

אלגברה ב' (104168) תרגילים על נילפוטנטיות

אלן סורני

21 בנובמבר 2022

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי מממד $n > 0$ ותהי

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k = n$$

סדרת מספרים.

1. נניח כי $n_i - n_{i-1}$ מונוטונית יורדת (לאו דווקא ממש). הראו שיש העתקה $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה

$$n_i = \dim \ker(T^i)$$

לכל $i \in [k]$.

רמז: חישבו על מטריצות מהצורה $J_m(0)$.

2. נניח כי יש $i \in [k]$ עבורו $n_{i+1} - n_i > n_i - n_{i-1}$. הראו שאין העתקה $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה

$$n_i = \dim \ker(T^i)$$

לכל $i \in [k]$.