DESCRIÇÃO

Apresentação de variáveis aleatórias unidimensionais. Função de probabilidade, função densidade, distribuição acumulada. Propriedades de variáveis aleatórias. Momentos estatísticos e suas propriedades.

PROPÓSITO

Compreender conceitos fundamentais de variáveis aleatórias unidimensionais para a aplicação de suas propriedades em diversos problemas.

PREPARAÇÃO

Antes de iniciar este conteúdo, certifique-se de ter papel e lápis por perto para acompanhar os exemplos e demonstrações.

OBJETIVOS

MÓDULO 1

Definir variável aleatória e suas propriedades

MÓDULO 2

Identificar os principais momentos estatísticos

INTRODUÇÃO

Quando descrevemos o espaço amostral de um determinado experimento, frequentemente, um resultado individual é não numérico. Por exemplo, quando lançamos uma moeda para o alto, o resultado pode ser cara ou coroa. Quando acompanhamos dados sobre o clima, podemos simplesmente registrar se choveu ou não.

Em situações experimentais, frequentemente, estamos interessados em medir alguma coisa e registrá-la como um número. Às vezes, esse registro quantitativo é intuitivo, em outras, precisamos pensar um pouco em como fazê-lo. Nos exemplos citados, podemos registrar o índice pluviométrico em uma determinada região, ou atribuir o número 1 se o resultado for cara e 0 se for coroa. Ou seja, podemos atribuir números a cada um dos resultados possíveis.

Veremos como fazer isso por meio de um conceito fundamental em probabilidade e estatística: **variável aleatória**. A partir da definição de variável aleatória, vamos estudar as funções de probabilidade, densidade, e distribuição acumulada, seus cálculos e utilidades. No módulo seguinte, vamos definir **momentos de uma forma genérica** e priorizar o estudo daqueles que são mais utilizados no dia a dia. Usaremos, ao longo do tema, conceitos de probabilidade e cálculo básicos.

MÓDULO 1

Definir Variável Aleatória e suas propriedades

INTRODUÇÃO A VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

DEFINIÇÃO

Variável aleatória (v.a.) é uma representação numérica dos resultados possíveis de um experimento aleatório. De maneira formal, uma variável aleatória é uma **função real** definida da seguinte maneira:

$$S \to R$$

$$\omega| \to X(\omega)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Em que ω é um ponto que pertence a S, o espaço amostral desse experimento. A variável aleatória X associa a cada ponto ω em S um número real x = X(ω).

Assim, dado um experimento aleatório com o espaço amostral S, podemos pensar na variável aleatória como uma regra que associa a cada elemento de S um número real .

As variáveis aleatórias são fundamentais para as aplicações de probabilidade, uma vez que representam características de interesse em uma população.

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS E CONTÍNUAS

Existem dois tipos de variáveis aleatórias: as **discretas** e as **contínuas**.

Uma função X definida no espaço amostral e com valores em um **conjunto enumerável de pontos** da reta é intitulada variável aleatória discreta.

CONJUNTO ENUMERÁVEL DE PONTOS

Lembrando: um conjunto enumerável, também chamado contável, é um conjunto finito ou infinito que admite uma bijeção para o conjunto dos números naturais. Ou seja, podemos associar a cada elemento do conjunto enumerável um número natural — por isso, dizemos que podemos enumerar seus elementos.

★ EXEMPLO

O número de caras observadas após cinco lançamentos de uma moeda, o número de crianças em uma região e o número de vezes que uma ação subiu de preço em um dia podem ser consideradas variáveis aleatórias **discretas**.

Por outro lado, uma função X definida sobre o espaço amostral e assumindo valores em um intervalo de números reais, é uma variável aleatória **contínua**.

★ EXEMPLO

A temperatura média durante o dia e o preço de uma ação são exemplos de variáveis aleatórias **contínuas**.

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

A **função de probabilidade** é uma função P(X=x) que associa, a cada valor possível x de **uma variável aleatória discreta** X, a sua probabilidade. De maneira formal, chamamos de função de probabilidade da v.a. discreta X, que assume valores $x_1,x_2,...,x_n,....$, a função $\{(x_i,p(x_i),i=1,2,...\}$, que a cada valor de X_i associa a sua probabilidade de ocorrência, isto é:

$P(X_I)=P(X=X_I)=P_I$, I=1,2,...

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Por exemplo, podemos pensar em uma variável aleatória que assume os valores 0 (com probabilidade 0.4) e 1 (com probabilidade 0.6).

Toda distribuição discreta possui as seguintes propriedades:

PROPRIEDADE 1

$$P\left(X=x\right)\geq 0, \forall x$$

Essa propriedade nos diz que uma probabilidade não pode ser negativa.

PROPRIEDADE 2

$$\sum_x P\left(X=x\right)=1$$

Essa propriedade nos diz que as probabilidades devem somar um: ou seja, a probabilidade de que o resultado esteja no espaço amostral é igual a um.

Se alguma dessas hipóteses não for atendida, a função de probabilidade não estará bem definida!

FUNÇÃO DENSIDADE

Uma função de densidade f(x) permite calcular a probabilidade de que uma v.a. contínua pertença a um intervalo. Podemos interpretar P(a<X<b) como a área sob o gráfico de f(x) que corresponde ao intervalo [a,b].

Uma função de densidade de probabilidade, chamada frequentemente de **função densidade** ou, simplesmente, de **densidade**, tem as seguintes propriedades:

PROPRIEDADE 1

$f(x) \geq 0, \ \forall x$

Essa propriedade é análoga ao que já vimos: uma probabilidade não pode ser negativa.

PROPRIEDADE 2

A área total sob o gráfico da função de densidade (ou seja, sua integral) é igual a 1:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Para interpretar essa propriedade no caso contínuo, precisamos ser um pouco mais cuidadosos. Vamos reforçar que usamos a densidade para calcular a probabilidade de intervalos, mas não de pontos.

FUNÇÃO DE DENSIDADE

A função de densidade é o equivalente à função de probabilidade para os casos contínuos.

Observe inicialmente que qualquer ponto particular no intervalo [a,b] deve ter probabilidade igual a zero. Afinal, temos um número de pontos infinito (e não enumerável).

Qual é a probabilidade de a temperatura média em um determinado dia ser exatamente igual a 25 graus?

Dizemos que é igual a zero: ela pode ser **25,1**, ou **25,01**, ou **25,001**, e assim por diante, e qualquer valor específico recebe probabilidade (ou massa de probabilidade) igual a zero.

Para variáveis aleatórias contínuas, só faz sentido calcular a probabilidade de uma região: por exemplo, qual é a probabilidade de que a temperatura média fique entre 25 e 26 graus? Não podemos, portanto, somar probabilidades (como fizemos no caso discreto), mas, ainda assim, podemos dizer que a massa de probabilidade total deve ser igual a um.

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

A função de distribuição acumulada descreve como probabilidades são associadas aos valores ou aos intervalos de valores de uma variável aleatória. **Ela representa a probabilidade de uma variável aleatória ser menor ou igual a um determinado valor real**.

A função de distribuição acumulada F(x) associa, a cada valor $x \in \mathbb{R}$, a probabilidade de que X seja menor ou igual a x. Ou seja, $P(X \leq x)$.

