



אלגברה ב' (104168)  
חורף 2022-2023  
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה-15 בנובמבר 2022

תוכן העניינים

1	I	חלק ראשון - מרחבים שמורים
2	1	מטריצות מייצגות
2	1.1	הגדרות בסיסיות
8	1.2	גרעין ותמונה
12	2	סכומים ישירים ולכסינות
12	2.1	סכומים ישירים
14	2.2	לכסינות
15	2.3	מרחבים שמורים

## **חלק I**

### **חלק ראשון - מרחבים שמורים**

# פרק 1

## מטריצות מייצגות

### 1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה  $\mathbb{F}$ , יהי  $B = (v_1, \dots, v_n)$  בסיס של  $V$  ויהי

$$v \in V \text{ וקטור קואורדינטות של } v \text{ לפי הבסיס } B \text{ הוא הוקטור } [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ כאשר } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \text{ היחידים עבורם}$$
$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i := \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\rho_B: V \rightarrow \mathbb{F}^n$$
$$v \mapsto [v]_B$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל אותו שדה  $\mathbb{F}$  עם בסיסים  $B, C$  בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

נסמן גם  $n := \dim(V)$  ו- $m := \dim(W)$ . עבור  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$  ויהי  $E = (e_1, \dots, e_m)$  הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{F}^m$ . אז:

(i) לכל  $i \in [m]$  מתקיים כי  $Ae_i$  העמודה ה- $i$  של  $A$ .

$$(ii) \text{ לכל } A, B \in \text{Mat}_{n \times \ell}(\mathbb{F}) \text{ או } B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_\ell \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ אז } AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell \\ | & & | \end{pmatrix}$$

תרגיל 1.1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\eta_C^B: \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$$
$$T \mapsto [T]_C^B$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  ויהיו  $B = (v_1, \dots, v_n)$  בסיס של  $V$  ו- $C$  בסיס של  $W$ . אז

$$[T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$$

לכל  $v \in V$ .

הוכחה. עבור  $v = v_i$  מתקיים  $[T]_C^B e_i = [T]_C^B [v_i]_B = [T]_C^B e_i$  וזאת העמודה ה- $i$  של  $[T]_C^B$ , שהינה  $[T(v_i)]_C$  לפי ההגדרה. אם  $v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i$  נקבל מלינאריות של  $T$  ושל  $\rho_B$  כי

$$\begin{aligned} [T(v)]_C &= \left[ T \left( \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right) \right]_C \\ &= \left[ \sum_{i \in [n]} \alpha_i T(v_i) \right]_C \\ &= \sum_{i \in [n]} \alpha_i [T(v_i)]_C \\ &= \sum_{i \in [n]} \alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\ &= [T]_C^B \left( \sum_{i \in [n]} \alpha_i [v_i]_B \right) \\ &= [T]_C^B \left[ \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i \right]_B \\ &= [T]_C^B [v]_B \end{aligned}$$

כנדרש. ■

**סימון 1.1.7.** אם  $B$  בסיס של מרחב וקטורי סוף-מימדי  $V$  ואם  $T \in \text{End}(V)$ , נסמן  $[T]_B^B := [T]_B$  ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של  $T$  לפי הבסיס  $B$ .

**סימון 1.1.8.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי עם בסיסים  $B, C$ . נסמן  $M_C^B := [\text{Id}_V]_C^B$ .

**סימון 1.1.9.** אם  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$ , נסמן

$$\begin{aligned} T_A: \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

**תרגיל 1.2.** יהי  $V = \mathbb{R}_3[x]$  מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned}$$

ויהי  $B = (1, x, x^2, x^3)$  בסיס של  $V$ . כיתבו את  $[T]_B$ .

**פתרון.** לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות  $[T]_B$  הן  $[T(x^i)]_B$  עבור  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(x) &= x+1 = 1+x \\ T(x^2) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 \\ T(x^3) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T(1)]_B &= e_1 \\ [T(x)]_B &= e_1 + e_2 \\ [T(x^2)]_B &= e_1 + 2e_2 + e_3 \\ [T(x^3)]_B &= e_1 + 3e_2 + 3e_3 + e_4 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 1.3. יהי  $V = \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ , תהי

$$T: V \rightarrow V$$

$$A \mapsto \frac{1}{2}(A - A^t)$$

ויהי

$$E = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) := \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

הבסיס הסטנדרטי של  $V$ . כיתבו את  $[T]_E$ .

הוכחה. כמו מקודם, נחשב את  $[T(E_{i,j})]_E$  כיוון שאלו עמודות  $[T]_E$ . מתקיים

$$T(E_{1,1}) = \frac{1}{2}(E_{1,1} - E_{1,1}) = 0$$

$$T(E_{1,2}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2}E_{1,2} - \frac{1}{2}E_{2,1}$$

$$T(E_{2,1}) = \frac{1}{2}(E_{2,1} - E_{1,2}) = \frac{1}{2}E_{2,1} - \frac{1}{2}E_{1,2}, T(E_{2,2}) = \frac{1}{2}(E_{2,2} - E_{2,2}) = 0$$

לכן

$$[T(E_{1,1})]_E = 0$$

$$[T(E_{1,2})]_E = \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$$

$$[T(E_{2,1})]_E = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3$$

$$[T(E_{2,2})]_E = 0$$

ואז

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

כנדרש.

