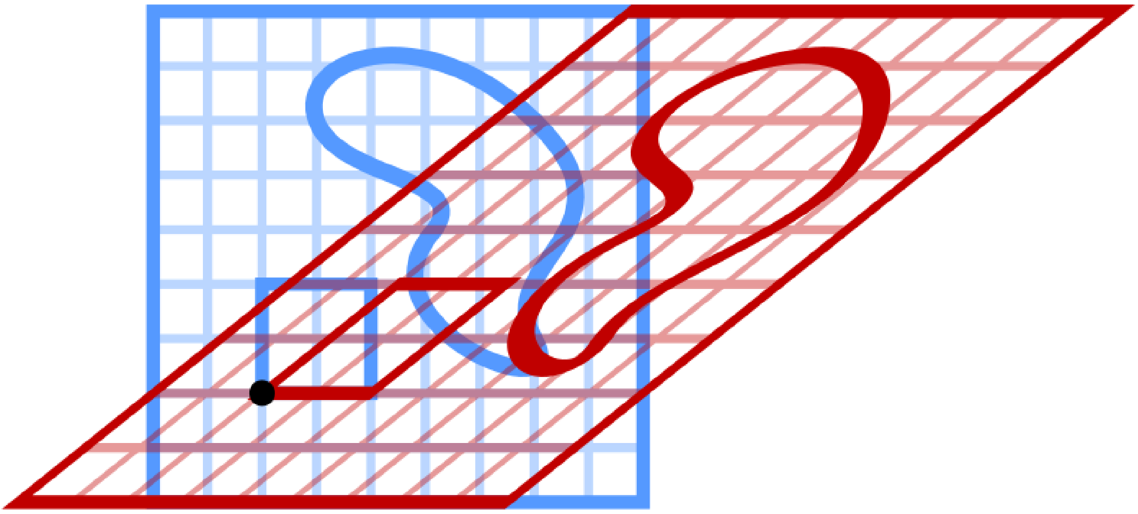

אלגברה ב' (104168)
חורף 2022-2023
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־30 באוקטובר 2022

תוכן העניינים

חלק I

חלק ראשון - מרחבים שמורים

פרק 1

מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ויהי $v \in V$. וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B הוא הוקטור $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i := \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\begin{aligned} \rho_B \colon V &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \ldots, v_n).$$

נסמן גם $n := \dim(V)$ ו־$m := \dim(W)$. עבור $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}).$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי $A \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E = (e_1, \ldots, e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אז:

(i) לכל $i \in [m]$ מתקיים כי Ae_i העמודה ה־i של A.

(ii) לכל $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_\ell \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{n \times \ell}(\mathbb{F})$ אז $AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell \\ | & & | \end{pmatrix}$.

תרגיל 1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\begin{aligned} \eta_C^B \colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) &\to \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}) \\ T &\mapsto [T]_C^B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ ויהיו $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ו־C בסיס של W. אז

$$[T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$$

לכל $v \in V$.

הוכחה. עבור $v=v_i$ מתקיים $[T]_C^B[v_i]_B=[T]_C^B e_i$ וזאת העמודה ה־i של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה.
אם $v=\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i$ נקבל מלינאריות של T ושל ρ_B כי

$$\begin{aligned}
[T(v)]_C &= \left[T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right)\right]_C \\
&= \left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i T(v_i)\right]_C \\
&= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T(v_i)]_C \\
&= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\
&= [T]_C^B\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i [v_i]_B\right) \\
&= [T]_C^B\left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right]_B \\
&= [T]_C^B[v]_B ,
\end{aligned}$$

כנדרש. ■

סימון 1.1.7. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי V ואם $T\in\operatorname{End}(V)$, נסמן $[T]_B:=[T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B.

