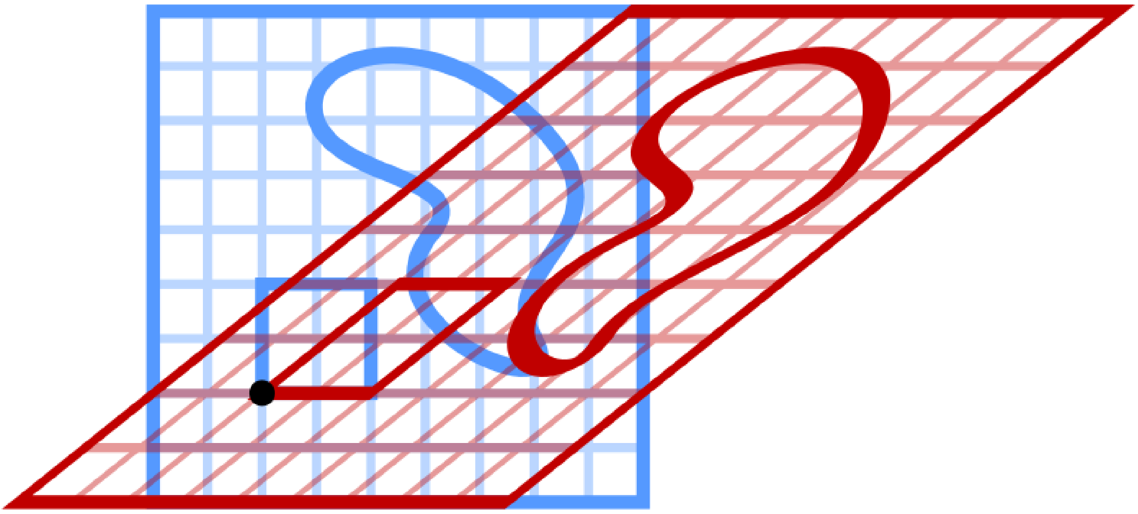

אלגברה ב' (104168)

חורף 2022-2023

רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־15 בנובמבר 2022

תוכן העניינים

חלק I

חלק ראשון - מרחבים שמורים

פרק 1

מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות בסיסיות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V ויהי $v\in V$. וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B הוא הוקטור $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$.v=\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\coloneqq\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_n v_n$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\begin{aligned}\rho_B\colon V&\to\mathbb{F}^n\\ v&\mapsto[v]_B\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V,W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B,C בהתאמה, ונסמן

$$.B=(v_1,\ldots,v_n)$$

נסמן גם $n\coloneqq\dim(V)$ ו־$m\coloneqq\dim(W)$. עבור $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ נגדיר

$$.[T]_C^B=\begin{pmatrix}| & & |\\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C\\ | & & |\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$$

משפט 1.1.4 (כפל מטריצות). תהי $A\in\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ויהי $E=(e_1,\ldots,e_m)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אז:

(i) לכל $i\in[m]$ מתקיים כי Ae_i העמודה ה־i של A.

(ii) לכל $B=\begin{pmatrix}| & & |\\ b_1 & \cdots & b_\ell\\ | & & |\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{n\times\ell}(\mathbb{F})$ אז $.AB=\begin{pmatrix}| & & |\\ Ab_1 & \cdots & Ab_\ell\\ | & & |\end{pmatrix}$

תרגיל 1.1. הראו שניתן לשחזר את ההגדרה של כפל מטריצות משתי התכונות במשפט.

הערה 1.1.5. ההעתקה

$$\begin{aligned}\eta_C^B\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,B)&\to\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})\\ T&\mapsto[T]_C^B\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.6. תהי $T\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$ ויהיו $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V ו־C בסיס של W. אז

$$[T(v)]_C=[T]_C^B[v]_B$$

לכל $v\in V$.

הוכחה. עבור $v=v_i$ מתקיים $[T]_C^B[v_i]_B=[T]_C^B e_i$ וזאת העמודה ה־i של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה. אם $v=\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i$ נקבל מלינאריות של T ושל ρ_B כי

$$\begin{aligned}[T(v)]_C &= \left[T\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right)\right]_C \\ &= \left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i T(v_i)\right]_C \\ &= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T(v_i)]_C \\ &= \sum_{i\in[n]}\alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\ &= [T]_C^B\left(\sum_{i\in[n]}\alpha_i [v_i]_B\right) \\ &= [T]_C^B\left[\sum_{i\in[n]}\alpha_i v_i\right]_B \\ &= [T]_C^B [v]_B\end{aligned},$$

כנדרש. ■

סימון 1.1.7. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי V ואם $T\in\operatorname{End}(V)$, נסמן $[T]_B:=[T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B.

סימון 1.1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים B,C. נסמן $M_C^B:=[\mathrm{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.9. אם $A\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, נסמן

$$\begin{aligned}T_A\colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av\end{aligned}.$$

תרגיל 1.2. יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned}T\colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1)\end{aligned}$$

ויהי $B=\left(1,x,x^2,x^3\right)$ בסיס של V. כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $\left[T\left(x^i\right)\right]_B$ עבור $i\in\{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned}T(1)&=1\\ T(x)&=x+1=1+x\\ T\left(x^2\right)&=(x+1)^2=1+2x+x^2\\ T\left(x^3\right)&=(x+1)^3=1+3x+3x^2+x^3\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}[T(1)]_B&=e_1\\ [T(x)]_B&=e_1+e_2\\ \left[T\left(x^2\right)\right]_B&=e_1+2e_2+e_3\\ \left[T\left(x^3\right)\right]_B&=e_1+3e_2+3e_3+e_4\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

תרגיל 1.3. יהי $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, תהי

$$\begin{aligned} T\colon V &\to V \\ A &\mapsto \frac{1}{2}\left(A - A^t\right) \end{aligned}$$

ויהי

$$E = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}) \coloneqq \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V. כיתבו את $[T]_E$.