A função de distribuição acumulada possui as seguintes propriedades:

(1) $\lim_{\mathrm{x} \to -\infty} \mathrm{F(x)} = 0$

(2) $\lim_{\mathrm{x} \to \infty} \mathrm{F(x)} = 1$

(3) NO CASO DISCRETO, F(X) É <u>CONTÍNUA À DIREITA</u>. JÁ NO CASO CONTÍNUO, F(X) É CONTÍNUA.

(4) NO CASO CONTÍNUO, PODEMOS OBTER A FUNÇÃO DE DENSIDADE F(X) AO DERIVARMOS F(X)

EM RELAÇÃO A X (SE ESSA DERIVADA EXISTIR):

$$f\left(x\right) = \frac{dF\left(x\right)}{dx}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Vamos interpretar cada uma dessas linhas. A primeira propriedade nos diz que a função de distribuição assume um valor próximo a zero quando x é muito pequeno. Isso é intuitivo: qual é a probabilidade de que a variável aleatória tenha um valor menor que x, se x já é muito pequeno? Essa probabilidade deve ser baixa — no limite, quando x tende a menos infinito, deve ser igual a zero. Analogamente, é provável que a variável aleatória assuma um valor menor que x, se x é grande: no limite, quando x tende a infinito, essa probabilidade é igual a 1.

O que significa dizer que a variável aleatória discreta é “contínua à direita”?

Vamos avaliar o que acontece quando aumentamos o valor de x. Há duas possibilidades: ou passamos apenas por valores para os quais a função de probabilidade assume valor zero (e, portanto, a função de distribuição se mantém constante), ou chegamos a um primeiro valor em que a função de probabilidade assume um valor estritamente positivo (e, portanto, a função de distribuição aumenta subitamente, “dá um salto”, e depois se mantém novamente constante até chegarmos a outro ponto em que a função de probabilidade assume um valor maior que zero).

Nos pontos em que a função dá um salto, ela é descontínua, mas como depois do salto ela fica constante, ela é contínua à direita (porque uma função constante é contínua).

COMENTÁRIO

No caso contínuo, não precisamos nos preocupar com saltos exatamente porque a massa de probabilidade em um ponto específico qualquer é sempre igual a zero: dessa forma, a função de distribuição aumenta aos poucos, e é contínua.

E se a função de distribuição for não apenas contínua, mas também diferenciável (nem sempre é o caso), podemos dizer exatamente qual é a sua inclinação, ou seja, sua derivada: é exatamente a função densidade em cada ponto. Ou seja, a densidade mede o quanto a função de distribuição muda a cada ponto. É análogo ao caso discreto, quando temos alguns pontos em que a função de distribuição “salta”: o tamanho desse salto é exatamente o valor da função de probabilidade. No caso contínuo, não temos grandes saltos pontuais, mas uma mudança contínua ao longo do domínio. Observe que isso é uma forma de usar o Teorema Fundamental do Cálculo: estamos relacionando a derivada (a função de densidade) com a integral (a função de distribuição).

★ EXEMPLO

Para ilustrar, vamos usar novamente nosso exemplo discreto: uma variável aleatória que pode assumir os valores 0 (com probabilidade 0.4) e 1 (com probabilidade 0.6). Como é a função de distribuição acumulada? É simples: vale 0 no intervalo $(-\infty,0)$; vale 0.4 no intervalo $[0,1)$; e vale 1 no intervalo $[1,\infty)$. Por último, observe que uma função de distribuição acumulada é sempre não decrescente, como nesse exemplo: ou ela se mantém constante, ou seu valor aumenta.

DISTRIBUIÇÃO DA FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Podemos definir o conceito de **eventos equivalentes** como dois eventos que sempre ocorrem juntos.

SEJAM *A* E *B* EVENTOS EQUIVALENTES:

Quando *A* ocorre, *B* ocorre, assim como quando *B* ocorre, *A* ocorre. Assim, dois eventos são considerados equivalentes se, e somente se, ocorrerem conjuntamente.

Seja *X* uma variável aleatória discreta definida no espaço amostral S, e y=H(X) uma função X. Então, Y=H(X) é também uma variável aleatória. Sejam R_x e R_y os contradomínios de X e Y, respectivamente.

Para qualquer evento $A \subset R_y$, temos que:

$$P(A) = P(X \in R_X : H(X) \in A)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Pela definição de evento equivalente, podemos dizer que a probabilidade de um evento A associado ao contradomínio de Y é definida como a probabilidade do evento equivalente em termos de X (ou seja, $x \in R_X$ tal que $H(x) \in A$). Assim, essa definição que acabamos de ver nos permite calcular a probabilidade de eventos associados a Y, caso conheçamos a probabilidade de X e se pudermos determinar o evento equivalente em questão.

Seja X uma variável aleatória discreta e Y = H(X). Então, Y é uma **função da variável aleatória discreta** X, e, portanto, segue uma distribuição discreta. Podemos enumerar os possíveis valores assumidos por X como $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ e por Y como $y_1, y_2, y_3..., y_n$.

Sendo $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ os valores possíveis de X, temos que $p(x_i)=P(X = x_i)$. Seja H uma função tal que cada valor de y corresponde exatamente a um valor de x. Obtemos a **distribuição de probabilidade** de Y da seguinte maneira:

VALORES POSSÍVEIS DE Y:

$y_i = H(x_i)$, i = 1,2,3,...,n

PROBABILIDADES DE Y:

$q(y_i)=P(Y=y_i)=p(x_i)$

Contudo, na maioria dos casos, a função H não possui a característica acima, e vários valores de X podem levar ao mesmo valor de Y. Podemos estabelecer um procedimento geral para casos como esse.

Sejam $x_{i1},x_{i2},x_{i3},...,x_{in}$ os valores assumidos por X e que tenham a propriedade $H(x_{ij}) = y_i, \forall j$ = 1,...,n. Então:

$$Q(Y_I) = P(Y = Y_I) = P(X_{I1})+P(X_{I2})+...$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Ou seja, para obtermos a probabilidade do evento $Y=y_i$, encontramos os eventos equivalentes em termos de X e somamos todas as probabilidades correspondentes.

Além disso, se X é uma variável contínua, Y pode ser tanto discreta quanto contínua.

