

אלגברה ב' (104168)

תרגילים על מטריצות מייצגות

אלן סורני

23 באוקטובר 2022

סימון 1.1. עבור מרחבים וקטוריים V, W מעל אותו שדה \mathbb{F} נסמן ב- $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ את אוסף ההעתקות הליניאריות $V \rightarrow W$, ונסמן $\text{End}_{\mathbb{F}}(V) := \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$. לעתים נשמיט את כתיבת השדה \mathbb{F} מהסימון, כשהוא ידוע או לא חשוב בקונטקסט.

סימון 1.2. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל אותו שדה \mathbb{F} עם בסיסים B, C בהתאמה ותהי $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. אם $B = (v_1, \dots, v_n)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

תרגיל 1. עבור ההעתקות והבסיסים הבאים, כיתבו את המטריצה המייצגת $[T]_C^B$.

1.

$$T: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + z \\ 5x - 3y \\ 2y + 3z \end{pmatrix}$$

והבסיסים

$$B = (e_1, e_2, e_3) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$C = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3)$$

2.

$$T: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$$

$$p(x) \mapsto p'(x)$$

והבסיסים

$$B = (1, x, x^2, x^3)$$

$$C = (1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3)$$

כאשר $\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3.

3.

$$T: \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$$

$$A \mapsto A^t$$

והבסיסים

$$B = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

תרגיל 2. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4,4}(\mathbb{C})$$

מיצאו בכל אחד מהמקרים הבאים בסיס C של V עבורו יתקיים $[\text{Id}_V]_C^B = A$.

$$1. B = (1, x, x^2, x^3) \text{ וגם } V = \mathbb{R}_3[x]$$

$$2. B = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1}) \text{ וגם } V = \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$$

$$3. B = (e_1 + 3e_3, e_2 + 3e_4, e_3 + 3e_1, e_4 + 3e_2) \text{ וגם } V = \mathbb{C}^4$$

תרגיל 3. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מיצאו בכל אחד מהמקרים הבאים בסיס B של V עבורו יתקיים $[\text{Id}_V]_C^B = A$.

$$1. B = (1, x, x^2, x^3) \text{ וגם } V = \mathbb{R}_3[x]$$

$$2. B = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1}) \text{ וגם } V = \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$$

$$3. B = (e_1 + 3e_3, e_2 + 3e_4, e_3 + 3e_1, e_4 + 3e_2) \text{ וגם } V = \mathbb{C}^4$$

תרגיל 4. בכל אחד מהמקרים הבאים, מיצאו בסיס B של V עבורו $[T]_C^B = I$ מטריצת היחידה.

$$1. V = \mathbb{C}^4 \text{ עם } B = (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ וגם}$$

$$T: V \rightarrow V$$

$$\cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$2. V = \mathbb{C}_3[x] \text{ עם } B = (1, x^2, x, x^3) \text{ וגם}$$

$$T: V \rightarrow V$$

$$\cdot (T(p))(x) = p(x+1)$$

$$3. V = \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C}) \text{ עם } B = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1}) \text{ וגם}$$

$$T: V \rightarrow V$$

$$\cdot A \mapsto -A^t$$

תרגיל 5. בכל אחד מהמקרים הבאים, מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B = I$ מטריצת היחידה.

1. $V = \mathbb{C}^4$ עם $C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ וגם

$$T: V \rightarrow V$$

$$\cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

2. $V = \mathbb{C}_3[x]$ עם $C = (1, x^2, x, x^3)$ וגם

$$T: V \rightarrow V$$

$$\cdot (T(p))(x) = p(x+1)$$

3. $V = \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$ עם $C = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ וגם

$$T: V \rightarrow V$$

$$\cdot A \mapsto -A^t$$

תרגיל 6. בכל אחד מהמקרים הבאים, מצאו אופרטור $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורו $[T]_B = A$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{וגם } B = (e_1 + e_2, e_2 + e_4, e_3, e_3 + e_4) \quad V = \mathbb{C}^4$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{וגם } B = (1, x^2, x + x^2) \quad V = \mathbb{C}_2[x]$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{וגם } B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad V = \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$$