סימון 1.1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים B,C. נסמן $M_C^B:=[\mathrm{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.9. אם $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, נסמן

$$\begin{aligned}
T_A\colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\
v &\mapsto Av .
\end{aligned}$$

תרגיל 2. יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned}
T\colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\
p(x) &\mapsto p(x+1)
\end{aligned}$$

ויהי $B=\left(1,x,x^2,x^3\right)$ בסיס של V. כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $\left[T\left(x^i\right)\right]_B$ עבור $i\in\{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(x) &= x+1 = 1+x \\
T\left(x^2\right) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 \\
T\left(x^3\right) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
[T(1)]_B &= e_1 \\
[T(x)]_B &= e_1+e_2 \\
\left[T\left(x^2\right)\right]_B &= e_1+2e_2+e_3 \\
\left[T\left(x^3\right)\right]_B &= e_1+3e_2+3e_3+e_4
\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix} .$$

תרגיל 3. יהי $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, תהי

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ A &\mapsto \frac{1}{2}\left(A - A^t\right) \end{aligned}$$

ויהי

$$E = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) \coloneqq \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V. כיתבו את $[T]_E$.

הוכחה. כמו מקודם, נחשב את $[T(E_{i,j})]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$\begin{aligned} T(E_{1,1}) &= \frac{1}{2}(E_{1,1} - E_{1,1}) = 0 \\ T(E_{1,2}) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}E_{1,2} - \frac{1}{2}E_{2,1} \\ T(E_{2,1}) &= \frac{1}{2}(E_{2,1} - E_{1,2}) = \frac{1}{2}E_{2,1} - \frac{1}{2}E_{1,2}, T(E_{2,2}) = \frac{1}{2}(E_{2,2} - E_{2,2}) = 0 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} [T(E_{1,1})]_E &= 0 \\ [T(E_{1,2})]_E &= \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ [T(E_{2,1})]_E &= -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 \\ [T(E_{2,2})]_E &= 0 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

כנדרש. ■

תרגיל 4. יהי $V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B = (f_1, f_2)$ כאשר

$$\begin{aligned} f_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= x \\ f_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= y, \end{aligned}$$

ותהי

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

מיצאו $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ עבורו $[T]_B = A$.

פתרון. מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$[T(f_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[T(f_2)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

אז

$$T(f_1) = f_1 + 2f_2$$
$$T(f_2) = 3f_1 + 4f_2.$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}(T(f))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(f_1 + 2f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta(3f_1 + 4f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x + 2y) + \beta(3x + 4y).\end{aligned}$$

טענה 1.1.10. תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$. אז $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A - B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־i של $A - B$, שהינה $(A - B)e_i$, שווה ל־0. לכן $A - B = 0$. ∎

טענה 1.1.11. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C, D בהתאמה, ותהיינה

$$S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$$
$$T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W).$$

אז

$$[T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B.$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned}[T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B\end{aligned}$$

לכן

$$[T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B,$$

כנדרש. ∎

טענה 1.1.12. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ חד־חד ערכית. יהיו

$$B = (v_1, \ldots, v_n)$$
$$C = (u_1, \ldots, u_n)$$

בסיסים של V ויהיו

$$B' = (T(v_1), \ldots, T(v_n))$$
$$C' = (T(u_1), \ldots, T(u_n)).$$

אז B', C' בסיסים של $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ וגם $M_C^B = M_{C'}^{B'}$.

פתרון. כיוון ש־T חד־חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T\colon V \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}(T)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן B', C' בסיסים.
כעת, לכל $i \in [n]$ נכתוב

$$v_i = \sum_{j\in[n]} \alpha_{i,j} u_i$$

ואז

$$M_C^B e_i = [v_i]_C = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}.$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} T(v_i) &= T\left(\sum_{i\in[n]} \alpha_{i,j} u_j\right) \\ &= \sum_{i\in[n]} \alpha_{i,j} T(u_j) \end{aligned}$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'} e_i = [T(v_i)]_{C'} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}.$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

תרגיל 5. תהי $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס B של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_E^B$.
2. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^E$.
3. יהי B בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^B$.
4. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ איזומורפיזם ויהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V. מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B = A$.