הוכחה. כמו מקודם, נחשב את $[T(E_{i,j})]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$\begin{aligned} T(E_{1,1}) &= \frac{1}{2}(E_{1,1} - E_{1,1}) = 0 \\ T(E_{1,2}) &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}E_{1,2} - \frac{1}{2}E_{2,1} \\ T(E_{2,1}) &= \frac{1}{2}(E_{2,1} - E_{1,2}) = \frac{1}{2}E_{2,1} - \frac{1}{2}E_{1,2}, T(E_{2,2}) = \frac{1}{2}(E_{2,2} - E_{2,2}) = 0 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} [T(E_{1,1})]_E &= 0 \\ [T(E_{1,2})]_E &= \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ [T(E_{2,1})]_E &= -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 \\ [T(E_{2,2})]_E &= 0 \end{aligned}$$

ואז

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

כנדרש. ■

תרגיל 1.4. יהי $V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B = (f_1, f_2)$ כאשר

$$\begin{aligned} f_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= x \\ f_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) &= y, \end{aligned}$$

ותהי

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

מיצאו $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ עבורו $[T]_B = A$.

פתרון. מתקיים

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(f_1)]_B & [T(f_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$[T(f_1)]_B = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$[T(f_2)]_B = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

אז

$$T(f_1) = f_1 + 2f_2$$
$$T(f_2) = 3f_1 + 4f_2.$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}(T(f))\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2))\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ &= \alpha T(f_1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \beta T(f_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ &= \alpha(f_1+2f_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \beta(3f_1+4f_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ &= \alpha(x+2y) + \beta(3x+4y)\end{aligned}.$$

טענה 1.1.10. תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$. אז $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A-B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־i של $A-B$, שהינה $(A-B)e_i$, שווה ל־0. לכן $A - B = 0$. ■

טענה 1.1.11. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C, D בהתאמה, ותהיינה

$$S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$$
$$T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W).$$

אז

$$[T\circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B.$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned}[T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C\\ &= [T\circ S(u)]_D\\ &= [T\circ S]_D^B [u]_B\end{aligned}$$

לכן

$$[T]_D^C [S]_C^B = [T\circ S]_D^B,$$

כנדרש. ■

טענה 1.1.12. יהיו V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ חד־חד ערכית. יהיו

$$B = (v_1, \ldots, v_n)$$
$$C = (u_1, \ldots, u_n)$$

בסיסים של V ויהיו

$$B' = (T(v_1), \ldots, T(v_n))$$
$$C' = (T(u_1), \ldots, T(u_n)).$$

אז B', C' בסיסים של $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ וגם $M_C^B = M_{C'}^{B'}$.

פתרון. כיוון ש־T חד־חד ערכית ועל התמונה, צמצום הטווח נותן איזומורפיזם $T\colon V \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}(T)$. איזומורפיזם שולח בסיס לבסיס, לכן B', C' בסיסים.
כעת, לכל $i \in [n]$ נכתוב

$$v_i = \sum_{j\in[n]} \alpha_{i,j} u_i$$

ואז

$$M_C^B e_i = [v_i]_C = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}.$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} T(v_i) &= T\left(\sum_{i\in[n]} \alpha_{i,j} u_j\right) \\ &= \sum_{i\in[n]} \alpha_{i,j} T(u_j) \end{aligned}$$

ולכן גם

$$M_{C'}^{B'} e_i = [T(v_i)]_{C'} = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,n} \end{pmatrix}.$$

קיבלנו כי כל עמודות המטריצות שוות, ולכן יש שוויון.

תרגיל 1.5. תהי $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס B של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_E^B$.
2. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^E$.
3. יהי B בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^B$.
4. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n \in \mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ איזומורפיזם ויהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V. מיצאו בסיס C של V עבורו $[T]_C^B = A$.

פתרון. 1. אם $B = (v_1, \ldots, v_n)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

לכן ניקח את $(v_1, \ldots, v_n)$ להיות עמודות A, לפי הסדר.

2. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^C M_C^E v = M_E^C [v]_C = [v]_E = v$$

ולכן $M_C^E = \left(M_E^C\right)^{-1}$. אם ניקח $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_E^C = A^{-1}$ ולכן $M_C^E = \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. כלומר ניקח, $u_i = A^{-1} e_i$.

3. מתקיים $M_C^B = M_C^E M_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $M_C^E M_E^B = A$ או במילים אחרות $M_C^E = A\left(M_E^B\right)^{-1} = A M_B^E$. מהסעיף הקודם, נרצה $C = (u_1, \ldots, u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של $M_E^B A^{-1} = \left(A M_B^E\right)^{-1}$, כלומר

$$u_i = M_E^B A^{-1} e_i.$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]_{C'}^{B} = M_{C'}^{B}[T]_{B}^{B}$ לכן נרצה $A = M_{C}^{B}[T]_{B}^{B}$. כיוון ש-T איזומורפיזם, המטריצה $[T]_{B}^{B}$ הפיכה, ולכן נרצה $M_{C}^{B} = A\left([T]_{B}^{B}\right)^{-1}$. כעת, אם $C = (v_1, \ldots, v_n)$ נקבל כי $M_{C}^{B} = M_{\hat{C}}^{E}$ כאשר $\hat{C} = ([v_1]_B, \ldots, [v_n]_B)$. כלומר, נחפש $\hat{C}$ עבורו $M_{\hat{C}}^{E} = A[T]_{B}^{-1}$. לפי הסעיף השני, נרצה $\hat{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ עבור

$$.u_i = \left(A[T]_{B}^{-1}\right)^{-1} e_i = [T]_B A^{-1} e_i$$

לכן

$$.v_i = \rho_B^{-1}\left([T]_B A^{-1} e_i\right)$$

תרגיל 1.6. יהי $V = \mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ p(x) &\mapsto p(x+1) \end{aligned},$$