Vamos ver os casos em que Y é:

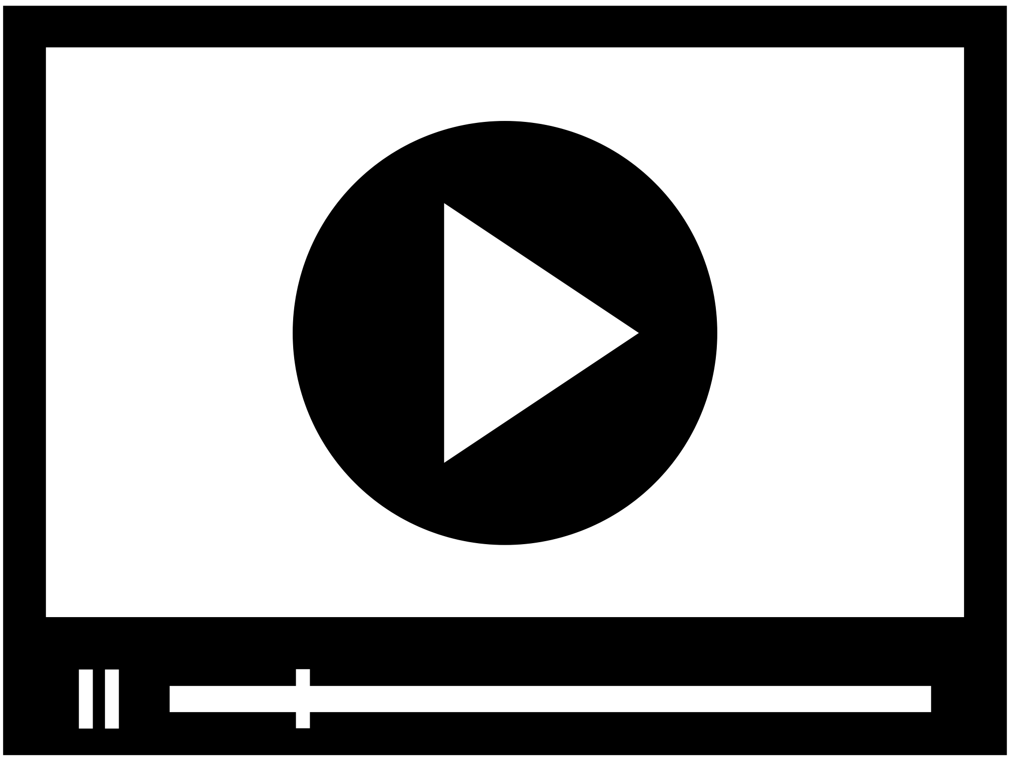
DISCRETA

Esse exemplo é particularmente importante: podemos ter informação sobre a temperatura média (uma variável aleatória contínua), mas só estamos interessados em saber o número de vezes que essa média ficou acima de 35 graus (a contagem de dias é uma variável aleatória discreta). Se a função de densidade de probabilidade de X for conhecida, e se $Y=y_i$ for equivalente a um determinado evento A no contradomínio de X, temos que:

$q(y_i) = P(Y = y_i) = \int_A f(x)dx$

CONTÍNUA

Se H for contínua, Y=H(X) também será uma variável aleatória contínua. Para obtermos a função de densidade de probabilidade de Y, que denotaremos por g, devemos obter G, que é a função de distribuição acumulada de Y. Para obtermos $G(y)=P(Y\leq y)$, devemos encontrar o evento A no contradomínio de X, que é equivalente ao evento $Y\leq y$. Depois de obtermos G(y), podemos derivar com respeito a y, e teremos g(y). Por fim, devemos determinar os valores de y no contradomínio de Y, para os quais $g(y)>0$.



EXEMPLO: FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

MÃO NA MASSA

1. MARIANA, APÓS ESTUDAR CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE, DECIDIU REALIZAR O SEGUINTE EXPERIMENTO: LANÇAR TRÊS MOEDAS E OBSERVAR O NÚMERO DE CARAS. SEJA X O NÚMERO DE CARAS OBSERVADAS. QUAL É A PROBABILIDADE DE MARIANA OBTER 3 CARAS?

A) 1/4

B) 1/2

C) 3/8

D) 5/8

E) 1/8

2. SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA COM A SEGUINTE DISTRIBUIÇÃO: $F(X) = CX^2$, $0 < X < 2$.

ASSINALE A ALTERNATIVA QUE APRESENTA O VALOR CORRETO DA CONSTANTE C:

A) 1/4

B) 3/8

C) 7/8

D) 5/8

E) 1/2

3. CONSIDERE A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE: F(X) = 2X, 0≤ X < 1. ENCONTRE F(X) E ASSINALE A ALTERNATIVA INCORRETA:

A) F(x) = 1 para x ≥ 1

B) F(x) = 0 para x ≥ 1

C) F(x) = 0 para x < 0

D) F(x) = x^2 para 0 ≤ x < 1

E) F(x) = P(X ≤ x) para 0 ≤ x < 1

4. CONSIDERE AS AFIRMATIVAS ABAIXO E ASSINALE A ALTERNATIVA FALSA:

A) Seja X uma variável aleatória discreta e P(X) sua função de probabilidade. Podemos escrever que $\sum_x P(X = x) = 1$.

B) A função de distribuição de probabilidade de uma variável discreta é contínua à direita.

C) Podemos interpretar P(a < X < b) como a área sob o gráfico de f(x) que corresponde ao intervalo [a,b].

D) Seja X uma variável aleatória contínua, P(X = x)=0, ∀x.

E) Podemos obter F(x) derivando f(x) com respeito a x.

5. SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA CUJA DISTRIBUIÇÃO É P(X = X) = 1/4, PARA $X \in \{-1,1,2,3\}$. CALCULE A DISTRIBUIÇÃO DE $Y = X^2$ E ASSINALE A ALTERNATIVA CORRETA:

A) y = -1,1,2,3

B) P(Y = y) = 1/4

C) P(Y = 1) = 1/2

D) P(Y = 2) = 1/2

E) P(Y = 9) = 1/3

6. SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA TAL QUE F(X) =1 E $0 < X < 1$. SEJA Y= -LN(X). DETERMINE A DISTRIBUIÇÃO DE Y E ASSINALE A ALTERNATIVA CORRETA:

A) $f(y) = 1-e^{-y}$

B) $F(y) = 1-e^{-y}$

C) f(y) = -ln(x)

D) $f(y) = e^{-y}$

E) $f(y) = \ln(x)-e^{y}$

GABARITO

1. Mariana, após estudar conceitos básicos de probabilidade, decidiu realizar o seguinte experimento: lançar três moedas e observar o número de caras. Seja X o número de caras observadas. Qual é a probabilidade de Mariana obter 3 caras?

A alternativa **"E "** está correta.

Para obtermos a probabilidade de Mariana obter 3 caras, vamos usar a distribuição de probabilidade de X, a variável aleatória que representa o número observado de caras. Essa variável aleatória pode assumir qualquer valor no conjunto {0,1,2,3}. Para obtermos X=3, devemos ter 3 caras. Cada uma tem probabilidade igual a 1/2 e os lançamentos são independentes. Portanto, $P(X=3)=(1/2)^3=1/8$. A distribuição completa de X é:

x	P(X=x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Atenção! Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal

2. Seja X uma variável aleatória contínua com a seguinte distribuição: $f(x) = cx^2$, 0< x < 2.

Assinale a alternativa que apresenta o valor correto da constante c:

A alternativa **"B "** está correta.

Para encontramos o valor da constante, precisamos utilizar a propriedade que

$$\int_x f(x)dx = 1$$

Assim:

$$\int_0^2 cx^2 dx = 1$$

$$c\int_0^2 x^2dx = 1$$

$$c\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = 1$$

$$\frac{c}{3}\left(2^3 - 0^3\right) = 1$$

$$\frac{8c}{3} = 1$$

$$c = \frac{3}{8}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

3. Considere a distribuição de probabilidade: f(x) = 2x, 0≤ x < 1. Encontre F(x) e assinale a alternativa incorreta:

A alternativa **"B "** está correta.

Para x < 0, temos que F(x) = 0. Para 0≤ x < 1, devemos integrar a f(x) com respeito a x para obtermos F(x). Assim,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx$$

Substituindo f(x), temos que

$$F(x) = \int_0^x 2xdx = x^2.$$

Já para valores de x ≥ 1, F(x) = 1.

