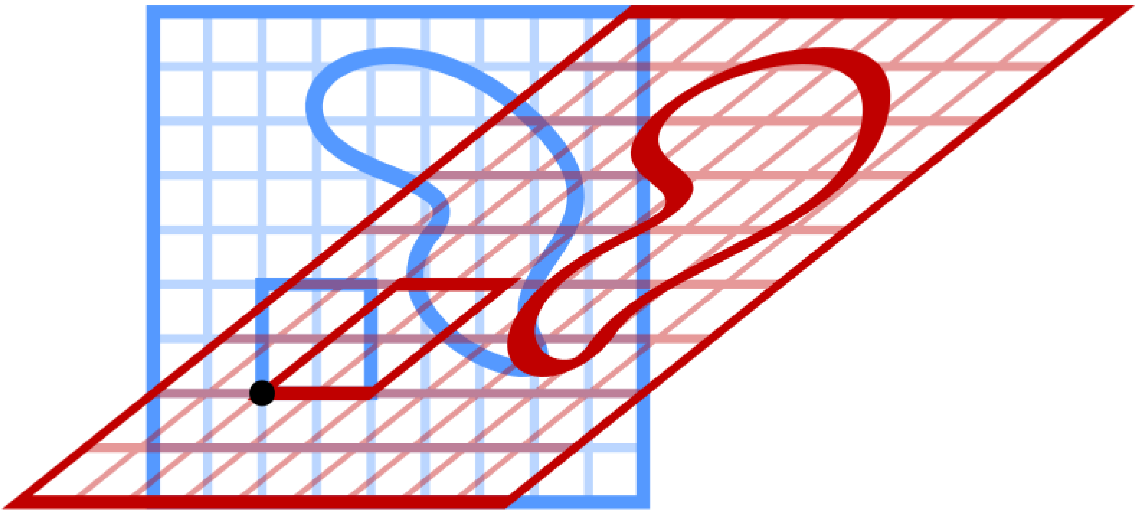

אלגברה ב' (104168)

חורף 2022-2023

רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־21 בנובמבר 2022

תוכן העניינים

חלק I

חלק ראשון - מרחבים שמורים

פרק 1

מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V ויהי $v\in V$. וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B הוא הוקטור $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$v=\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i:=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n.$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\begin{aligned}\rho_B\colon V&\to\mathbb{F}^n\\ v&\mapsto[v]_B\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V,W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B,C בהתאמה, ונסמן

$$B=(v_1,\ldots,v_n).$$

נסמן גם $n:=\dim(V)$ ו־$m:=\dim(W)$. עבור $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ נגדיר

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}|& &|\\ [T(v_1)]_C&\cdots&[T(v_n)]_C\\ |& &|\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F}).$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי $A\in\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E=(e_1,\ldots,e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אז:

(i) לכל $i\in[m]$ מתקיים כי Ae_i העמודה ה־i של A.

(ii) לכל $B=\begin{pmatrix}|& &|\\ b_1&\cdots&b_\ell\\ |& &|\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_{n\times\ell}(\mathbb{F})$ אז $AB=\begin{pmatrix}|& &|\\ Ab_1&\cdots&Ab_\ell\\ |& &|\end{pmatrix}$.

הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\begin{aligned}\eta_C^B\colon\ \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,B)&\to\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})\\ T&\mapsto[T]_C^B\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי $T\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ ויהיו $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V ו־C בסיס של W. אז

$$[T(v)]_C=[T]_C^B[v]_B$$

לכל $v\in V$.

הוכחה. עבור $v = v_i$ מתקיים $[T]_C^B [v_i]_B = [T]_C^B e_i$ וזאת העמודה ה־i של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה. אם $v = \sum_{i\in[n]} \alpha_i v_i$ נקבל מלינאריות של T ושל ρ_B כי

$$\begin{aligned}
[T(v)]_C &= \left[T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right)\right]_C \\
&= \left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i T(v_i)\right]_C \\
&= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T(v_i)]_C \\
&= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\
&= [T]_C^B\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i [v_i]_B\right) \\
&= [T]_C^B\left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right]_B \\
&= [T]_C^B [v]_B
\end{aligned},$$

כנדרש. ■

סימון 1.1.7. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי V ואם $T \in \mathrm{End}(V)$, נסמן $[T]_B := [T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B.

סימון 1.1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים B, C. נסמן $M_C^B := [\mathrm{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.9. אם $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, נסמן

$$\begin{aligned}
T_A \colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\
v &\mapsto Av
\end{aligned}.$$

יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned}
T \colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\
p(x) &\mapsto p(x+1)
\end{aligned}$$

ויהי $B = (1, x, x^2, x^3)$ בסיס של V. כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $[T(x^i)]_B$ עבור $i \in \{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(x) &= x + 1 = 1 + x \\
T(x^2) &= (x+1)^2 = 1 + 2x + x^2 \\
T(x^3) &= (x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
[T(1)]_B &= e_1 \\
[T(x)]_B &= e_1 + e_2 \\
[T(x^2)]_B &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\
[T(x^3)]_B &= e_1 + 3e_2 + 3e_3 + e_4
\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

יהי $V=\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, תהי

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ A &\mapsto \frac{1}{2}\left(A-A^t\right) \end{aligned}$$

ויהי

$$E=(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}) \coloneqq \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V. כיתבו את $[T]_E$.