יהי $E = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ הבסיס הסטנדרטי ותהי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו $.A = [T]_{C}^{E}$

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C} = (u_1, \ldots, u_4)$ כאשר $u_i = [T]_E A^{-1} e_i$. חישבנו ב-1.2 כי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2 = I$ כלומר $A^{-1} = A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} Ae_1 &= e_2 \\ Ae_2 &= e_1 \\ Ae_3 &= e_4 \\ Ae_4 &= e_3 \end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1 = [T]_E A^{-1} e_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [T]_E A^{-1} e_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = [T]_E A^{-1} e_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$,u_4 = [T]_E A^{-1} e_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\hat{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right),$$

ולבסוף

$$C = (v_1, v_2, v_3, v_4) \coloneqq \left(1+x, 1, 1+3x+3x^2+x^3, 1+2x+x^2\right).$$

ליתר ביטחון, נבדוק שהמטריצה המייצגת היא אכן A. מתקיים

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 = v_2 \\ T(x) &= x+1 = v_1 \\ T\left(x^2\right) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 = v_4 \\ T\left(x^3\right) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3 = v_3 \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} [T]_C^E &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(1)]_C & [T(x)]_C & \left[T\left(x^2\right)\right]_C & \left[T\left(x^3\right)\right]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [v_2]_C & [v_1]_C & [v_4]_C & [v_3]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ e_2 & e_1 & e_4 & e_3 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

כנדרש.

1.2 גרעין ותמונה

הגדרה 1.2.1 (גרעין של העתקה לינארית). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. הגרעין של T הוא

$$\ker(T) \coloneqq \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

הגדרה 1.2.2 (תמונה של העתקה לינארית). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. התמונה של T היא

$$\mathrm{Im}(T) \coloneqq \{T(v) \mid v \in V\}.$$

הגדרה 1.2.3 (דרגה של אופרטור לינארי). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. הדרגה של T היא

$$\mathrm{rank}(T) \coloneqq \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

הערה 1.2.4. אם V, W סוף־מימדיים עם בסיסים B, C בהתאמה, אז

$$\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}\left([T]_C^B\right).$$

משפט 1.2.5 (משפט המימדים). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T \in \mathrm{End}(V)$. אז

$$\dim V = \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \ker(T).$$

תרגיל 1.7. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $v \in V$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את (v) לבסיס $B_0 = (v_1, \ldots, v_n)$ של V כאשר $v_1 = v$. תהי

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B = (u_1, \ldots, u_n)$ של V עבורו $M_B^{B_0} = A$. נקבל

$$\begin{aligned} [v]_B &= [\mathrm{Id}_V\, v]_B \\ &= [\mathrm{Id}_V]_B^{B_0} [v]_{B_0} \\ &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת

$$u_i = \rho_{B_0}^{-1}\left([\mathrm{Id}]_B\, A^{-1} e_i\right) = \rho_{B_0}^{-1}\left(A^{-1} e_i\right).$$

תרגיל 1.8. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $\operatorname{rank} T = 1$ אם ורק אם יש בסיסים B, C ל־V כך שכל מקדמי $[T]_C^B$ הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים B, C כמתואר. אז $\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} [T]_C^B = 1$.
בכיוון השני, נניח כי $\operatorname{rank} T = 1$. כלומר, $\dim \operatorname{Im} T = 1$. ממשפט המימדים מתקיים $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$, לכן

$$\dim \ker T = \dim V - \dim \operatorname{Im} T = \dim V - 1 .$$

יהי $n := \dim V$ ויהי

$$\tilde{B} := (u_1, \ldots, u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי w וקטור פורש של $\operatorname{Im} T$ ויהי C בסיס של V כך שמתקיים $[w]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי $v := T^{-1}(w)$, ואז $(v, u_1, \ldots, u_{n-1})$ בלתי־תלויים לינארית, כי $v \notin \ker T$. לכן זה בסיס של V. אז גם $B :=$ $(v, v + u_1, \ldots, v + u_{n-1})$ בסיס של V כי המטריצה

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ [v]_{\tilde{B}} & \cdots & [v + u_{n-1}]_{\tilde{B}} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הפיכה.