פתרון. 1. אם $B = (v_1, \ldots, v_n)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

לכן ניקח את $(v_1, \ldots, v_n)$ להיות עמודות A, לפי הסדר.

2. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן $M_C^E = \left(M_E^C\right)^{-1}$. אם ניקח $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_E^C = A^{-1}$ ולכן $M_C^E = \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. כלומר ניקח, $u_i = A^{-1} e_i$.

3. מתקיים $M_C^B = M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $M_C^E M_E^B = A$ או במילים אחרות $M_C^E = A\left(M_E^B\right)^{-1} = A M_B^E$. מהסעיף הקודם, נרצה $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של $\left(A M_B^E\right)^{-1} = M_E^B A^{-1}$, כלומר

$$u_i = M_E^B A^{-1} e_i.$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]_{C'}^{B} = M_{C'}^{B}[T]_{B}^{B}$ לכן נרצה $A = M_{C}^{B}[T]_{B}^{B}$. כיוון ש־T איזומורפיזם, המטריצה $[T]_{B}^{B}$ הפיכה, ולכן נרצה $M_{C}^{B} = A\left([T]_{B}^{B}\right)^{-1}$. כעת, אם $C = (v_1, \ldots, v_n)$ נקבל כי $M_{C}^{B} = M_{\hat{C}}^{E}$ כאשר $\hat{C} = ([v_1]_B, \ldots, [v_n]_B)$. כלומר, נחפש $\hat{C}$ עבורו $M_{\hat{C}}^{E} = A[T]_{B}^{-1}$. לפי הסעיף השני, נרצה $\hat{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ עבור

$$u_i = \left(A[T]_{B}^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i.$$

לכן

$$v_i = \rho_B^{-1}\left([T]_B A^{-1} e_i\right).$$

תרגיל 6. יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned},$$

יהי $E = \left(1, x, x^2, x^3\right)$, הבסיס הסטנדרטי ותהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו $A = [T]_{C}^{E}$.

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C} = (u_1, \ldots, u_4)$ כאשר $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$. חישבנו ב־2 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2 = I$ כלומר $A^{-1} = A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} Ae_1 &= e_2 \\ Ae_2 &= e_1 \\ Ae_3 &= e_4 \\ Ae_4 &= e_3 \end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1 = [T]_E A^{-1} e_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [T]_E A^{-1} e_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = [T]_E A^{-1} e_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = [T]_E A^{-1} e_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

כלומר

$$\hat{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right),$$

ולבסוף

$$C=(v_1,v_2,v_3,v_4)\coloneqq\left(1+x,1,1+3x+3x^2+x^3,1+2x+x^2\right).$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן A. מתקיים

$$\begin{aligned}T(1)&=1=v_2\\T(x)&=x+1=v_1\\T\left(x^2\right)&=(x+1)^2=1+2x+x^2=v_4\\T\left(x^3\right)&=(x+1)^3=1+3x+3x^2+x^3=v_3\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}[T]_C^E&=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ [T(1)]_C&[T(x)]_C&\left[T\left(x^2\right)\right]_C&\left[T\left(x^3\right)\right]_C\\ |&|&|&|\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ [v_2]_C&[v_1]_C&[v_4]_C&[v_3]_C\\ |&|&|&|\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}|&|&|&|\\ e_2&e_1&e_4&e_3\\ |&|&|&|\end{pmatrix}\\&=A\end{aligned}$$

כנדרש.

1.2 גרעין ותמונה

הגדרה 1.2.1 (גרעין של העתקה לינארית). יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T\in\operatorname{Hom}(V,W)$. הגרעין של T הוא

$$\ker(T)\coloneqq\{v\in V\mid T(v)=0\}.$$

הגדרה 1.2.2 (תמונה של העתקה לינארית). יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T\in\operatorname{Hom}(V,W)$. התמונה של T היא

$$\operatorname{Im}(T)\coloneqq\{T(v)\mid v\in V\}.$$

הגדרה 1.2.3 (דרגה של אופרטור לינארי). יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T\in\operatorname{Hom}(V,W)$. הדרגה של T היא