תרגיל 1.4. יהי  $V = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  עם הבסיס  $B = (f_1, f_2)$  כאשר

$$f_1 \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x$$

$$f_2 \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = y$$

ותהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

מיצאו  $[T]_B = A$  עבור  $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ .

פתרון. מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$\begin{aligned} [T(f_1)]_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \cdot [T(f_2)]_B &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} T(f_1) &= f_1 + 2f_2 \\ T(f_2) &= 3f_1 + 4f_2 \end{aligned}$$

לכן, אם  $f \in V$  איבר כללי, נכתוב

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned} (T(f)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (f_1 + 2f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta (3f_1 + 4f_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha (x + 2y) + \beta (3x + 4y) \end{aligned}$$

**טענה 1.1.10.** תהייה  $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F})$  ונניח כי לכל  $v \in \mathbb{F}^n$  מתקיים  $Av = Bv$  או  $A = B$ .

הוכחה. מהנתון, מתקיים  $(A - B)v = 0$  לכל  $v \in \mathbb{F}^n$ . בפרט העמודה ה- $i$  של  $A - B$ , שהינה  $(A - B)e_i$ , שווה ל-0. לכן  $A - B = 0$ . ■

**טענה 1.1.11.** יהיו  $U, V, W$  מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה  $\mathbb{F}$  עם בסיסים  $B, C, D$  בהתאמה, ותהייה

$$\begin{aligned} S &\in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \\ T &\in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W) \end{aligned}$$

אז

$$\cdot [T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B$$

הוכחה. לכל  $u \in U$  מתקיים

$$\begin{aligned} [T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B \end{aligned}$$

לכן

$$\cdot, [T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B$$

■

כנדרש.

**טענה 1.1.12.** יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים סוף-מימדיים מעל שדה  $\mathbb{F}$  ותהי  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$  חד-חד ערכית. יהיו

$$\begin{aligned} B &= (v_1, \dots, v_n) \\ C &= (u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

בסיסים של  $V$  ויהיו

$$\begin{aligned} B' &= (T(v_1), \dots, T(v_n)) \\ C' &= (T(u_1), \dots, T(u_n)) \end{aligned}$$

או  $B', C'$  בסיסים של  $\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$  וגם  $M_C^B = M_{C'}^{B'}$ .

פתרון. כיוון ש- $T$  חד-חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם  $T: V \xrightarrow{\sim} \text{Im}(T)$ . איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן  $B', C'$  בסיסים. כעת, לכל  $i \in [n]$  נכתוב

$$v_i = \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j$$

ואז

$$M_C^B e_i = [v_i]_C = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} T(v_i) &= T\left(\sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} u_j\right) \\ &= \sum_{j \in [n]} \alpha_{i,j} T(u_j) \end{aligned}$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'} e_i = [T(v_i)]_{C'} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

**תרגיל 1.5.** תהי  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{F})$  הפיכה.

1. יהי  $E$  הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{F}^n$ . מיצאו בסיס  $B$  של  $\mathbb{F}^n$  עבורו  $A = M_E^B$ .

2. מיצאו בסיס  $C$  של  $\mathbb{F}^n$  עבורו  $A = M_C^E$ .

3. יהי  $B$  בסיס של  $\mathbb{F}^n$ . מיצאו בסיס  $C$  של  $\mathbb{F}^n$  עבורו  $A = M_C^B$ .

4. יהי  $V$  מרחב וקטורי מממד  $n \in \mathbb{N}_+$  מעל  $\mathbb{F}$ , יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  איזומורפיזם ויהי  $B = (v_1, \dots, v_n)$  בסיס של  $V$ . מיצאו בסיס  $C$  של  $V$  עבורו  $[T]_C^B = A$ .

**פתרון.** 1. אם  $B = (v_1, \dots, v_n)$ , מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

לכן ניקח את  $(v_1, \dots, v_n)$  להיות עמודות  $A$ , לפי הסדר.

2. לכל  $v \in \mathbb{F}^n$  מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן  $M_C^E = (M_E^C)^{-1}$ . אם ניקח  $C = (u_1, \dots, u_n)$  כאשר  $u_i$  העמודה ה- $i$  של  $A^{-1}$  נקבל מהסעיף הקודם כי  $M_C^E = A^{-1}$  ולכן  $M_C^E = (A^{-1})^{-1} = A$ . כלומר ניקח,  $u_i = A^{-1} e_i$ .

3. מתקיים  $M_C^B = M_C^E M_E^B$  לכן נרצה שיתקיים  $M_C^E M_E^B = A$  או במילים אחרות  $M_C^B = A (M_E^B)^{-1} = A M_E^E = A$ . מהסעיף הקודם, נרצה  $C = (u_1, \dots, u_n)$  כאשר  $u_i$  העמודה ה- $i$  של  $(A M_E^E)^{-1} = M_E^B A^{-1}$ , כלומר