נסמן $C=(w_1,\ldots,w_m)$. מתקיים

$$T(v)=w=w_1+\ldots+w_m$$

ולכל $i\in[n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned}T(v+u_i)&=T(v)+T(u_i)\\&=T(v)+0\\&=T(v)\\&=w_1+\ldots+w_m\end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

תרגיל 1.9. תהי

$$\begin{aligned}T\colon \mathbb{R}_3[x]&\to\mathbb{R}_3[x]\\ .p(x)&\mapsto p(-1)\end{aligned}$$

מיצאו בסיסים B,C של $\mathbb{R}_3[x]$ עבורם

$$.[T]_C^B=A\coloneqq\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

פתרון. ניקח בסיס $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3)\coloneqq\left(x+1,x^2-1,x^3+1\right)$ של $\ker(T)$, כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי־תלוייה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי $T\neq 0$). מתקיים $T(x)=-1=:w$ ואז $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(w)$. נחשב בסיס C עבורו $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. נשלים את (v) לבסיס

$$.C_0=(v_1,v_2,v_3,v_4)\coloneqq\left(-1,x,x^2,x^3\right)$$

המטריצה

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

הפיכה ולכן קיים בסיס $C=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ עבורו $M_C^{C_0}=X$, כשראינו שאז $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. כפי שראינו, ניתן לחשב את C לפי $u_i=\rho_{C_0}^{-1}\left(X^{-1}e_i\right)$. מתקיים

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$u_1=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)=-1-x-x^2-x^3$$

$$u_2=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=x$$

$$u_3=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=x^2$$

$$.u_4=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x^3$$

כלומר, $C=\left(-1-x-x^2-x^3,x,x^2,x^3\right)$.
ניקח $v=x\in V$ כך שיתקיים $T\left(v\right)=-1=w$ ואז

$$B=\left(v,v+b_1,v+b_2,v+b_3\right)=\left(x,2x+1,x^2+x-1,x^3+x+1\right)$$

כמו בתרגיל הקודם.
אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}T\left(x\right)&=-1\\T\left(2x+1\right)&=-2+1=-1\\T\left(x^2+x-1\right)&=\left(-1\right)^2-1-1=1-2=-1\\T\left(x^3+x+1\right)&=\left(-1\right)^3-1+1=-1\end{aligned}$$

וגם $[-1]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, לכן

$$,[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

כפי שרצינו.

פרק 2

סכומים ישרים ולכסינות

2.1 סכומים ישרים

הגדרה 2.1.1 (סכום ישר). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $V_1, \ldots, V_k \leq V$ תת־מרחבים. נזכיר כי

$$V_1 + \ldots + V_k \coloneqq \{v_1 + \ldots + v_k \mid \forall i \in [k] \colon v_i \in V_i\}.$$

נגיד שהסכום הזה הוא סכום ישר אם כל $v \in V_1 + \ldots + V_k$ ניתן לכתיבה $v = v_1 + \ldots + v_k$ בצורה יחידה עבור $v_i \in V_i$. במקרה זה נסמן את הסכום $\bigoplus_{i\in[k]} V_i = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.

הערה 2.1.2. באופן שקול, הסכום $V_1 + \ldots + V_k$ ישר אם ורק אם $v_1 + \ldots + v_k = 0$ עבור $v_i \in V_i$ גורר $v_i = 0$ לכל $i \in [k]$.

טענה 2.1.3. הסכום $\sum_{i\in[k]} V_i \coloneqq V_1 + \ldots + V_k$ ישר אם ורק אם

$$V_i \cap \left(\sum_{j\neq i} V_j\right) = \{0\}$$

לכל $i \in [k]$.
את המקרה $k = 2$ ראינו בהרצאה, והטענה הכללית נובעת באינדוקציה.

הגדרה 2.1.4 (שרשור קבוצות סדורות). תהיינה

$$\begin{aligned} A_1 &= (v_{1,1}, \ldots, v_{1,\ell_1}) \\ A_2 &= (v_{2,1}, \ldots, v_{2,\ell_2}) \\ &\vdots \\ A_k &= (v_{k,1}, \ldots, v_{k,\ell_k}) \end{aligned}$$

קבוצות סדורות. נגדיר את השרשור שלהן

$$A_1 \cup \ldots \cup A_k \coloneqq (v_{1,1}, \ldots, v_{1,\ell_1}, v_{2,1}, \ldots, v_{2,\ell_2}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,\ell_k}).$$

זאת הקבוצה הסדורה שהיא שרשור איברי הקבוצות הסדורות $A_1, \ldots, A_k$ לפי הסדר.

טענה 2.1.5. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהיו $V_1, \ldots, V_k$ תת־מרחבים של V. התנאים הבאים שקולים.

1. $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.
2. לכל בחירת בסיסים B_i של V_i הקבוצה הסדורה $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ היא בסיס של V.
3. קיימים בסיסים B_i של V_i כך שהקבוצה הסדורה $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ היא בסיס של V.
4. $V = \sum_{i\in[k]} V_i$ וגם

$$\dim V = \sum_{i\in[k]} \dim(V_i).$$

תרגיל 2.1. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונזכיר כי $P \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקראת הטלה אם $P^2 = P$.

1. תהי $P \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה. הראו כי $V = \ker(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$.
2. הראו כי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הטלה אם ורק אם קיים בסיס B של V עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

פתרון. 1. יהי $v \in V$. מתקיים $v = (v - P(v)) + P(v)$ כאשר $P(v) \in \mathrm{Im}(P)$. כמו כן,

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$$

ולכן $v - P(v) \in \ker(P)$ ונקבל כי $V = \ker(P) + \mathrm{Im}(P)$.
כעת, אם $v \in \ker(P) \cap \mathrm{Im}(P)$ בפרט $v \in \mathrm{Im}(P)$ ולכן יש $u \in V$ עבורו $P(u) = v$. אז

$$v = P(u) = P^2(u) = P(P(u)) = P(v) = 0$$

ולכן $\ker(P) \cap \mathrm{Im}(P) = 0$ ונקבל כי הסכום ישר.

