

DESCRIÇÃO

Apresentação dos conceitos de probabilidade condicional e independência, além de suas diferentes aplicações.

PROPÓSITO

Compreender importantes conceitos em estatística e probabilidade para a aplicação deles em diferentes problemas.

PREPARAÇÃO

Antes de iniciar a leitura deste conteúdo, certifique-se de ter papel e lápis por perto para acompanhar seus exemplos e demonstrações.

OBJETIVOS

MÓDULO 1

Analisar o conceito de probabilidade condicional

MÓDULO 2

Examinar o conceito de independência

MÓDULO 3

Identificar a regra de Bayes e suas aplicações

INTRODUÇÃO

A probabilidade estuda a modelagem de fenômenos aleatórios, que são situações que envolvem incerteza.

Na natureza, grande parte dos acontecimentos é constituída por fenômenos aleatórios, como a ocorrência de chuva, por exemplo. Quando nos perguntamos se irá chover, não temos como responder com certeza se isso acontecerá ou não. Por isso, a previsão do tempo sempre indica uma probabilidade.

A busca pela avaliação das diversas probabilidades de ocorrência é um dos objetivos no estudo desses fenômenos.

Um dos tópicos mais importantes no cálculo de probabilidade é o uso de informação adicional para tentar torná-lo mais preciso. Qual é a chance de chover amanhã, por exemplo, na cidade do Rio de Janeiro? Como tal chance será afetada se soubermos que há uma frente fria passando por São Paulo?

Para isso, é necessário desenvolver os conceitos de probabilidade condicional, independência e regra de Bayes. A partir desses tópicos, pode-se medir a incerteza da ocorrência de diversos eventos, como qual político será eleito e se conseguiremos pegar (ou não) o ônibus lotado.

Lembre-se de que o estudo de teoria da probabilidade não se faz apenas com leitura: o acompanhamento dos passos das demonstrações e o exercício dos conceitos apresentados também são fundamentais. Seu conteúdo utiliza conceitos de cálculo, estatística, probabilidade e álgebra linear básica.

MÓDULO 1

🕒 Analisar o conceito de probabilidade condicional



LEI DA PROBABILIDADE CONDICIONAL

O que é probabilidade condicional?

A **probabilidade condicional** é um conceito extremamente importante, porque, se tivermos informação adicional sobre um experimento, poderemos ser forçados a reavaliar as probabilidades dos eventos a ele associados.

Essa **probabilidade**, portanto, nada mais é que a de um certo evento A ocorrer tendo em vista que B também ocorre. Ela pode ser definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

📌 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

PODEMOS INTERPRETAR $P(A|B)$ DA SEGUINTE FORMA:

Sabendo que B ocorre, há uma chance $P(A|B)$ de A ocorrer. Tal sentença pode ser lida do seguinte modo: “probabilidade de A dado B”.

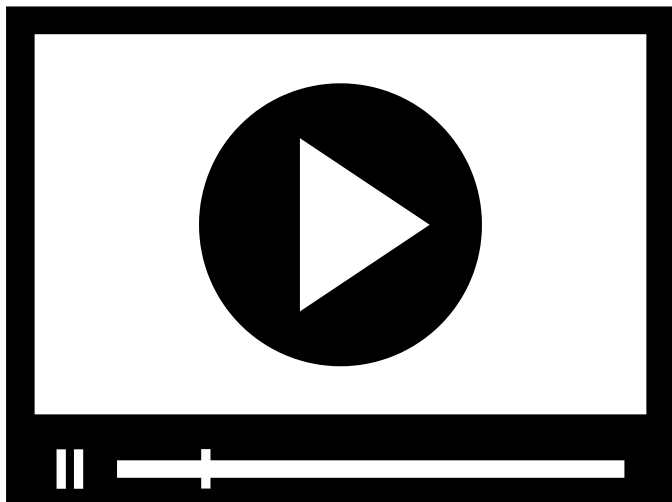
É importante notar que $P(A|B) \neq P(A \cap B)$.

Para se obter $P(A \cap B)$, é necessário que os elementos satisfaçam a **ambas as condições**, isto é, sejam elementos que pertençam a A e B.

Será possível calcular a interseção a partir da fórmula acima quando $P(B) > 0$, reescrevendo-a como:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

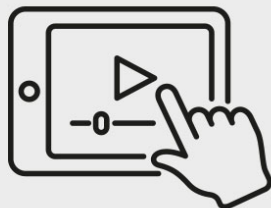
Esta é a chamada **lei da multiplicação**.



FERRAMENTAS VISUAIS PARA PROBLEMAS DE PROBABILIDADE

Neste vídeo, um especialista explicará a utilização da árvore de probabilidade nos cálculos.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Da probabilidade condicional, deriva-se o teorema da regra do produto.

Suponha um conjunto finito de eventos A_1, A_2, \dots, A_n de maneira que as probabilidades condicionais $A_i | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{i-1}$ sejam positivas.

Neste caso, vemos que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_1\right) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(\bigcap_{i=1}^n A_i)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Pela definição de probabilidade condicional, pode-se reescrever seu lado direito, chegando à seguinte fórmula:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2 | A_1\right) P\left(A_3 | A_1 \cap A_2\right) \cdots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A **probabilidade condicional** também é uma probabilidade; por isso, ela precisa satisfazer aos **três axiomas da probabilidade**.

Apresentaremos esses axiomas a seguir:

AXIOMA 1 DA PROBABILIDADE

AXIOMA 2 DA PROBABILIDADE

AXIOMA 3 DA PROBABILIDADE

AXIOMA 1 DA PROBABILIDADE

Seja B um subconjunto fixo de ω . Primeiramente, vemos que $P(\omega|B) = 1$. Podemos escrever que $P(\omega|B) = \frac{P(\omega \cap B)}{P(B)}$. Note que, como B é um subconjunto de ω , $P(\omega \cap B) = P(B)$.

Desse modo, vemos que:

$$\frac{P(\omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Ainda para o primeiro axioma, temos de $P(\emptyset|B) = 0$. Podemos reescrever $P(\emptyset|B)$ como $\frac{P(\emptyset \cap B)}{P(B)}$. Como $P(\emptyset \cap B) = P(\emptyset) = 0$,

$$\frac{P(\emptyset \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0.$$

Portanto, $P(\omega|B)$ satisfaz ao primeiro axioma da probabilidade.

AXIOMA 2 DA PROBABILIDADE

O segundo axioma da probabilidade diz que $0 \leq P(A|B) \leq 1$ para qualquer $A \subset \omega$. Sabemos que $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e que $(A \cap B) \subset B$.

Também estamos cientes de que, se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Dessa forma, temos de $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$. Isso implica que $0 \leq P(A|B) \leq 1$.

Com isso, temos o segundo axioma satisfeito.

AXIOMA 3 DA PROBABILIDADE

O terceiro axioma afirma que, para qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos A_1, A_2, A_3, \dots , verifica-se que

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \middle| B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B).$$

Com isso, vemos que:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \middle| B\right) &= \frac{P\left(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}{P(B)} \\ &= \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B\right)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B) \end{aligned}$$

Vimos nos três casos acima que a probabilidade condicional satisfaz a todos os axiomas da probabilidade, o que implica que ela é, de fato, uma probabilidade.

Portanto, todas as propriedades de uma probabilidade valem para a condicional.

MÃO NA MASSA

1. (ADAPTADO DE ANPEC) CONSIDERE AS ALTERNATIVAS ABAIXO E ASSINALE A INCORRETA:

- A) $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- B) $P(A|B)/P(B|A) = P(A)/P(B)$
- C) $P(A|B) = P(A \cap B)$
- D) Se $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,8$ e $P(A|B) = 0,2$, então $P(B|A) = 0,4$
- E) Se $P(B) = 0,6$ e $P(A|B) = 0,2$, então $P(A^c \cup B^c) = 0,88$

2. (ANPEC – 2015) EM DETERMINADA CIDADE, 60% DOS MORADORES SÃO MULHERES E 40%, HOMENS. ENTRE ELAS, 80% ESTÃO EMPREGADAS E 20%, DESEMPREGADAS. JÁ ENTRE ELES, 90% ESTÃO EMPREGADOS E 10%, DESEMPREGADOS. OBTENHA A PROBABILIDADE DE UMA PESSOA ESCOLHIDA ALEATORIAMENTE NESSA CIDADE SER MULHER E ESTAR DESEMPREGADA.

