



אלגברה ב' (104168)
חורף 2022-2023
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה-16 בנובמבר 2022

תוכן העניינים

1	I	חלק ראשון - מרחבים שמורים
2	1	מטריצות מייצגות
2	1.1	הגדרות בסיסיות
8	1.2	גרעין ותמונה
12	2	סכומים ישירים ולכסינות
12	2.1	סכומים ישירים
14	2.2	לכסינות
15	2.3	מרחבים שמורים

חלק I

חלק ראשון - מרחבים שמורים

פרק 1

מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} , יהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V ויהי

$$v \in V \text{ וקטור קואורדינטות של } v \text{ לפי הבסיס } B \text{ הוא הוקטור } [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ כאשר } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \text{ היחידים עבורם}$$
$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i := \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\rho_B: V \rightarrow \mathbb{F}^n$$
$$v \mapsto [v]_B$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל אותו שדה \mathbb{F} עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

נסמן גם $n := \dim(V)$ ו- $m := \dim(W)$. עבור $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E = (e_1, \dots, e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{F}^m . אז:

(i) לכל $i \in [m]$ מתקיים כי Ae_i העמודה ה- i של A .

$$(ii) \text{ לכל } A, B \in \text{Mat}_{n \times \ell}(\mathbb{F}) \text{ או } B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_\ell \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ אז } AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell \\ | & & | \end{pmatrix}$$

תרגיל 1.1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\eta_C^B: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$$
$$T \mapsto [T]_C^B$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ ויהיו $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V ו- C בסיס של W . אז

$$[T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$$

לכל $v \in V$.

הוכחה. עבור $v = v_i$ מתקיים $[T]_C^B e_i = [T]_C^B [v_i]_B = [T]_C^B e_i$ וזאת העמודה ה- i של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה. אם $v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i$ נקבל מלינאריות של T ושל ρ_B כי

$$\begin{aligned} [T(v)]_C &= \left[T \left(\sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right) \right]_C \\ &= \left[\sum_{i \in [n]} \alpha_i T(v_i) \right]_C \\ &= \sum_{i \in [n]} \alpha_i [T(v_i)]_C \\ &= \sum_{i \in [n]} \alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\ &= [T]_C^B \left(\sum_{i \in [n]} \alpha_i [v_i]_B \right) \\ &= [T]_C^B \left[\sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right]_B \\ &= [T]_C^B [v]_B \end{aligned}$$

כנדרש. ■

סימון 1.1.7. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף-מימדי V ואם $T \in \text{End}(V)$ נסמן $[T]_B^B := [T]_B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B .

סימון 1.1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי עם בסיסים B, C . נסמן $M_C^B := [\text{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.9. אם $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ נסמן

$$\begin{aligned} T_A: \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

תרגיל 1.2. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$

ויהי $B = (1, x, x^2, x^3)$ בסיס של V . כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $[T(x^i)]_B$ עבור $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(x) &= x+1 = 1+x \\ T(x^2) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 \\ T(x^3) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T(1)]_B &= e_1 \\ [T(x)]_B &= e_1 + e_2 \\ [T(x^2)]_B &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\ [T(x^3)]_B &= e_1 + 3e_2 + 3e_3 + e_4 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 1.3. יהי $V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$, תהי

$$T: V \rightarrow V$$

$$A \mapsto \frac{1}{2}(A - A^t)$$

ויהי

$$E = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V . כיתבו את $[T]_E$.

הוכחה. כמו מקודם, נחשב את $[T(E_{i,j})]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$T(E_{1,1}) = \frac{1}{2}(E_{1,1} - E_{1,1}) = 0$$

$$T(E_{1,2}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}E_{1,2} - \frac{1}{2}E_{2,1}$$

$$T(E_{2,1}) = \frac{1}{2}(E_{2,1} - E_{1,2}) = \frac{1}{2}E_{2,1} - \frac{1}{2}E_{1,2}, T(E_{2,2}) = \frac{1}{2}(E_{2,2} - E_{2,2}) = 0$$

לכן

$$[T(E_{1,1})]_E = 0$$

$$[T(E_{1,2})]_E = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$$

$$[T(E_{2,1})]_E = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3$$

$$[T(E_{2,2})]_E = 0$$

ואז

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

כנדרש.

תרגיל 1.4. יהי $V = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ עם הבסיס $B = (f_1, f_2)$ כאשר

$$f_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x$$

$$f_2 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = y$$

ותהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

מיצאו $[T]_B = A$ עבור $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$.

פתרון. מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$\begin{aligned} [T(f_1)]_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \cdot [T(f_2)]_B &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

או

$$\begin{aligned} T(f_1) &= f_1 + 2f_2 \\ T(f_2) &= 3f_1 + 4f_2 \end{aligned}$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned} (T(f)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (f_1 + 2f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta (3f_1 + 4f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (x + 2y) + \beta (3x + 4y) \end{aligned}$$

טענה 1.1.10. תהייה $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$ או $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A - B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה- i של $A - B$, שהינה $(A - B)e_i$, שווה ל-0. לכן $A - B = 0$. ■

טענה 1.1.11. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה \mathbb{F} עם בסיסים B, C, D בהתאמה, ותהייה

$$\begin{aligned} S &\in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \\ T &\in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \end{aligned}$$

או

$$\cdot [T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned} [T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B \end{aligned}$$

לכן

$$\cdot, [T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B$$

■

כנדרש.