הוכחה. כמו מקודם, נחשב את $[T(E_{i,j})]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$\begin{aligned} T(E_{1,1}) &= \frac{1}{2}(E_{1,1}-E_{1,1})=0 \\ T(E_{1,2}) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}E_{1,2}-\frac{1}{2}E_{2,1} \\ T(E_{2,1}) &= \frac{1}{2}(E_{2,1}-E_{1,2})=\frac{1}{2}E_{2,1}-\frac{1}{2}E_{1,2}, T(E_{2,2})=\frac{1}{2}(E_{2,2}-E_{2,2})=0 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} [T(E_{1,1})]_E &= 0 \\ [T(E_{1,2})]_E &= \frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_3 \\ [T(E_{2,1})]_E &= -\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3 \\ [T(E_{2,2})]_E &= 0 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_E=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

כנדרש. ■

יהי $V=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B=(f_1,f_2)$ כאשר

$$\begin{aligned} f_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= x \\ f_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= y, \end{aligned}$$

ותהי

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

מיצאו $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ עבורו $[T]_B=A$.

פתרון. מתקיים

$$[T]_B=\begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$[T(f_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[T(f_2)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

אז

$$T(f_1) = f_1 + 2f_2$$
$$T(f_2) = 3f_1 + 4f_2.$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}(T(f))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(f_1 + 2f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta(3f_1 + 4f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x+2y) + \beta(3x+4y)\end{aligned}.$$

טענה 1.1.10. תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$. אז $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A-B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־i של $A - B$, שהינה $(A-B)e_i$, שווה ל־0. לכן $A - B = 0$. ■

טענה 1.1.11. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C, D בהתאמה, ותהיינה

$$S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$$
$$T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W).$$

אז

$$[T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B.$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned}[T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B\end{aligned}$$

לכן

$$[T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B,$$

כנדרש. ■

טענה 1.1.12. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ חד־חד ערכית. יהיו

$$B = (v_1, \ldots, v_n)$$
$$C = (u_1, \ldots, u_n)$$

בסיסים של V ויהיו

$$B' = (T(v_1), \ldots, T(v_n))$$
$$C' = (T(u_1), \ldots, T(u_n)).$$

אז B', C' בסיסים של $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ וגם $M_C^B = M_{C'}^{B'}$.

פתרון. כיוון ש־T חד־חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T\colon V\xrightarrow{\sim}\mathrm{Im}\left(T\right)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן B',C' בסיסים.
כעת, לכל $i\in[n]$ נכתוב

$$v_i=\sum_{j\in[n]}\alpha_{i,j}u_i$$

ואז

$$M_C^Be_i=\left[v_i\right]_C=\begin{pmatrix}\alpha_{i,1}\\ \vdots\\ \alpha_{i,n}\end{pmatrix}.$$

כמו כן,

$$\begin{aligned}T\left(v_i\right)&=T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_{i,j}u_j\right)\\&=\sum_{i\in[n]}\alpha_{i,j}T\left(u_j\right)\end{aligned}$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'}e_i=\left[T\left(v_i\right)\right]_{C'}=\begin{pmatrix}\alpha_{i,1}\\ \vdots\\ \alpha_{i,n}\end{pmatrix}.$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

תהי $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס B של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_E^B$.
2. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_C^E$.
3. יהי B בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A=M_C^B$.
4. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ איזומורפיזם ויהי $B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ בסיס של V. מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B=A$.

פתרון. 1. אם $B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B=\begin{pmatrix}|&&|\\ \left[v_1\right]_E&\cdots&\left[v_n\right]_E\\ |&&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&&|\\ v_1&\cdots&v_n\\ |&&|\end{pmatrix}.$$

לכן ניקח את $\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ להיות עמודות A, לפי הסדר.

2. לכל $v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^CM_C^Ev=M_E^C\left[v\right]_C=\left[v\right]_E=v$$

ולכן $M_C^E=\left(M_E^C\right)^{-1}$. אם ניקח $C=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ כאשר u_i העמודה ה־i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_E^C=A^{-1}$ ולכן $M_C^E=\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$. כלומר ניקח, $u_i=A^{-1}e_i$.

3. מתקיים $M_C^B=M_C^EM_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $A=M_C^EM_E^B$ או במילים אחרות $M_C^E=A\left(M_E^B\right)^{-1}=AM_B^E$. מהסעיף הקודם, נרצה $C=\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ כאשר u_i העמודה ה־i של $M_E^BA^{-1}=\left(AM_B^E\right)^{-1}$, כלומר

$$u_i=M_E^BA^{-1}e_i.$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]^B_{C'} = M^B_{C'}[T]^B_B$ לכן נרצה $A = M^B_C [T]^B_B$. כיוון ש־T איזומורפיזם, המטריצה $[T]^B_B$ הפיכה, ולכן נרצה $M^B_C = A\left([T]^B_B\right)^{-1}$. כעת, אם $C = (v_1, \dots, v_n)$ נקבל כי $M^B_C = M^E_{\hat{C}}$ כאשר $\hat{C} = ([v_1]_B, \dots, [v_n]_B)$. כלומר, נחפש $\hat{C}$ עבורו $M^E_{\hat{C}} = A[T]^{-1}_B$. לפי הסעיף השני, נרצה $\hat{C} = (u_1, \dots, u_n)$ עבור

$$u_i = \left(A[T]^{-1}_B\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i.$$

לכן

$$v_i = \rho^{-1}_B\left([T]_B A^{-1} e_i\right).$$

יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned},$$

יהי $E = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ הבסיס הסטנדרטי ותהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו $A = [T]^E_C$.