4. Considere as afirmativas abaixo e assinale a alternativa falsa:

A alternativa **"E "** está correta.

As alternativas a, b, c e d seguem diretamente das propriedades vistas no módulo 1. A alternativa **E** é falsa, uma vez que, para obtermos f(x), derivamos F(x) com respeito a x.

5. Seja X uma variável aleatória cuja distribuição é P(X = x) = 1/4, para $x \in$ {-1,1,2,3}. Calcule a distribuição de Y = X^2 e assinale a alternativa correta:

A alternativa **"C "** está correta.

Como sabemos que Y = X^2, primeiro devemos calcular os valores que Y pode assumir. Assim, para cada valor de x teremos um valor de y. Quando x = -1, y = x^2 =1 e assim por diante, de forma que $y \in$ {1,4,9}. Agora, podemos calcular a distribuição de Y da seguinte maneira:

Quando y = 1:P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) =1/4 + 1/4 = 1/2, o que responde à questão. Além disso:

Quando y = 4:P(Y=4) = P(X=2) = 1/4

Quando y = 9:P(Y=9) = P(X=3) = 1/4

6. Seja X uma variável aleatória contínua tal que f(x) =1 e 0 < x < 1. Seja Y= -ln(x). Determine a distribuição de Y e assinale a alternativa correta:

A alternativa **"A "** está correta.

Sabemos que F(y) = P(Y≤y). Sabemos também que Y = -ln(x), e, portanto, podemos substituir Y = -ln(x) em F(y) = P(Y≤y), de modo que obteremos P(-ln(X)≤y). Assim, P($X \geq e^{-y}$)= 1-F_X (e^{-y}), para y>0. Para obtermos f(y), devemos derivar F(y) com respeito a y. Teremos então:

$$f\left(y\right) = \frac{dF(y)}{dy}$$

$$= 1 - e^{-y}, y > 0$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

---

GABARITO

TEORIA NA PRÁTICA

Um aplicador investiu R$10.000,00 em um ativo. Esse investimento pode render ou perder 1% de um dia para o outro. A probabilidade de sofrer uma valorização é de 60%, e a de uma desvalorização é de 40%. Admitindo independência entre dois dias consecutivos de aplicação e sabendo que o investimento tem duração de 2 dias, ao fim dos quais haverá um resgate total (valor investido + ganhos), o investidor pode calcular qual é a probabilidade desse investimento não ser lucrativo.

RESOLUÇÃO

Seja V o evento do ativo sofrer valorização e seja N o evento em que o ativo não sofreu valorização. Podemos montar a seguinte tabela:

Espaço Amostral

1º dia	2º dia	Ganho	Probabilidade
V	V	201	0,36
V	N	-1	0,24
N	V	-1	0,24
N	N	-199	0,16

Atenção! Para visualizaçãocompleta da tabela utilize a rolagem horizontal

Seja G os possíveis valores que o ganho pode assumir. Temos que $G \in \{-199,-1,201\}$.

Temos, então:

$P(G=-199)=0{,}16$

$P(G=-1)=0{,}48$

$P(G=201)=0{,}36$

Portanto, a probabilidade de o investimento não ser lucrativo ($G<0$) é de $0{,}16+0{,}48 = 0{,}64$.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. (ADAPTADO DE ANPEC 2006 – QUESTÃO 13) SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA COM FUNÇÃO DE DENSIDADE IGUAL A $f\left(x\right)=\frac{x}{6}+k, \text{com } 0\leq x\leq 3.$

CALCULE P(1≤X≤2) E ASSINALE A ALTERNATIVA CORRETA:

A) 1/3

B) 1/6

C) 1/2

D) 1/4

E) 1/12

2. SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA QUE ASSUME TRÊS VALORES: -1, 0 E 1, COM PROBABILIDADES 1/3, 1/2 E 1/6. SEJA Y=3X+1. CALCULE A PROBABILIDADE DE X+Y SER IGUAL A 3.

A) 1/3

B) 1/6

C) 1/2

D) 1/4

E) 1/18

GABARITO

1. (Adaptado de ANPEC 2006 – questão 13) Seja X uma variável aleatória com função de densidade igual a $f\left(x\right)=\frac{x}{6}+k, \text{com } 0\leq x\leq 3.$

Calcule P(1≤X≤2) e assinale a alternativa correta:

A alternativa **"A "** está correta.

Para resolvermos a questão, é preciso encontrar primeiro o valor de k. Para isso, vamos usar a propriedade da função de densidade, em que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Substituindo nossa função de densidade na equação, temos que:

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{6} + k\right)dx = 1$$
$$\frac{x^2}{12} + kx \Big|_0^3 = 1$$
$$\frac{3}{4} + 3k = 1$$
$$k = \frac{1}{12}$$

Assim,

$$P\left(1 \le x \le 2\right) = \int_1^2 \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{12}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{12} + \frac{x}{12}\Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

2. Seja X uma variável aleatória que assume três valores: -1, 0 e 1, com probabilidades 1/3, 1/2 e 1/6. Seja Y=3x+1. Calcule a probabilidade de X+Y ser igual a 3.

A alternativa **"E "** está correta.

Para encontrarmos P(X+Y=3), precisamos primeiro encontrar os valores possíveis que Y assume. Para isso, devemos substituir os valores que X assume na expressão Y. Assim, temos que Y assume os seguintes valores: -2, 1 e 4, com as respectivas probabilidades 1/3, 1/2 e 1/6. Para calcularmos a probabilidade da soma ser igual a 3, precisamos saber quais das possíveis combinações sejam igual a 3. Assim, P(X+Y=3) acontece quando X assume valor -1 e Y assume valor 4. A probabilidade de que isto ocorra é (1/3)×(1/6)=1/18.

MÓDULO 2

⦿ **Identificar os principais momentos estatísticos**

MOMENTOS E SUAS PROPRIEDADES

MOMENTOS

Os momentos são valores numéricos calculados a partir de uma distribuição de probabilidades. São frequentemente utilizados para fornecer descrições resumidas da distribuição em questão. Dentro da ampla classe dos momentos, estão incluídas três importantes medidas que são frequentemente utilizadas: a **média**, a **variância** e o **desvio padrão**.

De forma genérica, sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ os n valores assumidos pela variável X. Podemos definir o **momento de ordem k** como:

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

★ EXEMPLO

Qual é o momento de ordem k=1? Usando a expressão acima, temos:

$$M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^1}{n}$$

Ou seja, temos simplesmente a média da distribuição, que denotaremos por $\overline{X}$ ou E(X) (lê-se “ **esperança** de X”).

ESPERANÇA

Alguns textos usam o termo “Expectância”.

Temos também os **momentos centrados na média**. Podemos expressá-los da seguinte maneira:

$$M_r = \frac{\sum_{i-=1}^{n} \left(x_i - \overline{x} \right)^k}{n}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Aqui, vamos estudar os momentos que são mais frequentemente utilizados.

VALOR ESPERADO

O primeiro momento é o **valor esperado** ou **esperança**. O valor esperado de uma variável aleatória X, E(X), é a média dos valores que X assumiria em infinitas repetições do experimento.

