Задача 8.1. В пятиэтажном доме с четырьмя подъездами подсчитали число жителей на каждом этаже и, кроме того, в каждом подъезде. Могут ли все полученные 9 чисел быть нечетными?

Ответ: нет

Решение. Допустим, число жителей на каждом этаже и число жителей в каждом подъезде оказалось нечётным. Число жителей во всём доме равно сумме жителей на всех этажах. Так как в доме 5 этажей, то это число будет нечётным. Но это же число можно посчитать, сложив число жителей во всех подъездах. Так как подъездов 4, то получится чётное число. Приходим к противоречию. ■

Задача 8.2. Есть три комнаты и три мальчика: Петя, Вася и Коля. Каждый из мальчиков находится в какой-то из комнат. На двери одной из комнат написано: «Петя тут», на двери другой: «Вася тут», на двери третьей: «Коля тут». Известно, что одна из этих надписей неверна, а две другие верны. Докажите, что в одной из комнат находятся ровно два мальчика.

Ответ:

Решение. Предположим, неверна первая надпись. Тогда Коля и Вася находятся каждый в «своей» комнате, а Петя, наоборот, не в «своей», то есть либо с Колей, либо с Васей. Тогда в этой комнате находятся ровно два мальчика. Аналогичные рассуждения можно провести, если не верна другая надпись. ■

Задача 8.3. На очередном занятии математического кружка каждый школьник получил 8 карточек с числами. Требовалось разложить карточки в две строчки (по 4 карточки в строчку) так, чтобы суммы чисел строчек были равны между собой. Петя разложил карточки так, как показано на рисунке, и немедленно заявил учителю, что задача не имеет решения. **а)** Почему Петя, не занимаясь подробным подсчётом, сделал такое заявление? **б)** Учитель согласился с ним, но сказал, что задачу всё-таки решить можно, надо только... Что сказал учитель? Как решить задачу?

Ответ: **а**) Среди 8 чисел 3 — нечётные, следовательно, в одну из двух строк попадёт нечётное число нечётных чисел, а в другую — чётное. Сумма чисел в одной строке получится чётной, а в другой — нечётной, и они не смогут быть равными.; **б**) Учитель сказал, что надо перевернуть одну из карточек. Карточка «16» после переворачивания превращается в «91», нечётных чисел становится 4, и задача решается: $46 + 91 + 74 + 28 = 37 + 83 + 63 + 56$ или $91 + 37 + 83 + 28 = 46 + 74 + 63 + 56$.

Решение. **б**) Поскольку сумма всех чисел $46 + 91 + 74 + 28 + 37 + 83 + 63 + 56 = 478$, то сумма чисел в каждой строке должна быть равна $478 : 2 = 239$. Значит, в каждой строке должно быть нечётное число нечётных чисел — то есть 1 и 3. Дальше несложно подобрать правильный вариант (тем более, что их несколько). ■

Задача 8.4. В Мексике экологи добились принятия закона, по которому каждый автомобиль хотя бы один день в неделю не должен ездить (владелец сообщает полиции номер автомобиля и «выходной» день недели этого автомобиля). В некоторой семье все взрослые желают ездить ежедневно (каждый — по своим делам!). Сколько автомобилей должно быть в семье, если взрослых в ней 8 человек?

Ответ: 10 автомобилей

Решение. Если все взрослые члены семьи каждый день ездят каждый на отдельной машине, то всего в неделю им нужно $8 \cdot 7 = 56$ автомобиле-дней. Каждый автомобиль ездит 6 дней в неделю, поэтому 9 автомобилей точно не хватит, поскольку $9 \cdot 6 = 54$ автомобиле-дня. А вот 10 уже должно хватить: $6 \cdot 10 = 60 > 56$.