$$u_i = M_E^B A^{-1} e_i$$



4. עבור כל בסיס  $C'$  מתקיים  $[T]_{C'}^B = M_{C'}^B [T]_B^B$  לכן נרצה  $M_C^B [T]_B^B = A$ . כיוון ש- $T$  איזומורפיזם, המטריצה  $[T]_B^B$  הפיכה, ולכן נרצה  $M_C^B = A \left([T]_B^B\right)^{-1}$ . כעת, אם  $C = (v_1, \dots, v_n)$  נקבל כי  $M_C^B = M_{\hat{C}}^E$  כאשר  $\hat{C} = ([v_1]_B, \dots, [v_n]_B)$ . כלומר, נחפש  $\hat{C}$  עבורו  $M_{\hat{C}}^E = A [T]_B^{-1}$ . לפי הסעיף השני, נרצה  $\hat{C} = (u_1, \dots, u_n)$  עבור

$$u_i = \left(A [T]_B^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i$$

לכן

$$v_i = \rho_B^{-1} ([T]_B A^{-1} e_i)$$

תרגיל 1.6. יהי  $V = \mathbb{C}_3[x]$ , תהי

$$T: V \rightarrow V, \quad p(x) \mapsto p(x+1)$$

יהי  $E = (1, x, x^2, x^3)$  הבסיס הסטנדרטי ותהי  $A =$  כיתבו מפורשות בסיס  $C$  של  $V$  עבורו

$$A = [T]_C^E$$

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם  $\hat{C} = (u_1, \dots, u_4)$  כאשר  $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$ . חישבנו ב-1.2 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי  $A^2 = I$  כלומר  $A^{-1} = A$ . נשים לב כי

$$Ae_1 = e_2$$

$$Ae_2 = e_1$$

$$Ae_3 = e_4$$

$$Ae_4 = e_3$$

ואז נקבל

$$\begin{aligned} u_1 &= [T]_E A^{-1} e_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_2 &= [T]_E A^{-1} e_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_3 &= [T]_E A^{-1} e_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_4 &= [T]_E A^{-1} e_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר

$$\hat{C} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

ולבסוף

$$C = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (1+x, 1, 1+3x+3x^2+x^3, 1+2x+x^2)$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן  $A$ . מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 = v_2 \\ T(x) &= x+1 = v_1 \\ T(x^2) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 = v_4 \\ T(x^3) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 = v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T]_C^E &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_C & [T(x)]_C & [T(x^2)]_C & [T(x^3)]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

כנדרש.

## 1.2 גרעין ותמונה

**הגדרה 1.2.1** (גרעין של העתקה ליניארית). יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי  $T \in \text{Hom}(V, W)$ . הגרעין של  $T$  הוא

$$\ker(T) := \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

**הגדרה 1.2.2** (תמונה של העתקה ליניארית). יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי  $T \in \text{Hom}(V, W)$ . התמונה של  $T$  היא

$$\text{Im}(T) := \{T(v) \mid v \in V\}$$

**הגדרה 1.2.3** (דרגה של אופרטור ליניארי). יהיו  $V, W$  מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה ותהי  $T \in \text{Hom}(V, W)$ . הדרגה של  $T$  היא

$$\text{rank}(T) := \dim(\text{Im}(T))$$

**הערה 1.2.4**. אם  $V, W$  סוף-מימדיים עם בסיסים  $B, C$  בהתאמה, אז

$$\text{rank}(T) = \text{rank}([T]_C^B)$$

**משפט 1.2.5** (משפט המימדים). יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי  $T \in \text{End}(V)$ . אז

$$\dim V = \dim \text{Im}(T) + \dim \ker(T)$$

**תרגיל 1.7.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהי  $v \in V$ . מיצאו בסיס  $B$  של  $V$  עבורו  $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**פתרון.** נשלים את  $(v)$  לבסיס  $B_0 = (v_1, \dots, v_n)$  של  $V$  כאשר  $v_1 = v$ . תהי

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$$

$A$  הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס  $B = (u_1, \dots, u_n)$  של  $V$  עבורו  $M_B^{B_0} = A$ . נקבל

$$\begin{aligned} [v]_B &= [\text{Id}_V v]_B \\ &= [\text{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת

$$u_i = \rho_{B_0}^{-1}([\text{Id}]_B A^{-1} e_i) = \rho_{B_0}^{-1}(A^{-1} e_i)$$

**תרגיל 1.8.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה  $\mathbb{F}$ , ותהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . הראו כי  $\text{rank } T = 1$  אם ורק אם יש בסיסים  $B, C$  ל- $V$  כך שכל מקדמי  $[T]_C^B$  הם 1.

**פתרון.** נניח כי יש בסיסים  $B, C$  כמתואר. אז  $\text{rank } T = \text{rank } [T]_C^B = 1$ . מכיוון השני, נניח כי  $\text{rank } T = 1$ . כלומר,  $\dim \text{Im } T = 1$ . משפט המימדים מתקיים  $\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im } T$ , לכן

$$\dim \ker T = \dim V - \dim \text{Im } T = \dim V - 1$$

יהי  $n := \dim V$  ויהי

$$\tilde{B} := (u_1, \dots, u_{n-1})$$

בסיס של  $\ker T$ .

יהי  $w$  וקטור פורש של  $\text{Im } T$  ויהי  $C$  בסיס של  $V$  כך שמתקיים  $[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ . שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי

$B := T^{-1}(w)$ , ואז  $(v, u_1, \dots, u_{n-1})$  בלתי-תלויים לינארית, כי  $v \notin \ker T$ . לכן זה בסיס של  $V$ . אז גם  $B := (v, v + u_1, \dots, v + u_{n-1})$  בסיס של  $V$  כי המטריצה

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [v]_{\tilde{B}} & \dots & [v + u_{n-1}]_{\tilde{B}} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפיכה.

