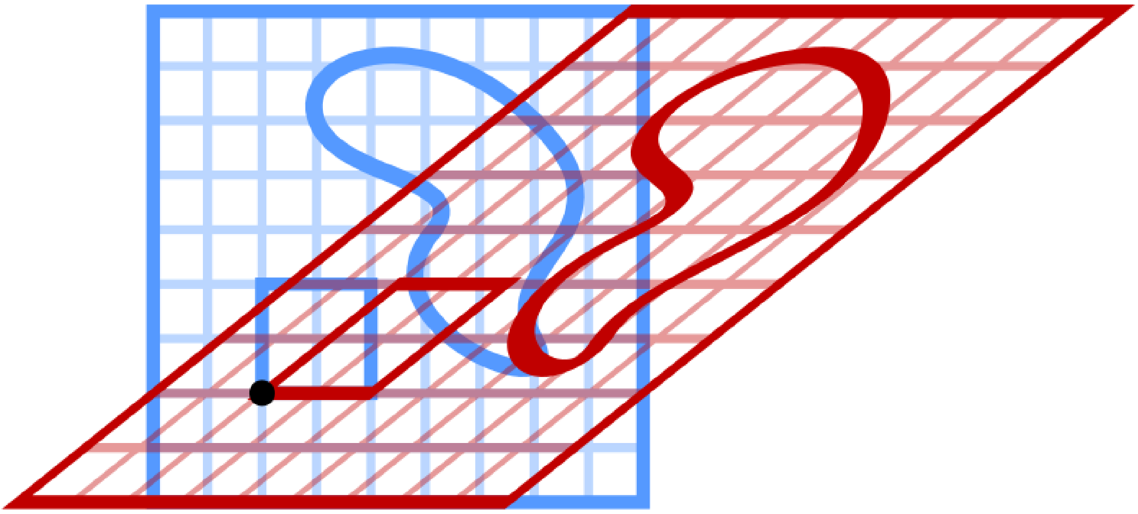

אלגברה ב׳ (104168)

חורף 2022-2023

רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־24 באוקטובר 2022

תוכן העניינים

חלק I

חלק ראשון - מרחבים שמורים

פרק 1

מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ויהי $v \in V$. וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B הוא הוקטור $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$v = \sum_{i\in[n]} \alpha_i v_i := \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\begin{aligned} \rho_B \colon V &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \ldots, v_n).$$

נסמן גם $n := \dim(V)$ ו־$m := \dim(W)$. עבור $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F}).$$

הערה 1.1.4. ההעתקה

$$\begin{aligned} \eta_C^B \colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) &\to \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{F}) \\ T &\mapsto [T]_C^B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.5. תהי $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ ויהיו $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ו־C בסיס של W. אז

$$[T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$$

לכל $v \in V$.

הוכחה. עבור $v=v_i$ מתקיים $[T]_C^B[v_i]_B=[T]_C^B e_i$ וזאת העמודה ה־i של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה.
אם $v=\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i$ נקבל מלינאריות של T ושל ρ_B כי

$$\begin{aligned}[T(v)]_C &= \left[T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right)\right]_C \\ &= \left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i T(v_i)\right]_C \\ &= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T(v_i)]_C \\ &= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T]_C^B[v_i]_B \\ &= [T]_C^B\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i [v_i]_B\right) \\ &= [T]_C^B\left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right]_B \\ &= [T]_C^B[v]_B\end{aligned},$$

כנדרש. ■

סימון 1.1.6. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי V ואם $T\in\operatorname{End}(V)$, נסמן $[T]_B:=[T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B.

סימון 1.1.7. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים B,C. נסמן $M_C^B:=[\mathrm{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.8. אם $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, נסמן

$$\begin{aligned}T_A\colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av\end{aligned}.$$

תרגיל 1. יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned}T\colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1)\end{aligned}$$

ויהי $B=\left(1,x,x^2,x^3\right)$ בסיס של V. כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $\left[T\left(x^i\right)\right]_B$ עבור $i\in\{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned}T(1)&=1\\ T(x)&=x+1=1+x\\ T\left(x^2\right)&=(x+1)^2=1+2x+x^2\\ T\left(x^3\right)&=(x+1)^3=1+3x+3x^2+x^3\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}[T(1)]_B&=e_1\\ [T(x)]_B&=e_1+e_2\\ \left[T\left(x^2\right)\right]_B&=e_1+2e_2+e_3\\ \left[T\left(x^3\right)\right]_B&=e_1+3e_2+3e_3+e_4\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{pmatrix}.$$

תרגיל 2. יהי $V=\mathrm{Mat}_{2\times 2}\left(\mathbb{C}\right)$, תהי

$$\begin{aligned} T\colon V & \to V\\ A & \mapsto\frac{1}{2}\left(A-A^{t}\right) \end{aligned}$$

ויהי

$$E=\left(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}\right)\coloneqq\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V. כיתבו את $\left[T\right]_{E}$.

