1. ANÁLISE COMBINATÓRIA

1.1 INTRODUÇÃO

- Ramo da matemática que trata da contagem.
- Em geral, a dificuldade não está em como contar mas o que contar.
- Em Ciência da Computação, questões de contagem são importantes já que temos uma quantidade finita de recursos.
- Além disso, contagem é a base de probabilidade e estatística.

Exemplos:

1) Qual a quantidade de memória que será utilizada por um determinado programa que faz alocação dinâmica de memória?
2) Quantos usuários um determinado sistema computacional tem capacidade de atender?
3) Quantas computações um determinado algoritmo executa? (Qual é o custo computacional em termos de tempo e espaço de um determinado algoritmo?)

A Contagem é baseada em dois princípios:

- Princípio da adição;
- Princípio da multiplicação.

TRÊS PORTAS, UM PRÊMIO; VOCÊ ESCOLHE E TROCA?

Na edição de 9 de setembro de 1990 da revista Parade, a colunista Marilyn vos Savant respondeu a esta carta:

Suponha que você esteja em um programa de televisão no qual você pode ganhar um prêmio. Existem três portas (identificadas como A, B e C) e atrás de uma delas está o prêmio e nas outras duas não há uma cabra. Você escolhe uma porta e o anfitrião, que sabe onde está o prêmio, abre uma outra porta onde tem a cabra. Ele lhe pergunta: "Você deseja mudar de porta?" O que você faz e por que?

— Craig F. Whitaker, Columbia, MD

1.2 Contagem

A combinatória é o ramo da Matemática que trata a contagem. Tratar a contagem é importante, sempre que temos recursos finitos (Quanto espaço um banco de dados consome? Quantos usuários a configuração de um computador pode suportar?) ou sempre que estamos interessados em eficiência (Quantos cálculos um determinado algoritmo envolve?).

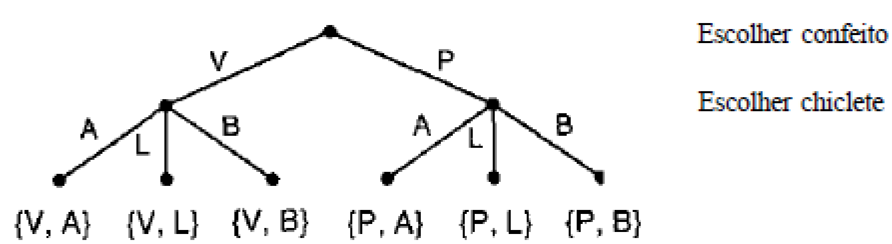
Problemas de contagem normalmente se resumem em determinar quantos elementos existem em um conjunto finito.

1.2.1 Princípio da Multiplicação

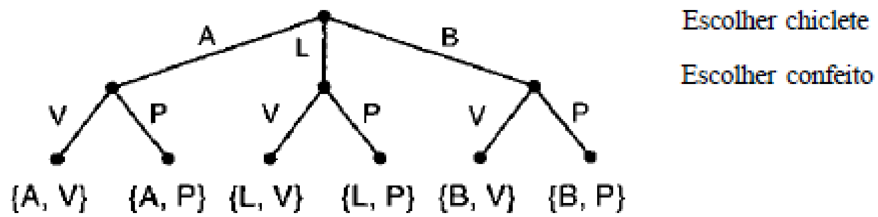
Resolvemos o problema da tabela-verdade, desenhando uma árvore de possibilidades. Essa árvore sugere um princípio mais geral que pode ser usado para resolver diversos problemas de contagem. Antes de enunciarmos o princípio geral, daremos uma olhada em outro exemplo de árvore.

Exemplo: A uma criança é permitido escolher um dentre dois confeitos, um vermelho e outro preto, e um entre três chicletes, amarelo, lilás e branco. Quantos conjuntos diferentes de doces a criança pode ter?

Podemos resolver este problema, quebrando a tarefa da escolha dos doces em duas etapas sequenciais: a escolha do confeito e a escolha do chiclete. A árvore da Figura a seguir mostra que existem 2 x 3 = 6 escolhas possíveis. São elas: {V, A}, {V, L}, {V, B}, {P, A}, {P, L}e {P, B}.



