



Variáveis aleatórias discretas unidimensionais

Introdução a variáveis aleatórias discretas, distribuições Bernoulli e binomial, distribuições geométrica e hipergeométrica, distribuição de Poisson.

Prof. Paulo H. C. Maranhão

Propósito

Compreender os conceitos associados às variáveis aleatórias discretas e as principais distribuições discretas de probabilidade.

Preparação

Antes de iniciar este conteúdo, tenha em mãos uma calculadora científica ou use a de seu smartphone ou computador e faça o download do [Solucionário](#). Você encontrará nele o feedback das atividades.

Objetivos

- Descrever os conceitos de variáveis aleatórias discretas unidimensionais
- Descrever as distribuições de Bernoulli e binomial
- Descrever as distribuições geométrica e hipergeométrica
- Descrever a distribuição de Poisson

Introdução

Olá! Antes de começarmos, assista ao vídeo a seguir e compreenda os conceitos de variáveis aleatórias discretas unidimensionais.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

As variáveis aleatórias e a distribuição de probabilidades

Iniciaremos o estudo de um dos tópicos mais importantes da teoria das probabilidades. Aqui serão vistos todos os conceitos fundamentais que nos levarão ao bom entendimento de variáveis aleatórias discretas unidimensionais e das principais distribuições de probabilidades discretas.

Confira, neste vídeo, o que são as variáveis aleatórias unidimensionais e como elas são utilizadas para determinar a distribuição de probabilidades.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Variáveis aleatórias

Seja E um experimento aleatório e S o espaço amostral associado a esse experimento. Uma função X que associa o número real $X(s)$ a cada elemento $s \in S$ é chamada **variável aleatória**.

$$X : S \rightarrow R$$

Exemplo 1

Considere lançar três moedas de modo aleatório, no qual **Image** é a variável aleatória que conta o número de caras nesse experimento.

Descreva o possível espaço amostral e os valores da variável aleatória Image para cada elemento do espaço amostral. Em seguida, confira a **solução** do exemplo.

Descrevendo o espaço amostral

Veja, neste vídeo, o que é um espaço amostral e como é possível descrevê-lo para analisar melhor uma distribuição.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 2

Considere jogar uma única vez dois dados cúbicos usuais e não tendenciosos. X a variável aleatória que associa a cada evento (isto é, o par de valores obtidos em suas faces) a soma dos valores obtidos nas faces.

Qual é o conjunto imagem da variável aleatória?

Solução:

Note que cada dado pode exibir valores entre um e seis. Logo, a soma pode assumir os valores inteiros entre dois e 12. Ou seja, o conjunto desejado é

$$\{2; 3; 4; \dots; 12\}$$

Variável aleatória discreta

Seja X uma variável aleatória. Se os possíveis valores assumidos por X forem finitos ou infinitos enumeráveis, dizemos que X é uma variável aleatória discreta.

Função de probabilidade (função de massa de probabilidade)

É a que associa a cada valor assumido pela variável aleatória uma probabilidade dada por:

$$P(X = x) \text{ ou simplesmente } p(x)$$

Devendo satisfazer às seguintes condições:

Condição I

$$p(x_i) > 0$$

Condição II

$$\sum P(x_i) = 1$$

Exemplo 3

Determine a função de distribuição acumulada para o experimento de jogar uma moeda três vezes e avaliar a quantidade obtida de caras.

Solução:

Note que, se há três moedas, podemos modelar as possibilidades pela árvore de decisão indicada. Perceba que cara = 1, e coroa = 2:

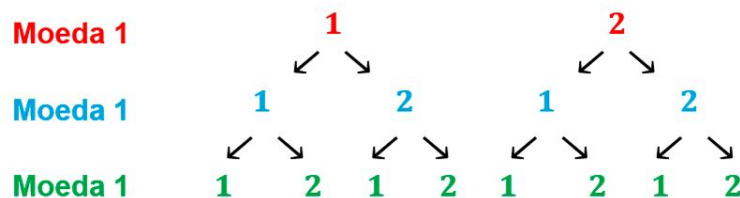


Ilustração de árvore de decisão para solucionar um caso de função de distribuição. Paulo H. C. Maranhão

Podemos modelar também por meio dos oito ternos ordenados, que explicitam os resultados:

$(1; 1; 1); (1; 1; 2); (1; 2; 1); (1; 2; 2)$
 $(2; 1; 1); (2; 1; 2); (2; 2; 1); (2; 2; 2)$

Ilustração dos oito ternos para solucionar um caso de função de distribuição.

Como as moedas não são viciadas, cada um dos oito **resultados** tem probabilidade de $1/8$.

Desse modo, podemos consolidar as situações de 0 cara, 1 cara, 2 caras ou 3 caras, e assim por diante.

Confira na tabela a seguir!

X	Situações	$P(X = x)$
0	(2 ; 2 ; 2)	$1/8$
1	(1 ; 2 ; 2) ; (2 ; 1 ; 2) ; (2 ; 2 ; 1)	$1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$
2	(1 ; 1 ; 2) ; (1 ; 2 ; 1) ; (2 ; 1 ; 1)	$1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$
3	(1 ; 1 ; 1)	$1/8$

Tabela de resolução contendo a probabilidade do caso dado.

Paulo H. C. Maranhão

A distribuição de frequência apresenta o gráfico a seguir.