2. נניח כי T הטלה. במקרה זה $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$. עבור בסיסים

$$C = (c_1, \ldots, c_m)$$
$$D = (d_{m+1}, \ldots, d_\ell)$$

של $\ker(T), \mathrm{Im}(T)$ בהתאמה, נקבל כי $C \cup D$ בסיס של V. לכל $c_i \in C$ מתקיים $T(c_i) = 0$, לכן $\dim(\ker(T))$ העמודות הראשונות של $[T]_{C \cup D}$ הן עמודות אפסים. לכל $d_i \in D$ יש $u_i \in V$ עבורו

$$d_i = T(u_i) = T^2(u_i) = T(T(u_i)) = T(d_i),$$

לכן

$$[T(d_i)]_{C \cup D} = [d_i]_{C \cup D} = e_i$$

ולכן העמודה ה־i עבור $i \geq m$ היא e_i, ונקבל את הנדרש.
להיפך, נניח שקיים בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ כנ"ל. אז $\left[T^2\right]_B = [T]_B^2 = [T]_B$ ולכן $T^2 = T$ ונקבל כי T הטלה.

הגדרה 2.1.6 (משלים ישר). יהי V מרחב וקטורי ויהי $U \leq V$ תת־מרחב. משלים ישר W של U הוא תת־מרחב של V עבורו $V = U \oplus W$.

תרגיל 2.2. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $U \leq V$ תת־מרחב עם בסיס B. יהי C בסיס של V.

1. הראו שניתן להשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ־C.
2. הסיקו שקיים משלים ישר W של U עם בסיס של וקטורים מ־C.

פתרון. 1. נסמן $n := \dim_{\mathbb{F}}(V)$ ונוכיח את הטענה באינדוקציה על $m = n - |B|$.
עבור $m = 0$ מתקיים $|B| = n$ ולכן $U = V$. נניח שהטענה נכונה לכל $k < m$ ונוכיח אותה עבור m.
אם $C \subseteq U$, מתקיים

$$V = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(C) \subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(U) = U$$

ולכן $V = U$ בסתירה לכך שהמימדים שונים. לכן, קיים $c \in C \setminus U$. אז $B \cup (c)$ קבוצה בלתי־תלויה לינארית, כי c אינו צירוף לינארי של הוקטורים הקודמים. נגדיר $U' = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}(B \cup (c))$. אז

$$n - \dim(U') = n - |B| - 1 = m - 1 < m$$

ולכן ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה ולקבל שניתן להשלים את $B \cup (c)$ לבסיס $(B \cup (c)) \cup (c_2, \ldots, c_m)$ של V, כאשר $c_i \in C$. אז $c, c_2, \ldots, c_m \in C$ משלימים את B לבסיס של V.

2. בסימונים של הסעיף הקודם, $B\cup(c,\dots,c_m)$ בסיס של V. נסמן $D=(c,c_2,\dots,c_m)$ וגם $W=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(D)$.
אז $B\cup D$ בסיס של V ולכן

$$V=\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(B)\oplus\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(D)=U\oplus W,$$

כנדרש.

תרגיל 2.3. יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ ותהיינה

$$\begin{aligned}B&=\left(1+x,x+x^2\right)\\C&=\left(1,x,x^2,x^3\right)\end{aligned}$$

קבוצות סדורות של וקטורים מ־V. יהי $U=\operatorname{Span}(B)$.

1. מיצאו משלים ישר W של U ובסיס עבור W שמורכב מוקטורים ב־C.
2. האם W שמצאתם יחיד? הוכיחו או הפריכו.

פתרון. 1. נשלים את B לבסיס של V על ידי הוספת וקטורים מ־C. נוסיף את $1\notin U$ כדי לקבל $B'=\left(1+x,x+x^2,1\right)$ ואז את $x^3\notin\operatorname{Span}(B')$ כדי לקבל בסיס $B''=\left(1+x,x+x^2,1,x^3\right)$ של V.
נסמן $D=\left(1,x^3\right)$ וניקח $W=\operatorname{Span}(D)$. אז $B''=B\cup D$ בסיס, ולכן $V=U\oplus W$, כנדרש.

2. לא. למשל, יכולנו לקחת $B'=\left(1+x,x+x^2,x^2\right)$ ואז $B''=\left(1+x,x+x^2,x^2,x^2,x^3\right)$. במקרה זה היינו מקבלים משלים ישר $\operatorname{Span}\left(x^2,x^3\right)$, ששונה מ־$W$.

2.2 לכסינות

הגדרה 2.2.1 (אופרטור לכסין). אופרטור $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ נקרא לכסין אם קיים בסיס B של V וקיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ עבורם

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1&&\\&\ddots&\\&&\alpha_n\end{pmatrix}.$$

בסיס B כזה נקרא בסיס מלכסן עבור T, והמטריצה $[T]_B$ נקראת מטריצה אלכסונית.

הגדרה 2.2.2. יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. וקטור $v\in V\setminus\{0\}$ נקרא וקטור עצמי של T אם קיים $\lambda\in\mathbb{F}$ עבורו $T(v)=\lambda v$.
במקרה זה λ נקרא ערך עצמי של T.

הערה 2.2.3. v וקטור עצמי של T אם ורק אם קיים $\lambda\in\mathbb{F}$ עבורו $T(v)=\lambda v$. מתקיים $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)=\{\lambda v\mid\lambda\in\mathbb{F}\}$ ולכן באופן שקול $T(v)\in\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ ובאופן שקול $T(\alpha v)=\alpha T(v)\in\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ לכל $\alpha\in\mathbb{F}$.
לכן, v וקטור עצמי של T אם ורק אם $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(v)$ הינו T־שמור.

