Université Gustave Eiffel | INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE ET D'INFORMATIQUE GASPARD-MONGE

Master Informatique 1

TD Infographie n°1

utilitaires

Quelques outils fondamentaux de l'Infographie : opérateurs vectoriels & normales

---

Opérateurs : Produit scalaire ($\vec{u}\bullet\vec{v}$) et produit vectoriel ($\vec{u}\wedge\vec{v}$)

On travaille en dimension 3, dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{R}(O,x,y,z)$.
Les produits scalaire et vectoriel sont les 2 opérateurs fondamentaux sur les vecteurs.

- **Produit scalaire** $\vec{u}\bullet\vec{v} = (x_u.x_v) + (y_u.y_v) + (z_u.z_v) \quad \in \mathbb{R}$

  Propriétés :
  $\vec{u}\bullet\vec{v} = \vec{v}\bullet\vec{u}$ (symétrie)
  $\vec{u}\bullet\vec{u} = {x_u}^2 + {y_u}^2 + {z_u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
  $\vec{u}\bullet(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\bullet\vec{v} + \vec{u}\bullet\vec{w}$ (distributivité)
  $\vec{u}\bullet\vec{v} = 0 \Leftrightarrow$ les vecteurs sont orthogonaux
  $\vec{u}\bullet\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

- **Produit vectoriel** $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_u.z_v - z_u.y_v \\ -x_u.z_v + z_u.x_v \\ x_u.y_v - y_u.x_v \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$

  Propriétés (3D) :
  $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$ (attention : anti-symétrie)
  $\vec{u}\wedge(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{w}$ (distributivité)
  $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow$ les vecteurs sont colinéaires
  $||\vec{u}\wedge\vec{v}|| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

  Propriétés (2D) : le produit vectoriel en dimension 2 n'est pas défini, mais...

  $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} x_u \\ y_u \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ x_u.y_v - y_u.x_v \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$

  on peut donc l'interpréter comme un simple scalaire : $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} x_u \\ y_u \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_v \\ y_v \end{vmatrix} = x_u.y_v - y_u.x_v \in \mathbb{R}$

- Vecteur "normés" (i.e. de norme 1)

  en 2D ($\vec{u}\begin{vmatrix} x_u \\ y_u \end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix} x_v \\ y_v \end{vmatrix}$) : $\vec{u}\bullet\vec{v} = \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $\vec{u}\wedge\vec{v} = \sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

  et en 3D : $\vec{u}\bullet\vec{v} = \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $||\vec{u}\wedge\vec{v}|| = \sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Ces 2 opérateurs, très économiques, donnent donc toutes les informations nécessaires : longueur, orientation, direction, angles ....
☞ quel que soit le langage de prog., les fonctions `cos` et `sin` sont TRES coûteuses (basées sur des opérations polynômiales). Il faut limiter leur utilisation au étape de "modélisation" (initialisation).
☞ à l'inverse les opérateurs $\bullet$ et $\wedge$ sont très économiques : 2 multiplications et 1 addition en 2D.
☞ Lorsqu'on a besoin d'un angle (valeur, orientation...) : passer par ces 2 opérateurs

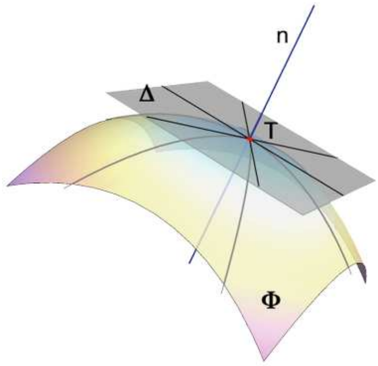
Normales :

Les *normales* (ou vecteurs normaux) sont des éléments indispensables pour une visualisation graphique 3D. Associées à des sommets (vertex) ou facettes, elle permettent de modéliser les interactions de la lumière avec la surface de l'objet, seul moyen d'obtenir un "rendu 3D". Ces interactions seront détaillées dans un sujet ultérieur (TD4-Illum.)

L'interprétation "physique" d'une normale correspond au fait qu'une surface suffisament "lisse"(1) en un point donné, peut être considérée comme localement plane autour de ce point. La *normale* en ce point est alors le vecteur orthogonal à ce plan local(2).

Mathématiquement, la seule **vraie** définition de la *normale* à une surface S en un point P est **le vecteur (normé) orthogonal au *plan tangent* à S en P**.

Le *plan tangent* à S en P est quant à lui définit par 2 vecteurs tangents ($\overrightarrow{t}_0$, $\overrightarrow{t}_1$)



Pour une surface définie par un système d'équations paramétriques $(f(\theta,\phi), g(\theta,\phi), h(\theta,\phi))$, ces tangentes en un point P sont obtenues par dérivations partielles(3), par rapport aux paramètres (θ,ϕ) :

$$\overrightarrow{t_0} = \left(\frac{df}{d\theta}, \frac{dg}{d\theta}, \frac{dh}{d\theta}\right) \quad \|\overrightarrow{t_0}\| = 1$$
$$\overrightarrow{t_1} = \left(\frac{df}{d\phi}, \frac{dg}{d\phi}, \frac{dh}{d\phi}\right) \quad \|\overrightarrow{t_1}\| = 1$$

La *normale* $\overrightarrow{N_P}$ en P est alors définie comme le **produit vectoriel des tangentes** : $\overrightarrow{N_P} = \overrightarrow{t_0} \wedge \overrightarrow{t_1}$ $(\|\overrightarrow{N}\| = 1)$

Une normale est donc **toujours** définie comme un **produit vectoriel**, même si concrètement on l'obtiendra par des méthodes beaucoup plus simples. Cette définition aura un impact par la suite, avec l'utilisation des transformations géométriques (T5a-Transfo.) notamment les **homothéties**.
Il faut aussi faire attention à l'**orientation** de la normale : par défaut, vers l'*extérieur* de la surface.

(1) *mathématiquement : surface $\mathcal{C}^1$ (continue, de dérivées continues)*

(2) *l'exemple le plus simple est la notion d'"horizontale" à la surface de la sphere terrestre : la* normale *n'est autre que la direction "verticale" locale.*

(3) *en pratique on n'a que rarement recours à ces calculs, les objets manipulés étant très simples*