Neste problema, a sequência de eventos pode ser invertida; a criança pode escolher o chiclete antes de escolher o confeito, resultando na árvore da figura a seguir, mas o número de escolhas possíveis permanece o mesmo (2 x 3 = 6). Pensar como uma sequência de eventos sucessivos nos ajuda a resolver o problema, mas o sequenciamento não é uma parte do problema, pois o conjunto {V, A} é o mesmo que o {A, V}.



Este Exemplo mostra que o número de possibilidades para eventos sequenciados pode ser obtido por meio da multiplicação dos números de possibilidades do primeiro evento pelo número de possibilidades do segundo. Esta ideia é sintetizada no *Princípio da Multiplicação.*

Princípio da Multiplicação Se existem n_1 possibilidades para um primeiro evento e n_2 possibilidades para **um segundo evento, então** existem $n_1 . n_2$ possibilidades para a sequência dos dois eventos

Exemplo 1) A última parte do número de seu telefone contém quatro dígitos. Quantos números de quatro dígitos existem?

Exemplo 2) Com relação ao Exemplo 1, quantos números de quatro dígitos sem repetições de dígitos existem?

Exemplo 3) a. De quantas maneiras podemos escolher três funcionários de um grupo de 25 pessoas? **b.** De quantas maneiras podemos escolher três funcionários de um grupo de 25 pessoas, se uma pessoa puder acumular mais de um cargo?

Exemplo 4) Para qualquer conjunto finito *S*, seja $|S|$ o número de elementos em *S.* Se *A* e *B* são conjuntos finitos, então

$$|A \times B| = |A|.|B|$$

A X B consiste em todos os pares ordenados com a primeira componente em A e a segunda componente em B. A escolha desses pares ordenados é equivalente a escolher, em sequência, a primeira componente dentre as possibilidades, e então escolher a segunda, para a qual existem possibilidades. O resultado segue, então, o Princípio da Multiplicação.

1.2.2 Princípio da Adição

Suponha que desejamos escolher uma sobremesa dentre três tortas e quatro bolos. De quantas formas isto pode ser feito? Existem dois eventos, um com três resultados possíveis (escolher uma torta) e outro com quatro resultados possíveis (escolher um bolo). No entanto, não estamos compondo uma sequência de dois eventos, uma vez que desejamos apenas uma sobremesa, que precisa ser escolhida dentre as possibilidades de dois conjuntos disjuntos. O número de possibilidades é o número total de opções que temos, 3 + 4 = 7. Isto ilustra o *Princípio da Adição.*

Princípio da Adição. Se *A* e *B* são eventos disjuntos com n_1 e n_2 possibilidades, respectivamente, **então o número total de** possibilidades para o evento *A ou B é* $n_1 + n_2$.

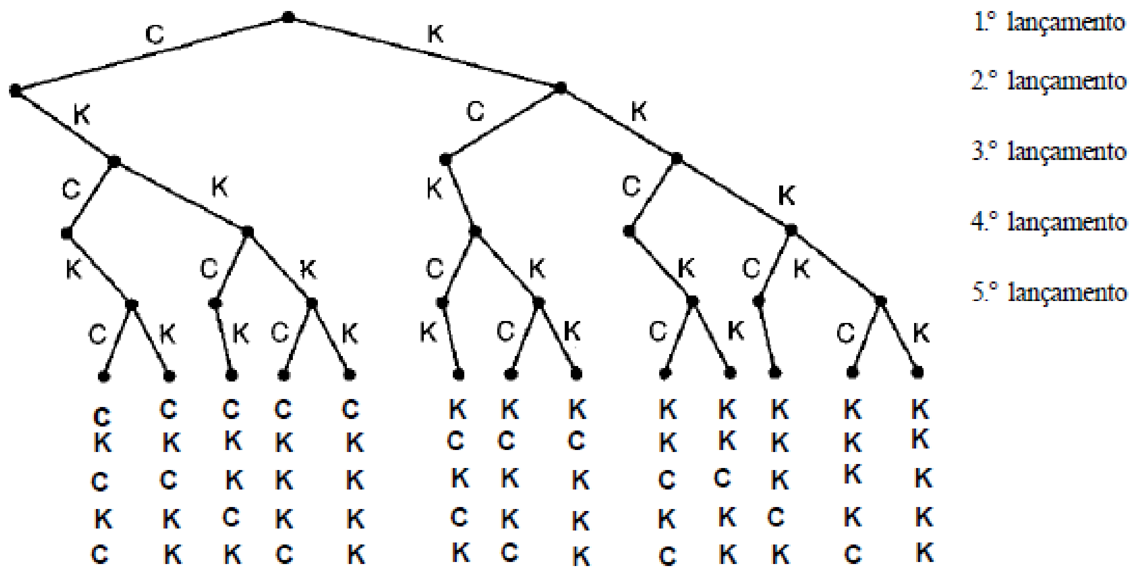
Exemplo 1) Um comprador deseja comprar um veículo de uma concessionária. A concessionária tem 23 carros e 14 caminhões em estoque. Quantas possíveis escolhas o comprador pode ter?

