Чётность

Задача 4.1. Деревянный куб покрасили снаружи белой краской, каждое его ребро разделили на 4 равные части, после чего куб распилили так, что получились маленькие кубики, у которых ребро в 4 раза меньше, чем у исходного куба. **а)** Сколько получилось маленьких кубиков? **б)** Сколько из них с одной окрашенной гранью? **в)** Сколько из них с двумя окрашенными гранями? **г)** Сколько из них с тремя окрашенными гранями? **д)** Сколько из них неокрашенных?

Ответ: а) 64, б) 24, в) 24, г) 8, д) 8

Решение. а) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

б) Кубики, у которых окрашена ровно одна грань, находятся в середине граней большого куба. Их $4 \cdot 6 = 24$.

в) Кубики, у которых окрашено ровно две грани, находятся в середине рёбер. Их $2 \cdot 12 = 24$.

г) Кубики с тремя окрашенными гранями находятся в вершинах большого куба. Их 8.

д) Неонрашенные кубики находятся в центре большого куба. Их $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ■

Задача 4.2. В гости к трём мушкетёрам пришёл Али-Баба и сорок разбойников. Каждый вновь пришедший пожимал руки всем присутствующим. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Ответ: 943 рукопожатия.

Решение. Первый гость, когда пришёл, пожал руку троим. Второй, когда пришёл, пожал руку четверым, и так далее. Последний пожал 43 руки. Нужно посчитать сумму последовательных чисел от 3 до 43. Заметим, что эти числа можно объединить в пары, сумма которых будет одинакова, например: 3 и 43, 4 и 42, ..., 22 и 24. В сего чисел 41, поэтому получим 20 пар, и одно число останется без пары. Получаем: $46 \cdot 20 + 23 = 943$.

Можно отложить первое или последнее число и сгруппировать по парам по-другому, тогда получается $45 \cdot 20 + 43 = 943$ или $47 \cdot 20 + 3 = 943$ (дети предлагали такие решения).

■

Задача 4.3. Хулиган Гоша порвал школьную стенгазету на 3 части. После этого он взял один из кусков и тоже порвал на 3 части. Потом опять один из кусков порвал на 3 части и т.д. Могло ли у него в итоге получиться 100 частей?

Ответ: не могло

Решение. Заметим, что после того, как одну из частей порвут на три, число частей увеличивается на 2. Вначале была 1 часть, и, прибавляя по 2, мы получим только нечётные числа.

■

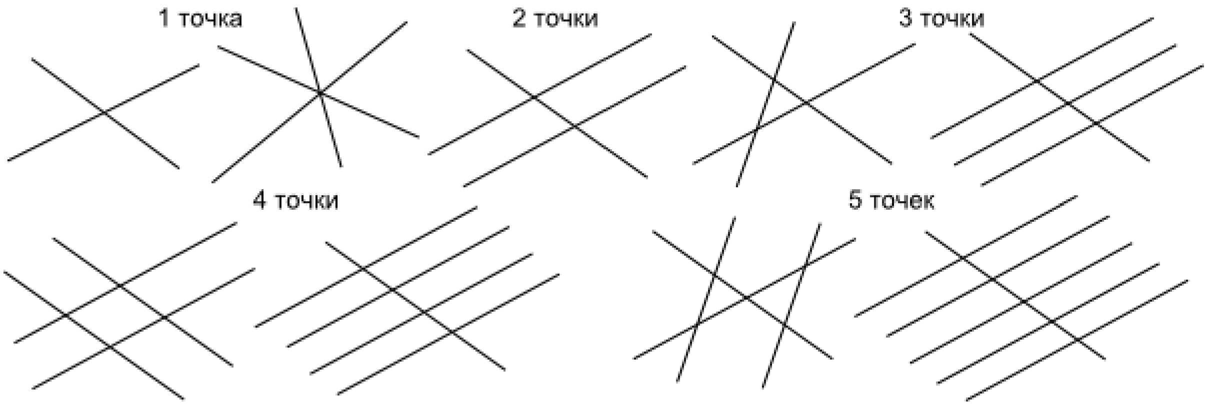
Задача 4.4. На чудо-дереве росли 30 апельсинов и 25 бананов. Каждый день садовник снимал ровно два фрукта. Причем, если он снимал одинаковые фрукты, то на дереве появлялся новый банан, а если разные — новый апельсин. В конце концов, на дереве остался один фрукт. Какой: банан или апельсин?