$$\operatorname{rank}(T)\coloneqq\dim(\operatorname{Im}(T)).$$

הערה 1.2.4. אם V,W סוף־מימדיים עם בסיסים B,C בהתאמה, אז

$$\operatorname{rank}(T)=\operatorname{rank}\left([T]_C^B\right).$$

משפט 1.2.5 (משפט המימדים). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T\in\operatorname{End}(V)$. אז

$$\dim V=\dim\operatorname{Im}(T)+\dim\ker(T).$$

תרגיל 7. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $v \in V$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את (v) לבסיס $B_0 = (v_1, \ldots, v_n)$ של V כאשר $v = v_1$. תהי

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B = (u_1, \ldots, u_n)$ של V עבורו $M_B^{B_0} = A$. נקבל

$$\begin{aligned} [v]_B &= [\mathrm{Id}_V v]_B \\ &= [\mathrm{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת

$$u_i = \rho_{B_0}^{-1}\left([\mathrm{Id}]_B A^{-1} e_i\right) = \rho_{B_0}^{-1}\left(A^{-1} e_i\right).$$

תרגיל 8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $\operatorname{rank} T = 1$ אם ורק אם יש בסיסים B, C ל־V כך שכל מקדמי $[T]_C^B$ הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים B, C כמתואר. אז $\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} [T]_C^B = 1$.
בכיוון השני, נניח כי $\operatorname{rank} T = 1$. כלומר, $\dim \operatorname{Im} T = 1$. ממשפט המימדים מתקיים $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$, לכן

$$\dim \ker T = \dim V - \dim \operatorname{Im} T = \dim V - 1.$$

יהי $n := \dim V$ ויהי

$$\tilde{B} := (u_1, \ldots, u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי w וקטור פורש של $\operatorname{Im} T$ ויהי C בסיס של V כך שמתקיים $[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי $v := T^{-1}(w)$, ואז $(v, u_1, \ldots, u_{n-1})$ בלתי־תלויים לינארית, כי $v \notin \ker T$. לכן זה בסיס של V. אז גם $B :=$ $(v, v + u_1, \ldots, v + u_{n-1})$ בסיס של V כי המטריצה

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [v]_{\tilde{B}} & \cdots & [v + u_{n-1}]_{\tilde{B}} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפיכה.

נסמן $C=(w_1,\dots,w_m)$. מתקיים

$$T(v)=w=w_1+\ldots+w_m$$

ולכל $i\in[n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned}T(v+u_i)&=T(v)+T(u_i)\\&=T(v)+0\\&=T(v)\\&=w_1+\ldots+w_m\end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

תרגיל 9. תהי

$$\begin{aligned}T\colon \mathbb{R}_3[x]&\to\mathbb{R}_3[x]\\ .p(x)&\mapsto p(-1)\end{aligned}$$

מיצאו בסיסים B,C של $\mathbb{R}_3[x]$ עבורם

$$.[T]_C^B=A:=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

פתרון. ניקח בסיס $\left(x+1,x^2-1,x^3+1\right)=:\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3)$ של $\ker(T)$, כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי־תלוייה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי $T\neq 0$). מתקיים $w:=-1=T(x)$ ואז $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(w)$. נחשב בסיס C עבורו $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. נשלים את (v) לבסיס

$$.C_0=(v_1,v_2,v_3,v_4):=\left(-1,x,x^2,x^3\right)$$

המטריצה

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

הפיכה ולכן קיים בסיס $C=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ עבורו $M_C^{C_0}=X$, כשראינו שאז $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. כפי שראינו, ניתן לחשב את C לפי $u_i=\rho_{C_0}^{-1}\left(X^{-1}e_i\right)$. מתקיים

