10$ $\Leftrightarrow z \geqslant x+y+10 \geqslant 31 \Leftrightarrow x+y \geqslant 21$. При этом, $z \neq 31$ и $z \neq 32$, иначе число $z-(x+y)$ совпадет либо с x, либо с y, а тогда математик с номером t узнал бы свой номер. Таким образом, $z = t - x - y \geqslant 33 \Leftrightarrow t \geqslant 33 + x + y \geqslant 54$. Так как математик с номером x также не смог узнать свой номер, то $y + z + t < 100$. Учитывая, что $z \geqslant 33$ и $t \leqslant 54$, получим: $y < 13$, то есть $y = 12$ или $y = 11$. Тогда $z + t < 100 - y < 89$.

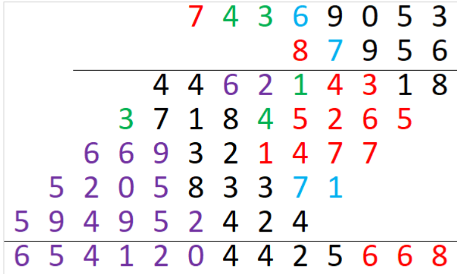
Но $z + t \geqslant 33 + 54 = 87$, то есть $z + t = 87$ или $z + t = 88$. В первом случае $x + y < 23$, , а во втором случае, $x + y < 22$, значит, $x = 10$. Поэтому достаточно проверить только два набора $(x; y; z; t)$: $(10; 11; 33; 54)$ и $(10; 12; 33; 55)$. Первый набор удовлетворяет условию, а второй – нет, так как $12 + 33 + 55 = 100$ (первый математик мог однозначно определить свой номер).

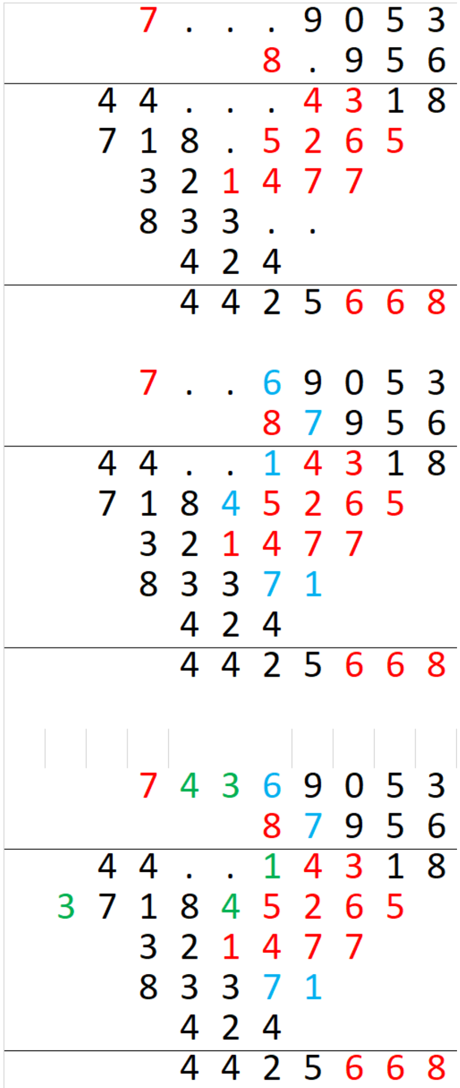
■

Задача 8.10. Когда учитель вошёл в класс, дежурный стирал запись предыдущего урока, которую учитель собирался использовать. Остановив дежурного, учитель попросил его по оставшимся цифрам восстановить стёртые. Можно ли это сделать?

Ответ: Да, можно. Был написан пример: $74369053 \cdot 87956 = 6541204425668$. Тогда получается такая картина, как на рисунке справа.

Решение. Процесс восстановления показан на рисунке. ■





Задача 8.11. Может ли сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ оканчиваться (при каком-либо n) на 2018?

Ответ: Нет, не может.

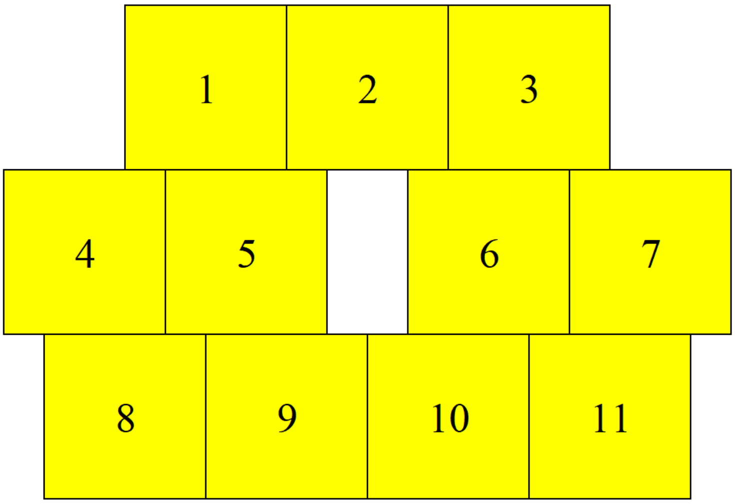
Решение. Удвоенная сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ равна $n^2 + n$, а с другой стороны, должна иметь четыре последние цифры, равные 4036. Это число даёт остаток 1 от деления на 5.

$n^2 + n$ даёт остаток 1 при делении на 5 только при n, дающем остаток 2 от деления на 5. То есть $n = 5k + 2$. Тогда $n^2 + n = (5k + 2)^2 + (5k + 2) = 25k^2 + 25k + 6$. Значит, в этом случае $n^2 + n$ даёт остаток 6 от деления на 25. А 4036 даёт остаток 11 от деления на 25. Значит, такое n подобрать невозможно.

Можно также составить таблицу остатков от деления $n^2 + n$ на 25. ■

Задача 8.12. Расположите на плоскости одиннадцать одинаковых квадратов, не налегающих друг на друга, так, чтобы выполнялось следующее условие: как бы ни покрасить эти квадраты тремя красками, обязательно какие-нибудь два квадрата одного цвета будут иметь общий участок границы.

Решение. Пример показан на рисунке. Квадрат 5 соседствует с квадратами 2, 1, 4, 8, 9. Поэтому, если их удалось покрасить в три цвета, то квадраты 2 и 9 будут одного цвета. Аналогично, рассматривая окружение квадрата 6, получаем, что 2 и 10 одного цвета. Но 9 и 10 — соседние.



■