טענה 1.1.12. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה \mathbb{F} ותהי $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ חד-חד ערכית. יהיו

$$\begin{aligned} B &= (v_1, \dots, v_n) \\ C &= (u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

בסיסים של V ויהיו

$$\begin{aligned} B' &= (T(v_1), \dots, T(v_n)) \\ C' &= (T(u_1), \dots, T(u_n)) \end{aligned}$$

או $M_C^B = M_{C'}^{B'}$ וגם $\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$

פתרון. כיוון ש- T חד-חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T: V \xrightarrow{\sim} \text{Im}(T)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן B', C' בסיסים. כעת, לכל $i \in [n]$ נכתוב

$$v_i = \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j$$

ואז

$$M_C^B e_i = [v_i]_C = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} T(v_i) &= T\left(\sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j\right) \\ &= \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} T(u_j) \end{aligned}$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'} e_i = [T(v_i)]_{C'} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

תרגיל 1.5. תהי $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{F}^n . מיצאו בסיס B של \mathbb{F}^n עבורו $A = M_E^B$.

2. מיצאו בסיס C של \mathbb{F}^n עבורו $A = M_C^E$.

3. יהי B בסיס של \mathbb{F}^n . מיצאו בסיס C של \mathbb{F}^n עבורו $A = M_C^B$.

4. יהי V מרחב וקטורי מממד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל \mathbb{F} , יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ איזומורפיזם ויהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V . מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B = A$.

פתרון. 1. אם $B = (v_1, \dots, v_n)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

לכן ניקח את (v_1, \dots, v_n) להיות עמודות A , לפי הסדר.

2. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן $M_C^E = (M_E^C)^{-1}$. אם ניקח $C = (u_1, \dots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה- i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_C^E = A^{-1}$ ולכן $M_C^E = (A^{-1})^{-1} = A$. כלומר ניקח, $u_i = A^{-1} e_i$.

3. מתקיים $M_C^B = M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $M_C^E M_E^B = A$ או במילים אחרות $M_C^B = A (M_E^B)^{-1} = A M_B^E$. מהסעיף הקודם, נרצה $C = (u_1, \dots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה- i של $(A M_B^E)^{-1} = M_B^E A^{-1}$, כלומר

$$u_i = M_E^B A^{-1} e_i$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]_{C'}^B = M_{C'}^B [T]_B^B$ לכן נרצה $M_C^B [T]_B^B = A$. כיוון ש- T איזומורפיזם, המטריצה $[T]_B^B$ הפיכה, ולכן נרצה $M_C^B = A \left([T]_B^B\right)^{-1}$. כעת, אם $C = (v_1, \dots, v_n)$ נקבל כי $M_C^B = M_{\hat{C}}^E$ כאשר $\hat{C} = ([v_1]_B, \dots, [v_n]_B)$. כלומר, נחפש \hat{C} עבורו $M_{\hat{C}}^E = A [T]_B^{-1}$. לפי הסעיף השני, נרצה $\hat{C} = (u_1, \dots, u_n)$ עבור

$$u_i = \left(A [T]_B^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i$$

לכן

$$v_i = \rho_B^{-1} ([T]_B A^{-1} e_i)$$

תרגיל 1.6. יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$T: V \rightarrow V, \quad p(x) \mapsto p(x+1)$$

יהי $E = (1, x, x^2, x^3)$ הבסיס הסטנדרטי ותהי $A =$ כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו

$$A = [T]_C^E$$

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C} = (u_1, \dots, u_4)$ כאשר $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$. חישבנו ב-1.2 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2 = I$ כלומר $A^{-1} = A$. נשים לב כי

$$Ae_1 = e_2$$

$$Ae_2 = e_1$$

$$Ae_3 = e_4$$

$$Ae_4 = e_3$$

ואז נקבל

$$\begin{aligned} u_1 &= [T]_E A^{-1} e_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_2 &= [T]_E A^{-1} e_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_3 &= [T]_E A^{-1} e_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_4 &= [T]_E A^{-1} e_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר

$$\hat{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ולבסוף

$$C = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (1+x, 1, 1+3x+3x^2+x^3, 1+2x+x^2)$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן A . מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 = v_2 \\ T(x) &= x+1 = v_1 \\ T(x^2) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 = v_4 \\ T(x^3) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 = v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T]_C^E &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_C & [T(x)]_C & [T(x^2)]_C & [T(x^3)]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

כנדרש.