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$u_1 = \rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) = -1-x-x^2-x^3$$

$$u_2 = \rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = x$$

$$u_3 = \rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = x^2$$

$$.u_4 = \rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x^3$$

כלומר, $.C = \left(-1-x-x^2-x^3, x, x^2, x^3\right)$
ניקח $v = x \in V$ כך שיתקיים $T(v) = -1 = w$ ואז

$$B = (v, v+b_1, v+b_2, v+b_3) = \left(x, 2x+1, x^2+x-1, x^3+x+1\right)$$

כמו בתרגיל הקודם.
אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}T(x) &= -1\\ T(2x+1) &= -2+1 = -1\\ T\left(x^2+x-1\right) &= (-1)^2-1-1 = 1-2 = -1\\ T\left(x^3+x+1\right) &= (-1)^3-1+1 = -1\end{aligned}$$

וגם $[-1]_C = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, לכן

$$,[T]_C^B = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

כפי שרצינו.

פרק 2

דטרמיננטות

הגדרנו בהרצאה הגדרה רקורסיבית עבור הדטרמיננטה. לפעמים, במיוחד בהוכחות על טיעונים אבסטרקטיים בנוגע לדטרמיננטה, נוח לעבור עם הגדרה אחרת לפי תמורות.

הגדרה 2.0.1 (פרמוטציה). פרמוטציה של קבוצה X היא העתקה חד־חד ערכית ועל $\sigma\colon X\to X$.

סימון 2.0.2. לכל $n\in\mathbb{N}_+$, נסמן את הקבוצת הפרמוטציות של $[n]=\{1,\ldots,n\}$ בתור S_n.

דוגמה 2.0.3. נוכל להגדיר $\sigma\in S_5$ על ידי

$$\begin{aligned}\sigma(1)&=2\\ \sigma(2)&=3\\ \sigma(3)&=5\\ \sigma(4)&=4\\ \sigma(5)&=1.\end{aligned}$$

הגדרה 2.0.4 (חילוף). תמורה $\sigma\in S_n$ נקראת חילוף אם יש $a,b\in[n]$ שונים עבורם $\sigma(a)=b$, $\sigma(b)=a$ וגם $\sigma(c)=c$ לכל $c\in[n]\setminus\{a,b\}$.

נסמן חילוף כזה בתור (a,b) ונשים לב כי $(a,b)^{-1}=(a,b)$ כי $(a,b)^2=\mathrm{Id}_{[n]}$.

דוגמה 2.0.5. התמורה $\sigma\in S_5$ המוגדרת על ידי

$$\begin{aligned}\sigma(1)&=1\\ \sigma(2)&=5\\ \sigma(3)&=3\\ \sigma(4)&=4\\ \sigma(5)&=2\end{aligned}$$

היא חילוף.

טענה 2.0.6. כל $\sigma\in S_n$ יתן לכתוב כהרכבה של חילופים.

הוכחה. נוכיח את הטענה באינדוקציה. אם $n=1$ הטענה טריוויאלית. נניח כי $n\geq 2$ וכי הטענה נכונה לכל $m<n$, ותהי $\sigma\in S_n$. אם $\sigma(n)=n$ נקבל כי $\sigma|_{[n-1]}$ חד־חד ערכית ועל, ולכן תמורה. אז מההנחה ניתן לכתוב אותה כהרכבה של חילופים ב־S_{n-1}, והרכבת חילופים של אותם מספרים תיתן את σ. אחרת, יש $\ell\in[n-1]$ עבורו $\sigma(n)=\ell$. אז

$$((n,\ell)\circ\sigma)(n)=(n,\ell)(\ell)=n$$

ולכן מהפירוט לעיל ניתן לכתוב

$$(n,\ell)\circ\sigma=\tau_1\circ\tau_2\circ\ldots\circ\tau_k$$

עבור חילופים $\tau_1,\ldots,\tau_k$. אז

$$\sigma=(n,\ell)\circ\tau_k\circ\ldots\circ\tau_1$$

הרכבת חילופים. ■

טענה 2.0.7. תהי $\sigma\in S_n$ ונכתוב את σ כהרכבת חילופים בשתי דרכים

$$\begin{aligned}\sigma&=\tau_1\circ\ldots\circ\tau_k\\ \sigma&=\rho_1\circ\ldots\rho_\ell.\end{aligned}$$

אז ל־k,ℓ יש אותה זוגיות (כלומר, שניהם זוגיים או ששניהם אי־זוגיים).