נסמן  $C = (w_1, \dots, w_m)$  מתקיים

$$T(v) = w = w_1 + \dots + w_m$$

ולכל  $i \in [n-1]$  מתקיים

$$\begin{aligned} T(v + u_i) &= T(v) + T(u_i) \\ &= T(v) + 0 \\ &= T(v) \\ &= w_1 + \dots + w_m \end{aligned}$$

לכן  $[T]_C^B$  מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

**תרגיל 1.9.** תהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(-1) \end{aligned}$$

מיצאו בסיסים  $B, C$  של  $\mathbb{R}_3[x]$  עבורם

$$[T]_C^B = A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**פתרון.** ניקח בסיס  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3) := (x+1, x^2-1, x^3+1)$  של  $\ker(T)$ , כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי-תלויה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי  $T \neq 0$ ). מתקיים  $-1 = T(x) = w$  ואז

$$\text{Im}(T) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(w) \quad \text{נחשב בסיס } C \text{ עבורו } [w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ נשלים את } (v) \text{ לבסיס}$$

$$C_0 = (v_1, v_2, v_3, v_4) := (-1, x, x^2, x^3)$$

המטריצה

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ כפי שראינו, ניתן לחשב הפיכה ולכן קיים בסיס } C = (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ עבורו } M_C^{C_0} = X \text{ כשראינו שאז}$$

את  $C$  לפי  $u_i = \rho_{C_0}^{-1}(X^{-1}e_i)$  מתקיים

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \rho_{C_0}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = -1 - x - x^2 - x^3 \\
 u_2 &= \rho_{C_0}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x \\
 u_3 &= \rho_{C_0}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = x^2 \\
 u_4 &= \rho_{C_0}^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = x^3
 \end{aligned}$$

כלומר,  $C = (-1 - x - x^2 - x^3, x, x^2, x^3)$   
 ניקח  $T(v) = -1 = w$  כך שיתקיים  $v = x \in V$  ואז

$$B = (v, v + b_1, v + b_2, v + b_3) = (x, 2x + 1, x^2 + x - 1, x^3 + x + 1)$$

כמו בתרגיל הקודם.  
 אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}
 T(x) &= -1 \\
 T(2x + 1) &= -2 + 1 = -1 \\
 T(x^2 + x - 1) &= (-1)^2 - 1 - 1 = 1 - 2 = -1 \\
 T(x^3 + x + 1) &= (-1)^3 - 1 + 1 = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{וגם } [-1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ , לכן}$$

$$, [T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כפי שרצינו.

## פרק 2

# סכומים ישרים ולכסינות

### 2.1 סכומים ישרים

הגדרה 2.1.1 (סכום ישר). יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל  $\mathbb{F}$  ויהיו  $V_1, \dots, V_k \leq V$  תת-מרחבים. נזכיר כי

$$V_1 + \dots + V_k := \{v_1 + \dots + v_k \mid \forall i \in [k]: v_i \in V_i\}$$

נגיד שהסכום הזה הוא סכום ישר אם כל  $v \in V_1 + \dots + V_k$  ניתן לכתיבה  $v = v_1 + \dots + v_k$  בצורה יחידה עבור  $v_i \in V_i$ . במקרה זה נסמן את הסכום  $\bigoplus_{i \in [k]} V_i = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ .

הערה 2.1.2. באופן שקול, הסכום  $V_1 + \dots + V_k$  ישר אם ורק אם  $v_1 + \dots + v_k = 0$  עבור  $v_i \in V_i$  גורר  $v_i = 0$  לכל  $i \in [k]$ .

טענה 2.1.3. הסכום  $\sum_{i \in [k]} V_i := V_1 + \dots + V_k$  ישר אם ורק אם

$$V_i \cap \left( \sum_{j \neq i} V_j \right) = \{0\}$$

לכל  $i \in [k]$ .  
את המקרה  $k = 2$  ראינו בהרצאה, והטענה הכללית נובעת באינדוקציה.

הגדרה 2.1.4 (שרשור קבוצות סדורות). תהיינה

$$\begin{aligned} A_1 &= (v_{1,1}, \dots, v_{1,\ell_1}) \\ A_2 &= (v_{2,1}, \dots, v_{2,\ell_2}) \\ &\vdots \\ A_k &= (v_{k,1}, \dots, v_{k,\ell_k}) \end{aligned}$$

קבוצות סדורות. נגדיר את השרשור שלהן

$$A_1 \cup \dots \cup A_k := (v_{1,1}, \dots, v_{1,\ell_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,\ell_2}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,\ell_k})$$

זאת הקבוצה הסדורה שהיא שרשור איברי הקבוצות הסדורות  $A_1, \dots, A_k$  לפי הסדר.

טענה 2.1.5. יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי ויהיו  $V_1, \dots, V_k$  תת-מרחבים של  $V$ . התנאים הבאים שקולים.

1.  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ .

2. לכל בחירת בסיסים  $B_i$  של  $V_i$  הקבוצה הסדורה  $B_1 \cup \dots \cup B_k$  היא בסיס של  $V$ .

