Master Informatique 1

Correction TD Infographie

Géométrie Elémentaire

Formulations cartésienne/paramétrique de quelques primitives de base dans $\mathbb{R}^3$: sphère, cylindre, cône et tore. Ces formulations serviront directement de base pour la modélisation 3D de ces primitives.

▸ Exercice 1. (Une droite dans $\mathbb{R}^2$...)

On travaille en dimension 2, dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{R}(O, x, y)$.
On part du principe que les seuls "objets" que l'on peut manipuler sont le **Point** et le **Vecteur** :

- Le point, défini par 2 coordonnées $P(x, y)$
- Le vecteur, défini par 2 coordonnées $\vec{u}(x, y)$

Ces "primitives" sont très faciles à représenter par un objet (ou structure(1)) informatique.

☞ A partir de ces primitives, donner plusieurs façons de caractériser une droite du plan.

☞ De là, caractériser, par des équations simples, le fait qu'un point $P(x, y)$ appartienne à une droite.

✂ -

☞
- 2 points $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$
- 1 point $A(x_a, y_a)$ et un vecteur $\vec{u}(x_u, y_u)$

Ces deux représentations sont bien sûr équivalentes : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $B = A + \vec{u}$.

☞
- $P(x, y) \in (AB) \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $y = a.x + b$
  Les coeff. a et b, caractéristiques de la droite, s'exprimant à partir des coord. de A et B
- $P(x, y) \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ *tels que* $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$
  $P(x, y) \in (A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ *tels que* $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$

Rappel : (quelle que soit la dimension n de l'espace de travail – pour nous, ça sera 2 ou 3)

- équation cartésienne : une seule équation liant les n coordonnées (ex. $f(x, y) = 0$)
  ☞ pour la droite dans $\mathbb{R}^2$: $f(x, y) = y - a.x + b = 0$.
- équation paramétrique : $n - 1$ paramètres liants les n coordonnées dans un système à n équation.
  ☞ pour la droite dans $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u} \Leftrightarrow M = A + t.\vec{u} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = x_a + t.x_u \\ y = y_a + t.y_u \end{array} \right.$.

Quelques points importants :

- Les 2 représentations (cartésienne et paramétrique) co-existent toujours et sont interchangeables
- Selon la situation, on préférera l'une ou l'autre, mais...
- ... pour la droite c'est **toujours** la représentation paramétrique !!!
- La représentation paramétrique est plus "proche" d'une représentation géométrique intuitive des objets.

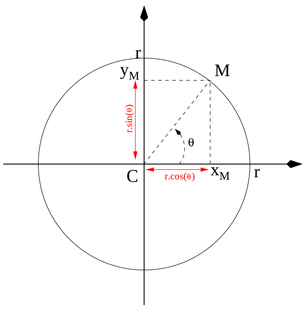
---

(1)pour la 3D : types `G3Xpoint` et `G3Xvector` définis dans `<g3x_Geom.h>`

▸ **Exercice 2.** **(Le cercle et la sphère)**

1. Donner, dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{R}(O,x,y)$, les équations cartésienne et paramétrique d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $C(x_c,y_c)$ et de rayon r.
2. Même question dans $\mathbb{R}^3$ pour la sphere $\mathcal{S}_0$ de centre $\Omega=(0,0,0)$ et de rayon 1.
3. Même question dans $\mathbb{R}^3$ pour un ellipsoïde $\mathcal{E}$ de centre $C(x_c,y_c,z_c)$ et de rayons axiaux r_x, r_y et r_z.

1. le cercle $\mathcal{C}_{(C,r)}$



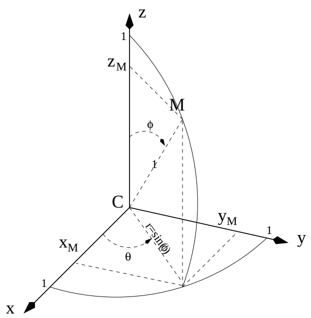
Equation cartésienne :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{(C,r)} \Leftrightarrow (x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$$

Equation paramétrique :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{(C,r)} \Leftrightarrow \exists\theta\in[0,2\pi[\ \textit{tel que}\ \left\{\begin{array}{l} x=x_c+r\cos(\theta) \\ y=y_c+r\sin(\theta) \end{array}\right.$$

2. la sphère $\mathcal{S}_0=\mathcal{S}_{(\Omega,1)}$



Equation cartésienne :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$$

Equation paramétrique :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_0 \Leftrightarrow \exists\left\{\begin{array}{l} \theta\in[0,2\pi[\\ \phi\in[0,\pi[\end{array}\right.\ \textit{tels que}\ \left\{\begin{array}{l} x=\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y=\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z=\cos(\phi) \end{array}\right.$$

3. l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{(C,r_x,r_y,r_z)}$

C'est un simple changement de repère : homothétie de rapports (r_x,r_y,r_z) et translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega C}$.
Pour obtenir les équations, c'est une combinaison des deux points précédents (le cercle $\mathcal{C}_{(C,r)}$ et la sphère $\mathcal{S}_0$).

