



אלגברה ב' (104168)  
חורף 2022-2023  
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־26 באוקטובר 2022

# תוכן העניינים

|   |                             |
|---|-----------------------------|
| 1 | I חלק ראשון - מרחבים שמורים |
| 2 | 1 מטריצות מייצגות           |
| 2 | 1.1 הגדרות בסיסיות          |
| 8 | 1.2 גרעין ותמונה            |

## **חלק I**

### **חלק ראשון - מרחבים שמורים**

# פרק 1

## מטריצות מייצגות

### 1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה  $\mathbb{F}$ , יהי  $B = (v_1, \dots, v_n)$  בסיס של  $V$  ויהי

$$v \in V \text{ וקטור קואורדינטות של } v \text{ לפי הבסיס } B \text{ הוא הוקטור } [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ כאשר } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \text{ היחידים עבורם}$$
$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i := \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\rho_B: V \rightarrow \mathbb{F}^n$$
$$v \mapsto [v]_B$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל אותו שדה  $\mathbb{F}$  עם בסיסים  $B, C$  בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$
$$n := \dim(V) \text{ ו- } m := \dim(W) \text{ עבור } T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \text{ נגדיר}$$
$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$  ויהי  $E = (e_1, \dots, e_m)$  הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{F}^m$ . אז:

(i) לכל  $i \in [m]$  מתקיים כי  $Ae_i$  העמודה ה- $i$  של  $A$ .

$$(ii) \text{ לכל } AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ או } B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_\ell \\ | & & | \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times \ell}(\mathbb{F})$$

תרגיל 1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\eta_C^B: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$$
$$T \mapsto [T]_C^B$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  ויהיו  $B = (v_1, \dots, v_n)$  בסיס של  $V$  ו- $C$  בסיס של  $W$ . אז

$$[T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$$

לכל  $v \in V$ .

הוכחה. עבור  $v = v_i$  מתקיים  $[T]_C^B e_i = [T]_C^B [v_i]_B = [T]_C^B v_i$  וזאת העמודה ה- $i$  של  $[T]_C^B$ , שהינה  $[T(v_i)]_C$  לפי ההגדרה. אם  $v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i$  נקבל מלינאריות של  $T$  ושל  $\rho_B$  כי

$$\begin{aligned} [T(v)]_C &= \left[ T \left( \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right) \right]_C \\ &= \left[ \sum_{i \in [n]} \alpha_i T(v_i) \right]_C \\ &= \sum_{i \in [n]} \alpha_i [T(v_i)]_C \\ &= \sum_{i \in [n]} \alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\ &= [T]_C^B \left( \sum_{i \in [n]} \alpha_i [v_i]_B \right) \\ &= [T]_C^B \left[ \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right]_B \\ &= [T]_C^B [v]_B \end{aligned}$$

כנדרש. ■

**סימון 1.1.7.** אם  $B$  בסיס של מרחב וקטורי סוף-מימדי  $V$  ואם  $T \in \text{End}(V)$ , נסמן  $[T]_B^B := [T]_B^B$  ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של  $T$  לפי הבסיס  $B$ .

**סימון 1.1.8.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי עם בסיסים  $B, C$ . נסמן  $M_C^B := [\text{Id}_V]_C^B$ .

**סימון 1.1.9.** אם  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ , נסמן

$$\begin{aligned} T_A: \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

**תרגיל 2.** יהי  $V = \mathbb{R}_3[x]$  מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$

ויהי  $B = (1, x, x^2, x^3)$  בסיס של  $V$ . כיתבו את  $[T]_B$ .

**פתרון.** לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות  $[T]_B$  הן  $[T(x^i)]_B$  עבור  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(x) &= x+1 = 1+x \\ T(x^2) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 \\ T(x^3) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T(1)]_B &= e_1 \\ [T(x)]_B &= e_1 + e_2 \\ [T(x^2)]_B &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\ [T(x^3)]_B &= e_1 + 3e_2 + 3e_3 + e_4 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3. יהי  $V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$  תהי

$$T: V \rightarrow V$$

$$A \mapsto \frac{1}{2}(A - A^t)$$

ויהי

$$E = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) := \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

הבסיס הסטנדרטי של  $V$ . כיתבו את  $[T]_E$ .

