אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 3
משפט ז'ורדן, ומרחבי מכפלה פנימית

תאריך הגשה: 14.12.2022

תרגיל 1. מיצאו בסיס מז'רדן לכל אחד מהאופרטורים הבאים.

1. T_A כאשר

$$A=\begin{pmatrix}7 & 1 & -8 & -1\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 2 & -5 & 1\\ 0 & -4 & 0 & -1\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_4\left(\mathbb{C}\right).$$

2. T_A כאשר

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3 & -2\\ -2 & 3 & 5 & 2\\ -1 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_4\left(\mathbb{C}\right).$$

3.

$$\begin{aligned}T\colon\ \mathrm{Mat}_2\left(\mathbb{C}\right) & \to\mathrm{Mat}_2\left(\mathbb{C}\right)\\ A & \mapsto A^t\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}T\colon\mathbb{C}_3\left[x\right] & \to\mathbb{C}_3\left[x\right]\\ T\left(p\right)\left(x\right) & =p\left(x+1\right)\end{aligned}$$

תרגיל 2. 1. מצאו את צורת ז'ורדן של $J_n\left(\lambda\right)^{-1}$ עבור $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ועבור $n\in\mathbb{N}_+$.

2. תהי $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ הפיכה. מצאו את צורת ז'ורדן של A^{-1}.

3. מצאו תנאי הכרחי ומספיק על $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ כך שיתקיים $A\sim A^{-1}$.

תרגיל 3. בתרגיל זה נראה כיצד צורת ז'ורדן עוזרת בחישוב בעיות המצריכות חזקות של מטריצות.

1. תהיינה $A,B,P\in\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{C}\right)$ כאשר P הפיכה וגם $A=P^{-1}BP$. הראו כי $A^r=P^{-1}B^rP$ לכל $r\in\mathbb{N}$.

2. בשמורת הטבע ליד הטכניון סין יש היום 2 דרקונים, 600 פנדות ו־20000 במבוקים.
כל שנה הדרקונים, הפנדות והבמבוקים מתרבים ומספרם גדל פי 2.
לאחר מכן, כל פנדה אוכלת במבוק אחד וכל דרקון אוכל שתי פנדות.
אז, רשות הטבע והגנים הסינית משחררת לטבע 4 דרקונים ו־10 פנדות, אם עדיין יש פנדות בשמורה.
לבסוף, אם לא נשאר במבוק בסוף השנה, כל הפנדות מתות.

(א) מיצאו מטריצה $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ וערכים d, p, b עבורם מספרי הדרקונים, הפנדות והבמבוקים בסוף השנה ה־t הם מקדמים בוקטור $A^t \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ p \\ b \end{pmatrix}$ לכל $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(ב) נשיא הטכניון מתכנן לבקר בסין עוד 30 שנה. האם יהיו פנדות בשמורה בזמן הביקור שלו?

(ג) הטכניון החליט להעביר את הלימודים מסין למאדים עוד 230 שנה. האם ישארו עד אז פנדות בשמורת הטבע?

תרגיל 4. עבור ההעתקות הבאות f_i, קיבעו האם f_i מכפלה פנימית.

1.

$$\begin{aligned} f_1 \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto ax + by + az \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f_2 \colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \mathrm{tr}\left(B^t A\right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f_3 \colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C} \\ (A, B) &\mapsto \mathrm{tr}\left(B^t A\right) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f_4 \colon \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] &\to \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

עבור $a < b$ ממשיים.

5.

$$\begin{aligned} f_5 \colon \mathbb{C}_n[x] \times \mathbb{C}_n[x] &\to \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

עבור $a < b$ ממשיים וכאשר נגדיר

$$\int_a^b (u + iv)\, \mathrm{d}x = \int_a^b u\, \mathrm{d}x + i \cdot \int_a^b u\, \mathrm{d}x$$

לכל $u, v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

תרגיל 5. יהי V מרכב מכפלה פנימית מעל שדה $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. נגיד כי וקטורים u, v ניצבים אם $\langle u, v \rangle = 0$ ועבור תת־קבוצה $S \subseteq V$ נגדיר את המרחב הניצב

$$S^\perp = \{v \in V \mid \forall s \in S \forall v \in V \colon \langle v, s \rangle\}.$$

1. הראו כי $S^\perp \leq V$ תת־מרחב וקטורי של V.
2. תהי $S \subseteq V$. הראו כי $S \subseteq \left(S^\perp\right)^\perp$ והסיקו כי $\mathrm{Span}(S) \subseteq \left(S^\perp\right)^\perp$.
3. נראה בהרצאה כי עבור $W \leq V$ מתקיים $V = W \oplus W^\perp$. היעזרו בכך כדי להראות כי $\left(S^\perp\right)^\perp = \mathrm{Span}(S)$ לכל $S \subseteq V$.