Podemos escrever a fórmula do valor esperado para os casos **discreto e contínuo** da seguinte maneira:

DISCRETO

$E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$

CONTÍNUO

$E(X) = \int x f(x) dx$

A esperança de X é também chamado de **média** de X, como registramos acima.

Vale notar que E(X) não é um valor que se espera que ocorra, podendo ser (e, em geral, é) um valor que não ocorre.

★ EXEMPLO

Considere uma variável aleatória discreta que tem 50% de chance de assumir o valor 0 (zero), e 50% de chance de assumir o valor 1. A esperança é

$$E(X) = \left(\frac{1}{2}\right) \times 0 + \left(\frac{1}{2}\right) \times 1 = \left(\frac{1}{2}\right)$$

Ou seja, a média é diferente dos valores que a variável aleatória pode assumir.

Podemos interpretar E(X) como o **ponto de equilíbrio** da distribuição, em que as probabilidades são os pesos. O valor esperado ou média é uma das possíveis medidas de posição ou tendência central de uma variável aleatória.

A seguir, temos algumas importantes propriedades do valor esperado de uma variável aleatória:

1. Seja X=c, em que c é uma constante real. Então, E(X)=c.

Para vermos como chegamos a essa propriedade, podemos utilizar a expressão para calcular a esperança de variáveis discretas da seguinte forma:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right) = \sum_{\mathrm{x}} \mathrm{x} \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x})$$

$$= \sum_{\mathrm{x}} \mathrm{c} \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x})$$

$$= \mathrm{c} \sum_{\mathrm{x}} \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x})$$

$$= c \cdot 1$$

$$= c$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. Seja c uma constante real e X uma variável aleatória. Então, E(cX)=c·E(X).

No caso discreto, temos que:

$$E(cX)= \sum_{x} cx \cdot P(X = x)$$

$$= c \cdot \sum_x x \cdot P(X = x)$$

$$= c \cdot E(X)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

De maneira análoga, temos no caso contínuo que:

$$E(cX)= \int_{-\infty}^{+\infty} cxf(x)dx$$

$$= c \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

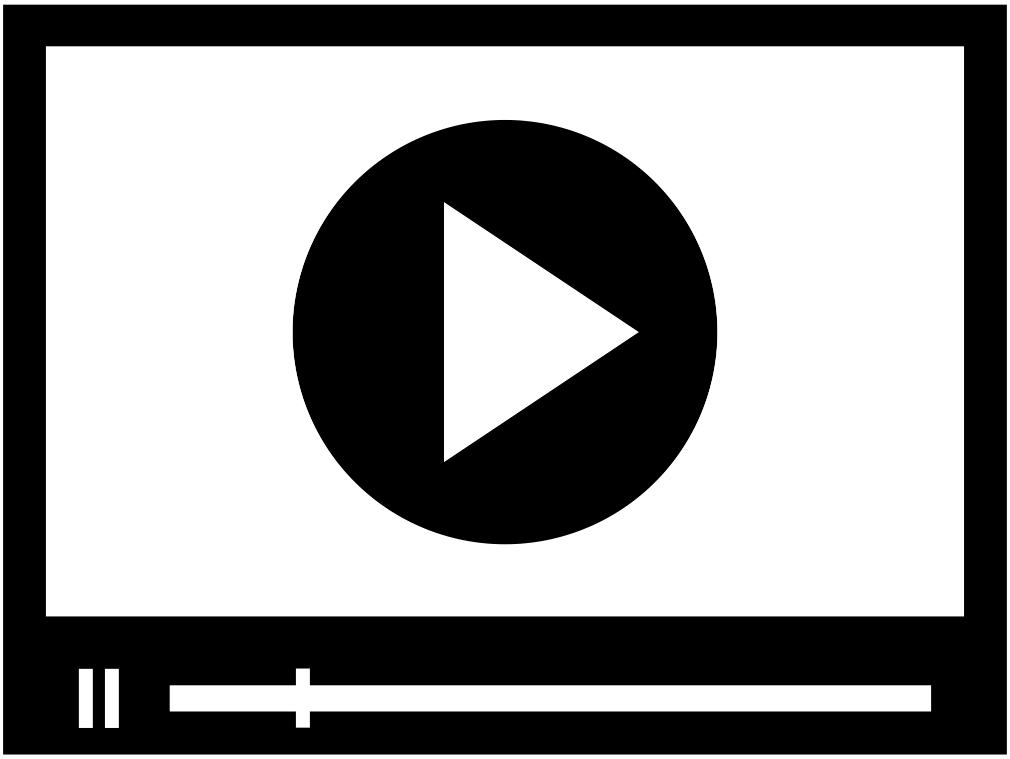
$$= c \cdot E(X)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Vamos ver juntos as próximas duas propriedades, já que são um pouco mais complicadas e exigem um pouco mais de manipulação algébrica. São elas:

3. A esperança da soma é a soma das esperanças: **E(X+Y)=E(X)+E(Y)**.

4. *Para variáveis aleatórias independentes*, a esperança do produto é o produto das esperanças: **E(XY)=E(X)E(Y)**.



PROPRIEDADES DA ESPERANÇA

Neste vídeo, vamos provar as duas últimas propriedades vistas.

ATENÇÃO

As propriedades 2 e 3 permitem escrever E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y) para quaisquer números reais a e b, e para quaisquer variáveis aleatórias X e Y. Dizemos, então, que **a esperança é um operador linear**.

Você deve conhecer duas outras medidas importantes que dizem respeito à tendência central: a **moda** e a **mediana**. Podemos descrevê-las com o arcabouço que estamos usando.

MODA

A **moda**, no caso discreto, é o valor que ocorre com maior probabilidade, sendo, no caso contínuo, definida como x tal que f(x) seja máxima.

MEDIANA

A **mediana**, por sua vez, é o valor que divide a distribuição em dois intervalos com probabilidades iguais (0,5). No caso contínuo, divide f(x) em duas áreas iguais.

VARIÂNCIA

Uma medida de posição não informa nada sobre a dispersão dos valores de uma variável aleatória. Essa informação é importante, principalmente em situações que envolvem algum risco. Devemos olhar, então, para o segundo momento da variável aleatória.

O segundo momento, a **variância**, é o valor esperado de $[X-E(X)]^2$.

A variância é uma medida bastante utilizada para mensurar dispersão. Contudo, por ser expressa no quadrado da variável original, não possui interpretação direta, uma vez que a unidade de medida não faz sequer sentido.

A variância pode ser obtida mediante a forma equivalente a partir da expressão:

$$V(X)=E(X^2)-E^2\,(X).$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

ATENÇÃO

$E^2\,(X)$ também pode ser escrito como $[E(X)]^2$. Ou seja, primeiro calculamos a esperança, e depois elevamos ao quadrado. Para calcular $E(X^2)$, é o contrário: primeiro elevamos a variável aleatória ao quadrado e depois calculamos a esperança.