1.2.3 Árvores de Decisão

Árvores como as mostradas nas Figuras anteriores ilustram o número de possibilidades de um evento baseado em uma série de opções possíveis. Tais árvores são chamadas **árvores de decisão.** Essas árvores nos levam ao Princípio da Multiplicação, porque o número de possibilidades em cada nível sucessivo da árvore é constante. Árvores de decisão menos regulares podem ainda ser usadas para resolver problemas de contagem onde o Princípio da Multiplicação não se aplica.

Exemplo 2) Tony está jogando "cara-ou-coroa". Cada lançamento resulta em cara (C) ou coroa (K). De quantas formas ele pode lançar a moeda cinco vezes sem obter duas caras consecutivas?

A Figura a seguir, mostra a árvore de decisão para este problema. Cada lançamento de moeda tem duas possibilidades: o ramo à esquerda está marcado com um C para cara, e o ramo da direita com um K para coroa. Sempre que um C aparecer em um ramo, o próximo nível pode conter apenas um ramo para a direita (K). Existem 13 possibilidades.



Lista de Exercícios TDE

★1. Uma loja de iogurte congelado permite escolher um sabor (baunilha, morango, limão, cereja ou pêssego), um acompanhamento (raspas de chocolate, jujuba ou castanha de caju) e uma calda (creme batido ou coco ralado). Quantas sobremesas diferentes são possíveis?

★2. No Exercício 1, por quantas escolhas de sobremesa podemos optar, se formos alérgicos a chocolate e a morangos?

★7. Uma conferência telefônica está tendo lugar do centro do Rio de Janeiro até Curitiba, via São Paulo. Existem 45 troncos telefônicos entre o Rio de Janeiro e São Paulo e 13 de São Paulo a Curitiba. Quantas rotas diferentes podem estar sendo usadas?

9. Quantos números de CPF são possíveis?

★11. Um palíndrome é uma cadeia de caracteres que é igual quando lido normalmente ou de trás para frente. Quantas palíndromes de cinco letras são possíveis na língua portuguesa?

★14. Um identificador em BASIC precisa ser ou uma letra simples ou uma letra seguida de outra letra ou dígito. Quantos idenficadores são possíveis de serem formados?

★17. Em um jantar especial, existem cinco aperitivos para serem escolhidos, três saladas, quatro entradas e três bebidas. Quantos jantares diferentes são possíveis?

★21. Em um estado, as placas dos carros precisam ter dois dígitos (sem zeros à esquerda), seguidos de uma letra mais uma cadeia de dois ou quatro dígitos (podendo conter zeros à esquerda). Quantas placas diferentes são possíveis?