Чтобы показать, как можно распределить 10 автомобилей между всеми членами семьи в течении недели, составим табличку (обозначим буквами A, B, C, D, E, F, G, H членов семьи, а числами — номера автомобилей):

	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
A	1	1	1	1	1	1	2
B	2	2	2	2	2	3	3
C	3	3	3	3	4	4	4
D	4	4	4	5	5	5	5
E	5	5	6	6	6	6	6
F	6	7	7	7	7	7	7
G	8	8	8	8	8	8	9
H	9	9	9	9	9	10	10

Как видно из таблицы, автомобили с номерами 1 и 8 отдыхают в воскресенье, с номерами 2 и 9 — в субботу, 3 и 10 — в пятницу, 4 — в четверг, 5 — в среду, 6 — в во вторник, 7 — в понедельник. ■

Задача 8.5. Три мальчика делили 120 фантиков. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. Затем Ваня дал Толе и Пете столько, сколько у них стало. И наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к тому моменту имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

Ответ: у Вани было 35 фантиков, у Толи — 20 фантиков, а у Пети — 65 фантиков.

Решение. Решаем задачу с конца. Поскольку всего было 120 фантиков, то в конце у каждого оказалось по 40 фантиков. Перед этим Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к тому моменту имелось. То есть Петино и Ванино богатство удвоилось, а перед этим у них было по $40 : 2 = 20$ фантиков, а у Толи — $40 + 20 + 20 = 80$. Предыдущее действие состояло в том, что Ваня дал Толе и Пете столько, сколько у них стало. Значит, Толино и Петино число фантиков удвоилось, значит, у Толи было $80 : 2 = 40$ фантиков, у Пети — $20 : 2 = 10$ фантиков, а у Вани — $20 + 40 + 10 = 70$ фантиков. Наконец, сначала Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было. То есть на этот раз удвоились Ванины и Толины фантики. Следовательно, у Вани было $70 : 2 = 35$ фантиков, у Толи — $40 : 2 = 20$ фантиков, а у Пети — $10 + 20 + 35 = 65$ фантиков.

Удобно записывать решение в таблицу:

Петя	Ваня	Толя
40	40	40
$40 : 2 = 20$	$40 : 2 = 20$	$40 + 20 + 20 = 80$
$20 : 2 = 10$	$20 + 40 + 10 = 70$	$80 : 2 = 40$
$10 + 20 + 35 = 65$	$70 : 2 = 35$	$40 : 2 = 20$

■

Задача 8.6. Известно, что Петя и Вася вместе поймали рыб столько же, сколько Коля и Толя вместе. Кроме того, Петя поймал рыб меньше, чем Толя. Кто поймал больше рыб — Вася или Коля?

Ответ: Вася поймал рыб больше, чем Коля.

Решение. Петя и Вася вместе поймали рыб столько же, сколько Коля и Толя. Поскольку Петя поймал рыб меньше, чем Толя, то, если мы заменим Петиных рыб на Толины, то получится большее число. То есть Толя и Вася вместе поймали рыб больше, чем Коля и Толя. Следовательно, Вася поймал рыб больше, чем Коля. ■

Задача 8.7. У завхоза Васи было трое одинаковых чашечных весов. В одних потерялась часть деталей, и теперь они могут показывать что угодно. Любые весы помещаются на одну чашу других весов. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить неисправные весы?

Ответ: за два взвешивания

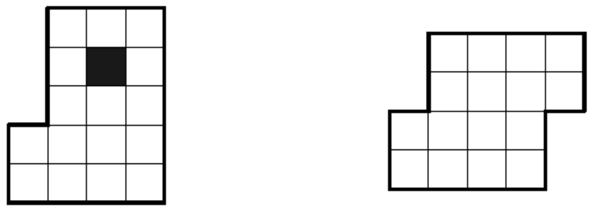
Решение. Поскольку в неисправных весах потерялась часть деталей, то неисправные весы стали легче исправных.

Обозначим весы буквами A, B и C. Сначала взвесим на весах A весы B и C. Если обнаружится равновесие, то весы A неисправные (в самом деле, если весы A исправные, то неисправны либо весы B, либо C, и равновесия быть не могло). Если же равновесия нет, то возможны два варианта: либо весы A всё-таки неисправные (и тогда и B, и C исправные), либо весы A исправные, и тогда весы, находящиеся на перевесившей чашке весов A (то есть B или C), тоже исправные. В любом случае мы определили одни заведомо исправные весы. Произведя уже на них второе взвешивание, распознаём неисправные весы.