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C} = (u_1, \dots, u_4)$ כאשר $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$. חישבנו ב־1.2 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2 = I$ כלומר $A^{-1} = A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} Ae_1 &= e_2 \\ Ae_2 &= e_1 \\ Ae_3 &= e_4 \\ Ae_4 &= e_3 \end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1 = [T]_E A^{-1} e_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [T]_E A^{-1} e_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = [T]_E A^{-1} e_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = [T]_E A^{-1} e_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

כלומר

$$\hat{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right),$$

ולבסוף

$$C=(v_1,v_2,v_3,v_4)\coloneqq\left(1+x,1,1+3x+3x^2+x^3,1+2x+x^2\right).$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן A. מתקיים

$$\begin{aligned}T(1)&=1=v_2\\T(x)&=x+1=v_1\\T\left(x^2\right)&=(x+1)^2=1+2x+x^2=v_4\\T\left(x^3\right)&=(x+1)^3=1+3x+3x^2+x^3=v_3\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}[T]_C^E&=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ [T(1)]_C&[T(x)]_C&\left[T\left(x^2\right)\right]_C&\left[T\left(x^3\right)\right]_C\\ |&|&|&|\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ [v_2]_C&[v_1]_C&[v_4]_C&[v_3]_C\\ |&|&|&|\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ e_2&e_1&e_4&e_3\\ |&|&|&|\end{pmatrix}\\&=A\end{aligned}$$

כנדרש.

1.2 גרעין ותמונה

הגדרה 1.2.1 (גרעין של העתקה לינארית). יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T\in\operatorname{Hom}(V,W)$. הגרעין של T הוא

$$\ker(T)\coloneqq\{v\in V\mid T(v)=0\}.$$

הגדרה 1.2.2 (תמונה של העתקה לינארית). יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T\in\operatorname{Hom}(V,W)$. התמונה של T היא

$$\operatorname{Im}(T)\coloneqq\{T(v)\mid v\in V\}.$$

הגדרה 1.2.3 (דרגה של אופרטור לינארי). יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T\in\operatorname{Hom}(V,W)$. הדרגה של T היא

$$\operatorname{rank}(T)\coloneqq\dim(\operatorname{Im}(T)).$$

הערה 1.2.4. אם V,W סוף־מימדיים עם בסיסים B,C בהתאמה, אז

$$\operatorname{rank}(T)=\operatorname{rank}\left([T]_C^B\right).$$

משפט 1.2.5 (משפט המימדים). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T\in\operatorname{End}(V)$. אז

$$\dim V=\dim\operatorname{Im}(T)+\dim\ker(T).$$

יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $v\in V$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[v]_B=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את (v) לבסיס $B_0=(v_1,\ldots,v_n)$ של V כאשר $v_1=v$. תהי

$$A\coloneqq\begin{pmatrix}1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F}).$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B=(u_1,\ldots,u_n)$ של V עבורו $M_B^{B_0}=A$. נקבל

$$\begin{aligned}[v]_B&=[\mathrm{Id}_V\,v]_B\\ &=[\mathrm{Id}_V]_B^{B_0}[v]_{B_0}\\ &=A\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת

$$u_i=\rho_{B_0}^{-1}\left([\mathrm{Id}]_B A^{-1}e_i\right)=\rho_{B_0}^{-1}\left(A^{-1}e_i\right).$$

יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $\operatorname{rank}T=1$ אם ורק אם יש בסיסים B,C ל־V כך שכל מקדמי $[T]_C^B$ הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים B,C כמתואר. אז $\operatorname{rank}T=\operatorname{rank}[T]_C^B=1$.
בכיוון השני, נניח כי $\operatorname{rank}T=1$. כלומר, $\dim\operatorname{Im}T=1$. ממשפט המימדים מתקיים $\dim V=\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T$, לכן

$$\dim\ker T=\dim V-\dim\operatorname{Im}T=\dim V-1.$$

יהי $n\coloneqq\dim V$ ויהי

$$\tilde{B}\coloneqq(u_1,\ldots,u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי w וקטור פורש של $\operatorname{Im}T$ ויהי C בסיס של V כך שמתקיים $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$, שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי $v\coloneqq T^{-1}(w)$, ואז $(v,u_1,\ldots,u_{n-1})$ בלתי־תלויים לינארית, כי $v\notin\ker T$. לכן זה בסיס של V. אז גם $B\coloneqq(v,v+u_1,\ldots,v+u_{n-1})$ בסיס של V כי המטריצה

$$\begin{pmatrix}| & & |\\ [v]_{\tilde{B}} & \cdots & [v+u_{n-1}]_{\tilde{B}}\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ & 0 & & 1 & 0\\ 0 & & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

הפיכה.

נסמן $C=(w_1,\dots,w_m)$. מתקיים

$$T(v)=w=w_1+\ldots+w_m$$

ולכל $i\in[n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned}T(v+u_i)&=T(v)+T(u_i)\\&=T(v)+0\\&=T(v)\\&=w_1+\ldots+w_m\end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

תהי

$$\begin{aligned}T\colon\mathbb{R}_3[x]&\to\mathbb{R}_3[x]\\.p(x)&\mapsto p(-1)\end{aligned}$$

מיצאו בסיסים B,C של $\mathbb{R}_3[x]$ עבורם

$$.[T]_C^B=A:=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

פתרון. ניקח בסיס $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3):=\left(x+1,x^2-1,x^3+1\right)$ של $\ker(T)$, כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי־תלוייה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי $T\neq 0$). מתקיים $T(x)=-1=:w$ ואז $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(w)$. נחשב בסיס C עבורו $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. נשלים את (v) לבסיס

$$.C_0=(v_1,v_2,v_3,v_4):=\left(-1,x,x^2,x^3\right)$$

המטריצה

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

הפיכה ולכן קיים בסיס $C=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ עבורו $M_C^{C_0}=X$, כשראינו שאז $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. כפי שראינו, ניתן לחשב את C לפי $u_i=\rho_{C_0}^{-1}\left(X^{-1}e_i\right)$. מתקיים