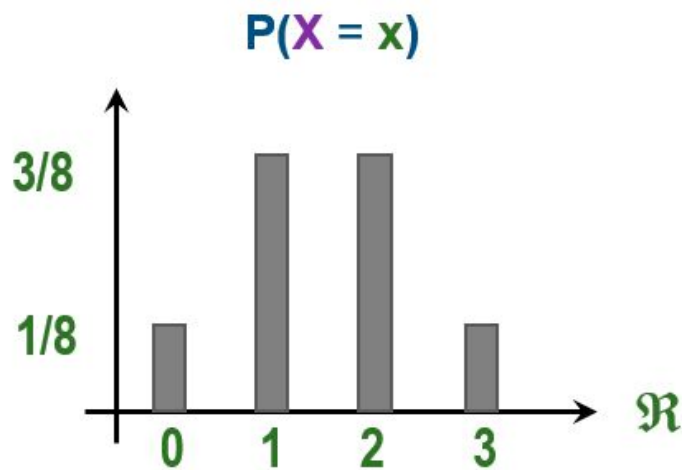


Gráfico de solução do exemplo.

Função distribuição acumulada (repartição)

Seja X uma variável aleatória discreta. Define-se por função distribuição acumulada a seguinte expressão:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Exemplo 4

Determine a função de distribuição acumulada do exemplo das três moedas. Após, confira a **solução** do exemplo no vídeo a seguir.

A distribuição acumulada e a moeda

Veja, neste vídeo, como é possível determinar a função de distribuição acumulada em um simples jogo de moedas.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Esperança matemática (valor esperado ou média)

Neste vídeo, você vai aprender como utilizar a esperança matemática em uma distribuição matemática. Confira!



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Seja X uma variável aleatória. O valor esperado ou média de uma variável aleatória é representado pela seguinte expressão:

$$\mu_X = E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$$

Exemplo 5

Exemplo das três moedas. Seja X : “Número de caras no lançamento de três moedas”.

Solução:

A esperança matemática de X é dada por:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) \\ E(X) &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Propriedades

Considere X e Y variáveis aleatórias e a e b constantes. Então:

- $E(aX) = a \cdot E(X)$
- $E(aX \pm b) = a \cdot E(X) \pm b$;
- $E(aX \pm bY) = a \cdot E(X) \pm b \cdot E(Y)$

Variância

Vamos começar analisando um exemplo cotidiano em um ambiente escolar para entendermos a variância.

Exemplo 6

Dadas as notas obtidas por uma turma de 15 estudantes em três provas, analise em qual delas lhe parece ter havido desempenho menos **espalhado**. Ou seja, em qual delas os resultados se concentraram mais em torno da média da respectiva prova.

No entanto, note que nas três provas a **média** é a mesma. Assim, as perguntas que se impõem são:

- Como medir a **dispersão** de um conjunto de dados em torno de sua **média** ou de qualquer número **real** escolhido?
- Qual o papel da **média aritmética** quando medimos dispersão minimizando o **desvio quadrático** dos dados em torno de um número real arbitrário?

O resultado está na tabela. Acompanhe!

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	Média
Prova 1	5	5	5	6	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	7,2
Prova 2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	9	9	10	10	10	10	7,2
Prova 3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	7,2

Tabela: resultado do exemplo.

Paulo H. C. Maranhão

Seja X uma variável aleatória discreta. Então, a variância de X é dada por:

$$V(X) = \sum_x (X - \mu_X)^2 P(X = x)$$

$$V(X) = E[(X - \bar{X})^2] = E(X^2) - E(X)^2, \text{ em que } E(X^2) = \sum_x x^2 P(x)$$

Propriedades

Sejam X e Y variáveis aleatórias e a e b constantes, então:

- $V(a) = 0$
- $V(aX + b) = a^2 \cdot V(X)$

Teoria na prática

Um banco oferece seguro residencial que cobre acidentes como incêndio e catástrofe no valor de R\$100.000,00. Ele cobra do segurado uma taxa anual de R\$1.000,00. Sabendo que a probabilidade de ocorrer incêndio ou qualquer tipo de catástrofe em um ano é de 0,001, qual será o lucro esperado por cliente do banco?

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Considere uma moeda honesta. Ela é jogada quatro vezes. Seja X a variável aleatória que representa o número de caras. Quais os possíveis valores dessa variável aleatória?

A

$\{0, 1, 2, 3\}$

B

$\{1, 2, 3\}$

C

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$

D

$\{1, 2, 3, 4\}$

E

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



A alternativa C está correta.

Veja que, ao lançar uma moeda quatro vezes, podem ocorrer de 0 a 4 faces cara!

Questão 2

Considerando o enunciado anterior, qual seria o valor esperado do número de caras?

A

1

B

2

C

$5/2$

D

3

E

$10/3$



A alternativa B está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário, disponibilizado no campo preparação.

Questão 3

Um jogador participa de um jogo de aposta que consiste em lançar um dado. Se o dado resultar em face 6, ele ganha R\$10,00, caso contrário, ele perde R\$5,00. Depois de duas rodadas, ou seja, de lançarmos o dado duas vezes, qual a probabilidade desse jogador ter ganho positivo?