3. קיימים בסיסים  $B_i$  של  $V_i$  כך שהקבוצה הסדורה  $B_1 \cup \dots \cup B_k$  היא בסיס של  $V$ .

4.  $\dim V = \sum_{i \in [k]} \dim V_i$  וגם

$$\dim V = \sum_{i \in [k]} \dim(V_i)$$

**תרגיל 2.1.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה  $\mathbb{F}$ , ונזכיר כי  $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  נקראת הטלה אם  $P^2 = P$ .

1. תהי  $P \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  הטלה. הראו כי  $V = \ker(P) \oplus \text{Im}(P)$ .

2. הראו כי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  הטלה אם ורק אם קיים בסיס  $B$  של  $V$  עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

**פתרון.** 1. יהי  $v \in V$ . מתקיים  $v = (v - P(v)) + P(v)$  כאשר  $P(v) \in \text{Im}(P)$ . כמו כן,

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$$

ולכן  $v - P(v) \in \ker(P)$  ונקבל כי  $V = \ker(P) + \text{Im}(P)$ .

כעת, אם  $v \in \ker(P) \cap \text{Im}(P)$  בפרט  $v \in \text{Im}(P)$  ולכן יש  $u \in V$  עבורו  $P(u) = v$ . אז

$$v = P(u) = P^2(u) = P(P(u)) = P(v) = 0$$

ולכן  $\ker(P) \cap \text{Im}(P) = 0$  ונקבל כי הסכום ישר.

2. נניח כי  $T$  הטלה. במקרה זה  $V = \ker(T) \oplus \text{Im}(T)$ . עבור בסיסים

$$C = (c_1, \dots, c_m) \\ D = (d_{m+1}, \dots, d_\ell)$$

של  $\ker(T)$ ,  $\text{Im}(T)$  בהתאמה, נקבל כי  $C \cup D$  בסיס של  $V$ . לכל  $c_i \in C$  מתקיים  $T(c_i) = 0$ , לכן  $\dim(\ker(T))$  העמודות הראשונות של  $[T]_{C \cup D}$  הן עמודות אפסים. לכל  $d_i \in D$  יש  $u_i \in V$  עבורו

$$d_i = T(u_i) = T^2(u_i) = T(T(u_i)) = T(d_i)$$

לכן

$$[T(d_i)]_{C \cup D} = [d_i]_{C \cup D} = e_i$$

ולכן העמודה ה- $i$  עבור  $i \geq m$  היא  $e_i$ , ונקבל את הנדרש.

להיפך, נניח שקיים בסיס  $B = (v_1, \dots, v_n)$  כנ"ל. אז  $[T]_B^2 = [T]_B^2 = [T]_B$  ולכן  $T^2 = T$  ונקבל כי  $T$  הטלה.

**הגדרה 2.1.6 (משלים ישר).** יהי  $V$  מרחב וקטורי ויהי  $U \leq V$  תת-מרחב. משלים ישר  $W$  של  $U$  הוא תת-מרחב של  $V$  עבורו  $V = U \oplus W$ .

**תרגיל 2.2.** יהי  $V$  מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל שדה  $\mathbb{F}$  ויהי  $U \leq V$  תת-מרחב עם בסיס  $B$ . יהי  $C$  בסיס של  $V$ .

1. הראו שניתן להשלים את  $B$  לבסיס של  $V$  על ידי הוספת וקטורים מ- $C$ .

2. הסיקו שקיים משלים ישר  $W$  של  $U$  עם בסיס של וקטורים מ- $C$ .

**פתרון.** 1. נסמן  $n := \dim_{\mathbb{F}}(V)$  ונזכיר את הטענה באינדוקציה על  $|B|$ .  $m = n - |B|$ .

עבור  $m = 0$  מתקיים  $|B| = n$  ולכן  $U = V$ . נניח שהטענה נכונה לכל  $k < m$  ונזכיר אותה עבור  $m$ .

אם  $C \subseteq U$ , מתקיים

$$V = \text{Span}_{\mathbb{F}}(C) \subseteq \text{Span}_{\mathbb{F}}(U) = U$$

ולכן  $V = U$  בסתירה לכך שהמימדים שונים. לכן, קיים  $c \in C \setminus U$ . אז  $B \cup (c)$  קבוצה בלתי-תלויה לינארית, כי  $c$  אינו צירוף לינארי של הווקטורים הקודמים. נגדיר  $U' = \text{Span}_{\mathbb{F}}(B \cup (c))$ . אז

$$n - \dim(U') = n - |B| - 1 = m - 1 < m$$

ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה ולקבל שניתן להשלים את  $B \cup (c)$  לבסיס  $(B \cup (c)) \cup (c_2, \dots, c_m)$  של  $V$ , כאשר  $c_i \in C$ . אז  $c, c_2, \dots, c_m \in C$  משלימים את  $B$  לבסיס של  $V$ .

2. בסימונים של הסעיף הקודם,  $B \cup (c, \dots, c_m)$  בסיס של  $V$ . נסמן  $D = (c, c_2, \dots, c_m)$  וגם  $W = \text{Span}_{mbbF}(D)$ . אז  $B \cup D$  בסיס של  $V$  ולכן

$$V = \text{Span}_{\mathbb{F}}(B) \oplus \text{Span}_{\mathbb{F}}(D) = U \oplus W$$

כנדרש.