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$u_1=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)=-1-x-x^2-x^3$$
$$u_2=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=x$$
$$u_3=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=x^2$$
$$.u_4=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x^3$$

כלומר, $.C=\left(-1-x-x^2-x^3,x,x^2,x^3\right)$
ניקח $v=x\in V$ כך שיתקיים $T\left(v\right)=-1=w$ ואז

$$B=\left(v,v+b_1,v+b_2,v+b_3\right)=\left(x,2x+1,x^2+x-1,x^3+x+1\right)$$

כמו בתרגיל הקודם.
אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}T\left(x\right)&=-1\\T\left(2x+1\right)&=-2+1=-1\\T\left(x^2+x-1\right)&=\left(-1\right)^2-1-1=1-2=-1\\T\left(x^3+x+1\right)&=\left(-1\right)^3-1+1=-1\end{aligned}$$

וגם $[-1]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, לכן

$$,[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

כפי שרצינו.

פרק 2

סכומים ישרים ולכסינות

2.1 סכומים ישרים

הגדרה 2.1.1 (סכום ישר). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $V_1, \ldots, V_k \leq V$ תת־מרחבים. נזכיר כי

$$V_1 + \ldots + V_k \coloneqq \{v_1 + \ldots + v_k \mid \forall i \in [k] \colon v_i \in V_i\}.$$

נגיד שהסכום הזה הוא סכום ישר אם כל $v \in V_1 + \ldots + V_k$ ניתן לכתיבה $v = v_1 + \ldots + v_k$ בצורה יחידה עבור $v_i \in V_i$. במקרה זה נסמן את הסכום $\bigoplus_{i \in [k]} V_i = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.

הערה 2.1.2. באופן שקול, הסכום $V_1 + \ldots + V_k$ ישר אם ורק אם $v_1 + \ldots + v_k = 0$ עבור $v_i \in V_i$ גורר $v_i = 0$ לכל $i \in [k]$.

טענה 2.1.3. הסכום $\sum_{i \in [k]} V_i \coloneqq V_1 + \ldots + V_k$ ישר אם ורק אם

$$V_i \cap \left(\sum_{j \neq i} V_j \right) = \{0\}$$

לכל $i \in [k]$.
את המקרה $k = 2$ ראינו בהרצאה, והטענה הכללית נובעת באינדוקציה.

הגדרה 2.1.4 (שרשור קבוצות סדורות). תהיינה

$$\begin{aligned} A_1 &= (v_{1,1}, \ldots, v_{1,\ell_1}) \\ A_2 &= (v_{2,1}, \ldots, v_{2,\ell_2}) \\ &\vdots \\ A_k &= (v_{k,1}, \ldots, v_{k,\ell_k}) \end{aligned}$$

קבוצות סדורות. נגדיר את השרשור שלהן

$$A_1 \cup \ldots \cup A_k \coloneqq (v_{1,1}, \ldots, v_{1,\ell_1}, v_{2,1}, \ldots, v_{2,\ell_2}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,\ell_k}).$$

זאת הקבוצה הסדורה שהיא שרשור איברי הקבוצות הסדורות $A_1, \ldots, A_k$ לפי הסדר.

טענה 2.1.5. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהיו $V_1, \ldots, V_k$ תת־מרחבים של V. התנאים הבאים שקולים.

1. $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.
2. לכל בחירת בסיסים B_i של V_i הקבוצה הסדורה $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ היא בסיס של V.
3. קיימים בסיסים B_i של V_i כך שהקבוצה הסדורה $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ היא בסיס של V.
4. $V = \sum_{i \in [k]} V_i$ וגם

$$\dim V = \sum_{i \in [k]} \dim (V_i).$$

יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונזכיר כי $P\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקראת הטלה אם $P^2=P$.

1. תהי $P\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי $V=\ker(P)\oplus\operatorname{Im}(P)$.
2. הראו כי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה אם ורק אם קיים בסיס B של V עבורו

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&0&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix}.$$

פתרון. 1. יהי $v\in V$. מתקיים $v=(v-P(v))+P(v)$ כאשר $P(v)\in\operatorname{Im}(P)$. כמו כן,

$$P(v-P(v))=P(v)-P^2(v)=P(v)-P(v)=0$$

ולכן $v-P(v)\in\ker(P)$ ונקבל כי $V=\ker(P)+\operatorname{Im}(P)$.

כעת, אם $v\in\ker(P)\cap\operatorname{Im}(P)$ בפרט $v\in\operatorname{Im}(P)$ ולכן יש $u\in V$ עבורו $P(u)=v$. אז

$$v=P(u)=P^2(u)=P(P(u))=P(v)=0$$

ולכן $\ker(P)\cap\operatorname{Im}(P)=0$ ונקבל כי הסכום ישר.