Ответ: банан

Решение. Если садовник снимает разные фрукты, то число апельсинов не меняется. А если срывает одинаковые, то число апельсинов либо не меняется, либо уменьшается на два. То есть при обоих действиях чётность количества апельсинов не меняется. Поскольку вначале апельсинов было чётное число, то остаться один мог только банан. (Это возможно, так как число бананов при обоих операциях иеняется на 1.) ■

Задача 4.5. Пятиклассник Петя нарисовал 5 рисунков. На каждом рисунке он изобразил несколько прямых и отметил все их точки пересечения друг с другом. В результате на первом рисунке он отметил всего 1 точку, на втором — 2, на третьем — 3, на четвертом — 4 и на пятом — 5. **а)** Приведите примеры таких рисунков. **б)** Про какие из Петиных рисунков можно наверняка сказать, сколько на них проведено прямых?

Ответ: а)на рисунке; **б**)на первом — 2, на втором — 3



Решение. **б**) Две точки пересечения можно получить только из трёх прямых, если две из них параллельны. В остальных случаях может быть несколько вариантов. ■

Задача 4.6. Ганс Кристианович написал на доске 50 чисел. Отличник Яша заметил, что сумма любых 49 чисел нечётна. Можно ли определить, чётна или нечётна сумма всех чисел?

Ответ: сумма всех чисел чётна

Решение. Возьмём какие-нибудь 49 чисел. Поскольку их сумма нечётна, значит, среди них есть хотя бы одно нечётное число. Рассмотрим 49 чисел, в которые не входит это число. Сумма этих чисел тоже будет нечётной. А если добавить к ним оставшееся нечётное число, то сумма всех чисел окажется чётной. ■

Задача 4.7. Белоснежка попросила 7 гномов подарить ей на день рождения бусы из 35 красных и синих бусин. Могут ли гномы сделать так, **а)** чтобы при этом любые две соседние бусины были разных цветов? **б)** чтобы любые бусины, идущие через одну, были разных цветов?

Ответ: **а**)нет, не могут,; **б**) нет, не могут

Решение. Пронумеруем бусины от 1 до 35, 35-я соединена с 1-й. Пусть, например, первая бусина будет красной. Попробуем раскрасить остальные бусины, начиная с первой, в соответствии с требованиями задачи.

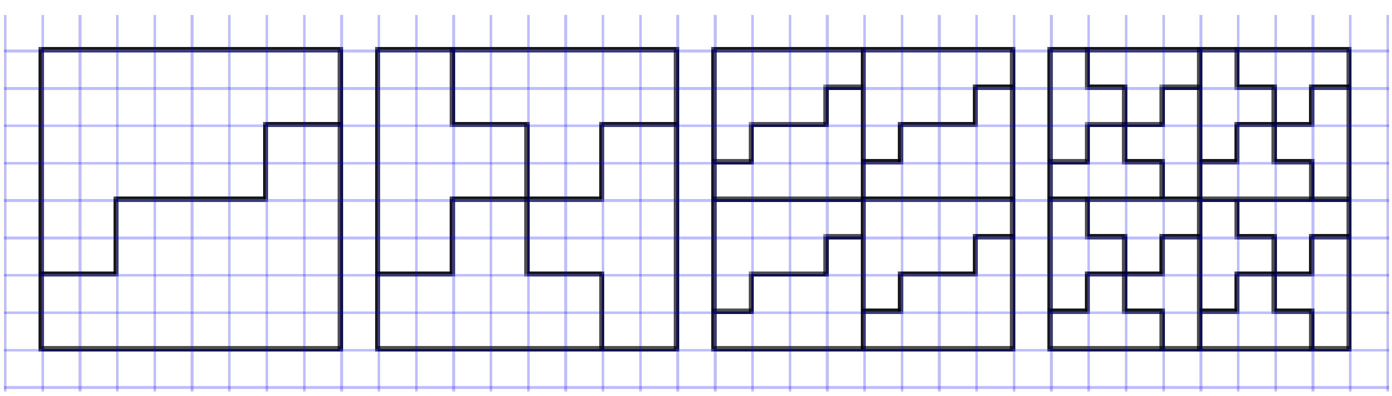
а)Если соседние должны быть разного цвета, то 2-я будет синяя, 3-я красная, ... Нечётные бусины должны быть красными, а чётные синими. 35-я окажется красной, но она рядом с первой, и условие не выполнится.