- A) 0,60
- B) 0,20
- C) 0,12
- D) 0,75
- E) 0,80

3. (ANPEC – 2006) EM UMA REGIÃO, 25% DA POPULAÇÃO É POBRE. AS MULHERES CONSTITUEM 75% DOS POBRES E 50% DA POPULAÇÃO. CALCULE A PROPORÇÃO DE POBRES ENTRE ELAS.

- A) 0,25
- B) 0,125
- C) 0,375
- D) 0,1875
- E) 0,75

4. UM LOTE CONTÉM 10 PEÇAS, SENDO 7 BOAS (B) E 3 COM DEFEITO (D). AO ACASO, DUAS PEÇAS SÃO RETIRADAS, SEM REPOSIÇÃO, PARA UMA INSPEÇÃO. QUAL É A PROBABILIDADE DE SE OBTER DUAS PEÇAS DEFEITUOSAS?

- A) $1/15$
- B) $3/50$
- C) $9/100$
- D) $6/100$
- E) $7/90$

5. JÚLIA PERTENCE A UM GRUPO DE 50 MULHERES CLASSIFICADO DE ACORDO COM A COR DOS CABELOS E DOS OLHOS DE CADA UMA DELAS. A TABELA A SEGUIR MOSTRA A RELAÇÃO DELAS SEGUNDO SUAS CARACTERÍSTICAS:

	OLHOS	
CABELO	AZUIS	CASTANHOS
LOIRA	17	9
MORENA	4	14
RUIVA	3	3

 **ATENÇÃO!** PARA VISUALIZAÇÃOCOMPLETA DA TABELA UTILIZE A ROLAGEM HORIZONTAL

QUANDO JOÃO ENCONTROU JÚLIA, SEUS CABELOS ESTAVAM COMPLETAMENTE MOLHADOS DA CHUVA, MAS ELE NOTOU QUE ELA TINHA OLHOS CASTANHOS. QUAL É A PROBABILIDADE DE JÚLIA SER MORENA?

- A) 14/30
- B) 18/50
- C) 7/13
- D) 7/25
- E) 26/50

6. UM GRUPO DE TRÊS PESSOAS É FORMADO PELA ESCOLHA ALEATÓRIA DE CINCO INDIVÍDUOS: JÚLIO, PEDRO, RAFAEL, JOANA E FERNANDA. SE JOANA NÃO PERTENCE AO GRUPO, QUAL É A PROBABILIDADE DE RAFAEL PERTENCER?

- A) 7/8
- B) 6/10
- C) 3/10
- D) 3/4
- E) 3/2

GABARITO

1. (Adaptado de ANPEC) Considere as alternativas abaixo e assinale a incorreta:

A alternativa "C " está correta.

Como vimos neste módulo, toda probabilidade condicional também é uma probabilidade; portanto, os três axiomas da probabilidade também valem para ela. A letra "a" nada mais é do que o **segundo axioma da probabilidade**.

Pela lei da probabilidade condicional, sabemos que:

$$P(A|B) \Big/ P(B|A) \; = \; \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Big/ \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; = \; \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot \frac{P(A)}{P(A \cap B)} \; = \; \frac{P(A)}{P(B)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Desse modo, a letra "b" também está correta. Graças a essa lei, também estamos cientes de que:

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Portanto, a letra "c" está incorreta.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ e } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Sabendo que $P(A|B) = 0,2$ e $P(B) = 0,8$, podemos fazer substituições na equação da probabilidade condicional para obtermos isto:
 $P(A \cap B) = 0,16$.

Desse modo:

$$P(B|A) = 0,16 / 0,4 = 0,4$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A alternativa "d" é verdadeira. Por fim, pela Lei de De Morgan, $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$. Já pela lei da probabilidade condicional, verificamos que $P(A \cap B) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12$.

Sabemos, assim, que:

$$P(A \cap B)^C = 1 - P(A \cap B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

E, por fim, vemos que:

$$P(A^C \cup B^C) = P(A \cap B)^C = 1 - 0,12 = 0,88$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Logo, a alternativa "e" é correta.

2. (ANPEC – 2015) Em determinada cidade, 60% dos moradores são mulheres e 40%, homens. Entre elas, 80% estão empregadas e 20%, desempregadas. Já entre eles, 90% estão empregados e 10%, desempregados. Obtenha a probabilidade de uma pessoa escolhida aleatoriamente nessa cidade ser mulher e estar desempregada.

A alternativa "D " está correta.


	Empregados	Desempregados	Total

Homens	0,36	0,04	0,4
Mulheres	0,48	0,12	0,6
População total	0,84	0,16	1

 **Atenção!** Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal

Queremos a probabilidade de ser mulher dado que está desempregada:

$$P(M|D) = P(M \cap D)/P(M).$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Essa probabilidade é igual a 0,12. Já a de ser desempregada é igual a 0,16.

Desse modo, a probabilidade de ser mulher dado que está desempregada é igual a 0,12/0,16 = 0,75.

3. (ANPEC – 2006) Em uma região, 25% da população é pobre. As mulheres constituem 75% dos pobres e 50% da população. Calcule a proporção de pobres entre elas.


A alternativa "C " está correta.

	Pobres	Não pobres	Total
Homens	1/16	7/16	1/2
Mulheres	3/16	5/16	1/2
População total	1/4	3/4	1

 **Atenção!** Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal


Eis a probabilidade de ser mulher:

$$P(M) = 1/2$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal


Vejamoss agora a probabilidade de ser mulher e pobre:

$$P(M \cap P) = 3/16$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal


Queremos calcular $P(P|M)$. Sabemos que:

$$P\left(P\middle|M\right) = \frac{P(P\cap M)}{P(M)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Veremos, portanto, que:

$$P\left(P\middle|M\right) = \frac{3/16}{1/2} = 3/16 \cdot 2/1 = 3/8 = 0,375$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

4. Um lote contém 10 peças, sendo 7 boas (B) e 3 com defeito (D). Ao acaso, duas peças são retiradas, sem reposição, para uma inspeção. Qual é a probabilidade de se obter duas peças defeituosas?


A alternativa "A " está correta.

A probabilidade de sair uma peça defeituosa na primeira retirada é igual a: $P(D_1) = 3/10$.

Além disso, dado que, na primeira retirada, já saiu uma peça defeituosa, a probabilidade de que saia outra com defeito na segunda retirada é igual a $P(D_2|D_1) = 2/9$.

Desse modo:

$$P(D_1, D_2) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \bullet P(D_2|D_1) = 3/10 \bullet 2/9 = 6/90 = 1/15$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

5. Júlia pertence a um grupo de 50 mulheres classificado de acordo com a cor dos cabelos e dos olhos de cada uma delas. A tabela a seguir mostra a relação delas segundo suas características:

	Olhos	
Cabelo	Azuis	Castanhos
Loira	17	9
Morena	4	14
Ruiva	3	3

 **Atenção!** Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal

Quando João encontrou Júlia, seus cabelos estavam completamente molhados da chuva, mas ele notou que ela tinha olhos castanhos. Qual é a probabilidade de Júlia ser morena?

A alternativa "C " está correta.

O primeiro evento de interesse é ter olhos castanhos: C. A probabilidade de ocorrer C é dada pela soma daquelas com olhos dessa cor dividido pelo número de mulheres:

$$P(C) = (9+14+3) /50 = 26/50 = 13/25$$

O segundo evento, por sua vez, é ser morena: M. A probabilidade de ser morena é dada pelo número daquelas que o são dividido pelo total de mulheres:

$$P(M) = (14+4) / 50 = 18/50 = 9/25$$

Já a probabilidade de ser morena e ter olhos castanhos é dada por:

$$P(C \cap M) = 14/50 = 7/25$$

Com isso, utilizando nossos conhecimentos de probabilidade condicional, verificamos que:

$$P(M|C) = P(C \cap M) / P(C) \Rightarrow P(M|C) = (7/25) / (13/25) = 7/13$$

6. Um grupo de três pessoas é formado pela escolha aleatória de cinco indivíduos: Júlio, Pedro, Rafael, Joana e Fernanda. Se Joana não pertence ao grupo, qual é a probabilidade de Rafael pertencer?