2. נניח כי T הטלה. במקרה זה $V=\ker(T)\oplus\operatorname{Im}(T)$. עבור בסיסים

$$C=(c_1,\dots,c_m)$$
$$D=(d_{m+1},\dots,d_\ell)$$

של $\operatorname{Im}(T),\ker(T)$ בהתאמה, נקבל כי $C\cup D$ בסיס של V. לכל $c_i\in C$ מתקיים $T(c_i)=0$, לכן $\dim(\ker(T))$ העמודות הראשונות של $[T]_{C\cup D}$ הן עמודות אפסים. לכל $d_i\in D$ יש $u_i\in V$ עבורו

$$d_i=T(u_i)=T^2(u_i)=T(T(u_i))=T(d_i),$$

לכן

$$[T(d_i)]_{C\cup D}=[d_i]_{C\cup D}=e_i$$

ולכן העמודה ה־i עבור $i\geq m$ היא e_i, ונקבל את הנדרש.

להיפך, נניח שקיים בסיס $B=(v_1,\dots,v_n)$ כנ"ל. אז $\left[T^2\right]_B=[T]_B^2=[T]_B$ ולכן $T^2=T$ ונקבל כי T הטלה.

הגדרה 2.1.6 (משלים ישר). יהי V מרחב וקטורי ויהי $U\leq V$ תת־מרחב. משלים ישר W של U הוא תת־מרחב של V עבורו $V=U\oplus W$.

יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $U\leq V$ תת־מרחב עם בסיס B. יהי C בסיס של V.

1. הראו שניתן להשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ־C.
2. הסיקו שקיים משלים ישר W של U עם בסיס של וקטורים מ־C.

פתרון. 1. נסמן $n:=\dim_{\mathbb{F}}(V)$ ונוכיח את הטענה באינדוקציה על $m=n-|B|$.

עבור $m=0$ מתקיים $|B|=n$ ולכן $U=V$. נניח שהטענה נכונה לכל $k<m$ ונוכיח אותה עבור m.

אם $C\subseteq U$, מתקיים

$$V=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(C)\subseteq\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(U)=U$$

ולכן $V=U$ בסתירה לכך שהמימדים שונים. לכן, קיים $c\in C\setminus U$. אז $B\cup(c)$ קבוצה בלתי־תלויה לינארית, כי c אינו צירוף לינארי של הוקטורים הקודמים. נגדיר $U'=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(B\cup(c))$. אז

$$n-\dim(U')=n-|B|-1=m-1<m$$

ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה ולקבל שניתן להשלים את $B\cup(c)$ לבסיס $(B\cup(c))\cup(c_2,\dots,c_m)$ של V, כאשר $c_i\in C$. אז $c,c_2,\dots,c_m\in C$ משלימים את B לבסיס של V.

2. בסימונים של הסעיף הקודם, $B \cup (c, \ldots, c_m)$ בסיס של V. נסמן $D = (c, c_2, \ldots, c_m)$ וגם $W = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(D)$. אז $B \cup D$ בסיס של V ולכן

$$V = \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(B) \oplus \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(D) = U \oplus W,$$

כנדרש.

יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ ותהיינה

$$B = \left(1+x, x+x^2\right)$$
$$C = \left(1, x, x^2, x^3\right)$$

קבוצות סדורות של וקטורים מ־V. יהי $U = \operatorname{Span}(B)$.

1. מיצאו משלים ישר W של U ובסיס עבור W שמורכב מוקטורים ב־C.
2. האם W שמצאתם יחיד? הוכיחו או הפריכו.

פתרון. 1. נשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ־C. נוסיף את $1 \notin U$ כדי לקבל $B' = \left(1+x, x+x^2, 1\right)$ ואז את $x^3 \notin \operatorname{Span}(B')$ כדי לקבל בסיס $B'' = \left(1+x, x+x^2, 1, x^3\right)$ של V.
נסמן $D = \left(1, x^3\right)$ וניקח $W = \operatorname{Span}(D)$. אז $B'' = B \cup D$ בסיס, ולכן $V = U \oplus W$, כנדרש.

2. לא. למשל, יכולנו לקחת $B' = \left(1+x, x+x^2, x^2\right)$ ואז $B'' = \left(1+x, x+x^2, x^2, x^3\right)$. במקרה זה היינו מקבלים משלים ישר $\operatorname{Span}\left(x^2, x^3\right)$, ששונה מ־$W$.

2.2 לכסינות

הגדרה 2.2.1 (אופרטור לכסין). אופרטור $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא לכסין אם קיים בסיס B של V וקיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ עבורם

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

בסיס B כזה נקרא בסיס מלכסן עבור T, והמטריצה $[T]_B$ נקראת מטריצה אלכסונית.

הגדרה 2.2.2. יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. וקטור $v \in V \setminus \{0\}$ נקרא וקטור עצמי של T אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \lambda v$.
במקרה זה λ נקרא ערך עצמי של T.

הערה 2.2.3. v וקטור עצמי של T אם ורק אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $T(v) = \lambda v$. מתקיים $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ ולכן באופן שקול $T(v) \in \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ ובאופן שקול $T(\alpha v) = \alpha T(v) \in \operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}$.
לכן, v וקטור עצמי של T אם ורק אם $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ הינו T־שמור.

הערה 2.2.4. אופרטור $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הינו לכסין אם ורק אם קיים בסיס של V שמורכב מוקטורים עצמיים של T.

הגדרה 2.2.5 (מרחב עצמי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי λ ערך עצמי של T. המרחב העצמי של T עם הערך λ הוא

$$V_\lambda \coloneqq \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \ker\left(\lambda \operatorname{Id}_V - T\right).$$

הגדרה 2.2.6 (פולינום אופייני). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הפולינום האופייני של T הוא

$$p_T(x) \coloneqq \det\left(x \operatorname{Id}_V - T\right).$$

הערה 2.2.7. בפועל, נסתכל בדרך כלל על פולינום אופייני של מטריצה, כיוון שצריך לבחור בסיס כדי לחשב את הדטרמיננטה. ראינו כי הדטרמיננטה לא תלויה בבחירת הבסיס, ולכן $p_T(x) = p_{[T]_B}(x)$ לכל בסיס B של V, כאשר $p_A(x) = \det(xI - A)$.

