

# אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 1

## מטריצות מייצגות ודטרמיננטה

תאריך הגשה: 22.11.2022

תרגיל 1. יהי  $V$  מרחב וקטורי מעל  $\mathbb{R}$  ותהי  $T: V \rightarrow V$  לינארית המקיימת  $T^2 = -5 \text{Id}_V$ .

1. הוכיחו כי לכל  $v \in V \setminus \{0\}$  הקבוצה  $\{v, Tv\}$  בלתי-תלויה לינארית.

2. נתון גם כי  $\dim V = 2$ . הוכיחו כי קיים בסיס בו  $T$  מיוצגת על ידי  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ .

תרגיל 2. יהי  $B = (v_i)_{i \in [n]}$  בסיס למרחב וקטורי  $V$ . נתונה  $T: V \rightarrow V$  הפיכה המקיימת

$$T(v_1 + 2v_2) = \sum_{i \in [n]} v_i$$

מצאו את סכום איברי  $[T^{-1}]_B$ .

תרגיל 3. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות המרוכבות הבאות.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -5 & 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 & 5 & 15 & -9 \\ -6 & 0 & 5 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**תרגיל 4.** יהי  $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$  פולינום מתוקן (כלומר,  $a_n = 1$ ). ותהי

$$C(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_n(\mathbb{F})$$

הראו כי

$$\det(xI - C(p)) = p(x)$$

**תרגיל 5.** תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה לינארית ויהיו  $B$  בסיס של  $V$ . ראינו בהרצאה שאפשר להגדיר

$$\det T := \det([T]_B)$$

ושההגדרה אינה תלויה בבחירת הבסיס.

יהי  $V = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$  ותהי

$$T: V \rightarrow V$$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

חשבו את  $\det(T)$ .

**תרגיל 6.** תהי  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  בלי ערכים עצמיים ממשיים. הראו כי  $\det(A) > 0$ .