1.2 גרעין ותמונה

הגדרה 1.2.1 (גרעין של העתקה ליניארית). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי $T \in \text{Hom}(V, W)$. הגרעין של T הוא

$$\ker(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

הגדרה 1.2.2 (תמונה של העתקה ליניארית). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי $T \in \text{Hom}(V, W)$. התמונה של T היא

$$\text{Im}(T) := \{T(v) \mid v \in V\}$$

הגדרה 1.2.3 (דרגה של אופרטור ליניארי). יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי $T \in \text{Hom}(V, W)$. הדרגה של T היא

$$\text{rank}(T) := \dim(\text{Im}(T))$$

הערה 1.2.4. אם V, W סוף-מימדיים עם בסיסים B, C בהתאמה, אז

$$\text{rank}(T) = \text{rank}([T]_C^B)$$

משפט 1.2.5 (משפט המימדים). יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי $T \in \text{End}(V)$. אז

$$\dim V = \dim \text{Im}(T) + \dim \ker(T)$$

תרגיל 1.7. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי $v \in V$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את (v) לבסיס $B_0 = (v_1, \dots, v_n)$ של V כאשר $v_1 = v$. תהי

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B = (u_1, \dots, u_n)$ של V עבורו $M_B^{B_0} = A$. נקבל

$$\begin{aligned} [v]_B &= [\text{Id}_V v]_B \\ &= [\text{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת

$$u_i = \rho_{B_0}^{-1}([\text{Id}]_B A^{-1} e_i) = \rho_{B_0}^{-1}(A^{-1} e_i)$$

תרגיל 1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} , ותהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $\text{rank } T = 1$ אם ורק אם יש בסיסים B, C ל- V כך שכל מקדמי $[T]_C^B$ הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים B, C כמתואר. אז $\text{rank } T = \text{rank } [T]_C^B = 1$. מכיוון השני, נניח כי $\text{rank } T = 1$. כלומר, $\dim \text{Im } T = 1$. משפט המימדים מתקיים $\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im } T$, לכן

$$\dim \ker T = \dim V - \dim \text{Im } T = \dim V - 1$$

יהי $n := \dim V$ ויהי

$$\tilde{B} := (u_1, \dots, u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי w וקטור פורש של $\text{Im } T$ ויהי C בסיס של V כך שמתקיים $[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי

$B := T^{-1}(w)$, ואז (v, u_1, \dots, u_{n-1}) בלתי-תלויים לינארית, כי $v \notin \ker T$. לכן זה בסיס של V . אז גם $B := (v, v + u_1, \dots, v + u_{n-1})$ בסיס של V כי המטריצה

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [v]_{\tilde{B}} & \dots & [v + u_{n-1}]_{\tilde{B}} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפיכה.

נסמן $C = (w_1, \dots, w_m)$ מתקיים

$$T(v) = w = w_1 + \dots + w_m$$

ולכל $i \in [n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned} T(v + u_i) &= T(v) + T(u_i) \\ &= T(v) + 0 \\ &= T(v) \\ &= w_1 + \dots + w_m \end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

תרגיל 1.9. תהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(-1) \end{aligned}$$

מיצאו בסיסים B, C של $\mathbb{R}_3[x]$ עבורם

$$[T]_C^B = A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון. ניקח בסיס $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3) := (x+1, x^2-1, x^3+1)$ של $\ker(T)$, כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי-תלויה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי $T \neq 0$). מתקיים $w := -1 = T(x)$ ואז

$$\text{Im}(T) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(w) \quad \text{נחשב בסיס } C \text{ עבורו } [w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נשלים את } (v) \text{ לבסיס}$$

$$C_0 = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (-1, x, x^2, x^3)$$

המטריצה

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ כפי שראינו, ניתן לחשב הפיכה ולכן קיים בסיס } C = (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ עבורו } M_C^{C_0} = X \text{ כשראינו שאז}$$

את C לפי $u_i = \rho_{C_0}^{-1}(X^{-1}e_i)$ מתקיים

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = -1 - x - x^2 - x^3 \\
 u_2 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x \\
 u_3 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x^2 \\
 u_4 &= \rho_{C_0}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x^3
 \end{aligned}$$

כלומר, $C = (-1 - x - x^2 - x^3, x, x^2, x^3)$
 ניקח $T(v) = -1 = w$ כך שיתקיים $v = x \in V$ ואז

$$B = (v, v + b_1, v + b_2, v + b_3) = (x, 2x + 1, x^2 + x - 1, x^3 + x + 1)$$

כמו בתרגיל הקודם.
 אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}
 T(x) &= -1 \\
 T(2x + 1) &= -2 + 1 = -1 \\
 T(x^2 + x - 1) &= (-1)^2 - 1 - 1 = 1 - 2 = -1 \\
 T(x^3 + x + 1) &= (-1)^3 - 1 + 1 = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{וגם } [-1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ , לכן}$$

$$, [T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כפי שרצינו.

