UNIVERSIDADE COMUNITÁRIA DA REGIÃO DE CHAPECÓ

CURSO: CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO/SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

DISCIPLINA: MATEMÁTICA DISCRETA

PROFº. DANIEL STEFFEN, M.Sc

Parte 1 – 23/02/2021

1. CONCEITOS INICIAIS

1.1 CONJUNTOS

Um conjunto pode ser considerado como uma coleção de objetos chamados elementos do conjunto. Em geral, denota-se conjunto por letras maiúsculas A, B, C, ..., N,... e sua representação é feita por enumeração dos elementos, por exemplo D = {1,2,3,4,5,6} ou por compreensão, por exemplo $Z^+ = \{x \in R \mid x>0\}$.

EXEMPLOS:

1) Conjunto dos Números Naturais N = {0,1,2,3, ... };
2) Conjunto dos números das faces de um dado D = {1,2,3,4,5,6};
3) Conjunto das faces de uma moeda F = {cara, coroa}.

1.1.1 Conjunto dos Números Naturais

Definição 1.1: Chamamos de conjunto dos números naturais – símbolo N - o seguinte conjunto:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

O conjunto dos números naturais excluindo o zero é denotado por N^* : {1, 2, 3, 4,...}

1.1.2 Números Inteiros

Definição 1.2: Chamamos de conjunto dos números inteiros – símbolo Z - o seguinte conjunto:

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

1.1.3 Valor Absoluto

Chamamos de módulo ou valor absoluto de um número inteiro, a distância desse número até o zero, na reta numérica inteira. Formalmente definimos:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ se } a \geq 0 \\ -a \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

1.1.4 Números primos em Z

Definição 1.4: Um número inteiro p é primo quando ele atende às seguintes condições:

1. $p \neq 0$
2. $p \neq 1$
3. $p \neq -1$
4. $D(p) = \{1, -1, p, -p\}$, ou seja, p é divisível apenas por 1, -1, p e $-p$.

Um resultado importante que envolve os números primos é o seguinte:

Teorema: (Teorema Fundamental da Aritmética em Z) Seja $a \in Z$, $a \neq 0$ e $a \neq \pm 1$. Então existem números primos $p_1, p_2, \ldots, p_r \in Z$ $(r \geq 1)$ todos maiores que 1, de maneira que:

$$a = p_1 . p_2 \ldots p$$

Este teorema nos diz que todo número inteiro pode ser decomposto de forma única como produto de números primos.

Exemplos:

a) 1260

b) 180

Exercícios

1. Calcule o MMC entre os seguintes números:

a) 2, 5, 11 Resp: 110

b) 2,5,3 Resp: 30

c) 18 e 60 Resp: 180

d) 12,15,20 Resp: 60

e) 36, 40 Resp: 360

f) 16,20,48,60 Resp: 240

2. Marcos, Leandro e Antônio são veterinários que trabalham numa mesma fazenda. Marcos dá plantão a cada 5 dias; Leandro a cada 8 dias; e Antônio, a cada 10 dias. Hoje, os três juntos deram plantão. Daqui a quantos dias os três vão se reencontrar no plantão? Resp: 40 dias

1.1.4.1 Decomposição de Raízes

O teorema fundamental da aritmética auxilia na simplificação de radicais

Exemplos:

a) $\sqrt{27} =$

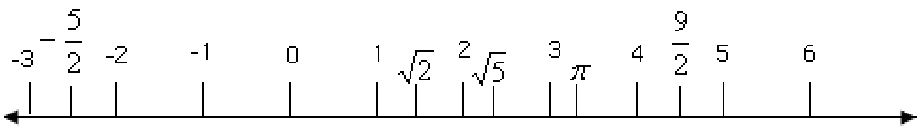
b) $\sqrt{96} =$

c) $\sqrt[4]{240} =$

d) $\sqrt[3]{864} =$

1.1.5 Reta Real

A reta real pode ser visualizada abaixo:



RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

A relação existente entre elemento e conjunto é a de pertinência.

EXEMPLOS:

1) $3 \in N$ 2) $-1 \in Z$ 3) $\sqrt{2} \notin N$ 4) $\sqrt{2} \in R$

CONJUNTO VAZIO

O conjunto que não possui nenhum elemento é chamado de vazio e representado por ϕ.