A alternativa "D " está correta.

No todo, temos:

$$5! / 3! \cdot 2! = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) / (3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1) = 5 \cdot 4 / 2 = 10$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Há 10 possíveis grupos formados por três pessoas sabendo que há cinco delas.

Nosso primeiro evento é o número de grupos em que Joana não participa:

$$J^C : 4! / 3! \cdot 1! = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) / 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim:

$$P(J^C) = 4/10 = 2/5$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Já o segundo evento de interesse é o número de grupos em que Rafael é membro:

$$R : 4! / (2! \cdot 2!) = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) / (2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1) = (4 \cdot 3) / 2 = 6$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal


Desse modo:

$$P(R) = 6/10 = 3/5$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal


Sendo $J^C \cap R$ igual aos grupos que não têm Joana, mas têm Rafael, vemos que:

$$3!/(2! \cdot 1!) = (3 \cdot 2 \cdot 1)/(2 \cdot 1 \cdot 1) = 3. \quad P(J^C \cap R) = 3/10$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Sabemos, assim, que:

$$P\left(R\middle|J^C\right) = \frac{P(J^C \cap R)}{P(J^C)} = \frac{3/10}{2/5} = 3/10 \cdot 5/2 = 3/4$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

GABARITO

TEORIA NA PRÁTICA

Considere uma empresa que possua 230 funcionários homens e 80 mulheres. Dos que são homens, 46 foram promovidos, de forma que os 184 restantes não o foram. Dentre as mulheres, 8 foram promovidas, enquanto as demais permaneceram em seus cargos.

Buscando estudar desigualdade de gênero no mercado de trabalho, uma aluna de economia quer calcular a probabilidade de um funcionário do sexo masculino ser promovido. A aluna montou a seguinte tabela para ajudá-la. Qual seria a resposta encontrada por ela?

	Promovidos	Não promovidos	Total
Homens	46	184	230
Mulheres	8	72	80
Total	54	256	310

 **Atenção!** Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal

RESOLUÇÃO

Para saber a probabilidade de um homem ser promovido, é preciso que ela obtenha a probabilidade condicional de um funcionário sê-lo dado que ele é homem.

A ideia por trás da probabilidade condicional é que apenas os casos favoráveis ao evento condicionante (B = ser homem) passam a ser os **casos possíveis**. Portanto, a probabilidade de A dado B é igual ao número de homens promovidos (46) dividido pelo número total deles (230): $46/230 = 0,2$.

Para vermos como a condicional é distinta da probabilidade de interseção, suponhamos que a aluna queira calcular a probabilidade de um funcionário ser homem **e** ser promovido. Diretamente da tabela, vemos que 46 indivíduos satisfazem a ambas as condições, isto é, A = “ter sido promovido e B = “ser homem”.

Dessa forma, verificamos que:

$$P(A \cap B) = 46/310 = 0,1483$$

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. CONSIDERE O LANÇAMENTO DE DOIS DADOS NO QUAL O EVENTO A SIGNIFIQUE UMA SOMA DAS FACES DELES IGUAL A 6 E O EVENTO B, UM RESULTADO PAR APRESENTADO POR AMBOS. QUAL É A PROBABILIDADE DE A SOMA DAS FACES SER IGUAL A 6 DADO QUE OS NÚMEROS SÃO PARES?

- A) $1/6$
- B) $2/3$
- C) $2/9$
- D) $1/2$
- E) $1/12$

2. (UFRJ – PROBEST – P1/2013) PARA SER CAMPEÃO DE UM TORNEIO DE TÊNIS, UM JOGADOR PRECISA VENCER QUATRO PARTIDAS SUCESSIVAS (TODAS ELAS ELIMINATÓRIAS). JOSÉ É UM DOS PARTICIPANTES. SUAS PROBABILIDADES DE VITÓRIA EM CADA PARTIDA (CASO ELE NÃO TENHA SIDO ELIMINADO ATÉ ENTÃO) FORAM ESTIMADAS: 80% NA 1ª PARTIDA, 70% NA 2ª, 60% NA 3ª (SEMIFINAL) E 50% NA 4ª (FINAL). OBSERVE QUE ELAS INDEPENDEM DE QUEM SEJA O SEU ADVERSÁRIO EM CADA PARTIDA.

CALCULE A PROBABILIDADE DE JOSÉ CONSEGUIR CHEGAR A UMA SEMIFINAL DADO QUE ELE NÃO SERÁ O CAMPEÃO.

- A) 0,392
- B) 0,3
- C) 0,832
- D) 0,6
- E) 0,471

GABARITO

1. Considere o lançamento de dois dados no qual o evento A signifique uma soma das faces deles igual a 6 e o evento B, um resultado par apresentado por ambos. Qual é a probabilidade de a soma das faces ser igual a 6 dado que os números são pares?

A alternativa "C" está correta.

Para cada dado, existem seis possibilidades de resultado. Como temos dois dados, elas são 36, uma vez que, para cada possibilidade do primeiro, há seis possibilidades do segundo.

Para encontrarmos $P(A)$, precisaremos obter as combinações que somam seis:

$(5,1); (4,2); (3,3); (2,4); (1,5)$

Ou seja, $P(A)=5/36$.

As possíveis combinações nas quais os dois dados dão um resultado par estão expressas a seguir:

$(6,6); (6,4); (6,2); (4,6); (4,4); (4,2); (2,6); (2,4); (2,2)$

Ou seja, são nove eventos. Assim, $P(B) = 9/36$.

Temos apenas duas opções que atendem simultaneamente aos dois requisitos: $(2,4)$ e $(4,2)$. Assim, $P(A \cap B) = 2/36$.

Desse modo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{2}{36} \cdot \frac{36}{9} = \frac{2}{9}$$



Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. (UFRJ – Probest – P1/2013) Para ser campeão de um torneio de tênis, um jogador precisa vencer quatro partidas sucessivas (todas elas eliminatórias). José é um dos participantes. Suas probabilidades de vitória em cada partida (caso ele não tenha sido eliminado até então) foram estimadas: 80% na 1ª partida, 70% na 2ª, 60% na 3ª (semifinal) e 50% na 4ª (final). Observe que elas independem de quem seja o seu adversário em cada partida.

Calcule a probabilidade de José conseguir chegar a uma semifinal dado que ele não será o campeão.

A alternativa "E" está correta.

Consideremos o evento de José perder na primeira partida denotado por P_1 . A probabilidade de derrota nessa partida é o evento complementar a ele ganhar.

Assim:

$$P(P_1) = 1 - 0,8 = 0,2$$



Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

De forma análoga, podemos calcular a probabilidade de ele perder na segunda partida:

$$P(P_2) = P(P_1^C) \cdot (1 - \text{prob. de vencer } 2^{\text{a}} \text{ partida}) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$$



Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Na terceira partida, a probabilidade de derrota é a de ele ganhar na 1ª partida vezes a de ele ganhar na 2ª multiplicada pela probabilidade de perder na terceira.

Com isso, vemos que:

$$P(P_3) = P(P_1^C) \cdot P(P_2^C) \cdot (1 - \text{prob de vencer } 3^{\text{a}} \text{ partida}) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,224$$



Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

De forma análoga, a probabilidade de ele perder na final é calculada por:

$$P(P_4) = P(P_1^C) \cdot P(P_2^C) \cdot P(P_3^C) \cdot (1 - \text{prob de vencer } 4^{\text{a}} \text{ partida}) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,6$$



Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Desse modo, a probabilidade de José ser campeão, $P(C)$, é 0,168. Com isso, a de ele chegar à semifinal, dado que ele não é campeão, é dada por esta fórmula:

$$P(S|C^C) = \frac{P(S \cap C^C)}{P(C^C)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Sabemos que:

$$P(C^C) = 1 - 0,168 = 0,832$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Também sabemos que:

$$S \cap C^C = \{P_3, P_4\} \text{ e } P(S \cap C^C) = P(P_3) + P(P_4) = 0,392$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Fazendo a substituição, chegamos a:

$$P(S|C^C) = \frac{0,392}{0,832} \approx 0,471$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

MÓDULO 2

🕒 **Examinar o conceito de independência**

INDEPENDÊNCIA

Em probabilidade, dizemos que dois eventos são **independentes** se a ocorrência de um deles não interfere na probabilidade de outro ocorrer.