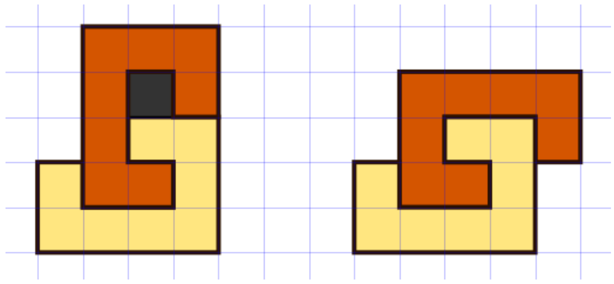
А вот одного взвешивания может не хватить. В самом деле, если первое взвешивание показало неравенство, то неисправными могут оказаться как использованные для взвешивания весы, так и весы на чашке, которая не перевесила, так что определить неисправные весы не удастся.

■

Задача 8.8. Разрежьте фигуру с вырезанным квадратиком на две одинаковые части, из которых можно составить вторую фигуру. Части разрешается и поворачивать, и переворачивать.



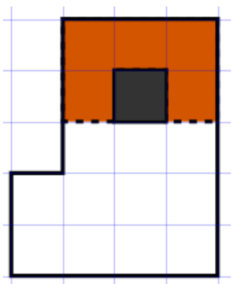
Ответ:



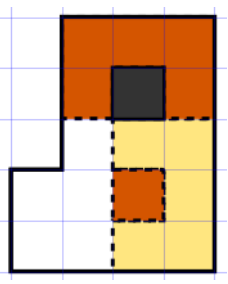
Решение. Сделаем предположение, что можно решить эту задачу, делая разрезы по границам клеток.

Ещё одно предположение будет касаться того, как должны быть повёрнуты одинаковые части, на которые мы её разрежем. Чтобы клетки совпали, нужно или сдвинуть части без поворота (возможно, с переворотом), или повернуть на 180 градусов, или на 90. В первых двух случаях при совмещении частей должы получиться похожие верхняя и нижняя стороны или правая и левая стороны. Поскольку у исходной фигуры верх и низ, а также правая и левая сторона очень непохожи (несимметричны), разумно предположить, что части повёрнуты на 90 градусов (и, может быть, перевёрнуты).

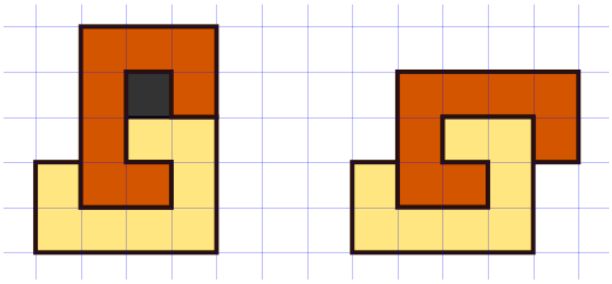
У исходной фигуры есть особенность — пустая клетка, которую нужно обойти. Возможно, обход этой клетки принадлежит одной части, а может быть, что над пустой клеткой стыкуются обе части. Проверим сначала первое предположение. Если оно верно, то искомая часть содержит изгиб в виде буквы П:



Тогда у второй части этот же изгиб, повёрнутый на 90 градусов, может располагаться только так, как на рисунке внизу, а клетка, которую он огибает, должна принадлежать другой части:



Дальше уже понятно, что получаются одинаковые части. Если верхнюю часть перевернуть и повернуть на 90 градусов, то легко складывается вторая фигура:



■

Занятие **29 октября** будет проходить в дистанционной форме, приходить в школу не нужно. Подробности — на странице `shashkovs.ru/vmsh`.
Занятия **5 ноября** не будет по причине праздников.

Дополнительные задачи

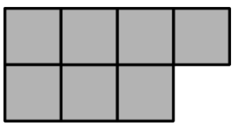
Задача 8.9. Коля заплатил 60 рублей за одну тетрадь, два карандаша и резинку. Саша — 135 рублей за две тетради, три карандаша и три резинки. Сколько заплатил Антон за две тетради, пять карандашей и одну резинку?