CONJUNTO UNIVERSO

O conjunto que tiver todos os demais conjuntos é chamado de conjunto universo e representado por U.

SUBCONJUNTO

Seja o conjunto A, tal que todo elemento de A é também elemento do conjunto B. Então dizemos que A é subconjunto de B.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

EXEMPLOS:

1) $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$
2) $\{a, b\} \subset \{a, b\}$

Quando $A \subset B$, também podemos escrever $B \supset A$ ("B contém A"). A negação de $A \subset B$ é $A \not\subset B$.

EXEMPLO:

1) $\{a, b, c, d\} \not\subset \{b, c, d, e\}$

PROPRIEDADES DA INCLUSÃO

Sendo A, B, C conjuntos arbitrários, valem as seguintes propriedades:

1) $\phi \subset A$
2) $A \subset A$ (reflexiva)
3) $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$ (anti-simétrica)
4) $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (transitiva)

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

1º UNIÃO

O conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou pertençam ao conjunto B ou a ambos é chamado UNIÃO de A e B e denotado por $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x | x \in A \;\; ou \;\; x \in B\}$$

EXEMPLOS:

1) $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
2) $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
3) $\{a, b\} \cup \{\phi\} = \{a, b\}$

PROPRIEDADES

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer valem as propriedades:

1) $A \cup A = A$ (indepotente)
2) $A \cup \phi = A$ (elemento neutro)
3) $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

2º INTERSECÇÃO

O conjunto de elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B é chamado intersecção entre A e B e representado por $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x | x \in A \;\; e \;\; x \in B\}$$

EXEMPLOS:

1) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$
2) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \{\emptyset\}$
3) $\{a, b\} \cap \{\phi\} = \{\emptyset\}$

PROPRIEDADES

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer,

1) $A \cap A = A$ (indepotente)
2) $A \cap U = A$ (elemento neutro)
3) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

CONJUNTO DAS PARTES

Dado o conjunto A, chamamos conjunto das partes de A ao conjunto formado por todos os subconjuntos de A e o representamos por $\mathcal{P}(A)$. Assim, definimos o conjunto das partes por $\mathcal{P}(A) = \{X | X \subset A\}$. O número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é sempre 2^n, onde n é o número de elementos de A.

EXEMPLOS:

1) Se $A = \{a\}$, os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são $\{\{\emptyset\}, \{a\}\}$
2) Se $B = \{a, b\}$, então $\mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{\emptyset\}\}$
3) Se $C = \{a, b, c\}$, então $\mathcal{P}(A) =?$

Exemplo: Considere o conjunto B = { 3, 5, 10 }.

Os possíveis Subconjuntos de B são:

$\varnothing$	{3, 5}
{3}	{3, 10}
{5}	{5, 10}
{10}	{3, 5, 10}

Então, o Conjunto das Partes de B é: $\mathcal{P}(B) = \{ \varnothing, \{3\}, \{5\}, \{10\}, \{3, 5\}, \{3, 10\}, \{5, 10\}, B \}$

Atenção:

$5 \in B$	$\{5\} \subset B$	$\{5\} \in \mathcal{P}(B)$	$\{\{5\}\} \subset \mathcal{P}(B)$	
$\varnothing \subset B$	$\varnothing \in \mathcal{P}(B)$	$\varnothing \subset \mathcal{P}(B)$	$5 \notin \mathcal{P}(B)$	$B \in \mathcal{P}(B)$

Simbolicamente, temos: $\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subset A \}$ e $X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A$

CONJUNTOS DISJUNTOS

Os conjuntos A e B são chamados de disjuntos quando a sua intersecção é um conjunto vazio, ou seja, $A \cap B = \emptyset$.