Podemos escrever que o evento A é independente do evento B da seguinte maneira:

$$P(A|B) = P(A)$$

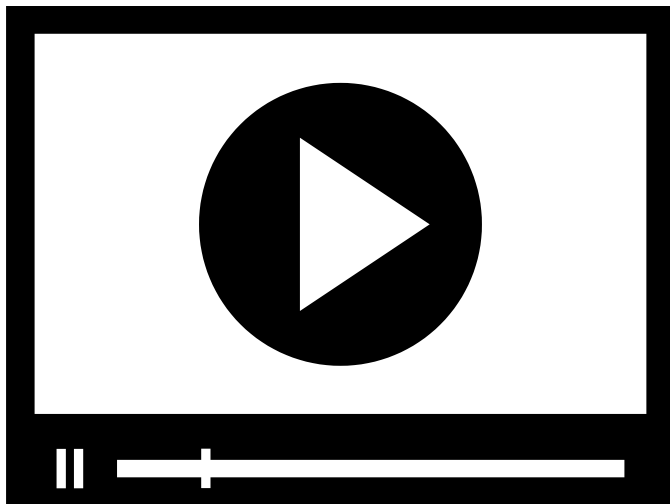
 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Em algumas ocasiões, o conhecimento sobre a ocorrência de um evento não muda a probabilidade de um outro — esse é o conceito de independência estatística.



Fonte: William Potter/Shutterstock

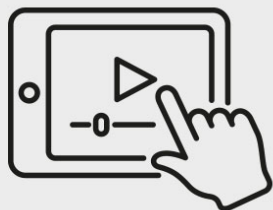
Intuitivamente, se tudo o que queremos saber é se A acontece ou não, informações sobre o evento B não vão nos ajudar em nada. Afinal, mesmo que tenhamos a certeza de que este acontece, a probabilidade daquele não muda.



EVENTOS INDEPENDENTES

Neste vídeo, um especialista vai mostrar, a partir da definição de probabilidade condicional, como podemos concluir que dois eventos são independentes se – e somente se – $P(B|A) = P(A \cap B) = P(B)$.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Se A e B são independentes, também o são A^C e B , A e B^C e A^C e B^C .

Lembre-se de que dois exemplos **mutuamente exclusivos** (ou **disjuntos**) **não são independentes**.

O QUE SÃO EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS?

RESPOSTA

RESPOSTA

São eventos em que a ocorrência de um deles **impede** a do outro. Por isso, eventos desse tipo são aqueles que não **possuem pontos em comum**. Ou seja, $A \cap B = \emptyset$, o que implica que $P(A \cap B) = 0$.

A partir da **lei da multiplicação**, vemos que:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Pela definição de independência vimos que se A e B são independentes, segue que:

$$P(A|B) = P(A)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Supondo que A e B sejam independentes, poderíamos substituir $P(A|B)$ por $P(A)$ na lei da multiplicação, obtendo a seguinte fórmula:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Portanto, dois eventos serão **independentes** caso a interseção deles seja igual ao produto de suas probabilidades. No caso de três eventos, eles serão independentes se (e somente se) forem cumpridas as seguintes etapas:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

Ou seja, é preciso que os eventos também sejam independentes dois a dois.

★ EXEMPLO

Considere o lançamento de um dado em que A seja o evento em que a face é par e B , o evento em que a face é maior do que 3. Os eventos A e B , neste caso, não são independentes, pois $P(A|B) \neq P(A)$.

MÃO NA MASSA

1. SUPONHA DOIS EVENTOS A E B TAIS QUE $P(A) = 0,3$ E $P(A \cup B) = 0,5$. DETERMINE O VALOR DE $P(B)$ CONSIDERANDO QUE A E B SÃO MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

- A) 0,3
- B) 0,2
- C) 0,8
- D) 0,12
- E) 0,25

2. HÁ DOIS EVENTOS A E B TAIS QUE $P(A) = 0,3$ e $P(A \cup B) = 0,5$. DETERMINE O VALOR DE $P(B)$ CONSIDERANDO QUE A E B SÃO INDEPENDENTES:

- A) $1/5$
- B) $1/3$
- C) $3/20$
- D) $2/7$
- E) $1/2$

3. SUPONHA QUE A E B SEJAM EVENTOS INDEPENDENTES. OBSERVE AS AFIRMATIVAS ABAIXO E ASSINALE A ALTERNATIVA INCORRETA:

- A) $P(A|B) = P(A)$
- B) A^C e B também são eventos independentes.
- C) A e B^C também são eventos independentes.
- D) A^C e B^C não são independentes.
- E) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

4. IMAGINE DOIS EVENTOS A_1 E A_2 INDEPENDENTES CUJAS PROBABILIDADES SEJAM RESPECTIVAMENTE 0,1 E 0,2. QUAL É A PROBABILIDADE DE QUE NENHUM DELES OCORRA?

- A) 0,02
- B) 0,98
- C) 0,8
- D) 0,3
- E) 0,7

5 (ANPEC – 2015) DOIS NÚMEROS X E Y SÃO SELECIONADOS DE FORMA ALEATÓRIA ENTRE 0 E 1. A PARTIR DAÍ, DOIS EVENTOS INDEPENDENTES SÃO DEFINIDOS DA SEGUINTE FORMA: $A \equiv Pr[X \geq 0,5]$ E $B \equiv Pr[Y \geq 0,5]$. TENDO ISSO EM VISTA, INDIQUE A PROBABILIDADE $Pr[A|B]$.

- A) 1
- B) 0,25
- C) 0
- D) 0,5
- E) 0,4

6. (ANPEC – 2017) CONSIDERE DOIS EVENTOS A E B MUTUAMENTE EXCLUDENTES, SENDO $P(A)$ A PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DE A E $P(B)$ A DE OCORRÊNCIA DE B. ASSINALE A ALTERNATIVA CORRETA.

- A) $P(A|B) = 0$
- B) $P(B|A) = 1$
- C) A e B são independentes se – e somente se – $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.
- D) A e B são independentes se $P(A|B) = P(A)$.
- E) A e B são independentes se $P(B|A) = P(B)$.

GABARITO

1. Suponha dois eventos A e B tais que $P(A) = 0,3$ e $P(A \cup B) = 0,5$. Determine o valor de $P(B)$ considerando que A e B são mutuamente exclusivos:

A alternativa "B " está correta.

Sabemos que os eventos são disjuntos:

$$P(A \cap B) = 0 \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Com isso, temos:

$$P(A) = 0,3 \rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,5 - 0,3 = 0,2$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. Há dois eventos A e B tais que $P(A) = 0,3$ e $P(A \cup B) = 0,5$. Determine o valor de $P(B)$ considerando que A e B são independentes:

A alternativa "D " está correta.

Como os eventos são independentes, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Sabemos, assim, que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Neste caso particular, verificamos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim:

$$0,5 = 0,3 + P(B) - 0,3P(B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Logo:

$$0,2 = 0,7P(B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Portanto, temos:

$$P(B) = 0,2 / 0,7 = 2/7$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

3. Suponha que A e B sejam eventos independentes. Observe as afirmativas abaixo e assinale a alternativa incorreta:

A alternativa "D" está correta.

Se dois eventos são independentes, a ocorrência de um não afeta a de outro. Com isso, sabemos duas coisas: $P(A|B) = P(A)$, assim como a probabilidade condicional é igual à incondicional.

Por meio desses conceitos, verificamos que A^C e B, A e B^C e A^C e B^C serão independentes quando houver independência entre A e B. Portanto, a alternativa "D" está incorreta.

Pela definição de independência, vemos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

4. Imagine dois eventos A_1 e A_2 independentes cujas probabilidades sejam respectivamente 0,1 e 0,2. Qual é a probabilidade de que nenhum deles ocorra?