פרק 2

סכומים ישרים ולכסינות

2.1 סכומים ישרים

הגדרה 2.1.1 (סכום ישר). יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל \mathbb{F} ויהיו $V_1, \dots, V_k \leq V$ תת-מרחבים. נזכיר כי

$$V_1 + \dots + V_k := \{v_1 + \dots + v_k \mid \forall i \in [k]: v_i \in V_i\}$$

נגיד שהסכום הזה הוא סכום ישר אם כל $v \in V_1 + \dots + V_k$ ניתן לכתיבה $v = v_1 + \dots + v_k$ בצורה יחידה עבור $v_i \in V_i$. במקרה זה נסמן את הסכום $\bigoplus_{i \in [k]} V_i = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

הערה 2.1.2. באופן שקול, הסכום $V_1 + \dots + V_k$ ישר אם ורק אם $v_1 + \dots + v_k = 0$ עבור $v_i \in V_i$ גורר $v_i = 0$ לכל $i \in [k]$.

טענה 2.1.3. הסכום $\sum_{i \in [k]} V_i := V_1 + \dots + V_k$ ישר אם ורק אם

$$V_i \cap \left(\sum_{j \neq i} V_j \right) = \{0\}$$

לכל $i \in [k]$.
את המקרה $k = 2$ ראינו בהרצאה, והטענה הכללית נובעת באינדוקציה.

הגדרה 2.1.4 (שרשרות סדורות). תהיינה

$$\begin{aligned} A_1 &= (v_{1,1}, \dots, v_{1,\ell_1}) \\ A_2 &= (v_{2,1}, \dots, v_{2,\ell_2}) \\ &\vdots \\ A_k &= (v_{k,1}, \dots, v_{k,\ell_k}) \end{aligned}$$

קבוצות סדורות. נגדיר את השרשרות שלהן

$$A_1 \cup \dots \cup A_k := (v_{1,1}, \dots, v_{1,\ell_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,\ell_2}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,\ell_k})$$

זאת הקבוצה הסדורה שהיא שרשרת איברי הקבוצות הסדורות A_1, \dots, A_k לפי הסדר.

טענה 2.1.5. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהיו V_1, \dots, V_k תת-מרחבים של V . התנאים הבאים שקולים.

1. $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

2. לכל בחירת בסיסים B_i של V_i הקבוצה הסדורה $B_1 \cup \dots \cup B_k$ היא בסיס של V .

3. קיימים בסיסים B_i של V_i כך שהקבוצה הסדורה $B_1 \cup \dots \cup B_k$ היא בסיס של V .

4. $\dim V = \sum_{i \in [k]} \dim V_i$ וגם

$$\dim V = \sum_{i \in [k]} \dim(V_i)$$

תרגיל 2.1. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} , ונזכיר כי $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקראת הטלה אם $P^2 = P$.

1. תהי $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי $V = \ker(P) \oplus \text{Im}(P)$.

2. הראו כי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה אם ורק אם קיים בסיס B של V עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון. 1. יהי $v \in V$. מתקיים $v = (v - P(v)) + P(v)$ כאשר $P(v) \in \text{Im}(P)$. כמו כן,

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$$

ולכן $v - P(v) \in \ker(P)$ ונקבל כי $V = \ker(P) + \text{Im}(P)$.

כעת, אם $v \in \ker(P) \cap \text{Im}(P)$ בפרט $v \in \text{Im}(P)$ ולכן יש $u \in V$ עבורו $P(u) = v$. אז

$$v = P(u) = P^2(u) = P(P(u)) = P(v) = 0$$

ולכן $\ker(P) \cap \text{Im}(P) = 0$ ונקבל כי הסכום ישר.

2. נניח כי T הטלה. במקרה זה $V = \ker(T) \oplus \text{Im}(T)$. עבור בסיסים

$$C = (c_1, \dots, c_m) \\ D = (d_{m+1}, \dots, d_\ell)$$

של $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$ בהתאמה, נקבל כי $C \cup D$ בסיס של V . לכל $c_i \in C$ מתקיים $T(c_i) = 0$, לכן $\dim(\ker(T))$ העמודות הראשונות של $[T]_{C \cup D}$ הן עמודות אפסים. לכל $d_i \in D$ יש $u_i \in V$ עבורו

$$d_i = T(u_i) = T^2(u_i) = T(T(u_i)) = T(d_i)$$

לכן

$$[T(d_i)]_{C \cup D} = [d_i]_{C \cup D} = e_i$$

ולכן העמודה ה- i עבור $i \geq m$ היא e_i , ונקבל את הנדרש.

להיפך, נניח שקיים בסיס $B = (v_1, \dots, v_n)$ כנ"ל. אז $[T]_B^2 = [T]_B^2 = [T]_B$ ולכן $T^2 = T$ ונקבל כי T הטלה.

הגדרה 2.1.6 (משלים ישר). יהי V מרחב וקטורי ויהי $U \leq V$ תת-מרחב. משלים ישר W של U הוא תת-מרחב של V עבורו $V = U \oplus W$.

תרגיל 2.2. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה \mathbb{F} ויהי $U \leq V$ תת-מרחב עם בסיס B . יהי C בסיס של V .

