אלגברה ב' (104168)
תרגילים על מטריצות מייצגות

אלן סורני

23 באוקטובר 2022

סימון 1.1. עבור מרחבים וקטוריים V, W מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ נסמן ב־$\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ את אוסף ההעתקות הלינאריות $V \to W$, ונסמן $\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V) := \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$. לעתים נשמיט את כתיבת השדה $\mathbb{F}$ מהסימון, כשהוא ידוע או לא חשוב בקונטקסט.

סימון 1.2. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C בהתאמה ותהי $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. אם $B = (v_1, \ldots, v_n)$, נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

תרגיל 1. עבור ההעתקות והבסיסים הבאים, כיתבו את המטיצה המייצגת $[T]_C^B$.

.1

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{R}^3 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x+z \\ 5x-3y \\ 2y+3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

והבסיסים

$$\begin{aligned} B = (e_1, e_2, e_3) &:= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ C = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3) \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p'(x) \end{aligned}$$

והבסיסים

$$\begin{aligned} B &= \left(1, x, x^2, x^3\right) \\ C &= \left(1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3\right) \end{aligned}$$

כאשר $\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3.

.3

$$\begin{aligned} T \colon \operatorname{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}) &\to \operatorname{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}) \\ A &\mapsto A^t \end{aligned}$$

והבסיסים

$$\begin{aligned} B = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) &:= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ C &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

תרגיל 2. תהי

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{4,4}\left(\mathbb{C}\right).$$

מיצאו בכל אחד מהמקרים הבאים בסיס C של V עבורו יתקיים $[\mathrm{Id}_V]_C^B=A$.

1. $V=\mathbb{R}_3\left[x\right]$ וגם $B=\left(1,x,x^2,x^3\right)$.
2. $V=\mathrm{Mat}_{2,2}\left(\mathbb{C}\right)$ וגם $B=\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{1,2},E_{2,1}\right)$.
3. $V=\mathbb{C}^4$ וגם $B=\left(e_1+3e_3,e_2+3e_4,e_3+3e_1,e_4+3e_2\right)$.

תרגיל 3. תהי

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&1\\0&1&0&4\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

מיצאו בכל אחד מהמקרים הבאים בסיס B של V עבורו יתקיים $[\mathrm{Id}_V]_C^B=A$.

1. $V=\mathbb{R}_3\left[x\right]$ וגם $B=\left(1,x,x^2,x^3\right)$.
2. $V=\mathrm{Mat}_{2,2}\left(\mathbb{C}\right)$ וגם $B=\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{1,2},E_{2,1}\right)$.
3. $V=\mathbb{C}^4$ וגם $B=\left(e_1+3e_3,e_2+3e_4,e_3+3e_1,e_4+3e_2\right)$.

תרגיל 4. בכל אחד מהמקרים הבאים, מיצאו בסיס B של V עבורו $[T]_C^B=I$ מטריצת היחידה.

1. $V=\mathbb{C}^4$ עם $B=\left(e_1,e_2,e_3,e_4\right)$ וגם

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ \begin{pmatrix}w\\x\\y\\z\end{pmatrix}&\mapsto\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\end{aligned}.$$

2. $V=\mathbb{C}_3\left[x\right]$ עם $B=\left(1,x^2,x,x^3\right)$ וגם

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ \left(T\left(p\right)\right)\left(x\right)&=p\left(x+1\right)\end{aligned}.$$

3. $V=\mathrm{Mat}_{2,2}\left(\mathbb{C}\right)$ עם $B=\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{1,2},E_{2,1}\right)$ וגם

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ A&\mapsto -A^t\end{aligned}.$$

תרגיל 5. בכל אחד מהמקרים הבאים, מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B = I$ מטריצת היחידה.

1. $V=\mathbb{C}^4$ עם $C=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ וגם

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

2. $V=\mathbb{C}_3\left[x\right]$ עם $C=\left(1,x^2,x,x^3\right)$ וגם

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ \left(T\left(p\right)\right)\left(x\right) &= p\left(x+1\right) \end{aligned}.$$

3. $V=\mathrm{Mat}_{2,2}\left(\mathbb{C}\right)$ עם $C=\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{1,2},E_{2,1}\right)$ וגם

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ A &\mapsto -A^t \end{aligned}.$$

תרגיל 6. בכל אחד מהמקרים הבאים, מצאו אופרטור $T\in\mathrm{End}\left(V\right)$ עבורו $[T]_B = A$.

1. $V=\mathbb{C}^4$ עם $B=\left(e_1+e_2,e_2+e_4,e_3,e_3+e_4\right)$ וגם $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $V=\mathbb{C}_2\left[x\right]$ עם $B=\left(1,x^2,x+x^2\right)$ וגם $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $V=\mathrm{Mat}_{2,2}\left(\mathbb{R}\right)$ עם $B=\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ וגם $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.