הוכחה. כמו מקודם, נחשב את  $[T(E_{i,j})]_E$  כיוון שאלו עמודות  $[T]_E$ . מתקיים

$$T(E_{1,1}) = \frac{1}{2}(E_{1,1} - E_{1,1}) = 0$$

$$T(E_{1,2}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}E_{1,2} - \frac{1}{2}E_{2,1}$$

$$T(E_{2,1}) = \frac{1}{2}(E_{2,1} - E_{1,2}) = \frac{1}{2}E_{2,1} - \frac{1}{2}E_{1,2}, T(E_{2,2}) = \frac{1}{2}(E_{2,2} - E_{2,2}) = 0$$

לכן

$$[T(E_{1,1})]_E = 0$$

$$[T(E_{1,2})]_E = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$$

$$[T(E_{2,1})]_E = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3$$

$$[T(E_{2,2})]_E = 0$$

ואז

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

כנדרש.

תרגיל 4. יהי  $V = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  עם הבסיס  $B = (f_1, f_2)$  כאשר

$$f_1 \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x$$

$$f_2 \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = y$$

ותהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

מיצאו  $[T]_B = A$  עבור  $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ .

פתרון. מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$\begin{aligned} [T(f_1)]_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \cdot [T(f_2)]_B &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} T(f_1) &= f_1 + 2f_2 \\ T(f_2) &= 3f_1 + 4f_2 \end{aligned}$$

לכן, אם  $f \in V$  איבר כללי, נכתוב

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned} (T(f)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (f_1 + 2f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta (3f_1 + 4f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (x + 2y) + \beta (3x + 4y) \end{aligned}$$

**טענה 1.1.10.** תהייה  $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$  ונניח כי לכל  $v \in \mathbb{F}^n$  מתקיים  $Av = Bv$  או  $A = B$ .

הוכחה. מהנתון, מתקיים  $(A - B)v = 0$  לכל  $v \in \mathbb{F}^n$ . בפרט העמודה ה- $i$  של  $A - B$ , שהינה  $(A - B)e_i$ , שווה ל-0. לכן  $A - B = 0$ . ■

**טענה 1.1.11.** יהיו  $U, V, W$  מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה  $\mathbb{F}$  עם בסיסים  $B, C, D$  בהתאמה, ותהייה

$$\begin{aligned} S &\in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \\ T &\in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \end{aligned}$$

אז

$$\cdot [T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B$$

הוכחה. לכל  $u \in U$  מתקיים

$$\begin{aligned} [T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B \end{aligned}$$

לכן

$$\cdot, [T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B$$

■

כנדרש.

**טענה 1.1.12.** יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה  $\mathbb{F}$  ותהי  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  חד-חד ערכית. יהיו

$$\begin{aligned} B &= (v_1, \dots, v_n) \\ C &= (u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

בסיסים של  $V$  ויהיו

$$\begin{aligned} B' &= (T(v_1), \dots, T(v_n)) \\ C' &= (T(u_1), \dots, T(u_n)) \end{aligned}$$

או  $B', C'$  בסיסים של  $\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$  וגם  $M_C^B = M_{C'}^{B'}$ .

פתרון. כיוון ש- $T$  חד-חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם  $T: V \xrightarrow{\sim} \text{Im}(T)$ . איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן  $B', C'$  בסיסים. כעת, לכל  $i \in [n]$  נכתוב

$$v_i = \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j$$

ואז

$$M_C^B e_i = [v_i]_C = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} T(v_i) &= T\left(\sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j\right) \\ &= \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} T(u_j) \end{aligned}$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'} e_i = [T(v_i)]_{C'} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

**תרגיל 5.** תהי  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$  הפיכה.

1. יהי  $E$  הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{F}^n$ . מיצאו בסיס  $B$  של  $\mathbb{F}^n$  עבורו  $A = M_E^B$ .

2. מיצאו בסיס  $C$  של  $\mathbb{F}^n$  עבורו  $A = M_C^E$ .

3. יהי  $B$  בסיס של  $\mathbb{F}^n$ . מיצאו בסיס  $C$  של  $\mathbb{F}^n$  עבורו  $A = M_C^B$ .

4. יהי  $V$  מרחב וקטורי מממד  $n \in \mathbb{N}_+$  מעל  $\mathbb{F}$ , יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  איזומורפיזם ויהי  $B = (v_1, \dots, v_n)$  בסיס של  $V$ . מיצאו בסיס  $C$  של  $V$  עבורו  $[T]_C^B = A$ .

**פתרון.** 1. אם  $B = (v_1, \dots, v_n)$ , מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

לכן ניקח את  $(v_1, \dots, v_n)$  להיות עמודות  $A$ , לפי הסדר.