1. הראו שניתן להשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ- C .

2. הסיקו שקיים משלים ישר W של U עם בסיס של וקטורים מ- C .

פתרון. 1. נסמן $n := \dim_{\mathbb{F}}(V)$ ונזכיר את הטענה באינדוקציה על $|B|$. $m = n - |B|$.

עבור $m = 0$ מתקיים $|B| = n$ ולכן $U = V$. נניח שהטענה נכונה לכל $k < m$ ונזכיר אותה עבור m .

אם $C \subseteq U$, מתקיים

$$V = \text{Span}_{\mathbb{F}}(C) \subseteq \text{Span}_{\mathbb{F}}(U) = U$$

ולכן $V = U$ בסתירה לכך שהמימדים שונים. לכן, קיים $c \in C \setminus U$. אז $B \cup (c)$ קבוצה בלתי-תלויה לינארית, כי c אינו צירוף לינארי של הווקטורים הקודמים. נגדיר $U' = \text{Span}_{\mathbb{F}}(B \cup (c))$. אז

$$n - \dim(U') = n - |B| - 1 = m - 1 < m$$

ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה ולקבל שניתן להשלים את $B \cup (c)$ לבסיס $(B \cup (c)) \cup (c_2, \dots, c_m)$ של V , כאשר $c_i \in C$. אז $c, c_2, \dots, c_m \in C$ משלימים את B לבסיס של V .

2. בסימונים של הסעיף הקודם, $B \cup (c, \dots, c_m)$ בסיס של V . נסמן $D = (c, c_2, \dots, c_m)$ וגם $W = \text{Span}_{\mathbb{F}}(D)$. אז $B \cup D$ בסיס של V ולכן

$$V = \text{Span}_{\mathbb{F}}(B) \oplus \text{Span}_{\mathbb{F}}(D) = U \oplus W$$

כנדרש.

תרגיל 2.3. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ ותהינה

$$B = (1 + x, x + x^2) \\ C = (1, x, x^2, x^3)$$

קבוצות סדורות של וקטורים מ- V . יהי $U = \text{Span}(B)$.

1. מיצאו משלים ישר W של U ובסיס עבור W שמורכב מוקטורים ב- C .

2. האם W שמצאתם יחיד? הוכיחו או הפריכו.

פתרון. 1. נשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ- C . נוסיף את $1 \notin U$ כדי לקבל $B' = (1 + x, x + x^2, 1)$.

ואז את $x^3 \notin \text{Span}(B')$ כדי לקבל בסיס $B'' = (1 + x, x + x^2, 1, x^3)$ של V .

נסמן $D = (1, x^3)$ וניקח $W = \text{Span}(D)$. אז $B'' = B \cup D$ בסיס, ולכן $V = U \oplus W$, כנדרש.

2. לא. למשל, יכולנו לקחת $B' = (1 + x, x + x^2, x^2)$ ואז $B'' = (1 + x, x + x^2, x^2, x^3)$. במקרה זה היינו מקבלים משלים ישר $\text{Span}(x^2, x^3)$, ששונה מ- W .

2.2 לכסינות

הגדרה 2.2.1 (אופרטור לכסין). אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא לכסין אם קיים בסיס B של V וקיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ עבורם

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

בסיס B כזה נקרא בסיס מלכסן עבור T , והמטריצה $[T]_B$ נקראת מטריצה אלכסונית.

הגדרה 2.2.2. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. וקטור $v \in V \setminus \{0\}$ נקרא וקטור עצמי של T אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \lambda v$. במקרה זה λ נקרא ערך עצמי של T .

הערה 2.2.3. וקטור עצמי של T אם ורק אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \lambda v$. מתקיים $\text{Span}_{\mathbb{F}}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ ולכן באופן שקול $T(v) \in \text{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ ובאופן שקול $T(\alpha v) = \alpha T(v) \in \text{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}$. לכן, וקטור עצמי של T אם ורק אם $\text{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ הינו T -שבור.

הערה 2.2.4. אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הינו לכסין אם ורק אם קיים בסיס של V שמורכב מוקטורים עצמיים של T .

הגדרה 2.2.5 (מרחב עצמי). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי λ ערך עצמי של T . המרחב העצמי של T עם הערך λ הוא

$$V_{\lambda} := \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \text{Id}_V - T)$$

הגדרה 2.2.6 (פולינום אופייני). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הפולינום האופייני של T הוא

$$p_T(x) := \det(x \text{Id}_V - T)$$

הערה 2.2.7. בפועל, נסתכל בדרך כלל על פולינום אופייני של מטריצה, כיוון שצריך לבחור בסיס כדי לחשב את הדטרמיננטה. ראינו כי הדטרמיננטה לא תלויה בבחירת הבסיס, ולכן $p_T(x) = p_{[T]_B}(x)$ לכל בסיס B של V , כאשר $p_A(x) = \det(xI - A)$.

מסקנה 2.2.8. איבר $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\ker(\lambda \text{Id}_V - T) \neq 0$, אם ורק אם $p_T(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_V - T) = 0$.