A alternativa "B" está correta.

Dado que são eventos independentes, vemos que:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,02$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A probabilidade de que nenhum deles ocorra é dada por:

$$P(A_1 \cap A_2)^C = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 0,98$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

5 (ANPEC – 2015) Dois números X e Y são selecionados de forma aleatória entre 0 e 1. A partir daí, dois eventos independentes são definidos da seguinte forma: $A \equiv Pr[X \geq 0,5]$ e $B \equiv Pr[Y \geq 0,5]$. Tendo isso em vista, indique a probabilidade $Pr[A|B]$.

A alternativa "D " está correta.

A probabilidade de A dado B pode ser reescrita como:

$$P(X \geq 0,5|Y \geq 0,5)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Essa probabilidade é obtida por meio de:

$$P(X \geq 0,5|Y \geq 0,5) = \frac{P(X \geq 0,5 \cap Y \geq 0,5)}{P(Y \geq 0,5)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Como os eventos A e B são independentes, sabemos que:

$$P(X \geq 0,5 \cap Y \geq 0,5) = P(X \geq 0,5) \cdot P(Y \geq 0,5)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Dado que X e Y são um número entre 0 e 1, a probabilidade de eles serem maiores ou iguais a 0,5 é igual a 1/2.

Com essas informações, vemos que:

$$P(X \geq 0,5|Y \geq 0,5) = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,5} = 0,5$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

6. (ANPEC – 2017) Considere dois eventos A e B mutuamente excludentes, sendo P(A) a probabilidade de ocorrência de A e P(B) a de ocorrência de B. Assinale a alternativa correta.

A alternativa "A " está correta.

Por definição, eventos mutuamente exclusivos são aqueles em que a ocorrência de um impede a de outro. Portanto, eventos mutuamente exclusivos não podem ser independentes, o que já torna as alternativas "c", "d" e "e" incorretas.

Como a ocorrência de um evento impossibilita a de outro, é impossível que o evento certo ocorra. Dessa maneira, a alternativa "b" também está incorreta. Por exclusão, concluímos que a probabilidade condicional é zero.

GABARITO

TEORIA NA PRÁTICA

Uma fábrica de automóveis possui um lote que contém 10 peças, sendo 7 boas (B) e 3 defeituosas (D). Funcionária da fábrica, Fernanda retira duas peças (ao acaso e com reposição) para realizar a inspeção de rotina. Qual é a probabilidade de ela obter duas peças defeituosas?

RESOLUÇÃO

Como Fernanda retira duas peças com reposição ao acaso, ou seja, após retirar a primeira peça, ela a coloca de volta no lote para que possa efetuar a segunda retirada, temos de:

$$P(D_1) = P(D_2) = 3/10 \text{ e } P(B_1) = P(B_2) = 7/10$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Como queremos a probabilidade de Fernanda tirar duas peças defeituosas, precisamos encontrar a probabilidade de ela retirar uma peça defeituosa na primeira e na segunda retirada.

Como a primeira e a segunda retiradas são realizadas de maneira **independente**, verificamos que:

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \cdot P(D_2). P(D_1 \cap D_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Portanto, a probabilidade de ela retirar uma peça defeituosa nas duas retiradas é igual a 9%.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. (ANPEC – 2016) CINCO PARAFUSOS DEFEITUOSOS FORAM MISTURADOS COM SETE OUTROS BONS NUMA CAIXA E VENDIDOS PARA A INSTALAÇÃO DE UM ARMÁRIO QUE PRECISA DE QUATRO DELES. QUAL É A PROBABILIDADE DE QUE QUATRO PARAFUSOS DEFEITUOSOS SEJAM ESCOLHIDOS EM SEQUÊNCIA?

- A) 3/100
- B) 5/12
- C) 1/99
- D) 2/9
- E) 7/12

2. O GERENTE DE UM POSTO DE GASOLINA SABE, POR EXPERIÊNCIA, QUE 80% DOS CLIENTES USAM CARTÃO DE CRÉDITO QUANDO COMPRAM GASOLINA. ADMITINDO INDEPENDÊNCIA ENTRE AS DECISÕES DELES SOBRE A FORMA DE PAGAMENTO NO MOMENTO DA COMPRA, QUAL É A PROBABILIDADE DE OS DOIS PRÓXIMOS CLIENTES PAGAREM PELA GASOLINA COM CARTÃO DE CRÉDITO?

- A) 0,80
- B) 0,16
- C) 0,20
- D) 0,64
- E) 0,60

GABARITO

1. (ANPEC – 2016) Cinco parafusos defeituosos foram misturados com sete outros bons numa caixa e vendidos para a instalação de um armário que precisa de quatro deles. Qual é a probabilidade de que quatro parafusos defeituosos sejam escolhidos em sequência?

A alternativa "C " está correta.

A probabilidade de ser defeituoso, $P(D)$, é igual a $5/12$; a de ser bom, $P(B) = 7/12$.

Já a probabilidade dos quatro serem defeituosos é igual à de o primeiro e o segundo e o terceiro e o quarto o serem.

Dessa maneira, encontramos isto:

$$P(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Como os eventos são **independentes**, notamos que:

$$P(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4) = P(D_1)P(D_2)P(D_3)P(D_4)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Dado que não há reposição, verificamos o seguinte:

$$P(D_1) = 5/12, P(D_2) = 4/11, P(D_3) = 3/10 \text{ e } P(D_4) = 2/9$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Desse modo:

$$5/12 \cdot 4/11 \cdot 3/10 \cdot 2/9 = 1/99$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. O gerente de um posto de gasolina sabe, por experiência, que 80% dos clientes usam cartão de crédito quando compram gasolina. Admitindo independência entre as decisões deles sobre a forma de pagamento no momento da compra, qual é a probabilidade de os dois próximos clientes pagarem pela gasolina com cartão de crédito?

A alternativa "D " está correta.

Considere C_1 o evento do primeiro cliente pagar com cartão de crédito e C_2 o do segundo cliente fazer o pagamento da mesma forma. Nosso objetivo é encontrar a probabilidade de o primeiro e o segundo cliente pagarem com cartão de crédito, ou seja, $P(C_1 \cap C_2)$.

Como sabemos que os dois eventos são **independentes**, podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Sabemos que:

$$P(C_1) = 0,8 = P(C_2)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Com isso:

$$P(C_1 \cap C_2) = 0,8 \cdot 0,8 = 0,64$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

MÓDULO 3

🕒 Identificar a regra de Bayes e suas aplicações

REGRA DE BAYES E LEI DA PROBABILIDADE TOTAL

LEI DA PROBABILIDADE TOTAL

Outro teorema importante é a **lei da probabilidade total**. Considere A e B dois eventos nos quais A possa ocorrer condicionado a B ou a B^C . A probabilidade total do evento A pode, portanto, ser escrita como:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^C)P(B^C)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

REGRA OU TEOREMA DE BAYES

O que é a regra ou o teorema de Bayes?

Trata-se de outro importante conceito em probabilidade. Suponha que os eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ têm probabilidade positiva, sendo B um evento qualquer com $P(B) > 0$.

Então, para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$ temos a seguinte fórmula:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

No caso específico de dois eventos (A e B), vemos que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A regra de Bayes fornece, assim, a fórmula exata para se calcular uma condicional quando há condicionais “na outra ordem”. Apesar de muito útil, ela geralmente é compreendida de forma mais simples com o auxílio de tabelas ou árvores.