2. לכל  $v \in \mathbb{F}^n$  מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן  $M_C^E = (M_E^C)^{-1}$ . אם ניקח  $C = (u_1, \dots, u_n)$  כאשר  $u_i$  העמודה ה- $i$  של  $A^{-1}$  נקבל מהסעיף הקודם כי  $M_C^E = A^{-1}$  ולכן  $M_C^E = (A^{-1})^{-1} = A$ . כלומר ניקח,  $u_i = A^{-1} e_i$ .

3. מתקיים  $M_C^B = M_C^E M_E^B$  לכן נרצה שיתקיים  $M_C^E M_E^B = A$  או במילים אחרות  $M_C^B = A (M_E^B)^{-1} = A M_E^E = A$ . מהסעיף הקודם, נרצה  $C = (u_1, \dots, u_n)$  כאשר  $u_i$  העמודה ה- $i$  של  $(A M_E^E)^{-1} = M_E^B A^{-1}$ , כלומר

$$u_i = M_E^B A^{-1} e_i$$



4. עבור כל בסיס  $C'$  מתקיים  $[T]_{C'}^B = M_{C'}^B [T]_B^B$  לכן נרצה  $M_C^B [T]_B^B = A$ . כיוון ש- $T$  איזומורפיזם, המטריצה  $[T]_B^B$  הפיכה, ולכן נרצה  $M_C^B = A \left([T]_B^B\right)^{-1}$ . כעת, אם  $C = (v_1, \dots, v_n)$  נקבל כי  $M_{\hat{C}}^B = M_C^E$  כאשר  $\hat{C} = ([v_1]_B, \dots, [v_n]_B)$ . כלומר, נחפש  $\hat{C}$  עבורו  $M_{\hat{C}}^E = A [T]_B^{-1}$ . לפי הסעיף השני, נרצה  $\hat{C} = (u_1, \dots, u_n)$  עבור

$$u_i = \left(A [T]_B^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i$$

לכן

$$v_i = \rho_B^{-1} ([T]_B A^{-1} e_i)$$

תרגיל 6. יהי  $V = \mathbb{C}_3[x]$ , תהי

$$T: V \rightarrow V, \quad p(x) \mapsto p(x+1)$$

יהי  $E = (1, x, x^2, x^3)$  הבסיס הסטנדרטי ותהי  $A =$  כיתבו מפורשות בסיס  $C$  של  $V$  עבורו

$$A = [T]_C^E$$

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם  $\hat{C} = (u_1, \dots, u_4)$  כאשר  $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$ . חישבנו ב-2 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי  $A^2 = I$  כלומר  $A^{-1} = A$ . נשים לב כי

$$Ae_1 = e_2$$

$$Ae_2 = e_1$$

$$Ae_3 = e_4$$

$$Ae_4 = e_3$$

ואז נקבל

$$\begin{aligned} u_1 &= [T]_E A^{-1} e_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_2 &= [T]_E A^{-1} e_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_3 &= [T]_E A^{-1} e_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_4 &= [T]_E A^{-1} e_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר

$$\hat{C} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ולבסוף

$$C = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (1+x, 1, 1+3x+3x^2+x^3, 1+2x+x^2)$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן  $A$ . מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 = v_2 \\ T(x) &= x+1 = v_1 \\ T(x^2) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 = v_4 \\ T(x^3) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 = v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T]_C^E &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_C & [T(x)]_C & [T(x^2)]_C & [T(x^3)]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

כנדרש.

## 1.2 גרעין ותמונה

**הגדרה 1.2.1** (גרעין של העתקה ליניארית). יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי  $T \in \text{Hom}(V, W)$ . הגרעין של  $T$  הוא

$$\ker(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

**הגדרה 1.2.2** (תמונה של העתקה ליניארית). יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי  $T \in \text{Hom}(V, W)$ . התמונה של  $T$  היא

$$\text{Im}(T) := \{T(v) \mid v \in V\}$$

**הגדרה 1.2.3** (דרגה של אופרטור ליניארי). יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי  $T \in \text{Hom}(V, W)$ . הדרגה של  $T$  היא

$$\text{rank}(T) := \dim(\text{Im}(T))$$

**הערה 1.2.4**. אם  $V, W$  סוף-מימדיים עם בסיסים  $B, C$  בהתאמה, אז

$$\text{rank}(T) = \text{rank}([T]_C^B)$$

**משפט 1.2.5** (משפט המימדים). יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי  $T \in \text{End}(V)$ . אז

$$\dim V = \dim \text{Im}(T) + \dim \ker(T)$$

תרגיל 7. יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי  $v \in V$ . מוצאו בסיס  $B$  של  $V$  עבורו  $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