תרגיל 2.3. יהי  $V = \mathbb{R}_3[x]$  ותהינה

$$B = (1 + x, x + x^2) \\ C = (1, x, x^2, x^3)$$

קבוצות סדורות של וקטורים מ- $V$ . יהי  $U = \text{Span}(B)$ .

1. מיצאו משלים ישר  $W$  של  $U$  ובסיס עבור  $W$  שמורכב מוקטורים ב- $C$ .

2. האם  $W$  שמצאתם יחיד? הוכיחו או הפריכו.

פתרון. 1. נשלים את  $B$  לבסיס של  $V$  על ידי הוספת וקטורים מ- $C$ . נוסיף את  $1 \notin U$  כדי לקבל  $B' = (1 + x, x + x^2, 1)$ .

ואז את  $x^3 \notin \text{Span}(B')$  כדי לקבל בסיס  $B'' = (1 + x, x + x^2, 1, x^3)$  של  $V$ .

נסמן  $D = (1, x^3)$  וניקח  $W = \text{Span}(D)$ . אז  $B'' = B \cup D$  בסיס, ולכן  $V = U \oplus W$ , כנדרש.

2. לא. למשל, יכולנו לקחת  $B' = (1 + x, x + x^2, x^2)$  ואז  $B'' = (1 + x, x + x^2, x^2, x^3)$ . במקרה זה היינו מקבלים משלים ישר  $\text{Span}(x^2, x^3)$ , ששונה מ- $W$ .

## 2.2 לכסינות

הגדרה 2.2.1 (אופרטור לכסין). אופרטור  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  נקרא לכסין אם קיים בסיס  $B$  של  $V$  וקיימים  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$  עבורם

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

בסיס  $B$  כזה נקרא בסיס מלכסן עבור  $T$ , והמטריצה  $[T]_B$  נקראת מטריצה אלכסונית.

הגדרה 2.2.2. יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . וקטור  $v \in V \setminus \{0\}$  נקרא וקטור עצמי של  $T$  אם קיים  $\lambda \in \mathbb{F}$  עבורו  $T(v) = \lambda v$ . במקרה זה  $\lambda$  נקרא ערך עצמי של  $T$ .

הערה 2.2.3. וקטור עצמי של  $T$  אם ורק אם קיים  $\lambda \in \mathbb{F}$  עבורו  $T(v) = \lambda v$ . מתקיים  $\text{Span}_{\mathbb{F}}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$  ולכן באופן שקול  $T(v) \in \text{Span}_{\mathbb{F}}(v)$  ובאופן שקול  $T(\alpha v) = \alpha T(v) \in \text{Span}_{\mathbb{F}}(v)$  לכל  $\alpha \in \mathbb{F}$ . לכן, וקטור עצמי של  $T$  אם ורק אם  $\text{Span}_{\mathbb{F}}(v)$  הינו  $T$ -שמוור.

הערה 2.2.4. אופרטור  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  הינו לכסין אם ורק אם קיים בסיס של  $V$  שמורכב מוקטורים עצמיים של  $T$ .

הגדרה 2.2.5 (מרחב עצמי). יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  ויהי  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$ . המרחב העצמי של  $T$  עם הערך  $\lambda$  הוא

$$V_{\lambda} := \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \text{Id}_V - T)$$

הגדרה 2.2.6 (פולינום אופייני). יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . הפולינום האופייני של  $T$  הוא

$$p_T(x) := \det(x \text{Id}_V - T)$$

הערה 2.2.7. בפועל, נסתכל בדרך כלל על פולינום אופייני של מטריצה, כיוון שצריך לבחור בסיס כדי לחשב את הדטרמיננטה. ראינו כי הדטרמיננטה לא תלויה בבחירת הבסיס, ולכן  $p_T(x) = p_{[T]_B}(x)$  לכל בסיס  $B$  של  $V$ , כאשר  $p_A(x) = \det(xI - A)$ .

מסקנה 2.2.8. איבר  $\lambda \in \mathbb{F}$  הוא ערך עצמי של  $T$  אם ורק אם  $\ker(\lambda \text{Id}_V - T) \neq 0$ , אם ורק אם  $p_T(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_V - T) = 0$ .

כלומר, הערכים העצמיים של  $T$  הם השורשים של  $p_T$ .



**הערה 2.2.9.** כיוון שלכל פולינום  $p \in \mathbb{C}[x]$  יש שורש, לכל  $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  יש ערך עצמי.

**הגדרה 2.2.10 (ריבוי אלגברי).** יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . הריבוי האלגברי של ערך עצמי  $\lambda \in \mathbb{F}$  הוא הריבוי שלו כשורש של  $p_T$ . נסמו  $r_a(\lambda)$ .

**הגדרה 2.2.11 (ריבוי גיאומטרי).** יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי  $\lambda \in \mathbb{F}$  הוא  $r_g(\lambda) := \dim V_{\lambda}$ .