Exercício

1) Represente os conjuntos abaixo através de uma propriedade comum a seus elementos.

a) $B = \{1,3,5\}$

b) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

c) $G = \{0,5,10,15,15,20, \dots\}$

d) $O = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

e) $S = \{0,1,4,9,16, \dots\}$

2) Dado o conjunto $E = \{2,3,14,18\}$ estabeleça as relações $\in$, $\notin$, $\subset$ e $\not\subset$ entre:

a) 2 .... E

b) { 2 } .... E

c) { 4 } .... E

d) { 2 , 3 } .... E

e) ∅ .... E

f) 4 .... E

g) { 1 , 2 , 3 } .... E

h) { 2 , 3 , 14 , 18 } .... E

i) { 3 } .... $\mathcal{P}$(E)

j) 3 .... $\mathcal{P}$(E)

k) **{** ∅ , {3} **}** .... $\mathcal{P}$(E)

l) **{** {3} **}** .... $\mathcal{P}$(E)

m) { 2 , 18 } .... $\mathcal{P}$(E)

n) ∅ .... $\mathcal{P}$(E)

o) **{** {3} , {14} **}** .... $\mathcal{P}$(E)

3) Determine o número de elementos $\wp(A)$, quando:

a) A = { x | x é número ímpar compreendido entre 4 e 21 }

b) A = { x ∈ ℕ | x é número par menor que 10 }

4) Escreva todos os elementos do conjunto a seguir, por extensão: $M = \{x \in N/(x - 1).(x-2).(x+3) = 0\}$

5) Represente os conjuntos dados por meio de uma propriedade (por compreensão) utilizando fórmulas matemáticas.

Exemplo: $K = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$ → **Por compreensão:** $K = \left\{ x \mid x = \frac{n}{n+1} \text{ com } n \in \mathbf{N} \right\}$

Considere que: ℕ = { 0, 1, 2, 3, ...} → Conjunto do Números **N**aturais

a) A = { 0 , 7 , 14 , 21 , 28 , ... }

b) B = { 0 , 1 , 16 , 81 , 256 , ... }

c) C = { 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ... }

d) D = { 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , ... }

e) $E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots \right\}$

f) $F = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \ldots \right\}$

g) $G = \left\{ \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}, \frac{13}{10}, \ldots \right\}$

h) $H = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \ldots \right\}$

2 OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

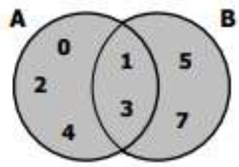
Podemos destacar três operações básicas principais com conjuntos. União, Intersecção e Subtração.

2.1 União ou Reunião

Simbolicamente: $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ **ou** $x \in B \}$

Exemplo 1: $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ Nos diagramas:

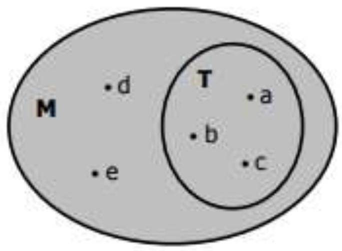
$A \cup B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 \}$



Exemplo 2: $T = \{ a, b, c \}$ e $M = \{ a, b, c, d, e \}$ Nos diagramas:

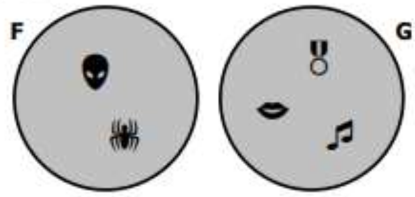
$T \cup M = \{ a, b, c, d, e \} = M$

Note que: $T \subset M$



Exemplo 3: F = { 👽, 🕷 } e G = { 🎖, 👄, ♫ } Nos diagramas:

F ∪ G = { 👽, 🕷, 🎖, 👄, ♫ }



Observações:

\# Nos diagramas acima, as regiões sombreadas representam a UNIÃO dos conjuntos em questão.

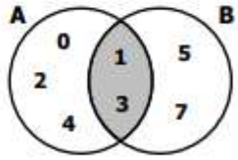
\# Também representamos o conectivo "**ou**" pelo símbolo: $\vee$

2.2 Intersecção

Simbolicamente: $A \cap B = \{ x \mid x \in A$ **e** $x \in B \}$

Exemplo 1: $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ Nos diagramas:

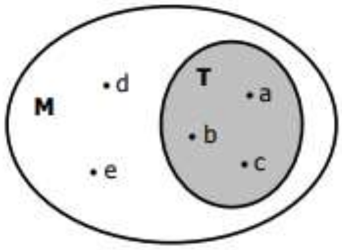
$A \cap B = \{ 1, 3 \}$



Exemplo 2: $T = \{ a, b, c \}$ e $M = \{ a, b, c, d, e \}$ Nos diagramas:

$T \cap M = \{ a, b, c \} = T$

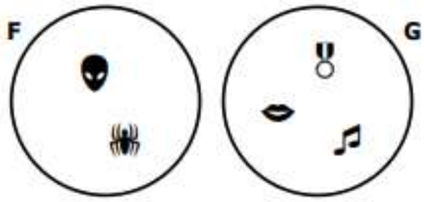
Note que: $T \subset M$



Exemplo 3: F = { 👽, 🕷 } e G = { 🎖, 👄, ♫ } Nos diagramas:

$F \cap G = \{ \ \}$

Nota: Se $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são conjuntos **disjuntos**.



Observações:

\# Nos diagramas acima, as regiões sombreadas representam a INTERSECÇÃO dos conjuntos em questão.

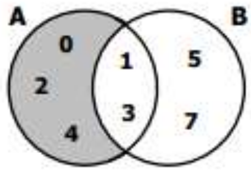
\# Também representamos o conectivo "**e**" pelo símbolo: $\wedge$

2.3 Subtração ou Diferença

Simbolicamente: $A - B = \{ x \mid x \in A$ **e** $x \notin B \}$

Exemplo 1: $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ e $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ Nos diagramas:

$A - B = \{ 0, 2, 4 \}$

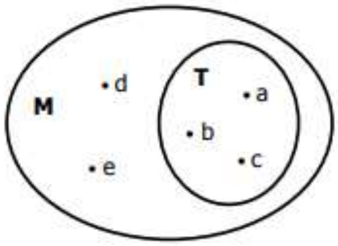


Exemplo 2: $T = \{ a, b, c \}$ e $M = \{ a, b, c, d, e \}$

$T - M = \{ \ \}$

Note que: $T \subset M$

Nos diagramas:

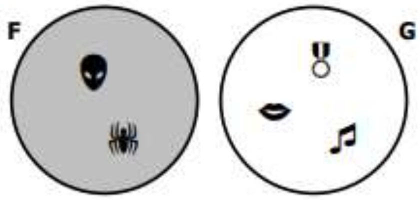


Exemplo 3: F = { 👽, 🕷 } e G = { 🎖, 👄, ♬ }

F − G = { 👽, 🕷 } = F

Observação:
Nos diagramas acima, as regiões sombreadas representam a DIFERENÇA dos conjuntos em questão.

Nos diagramas:



Complementar de um Conjunto

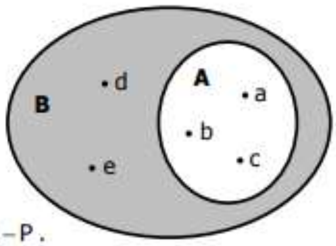
Se $A \subset B$ podemos escrever $C_B^A = B - A$. Lê-se "**complementar (ou complemento) de A em relação a B**".
Em linguagem simplificada, podemos dizer que C_B^A é "**o que falta para o conjunto A ficar igual ao B**".

Exemplo:

Considere os conjuntos $A = \{ a, b, c \}$ e $B = \{ a, b, c, d, e \}$.

Observe que $A \subset B$, então podemos fazer $C_B^A = B - A = \{ d, e \}$

Nos diagramas ao lado, a área sombreada representa o complemento.



• Para um conjunto **P** qualquer e conjunto Universo **U**, temos: $C_U^P = P' = P^C = \bar{P} = U - P$.

Nota: Observe que o complemento só poderá ocorrer quando relacionarmos um conjunto com um de seus **subconjuntos**.

PROPRIEDADES GERAIS:

Para os conjuntos A, B e C quaisquer, teremos várias propriedades. Veja algumas:

• $A \cup A = A$ • $A \cup \varnothing = A$ • $A \cup B = B \cup A$ → Propriedade Comutativa (na União)

• $A \cap A = A$ • $A \cap \varnothing = \varnothing$ • $A \cap B = B \cap A$ → Propriedade Comutativa (na Intersecção)

• $A - B \neq B - A$ → **Nota:** só teremos $A - B = B - A$ se $A = B$.