מסקנה 2.2.8. איבר $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\ker\left(\lambda \operatorname{Id}_V - T\right) \neq 0$, אם ורק אם $p_T(\lambda) = \det\left(\lambda \operatorname{Id}_V - T\right) = 0$.
כלומר, הערכים העצמיים של T הם השורשים של p_T.

הערה 2.2.9. כיוון שלכל פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ יש שורש, לכל $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ יש ערך עצמי.

הגדרה 2.2.10 (ריבוי אלגברי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי האלגברי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא הריבוי שלו כשורש של p_T. נסמנו $r_a(\lambda)$.

הגדרה 2.2.11 (ריבוי גיאומטרי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא $r_g(\lambda) := \dim V_\lambda$.

הערה 2.2.12. מתקיים תמיד $r_a(\lambda) \le r_g(\lambda)$.

הגדרה 2.2.13. תהי $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ ויהי $T = T_A$ אופרטור כפל ב־A משמאל (כלומר, $T(v) = Av$). אם T לכסין, קיים בסיס B עבורו $D := [T]_B$ אלכסונית. אז

$$\begin{aligned} A &= [T]_E \\ &= [\operatorname{Id} \circ T \circ \operatorname{Id}]_E \\ &= M_E^B [T]_B M_B^E \\ &= M_E^B D \left(M_E^B\right)^{-1} \end{aligned}$$

ואם נסמן $P = M_E^B$ נקבל כי זאת מטריצה הפיכה עבורה $P^{-1}AP = D$.
לכן, נגיד שמטריצה $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה אם קיימת $P \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $P^{-1}AP$ אלכסונית.

2.3 מרחבים שמורים

נרצה להבין אופרטורים לינאריים דרך הבנה של צמצום שלהם לתת־מרחבים קטנים יותר. אם $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$, נוכל תמיד לצמצם את המקור כדי לקבל העתקה לינארית $T|_W : W \to V$, אבל לא נוכל ללמוד מספיק כאשר הצמצום אינו אופרטור. לכן נרצה לצמצם גם את הטווח, מה שמוביל להגדרה הבאה.

הגדרה 2.3.1 (מרחב שמור). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $U \le V$. נגיד כי U הינו T־שמור (או T־אינווריאנטי אם $T(U) \subseteq U$.

הגדרה 2.3.2. במקרה ש־W מרחב T־שמור, נוכל להסתכל על הצמצום $T|_W : W \to W$ שמוגדר על ידי $T|_W(w) = T(w)$.

הערה 2.3.3. שימו לב שהסימון הוא אותו סימון כמו הצמצום של המקור, אך במסגרת הקורס צמצום אופרטורים יתייחס לזה שבהגדרה אלא אם כן יצוין מפורשות אחרת.

יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהיו $P, T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כאשר P איזומורפיזם. יהי $W \le V$.
הראו כי W הינו T־שמור אם ורק אם $P^{-1}(W)$ הינו $P^{-1} \circ T \circ P$־שמור.

פתרון. נניח כי W הינו T־שמור ויהי $v \in P^{-1}(W)$. נרצה להראות כי $P^{-1} \circ T \circ P(v) \in P^{-1}(W)$. יהי $w \in W$ עבורו $v = P^{-1}(w)$. אז

$$\begin{aligned} P^{-1} \circ T \circ P(v) &= P^{-1} \circ T \circ P \circ P^{-1}(W) \\ &= P^{-1} \circ T(w) \end{aligned}$$

כאשר $T(w) \in W$ כי W הוא T־שמור. נקבל כי $P^{-1} \circ T \circ P(v) \in P^{-1}(W)$.
בכיוון השני, נניח כי $U := P^{-1}(W)$ הינו $P^{-1} \circ T \circ P$־שמור. נגדיר $S = P^{-1} \circ T \circ P$, וגם $Q = P^{-1}$. אז $T = Q^{-1} \circ T \circ Q$ וגם $W = P\left(P^{-1}(W)\right) = P(U) = Q^{-1}(U)$. מהכיוון הראשון, נקבל כי W הינו $\left(Q^{-1} \circ T \circ Q\right)$־שמור, כלומר T־שמור.

יהי $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי ממשי ויהי

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned} \quad .$$

מצאו את התת־מרחבים ה־T־שמורים של $\mathbb{C}$ והסיקו כי T אינו לכסין מעל $\mathbb{R}$.

פתרון. $\{0\}, \mathbb{C}$ תת־מרחבים T־שמורים.
נניח כי $W \le \mathbb{C}$ מרחב T־שמור נוסף. אז $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$ ולכן יש

$$z_0 \in \mathbb{C}^\times := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

עבורו $W = \operatorname{Span}\{z_0\}$. נקבל $T(z_0) \in W$ לכן $T(z_0) = cz_0$ עבור $c \in \mathbb{R}$. אבל $cz_0 = iz_0$ גורר $c = i$ בסתירה.
תת־מרחבים T־שמורים 1־מימדיים של $\mathbb{C}$ הם $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור v וקטור עצמי של T. לכן אין ל־T וקטורים עצמיים, ולכן הוא אינו לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

סימון 2.3.4. עבור מטריצות ריבועיות $A_1,\ldots,A_k$ נסמן

$$A_1\oplus\ldots\oplus A_k=\begin{pmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_k\end{pmatrix}.$$

יהי $V=\mathbb{C}^n$ ותהי

$$T\colon V\to V$$

עם

$$[T]_E=\lambda_1 I_{m_1}\oplus\ldots\oplus\lambda_k I_{m_k}$$

עבור $\lambda_i\neq\lambda_j$ לכל $i\neq j$. נסמן $n_i=m_1+\ldots+m_{i-1}+1$. מצאו את כל התת־מרחבים ה־T־שמורים של V.