הערה 2.2.4. אופרטור $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ הינו לכסין אם ורק אם קיים בסיס של V שמורכב מוקטורים עצמיים של T.

הגדרה 2.2.5 (מרחב עצמי). יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי λ ערך עצמי של T. המרחב העצמי של T עם הערך λ הוא

$$V_\lambda\coloneqq\{v\in V\mid T(v)=\lambda v\}=\ker(\lambda\operatorname{Id}_V-T).$$

הגדרה 2.2.6 (פולינום אופייני). יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הפולינום האופייני של T הוא

$$p_T(x)\coloneqq\det(x\operatorname{Id}_V-T).$$

הערה 2.2.7. בפועל, נסתכל בדרך כלל על פולינום אופייני של מטריצה, כיוון שצריך לבחור בסיס כדי לחשב את הדטרמיננטה. ראינו כי הדטרמיננטה לא תלויה בבחירת הבסיס, ולכן $p_T(x)=p_{[T]_B}(x)$ לכל בסיס B של V, כאשר $p_A(x)=\det(xI-A)$.

מסקנה 2.2.8. איבר $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\ker(\lambda\operatorname{Id}_V-T)\neq0$, אם ורק אם $p_T(\lambda)=\det(\lambda\operatorname{Id}_V-T)=0$.
כלומר, הערכים העצמיים של T הם השורשים של p_T.

הערה 2.2.9. כיוון שלכל פולינום $p \in \mathbb{C}[x]$ יש שורש, לכל $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$ יש ערך עצמי.

הגדרה 2.2.10 (ריבוי אלגברי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי האלגברי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא הריבוי שלו כשורש של p_T. נסמנו $r_a(\lambda)$.

הגדרה 2.2.11 (ריבוי גיאומטרי). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא $r_g(\lambda) := \dim V_\lambda$.

הערה 2.2.12. מתקיים תמיד $r_a(\lambda) \leq r_g(\lambda)$.

הגדרה 2.2.13. תהי $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ ויהי $T = T_A$ אופרטור כפל ב־A משמאל (כלומר, $T(v) = Av$). אם T לכסין, קיים בסיס B עבורו $D := [T]_B$ אלכסונית. אז

$$\begin{aligned} A &= [T]_E \\ &= [\operatorname{Id} \circ T \circ \operatorname{Id}]_E \\ &= M_E^B [T]_B M_B^E \\ &= M_E^B D \left(M_E^B\right)^{-1} \end{aligned}$$

ואם נסמן $P = M_E^B$ נקבל כי זאת מטריצה הפיכה עבורה $P^{-1}AP = D$.
לכן, נגיד שמטריצה $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה אם קיימת $P \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $P^{-1}AP$ אלכסונית.

2.3 מרחבים שמורים

נרצה להבין אופרטורים לינאריים דרך הבנה של צמצום שלהם לתת־מרחבים קטנים יותר. אם $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$, נוכל תמיד לצמצם את המקור כדי לקבל העתקה לינארית $T|_W : W \to V$, אבל לא נוכל ללמוד מספיק כאשר הצמצום אינו אופרטור. לכן נרצה לצמצם גם את הטווח, מה שמוביל להגדרה הבאה.

הגדרה 2.3.1 (מרחב שמור). יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $U \leq V$. נגיד כי U הינו T־שמור (או T־אינווריאנטי אם $T(U) \subseteq U$.

הגדרה 2.3.2. במקרה ש־W מרחב T־שמור, נוכל להסתכל על הצמצום $T|_W : W \to W$ שמוגדר על ידי $T|_W(w) = T(w)$.

הערה 2.3.3. שימו לב שהסימון הוא אותו סימון כמו הצמצום של המקור, אך במסגרת הקורס צמצום אופרטורים יתייחס לזה שבהגדרה אלא אם כן יצוין מפורשות אחרת.

תרגיל 2.4. יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהיו $P, T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ כאשר P איזומורפיזם. יהי $W \leq V$.
הראו כי W הינו T־שמור אם ורק אם $P^{-1}(W)$ הינו $T \circ P$־שמור.

פתרון. נניח כי W הינו T־שמור, ויהי $u \in P^{-1}(W)$. אז יש $w \in W$ עבורו $u = P^{-1}(w)$. מתקיים

$$(T \circ P)(u) = T(P(u)) = T\left(P\left(P^{-1}(w)\right)\right) = T(w) \in W$$

כאשר $T(w) \in W$ כי W הוא T־שמור.
בכיוון השני, נניח כי $U := P^{-1}(W)$ הינו $T \circ P$־שמור. נגדיר $S = T \circ P$, ואז $T = S \circ P^{-1}$ וגם $W = PP^{-1}W = PU = \left(P^{-1}\right)^{-1} U$. מהכיוון הראשון, נקבל כי W הינו T־שמור.

תרגיל 2.5. יהי $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי ממשי ויהי

$$\begin{aligned} T \colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned}.$$

מצאו את התת־מרחבים ה־T־שמורים של $\mathbb{C}$ והסיקו כי T אינו לכסין מעל $\mathbb{R}$.