A partir das propriedades do valor esperado, vamos chegar juntos a este resultado:

$$V(X)=E[X-E(X)]^2$$

$$V(X)=E[X^2-2\cdot X\cdot E(X)+E^2\,(X)]$$

$$V(X)=E(X^2)-2\cdot E(X)\cdot E(X)+E^2\,(X)$$

$$V(X)=E(X^2)-2E^2\,(X)+E^2\,(X)$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2\,(X)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

$$V(X)=E[X^2-2\cdot X\cdot E(X)+E^2 (X)]$$

Usamos aqui um produto notável: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. No caso, $a=X$ e $b=E(X)$.

$$V(X)=E(X^2)-2\cdot E(X)\cdot E(X)+E^2 (X)$$

Usamos o fato de que a esperança é um operador linear.

A variância possui algumas propriedades importantes. A demonstração de cada uma delas é semelhante às da propriedade da esperança: basta partir da definição.

SEJA C UMA CONSTANTE V(C)=0

Para demonstrar esse resultado, basta lembrar que a esperança da constante é a própria constante, como vimos neste módulo. A variância se torna:

$V(c)=E[c-E(c)]^2=E[c-c]^2=E [0]^2=0$

SEJA C UMA CONSTANTE ENTÃO $V(CX)=C^2 V(X)$

Vamos partir da seguinte forma de escrever a variância que vimos antes:

$V(cX)=E((cX)^2)-[E(cX)]^2=E(c^2 X^2)-[cE(X)]^2=c^2 E(X^2)-c^2 E^2 (X)$

$=c^2 [E(X^2)-E^2 (X)]=c^2 V(X)$

Na igualdade marcada em vermelho, usamos o fato de que a esperança é um operador linear para reescrever o primeiro termo. Na igualdade marcada em verde, notamos apenas que o que aparece entre colchetes do lado esquerdo é exatamente a expressão para a variância de X.

SEJA B UMA CONSTANTE ENTÃO V(X + B) = V(X)

Para obter esse resultado, vamos partir novamente da definição de variância:

$V(X+b)=E\ [X+b-E(X+b)]^2 = E[X+b-E(X)-b]^2=E[X-E(X)]^2=V(X)$

Na igualdade em azul, usamos novamente o fato de que a esperança é um operador linear. Observe como essa propriedade é importante: ela já apareceu várias vezes nas nossas demonstrações!

INTERPRETAÇÃO

Ao longo dos seus estudos de Estatística, você verá que o desvio padrão tem uma interpretação natural a partir da distribuição normal.

Outra medida de dispersão bastante utilizada é o **desvio padrão**. O desvio padrão é a raiz quadrada da variância:

$$DP\left(X\right) = \sqrt[2]{V(X)}$$

O desvio padrão possui a vantagem de ser expresso na mesma unidade de X, facilitando a **interpretação**.

MOMENTOS CENTRADOS DE TERCEIRA E QUARTA ORDEM

Os **momentos centrados de terceira e quarta ordem** são utilizados como uma medida de assimetria.

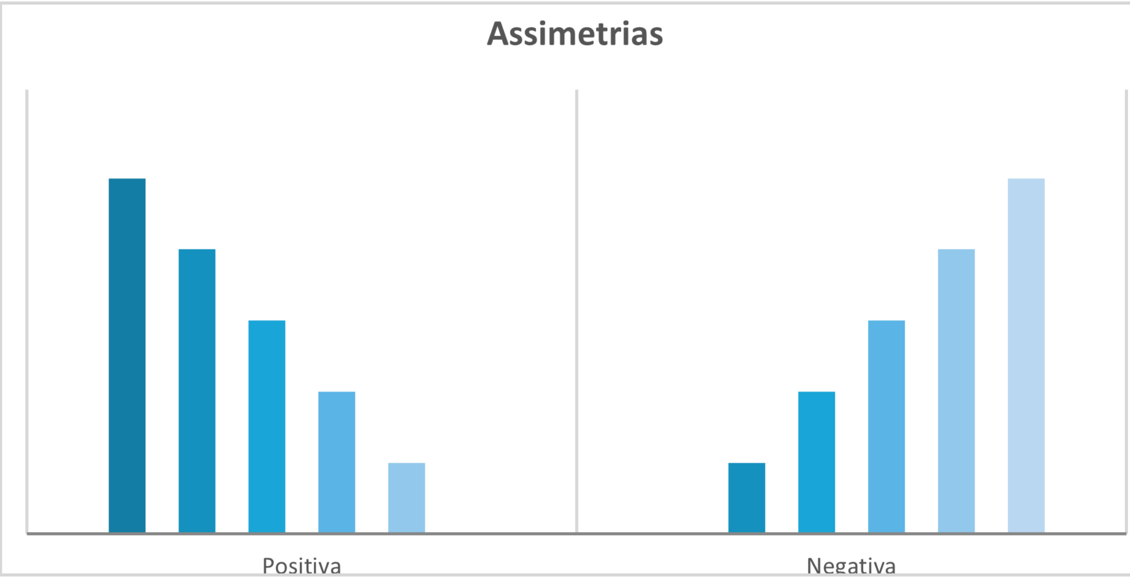
Essas medidas buscam caracterizar **como** e **quanto** a distribuição dos dados se afasta da condição de simetria.

Uma distribuição **simétrica** é aquela que apresenta o valor esperado igual à mediana e à moda.

Distribuições que são **alongadas para a direita** são classificadas como **positivamente assimétricas**.

Já distribuições **alongadas para a esquerda** são chamadas de **negativamente assimétricas**.

A figura a seguir apresenta um exemplo:



Fonte: Yduqs

O momento centrado de **terceira ordem** pode ser utilizado como medida de assimetria.

Para calculá-lo, vamos utilizar a expressão genérica para o momento centrado de ordem r. Como r=3, temos que:

$$M_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^3}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^3}{n} - 3X\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} + 2X^3$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

O **coeficiente de assimetria** é a razão entre M_3 e o cubo do desvio padrão de X. Essa medida é utilizada com maior frequência, pois é adimensional.

Podemos definir, então, o coeficiente de assimetria como:

$$a_3 = \frac{M_3}{DP^3(X)}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A PARTIR DO COEFICIENTE DE ASSIMETRIA, CLASSIFICAMOS A DISTRIBUIÇÃO EM:

SIMÉTRICA

Quando $a_3=0$

ASSIMÉTRICA À ESQUERDA

Quando $a_3<0$

ASSIMÉTRICA À DIREITA

Quando $a_3>0$

Assim como o momento centrado de terceira ordem, o **momento centrado de quarta ordem** é usado como uma medida de **achatamento** ou **curtose** da distribuição.

ATENÇÃO

Vale atentar que a medida de achatamento só faz sentido para distribuições que são aproximadamente simétricas.

Dentre as medidas de achatamento existentes, vamos destacar o **coeficiente de curtose**.

O coeficiente é obtido através da razão entre o quarto momento centrado e o quadrado da variância:

$$a_4 = \frac{M_4}{V^2(X)}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim, para obtermos a expressão para o momento centrado de ordem quatro, substituímos r=4. Assim, teremos:

$$M_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - X)^4}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^4}{n} - 4X\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^3}{n} + 6X^2\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - 3X^4$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

MÃO NA MASSA

1. SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA COM A SEGUINTE DISTRIBUIÇÃO: $f(x)= \frac{3}{8}x^2, 0 < x < 2$. CALCULE O VALOR ESPERADO DE X.