Ответ: 105 рублей

Решение. Саша купил на одну тетрадь, один карандаш и две резинки больше, чем Коля, и заплатил на $135 - 60 = 75$ рублей больше. Значит, тетрадь, карандаш и две резинки стоят 75 рублей. Если мы заменим резинку на карандаш, то стоимость предметов уменьшится на $75 - 60 = 15$ рублей. Значит, резинка дороже, чем карандаш, на 15 рублей. Если в Сашином наборе предметов заменить две резинки на два карандаша, то получится то, что купил Антон. Значит, он заплатил на 30 рублей меньше, чем Саша, то есть $135 - 30 = 105$ рублей. ■

Задача 8.10. Как на стол поставить ровно 8 одинаковых кубиков так, чтобы полностью были видны ровно 23 грани кубиков, а остальные грани видны не были?

Ответ: 7 кубиков нужно поставить на стол в два ряда, как показано на рисунке, а восьмой поставить сверху на один из них.



Решение. У 8 кубиков всего $8 \cdot 6 = 48$ граней. Если их просто поставить на стол, останутся видны 40 граней. Когда два кубика сдвигают, число видимых граней уменьшается на 2, когда один кубик ставят на другой, число видимых граней уменьшается на 1. Если сдвинуть кубики так, как показано на рисунке выше, то получится 8 пар кубиков, соприкасающихся боковыми гранями, и количество видимых граней будет $40 - 6 \cdot 2 = 24$. Поставим восьмой кубик сверху и получим 23 видимых грани. ■

Задача 8.11. Каждый из трех игроков записывает 100 слов, после чего записи сравнивают. Если слово встретилось хотя бы у двоих, то его вычеркивают из всех списков. Могло ли случиться так, что у первого игрока осталось 54 слова, у второго — 75 слов, а у третьего — 80 слов?

Ответ: нет, не могло

Решение. Допустим, получилось так, как сказано в условии. Это значит, что первый игрок вычеркнул 46 слов, которые совпали со словами второго и третьего игрока. Значит, второй и третий игрок должны были вычеркнуть столько же слов, или больше — если у них были совпадающие слова, которых не было у третьего. Но второй и третий игрок вычеркнули в сумме $(100 - 75) + (100 - 80) = 45$ слов. Приходим к противоречию. ■

Задача 8.12. Когда учитель вошёл в класс, дежурный стирал запись предыдущего урока, которую учитель собирался использовать. Остановив дежурного, учитель попросил его по оставшимся цифрам восстановить стёртые. Можно ли это сделать?

Ответ:

$$\begin{array}{r}
74369053\\
87956\\
\hline
446214318\\
371845265\\
669321477\\
520583371\\
594952424\\
\hline
6541204425668
\end{array}$$

Решение. Первая строчка вычислений не может быть длиннее, так как видно, что первый множитель короче. Из первых цифр 44 этой строчки получаем, что первая цифра первого множителя равна 7. Из последних цифр пятой строки вычислений 424 получаем первую цифру второго множителя 8. Так же перемножим правые части чисел, которые остались нестёртыми:

$$\begin{array}{r}
7\,.\,.\,.\,9053\\
8\,.\,956\\
\hline
44\,.\,.\,.\,.\,4318\\
718\,.\,5265\\
321477\\
833\,.\,.\\
424\\
\hline
4425668
\end{array}$$

Зная сумму, находим последнюю цифру в четвёртой строке вычислений: 1. Тогда вторая цифра второго множителя равна 7.

$$\begin{array}{r}
7\,.\,.\,69053\\
87956\\
\hline
44\,.\,.\,14318\\
71845265\\
321477\\
83371\\
424\\
\hline
4425668
\end{array}$$

Теперь можно полностью восстановить вторую строчку вычислений и по ней определить недостающие цифры первого множителя:

$$\begin{array}{r}
74369053\\
87956\\
\hline
44\,.\,.\,14318\\
371845265\\
321477\\
83371\\
424\\
\hline
4425668
\end{array}$$

Зная множители, можно восстановить всю запись. ■