**הערה 2.2.12.** מתקיים תמיד  $r_a(\lambda) \leq r_g(\lambda)$ .

**הגדרה 2.2.13.** תהי  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$  ויהי  $T = T_A$  אופרטור כפל ב- $A$  משמאל (כלומר,  $T(v) = Av$ ). אם  $T$  לכסי, קיים בסיס  $B$  עבורו  $D := [T]_B$  אלכסונית. אז

$$\begin{aligned} A &= [T]_E \\ &= [\text{Id} \circ T \circ \text{Id}]_E \\ &= M_E^B [T]_B M_B^E \\ &= M_E^B D (M_E^B)^{-1} \end{aligned}$$

ואם נסמן  $P = M_E^B$  נקבל כי זאת מטריצה הפיכה עבורה  $P^{-1}AP = D$ . לכן, נגיד שמטריצה  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$  הפיכה אם קיימת  $P \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$  הפיכה עבורה  $P^{-1}AP$  אלכסונית.

## 2.3 מרחבים שמורים

נרצה להבין אופרטורים לינאריים דרך הבנה של צמצום שלהם לתת-מרחבים קטנים יותר. אם  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ , נוכל תמיד לצמצם את המקור כדי לקבל העתקה לינארית  $T|_W : W \rightarrow V$ , אבל לא נוכל ללמוד מספיק כאשר הצמצום אינו אופרטור. לכן נרצה לצמצם גם את הטווח, מה שמוביל להגדרה הבאה.

**הגדרה 2.3.1 (מרחב שמור).** יהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$  ויהי  $U \leq V$ . נגיד כי  $U$  הינו  $T$ -שמור (או  $T$ -אינווריאנטי אם  $T(U) \subseteq U$ ).

**הגדרה 2.3.2.** במקרה ש- $W$  מרחב  $T$ -שמור, נוכל להסתכל על הצמצום  $T|_W : W \rightarrow W$  שמוגדר על ידי  $T|_W(w) = T(w)$ .

**הערה 2.3.3.** שימו לב שהסימון הוא אותו סימון כמו הצמצום של המקור, אך במסגרת הקורס צמצום אופרטורים יתייחס לזה שבהגדרה אלא אם כן יצוין מפורשות אחרת.

**תרגיל 2.4.** יהי  $\mathbb{C}$  כמרחב וקטורי ממשי ויהי

$$\begin{aligned} T: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned}$$

מצאו את התת-מרחבים ה- $T$ -שמורים של  $\mathbb{C}$  והסיקו כי  $T$  אינו לכסי מעל  $\mathbb{R}$ .

**פתרון.**  $\mathbb{C}, \{0\}$  תת-מרחבים  $T$ -שמורים.

נניח כי  $W \leq \mathbb{C}$  מרחב  $T$ -שמור נוסף. אז  $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$  ולכן יש

$$z_0 \in \mathbb{C}^{\times} := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

עבורו  $W = \text{Span}\{z_0\}$ . נקבל  $T(z_0) \in W$  לכן  $T(z_0) = cz_0$  עבור  $c \in \mathbb{R}$ . אבל  $cz_0 = iz_0$  גורר  $c = i$  בסתירה. תת-מרחבים  $T$ -שמורים 1-מימדיים של  $\mathbb{C}$  הם  $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v)$  עבור  $v$  וקטור עצמי של  $T$ . לכן אין ל- $T$  וקטורים עצמיים, ולכן הוא אינו לכסינה מעל  $\mathbb{R}$ .

**תרגיל 2.5.** יהי  $W \leq V$  ויהי  $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ . יהיו  $v_1, \dots, v_k \in V$  וקטורים עצמיים עם ערכים עצמיים שונים  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . הראו כי אם  $v_1 + \dots + v_k \in W$  אז  $v_i \in W$  לכל  $i \in [k]$ .

**פתרון.** נוכיח זאת באינדוקציה, כאשר הבסיס  $k = 1$  מיידי. נניח כי הטענה נכונה לכל  $\ell < k$  ונסמן  $w = v_1 + \dots + v_k$ . אז

$$(T - \lambda_k)(w) = (\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_k)v_k = \sum_{i \in [k-1]} (\lambda_i - \lambda_k)v_i$$

וזה וקטור ב- $W$  כי  $(T - \lambda_k \text{Id}_V)w = T(w) - \lambda_k w \in W$  וכי  $T(w) \in W$ . מהנחת האינדוקציה נקבל כי  $(\lambda_i - \lambda_k)v_i \in W$  לכל  $i \in [k-1]$ , ולכן גם  $v_i \in W$  לכל  $i \in [k-1]$ . לבסוף  $v_k = w - v_1 - \dots - v_{k-1} \in W$  כצירוף לינארי של וקטורים ב- $W$ .

תרגיל 2.6. יהי  $V = \mathbb{C}^n$  ותהי

$$T: V \rightarrow V$$

עם

$$[T]_E = \lambda_1 I_{m_1} \oplus \dots \oplus \lambda_k I_{m_k}$$

עבור  $\lambda_i \neq \lambda_j$  לכל  $i \neq j$ . נסמן  $n_i = m_1 + \dots + m_{i-1} + 1$ . מצאו את כל התת-מרחבים ה- $T$ -שמורים של  $V$ .