A

$1/36$

B

$1/6$

C

$5/18$

D

$11/36$

E

1/3



A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 4

Considerando o enunciado anterior, qual seria o ganho esperado do jogador?

A

-5

B

0

C

5

D

10

E

20



A alternativa A está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário, disponibilizado no campo preparação.

Questão 5

Suponha que uma variável aleatória tenha a seguinte distribuição de probabilidade:

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Tabela: Dados do exercício.

Paulo H. C. Maranhão

Determine a função de distribuição acumulada para $X = 2$.

A

0,1

B

0,3

C

0,4

D

0,7

E

0,8



A alternativa E está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário, disponibilizado no campo preparação.

Questão 6

Considerando o enunciado anterior, qual seria a variância da variável aleatória X ?

A

0,81

B

1,7

C

3,7

D

4,2

E

4,64



A alternativa A está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário, disponibilizado no campo preparação.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Uma família pretende ter 3 filhos. Supondo que a chance de ter um menino é a mesma de ter uma menina e sendo X a variável aleatória que representa o número de meninas, determine a chance de X ser no mínimo igual a 2.

A

$1/8$

B

$3/8$

C

$1/2$

D

$5/8$

E

$7/8$



A alternativa C está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 2

Um estudante pode escolher no mínimo uma disciplina e no máximo 4 disciplinas para fazer no semestre. A probabilidade de que o estudante escolha 1, 2, 3 ou 4 disciplinas no semestre é de, respectivamente, $1/20$, $1/4$, $2/5$ e $3/10$. Sabendo que para cada disciplina escolhida ele paga R\$300,00, qual a despesa esperada desse estudante?

A

525

B

640

C

735

D

885

E

910



A alternativa D está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Introdução

A ideia do estudo das distribuições de probabilidade é determinar uma formulação matemática para fenômenos que ocorrem frequentemente no cotidiano ou que se deseja calcular. A seguir, apresentaremos duas das principais distribuições discretas de probabilidade que têm características em comum e muitas aplicações práticas.

As distribuições de Bernoulli e Binomial

Veja, neste vídeo, duas distribuições matemáticas utilizadas para variáveis aleatórias: bernoulli e binomial.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Distribuição de Bernoulli

Considere uma única tentativa de um experimento que só tem dois possíveis resultados: Sucesso com probabilidade p e fracasso com probabilidade q , na qual $p + q = 1$.

Seja a variável aleatória X que representa o sucesso nessa única tentativa. Então, podemos dizer que X pode assumir dois valores: 0 (fracasso) e 1 (sucesso). Veja.

X	0	1
$P(X = x)$	q	p

Tabela: Probabilidade da variável X .
Paulo H. C. Maranhão

Assim, a função de probabilidade da variável X pode ser dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} p, & \text{se } x = 1 \\ q, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Notação: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

Esperança matemática (média)

O conceito de esperança ou média é mais uma informação interessante sobre a distribuição de probabilidade. Assim,

$$E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Variância

Assim como a média, a variância é outra informação importante sobre o comportamento da dispersão em torno da média da distribuição de probabilidade. Confira a fórmula a seguir!

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Como

$$E(X^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p \text{ e } E(X) = p$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p) = p \cdot q$$

Exemplo 1

Vamos agora ver um exemplo da aplicação da distribuição de Bernoulli. Se jogarmos seis vezes um dado cúbico usual, qual é a probabilidade de obtermos exatamente duas vezes a face 6? Após, acompanhe a **solução** no vídeo a seguir!

Neste vídeo, você verá a probabilidade de obter determinada face de um dado ao jogá-lo diversas vezes. Confira!



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Observe que o desenvolvimento da distribuição de Bernoulli servirá como passo inicial para a formulação matemática de problemas que já resolvemos na parte de probabilidade básica. No entanto, essa distribuição é limitada pelo fato de termos apenas uma única tentativa no experimento.

Veremos a seguir uma generalização da distribuição de Bernoulli.

Distribuição binomial

Abrange uma quantidade significativa de aplicações e, por isso, tem grande importância dentro do estudo das probabilidades. Vejamos como se caracteriza e quais informações podemos obter dessa distribuição.

Considere agora n tentativas sucessivas e independentes de um mesmo experimento que admite apenas dois possíveis resultados: Sucesso com probabilidade p e fracasso com probabilidade q , na qual $p + q = 1$.

Seja $X =$ o número de sucessos nas n tentativas.

Desejamos determinar a função de probabilidade de X , ou seja, $P(X = x)$. Desse modo, considere inicialmente um resultado particular (RP) dado por:

$$RP \rightarrow \underbrace{SSS \dots}_{x} \underbrace{SFFF \dots F}_{x}$$

Como as tentativas são sucessivas e independentes, temos:

$$P(RP) = P(\underbrace{SSS \dots S F F F \dots F}_x) = p^x_{n-x} \cdot q^{n-x}$$

Se desejamos x sucessos, tais situações podem ocorrer em quaisquer x dentre as n tentativas. Logo, há combinações de n tentativas, x a x , formas de ocorrerem os x sucessos, ou seja, $\binom{n}{x}$.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n$$

Notação: $X \sim B(n, p)$

Exemplo 2

Considere um atirador amador que tem 50% de chances de acertar o alvo. Suponha que ele atirou 40 vezes. Qual a probabilidade de ele ter acertado o alvo 15 vezes?

