

## אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 2

### סכומים ישרים, מרחבים שמורים, ונילפוטנטיות

תאריך הגשה: 30.11.2022

**תרגיל 1.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי, יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  ויהיו  $V_1, \dots, V_k \leq V$  כולם  $T$ -שמורים וכך שמתקיים  $V = \bigoplus_{i \in [k]} V_i$ .

1. הראו כי

$$\ker(T) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker(T|_{V_i})$$
$$\text{Im}(T) = \bigoplus_{i \in [k]} \text{Im}(T|_{V_i})$$

2. הראו כי

$$\ker(T - \lambda \text{Id}_V) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker(T|_{V_i} - \lambda \text{Id}_{V_i})$$

לכל  $\lambda \in \mathbb{F}$ , והסיקו שהערכים העצמיים של  $T$  הם אלו של כל ה- $T|_{V_i}$  וגם כי

$$r_{T,a}(\lambda) = \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},a}(\lambda)$$
$$r_{T,g}(\lambda) = \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},g}(\lambda)$$

לכל  $\lambda \in \mathbb{F}$  וכאשר  $r_{S,a}(\lambda), r_{S,g}(\lambda)$  הריבויים האלגברי והגיאומטרי של  $\lambda$  כערך עצמי של  $S \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ .

**תרגיל 2.** יהי  $T = T_{J_n(0)} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  אופרטור הכפל במטריצה  $J_n(0)$  משמאל. מיצאו בסיס ז'ורדן עבור  $T^2$ .

**תרגיל 3.** תהי  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$  ויהי  $T = T_A$  אופרטור הכפל ב- $A$  משמאל.

1. הראו כי  $T$  נילפוטנטי מאינדקס 3 והסיקו כי הוא אופרטור הווה.

2. מיצאו בסיס  $B$  של  $\mathbb{C}^3$  כך ש- $T$  אופרטור הווה ביחס לבסיס  $B$ .

תרגיל 4. יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי, יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  ויהי  $B$  בסיס של  $V$ .

1. נסמן  $A = [T]_B$  ונזכיר כי

$$\begin{aligned} T_A: \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

וכי

$$\begin{aligned} \rho_B: V &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

הראו כי

$$T = \rho_B^{-1} \circ T_A \circ \rho_B$$

2. הראו כי  $W \leq V$  הינו  $T$ -שמור אם ורק אם  $\rho_B(W)$  הינו  $T_A$ -שמור.

תרגיל 5. יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי, יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  ויהי  $B = (v_1, \dots, v_n)$  בסיס של  $V$ .

1. נניח כי  $[T]_B = J_m(\lambda)$ . מיצאו את המרחבים ה- $T$ -שמורים של  $V$ .

2. יהי  $V = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  ויהי

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow V \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

מיצאו את כל התת-מרחבים ה- $T$ -שמורים של  $V$ .