Podemos entender melhor a aplicação da regra de Bayes a partir de um exemplo. Considere um determinado veículo que pode problemas mecânicos ou elétricos:



Fonte: Zoom Team/Shutterstock

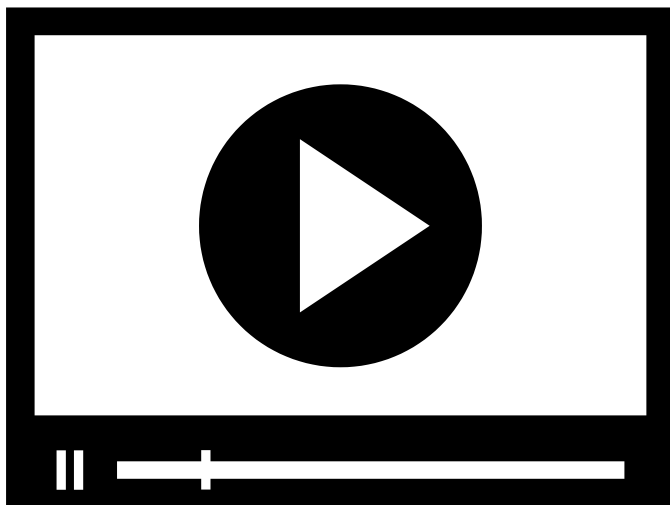
Se tiver problemas mecânicos, o veículo não deixará de funcionar, mas, se o problema for elétrico ele, irá parar imediatamente. A chance de ele ter problemas mecânicos é de 0,2. Considerando M o evento “ter problemas mecânicos”, vemos que $P(M) = 0,2$.



Fonte: MS Mikel/Shutterstock

Já a chance de o mesmo veículo ter problemas elétricos será de 0,15 se não houver problema mecânico precedente e de 0,25 caso contrário (ou seja, se houver algum problema mecânico anterior). Considerando E o evento "ter problema elétrico", observamos que $P(E|M) = 0,25$ e $P(E|M^C) = 0,15$.

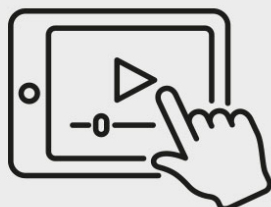
COM OS DADOS APRESENTADOS, QUEREMOS SABER A PROBABILIDADE DE TER OCORRIDO UM DEFEITO MECÂNICO, JÁ QUE O VEÍCULO PAROU EM CERTO DIA.



APLICAÇÃO DA REGRA DE BAYES

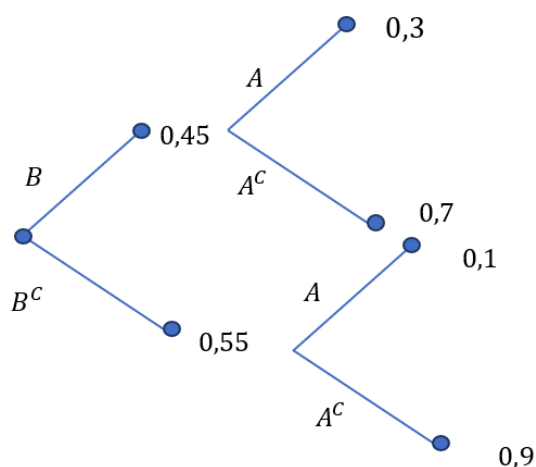
Neste vídeo, um especialista apresentará a resolução desse problema.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



MÃO NA MASSA

1. CONSIDERE A ÁRVORE DE PROBABILIDADES A SEGUIR. QUAL É A PROBABILIDADE DE OCORRER B DADO QUE OCORREU A?



- A) 0,3
- B) 0,135
- C) 0,7105
- D) 0,45
- E) 0,021

2. (ANPEC – 2013) UMA FIRMA DE CONSULTORIA ECONÔMICA POSSUI UM MODELO PARA PREVER RECESSÕES. O MODELO AS PREVÊ COM PROBABILIDADE DE 80% QUANDO ELAS REALMENTE ESTÃO A CAMINHO E COM UMA DE 10% QUANDO NÃO ESTÃO. A PROBABILIDADE NÃO CONDICIONAL DE A ECONOMIA PASSAR POR UMA RECESSÃO É DE 20%. SE O MODELO PREVÊ UMA RECESSÃO, QUAL É A PROBABILIDADE DE QUE ELA REALMENTE ESTEJA A CAMINHO? ASSINALE A ALTERNATIVA CORRETA:

- A) $\frac{2}{3}$
- B) $\frac{8}{10}$
- C) $\frac{4}{5}$
- D) $\frac{4}{25}$
- E) $\frac{1}{10}$

3. UM ALUNO DE ECONOMIA DA TURMA DE 2024.2 QUE TEVE UM BOM DESEMPENHO EM PROBABILIDADE TEM 90% DE CHANCE DE SER APROVADO NO EXAME DA ANPEC PARA INGRESSO NO MESTRADO. CASO CONTRÁRIO, ELE TEM APENAS 30% DE CHANCE. NO ENTANTO, APENAS 2% DOS ALUNOS DE 2024.2 TIVERAM UM BOM DESEMPENHO. QUAL É A PROBABILIDADE DE UM ALUNO SELECIONADO AO ACASO TER PASSADO NA ANPEC?

- A) 0,9
- B) 0,02
- C) 0,018

- D) 0,27
- E) 0,312

4. UM ALUNO DE ECONOMIA DA TURMA DE 2024.2 QUE TEVE BOM DESEMPENHO EM PROBABILIDADE TEM 90% DE CHANCE DE SER APROVADO NO EXAME DA ANPEC. CASO CONTRÁRIO, ELE TEM APENAS 30% DE CHANCE. APENAS 2% DOS ALUNOS DE 2024.2 TIVERAM UM BOM DESEMPENHO. SE ELE PASSOU NA ANPEC, QUAL É A PROBABILIDADE DE ESSE ALUNO TER TIDO UM BOM DESEMPENHO EM PROBABILIDADE?

- A) 0,0577
- B) 0,02
- C) 0,312
- D) 0,018
- E) 0,27

5. AS FUNCIONÁRIAS DE UMA COMPANHIA DIVIDEM-SE EM TRÊS GRUPOS: ECONOMISTAS, ENGENHEIRAS E ANALISTAS DE SISTEMAS. ESSAS FUNCIONÁRIAS PODEM OCUPAR CARGOS TÉCNICOS OU GERENCIAIS. SABEMOS QUE 20% DAS FUNCIONÁRIAS SÃO ANALISTAS DE SISTEMAS; 30%, ENGENHEIRAS; E 50%, ECONOMISTAS. A DIREÇÃO DA EMPRESA, POR SUA VEZ, É COMPOSTA POR 1% DAS ANALISTAS DE SISTEMAS, 2% DAS ENGENHEIRAS E 3% DAS ECONOMISTAS. UMA FUNCIONÁRIA É SELECIONADA ALEATORIAMENTE. QUAL É A PROBABILIDADE DE QUE ELA SEJA UMA DAS DIRETORAS DA EMPRESA?

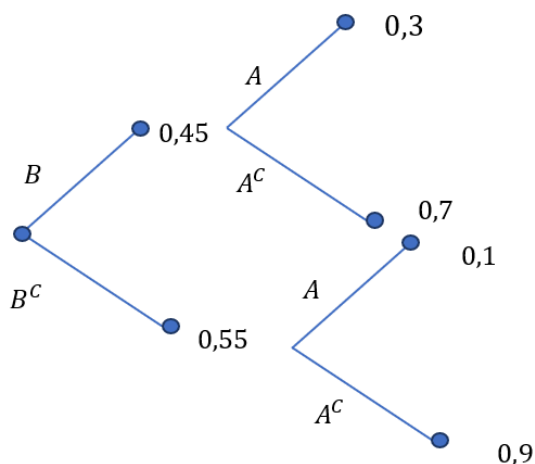
- A) 0,03
- B) 0,023
- C) 0,02
- D) 0,2609
- E) 0,06

6. AS FUNCIONÁRIAS DE UMA COMPANHIA DIVIDEM-SE EM TRÊS GRUPOS: ECONOMISTAS, ENGENHEIRAS E ANALISTAS DE SISTEMAS. ESSAS FUNCIONÁRIAS PODEM OCUPAR CARGOS TÉCNICOS OU GERENCIAIS. SABEMOS QUE 20% DAS FUNCIONÁRIAS SÃO ANALISTAS DE SISTEMAS; 30%, ENGENHEIRAS; E 50%, ECONOMISTAS. A DIREÇÃO DA EMPRESA, POR SUA VEZ, É COMPOSTA POR 1% DAS ANALISTAS DE SISTEMAS, 2% DAS ENGENHEIRAS E 3% DAS ECONOMISTAS. UMA FUNCIONÁRIA É SELECIONADA ALEATORIAMENTE. DADO QUE ELA É UMA DAS DIRETORAS, QUAL É A PROBABILIDADE DE ELA SER ENGENHEIRA?