Solução:

$$P(X = 15) = \binom{40}{15} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} = 0,036$$

Interpretação: a chance de sucesso é de, aproximadamente, 4%.

Esperança matemática

Confira agora a fórmula referente à esperança matemática de uma distribuição!

$$E(X) = \sum_x x \cdot p(x)$$

No caso da distribuição binomial, temos:

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

Logo,

$$E(X) = \sum_{x=0}^{x=n} x \cdot \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

Essa expressão pode ser simplificada usando propriedades do **binômio de Newton**). Assim, obteremos, para a **esperança** da distribuição binomial, a expressão simples. Acompanhe!

$$E(X) = np$$

Exemplo 3

Um dos dados utilizados no jogo *Dungeons and Dragons* (D&D) é um dodecaedro regular, ou seja, um dado com 12 faces (pentagonais) iguais e numeradas de 1 a 12. Se o dado for jogado 12 vezes, qual é a probabilidade de obtermos exatamente a face 12 uma vez?

Solução

Neste vídeo, você verá como é possível determinar a probabilidade de obter 12 vezes a face 12 em um dado de 12 lados.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 4

A probabilidade de obtermos cara em uma moeda viciada é $1/4$, e a probabilidade de obtermos coroa é $3/4$. Se jogarmos a moeda 10 vezes, qual é a probabilidade de obtermos, no mínimo, uma coroa?

Solução

Veja, neste vídeo, como podemos analisar as informações obtidas ao lançarmos um dado viciado e realizarmos uma distribuição binomial com elas.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 5

Em um cassino, um jogador paga R\$ 4,00 para entrar em um jogo, no qual um dado honesto é lançado e o jogador recebe em reais o valor que for obtido no dado. Esse jogo é **equilibrado**? Ou seja, tanto a banca como o jogador têm a mesma probabilidade de ganhar (ou perder)? Justifique.

Solução

Confira, neste vídeo, como é possível analisar a probabilidade de vencer em um jogo de azar utilizando a distribuição binomial.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Variância

Em se tratando de variável aleatória, sua variância é dada por:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Conhecida a fórmula de $E(X) = np$, devemos, então, calcular $E(X^2)$, ou seja, a esperança do quadrado da variável aleatória binomial X . Veja!

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{x=n} x^2 \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{1-x}$$

Essa expressão também permite simplificação por meio do binômio de Newton, em que obtemos:

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$$

Substituindo na expressão da variância, temos:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ \text{Var}(X) &= [n(n-1)p^2 + np] - (np)^2 \\ \text{Var}(X) &= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \\ \text{Var}(X) &= np(1-p) \\ \text{Var}(x) &= npq \end{aligned}$$

Teoria na prática

Um aluno está cursando a disciplina de estatística na faculdade de engenharia. Nas duas primeiras avaliações ele obteve notas 10 e 9, respectivamente. No entanto, falta ainda a última avaliação cujo professor aplicará um teste de múltipla escolha contendo 50 questões, cada uma com 5 itens. Sabe-se que a média para passar na disciplina é 7 e que o aluno só precisa obter uma nota 2 para ser aprovado. O aluno, acreditando estar praticamente aprovado na disciplina, decide não estudar para o teste. Na aplicação do teste, ele observa que não sabe nenhuma das questões e decide escolher aleatoriamente os itens de todas as questões. Qual a probabilidade desse aluno obter exatamente um dois nesse teste?

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Um dado é lançado uma única vez. Seja a variável aleatória X que representa a retirada de um número par nesse único lançamento. Qual o valor esperado de X ?

A

$1/6$

B

$1/4$

C

$1/3$

D

$1/2$

E

$2/3$



A alternativa C está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 2

Uma moeda não viciada é lançada 10 vezes. Determine a probabilidade de se obter exatamente 2 caras.

A

0,01

B

0,04

C

0,07

D

0,10

E

0,15



A alternativa B está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 3

Considerando o enunciado da questão anterior, a probabilidade de obtermos no mínimo 2 caras é aproximadamente:

A

0,90

B

0,92

C

0,95

D

0,97

E

0,99



A alternativa E está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 4

Um casal quer ter 5 filhos. Qual a probabilidade que, desses 5 filhos, no máximo um seja menino? Admita que a probabilidade de nascer menino seja igual a de nascer menina.

A

0,112

B

0,157

C

0,188

D

0,212

E

0,250



A alternativa C está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 5

Em uma fábrica de dispositivos eletrônicos, 2% da produção é formada por itens defeituosos. Um lote é aceito pelo comprador se tiver no máximo 3% dos dispositivos defeituosos. Admita que um lote tenha 100 dispositivos. Qual a probabilidade de o comprador rejeitar o lote?

A

0,14

B

0,20

C

0,25

D

0,30

E

0,33



A alternativa A está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 6

Considerando o enunciado da questão anterior, determine o número médio de dispositivos eletrônicos defeituosos em 10 lotes.

A

10

B

15

C

20

D

25

E

30



A alternativa C está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Uma fábrica de motores de ventiladores monta 120 motores por mês e separa 20 itens para inspeção. Sabe-se que, dos motores montados mensalmente, 6 não funcionam. Qual a probabilidade de todos os motores inspecionados funcionarem bem?

