אלגברה ב' (104168)
תרגילים ממבחנים על דטרמיננטות ועל צורת ובסיס ז'ורדן

אלן סורני

30 בנובמבר 2022

תרגיל 1 (מועד א' - אביב 2020). תהי $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ נילפוטנטית. הראו כי $\det(A) = 0$ וגם $\det(I + A) = 1$.

תרגיל 2 (מועד ב' - אביב 2020). תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ עבורן מתקיים

$$\det(A) = \det(A + B) = \det(A + 2B) = \det(A + 3B) = 1 .$$

מיצאו את $\det(3A + 7B)$.

תרגיל 3 (מועד א' - חורף 2022). תהי

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C}).$$

1. מיצאו את צורת ז'ורדן של A ומיצאו מטריצה הפיכה $P \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ עבורה $P^{-1}AP$ מטריצת ז'ורדן.
2. הוכיחו כי A^{-1} ו־A^3 דומות.

תרגיל 4 (מועד א' - אביב 2021). 1. יהי $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ויהי $n > 1$. הראו כי $J_n(\lambda)^2$ אינה לכסינה.

2. יהי V מרחב וקטורי מרוכב סוף־מימדי, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ כך ש־T^2 לכסין. מיצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של T.

תרגיל 5 (מועד א' - אביב 2022). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{C}$, ויהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

1. בהינתן $p \in \mathbb{C}[x]$, הראו שקיים $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ עבורו $p(S) = T$, אם ורק אם קיים בסיס B של V וקיימת מטריצת ז'ורדן J עבורה
$$[T]_B = p(J) .$$
2. נניח כי $\dim V = 4$ וכי הפולינום המינימלי של T הוא $m_T(x) = x^3$. הוכיחו כי אין $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ עבורו $S^2 = T$.
3. תנו דוגמה מפורשת למפורטת לאופרטור $S \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$ עבורו $\dim\ker(S^2) = 2$ וגם $\dim\ker(S^4) = 3$.

תרגיל 6 (מועד א' - חורף 2021). הראו כי קיימת מטריצה $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ עבורה

$$A^{20} + A^{21} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 0 \\ 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

רמז: ראינו בהרצאה כי

$$J_n(\lambda)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} J_n(0)^i .$$