פתרון. $\mathbb{C}, \{0\}$ תת־מרחבים T־שמורים.
נניח כי $W \leq \mathbb{C}$ מרחב T־שמור נוסף. אז $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$ ולכן יש

$$z_0 \in \mathbb{C}^\times := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$$

עבורו $W = \operatorname{Span}\{z_0\}$. נקבל $T(z_0) \in W$ לכן $T(z_0) = cz_0$ עבור $c \in \mathbb{R}$. אבל $cz_0 = iz_0$ גורר $c = i$ בסתירה.
תת־מרחבים T־שמורים 1־מימדיים של $\mathbb{C}$ הם $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור v וקטור עצמי של T. לכן אין ל־T וקטורים עצמיים, ולכן הוא אינו לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

סימון 2.3.4. עבור מטריצות ריבועיות $A_1,\ldots,A_k$ נסמן

$$A_1\oplus\ldots\oplus A_k=\begin{pmatrix}A_1&&\\&\ddots&\\&&A_k\end{pmatrix}.$$

תרגיל 2.6. יהי $V=\mathbb{C}^n$ ותהי

$$T\colon V\to V$$

עם

$$[T]_E=\lambda_1 I_{m_1}\oplus\ldots\oplus\lambda_k I_{m_k}$$

עבור $\lambda_i\neq\lambda_j$ לכל $i\neq j$. נסמן $n_i=m_1+\ldots+m_{i-1}+1$. מצאו את כל התת־מרחבים ה־T־שמורים של V.

פתרון. ראשית, אם $W\leq V_i:=\mathrm{Span}\left(e_{n_i},\ldots,e_{n_i+m_i-1}\right)$, נקבל כי $T\left(w\right)=\lambda_i w\in W$ לכל $w\in W$. לכן כל תת־מרחב כזה הינו T־שמור. גם סכום של תת־מרחבים כאלה יהיה T־שמור כי אם $v_i\in W_i:=W\cap V_i$ לכל $i\in[k]$ אז

$$T\left(v_1+\ldots+v_k\right)=T\left(v_1\right)+\ldots+T\left(v_k\right)$$

כאשר $T\left(v_i\right)\in W$ וגם $T\left(v_i\right)=\lambda_i v_i\in V_i$, כלומר $T\left(v_i\right)\in W_i$. נראה שאלו כל האפשרויות לתת־מרחבים שמורים. ראינו בהרצאה כי אם W הינו T־שמור, אז $T|_W$ הינו לכסין. לכן, W סכום ישר של המרחבים העצמיים של $T|_W$. לכל ערך עצמי λ, המרחב העצמי W_λ של $T|_W$ הוא החיתוך $V_\lambda\cap W$ כאשר V_λ המרחב העצמי של T. כיוון שעבור אופרטור לכסין המרחב שווה לסכום ישר של המרחבים העצמיים, נקבל כי

$$W=\bigoplus_{i\in[k]}W_{\lambda_i}=\bigoplus_{i\in[k]}W\cap V_{\lambda_i},$$

כנדרש.

הגדרה 2.3.5. יהי $\lambda\in\mathbb{F}$. נגדיר בלוק ז'ורדן מגודל m עם ערך עצמי λ בתור

$$J_m\left(\lambda\right):=\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_m\left(\mathbb{F}\right).$$

הגדרה 2.3.6 (אופרטור אי־פריד). אופרטור $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ נקרא אי־פריד אם לכל $U,W\leq V$ שהינם T־שמורים ועבורם $U\oplus W=V$, בהכרח $U=V,W=\{0\}$ או $U=\{0\},W=V$.

תרגיל 2.7. 1. יהי $T=T_{J_n(0)}\in\mathrm{End}\left(\mathbb{F}^n\right)$. מיצאו את המרחבים ה־$T$־שמורים של $\mathbb{F}^n$.

2. יהי $N\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}}\left(V\right)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$. הראו שהמרחבים ה־S־שמורים של V הם המרחבים ה־$\left(N+\lambda\,\mathrm{Id}_V\right)$־שמורים של V.

3. יהי $S=T_{J_n(\lambda)}\in\mathrm{End}_{\mathbb{F}^n}$. הסיקו מה המרחבים ה־$S$־שמורים של $\mathbb{F}^n$.

4. הראו כי S הינו אי־פריד.

פתרון. 1. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\{0\}&\\ \ker\left(T\right)&=\mathrm{Span}\left(e_1\right)\\ \mathrm{Im}\left(T\right)&=\mathrm{Span}\left(e_1,\ldots,e_{n-1}\right)\\ V&=\mathrm{Span}\left(e_1,\ldots,e_n\right)\end{aligned}$$

כולם T־שמורים, כיוון שמרחב האפס, הגרעין, התמונה, והמרחב כולו תמיד T־שמורים. גם, מתקיים

$$\begin{aligned}\forall i>1\colon T\left(e_i\right)&=e_{i-1}\in\mathrm{Span}\left(e_1,\ldots,e_i\right)\\ T\left(e_1\right)&=0\end{aligned}$$

ולכן כל מרחב מהצורה $\mathrm{Span}\left(e_1,\ldots,e_i\right)$ עבור $i\in\{0,\ldots,n\}$ הינו T־שמור. נרצה להראות שהמרחבים ה־T־שמורים הם בדיוק אלו מהצורה הזאת.

יהי $W \leq \mathbb{F}^n$ מרחב T-שמור, ויהי $k \in \{0, \ldots, n\}$ המקסימלי עבורו $\operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_k) \subseteq W$ (יש כזה k כיוון שעבור $k=0$ נקבל $\{0\} \subseteq W$). נרצה להראות כי $W = \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_k)$.

אחרת, קיים וקטור $v = \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i e_i \in W$ עם $\ell > k$ וגם $\alpha_\ell \neq 0$. אם $\ell = k+1$ נקבל כי $\alpha_i e_i \in W$ לכל $i < \ell$ ולכן

$$\alpha_\ell e_\ell = v - \sum_{i \in [\ell-1]} \in W$$

וכיוון ש-$\alpha_\ell \neq 0$ אז $e_{k+1} = e_\ell \in W$. במקרה זה $e_1, \ldots, e_{k+1} \in W$ ולכן $\operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_{k+1}) \subseteq W$ בסתירה להנחה.

