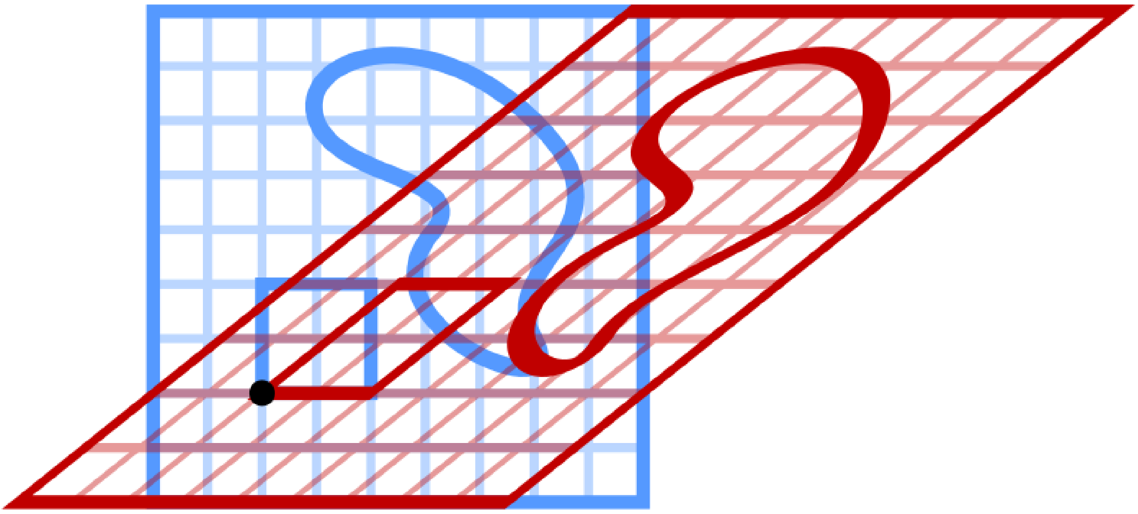

אלגברה ב׳ (104168)
חורף 2022-2023
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־25 באוקטובר 2022

תוכן העניינים

חלק I

חלק ראשון - מרחבים שמורים

פרק 1

מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V ויהי $v\in V$. וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B הוא הוקטור $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$v=\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\coloneqq\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n.$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\begin{aligned}\rho_B\colon V&\to\mathbb{F}^n\\ v&\mapsto[v]_B\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V,W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B,C בהתאמה, ונסמן

$$B=(v_1,\ldots,v_n).$$

נסמן גם $n\coloneqq\dim(V)$ ו־$m\coloneqq\dim(W)$. עבור $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ נגדיר

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}| & & |\\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C\\ | & & |\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F}).$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי $A\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E=(e_1,\ldots,e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אז:

(i) לכל $i\in[m]$ מתקיים כי Ae_i העמודה ה־i של A.

(ii) לכל $B=\begin{pmatrix}| & & |\\ b_1 & \cdots & b_\ell\\ | & & |\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{n\times\ell}(\mathbb{F})$ אז $AB=\begin{pmatrix}| & & |\\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell\\ | & & |\end{pmatrix}$.

תרגיל 1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\begin{aligned}\eta_C^B\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,B)&\to\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})\\ T&\mapsto[T]_C^B\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ ויהיו $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V ו־C בסיס של W. אז

$$[T(v)]_C=[T]_C^B[v]_B$$

לכל $v\in V$.

הוכחה. עבור $v=v_i$ מתקיים $[T]_C^B[v_i]_B=[T]_C^Be_i$ וזאת העמודה ה־i של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה. אם $v=\sum_{i\in[n]}\alpha_iv_i$ נקבל מלינאריות של T ושל ρ_B כי

$$\begin{aligned}[T(v)]_C&=\left[T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_iv_i\right)\right]_C\\&=\left[\sum_{i\in[n]}\alpha_iT(v_i)\right]_C\\&=\sum_{i\in[n]}\alpha_i[T(v_i)]_C\\&=\sum_{i\in[n]}\alpha_i[T]_C^B[v_i]_B\\&=[T]_C^B\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i[v_i]_B\right)\\&=[T]_C^B\left[\sum_{i\in[n]}\alpha_iv_i\right]_B\\&=[T]_C^B[v]_B\end{aligned},$$

כנדרש. ■

סימון 1.1.7. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי V ואם $T\in\operatorname{End}(V)$, נסמן $[T]_B:=[T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B.