A

0,05

B

0,12

C

0,15

D

0,30

E

0,36



A alternativa E está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 2

Uma companhia realiza inspeção em carregamentos de fornecedores, de modo a determinar produtos não conformes. Considere que um lote contenha 1000 itens, sendo 1% dos produtos não conformes. Qual é o tamanho necessário da amostra, de modo que a probabilidade de escolher, no mínimo, um item não conforme na amostra, seja no mínimo 0,90?

A

200

B

212

C

220

D

229

E

241



A alternativa D está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Introdução

A seguir veremos mais duas distribuições de probabilidades com características parecidas com as distribuições de probabilidades anteriores, mas que mantêm suas próprias particularidades e que também contemplam uma gama de aplicações. Vamos partir da caracterização das distribuições geométrica e hipergeométrica e, em seguida, abordaremos as informações (média e variância) inerentes a essas distribuições.

Distribuições: geométrica e hipergeométrica. O que são?

Acompanhe, neste vídeo, outras duas formas de distribuição matemática para a análise de variáveis aleatórias discretas e unidimensionais.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Distribuição geométrica

Considere tentativas sucessivas e independentes de um experimento aleatório que só admite dois possíveis resultados: sucesso com probabilidade p e fracasso com probabilidade q , em que $p + q = 1$.

Seja a variável aleatória X : "número de tentativas até a ocorrência do 1o sucesso". Assim, X pode assumir os seguintes valores:

$$\begin{aligned} X = 1 &\rightarrow S \rightarrow P(X = 1) = p \\ X = 2 &\rightarrow FS \rightarrow P(X = 2) = qp \\ X = 3 &\rightarrow FFS \rightarrow P(X = 3) = q^2p \\ &\vdots \\ X = k &\rightarrow \underbrace{FFF \dots F}_{k-1} S \rightarrow P(X = k) = q^{k-1}p \end{aligned}$$

Logo, a função de probabilidade de X é:

$$P(X = x) = q^{x-1} \cdot p = (1 - p)^{x-1}p$$

Notação: $X \sim G(p)$

Exemplo 1

A chance de encontrar o monitor de estatística na sala de monitoria é de 20%. Qual é a probabilidade de que um aluno tenha que ir à sala do monitor quatro vezes para encontrá-lo pela primeira vez?

Solução:

$$P(X = 4) = (0,8)^{4-1} \cdot 0,2 = (0,8)^3 \cdot 0,2 = 0,1024$$

Interpretação: a probabilidade é de aproximadamente 10%.

Exemplo 2

Durante o mês de janeiro, a probabilidade de chuvas fortes em uma localidade é de 10%. Qual é a probabilidade de que naquele mês a primeira chuva forte ocorra apenas no dia sete? A seguir, acompanhe a **solução!**

Neste vídeo, você verá como analisar a probabilidade de chover utilizando o Excel e a distribuição de Bernoulli.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Esperança matemática

O cálculo da esperança para a distribuição geométrica é dado por:

$$E(X) = \sum_x x \cdot p(x)$$
$$E(X) = 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + \dots$$

Mas $p(x) = (1 - p)^{x-1}p$

Então,

$$E(X) = p \cdot 1 + p(1 - p) \cdot 2 + p(1 - p)^2 \cdot 3 + \dots$$

Utilizaremos um artifício algébrico: multiplicaremos a igualdade por $1 - p$.

Daí, obteremos:

$$(1 - p)E(X) = p \cdot (1 - p)1 + p(1 - p)^2 \cdot 2 + p(1 - p)^3 \cdot 3 + \dots$$

Subtraindo essa equação da anterior, após simplificar os termos das expressões que contêm $1 - p$ elevado ao mesmo expoente, obtemos:

$$p \cdot E(x) = p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 \dots$$

$$p \cdot E(x) = p [1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 \dots]$$

A expressão entre colchetes é a soma dos termos da progressão geométrica infinita de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 1 - p$. Porém, essa soma pode ser calculada pela expressão $\frac{a_1}{1-q}$, e seu valor é $\frac{1}{p}$.

Dividindo ambos os lados da última igualdade por p , obtemos:

$$E(x) = \frac{1}{p}$$

Exemplo 3

Um dado cúbico é jogado e a probabilidade de sair a face 6 é $1/11$. As probabilidades de ocorrência das demais faces são iguais.

O objetivo do jogo é adivinhar em qual jogada sairá, pela primeira vez, a face 6.

Qual “jogada” você escolheria? A décima? A vigésima? Justifique.

Acompanhe a **solução** no vídeo a seguir!

A probabilidade do dado viciado

Acompanhe, neste vídeo, como é possível utilizar uma planilha Excel para analisar, a partir da distribuição de Bernoulli, um dado claramente viciado.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Variância

O cálculo da variância de uma distribuição geométrica X , assim como sua esperança, já calculada, exige inúmeros artifícios algébricos. Assim, o importante é conhecer seu valor, em função do valor de p , ou seja, se X é uma variável aleatória **geométrica**, o valor de sua variância é dado. Confira!

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Observe, no gráfico indicado, que a expressão da variância decresce até o valor 1 à medida que p cresce de 0 a 1. Note também que, se $p = 1/2$, a variância vale 2.