б)Красим бусины через одну то в красный, то в синий цвет: сначала 1-ю, потом 3-ю, 5-ю, ... и так все нечётные до 35. Через одну от 35 идёт 2-я бусина. Теперь красим все чётные. Последняя будет 34-я. Она должна быть красного цвета, поскольку всего бусин нечётное число. Но через одну от неё находится 1-я бусина, а она тоже красная. Условие не выполнено. ■

Задача 4.8. На сколько равных восьмиугольников можно разрезать квадрат размером 8×8? (Все разрезы должны проходить по линиям сетки.) Укажите все возможные варианты.

Ответ: На 2, 4, 8 и 16 восьмиугольников.

Решение. Квадрат 8 на 8 состоит из 64 клеточек. Это число делится на 2, 4, 8, 16, 32. То есть одинаковые части, на которые мы его разрежем, могут состоять только из 2, 4, 8, 16, 32 клеточек. 2 клеточки не подходят, так как не существует такого восьмиугольника. Остальные варианты показаны на рисунке.



■

Дополнительные задачи

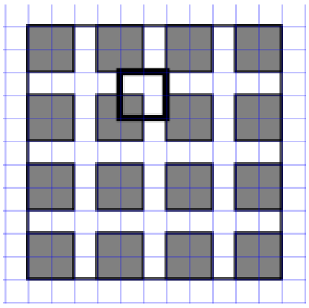
Задача 4.9. Первоклассник Петя знает только нечётные цифры. Он написал три пятизначных числа. Его старший брат сложил эти числа. Могло ли получиться, что Петя **а)** не знает ни одну из цифр получившейся суммы? **б)** знает только одну из цифр получившейся суммы?

Ответ: **а**)не могло; **б**)могло

Решение. **а**)Сумма трёх нечётных чисел тоже будет нечётной, поэтому последняя цифра в сумме обязательно будет Пете знакома.

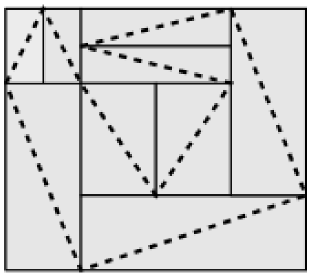
б)Да, могло. Например: $95555 + 95555 + 95555 = 286665$ ■

Задача 4.10. Из листа клетчатой бумаги размером 11×11 клеток вырезали (по клеткам) 15 квадратиков размером 2×2 клетки. Докажите, что можно вырезать ещё один такой квадратик.



Решение. Прежде чем вырезать квадратики $2/times2$, раскрасим внутри большого квадрата 16 квадратов $2/times2$, как показано на рисунке. Любой вырезанный квадратик может пересекаться только с одним закрашенным квадратом. Поэтому, когда мы вырежем 15 квадратиков, один из закрашенных квадратов останется целым. Его и нужно вырезать 16-м. ■

Задача 4.11. Малый и Большой острова имеют прямоугольную форму и разделены на прямоугольные графства. В каждом графстве проложена дорога по одной из диагоналей. На каждом острове эти дороги образуют замкнутый путь, который ни через какую точку не проходит дважды. На рисунке изображено, как устроен Малый остров, где всего 6 графств. Нарисуйте, как может быть устроен Большой остров, если на нём нечётное число графств.



Ответ: Один из вариантов решения показан на рисунке.

Задача 4.12. В заповеднике живут 16 жирафов, все разного роста. Постройте этих жирафов в ряд так, что, какие бы 11 из них ни убежали, оставшиеся пятеро будут стоять *не* по росту. (По росту — значит в порядке убывания роста или в порядке возрастания роста.)

Ответ: 13 14 15 16 9 10 11 12 5 6 7 8 1 2 3 4

Решение. Выстроим жирафов по росту и разобьём на четвёрки:

(1 2 3 4) (5 6 7 8) (9 10 11 12) (13 14 15 16)

А потом, не меняя порядка внутри четвёрок, переставим четвёрки в обратном порядке:

(13 14 15 16) (9 10 11 12) (5 6 7 8) (1 2 3 4)

В возрастающем порядке жирафы стоят только внутри четвёрок, и таких построенных по росту жирафов может быть не больше 4. Если оставлять жирафов из разных четвёрок, то можно получить убывающий ряд, и в нём тоже не больше 4 построенных по росту жирафов. ■