הוכחה. מתקיים
$$.\mathrm{Id}=\sigma\sigma^{-1}=\tau_k\circ\ldots\tau_k\circ\rho_1\circ\ldots\circ\rho_\ell$$
הזוגיות של k,ℓ שווה אם ורק אם הסכום שלהם זוגי, ולכן די להוכיח כי אם $\mathrm{Id}=\sigma_1\circ\ldots\circ\sigma_m$ אז m זוגי.
נשים לב כי אם τ חילוף, יש $i,j\in[n]$ עבורם $i<j$ וגם $\tau(j)>\tau(i)$. באופן כללי, ■

תרגיל 10. נתון כי
$$.17\mid 20604,53227,25755,20927,289$$
הוכיחו כי
$$.17\mid\det\begin{pmatrix}2&0&6&0&4\\5&3&2&2&7\\2&5&7&5&5\\2&0&9&2&7\\0&0&2&8&9\end{pmatrix}$$

פתרון. ראשית נשים לב שהדטרמיננטה מבוטאת באמצעות סכומים ומכפלות של מקדמי המטריצה, לכן אצלנו היא אכן מספר שלם. כעת, נרצה באמצעות פעולות דירוג שורה ועמודה לקבל מטריצה עם עמודה שכל איבריה מתחלקים ב־17, ולהשתמש בתכונות דטרמיננטה כדי לקבל את הנדרש. נדרג
$$\begin{pmatrix}2&0&6&0&4\\5&3&2&2&7\\2&5&7&5&5\\2&0&9&2&7\\0&0&2&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow{C_5\mapsto C_5+10C_4+100C_3+1000C_2+10000C_1}\begin{pmatrix}2&0&6&0&20604\\5&3&2&2&53227\\2&5&7&5&25755\\2&0&9&2&20927\\0&0&2&8&289\end{pmatrix}$$
וכיוון שהוספקת כפולה של עמודה לעמודה אחרת לא משפיעה על הדטרמיננטה וכפולת עמודה בסקלר כופלת את הדטרמיננטה באותו סקלר, נקבל
$$.\det\begin{pmatrix}2&0&6&0&4\\5&3&2&2&7\\2&5&7&5&5\\2&0&9&2&7\\0&0&2&8&9\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}2&0&6&0&20604\\5&3&2&2&53227\\2&5&7&5&25755\\2&0&9&2&20927\\0&0&2&8&289\end{pmatrix}=17\det\begin{pmatrix}2&0&6&0&20604/17\\5&3&2&2&53227/17\\2&5&7&5&25755/17\\2&0&9&2&20927/17\\0&0&2&8&289/17\end{pmatrix}$$
הדטרמיננטה של המטריצה בצד ימין שלמה, כי כל מקדמי המטריצה שלמים, ולכן נקבל את הנדרש.

תרגיל 11. הוכיחו כי לכל $z,u,w\in\mathbb{C}$ ולכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ מתקיים
$$.\Re\left(\det\begin{pmatrix}a&z&\bar z\\b&u&\bar u\\c&w&\bar w\end{pmatrix}\right)=0$$

פתרון. ראשית, נשים לב כי $\det\left(\bar A\right)=\overline{\det(A)}$, כי הדטרמיננטה מורכבת מסכומים ומכפלות של המקדמים, וכי צמוד מתחלף עם סכומים ומכפלות. מצד שני, נקבל כי $\bar A$ היא המטריצה A בהחלפת העמודות השנייה והשלישית. אנו יודעים כי פעולה זאת הופכת את הסימן של הדטרמיננטה, ולכן
$$.\det(A)=\overline{\det\left(\bar A\right)}=\overline{-\det(A)}=-\overline{\det(A)}$$
לכן,
$$\Re(\det(A))=\frac{\det(A)+\overline{\det(A)}}{2}=\frac{0}{2}=0$$
כנדרש.