פתרון. נשלים את  $(v)$  לבסיס  $B_0 = (v_1, \dots, v_n)$  של  $V$  כאשר  $v_1 = v$ . תהי

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

$A$  הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס  $B = (u_1, \dots, u_n)$  של  $V$  עבורו  $M_B^{B_0} = A$ . נקבל

$$\begin{aligned} [v]_B &= [\text{Id}_V v]_B \\ &= [\text{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת

$$u_i = \rho_{B_0}^{-1}([\text{Id}]_B A^{-1} e_i) = \rho_{B_0}^{-1}(A^{-1} e_i)$$

תרגיל 8. יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה  $\mathbb{F}$ , ותהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . הראו כי  $\text{rank } T = 1$  אם ורק אם יש בסיסים  $B, C$  ל- $V$  כך שכל מקדמי  $[T]_C^B$  הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים  $B, C$  כמתואר. אז  $\text{rank } T = \text{rank } [T]_C^B = 1$ . מכיוון השני, נניח כי  $\text{rank } T = 1$ . כלומר,  $\dim \text{Im } T = 1$ . משפט המימדים מתקיים  $\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im } T$ , לכן

$$\dim \ker T = \dim V - \dim \text{Im } T = \dim V - 1$$

יהי  $n := \dim V$  ויהי

$$\tilde{B} := (u_1, \dots, u_{n-1})$$

בסיס של  $\ker T$ .

יהי  $w$  וקטור פורש של  $\text{Im } T$  ויהי  $C$  בסיס של  $V$  כך שמתקיים  $[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ . שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי

$v := T^{-1}(w)$ , ואז  $(v, u_1, \dots, u_{n-1})$  בלתי-תלויים לינארית, כי  $v \notin \ker T$ . לכן זה בסיס של  $V$ . אז גם  $B := (v, v + u_1, \dots, v + u_{n-1})$  בסיס של  $V$  כי המטריצה

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [v]_{\tilde{B}} & \dots & [v + u_{n-1}]_{\tilde{B}} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפיכה.

נסמן  $C = (w_1, \dots, w_m)$  מתקיים

$$T(v) = w = w_1 + \dots + w_m$$

ולכל  $i \in [n-1]$  מתקיים

$$\begin{aligned} T(v + u_i) &= T(v) + T(u_i) \\ &= T(v) + 0 \\ &= T(v) \\ &= w_1 + \dots + w_m \end{aligned}$$

לכן  $[T]_C^B$  מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

תרגיל 9. תהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(-1) \end{aligned}$$

מיצאו בסיסים  $B, C$  של  $\mathbb{R}_3[x]$  עבורם

$$[T]_C^B = A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון. ניקח בסיס  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3) := (x+1, x^2-1, x^3+1)$  של  $\ker(T)$ , כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי-תלויה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי  $T \neq 0$ ). מתקיים  $w := -1 = T(x)$  ואז

$$\text{Im}(T) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(w) \quad \text{נחשב בסיס } C \text{ עבורו } [w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נשלים את } (v) \text{ לבסיס}$$

$$C_0 = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (-1, x, x^2, x^3)$$

המטריצה

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ כפי שראינו, ניתן לחשב הפיכה ולכן קיים בסיס } C = (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ עבורו } M_C^{C_0} = X \text{ כשראינו שאז}$$

את  $C$  לפי  $u_i = \rho_{C_0}^{-1}(X^{-1}e_i)$  מתקיים

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \rho_{C_0}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = -1 - x - x^2 - x^3 \\
 u_2 &= \rho_{C_0}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x \\
 u_3 &= \rho_{C_0}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x^2 \\
 u_4 &= \rho_{C_0}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x^3
 \end{aligned}$$

כלומר,  $C = (-1 - x - x^2 - x^3, x, x^2, x^3)$ .  
 ניקח  $T(v) = -1 = w$  כך שיתקיים  $v = x \in V$  ואז

$$B = (v, v + b_1, v + b_2, v + b_3) = (x, 2x + 1, x^2 + x - 1, x^3 + x + 1)$$

כמו בתרגיל הקודם.

אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}
 T(x) &= -1 \\
 T(2x + 1) &= -2 + 1 = -1 \\
 T(x^2 + x - 1) &= (-1)^2 - 1 - 1 = 1 - 2 = -1 \\
 T(x^3 + x + 1) &= (-1)^3 - 1 + 1 = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{וגם } [-1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ לכן}$$

$$, [T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כפי שרצינו.