פתרון. ראשית, אם  $W \leq V_i := \text{Span}(e_{n_i}, \dots, e_{n_i+m_i-1})$ , נקבל כי  $T(w) = \lambda_i w \in W$  לכל  $w \in W$ . לכן כל תת-מרחב כזה הינו  $T$ -שמור. גם סכום של תת-מרחבים כאלה יהיה  $T$ -שמור כי אם  $W_i := W \cap V_i$  לכל  $i \in [k]$  אז

$$T(v_1 + \dots + v_k) = T(v_1) + \dots + T(v_k)$$

כאשר  $T(v_i) \in W$  וגם  $T(v_i) = \lambda_i v_i \in V_i$  כלומר  $T(v_i) \in W_i$ . נראה שאלו כל האפשרויות לתת-מרחבים שמורים. באופן כללי, אם  $w \in W$  ניתן לכתוב  $w = v_1 + \dots + v_k$  עבור  $v_i$  וקטור עצמי של  $T$  עם ערך עצמי  $\lambda_i$ . נסמן ב- $P_i: V \rightarrow V$  את ההטלה על  $V_i := \text{Span}(e_{n_i}, \dots, e_{n_i+m_i-1})$ , ואז מהתרגיל הקודם  $P_i(w) \in W$  לכל  $i \in [k]$ . נקבל כי  $P_i(W) \subseteq W$ , כעת,

$$w = v_1 + \dots + v_k = P_1(w) + \dots + P_k(w)$$

לכן  $W = \sum_{i \in [k]} P_i(W)$ . אם  $u_1 + \dots + u_k = 0$  עבור  $u_i \in V_i$ , נקבל  $u_i = 0$  לכל  $i$ , כיוון שוקטורים עצמיים של ערכים עצמיים שונים הינם בלתי-תלויים לינארית. בפרט זה נכון עבור  $u_i \in P_i \text{pr} s W$ , ולכן הסכום  $W = \bigoplus_{i \in [k]} P_i(W)$  הינו ישר. מתקיים  $P_i(W) \leq W_i$ , ולכן התת-מרחבים השמורים הם בדיוק אלו מהצורה  $\bigoplus_{i \in [k]} W_i$  עבור  $W_i \leq V_i$ .

תרגיל 2.7. 1. תהי  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ . הוכיחו כי אם אין ל- $T_A$  תת-מרחב שמור ממימד 1, יש לה תת-מרחב שמור ממימד 2.

2. נניח כי  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  מטריצה שכל מקדמיה ממשיים. הוכיחו כי אם  $\lambda$  ערך עצמי של  $T_A$ , גם  $\bar{\lambda}$  ערך עצמי של  $T_A$ .

פתרון. עבור מטריצה  $A = (a_{i,j}) \in \text{Mat}_{n,m}$  נגדיר

$$\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})$$

את המטריצה שמקדמיה הם המספרים הצמודים לאלו ב- $A$ . נשים לב כי עבור שתי מטריצות  $A, B \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ , מתקיים  $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$  ולכן

$$\begin{aligned} (\overline{AB})_{i,j} &= \overline{\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}} \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{a_{i,k} b_{k,j}} \\ &= (\bar{A} \bar{B})_{i,j} \end{aligned}$$

ולכן  $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$

1. תת-מרחב  $T_A$ -שמור ממימד 1 הוא מהצורה  $\text{Span}_{\mathbb{R}}(v)$  עבור וקטור עצמי  $v$  של  $A$ . לכן מההנחה, אין ל- $T_A$  וקטורים עצמיים.

אבל, אפשר לחשוב על  $A$  כעל מטריצה ב- $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  שנשמנה  $\tilde{A}$ . אז ל- $\tilde{A} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$  יש וקטור עצמי כאופרטור מעל  $\mathbb{C}$ . יהי  $v \in \mathbb{C}^n$  וקטור עצמי של  $T_{\tilde{A}}$  עם ערך עצמי  $\lambda = \alpha + i\beta$ , ונכתוב

$$v = \begin{pmatrix} u_1 + iw_1 \\ \vdots \\ u_n + iw_n \end{pmatrix} = u + iw$$

כאשר  $u, w \in \mathbb{C}^n$  וקטורים עם מקדמים ממשיים. נוכל לחשוב עליהם כחיים ב- $\mathbb{R}^n$ . אז

$$\begin{aligned} Au + iAw &= A(u + iw) \\ &= Av \\ &= \lambda v \\ &= (\alpha + i\beta)(u + iw) \\ &= \alpha u + \alpha iw + \beta iu - \beta w \\ &= (\alpha u - \beta w) + i(\alpha w + \beta u) \end{aligned}$$

כאשר  $Au, Aw \in \mathbb{R}^n$ . אז, נוכל להשוות מקדמים ולקבל

$$\begin{aligned} T_A(u) &= Au = \alpha u - \beta w \in \text{Span}(u, w) \\ T_A(w) &= Aw = \alpha w + \beta u \in \text{Span}(u, w) \end{aligned}$$

לכן  $\text{Span}(u, w)$  הינו תת-מרחב  $L_A$ -שמור של  $\mathbb{R}^n$ .

2. אם  $\lambda$  ממשי אין מה להוכיח כי  $\lambda = \bar{\lambda}$ . נניח אם כן כי  $\lambda = \alpha + i\beta$  עבור  $\beta \neq 0$ . נסמן ב- $v = u + iw$  וקטור עצמי של  $A$  עם ערך עצמי  $\lambda$ , כאשר  $u, w \in \mathbb{C}^n$  עם מקדמים ממשיים. אז

$$\bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

ולכן  $\bar{v}$  וקטור עצמי של  $A$  עם ערך עצמי  $\bar{\lambda}$ , כנדרש.