A) 3/4

B) 3/8

C) 1/4

D) 3/2

E) 7/8

2. SUPONHA QUE X SEJA UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISTRIBUÍDA DE ACORDO COM A SEGUINTE FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE:
F(X)=2(1-X) PARA 0≤X≤1.
F(X)=0, CASO CONTRÁRIO.
SEJA Y=6X+1. OBTENHA A VARIÂNCIA DE Y.

A) 2

B) 3

C) 0,5

D) 4

E) 9

3. CONSIDERE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA X QUE PODE ASSUMIR OS VALORES 1 E 0 (ZERO), CADA UM COM PROBABILIDADE 0.5. CALCULE A MÉDIA E A VARIÂNCIA DE X.

A) E(X)=0.5, V(X)=0.25.

B) E(X)=0.25, V(X)=0.25.

C) E(X)=0.25, V(X)=0.5.

D) E(X)=0.5, V(X)=0.5.

E) E(X)=0, V(X)=0.25.

4. CONSIDERE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA X QUE ASSUME O VALOR A COM PROBABILIDADE P E O VALOR B COM PROBABILIDADE (1-P). CALCULE A VARIÂNCIA DE X EM FUNÇÃO DE A, B E P.

A) $(p^2 a^2+p^2 b^2+2apb-2ap^2 b)$

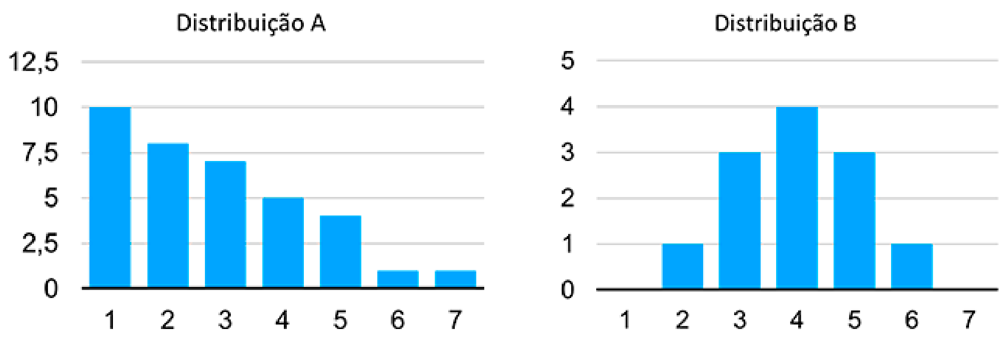
B) pa^2+pb^2

C) $pa^2+pb^2-(+p^2 b^2+2apb-2ap^2 b)$

D) $pa^2+pb^2-(p^2 a^2+p^2 b^2+2apb-2ap^2 b)$

E) $pa^2+(p^2 a^2+p^2 b^2+2apb-2ap^2 b)$

5. CONSIDERE AS DISTRIBUIÇÕES. ASSINALE A ALTERNATIVA CORRETA:



A) A distribuição com assimetria negativa e curtos e positiva é a distribuição A.

B) A distribuição B possui assimetria positiva.

C) A distribuição A possui assimetria positiva.

D) A distribuição B possui assimetria negativa e curtos e negativa.

E) A distribuição A possui assimetria negativa e curtos e negativa.

6. CONSIDERE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA QUALQUER. É CORRETO AFIRMAR:

A) A esperança do quadrado é maior ou igual ao quadrado da esperança.

B) Se o quadrado da esperança for maior que a esperança do quadrado, a variância é negativa.

C) Se a variável aleatória for constante, a esperança do quadrado é maior que o quadrado da esperança.

D) Se duas variáveis aleatórias têm a mesma média, elas devem ter o mesmo desvio padrão.

E) Quanto maior é a variância, menor é o desvio padrão.

GABARITO

1. Seja X uma variável aleatória contínua com a seguinte distribuição: $f(x)= \frac{3}{8}x^2, 0 < x < 2$ **. Calcule o valor esperado de X.**

A alternativa **"D "** está correta.

Para calcularmos o valor esperado de uma variável aleatória contínua, temos que utilizar a seguinte fórmula:

$$E(X)= \int_x xf(x)dx$$

Assim, substituindo, teremos:

$$E(X)= \int_0^2 \frac{3}{8}xx^2dx$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^2 x^3dx$$

$$= \frac{3}{8}\frac{1}{4}\mathrm{x}^4\Big|_0^2$$

$$= \frac{3}{32}\cdot 16 = \frac{3}{2}$$

2. Suponha que X seja uma variável aleatória distribuída de acordo com a seguinte função densidade de probabilidade:

f(x)=2(1-x) para 0≤x≤1.

f(x)=0, caso contrário.

Seja Y=6X+1. Obtenha a variância de Y.

A alternativa **"A "** está correta.

Queremos encontrar V(Y). Sabemos que Y = 6X+10, assim, V(Y) = V(6X+10).

Pela propriedade da variância, sabemos que V(6X+10)=6^2 V(X). Portanto, precisamos calcular V(X).

O enunciado nos fornece apenas a função de densidade de probabilidade, de forma que será preciso calcular o valor esperado de X, para então aplicarmos V(X)=E(X^2)-E^2 (X).

Como vimos neste módulo, E(X)=$\int_X$ xf(x)dx. Assim, substituindo nossa f(x), temos que

$$E(X) = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$
$$= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$
$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Agora, podemos calcular E(X^2), que será igual a $2\int_0^1 x^2 - x^3$. Portanto:

$$E(X^2) = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$
$$E(X^2) = \frac{1}{6}$$

Substituindo os valores, temos que $V\left(X\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

Como V(Y)=36V(X), V(Y) é igual a 2.

3. Considere uma variável aleatória X que pode assumir os valores 1 e 0 (zero), cada um com probabilidade 0.5. Calcule a média e a variância de X.

A alternativa **"A "** está correta.

E(X)=1×0.5+0×0.5=0.5

E(X^2)=1^2×0.5+0^2×0.5=0.5

E^2(X)=0.5^2=0.25

Logo:

V(X)=E(X^2)-E^2 (X)=0.5-0.25=0.25

4. Considere uma variável aleatória X que assume o valor a com probabilidade p e o valor b com probabilidade (1-p). Calcule a variância de X em função de a, b e p.

A alternativa **"D "** está correta.

Observe inicialmente que $E(X)=pa+(1-p)b$. Logo:

$E^2 (X)=(pa+(1-p)b)^2=$

$p^2 a^2+(1-p)^2 b^2+2ap(1-p)b=$

$p^2 a^2+(1-2p+p^2) b^2+2apb-2ap^2 b=$

$p^2 a^2+b^2-2pb^2+p^2 b^2+2apb-2ap^2 b$

Além disso:

$E(X^2)=pa^2+(1-p) b^2=pa^2+b^2-pb^2$

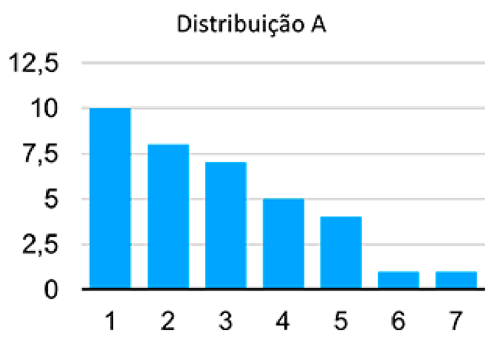
Temos, então:

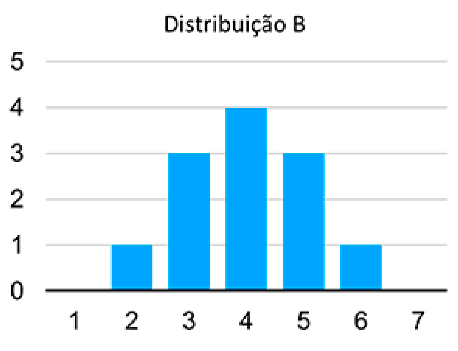
$V(X)=E(X^2)-E^2 (X)$

$=pa^2+b^2-pb^2 -(p^2 a^2+b^2-2pb^2 +p^2 b^2+2apb-2ap^2 b)$

$=pa^2+pb^2-(p^2 a^2+p^2 b^2+2apb-2ap^2 b)$

5. Considere as distribuições. Assinale a alternativa correta:





A alternativa **"C "** está correta.