- A) 0,023
- B) 0,06
- C) 0,2609
- D) 0,015
- E) 0,01

GABARITO

1. Considere a árvore de probabilidades a seguir. Qual é a probabilidade de ocorrer B dado que ocorreu A?



A alternativa "C " está correta.

Para calcularmos $P(B|A)$, temos de utilizar a **regra de Bayes**:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Pela árvore de probabilidade, vemos que $P(A|B) = 0,3$

Sabemos que $P(B) = 0,45$ e, pela **lei da probabilidade total**, $P(A) = 0,45 \cdot 0,3 + 0,55 \cdot 0,1 = 0,19$

Desse modo, vemos que:

$$P(B|A) = 0,3 \cdot 0,45 / 0,19 = 0,7105$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. (ANPEC – 2013) Uma firma de consultoria econômica possui um modelo para prever recessões. O modelo as prevê com probabilidade de 80% quando elas realmente estão a caminho e com uma de 10% quando não estão. A probabilidade não condicional de a economia passar por uma recessão é de 20%. Se o modelo prevê uma recessão, qual é a probabilidade de que ela realmente esteja a caminho? Assinale a alternativa correta:

A alternativa "A " está correta.

Consideremos $P(rec) = 0,2$ igual à probabilidade de uma economia passar por uma recessão. O evento complementar é igual à probabilidade de ela não passar por uma: $P(\tilde{rec}) = 0,8$.

A probabilidade de o modelo prever uma recessão quando ela, de fato, ocorre é igual a $P(MP|rec) = 0,8$. Já a de o modelo a prever quando ela não ocorre é $P(MP|\tilde{rec}) = 0,1$.

Queremos calcular:

$$P(rec|MP) = \frac{P(rec \cap MP)}{P(MP)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Podemos escrever desta forma:

$$P(\text{rec} \cap MP) = P(MP|\text{rec}) \cdot P(\text{rec})$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Primeiramente, devemos encontrar a probabilidade de o modelo prever uma recessão. Vamos usar a lei da probabilidade total, em que:

$$P(MP) = P(MP|\text{rec}) \cdot P(\text{rec}) + P(MP|\neg \text{rec}) \cdot P(\neg \text{rec}) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 =$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim, temos que:

$$P(\text{rec}|MP) = 0,8 \cdot 0,2 / 0,24 = 2/3$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

3. Um aluno de economia da turma de 2024.2 que teve um bom desempenho em probabilidade tem 90% de chance de ser aprovado no exame da ANPEC para ingresso no mestrado. Caso contrário, ele tem apenas 30% de chance. No entanto, apenas 2% dos alunos de 2024.2 tiveram um bom desempenho. Qual é a probabilidade de um aluno selecionado ao acaso ter passado na ANPEC?

A alternativa "E" está correta.

Consideremos A = "passar na ANPEC" e B = "ter tido bom desempenho em probabilidade". O enunciado, portanto, nos fornece o seguinte:

$$P(A|B) = 0,9, P(A|B^C) = 0,3 \text{ e } P(B) = 0,02$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

O que a questão nos pede é $P(A)$. Pela lei da probabilidade total, vemos que:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^C)P(B^C)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Com isso, encontramos:

$$P(A) = 0,9 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,98 = 0,312$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

4. Um aluno de economia da turma de 2024.2 que teve bom desempenho em probabilidade tem 90% de chance de ser aprovado no exame da ANPEC. Caso contrário, ele tem apenas 30% de chance. Apenas 2% dos alunos de 2024.2 tiveram um bom desempenho. Se ele passou na ANPEC, qual é a probabilidade de esse aluno ter tido um bom desempenho em probabilidade?

A alternativa "A" está correta.

Consideremos A = "passar na ANPEC" e B = "ter tido bom desempenho em probabilidade". O enunciado nos fornece isto:

$$P(A|B) = 0,9, P(A|B^C) = 0,3 \text{ e } P(B) = 0,02$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Para respondermos à questão, precisamos calcularmos $P(B|A)$. Vamos utilizar a **regra de Bayes** para isso:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0,9 \cdot 0,02}{0,312} = 0,0577$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

5. As funcionárias de uma companhia dividem-se em três grupos: economistas, engenheiras e analistas de sistemas. Essas funcionárias podem ocupar cargos técnicos ou gerenciais. Sabemos que 20% das funcionárias são analistas de sistemas; 30%, engenheiras; e 50%, economistas. A direção da empresa, por sua vez, é composta por 1% das analistas de sistemas, 2% das engenheiras e 3% das economistas. Uma funcionária é selecionada aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que ela seja uma das diretoras da empresa?

A alternativa "B " está correta.

Consideremos os eventos A = ser diretor da empresa, B_1 = ser analista, B_2 = ser engenheira, e B_3 = ser economista. O enunciado nos fornece as seguintes probabilidades:

$$P(B_1) = 0,2, P(B_2) = 0,3, P(B_3) = 0,5, P(A|B_1) = 0,01, P(A|B_2) = 0,02 \text{ e } P(A|B_3) = 0,03$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Ampliando a **lei da probabilidade total** para três eventos, vemos que:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$P(A) = 0,01 \cdot 0,2 + 0,02 \cdot 0,3 + 0,03 \cdot 0,5 = 0,002 + 0,006 + 0,015 = 0,023$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

6. As funcionárias de uma companhia dividem-se em três grupos: economistas, engenheiras e analistas de sistemas. Essas funcionárias podem ocupar cargos técnicos ou gerenciais. Sabemos que 20% das funcionárias são analistas de sistemas; 30%, engenheiras; e 50%, economistas. A direção da empresa, por sua vez, é composta por 1% das analistas de sistemas, 2% das engenheiras e 3% das economistas. Uma funcionária é selecionada aleatoriamente. Dado que ela é uma das diretoras, qual é a probabilidade de ela ser engenheira?

A alternativa "C " está correta.

Consideremos os eventos A = ser diretor da empresa, B_1 = ser analista, B_2 = ser engenheira e B_3 = ser economista. O enunciado nos fornece as seguintes probabilidades:


$$P(B_1) = 0,2, P(B_2) = 0,3, P(B_3) = 0,5, P(A|B_1) = 0,01, P(A|B_2) = 0,02 \text{ e } P(A|B_3) = 0,03$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Para respondermos à questão acima, precisamos calcular $P(B_2|A)$.


Aplicando a **regra de Bayes**, vemos que:

$$P(B2|A) = P(A|B2)P(B2)/P(A)$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Substituindo os valores indicados no enunciado, chegamos a isto:

$$P(B2|A) = 0,02 \cdot 0,3/0,023 = 0,2609$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

GABARITO

TEORIA NA PRÁTICA

Determinada pesquisa eleitoral realizada na eleição presidencial de 2014 propiciou as seguintes conclusões:

37% dos eleitores moram numa região metropolitana (RM);

Dos que moram numa RM, 10% votariam em Marina Silva;

Dos que não moram numa RM, 5% pretendiam votar nela.

Escolhido um eleitor ao acaso, podemos calcular a probabilidade:

- 1) De esse eleitor morar na RM e votar na Marina Silva.
- 2) De o indivíduo ser eleitor dela.
- 3) De ele, sabendo que um eleitor vota nela, morar em uma RM.

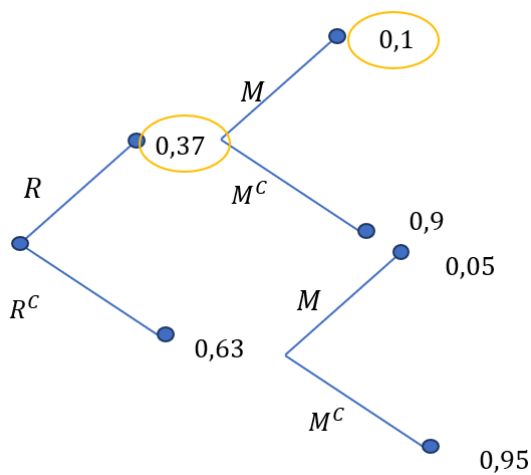
Para isso, consideraremos o evento de o indivíduo ser eleitor da Marina Silva e de o eleitor morar na RM. Pelas probabilidades fornecidas pela pesquisa, sabemos que $P(R) = 0,37$, $P(M|R) = 0,1$ e $(M|R^C) = 0,05$.