כלומר, הערכים העצמיים של T הם השורשים של p_T .

הערה 2.2.9. כיוון שלכל פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ יש שורש, לכל $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ יש ערך עצמי.

הגדרה 2.2.10 (ריבוי אלגברי). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי האלגברי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא הריבוי שלו כשורש של p_T . נסמן $r_a(\lambda)$.

הגדרה 2.2.11 (ריבוי גיאומטרי). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא $r_g(\lambda) := \dim V_{\lambda}$.

הערה 2.2.12. מתקיים תמיד $r_a(\lambda) \leq r_g(\lambda)$.

הגדרה 2.2.13. תהי $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ ויהי $T = T_A$ אופרטור כפל ב- A משמאל (כלומר, $T(v) = Av$). אם T לכסין, קיים בסיס B עבורו $D := [T]_B$ אלכסונית. אז

$$\begin{aligned} A &= [T]_E \\ &= [\text{Id} \circ T \circ \text{Id}]_E \\ &= M_E^B [T]_B M_B^E \\ &= M_E^B D (M_E^B)^{-1} \end{aligned}$$

ואם נסמן $P = M_E^B$ נקבל כי זאת מטריצה הפיכה עבורה $P^{-1}AP = D$. $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה אם קיימת $P \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $P^{-1}AP$ אלכסונית.

2.3 מרחבים שמורים

נרצה להבין אופרטורים לינאריים דרך הבנה של צמצום שלהם לתת-מרחבים קטנים יותר. אם $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, נוכל תמיד לצמצם את המקור כדי לקבל העתקה לינארית $T|_W : W \rightarrow V$, אבל לא נוכל ללמוד מספיק כאשר הצמצום אינו אופרטור. לכן נרצה לצמצם גם את הטווח, מה שמוביל להגדרה הבאה.

הגדרה 2.3.1 (מרחב שמור). יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $U \leq V$. נגיד כי U הינו T -שמור (או T -אינווריאנטי אם $T(U) \subseteq U$).

הגדרה 2.3.2. במקרה ש- W מרחב T -שמור, נוכל להסתכל על הצמצום $T|_W : W \rightarrow W$ שמוגדר על ידי $T|_W(w) = T(w)$.

הערה 2.3.3. שימו לב שהסימון הוא אותו סימון כמו הצמצום של המקור, אך במסגרת הקורס צמצום אופרטורים יתייחס לזה שבהגדרה אלא אם כן יצוין מפורשות אחרת.

תרגיל 2.4. יהיו V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} , יהיו $P, T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כאשר P איזומורפיזם. יהי $W \leq V$. הראו כי W הינו T -שמור אם ורק אם $P^{-1}(W)$ הינו $P^{-1} \circ T \circ P$ -שמור.

פתרון. נניח כי W הינו T -שמור ויהי $v \in P^{-1}(W)$. נרצה להראות כי $P^{-1} \circ T \circ P(v) \in P^{-1}(W)$. יהי $w \in W$ עבורו $v = P^{-1}(w)$ אז

$$\begin{aligned} P^{-1} \circ T \circ P(v) &= P^{-1} \circ T \circ P \circ P^{-1}(w) \\ &= P^{-1} \circ T(w) \end{aligned}$$

כאשר $T(w) \in W$ הוא T -שמור. נקבל כי $P^{-1} \circ T \circ P(v) \in P^{-1}(W)$. נגדיר $S = P^{-1} \circ T \circ P$ וגם $Q = P^{-1}$. אז $Q = P^{-1}$ הינו S -שמור. נניח כי $U := P^{-1}(W)$ הינו S -שמור. נגדיר $Q = P^{-1}$ וגם $T = Q^{-1} \circ T \circ Q$ הינו T -שמור. כלומר $(Q^{-1} \circ T \circ Q)$ הינו T -שמור.

תרגיל 2.5. יהי \mathbb{C} כמרחב וקטורי ממשי ויהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned}$$

מצאו את התת-מרחבים ה- T -שמורים של \mathbb{C} והסיקו כי T אינו לכסין מעל \mathbb{R} .

פתרון. $\mathbb{C}, \{0\}$ תת-מרחבים T -שמורים.

נניח כי $W \leq \mathbb{C}$ מרחב T -שמור נוסף. אז $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$ ולכן יש

$$z_0 \in \mathbb{C}^\times := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

עבורו $W = \text{Span}\{z_0\}$. נקבל $T(z_0) \in W$ לכן $T(z_0) = cz_0$ עבור $c \in \mathbb{R}$. אבל $cz_0 = iz_0$ גורר $c = i$ בסתירה. תת-מרחבים T -שמורים 1-מימדיים של \mathbb{C} הם $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור v וקטור עצמי של T . לכן אין ל- T וקטורים עצמיים, ולכן הוא אינו לכסינה מעל \mathbb{R} .