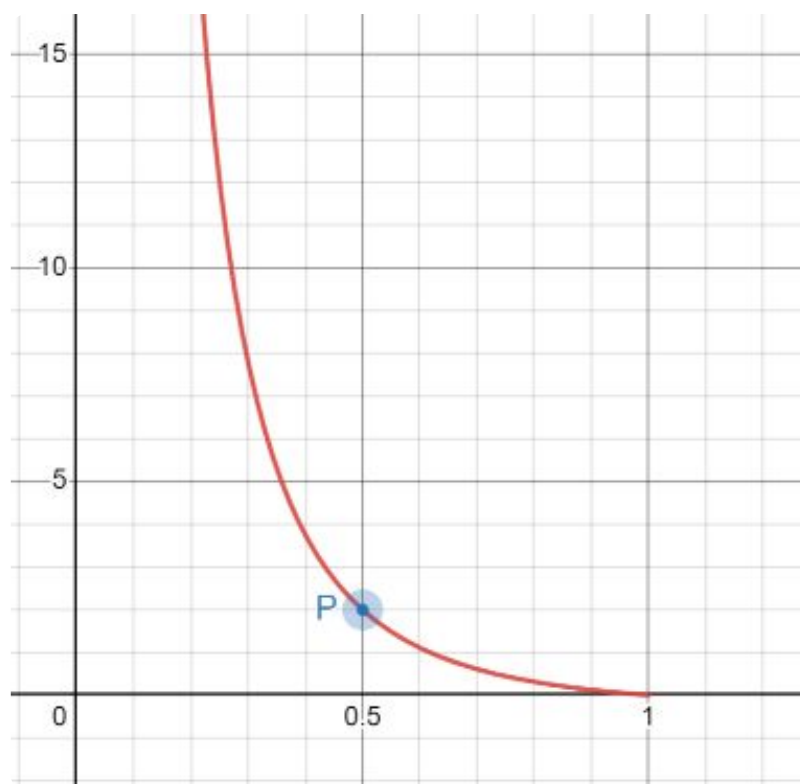


Gráfico da expressão da variância.

Distribuição hipergeométrica

Para entender a distribuição hipergeométrica, vamos analisar, em uma planilha de Excel, o cálculo empírico da esperança de uma distribuição hipergeométrica.

Confira, neste vídeo, o que é uma distribuição hipergeométrica e como ela pode ser percebida de forma intuitiva.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Considere uma população com N elementos, dos quais r têm determinada característica. A retirada de um desses r elementos é definida como sucesso. Assim, retiramos dessa população uma amostra sem reposição de tamanho n .

Seja X a variável aleatória que conta o número de sucessos na amostra. Do conceito de probabilidade frequentista, temos que:

$$P(X = x) = \frac{n(x)}{n(S)}$$

Na fórmula, é possível compreender que:

- $n(x)$ é o número de eventos favoráveis a x .
- $n(S)$ o número de eventos favoráveis ao espaço amostral S .

$n(S)$ equivale ao número de maneiras de selecionar uma amostra de tamanho n , ou seja, $n(S) = \binom{N}{n}$. Além disso, observe que temos $\binom{r}{x}$ de escolher os x sucessos (elementos com certa característica) e $\binom{N-r}{n-x}$ maneiras de escolher os outros $n - x$ indivíduos sem a característica. Daí,

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, 0 \leq x \leq n \text{ e } x \leq r$$

Notação: $X \sim$ hipergeométrica (N, r, n)

Exemplo 4

Uma máquina fabrica peças em lotes de mil, e em cada um há, em média, 20 peças defeituosas. Escolhendo, de um lote particular, uma amostra de 50 peças, determine:

- Qual é a probabilidade de obter cinco peças defeituosas?
- Qual é a probabilidade de nenhuma das 50 peças ser defeituosa?

Acompanhe a resolução das questões propostas no vídeo a seguir!

A indústria e a distribuição hipergeométrica

Veja, neste vídeo, a solução de um exemplo no qual a distribuição hipergeométrica é utilizada para realizar a distribuição probabilística de uma produção industrial.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 5

Em uma população de 100 peças, sabe-se que 20 são defeituosas. Você, então, retira uma amostra de 10 peças. Qual a probabilidade de obtermos duas com defeito?

Solução:

Veja que o sucesso é a retirada da peça defeituosa. Ou seja, a característica que interessa é que a peça seja defeituosa. Dessa forma, para determinarmos a probabilidade, podemos empregar a distribuição hipergeométrica, visto que as peças defeituosas fazem parte de uma população, da qual será retirada uma amostra. Veja!

$$P(X = 2) = \frac{\binom{20}{2} \cdot \binom{80}{8}}{\binom{100}{10}} \approx 0,32$$

Interpretação: a probabilidade de retirar duas peças defeituosas de uma amostra de tamanho 10 em uma população de 100 peças é de aproximadamente 32%.

Teoria na prática

Em uma população de 10.000 habitantes, temos que 0,5% dessa população sofre de certa doença. Retira-se uma amostra de tamanho 80 dessa população. Qual a probabilidade que nessa amostra tenhamos 10 pessoas com essa doença?

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

No lançamento de um dado, qual a probabilidade de ter que lançá-lo quatro vezes para se obter face dois pela primeira vez?