באופן כללי, מתקיים $T^i(v) \in W$ לכל i. כדי שיתקיים $T^i(e_\ell) = e_{k+1}$ צריך לקחת $\ell - i = k+1$ כלומר $i = \ell - (k+1)$. אז

$$\begin{aligned} T^{\ell-(k+1)}(v) &= \sum_{i \in [\ell]} \alpha_i T^{\ell-(k+1)}(e_i) \\ &= \sum_{i=\ell-k}^{\ell} \alpha_i e_{i-\ell+k+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_{j+\ell-k-1} e_j \in W \end{aligned}$$

ונקבל את הנדרש מהמקרה הקודם $\ell = k+1$.

2. יהי $W \leq V$ תת-מרחב N-שמור. לכל $w \in W$ מתקיים

$$(N + \lambda \operatorname{Id}_V)(w) = N(w) + \lambda w \in W$$

כיוון ש-$N(w), \lambda w \in W$. לכן W הינו $N + \lambda \operatorname{Id}_V$-שמור.

אם $W \leq V$ תת-מרחב $(N + \lambda \operatorname{Id}_V)$-שמור, נקבל מהכיוון הראשון שהוא $(N + \lambda \operatorname{Id}_V) + (-\lambda) \operatorname{Id}_V$-שמור, כלומר N-שמור.

3. מהסעיף הקודם, נקבל כי המרחבים ה-S שמורים הם המרחבים ה-T-שמורים, שהינם אלו מהצורה $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}(e_1, \ldots, e_i)$ עבור $i \in \{0, \ldots, n\}$.

4. נניח כי יש תת-מרחבים S-שמורים W_1, W_2 עבורם $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$. מהסעיף הקודם, יש $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ עבורם

$$\begin{aligned} W_1 &= \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_i) \\ .W_2 &= \operatorname{Span}(e_1, \ldots, e_j) \end{aligned}$$

כיוון ש-$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{F}^n$, בהכרח $e_n \in W_1 + W_2$, ולכן $i = n$ או $j = n$. במקרה הראשון, $W_1 = \mathbb{F}^n, W_2 = \{0\}$ ובמקרה השני $W_2 = \mathbb{F}^n, W_1 = \{0\}$, ובכל מקרה הפירוק הינו טריוויאלי.

פתרון. עבור מטריצה $A = (a_{i,j}) \in \operatorname{Mat}_{n,m}$ נגדיר

$$\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})$$

את המטריצה שמקדמיה הם המספרים הצמודים לאלו ב-A. נשים לב כי עבור שתי מטריצות $A \in \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$ ו-$B \in \operatorname{Mat}_{n,\ell}(\mathbb{C})$, מתקיים

$$\begin{aligned} \left(\overline{AB}\right)_{i,j} &= \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{i,k}}\, \overline{b_{k,j}} \\ &= \left(|A|\,|B|\right)_{i,j} \end{aligned}$$

ולכן $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$.

1. תת-מרחב T_A-שמור ממימד 1 הוא מהצורה $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(v)$ עבור וקטור עצמי v של A. לכן מההנחה, אין ל-T_A וקטורים עצמיים.

אבל, אפשר לחשוב על A כעל מטריצה ב־$\mathrm{Mat}_n\left(\mathbb{C}\right)$ שנסמנה $\tilde{A}$. אז ל־$T_{\tilde{A}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^n\right)$ יש וקטור עצמי כאופרטור מעל $\mathbb{C}$. יהי $v \in \mathbb{C}^n$ וקטור עצמי של $T_{\tilde{A}}$ עם ערך עצמי $\lambda = \alpha + i\beta$, ונכתוב

$$v = \begin{pmatrix} u_1 + iw_1 \\ \vdots \\ u_n + iw_n \end{pmatrix} = u + iw$$

כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ וקטורים עם מקדמים ממשיים. נוכל לחשוב עליהם כחיים ב־$\mathbb{R}^n$. אז

$$\begin{aligned} Au + iAw &= A\left(u + iw\right) \\ &= Av \\ &= \lambda v \\ &= \left(\alpha + i\beta\right)\left(u + iw\right) \\ &= \alpha u + \alpha iw + \beta iu - \beta w \\ &= \left(\alpha u - \beta w\right) + i\left(\alpha w + \beta u\right) \end{aligned}$$

כאשר $Au, Aw \in \mathbb{R}^n$. אז, נוכל להשוות מקדמים ולקבל

$$\begin{aligned} T_A\left(u\right) &= Au = \alpha u - \beta w \in \mathrm{Span}\left(u, w\right) \\ T_A\left(w\right) &= Aw = \alpha w + \beta u \in \mathrm{Span}\left(u, w\right). \end{aligned}$$

לכן $\mathrm{Span}\left(u, w\right)$ הינו תת־מרחב L_A־שמור של $\mathbb{R}^n$.

2. אם λ ממשי אין מה להוכיח כי $\bar{\lambda} = \lambda$. נניח אם כן כי $\lambda = \alpha + i\beta$ עבור $\beta \neq 0$. נסמן ב־$v = u + iw$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי λ, כאשר $u, w \in \mathbb{C}^n$ עם מקדמים ממשיים. אז

$$\bar{A}\bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

ולכן $\bar{v}$ וקטור עצמי של A עם ערך עצמי $\bar{\lambda}$, כנדרש.