פתרון. כמו מקודם, נחשב את $\left[T\left(E_{i,j}\right)\right]_{E}$ כיוון שאלו עמודות $\left[T\right]_{E}$. מתקיים

$$\begin{aligned} T\left(E_{1,1}\right) & =\frac{1}{2}\left(E_{1,1}-E_{1,1}\right)=0\\ T\left(E_{1,2}\right) & =\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}E_{1,2}-\frac{1}{2}E_{2,1}\\ T\left(E_{2,1}\right) & =\frac{1}{2}\left(E_{2,1}-E_{1,2}\right)=\frac{1}{2}E_{2,1}-\frac{1}{2}E_{1,2},T\left(E_{2,2}\right)=\frac{1}{2}\left(E_{2,2}-E_{2,2}\right)=0 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} \left[T\left(E_{1,1}\right)\right]_{E} & =0\\ \left[T\left(E_{1,2}\right)\right]_{E} & =\frac{1}{2}e_{2}-\frac{1}{2}e_{3}\\ \left[T\left(E_{2,1}\right)\right]_{E} & =-\frac{1}{2}e_{2}+\frac{1}{2}e_{3}\\ \left[T\left(E_{2,2}\right)\right]_{E} & =0 \end{aligned}$$

ואז

$$\left[T\right]_{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

תרגיל 3. יהי $V=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^{2},\mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B=\left(f_{1},f_{2}\right)$ כאשר

$$\begin{aligned} f_{1}\left(\begin{pmatrix}x\\ y \end{pmatrix}\right) & =x\\ f_{2}\left(\begin{pmatrix}x\\ y \end{pmatrix}\right) & =y, \end{aligned}$$

ותהי

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4 \end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}\left(\mathbb{R}\right).$$

מיצאו $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\left(V\right)$ עבורו $\left[T\right]_{B}=A$.

פתרון. מתקיים

$$\left[T\right]_{B}=\begin{pmatrix}| & |\\ \left[T\left(f_{1}\right)\right]_{B} & \left[T\left(f_{2}\right)\right]_{B}\\ | & | \end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$[T(f_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$.[T(f_2)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

אז

$$T(f_1) = f_1 + 2f_2$$
$$.T(f_2) = 3f_1 + 4f_2$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned} (T(f))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(f_1 + 2f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta(3f_1 + 4f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x + 2y) + \beta(3x + 4y) \end{aligned}.$$

טענה 1.1.9. תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$. אז $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A - B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־i של $A - B$, שהינה $(A - B)e_i$, שווה ל־0. לכן $A - B = 0$. ■

טענה 1.1.10. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C, D בהתאמה, ותהיינה

$$S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$$
$$.T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$$

אז

$$.[T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned} [T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B \end{aligned}$$

לכן

$$,[T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B$$

כנדרש. ■

תרגיל 4. תהי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס B של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_E^B$.
2. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^E$.
3. יהי B בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^B$.

4. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ איזומורפיזם ויהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V. מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B = A$.

פתרון. 1. אם $B = (v_1, \ldots, v_n)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

לכן ניקח את $(v_1, \ldots, v_n)$ להיות עמודות A, לפי הסדר.

2. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן $M_C^E = \left(M_E^C\right)^{-1}$. אם ניקח $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_E^C = A^{-1}$ ולכן $M_C^E = \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

3. מתקיים $M_C^B = M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $A = M_C^E M_E^B$ או במילים אחרות $A = M_B^E A$ $M_C^E = \left(M_E^B\right)^{-1}$. מהסעיף הקודם, נרצה $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של $\left(M_B^E A\right)^{-1} = A^{-1} M_E^B$, כלומר

$$u_i = A^{-1} M_E^B e_i = A^{-1} M_E^B [v_i]_B = A^{-1} v_i.$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]_{C'}^B = M_{C'}^B [T]_B^B$ לכן נרצה $A = M_C^B [T]_B^B$. כיוון ש־T איזומורפיזם, המטריצה $[T]_B^B$ הפיכה, ולכן נרצה $M_C^B = A \left([T]_B^B\right)^{-1}$. לפי הסעיף הקודם, נרצה $C = (u_1, \ldots, u_n)$ עבור

$$u_i = \left(A [T]_B^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i.$$

תרגיל 5. יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned},$$

יהי $E = \left(1, x, x^2, x^3\right)$, הבסיס הסטנדרטי ותהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו $A = [T]_C^E$.

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה $C = (u_1, \ldots, u_4)$ כאשר $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$. חישבנו ב־1 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2 = I$ כלומר $A^{-1} = A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} Ae_1 &= e_2 \\ Ae_2 &= e_1 \\ Ae_3 &= e_4 \\ Ae_4 &= e_3 \end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1 = [T]_E Ae_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [T]_E Ae_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = [T]_E Ae_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = [T]_E Ae_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

כלומר $C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

תרגיל 6. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $v \in V$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את (v) לבסיס $\tilde{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ של V כאשר $v_1 = v$. תהי

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B = (u_1, \ldots, u_n)$ של V עבורו $M_B^{B_0} = A$. נקבל

$$\begin{aligned} [v]_B &= [\mathrm{Id}_V\, v]_B \\ &= [\mathrm{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת $u_i = A^{-1}v_i$.

1.2 גרעין ותמונה