פתרון. ראשית, אם $W\le V_i:=\operatorname{Span}\left(e_{n_i},\ldots,e_{n_i+m_i-1}\right)$, נקבל כי $T(w)=\lambda_i w\in W$ לכל $w\in W$. לכן כל תת־מרחב כזה הינו T־שמור. גם סכום של תת־מרחבים כאלה יהיה T־שמור כי אם $v_i\in W_i:=W\cap V_i$ לכל $i\in[k]$ אז

$$T(v_1+\ldots+v_k)=T(v_1)+\ldots+T(v_k)$$

כאשר $T(v_i)\in W$ וגם $T(v_i)=\lambda_i v_i\in V_i$, כלומר $T(v_i)\in W_i$. נראה שאלו כל האפשרויות לתת־מרחבים שמורים. ראינו בהרצאה כי אם W הינו T־שמור, אז $T|_W$ הינו לכסין. לכן, W סכום ישר של המרחבים העצמיים של $T|_W$. לכל ערך עצמי λ, המרחב העצמי W_λ של $T|_W$ הוא החיתוך $W\cap V_\lambda$ כאשר V_λ המרחב העצמי של T. כיוון שעבור אופרטור לכסין המרחב שווה לסכום ישר של המרחבים העצמיים, נקבל כי

$$W=\bigoplus_{i\in[k]}W_{\lambda_i}=\bigoplus_{i\in[k]}W\cap V_{\lambda_i},$$

כנדרש.

הגדרה 2.3.5 (בלוק ז'ורדן). יהי $\lambda\in\mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל m עם ערך עצמי λ בתור

$$J_m(\lambda):=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_m(\mathbb{F}).$$

הגדרה 2.3.6 (אופרטור אי־פריד). אופרטור $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא אי־פריד אם לכל $U,W\le V$ שהינם T־שמורים ועבורם $U\oplus W=V$, בהכרח $U=V,W=\{0\}$ או $U=\{0\},W=V$.

1. יהי $T=T_{J_n(0)}\in\operatorname{End}(\mathbb{F}^n)$. מיצאו את המרחבים ה־$T$ שמורים של $\mathbb{F}^n$.
2. יהי $N\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$. הראו שהמרחבים ה־S ־שמורים של V הם המרחבים ה־$(N+\lambda\operatorname{Id}_V)$־ ־שמורים של V.
3. יהי $S=T_{J_n(\lambda)}\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}^n}$. הסיקו מה המרחבים ה־$S$־שמורים של $\mathbb{F}^n$.
4. הראו כי S הינו אי־פריד.

פתרון. 1. נשים לב כי

$$\begin{aligned}&\{0\}\\ \ker(T)&=\operatorname{Span}(e_1)\\ \operatorname{Im}(T)&=\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_{n-1})\\ V&=\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_n)\end{aligned}$$

כולם T־שמורים, כיוון שמרחב האפס, הגרעין, התמונה, והמרחב כולו תמיד T־שמורים. גם, מתקיים

$$\begin{aligned}\forall i>1\colon T(e_i)&=e_{i-1}\in\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_i)\\ T(e_1)&=0\end{aligned}$$

ולכן כל מרחב מהצורה $\operatorname{Span}(e_1,\ldots,e_i)$ עבור $i\in\{0,\ldots,n\}$ הינו T־שמור. נרצה להראות שהמרחבים ה־T־שמורים הם בדיוק אלו מהצורה הזאת.

יהי $W \leq \mathbb{F}^n$ מרחב T-שמור, ויהי $k \in \{0, \ldots, n\}$ המקסימלי עבורו $\operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_k) \subseteq W$ (יש כזה k כיוון שעבור $k = 0$ נקבל $\{0\} \subseteq W$). נרצה להראות כי $W = \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_k)$.

אחרת, קיים וקטור $v = \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i e_i \in W$ עם $\ell > k$ וגם $\alpha_\ell \neq 0$. אם $\ell = k+1$ נקבל כי $\alpha_i e_i \in W$ לכל $i < \ell$ ולכן

$$\alpha_\ell e_\ell = v - \sum_{i \in [\ell - 1]} \in W$$

וכיוון ש-$\alpha_\ell \neq 0$ אז $e_{k+1} = e_\ell \in W$. במקרה זה $e_1, \ldots, e_{k+1} \in W$ ולכן $\operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_{k+1}) \subseteq W$ בסתירה להנחה.

באופן כללי, מתקיים $T^i(v) \in W$ לכל i. כדי שיתקיים $T^i(e_\ell) = e_{k+1}$ צריך לקחת $\ell - i = k+1$ כלומר $i = \ell - (k+1)$. אז

$$\begin{aligned} T^{\ell-(k+1)}(v) &= \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i T^{\ell-(k+1)}(e_i) \\ &= \sum_{i=\ell-k}^{\ell} \alpha_i e_{i-\ell+k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_{j+\ell-k-1} e_j \in W \end{aligned}$$

ונקבל את הנדרש מהמקרה הקודם $\ell = k+1$.

