

אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 2

סכומים ישרים, מרחבים שמורים, ונילפוטנטיות

תאריך הגשה: 30.11.2022

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי, יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו $V_1, \dots, V_k \leq V$ כולם T -שמורים וכך שמתקיים $V = \bigoplus_{i \in [k]} V_i$.

1. הראו כי

$$\ker(T) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker(T|_{V_i})$$
$$\text{Im}(T) = \bigoplus_{i \in [k]} \text{Im}(T|_{V_i})$$

2. הראו כי

$$\ker(T - \lambda \text{Id}_V) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker(T|_{V_i} - \lambda \text{Id}_{V_i})$$

לכל $\lambda \in \mathbb{F}$, והסיקו שהערכים העצמיים של T הם אלו של כל ה- $T|_{V_i}$ והראו כי

$$r_{T,a}(\lambda) = \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},a}(\lambda)$$
$$r_{T,g}(\lambda) = \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},g}(\lambda)$$

לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ וכאשר $r_{S,a}(\lambda), r_{S,g}(\lambda)$ הריבויים האלגברי והגיאומטרי של λ כערך עצמי של $S \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

תרגיל 2. יהי $T = T_{J_n(0)} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ אופרטור הכפל במטריצה $J_n(0)$ משמאל. מיצאו בסיס ז'ורדן עבור T^2 .

תרגיל 3. תהי $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$ ויהי $T = T_A$ אופרטור הכפל ב- A משמאל.

1. הראו כי T נילפוטנטי מאינדקס 3 והסיקו כי הוא אופרטור הווה.

2. מיצאו בסיס B של \mathbb{C}^3 כך ש- T אופרטור הווה ביחס לבסיס B .

תרגיל 4. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי, יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי B בסיס של V .

1. נסמן $A = [T]_B$ ונזכיר כי

$$\begin{aligned} T_A: \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

וכי

$$\begin{aligned} \rho_B: V &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

הראו כי

$$T = \rho_B^{-1} \circ T_A \circ \rho_B$$

2. הראו כי $W \leq V$ הינו T -שמור אם ורק אם $\rho_B(W)$ הינו T_A -שמור.

תרגיל 5. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי, יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V .

1. נניח כי $[T]_B = J_n(\lambda)$. מיצאו את המרחבים ה- T -שמורים של V .

2. יהי $V = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ ויהי

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow V \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

מיצאו את כל התת-מרחבים ה- T -שמורים של V .