• $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ • $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

• $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ • $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

EXERCÍCIOS – Operações com Conjuntos

1) Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5, 11\}$ e $D = \{2, 4\}$, determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \cap C$

d) $A - B$

e) $A \cup B \cup C$

f) $A \cap B \cap C$

g) $(B \cap C) \cup A$

h) $(A \cap C) \cap \varnothing$

i) $\{\ \} \cup (A \cup B)$

j) $(B \cup C) \cap A$

l) $B - C$

m) $B - (D - A)$

n) C_B^D

o) C_A^D

p) $C_C^{\varnothing}$

q) $n[\mathcal{P}(C)]$

r) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

s) $\mathcal{P}(B)$

Lista de Exercícios - TDE

1) Sendo A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 2, 3, 5}, C = {x ∈ N/ x é número par menor que 10} e D = {x/ x é número ímpar compreendido entre 4 e 10}, determine:

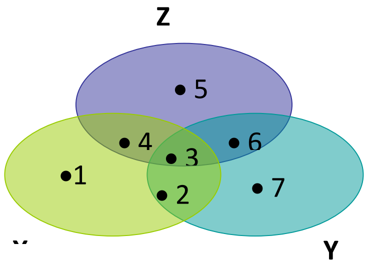
a) $A \cup B =$

b) $A \cup D =$

c) $B \cup D =$

d) $(A \cup C) \cup D =$

2) Considere o diagrama abaixo e determine:



a) $X \cap Y =$

b) $X \cap Z =$

c) $Y \cap Z =$

d) $X \cap Y \cap Z =$

3) Sejam $H = \{h \in Z \,/\, -2 \leq h \leq 6\}$ e $J = \{j \in Z \,/\, j > 3\}$, determine:

a) $H - J =$

b) $J - H =$

4) Sendo os conjuntos:

$U = \{0, 1, 2, 3, ..., 7\}$,

$A = \{0, 2, 5\}$,

$B = \{1, 3, 5, 7\}$ e

$C = \{2, 4, 6\}$,

determine :

a) $\complement_U A =$

b) $\complement_U B =$

c) $\complement_U C =$

4) Dado o digrama, hachure os seguintes conjuntos:

a) $B \cap C =$

b) $A \cup C =$

c) $A \cap B \cap C =$

d) $A \cup B \cup C =$

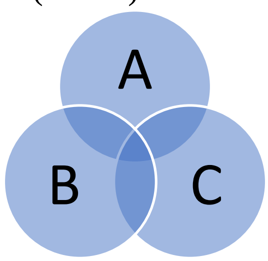
e) $(A \cap C) \cup B =$

f) $(A \cup B) \cap C =$

g) $(C - A) \cap B =$

h) $B - (A \cup C) =$

i) $(A - B) \cup (A \cap C) =$



"Faça um diagrama em cada item"

6) Inscreveram-se num concurso público 700 candidatos para 3 cargos - um de nível superior, um de nível médio e um de nível fundamental. É permitido aos candidatos efetuarem uma inscrição para nível superior e uma para nível médio. Os candidatos ao nível fundamental somente podem efetuar uma inscrição. Sabe-se que 13% dos candidatos de nível superior efetuaram 2 inscrições. Dos candidatos de nivel médio, 111

candidatos efetuaram uma só inscrição, correspondendo a 74% dos candidatos desse nível. Qual é então o número de candidatos ao nível fundamental?

7) (PUC) Um levantamento sócio-econômico entre os habitantes de uma cidade revelou que, exatamente: 17% têm casa própia; 22% têm automóvel; 8% têm casa própria e automóvel. Qual o percentual dos que não têm casa própria nem automóvel?

8)(PUC) Numa comunidade constituída de 1800 pessoas há três programas de TV favoritos: Esporte (E), novela (N) e Humanismo (H). A tabela abaixo indica quantas pessoas assistem a esses programas.

Programas	E	N	H	E e N	E e H	N e H	E, N e H	Nenhum
Número de telespectadores	400	1220	1080	220	180	800	100	x

Através desses dados verifica-se que o número de pessoas da comunidade que não assistem a qualquer dos três programas é:

(A) 200 (C) 900

(B) os dados do problema estão incorretos. (D) 100 (E) n.d.a.