סימון 1.1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים B,C. נסמן $M_C^B:=[\mathrm{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.9. אם $A\in\operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, נסמן

$$\begin{aligned}T_A\colon\mathbb{F}^n&\to\mathbb{F}^n\\v&\mapsto Av\end{aligned}.$$

תרגיל 2. יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned}T\colon\mathbb{R}_3[x]&\to\mathbb{R}_3[x]\\p(x)&\mapsto p(x+1)\end{aligned}$$

ויהי $B=\left(1,x,x^2,x^3\right)$ בסיס של V. כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $\left[T\left(x^i\right)\right]_B$ עבור $i\in\{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned}T(1)&=1\\T(x)&=x+1=1+x\\T\left(x^2\right)&=(x+1)^2=1+2x+x^2\\T\left(x^3\right)&=(x+1)^3=1+3x+3x^2+x^3\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}[T(1)]_B&=e_1\\[T(x)]_B&=e_1+e_2\\\left[T\left(x^2\right)\right]_B&=e_1+2e_2+e_3\\\left[T\left(x^3\right)\right]_B&=e_1+3e_2+3e_3+e_4\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{pmatrix}.$$

תרגיל 3. יהי $V=\operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{C}\right)$, תהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ A&\mapsto\frac{1}{2}\left(A-A^{t}\right)\end{aligned}$$

ויהי

$$E=\left(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}\right)\coloneqq\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V. כיתבו את $[T]_{E}$.

פתרון. כמו מקודם, נחשב את $\left[T\left(E_{i,j}\right)\right]_{E}$ כיוון שאלו עמודות $[T]_{E}$. מתקיים

$$\begin{aligned}&T\left(E_{1,1}\right)=\frac{1}{2}\left(E_{1,1}-E_{1,1}\right)=0\\&T\left(E_{1,2}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}E_{1,2}-\frac{1}{2}E_{2,1}\\&T\left(E_{2,1}\right)=\frac{1}{2}\left(E_{2,1}-E_{1,2}\right)=\frac{1}{2}E_{2,1}-\frac{1}{2}E_{1,2},T\left(E_{2,2}\right)=\frac{1}{2}\left(E_{2,2}-E_{2,2}\right)=0\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\left[T\left(E_{1,1}\right)\right]_{E}&=0\\\left[T\left(E_{1,2}\right)\right]_{E}&=\frac{1}{2}e_{2}-\frac{1}{2}e_{3}\\\left[T\left(E_{2,1}\right)\right]_{E}&=-\frac{1}{2}e_{2}+\frac{1}{2}e_{3}\\\left[T\left(E_{2,2}\right)\right]_{E}&=0\end{aligned}$$

ואז

$$.[T]_{E}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

תרגיל 4. יהי $V=\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^{2},\mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B=\left(f_{1},f_{2}\right)$ כאשר

$$\begin{aligned}f_{1}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)&=x\\,f_{2}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)&=y\end{aligned}$$

ותהי

$$.A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in\operatorname{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right)$$

מיצאו $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ עבורו $[T]_{B}=A$.

פתרון. מתקיים

$$[T]_{B}=\begin{pmatrix}|&|\\\left[T\left(f_{1}\right)\right]_{B}&\left[T\left(f_{2}\right)\right]_{B}\\|&|\end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$[T(f_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$[T(f_2)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

אז

$$T(f_1) = f_1 + 2f_2$$
$$T(f_2) = 3f_1 + 4f_2.$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}(T(f))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(f_1 + 2f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta(3f_1 + 4f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x + 2y) + \beta(3x + 4y)\end{aligned}.$$

טענה 1.1.10. תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$. אז $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A - B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־i של $A - B$, שהינה $(A - B)e_i$, שווה ל־0. לכן $A - B = 0$. ■

טענה 1.1.11. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C, D בהתאמה, ותהיינה

$$S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$$
$$T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W).$$

אז

$$[T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B.$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned}[T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B\end{aligned}$$

לכן

$$[T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B,$$

כנדרש. ■

טענה 1.1.12. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ חד־חד ערכית. יהיו

$$B = (v_1, \ldots, v_n)$$
$$C = (u_1, \ldots, u_n)$$

בסיסים של V ויהיו

$$B' = (T(v_1), \ldots, T(v_n))$$
$$C' = (T(u_1), \ldots, T(u_n)).$$

אז B', C' בסיסים של $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ וגם $M_C^B = M_{C'}^{B'}$.