סימון 2.3.4. עבור מטריצות ריבועיות A_1, \dots, A_k נסמן

$$A_1 \oplus \dots \oplus A_k = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$$

תרגיל 2.6. יהי $V = \mathbb{C}^n$ ותהי

$$T: V \rightarrow V$$

עם

$$[T]_E = \lambda_1 I_{m_1} \oplus \dots \oplus \lambda_k I_{m_k}$$

עבור $\lambda_i \neq \lambda_j$ לכל $i \neq j$. נסמן $n_i = m_1 + \dots + m_{i-1} + 1$. מצאו את כל התת-מרחבים ה- T -שמורים של V .

פתרון. ראשית, אם $W \leq V_i := \text{Span}(e_{n_i}, \dots, e_{n_i+m_i-1})$, נקבל כי $T(w) = \lambda_i w \in W$ לכל $w \in W$. לכן כל תת-מרחב כזה הינו T -שמור. גם סכום של תת-מרחבים כאלה יהיה T -שמור כי אם $v_i \in W_i := W \cap V_i$ לכל $i \in [k]$ אז

$$T(v_1 + \dots + v_k) = T(v_1) + \dots + T(v_k)$$

כאשר $T(v_i) \in W_i$ וגם $T(v_i) = \lambda_i v_i \in V_i$. כלומר $T(v_i) \in W_i$. נראה שאלו כל האפשרויות לתת-מרחבים שמורים. ראינו בהרצאה כי אם W הינו T -שמור, אז $T|_W$ הינו לכסי. לכן, סכום ישר של המרחבים העצמיים של $T|_W$. לכל ערך עצמי λ , המרחב העצמי W_λ של $T|_W$ הוא החיתוך $V_\lambda \cap W$ כאשר V_λ המרחב העצמי של T . כיוון שעבור אופרטור לכסין המרחב שווה לסכום ישר של המרחבים העצמיים, נקבל כי

$$W = \bigoplus_{i \in [k]} W_{\lambda_i} = \bigoplus_{i \in [k]} W \cap V_{\lambda_i}$$

כנדרש.

הגדרה 2.3.5. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל m עם ערך עצמי λ בתור

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \text{Mat}_m(\mathbb{F})$$

הגדרה 2.3.6 (אופרטור אי-פריד). אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא אי-פריד אם לכל $U, W \leq V$ שהינם T -שמורים ועבורם $U \oplus W = V$, בהכרח $U = \{0\}$, $W = V$ או $U = V$, $W = \{0\}$.

תרגיל 2.7. 1. יהי $T = T_{J_n(0)} \in \text{End}(\mathbb{F}^n)$. מיצאו את המרחבים ה- T שמורים של \mathbb{F}^n .

2. יהי $N \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. הראו שהמרחבים ה- S שמורים של V הם המרחבים ה- $(N + \lambda \text{Id}_V)$ שמורים של V .

3. יהי $S = T_{J_n(\lambda)} \in \text{End}_{\mathbb{F}^n}$. הסיקו מה המרחבים ה- S שמורים של \mathbb{F}^n .

4. הראו כי S הינו אי-פריד.

פתרון. 1. נשים לב כי

$$\begin{aligned} \{0\} \\ \ker(T) &= \text{Span}(e_1) \\ \text{Im}(T) &= \text{Span}(e_1, \dots, e_{n-1}) \\ V &= \text{Span}(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

כולם T -שמורים, כיוון שמרחב האפס, הגרעין, התמונה, והמרחב כולו תמיד T -שמורים. גם, מתקיים

$$\begin{aligned} \forall i > 1: T(e_i) &= e_{i-1} \in \text{Span}(e_1, \dots, e_i) \\ T(e_1) &= 0 \end{aligned}$$

ולכן כל מרחב מהצורה $\text{Span}(e_1, \dots, e_i)$ עבור $i \in \{0, \dots, n\}$ הינו T -שמור. נרצה להראות שהמרחבים ה- T שמורים הם בדיוק אלו מהצורה הזאת.

יהי $W \leq \mathbb{F}^n$ מרחב T -שמור, ויהי $k \in \{0, \dots, n\}$ המקסימלי עבורו $\text{Span}(e_1, \dots, e_k) \subseteq W$ (יש כזה k כיוון שעבור $k=0$ נקבל $\{0\} \subseteq W$). נרצה להראות כי $W = \text{Span}(e_1, \dots, e_k)$.
אחרת, קיים וקטור $v = \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i e_i \in W$ עם $\ell > k$ וגם $\alpha_\ell \neq 0$. אם $\ell = k+1$ נקבל כי $\alpha_i e_i \in W$ לכל $i < \ell$ ולכן

$$\alpha_\ell e_\ell = v - \sum_{i \in [\ell-1]} \alpha_i e_i \in W$$

וכיוון ש- $\alpha_\ell \neq 0$ אז $e_{k+1} = e_\ell \in W$. במקרה זה $e_1, \dots, e_{k+1} \in W$ ולכן $\text{Span}(e_1, \dots, e_{k+1}) \subseteq W$.
בסתירה להנחה.