Equation cartésienne :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_{(C,r_x,r_y,r_z)} \Leftrightarrow \left(\frac{x-x_c}{r_x}\right)^2+\left(\frac{y-y_c}{r_y}\right)^2+\left(\frac{z-z_c}{r_z}\right)^2=1$$

Equation paramétrique :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_{(C,r_x,r_y,r_z)} \Leftrightarrow \exists\left\{\begin{array}{l} \theta\in[0,2\pi[\\ \phi\in[0,\pi[\end{array}\right.\ \textit{tels que}\ \left\{\begin{array}{l} x=x_c+r_x\cos(\theta)\sin(\phi) \\ y=y_c+r_y\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z=z_c+r_z\cos(\phi) \end{array}\right.$$

▸ Exercice 3. (autres primitives classiques)

Donner les équations paramétriques (uniquement) des objets "canoniques" suivants :

1. Le cylindre $\mathcal{C}y_{(\Omega,1,2)}$, centré sur l'origine, de rayon 1, de hauteur 2
   ☞ attention, le cylindre a une face supérieure et une face inférieure.

2. Le cône $\mathcal{C}o_{(\Omega,1,2)}$, centré sur l'origine, de rayon de base 1, de hauteur 2
   ☞ attention, le cône a une face supérieure et une face inférieure.

3. Le tore $\mathcal{T}_{(\Omega,1,r)}$, centré sur l'origine, de rayon principal 1, de rayon secondaire $r < 1$.

✂ -

1. le cylindre $\mathcal{C}y_{(\Omega,1,2)}$

Bandeau : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}y_{(\Omega,1,2)} \Leftrightarrow \exists \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi[\\ t \in [-1, +1[\end{cases} \textit{tels que} \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = t \end{cases}$

Face supérieure : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}y_{(\Omega,1,2)} \Leftrightarrow \exists \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi[\\ r \in [0, +1[\end{cases} \textit{tels que} \begin{cases} x = r * \cos(\theta) \\ y = r * \sin(\theta) \\ z = +1 \end{cases}$

Face inférieure : idem, avec $z = -1$

2. le cône $\mathcal{C}o_{(\Omega,1,2)}$

Bandeau : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C}o_{(\Omega,1,2)} \Leftrightarrow \exists \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi[\\ t \in [-1, +1[\end{cases} \textit{tels que} \begin{cases} x = \frac{1-t}{2} * \cos(\theta) \\ y = \frac{1-t}{2} * \sin(\theta) \\ z = t \end{cases}$

Face inférieure : comme le cylindre

3. le tore $\mathcal{T}_{(\Omega,1,r)}$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_{(\Omega,1,r)} \Leftrightarrow \exists \begin{cases} \theta \in [0, 2\pi[\\ \phi \in [0, 2\pi[\end{cases} \textit{tels que} \begin{cases} x = +\cos(\theta) * (1 + r * \cos(\phi)) \\ y = -\sin(\theta) * (1 + r * \cos(\phi)) \\ z = +r * \sin(\phi) \end{cases}$$

où θ est l'angle sur le cercle de base (de rayon 1) et ϕ est l'angle sur le cercle secondaire (de rayon r)

- ✂

▸ **Exercice 4.** **(les formes canoniques et leurs normales)**

A partir des équations paramétriques des 4 formes canoniques précédentes (Sphère, Cylindre, Cône, Tore), donner les expressions de la normale en un point quelconque de ces formes (rappel, le cylindre possède une face supérieure et une face inférieure, et le cône seulement une face inférieure).

☞ pour ces formes cano niques, l'expression des normales est triviale. Mais cela cache un piège classique....
cf. supports suivants : la **vraie** définition d'une normale (TD.1-utilitaires), puis les transformations géométriques (TD.5-Transfo)

✂ -

0. la sphere $\mathcal{S}_{(\Omega,1)}$

La normale en un point $M(\theta,\phi)$ est trivialement le rayon : $\overrightarrow{\mathsf{N_M}} = \begin{cases} x = \cos(\theta) * \sin(\phi)) \\ y = \sin(\theta) * \sin(\phi)) \\ z = \cos(\phi) \end{cases}$

1. le cylindre $\mathcal{C}y_{(\Omega,1,2)}$

Bandeau : $M(\theta,t) \Rightarrow \overrightarrow{\mathsf{N_M}} \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = 0. \end{cases}$

Face supérieure/inférieure : $\forall M, \quad \overrightarrow{\mathsf{N_M}} = (0, 0, +/-1)$

2. le cône $\mathcal{C}o_{(\Omega,1,2)}$

Bandeau : $M(\theta,t) \Rightarrow \overrightarrow{\mathsf{N_M}} \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = +1. \end{cases}$

Face inférieure : $\forall M, \quad \overrightarrow{\mathsf{N_M}} = (0, 0, -1)$

3. le tore $\mathcal{T}_{(\Omega,1,r)}$

$M(\theta,\phi) \Rightarrow \overrightarrow{\mathsf{N_M}} \begin{cases} x = +\cos(\theta) * \cos(\phi)) \\ y = -\sin(\theta) * \cos(\phi)) \\ z = +\sin(\phi) \end{cases}$

où θ est l'angle sur le cercle de base (de rayon 1) et ϕ est l'angle sur le cercle secondaire (de rayon r)

- ✂