★23. Qual o valor de *Contador* após a execução do seguinte trecho de programa?

```
Contador := 0;
for i := 1 to 5 do
   for Letra := 'A' to 'C' do
      Contador := Contador + 1;
```

Respostas

1. 30
2. 16
7. 585
9. 10^9
11. 17576
14. 286
17. 180
21. 25974000
23. 15

1.3 Arranjos

Suponha que tenhamos n objetos com os quais queremos preencher p lugares. O primeiro lugar pode ser preenchido de n maneiras diferentes. Tendo preenchido o primeiro lugar, restam (n − 1) objetos para preencher (p − 1) lugares e, portanto, o segundo lugar pode ser preenchido de (n−1) maneiras diferentes. E assim sucessivamente, vamos preenchendo as posições de forma que na p-ésima posição teremos (n − (p − 1)) maneiras diferentes de preenchê-la. Pelo princípio do produto, podemos dizer que as p posições podem ser preenchidas de n(n − 1)(n − 2)...(n − (p − 1)) maneiras diferentes.

Denotando por A_p^n o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p, ou seja, todas as escolhas ordenadas de p desses n elementos, temos $A_p^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))$. Se multiplicarmos e dividirmos A_p^n por $(n-p)!$, segue que $A_p^n = \frac{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))](n-p)!}{(n-p)!}$, ou de maneira mais simples

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 1: Considerando os dígitos 1,2,3,4,5, quantos números de 2 algarismos distintos podem ser formados?

Exemplo 2: Considere os algarismos 1,2,3,4,5. Quantos números distintos, superiores a 100 e inferiores a 1000, podemos formar se:

a) O número é par?
b) O número é ímpar?
c) O número é par ou ímpar?

1.4 Arranjos com repetição

Caso sejam permitidas repetições de elementos, podemos na posição L1 escolher *n* elementos, na posição L2 também *n* elementos, e assim sucessivamente até a posição Lp. Logo, o número de arranjos com repetição de *n* elementos tomados *p* a *p*, denotado por AR_n^p, é igual a:

$$AR_n^p = n^p$$

Exemplo 3: Qual o total de placas de carro que podem ser construídas constando de 7 símbolos, sendo os 3 primeiros constituídos por letras e os 4 últimos por dígitos?

1.5 PERMUTAÇÕES SIMPLES

Uma permutação simples de *n* objetos é qualquer agrupamento ordenado desses objetos. Assim, uma permutação de *n* objetos é um arranjo de *n* objetos tomados *n* a *n*. Denotando o número de permutações de *n* objetos por P_n, segue que $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$.

Exemplo 4: Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionados em 6 vagas?

Exemplo 5: De quantas maneiras 12 moças e 12 rapazes podem formar pares para uma dança?

1.6 COMBINAÇÃO SIMPLES

Se temos *n* elementos e desejamos escolher *p* deles, mas a ordem com o que fazemos tais escolhas não for importante, dizemos que queremos a combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p*. Usamos a notação C_p^n para designar a combinação de *n* tomados *p* a *p*. Vimos anteriormente que o número de arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p* é igual ao número de maneiras de preencher *p* lugares com *n* elementos distintos e obtivemos $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Embora a ordem seja importante num arranjo simples, ela deixa de ser numa combinação simples. Então para cada combinação particular de *n* elementos *p* a *p* (que não importa a ordem), podemos fazer a permutação de seus *p* elementos, de forma que obtemos todos os arranjos de *n* elementos tomados *p* a *p* (onde importa a ordem). Dessa forma, fica claro que $A_n^p = P_p . C_n^p$, isto é:

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! . p!}$$

Exemplo 6: Quantos subconjuntos de 3 elementos possui um conjunto A de 5 elementos?

Exemplo 7: Suponha que times de 5 pessoas vão ser formados de um grupo de 12 pessoas. Duas pessoas desse grupo (A e B) insistem em trabalhar conjuntamente. Assim, ao se formar um time, ou as duas pessoas estão presentes ou não. Quantos times podem ser formados?

Exemplo 8: Suponha o mesmo cenário anterior mas agora A e B não podem pertencer simultaneamente a um mesmo time. Quantos times podem ser formados?

Exemplo 9: Suponha que o grupo de 12 pessoas seja formado por 5 homens e 7 mulheres. Quantos times de 5 pessoas podem ser formados com 3 homens e 2 mulheres?

Exemplo 10: Suponha o mesmo grupo anterior. Quantos times de 5 pessoas podem ser formados com pelo menos um homem?

Exemplo 11: Suponha o mesmo grupo anterior. Quantos times de 5 pessoas podem ser formados com no máximo um homem?