באופן כללי, מתקיים $T^i(v) \in W$ לכל i . כדי שיתקיים $T^i(e_\ell) = e_{k+1}$ צריך לקחת $\ell - i = k+1$ כלומר $i = \ell - (k+1)$ או

$$\begin{aligned} T^{\ell-(k+1)}(v) &= \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i T^{\ell-(k+1)}(e_i) \\ &= \sum_{i=\ell-k}^{\ell} \alpha_i e_{i-\ell+k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_{j+\ell-k-1} e_j \in W \end{aligned}$$

ונקבל את הנדרש מהמקרה הקודם $\ell = k+1$.

2. יהי $W \leq V$ תת-מרחב N -שמור. לכל $w \in W$ מתקיים

$$(N + \lambda \text{Id}_V)(w) = N(w) + \lambda w \in W$$

כיוון ש- $N(w), \lambda w \in W$ לכן W הינו $N + \lambda \text{Id}_V$ -שמור.

אם $W \leq V$ תת-מרחב $(N + \lambda \text{Id}_V)$ -שמור, נקבל מהכיוון הראשון שהוא $(N + \lambda \text{Id}_V) + (-\lambda) \text{Id}_V$ -שמור, כלומר N -שמור.

3. מהסעיף הקודם, נקבל כי המרחבים ה- S שמורים הם המרחבים ה- T -שמורים, שהינם אלו מהצורה $\text{Span}_{\mathbb{F}}(e_1, \dots, e_i)$ עבור $i \in \{0, \dots, n\}$.

4. נניח כי יש תת-מרחבים S -שמורים W_1, W_2 עבורם $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$. מהסעיף הקודם, יש $i, j \in \{0, \dots, n\}$ עבורם

$$\begin{aligned} W_1 &= \text{Span}(e_1, \dots, e_i) \\ W_2 &= \text{Span}(e_1, \dots, e_j) \end{aligned}$$

כיוון ש- $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$, בהכרח $e_n \in W_1 + W_2$ ולכן $i=n$ או $j=n$. במקרה הראשון, $W_1 = \mathbb{F}^n, W_2 = \{0\}$ ובמקרה השני $W_2 = \mathbb{F}^n, W_1 = \{0\}$ ובכל מקרה הפירוק הינו טריוויאלי.

פתרון. עבור מטריצה $A = (a_{i,j}) \in \text{Mat}_{n,m}$ נגדיר

$$\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})$$

את המטריצה שמקדמיה הם המספרים הצמודים לאלו ב- A . נשים לב כי עבור שתי מטריצות $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ ו- $B \in \text{Mat}_{n,\ell}(\mathbb{C})$ מתקיים

$$\begin{aligned} (\overline{AB})_{i,j} &= \overline{\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}} \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k} b_{k,j}} \\ &= (\overline{|A|} \overline{|B|})_{i,j} \end{aligned}$$

ולכן $\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}$

1. תת-מרחב T_A -שמור ממימד 1 הוא מהצורה $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור וקטור עצמי v של T_A . לכן מההנחה, אין ל- T_A וקטורים עצמיים.

אבל, אפשר לחשוב על A כעל מטריצה ב- $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ שנסמנה \tilde{A} . אז ל- $T_{\tilde{A}} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ יש וקטור עצמי כאופרטור מעל \mathbb{C} . יהי $v \in \mathbb{C}^n$ וקטור עצמי של $T_{\tilde{A}}$ עם ערך עצמי $\lambda = \alpha + i\beta$, ונכתוב

$$v = \begin{pmatrix} u_1 + iw_1 \\ \vdots \\ u_n + iw_n \end{pmatrix} = u + iw$$

כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ וקטורים עם מקדמים ממשיים. נוכל לחשוב עליהם כחיים ב- \mathbb{R}^n . אז

$$\begin{aligned} Au + iAw &= A(u + iw) \\ &= Av \\ &= \lambda v \\ &= (\alpha + i\beta)(u + iw) \\ &= \alpha u + \alpha iw + \beta iu - \beta w \\ &= (\alpha u - \beta w) + i(\alpha w + \beta u) \end{aligned}$$

כאשר $Au, Aw \in \mathbb{R}^n$. אז, נוכל להשוות מקדמים ולקבל

$$\begin{aligned} T_A(u) &= Au = \alpha u - \beta w \in \text{Span}(u, w) \\ T_A(w) &= Aw = \alpha w + \beta u \in \text{Span}(u, w) \end{aligned}$$

לכן $\text{Span}(u, w)$ הינו תת-מרחב L_A -שומר של \mathbb{R}^n .

2. אם λ ממשי אין מה להוכיח כי $\lambda = \bar{\lambda}$. נניח אם כן כי $\lambda = \alpha + i\beta$ עבור $\beta \neq 0$. נסמן ב- $v = u + iw$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ , כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ עם מקדמים ממשיים. אז

$$\bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

ולכן \bar{v} וקטור עצמי של A עם ערך עצמי $\bar{\lambda}$, כנדרש.