פתרון. כיוון ש־T חד־חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T\colon V \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}(T)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן B', C' בסיסים.
כעת, לכל $i \in [n]$ נכתוב

$$v_i = \sum_{j\in[n]} \alpha_{i,j} u_i$$

ואז

$$M_C^B e_i = [v_i]_C = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}.$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} T(v_i) &= T\left(\sum_{i\in[n]} \alpha_{i,j} u_j\right) \\ &= \sum_{i\in[n]} \alpha_{i,j} T(u_j) \end{aligned}$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'} e_i = [T(v_i)]_{C'} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}.$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

תרגיל 5. תהי $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס B של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_E^B$.
2. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^E$.
3. יהי B בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^B$.
4. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ איזומורפיזם ויהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V. מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B = A$.

פתרון. 1. אם $B = (v_1, \ldots, v_n)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

לכן ניקח את $(v_1, \ldots, v_n)$ להיות עמודות A, לפי הסדר.

2. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן $M_C^E = \left(M_E^C\right)^{-1}$. אם ניקח $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_E^C = A^{-1}$ ולכן $M_C^E = \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

3. מתקיים $M_C^B = M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $M_C^E M_E^B = A$ או במילים אחרות $M_C^E = \left(M_E^B\right)^{-1} A = M_B^E A$. מהסעיף הקודם, נרצה $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של $\left(M_B^E A\right)^{-1} = A^{-1} M_E^B$, כלומר

$$u_i = A^{-1} M_E^B e_i = A^{-1} M_E^B [v_i]_B = A^{-1} v_i.$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]_{C'}^{B} = M_{C'}^{B}[T]_{B}^{B}$ לכן נרצה $A = M_{C}^{B}[T]_{B}^{B}$. כיוון ש־T איזומורפיזם, המטריצה $[T]_{B}^{B}$ הפיכה, ולכן נרצה $M_{C}^{B} = A\left([T]_{B}^{B}\right)^{-1}$. כעת, אם $C = (v_1, \ldots, v_n)$ נקבל כי $M_{C}^{B} = M_{\hat{C}}^{E}$ כאשר $\hat{C} = ([v_1]_B, \ldots, [v_n]_B)$ לפי הסעיף הקודם, נרצה $\hat{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ עבור

$$.u_i = \left(A[T]_{B}^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i$$

לכן

$$.v_i = \rho_B^{-1}\left([T]_B A^{-1} e_i\right)$$

תרגיל 6. יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned},$$

יהי $E = \left(1, x, x^2, x^3\right)$, הבסיס הסטנדרטי ותהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו $A = [T]_{C}^{E}$.

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C} = (u_1, \ldots, u_4)$ כאשר $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$. חישבנו ב־2 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2 = I$ כלומר $A^{-1} = A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} Ae_1 &= e_2 \\ Ae_2 &= e_1 \\ Ae_3 &= e_4 \\ Ae_4 &= e_3 \end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1 = [T]_E Ae_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [T]_E Ae_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = [T]_E Ae_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$,u_4 = [T]_E Ae_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\hat{C} = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix}\right),$$

ולבסוף

$$C = \left(\rho_E^{-1}\left(u_1\right), \dots, \rho_E^{-1}\left(u_4\right)\right) = \left(x + 2x^3 + 3x^3, 1 + x + x^2 + x^3, x^3, x^2 + 3x^3\right).$$

1.2 גרעין ותמונה

הגדרה 1.2.1 (גרעין של העתקה לינארית). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. הגרעין של T הוא

$$\ker(T) \coloneqq \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

הגדרה 1.2.2 (תמונה של העתקה לינארית). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. התמונה של T היא

$$\operatorname{Im}(T) \coloneqq \{T(v) \mid v \in V\}.$$

הגדרה 1.2.3 (דרגה של אופרטור לינארי). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. הדרגה של T היא

$$\operatorname{rank}(T) \coloneqq \dim(\operatorname{Im}(T)).$$

הערה 1.2.4. אם V, W סוף־מימדיים עם בסיסים B, C בהתאמה, אז

$$\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}\left([T]_C^B\right).$$

משפט 1.2.5 (משפט המימדים). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T \in \operatorname{End}(V)$. אז

