אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 2 סכומים ישרים, מרחבים שמורים, ונילפּוטנטיות

30.11.2022 :תאריך הגשה

ממתקיים וכך שמתקיים לו. יהי $V_1,\dots,V_k\leq V$ ויהיו ווהי יהי יהי סוף־מימדי, יהי סוף־מימדי, יהי יהי יהי ווהיי ווהיי ווהיי ווהיי ווהיי ווקטורי סוף־מימדי, יהי $V_1,\dots,V_k\leq V$ ווהייו ווהיי ווקטורי סוף־מימדי, יהי יהי ווקטורי סוף־מימדי, יהי יהי ווקטורי סוף־מימדי, יהי יהי יהי ווקטורי וו

1. הראו כי

$$\ker\left(T\right) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker\left(\left.T\right|_{V_i}\right)$$

$$.\operatorname{Im}\left(T\right) = \bigoplus_{i \in [k]} \operatorname{Im}\left(\left.T\right|_{V_i}\right)$$

2. הראו כי

$$\ker (T - \lambda \operatorname{Id}_{V}) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker (T|_{V_{i}} - \lambda \operatorname{Id}_{V_{i}})$$

וגם דו אלו של הם אלו של הם דעמיים העצמיים שהערכים והסיקו אל
 $\lambda\in\mathbb{F}$ לכל לכל ה

$$r_{T,a}(\lambda) = \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},a}(\lambda)$$
$$r_{T,g}(\lambda) = \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},g}(\lambda)$$

 $S\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V
ight)$ עצמי של כערך עצמי של הגברי והגיאומטרי הריבויים האלגברי $r_{S,a}\left(\lambda
ight), r_{S,g}\left(\lambda
ight)$ וכאשר לכל גברי והגיאומטרי מרחב וקטורי ממימד n>0 ותהי מרחב וקטורי ממימד n>0

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < n_k = n$$

סדרת מספרים.

עבורה $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V
ight)$ הראו שיש העתקה (לאו דווקא לאו יורדת לאו תונוטונית יורדת $n_{i}-n_{i-1}$.1

$$n_i = \dim \ker (T^i)$$

 $i \in [k]$ לכל

 $J_{m}\left(0
ight)$ חישבו על מטריצות מהצורה רמז:

עבורה $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V
ight)$ העתקה שאין הראו הראו $n_{i+1}-n_{i}>n_{i}-n_{i-1}$ עבורו נניח כי יש 2.

$$n_i = \dim \ker (T^i)$$

 $i \in [k]$ לכל

ויהי $V=\operatorname{Mat}_{2}\left(\mathbb{C}
ight)$ יהי $V=\operatorname{Mat}_{2}\left(\mathbb{C}
ight)$

$$T \colon V \to V$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

 $S:=T^2$ אבור ז'ורדן עבור ובסיס וצורת ז'ורדן עבור ז'ורדן מיצאו בסיס וצורת מיצאו

V בסיס של ויהי $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ יהי סוף־מימדי, יהי קטורי מרחב ע יהי יהי 4. יהי מרחב וקטורי מימדי, יהי

נזכיר כי
$$A = [T]_B$$
 נסמן.1

$$T_A \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto Av$$

וכי

$$\rho_B \colon V \to \mathbb{F}^n$$

$$v \mapsto [v]_B$$

הראו כי

$$T = \rho_B^{-1} \circ T_A \circ \rho_B$$

. היעו T_{A} הינו היעו אם ורק אם אם היעו היעו $W\leq V$ ישמור מי $W\leq V$ ים הראו מי

V בסיס של $B=(v_1,\ldots,v_n)$ ויהי ויהי ויהי היי סוף־מימדי, יהי סוף־מימדי, יהי ע מרחב וקטורי היהי $T\in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$

$$.V$$
של של הי־שמורים ה- T המרחבים את מיצאו .
[$T]_{B}=J_{m}\left(\lambda\right)$ כי נניח נניח .1

ויהי
$$V=\operatorname{Mat}_{2}\left(\mathbb{C}
ight)$$
 .2

$$T \colon V \to V$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

.Vשל של החרשבים ה-תרמרחבים התת-מל את מיצאו מיצאו מיצאו הת