RESOLUÇÃO 1

RESOLUÇÃO 2

RESOLUÇÃO 3

Para respondermos a essa pergunta, o que nos interessa é $P(M \cap R)$. Podemos então reescrever as probabilidades no formato da árvore de probabilidade:



Fonte: YDUQS, 2020

Vemos então que:

$$P(M \cap R) = P(M|R) \cdot P(R), P(M \cap R) = 0,37 \cdot 0,1 = 0,037$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Desse modo, a probabilidade de um eleitor escolhido ao acaso morar na RM e votar na Marina Silva é 3,7%.

Para calcularmos a probabilidade de o eleitor escolhido ao acaso votar na Marina Silva, temos de achar $P(M)$.

Pela **lei da probabilidade total**, podemos escrever o seguinte:

$$P(M) = P(M \cap R) + P(M \cap R^C)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Pela nossa árvore de probabilidades, sabemos que:

$$P(M \cap R^C) = 0,63 \cdot 0,05 = 0,0315$$

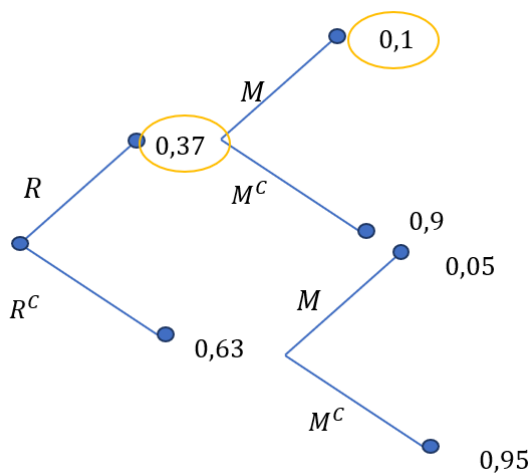
Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Desse modo, vemos que:

$$P(M) = 0,037 + 0,0315 = 0,0685$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Portanto, a probabilidade de um eleitor escolhido ao acaso votar nela é 6,85%.



Fonte: YDUQS, 2020

Para calcularmos a probabilidade de um eleitor morar em uma RM dado que ele vota na Marina Silva, devemos obter $P(R|M)$.

Pela **regra de Bayes**, podemos escrever isto:

$$P(R|M) = \frac{P(M \cap R)}{P(M)} = \frac{P(M|R)P(R)}{P(M)}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$P(R|M) = \frac{0,1 \cdot 0,37}{0,0685} = \frac{0,037}{0,0685} = 0,540$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Portanto, a probabilidade de um eleitor morar em uma RM, dado que ele vota na Marina Silva, é de 54%.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. UM TESTE DE LABORATÓRIO DETECTA UMA DOENÇA QUANDO ELA ESTÁ PRESENTE EM 95% DOS CASOS. CONTUDO, ELE TAMBÉM FORNECE UM RESULTADO "FALSO POSITIVO" PARA 1% DAS PESSOAS SAUDÁVEIS TESTADAS (ISTO É, SE UMA PESSOA SAUDÁVEL FAZ O TESTE, HÁ A PROBABILIDADE 0,01 DE QUE O RESULTADO DELE DIGA QUE ELA POSSUI A DOENÇA, MESMO NÃO A TENDO.) SE 0,5% DA POPULAÇÃO TEM A DOENÇA, QUAL É A PROBABILIDADE DE UMA PESSOA, DADO QUE O RESULTADO DO TESTE É POSITIVO, TER A DOENÇA?

- A) 0,05
- B) 0,01
- C) 0,5
- D) 0,95
- E) 0,323

2. DURANTE O MÊS DE JULHO, A PROBABILIDADE DE CHUVA É DE 0,3. O BANGU, SIMPÁTICO TIME DO SUBÚRBIO DO RIO DE JANEIRO, GANHA UM JOGO EM UM DIA DE CHUVA COM A PROBABILIDADE 0,4 E EM UM DIA SEM ELA COM A PROBABILIDADE 0,6. SE ELE GANHOU UM JOGO EM JULHO, QUAL É A PROBABILIDADE DE QUE TENHA CHOVIDO NESSE DIA?

- A) 1/2
- B) 2/5
- C) 2/9
- D) 3/5
- E) 6/25

GABARITO

1. Um teste de laboratório detecta uma doença quando ela está presente em 95% dos casos. Contudo, ele também fornece um resultado "falso positivo" para 1% das pessoas saudáveis testadas (isto é, se uma pessoa saudável faz o teste, há a probabilidade 0,01 de que o resultado dele diga que ela possui a doença, mesmo não a tendo.) Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa, dado que o resultado do teste é positivo, ter a doença?

A alternativa "E " está correta.

Para resolvermos esse problema, consideraremos D o evento de a pessoa testada ter a doença e E , o de que o resultado do teste seja positivo.

Dessa maneira, a probabilidade desejada $P(D|E)$ é dada por:

$$P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)}$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim:

$$P(D|E) = \frac{0,95 \cdot 0,005}{(0,95 \cdot 0,005) + (0,01 \cdot 0,995)} \approx 0,323$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Portanto, apenas 32% das pessoas cujos resultados do teste deram positivo realmente possuem a doença.

2. Durante o mês de julho, a probabilidade de chuva é de 0,3. O Bangu, simpático time do subúrbio do Rio de Janeiro, ganha um jogo em um dia de chuva com a probabilidade 0,4 e em um dia sem ela com a probabilidade 0,6. Se ele ganhou um jogo em julho, qual é a probabilidade de que tenha chovido nesse dia?

A alternativa "C " está correta.

Consideremos C o evento de chover em julho e B o de o Bangu ganhar um jogo.

Pelo enunciado, sabemos que:

$$P(C) = 0,3, P(B|C) = 0,4, P(B|C^c) = 0,6$$

 **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Pelo primeiro axioma da probabilidade, vemos que:

$$P(B^C|C) = 1 - P(B|C) = 1 - 0,4 = 0,6$$

⚠ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A questão nos pede $P(C|B)$. Pela **regra de Bayes**, sabemos que:

$$P(C|B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)}$$

⚠ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Pela **lei da probabilidade total**, chegamos ao seguinte resultado:

$$P(B) = P(B|C)P(C) + P(B|C^C)P(C^C)$$

⚠ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Portanto, $P(B) = 0,3 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 7 = 0,54$.

Substituindo a probabilidade total de F na regra de Bayes, chegamos a isto:

$$P(C|B) = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,54} = \frac{0,12}{0,54} = \frac{2}{9}$$

⚠ **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

CONCLUSÃO

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apontamos neste tema os conceitos básicos de teoria da probabilidade, demonstrando como é possível realizar cálculos por intermédio de probabilidade condicional, independência, lei da probabilidade total e regra de Bayes.

Ressaltamos ainda que os conceitos apresentados ao longo dos três módulos podem ser aplicados em vários assuntos da vida cotidiana. Exemplos disso podem ser encontrados na meteorologia, nas pesquisas eleitorais e na medicina.

REFERÊNCIAS

BUSSAB, W. de O.; MORETIN, P. A. **Estatística básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

SCHMIDT, C. A. J. (Org.). **Estatística**: questões comentadas dos concursos de 2006 a 2015. 5. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

EXPLORE+

Para você conseguir se aprofundar nos tópicos abordados neste tema, indicamos a leitura destes livros:

BUSSAB, W. de O.; MORETIN, P. A. **Estatística básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

SCHMIDT, C. A. J. (Org.). **Estatística**: questões comentadas dos concursos de 2006 a 2015. 5. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

CONTEUDISTA

Maria Eduarda Barroso Perpétuo de Souza

 **CURRÍCULO LATTES**