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}(T) + \dim \ker(T).$$

תרגיל 7. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $v \in V$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[v]_B = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את (v) לבסיס $B_0 = (v_1, \dots, v_n)$ של V כאשר $v_1 = v$. תהי

$$A \coloneqq \begin{pmatrix}1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B = (u_1, \dots, u_n)$ של V עבורו $M_B^{B_0} = A$. נקבל

$$\begin{aligned}[v]_B &= [\operatorname{Id}_V v]_B \\ &= [\operatorname{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת $u_i = \rho_{B_0}^{-1}\left(A^{-1} e_i\right)$.

תרגיל 8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $\operatorname{rank} T = 1$ אם ורק אם יש בסיסים B, C ל־V כך שכל מקדמי $[T]_C^B$ הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים B, C כמתואר. אז $\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} [T]_C^B = 1$.
בכיוון השני, נניח כי $\operatorname{rank} T = 1$. כלומר, $\dim \operatorname{Im} T = 1$. ממשפט המימדים מתקיים $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$, לכן

$$\dim \ker T = \dim V - \dim \operatorname{Im} T = \dim V - 1 .$$

יהי $n := \dim V$ ויהי

$$\tilde{B} := (u_1, \ldots, u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי w וקטור פורש של $\operatorname{Im} T$ ויהי C בסיס של V כך שמתקיים $[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי $v := T^{-1}(w)$, ואז $(v, u_1, \ldots, u_{n-1})$ בלתי־תלויים לינארית, כי $v \notin \ker T$. לכן זה בסיס של V. אז גם $B := (v, v + u_1, \ldots, v + u_{n-1})$ בסיס של V כי המטריצה

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [v]_{\tilde{B}} & \cdots & [v + u_{n-1}]_{\tilde{B}} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפיכה.
נסמן $C = (w_1, \ldots, w_m)$. מתקיים

$$T(v) = w = w_1 + \ldots + w_m$$

ולכל $i \in [n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned} T(v + u_i) &= T(v) + T(u_i) \\ &= T(v) + 0 \\ &= T(v) \\ &= w_1 + \ldots + w_m \end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

תרגיל 9. תהי

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(-1) . \end{aligned}$$

מיצאו בסיסים B, C של $\mathbb{R}_3[x]$ עבורם

$$[T]_C^B = A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

פתרון. ניקח בסיס $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3) := (x + 1, x^2 - 1, x^3 + 1)$ של $\ker(T)$, כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי־תלוייה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי $T \neq 0$). מתקיים $w := -1 = T(x)$ ואז $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(w)$. נחשב בסיס C עבורו $[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. נשלים את (v) לבסיס

$$C_0 = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (-1, x, x^2, x^3) .$$

המטריצה

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

הפיכה ולכן קיים בסיס $C=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ עבורו $M_C^{C_0}=X$, כשראינו שאז $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. כפי שראינו, ניתן לחשב את C לפי $u_i=\rho_{C_0}^{-1}\left(X^{-1}e_i\right)$. מתקיים

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$u_1=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)=-1-x-x^2-x^3$$

$$u_2=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=x$$

$$u_3=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=x^2$$

$$.u_4=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x^3$$

כלומר, $C=\left(-1-x-x^2-x^3,x,x^2,x^3\right)$.
ניקח $v=x\in V$ כך שיתקיים $T(v)=-1=w$ ואז

$$B=(v,v+b_1,v+b_2,v+b_3)=\left(x,2x+1,x^2+x-1,x^3+x+1\right)$$

כמו בתרגיל הקודם.
אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}T(x)&=-1\\T(2x+1)&=-2+1=-1\\T\left(x^2+x-1\right)&=(-1)^2-1-1=1-2=-1\\T\left(x^3+x+1\right)&=(-1)^3-1+1=-1\end{aligned}$$

וגם $[-1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, לכן

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

כפי שרצינו.