A

0,1

B

0,15

C

0,2

D

0,25

E

0,3



A alternativa A está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 2

A probabilidade de encontrar um determinado produto na prateleira de um supermercado é de $\frac{1}{3}$. Qual é a probabilidade de ter que ir ao supermercado, no máximo, duas vezes para encontrar o produto pela primeira vez?

A

$\frac{1}{3}$

B

$\frac{1}{2}$

C

$\frac{5}{9}$

D

$\frac{2}{3}$

E

$\frac{7}{9}$



A alternativa C está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Questão 3

Considerando os dados da questão anterior, qual seria a média e a variância, respectivamente, de idas ao supermercado?

A

1 e 3

B

2 e 4

C

2 e 3

D

3 e 6

E

3 e 9



A alternativa D está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 4

Uma urna contém 10 bolas brancas e 20 bolas pretas. Retira-se uma amostra de 5 bolas sem reposição. Qual a probabilidade de que essa amostra tenha 2 bolas brancas?

A

0,05

B

0,125

C

0,185

D

0,25

E

0,36



A alternativa D está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 5

Sabe-se que 10% das peças produzidas por determinada máquina são defeituosas. Retira-se uma amostra de tamanho 30 de uma população de 150 peças produzidas em um dia. Qual a probabilidade de que 5 peças sejam defeituosas?

A

0,05

B

0,10

C

0,15

D

0,20

E

0,25



A alternativa B está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 6

Considerando o enunciado da questão anterior, determine a média de peças defeituosas na amostra.

A

3

B

0,5

C

1,0

D

1,5

E

2,0



A alternativa A está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Nos aeroportos de certo país, a probabilidade de um metal pequeno não ser detectado no raio-X é de 0,2. Um passageiro que está viajando pelo modal aéreo, nesse país, vai fazer várias conexões. Sabe-se que ele esqueceu uma moeda no bolso. Qual a probabilidade de que o passageiro só tenha a moeda detectada no terceiro raio-X?

A

0,01

B

0,03

C

0,05

D

0,10

E

0,11



A alternativa B está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 2

Um estacionamento de um centro comercial tem capacidade para 180 carros, sendo 30 vagas para idosos. Sabendo que 20 vagas estão ociosas nesse estacionamento, qual a probabilidade de que 3 dessas vagas sejam de idosos?

A

0,10

B

0,15

C

0,25

D

0,35

E

0,50



A alternativa C está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Introdução

A distribuição que veremos agora tem relevante papel no estudo da probabilidade, visto que se trata da distribuição que calcula a probabilidade de eventos discretos que ocorrem em intervalos contínuos, o que agrega uma quantidade considerável de aplicações.

Acompanhe, neste vídeo, o que é a distribuição de Poisson e como é amplamente utilizada na ciência.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Distribuição de Poisson

Antes de defini-la, é importante conceituar o que é um processo de Poisson, pois, como veremos, as probabilidades calculadas por essa distribuição se referem a este tipo de processo.

Processo de Poisson

É aquele no qual eventos discretos ocorrem em intervalos contínuos (tempo, comprimento, área, volume...).



Exemplo

Os processos de Poisson compreendem: Acidentes de trânsito por dia
Focos de incêndio por área
Número de chamadas telefônica por minuto
Número de trocas de pneu por km

Seja X a variável aleatória discreta que representa o número de sucesso em um processo de Poisson. Então, dizemos que X segue uma distribuição de Poisson, com a seguinte função de probabilidade:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

Em que λ é a taxa média de ocorrência.

Notação: $X \sim P(\lambda)$

Exemplo 1

Você sabia que em vários estados e municípios há leis que exigem que o atendimento nos caixas de agências bancárias não dure mais do que 20 minutos, por exemplo (com exceção de algumas datas especiais, como o final do mês)?

Nessas condições, é importante para a instituição avaliar o número necessário de funcionários e/ou equipamentos em função da quantidade de clientes que utiliza os diversos serviços disponibilizados.

Admita que um banco determinou, a partir da coleta de informações durante um longo período, que o número médio de clientes que chega ao local buscando atendimento no caixa eletrônico, às sextas-feiras pela manhã, é de 50 por hora.

Qual é a probabilidade de que em determinada sexta-feira, no turno da manhã, cheguem 70 clientes para utilizar os caixas eletrônicos?

Acompanhe a **solução** a seguir!

A esperança de Poisson

Acompanhe, neste vídeo, como a esperança de Poisson se comporta juntamente com a distribuição de Poisson.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 2

Vamos empiricamente verificar em uma planilha que a esperança de uma distribuição de Poisson é igual ao seu parâmetro λ .

Solução

A esperança matemática é:

$$E(X) = \sum_x x \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda$$

Portanto,

$$E(X) = \lambda$$

Variância

Usaremos a mesma estratégia utilizada no cálculo da média para calcularmos a variância. Assim,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Como já conhecemos o valor da esperança de X , vamos calcular inicialmente a $E(X^2)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_x x^2 \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} [x(x-1) + x] \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1) \cdot \frac{\lambda^x}{x!} + \underbrace{e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\lambda^x}{x!}}_{\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda
 \end{aligned}$$

Fazendo $y = x - 2$, temos:

$$E(X^2) = e^{-\lambda} \lambda^2 \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{(y)!}}_{e^{\lambda}} + \lambda = e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Assim,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Portanto,

$$V(X) = \lambda$$

Note que na distribuição de Poisson, a média é igual à variância.