A primeira e a última alternativas estão incorretas, uma vez que, pela classificação em relação à assimetria, a distribuição A possui assimetria positiva. De maneira semelhante, a segunda e a quarta alternativas estão incorretas, uma vez que a distribuição B é simétrica. Assim, a única correta é a letra c.

6. Considere uma variável aleatória qualquer. É correto afirmar:

A alternativa **"A "** está correta.

A diferença entre a esperança do quadrado e o quadrado da esperança é simplesmente a variância, que é não negativa porque é a esperança de um valor elevado ao quadrado (e o quadrado de qualquer número real é não negativo).

GABARITO

TEORIA NA PRÁTICA

O lucro diário L de uma corretora (em milhões de R$) é L= $2L_1$+$3L2_2$, em que L_1, o lucro da área industrial, é uma variável aleatória com média 5 e variância 16, e L_2, o lucro da área comercial é outra variável aleatória com média e variância iguais a 4. L_1 e L_2 são independentes.

A gerente financeira da corretora quer calcular o valor esperado do lucro e seu desvio padrão.

RESOLUÇÃO

Primeiro, ela decide começar pelo valor esperado.

$L=2L_1+3L_2$

$E(L)=E(2L_1)+E(3L_2)$

Pela propriedade da esperança, sabemos que E(AX)=AE(X). Assim:

$E(L)=2E(L_1)+3E(L_2)$

E(L)=2.5+3.4=22

Portanto, o lucro esperado da corretora é de 22 milhões de reais. A gerente, agora interessada no desvio padrão, calcula a variância:

$V(L)=V(2L_1)+V(3L_2)$

Pelas propriedades vistas sobre variância, sabemos que, sendo a uma constante, temos que $V(aX)=a^2X$. Assim, podemos aplicar a propriedade e obteremos:

$V(L)=4V(L_1)+9V(L_2)$

$=4.16+9.4=64+36=100$

Portanto, a variância do lucro da corretora é igual a 100 milhões de reais. Por fim, para obter o desvio padrão do lucro, a gerente utiliza a seguinte fórmula:

$$DP\left(X\right) = \sqrt{V(X)}$$

$$DP\left(L\right) = \sqrt{100} = 10$$

Sendo, então, o desvio padrão do lucro da corretora igual a 10 milhões de reais.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. CONSIDERE UM PRODUTO IMPORTADO CUJO PREÇO, EM DÓLARES, APRESENTA, AO LONGO DE UM PERÍODO, MÉDIA 80 E DESVIO PADRÃO 8. SE A TAXA DE CÂMBIO FOR DE DOIS REAIS POR DÓLAR, O DESVIO PADRÃO DO PREÇO EM REAIS É:

A) R$8,00

B) R$16,00

C) R$64,00

D) R$256,00

E) R$10,00

2. CONSIDERE O MESMO PRODUTO IMPORTADO DA ATIVIDADE ANTERIOR, CUJO PREÇO EM DÓLARES APRESENTA, AO LONGO DE UM PERÍODO, MÉDIA 80 E DESVIO PADRÃO 8. SE O PREÇO DO PRODUTO AUMENTA EM 10 DÓLARES, CALCULE A MÉDIA E A VARIÂNCIA DO PREÇO (EM DÓLARES) APÓS O AUMENTO.

A) Média igual a 10 e variância igual a 16.

B) Média igual a 90 e variância igual a 8.

C) Média igual a 80 e variância igual a 256.

D) Média igual a 10 e variância igual a 64.

E) Média igual a 90 e variância igual a 64.

GABARITO

1. Considere um produto importado cujo preço, em dólares, apresenta, ao longo de um período, média 80 e desvio padrão 8. Se a taxa de câmbio for de dois reais por dólar, o desvio padrão do preço em reais é:

A alternativa **"B "** está correta.

Seja X o preço do produto em dólares. Então: E(X)=80, DP(X)=8 eV(X)=64. Seja Y o preço do produto em reais. Y=2X. Assim, E(Y)=2E(X)=160, V(Y)=2^2 V(X)=4*64=256 e DP(Y)=16.

2. Considere o mesmo produto importado da atividade anterior, cujo preço em dólares apresenta, ao longo de um período, média 80 e desvio padrão 8. Se o preço do produto aumenta em 10 dólares, calcule a média e a variância do preço (em dólares) após o aumento.

A alternativa **"E "** está correta.

Seja Z o preço em dólares após o aumento. Então: Z=X+10.

Logo, E(Z)=E(X)+10=90 dólares e V(Z)=V(X)=64 dólares.

CONCLUSÃO

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste tema, apresentamos um conceito fundamental da probabilidade: a **variável aleatória**. Vimos que as variáveis aleatórias podem ser **discretas** ou **contínuas**. Estudamos suas principais propriedades, como a função de probabilidade, função de densidade de probabilidade e função de distribuição.

Aprendemos também sobre os momentos estatísticos e como eles podem ser utilizados para caracterizar as diferentes distribuições. Os conceitos vistos são aplicados com frequência no dia a dia: média da temperatura em um dia, o risco de um ativo do mercado financeiro e as notas de um aluno.

AVALIAÇÃO DO TEMA:

REFERÊNCIAS

BUSSAB, W.; MORETTIN, P. **Estatística básica**. 9. Ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

SCHMIDT, C. A. J. (org.). **Estatística**: questões comentadas dos concursos de 2006 a 2015. 5. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

MEYER, P. **Aplicações à Estatística**. 2. Ed. Rio de Janeiro: Ltc, 1987.

EXPLORE+

Neste tema, demos mais um passo no estudo sobre probabilidade, aprendendo sobre **variável aleatória**. Se quiser se aprofundar em outras aplicações, pesquise sobre **crescimento econômico** e aprenda sobre variáveis aleatórias que mudam ao longo do tempo.

Além disso, você encontrará mais aplicações em diversos bons livros de Estatística, como *Estatística básica*, de Bussab e Morettin (2017), e Aplicações à Estatística, de Meyer (1987). Você ainda poderá encontrar diversos exercícios resolvidos em *Estatística: questões comentadas dos concursos de 2006 a 2015*, de Schmidt (2015).

CONTEUDISTA

Maria Eduarda Barroso Perpétuo de Souza

CURRÍCULO LATTES