2 COEFICIENTES BINOMIAIS

Coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ são o número de maneiras de selecionar um conjunto de ***k*** elementos a partir de ***n*** elementos diferentes sem levar em conta a ordem de organização desses elementos (ou seja, o número de conjuntos não ordenados).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Os coeficientes binomiais também são os coeficientes na expansão de $(a+b)^n$ (o chamado teorema do binômio):

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

Calculando potencias na expressão algébrica simples (x+y):

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)\cdot(x+y)^2 = \\ &(x+y)\cdot(x^2+2xy+y^2) = \\ &x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= (x+y)\cdot(x+y)^3 \\ &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\end{aligned}$$

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

A expansão $(x+y)^5$ ficaria como?

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^{5-1}.y + \binom{5}{2}x^{5-2}.y^2 + \binom{5}{3}x^{5-3}.y^3 + \binom{5}{4}x^{5-4}.y^4 + \binom{5}{5}y^5$$

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4.y + \binom{5}{2}x^3.y^2 + \binom{5}{3}x^2.y^3 + \binom{5}{4}x^1.y^4 + \binom{5}{5}y^5$$

$$(x+y)^5 = \frac{5!}{0!\,(5-0)!}x^5 + \frac{5!}{1!\,(5-1)!}x^4.y + \frac{5!}{2!\,(5-2)!}x^3.y^2 + \frac{5!}{3!\,(5-3)!}x^2.y^3 + \frac{5!}{4!\,(5-4)!}x^1.y^4 + \frac{5!}{5!\,(5-5)!}y^5$$

$$(x+y)^5 = 1.x^5 + 5.x^4.y + 10.x^3.y^2 + 10.x^2.y^3 + 5.x^1.y^4 + 1.y^5$$

$$\boldsymbol{(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5}$$

Exercício: $(x+y)^6 = ?$

2.1 TRIÂNGULO DE PASCAL

O triângulo de Pascal é a disposição em linhas de números inteiros através do seguinte algoritmo:

1. Na linha 0, escreva 1;
2. Na próxima linha, linha 1, escreva o número 1 duas vezes;
3. Na linha seguinte, linha 2, escreva o número 1, um espaço em branco, e novamente o número 1. No espaço em branco, some os dois elementos imediatamente acima;
4. Na linha 3, comece escrevendo o número 1, depois dois espaços em branco, e por fim o número 1 novamente. Em cada espaço em branco, escreva a soma dos dois elementos imediatamente acima;
5. Continue o processo aumentando o número de espaços em branco a cada linha.

O resultado do algoritmo é:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \underline{\quad\quad} & & 1 & & \\
 & 1 & & \underline{\quad\quad} & & \underline{\quad\quad} & & 1 & \\
1 & & \underline{\quad\quad} & & \underline{\quad\quad} & & \underline{\quad\quad} & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Preenchendo os espaços em branco, teremos:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & \searrow & & \swarrow & & & \\
 & & 1 & & \underline{(1+1)} & & 1 & & \\
 & & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \\
 & 1 & & \underline{(1+2)} & & \underline{(2+1)} & & 1 & \\
 & \searrow & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \\
1 & & \underline{(1+3)} & & \underline{(3+3)} & & \underline{(3+1)} & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Ou seja:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

2.2 PROPRIEDADES

2.2.1 Soma dos elementos de uma linha:

No triângulo de Pascal, a soma dos elementos da linha *n* é igual a 2^n

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \longrightarrow \quad 1 = 2^0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \longrightarrow \quad 2 = 2^1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longrightarrow \quad 4 = 2^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longrightarrow \quad 8 = 2^3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longrightarrow \quad 16 = 2^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \longrightarrow \quad 32 = 2^5
\end{array}
$$

2.2.2 Potência de base 11

No triângulo de Pascal, os algarismos em cada linha formam uma potência de base 11.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \longrightarrow \quad 10^0 = 11^0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & \longrightarrow \quad 1(10^1) + 1(10^0) = 11^1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \longrightarrow \quad 1(10^2) + 2(10^1) + 1(10^0) = 11^2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \longrightarrow \quad 1(10^3) + 3(10^2) + 3(10^1) + 1(10^0) = 11^3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \longrightarrow \quad 1(10^4) + 4(10^3) + 6(10^2) + 4(10^1) + 1(10^0) = 11^4 \\
 & & & & \vdots & & & & \qquad \vdots
\end{array}
$$

na próxima linha, temos:

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

Portanto, repetindo o processo, temos:

$$1(10^5) + 5(10^4) + 10(10^3) + 10(10^2) + 5(10^1) + 1(10^0) = 161051 = 11^5$$

2.2.3 Teorema da Diagonais ou Stick de Hóquei

A soma dos n primeiros elementos em diagonal é igual ao elemento abaixo, na próxima diagonal:

$$\begin{array}{c}
[\mathbf{1}] \quad 1 \\
1 \quad [\mathbf{2}] \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad [\mathbf{3}] \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad [\mathbf{6}] \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad [\mathbf{1}] \\
1 \quad [\mathbf{2}] \quad 1 \\
1 \quad [\mathbf{3}] \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad [\mathbf{4}] \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad [\mathbf{10}] \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
\boldsymbol{1} \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad \boldsymbol{3} \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad \boldsymbol{6} \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad \boldsymbol{10} \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad \boldsymbol{15} \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad \boldsymbol{21} \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad \boldsymbol{56} \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Veja que a “figura” formada pelos números entre colchetes lembra um taco de Hóquei.

2.3 Triângulo de Pascal – Binômio de Newton

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, a expressão

$$(a+b)^n$$

é chamada binômio de Newton. A sua expansão pode ser algo bem trabalhoso.

O interessante é que cada número do Triângulo de Pascal é um número binomial:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Logo, o desenvolvimento de $(x+1)^5$ pode ser obtido observando a linha 5 do triângulo de Pascal.

$$(x+1)^5 = \boldsymbol{1}.x^5 + \boldsymbol{5}.x^4 + \boldsymbol{10}.x^3 + \boldsymbol{10}.x^4 + \boldsymbol{5}.x + \boldsymbol{1}$$

Agora observe a linha 5 do Triângulo de Pascal:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{cl}
\longrightarrow & \textit{Linha 0} \\
\longrightarrow & \textit{Linha 1} \\
\longrightarrow & \textit{Linha 2} \\
\longrightarrow & \textit{Linha 3} \\
\longrightarrow & \textit{Linha 4} \\
\longrightarrow & \textbf{\textit{Linha 5}} \\
\longrightarrow & \textit{Linha 6} \\
\longrightarrow & \textit{Linha 7} \\
 & \vdots
\end{array}
$$

2.4 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

1. Simetria: $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$
2. Fatorando: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
3. Soma sobre k: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$
4. Soma sobre n: $\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1}$

5. Soma sobre n e k: $\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}=\binom{n+m+1}{m}$
6. Soma dos quadrados: $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}^2$
7. Soma com pesos: $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

Exercício: Sobre as sentenças abaixo:

I. $\binom{50}{32}=\binom{50}{18}$

II. $\binom{20}{0}+\binom{20}{1}+\binom{20}{2}+\ldots+\binom{20}{20}=2^{20}$

III. $\binom{12}{12}+\binom{13}{12}+\binom{14}{12}+\ldots+\binom{32}{12}=\binom{33}{13}$

é correto afirmar que:

a) somente I é verdadeira.

b) somente II é verdadeira.

c) somente III é verdadeira.

d) somente I e II são verdadeiras.

e) I, II e III são verdadeiras.

Exercícios

(1) Construa o Triângulo de Pascal até a décima primeira linha ($n = 10$) e use seu resultado para calcular $(x+y)^{10}$ sem utilizar calculadora.

(2) Usando o Teorema Binomial, desenvolva:

a) $(x+3b)^3$ b) $(1-x^2)^5$ c) $(3-y)^5$ d) $(\sqrt{x}-2\sqrt{y})^4$

(3) Calcule

a) $\sum_{p=0}^{10}\binom{10}{p}$ b) $\sum_{p=2}^{10}\binom{10}{p}$ c) $\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}$