2. יהי $W \leq V$ תת-מרחב N-שמור. לכל $w \in W$ מתקיים

$$(N + \lambda \operatorname{Id}_V)(w) = N(w) + \lambda w \in W$$

כיוון ש-$N(w), \lambda w \in W$. לכן W הינו $N + \lambda \operatorname{Id}_V$-שמור.

אם $W \leq V$ תת-מרחב $(N + \lambda \operatorname{Id}_V)$-שמור, נקבל מהכיוון הראשון שהוא $(N + \lambda \operatorname{Id}_V) + (-\lambda) \operatorname{Id}_V$-שמור, כלומר N-שמור.

3. מהסעיף הקודם, נקבל כי המרחבים ה-S שמורים הם המרחבים ה-T-שמורים, שהינם אלו מהצורה $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(e_1, \ldots, e_i)$ עבור $i \in \{0, \ldots, n\}$.

4. נניח כי יש תת-מרחבים S-שמורים W_1, W_2 עבורם $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$. מהסעיף הקודם, יש $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ עבורם

$$\begin{aligned} W_1 &= \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_i) \\ W_2 &= \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_j). \end{aligned}$$

כיוון ש-$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{F}^n$, בהכרח $e_n \in W_1 + W_2$, ולכן $i = n$ או $j = n$. במקרה הראשון, $W_1 = \mathbb{F}^n, W_2 = \{0\}$ ובמקרה השני $W_2 = \mathbb{F}^n, W_1 = \{0\}$, ובכל מקרה הפירוק הינו טריוויאלי.

פתרון. עבור מטריצה $A = (a_{i,j}) \in \operatorname{Mat}_{n,m}$ נגדיר

$$\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})$$

את המטריצה שמקדמיה הם המספרים הצמודים לאלו ב-A. נשים לב כי עבור שתי מטריצות $A \in \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ ו-$B \in \operatorname{Mat}_{n,\ell}(\mathbb{C})$, מתקיים

$$\begin{aligned} \left(\overline{AB}\right)_{i,j} &= \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{i,k}} \overline{b_{k,j}} \\ &= (|A| \, |B|)_{i,j} \end{aligned}$$

ולכן $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$.

1. תת-מרחב T_A-שמור ממימד 1 הוא מהצורה $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור וקטור עצמי v של T_A. לכן מההנחה, אין ל-T_A וקטורים עצמיים.

אבל, אפשר לחשוב על A כעל מטריצה ב־$\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{C}\right)$ שנסמנה $\tilde{A}$. אז ל־$T_{\tilde{A}}\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^n\right)$ יש וקטור עצמי כאופרטור מעל $\mathbb{C}$. יהי $v\in\mathbb{C}^n$ וקטור עצמי של $T_{\tilde{A}}$ עם ערך עצמי $\lambda=\alpha+i\beta$, ונכתוב

$$v=\begin{pmatrix}u_1+iw_1\\ \vdots\\ u_n+iw_n\end{pmatrix}=u+iw$$

כאשר $u,w\in\mathbb{C}^n$ וקטורים עם מקדמים ממשיים. נוכל לחשוב עליהם כחיים ב־$\mathbb{R}^n$. אז

$$\begin{aligned}Au+iAw&=A\left(u+iw\right)\\&=Av\\&=\lambda v\\&=\left(\alpha+i\beta\right)\left(u+iw\right)\\&=\alpha u+\alpha iw+\beta iu-\beta w\\&=\left(\alpha u-\beta w\right)+i\left(\alpha w+\beta u\right)\end{aligned}$$

כאשר $Au,Aw\in\mathbb{R}^n$. אז, נוכל להשוות מקדמים ולקבל

$$\begin{aligned}T_A\left(u\right)=Au=\alpha u-\beta w\in\mathrm{Span}\left(u,w\right)\\ .T_A\left(w\right)=Aw=\alpha w+\beta u\in\mathrm{Span}\left(u,w\right)\end{aligned}$$

לכן $\mathrm{Span}\left(u,w\right)$ הינו תת־מרחב L_A־שמור של $\mathbb{R}^n$.

2. אם λ ממשי אין מה להוכיח כי $\bar{\lambda}=\lambda$. נניח אם כן כי $\lambda=\alpha+i\beta$ עבור $\beta\neq 0$. נסמן ב־$v=u+iw$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ, כאשר $u,w\in\mathbb{C}^n$ עם מקדמים ממשיים. אז

$$\bar{A}\bar{v}=\overline{Av}=\overline{\lambda v}=\bar{\lambda}\bar{v}$$

ולכן $\bar{v}$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי $\bar{\lambda}$, כנדרש.

פרק 3

צורת ז'ורדן

כדי לבצע חישובים על אופרטורים לינאריים, בדרך כלל יש לקחת בסיס ולערוך את החישובים על המטריצות המייצגות. נרצה לקחת בסיס שיתן לנו מטריצה שתאפשר חישובים פשוטים ככל הניתן: מטריצה אלכסונית. אין לכל אופרטור צורה אלכסונית, אבל יש צורה ``כמעט אלכסונית'' שנקראת צורת ז'ורדן.

הגדרה 3.0.1. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל m עם ערך עצמי λ בתור

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{F}).$$

הגדרה 3.0.2 (מטריצת ז'ורדן). מטריצה $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F})$ נקראת מטריצת ז'ורדן אם היא מטריצה אלכסונית בלוקים שכל הבלוקים בה הם בלוקי ז'ורדן.

הגדרה 3.0.3 (בסיס ז'ורדן). יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. בסיס ז'ורדן עבור T הוא בסיס B של V עבורו $[T]_B$ מטריצת ז'ורדן.

3.1 נילפוטנטיות