- Essa distribuição se aplica a eventos raros.
- λ é proporcional ao intervalo contínuo considerado no problema.
- Os eventos são independentes.

Exemplo 3

Sabe-se que o número de acidentes em determinada via segue uma distribuição de Poisson com média de nove acidentes por ano. Qual a probabilidade de que em determinado mês não ocorram acidentes nessa via?

Solução:

Observe que a média está dada em meses, mas pede a probabilidade em anos. No entanto, como sabemos que uma das propriedades da distribuição de Poisson é a proporcionalidade, então, se em um ano ocorrem nove acidentes, em um mês ocorrerão $9/12 = 3/4$ acidentes ($\lambda = 0,75$). Assim,

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0.755} \cdot 0.75^0}{0!} \approx 0,47$$

Interpretação: a probabilidade de que não ocorra acidente na via em determinado mês é de aproximadamente 47%.

Aproximação da distribuição binomial pela de Poisson

Foi muito útil quando os recursos computacionais eram escassos. Há alguns anos, a maioria dos estudantes que não tinha computadores pessoais usava calculadoras simples para resolver problemas que envolvessem cálculos matemáticos. Além disso, mesmo as calculadoras mais potentes tinham limitações quanto ao cálculo do fatorial. Portanto, para resolver essa limitação, aproximava-se a distribuição binomial pela distribuição de Poisson.

Exemplo 4

Verifique, graficamente, que a distribuição de Poisson aproxima de modo satisfatório a distribuição binomial, quando n é grande e as esperanças são também valores próximos. A seguir, acompanhe a **solução** para esta questão.

A aproximação das distribuições de Poisson e binomial

Veja, neste vídeo, como ocorre a aproximação das funções distribuição de Poisson e binomial.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

O número de mortes por febre amarela no Brasil é de 4 por ano. Qual a chance de que em seis meses morra no máximo 1 pessoa?

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Um posto policial recebe em média 2 chamadas por dia. Qual a probabilidade de receber exatamente 3 chamadas em um dia?

A

0,10

B

0,15

C

0,18

D

0,20

E

0,25



A alternativa C está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 2

Considerando o enunciado da questão anterior, qual seria a probabilidade desse posto receber 7 chamadas em uma semana?

A

0,01

B

0,02

C

0,03

D

0,04

E

0,05



A alternativa B está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 3

Um jornal registra em média 3 erros ortográficos a cada 5 páginas impressas. Qual a probabilidade de que um jornal com 30 páginas contenha exatamente 8 erros?

A

0,001

B

0,002

C

0,003

D

0,004

E

0,005



A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Questão 4

Considerando o enunciado da questão anterior, qual seria a probabilidade desse jornal registrar menos de 2 erros em uma página?

A

0,50

B

0,62

C

0,75

D

0,82

E

0,88



A alternativa E está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 5

Uma ouvidoria recebe 5 reclamações por hora. Qual a probabilidade de que receba apenas uma reclamação em 10 minutos?

A

0,36

B

0,42

C

0,48

D

0,54

E

0,60



A alternativa A está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 6

Uma firma visita os clientes que compraram o seu produto. Se a probabilidade de defeito do produto for de 0,01, qual a probabilidade de que em 1000 visitas ocorram no mínimo 3 defeitos?

A

0,956

B

0,967

C

0,975

D

0,986

E

0,997



A alternativa E está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Suponha que a incidência de determinada doença na população seja de 1 caso a cada 100.000 habitantes. Em uma cidade de 500.000 habitantes, determine a probabilidade de se encontrar exatamente 2 casos dessa doença na referida cidade.

A

0,04

B

0,08

C

0,12

D

0,16

E

0,20



A alternativa B está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 2

Sabe-se que em média 5 lâmpadas se queimam a cada 1000 lâmpadas testadas. Qual a probabilidade de que em um teste de 10.000 lâmpadas, exatamente 40 lâmpadas se queimem?

A

0,02

B

0,04

C

0,08

D

0,16

E

0,20



A alternativa A está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Considerações finais

Aqui abordamos os conceitos fundamentais associados às variáveis aleatórias discretas. Além disso, apresentamos as principais distribuições discretas de probabilidade, entre as quais, as de Bernoulli, binomial, geométrica, hipergeométrica e de Poisson.

Cada distribuição de probabilidade exerce um papel importante para o cálculo de probabilidades de fenômenos comuns que acontecem no nosso dia a dia.

Todos os conceitos adquiridos neste tema são essenciais não apenas para a continuidade do estudo da teoria das probabilidades, mas também para o bom entendimento de modelos estatísticos.

Explore +

Para saber mais sobre os assuntos tratados neste tema:

- Assista na internet ao canal IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- Explore mais as variáveis aleatórias discretas lendo o artigo científico **Distribuições de probabilidade**, de Marcel Novaes. Ele ajudará a compreender a mecânica estatística e a mecânica quântica, além de ser importante para todo o tipo de descrição estatística dos fenômenos naturais.

Referências

FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. **Curso de estatística**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

MEYER, P. **Probabilidade** – Aplicações à estatística. 2. ed. São Paulo: LTC, 1987.

MORETTIN, P. A.; BUSSAD, W. de O. **Estatística básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

MORETTIN, P. A. **Estatística básica** – Probabilidade e inferência. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2015.