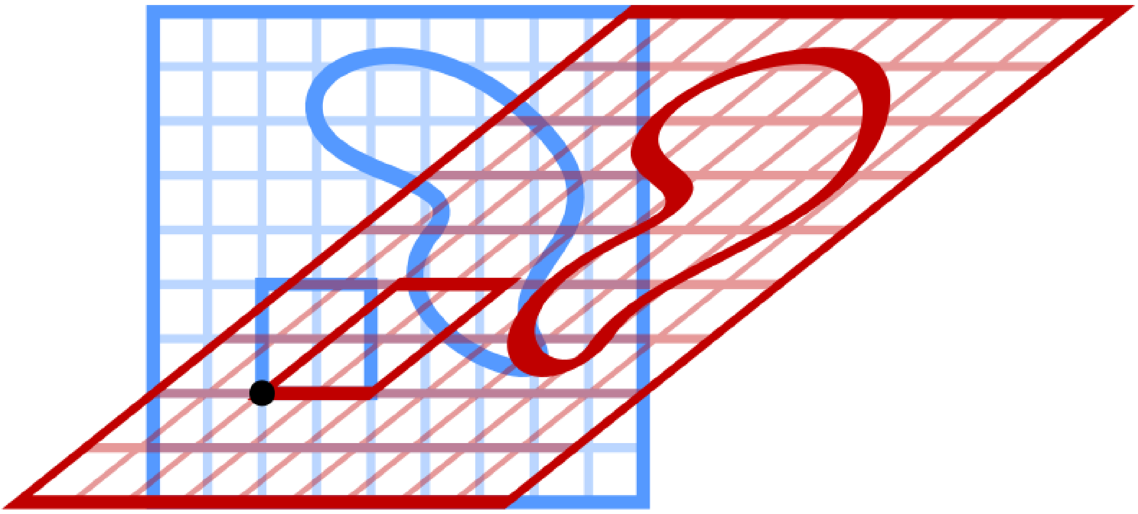

אלגברה ב' (104168)
חורף 2022-2023
רשימות תרגולים

אלן סורני

הרשימות עודכנו לאחרונה בתאריך ה־24 באוקטובר 2022

תוכן העניינים

חלק I

חלק ראשון - מרחבים שמורים

פרק 1

מטריצות מייצגות

1.1 הגדרות

הגדרה 1.1.1 (וקטור קואורדינטות). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ויהי $v \in V$. וקטור הקואורדינטות של v לפי הבסיס B הוא הוקטור $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ היחידים עבורם

$$v = \sum_{i \in [n]} \alpha_i v_i := \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

הערה 1.1.2. ההעתקה

$$\begin{aligned} \rho_B \colon V &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

הגדרה 1.1.3 (מטריצה מייצגת). יהיו V, W מרחבים וקטורים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C בהתאמה, ונסמן

$$B = (v_1, \ldots, v_n).$$

נסמן גם $n := \dim(V)$ ו־$m := \dim(W)$. עבור $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ נגדיר

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_C & \cdots & [T(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{F}).$$

הערה 1.1.4. ההעתקה

$$\begin{aligned} \eta_C^B \colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, B) &\to \operatorname{Mat}_{m,n}(\mathbb{F}) \\ T &\mapsto [T]_C^B \end{aligned}$$

היא איזומורפיזם לינארי.

טענה 1.1.5. תהי $T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ ויהיו $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V ו־C בסיס של W. אז

$$[T(v)]_C = [T]_C^B [v]_B$$

לכל $v \in V$.

הוכחה. עבור $v=v_i$ מתקיים $[T]_C^B [v_i]_B = [T]_C^B e_i$ וזאת העמודה ה־i של $[T]_C^B$, שהינה $[T(v_i)]_C$ לפי ההגדרה.
אם $v=\sum_{i\in[n]} \alpha_i v_i$ נקבל מלינאריות של T ושל ρ_B כי

$$\begin{aligned}
[T(v)]_C &= \left[T\left(\sum_{i\in[n]} \alpha_i v_i\right)\right]_C \\
&= \left[\sum_{i\in[n]} \alpha_i T(v_i)\right]_C \\
&= \sum_{i\in[n]} \alpha_i [T(v_i)]_C \\
&= \sum_{i\in[n]} \alpha_i [T]_C^B [v_i]_B \\
&= [T]_C^B \left(\sum_{i\in[n]} \alpha_i [v_i]_B\right) \\
&= [T]_C^B \left[\sum_{i\in[n]} \alpha_i v_i\right]_B \\
&= [T]_C^B [v]_B ,
\end{aligned}$$

כנדרש. ■

סימון 1.1.6. אם B בסיס של מרחב וקטורי סוף־מימדי V ואם $T\in \operatorname{End}(V)$, נסמן $[T]_B := [T]_B^B$ ונקרא למטריצה זאת המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B.

סימון 1.1.7. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי עם בסיסים B,C. נסמן $M_C^B := [\mathrm{Id}_V]_C^B$.

סימון 1.1.8. אם $A\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$, נסמן

$$\begin{aligned}
T_A \colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\
v &\mapsto Av .
\end{aligned}$$

תרגיל 1. יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינום הממשיים ממעלה לכל היותר 3, תהי

$$\begin{aligned}
T \colon \mathbb{R}_3[x] &\to \mathbb{R}_3[x] \\
p(x) &\mapsto p(x+1)
\end{aligned}$$

ויהי $B=\left(1,x,x^2,x^3\right)$ בסיס של V. כיתבו את $[T]_B$.

פתרון. לפי הגדרת המטריצה המייצגת, עמודות $[T]_B$ הן $\left[T\left(x^i\right)\right]_B$ עבור $i\in\{0,1,2,3\}$. מתקיים

$$\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(x) &= x+1 = 1+x \\
T\left(x^2\right) &= (x+1)^2 = 1+2x+x^2 \\
T\left(x^3\right) &= (x+1)^3 = 1+3x+3x^2+x^3
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
[T(1)]_B &= e_1 \\
[T(x)]_B &= e_1+e_2 \\
\left[T\left(x^2\right)\right]_B &= e_1+2e_2+e_3 \\
\left[T\left(x^3\right)\right]_B &= e_1+3e_2+3e_3+e_4
\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

תרגיל 2. יהי $V=\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, תהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ A&\mapsto \frac{1}{2}\left(A-A^t\right)\end{aligned}$$

ויהי

$$E=(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2})\coloneqq\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

הבסיס הסטנדרטי של V. כיתבו את $[T]_E$.

פתרון. כמו מקודם, נחשב את $[T(E_{i,j})]_E$ כיוון שאלו עמודות $[T]_E$. מתקיים

$$\begin{aligned}&T(E_{1,1})=\frac{1}{2}(E_{1,1}-E_{1,1})=0\\ &T(E_{1,2})=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}E_{1,2}-\frac{1}{2}E_{2,1}\\ &T(E_{2,1})=\frac{1}{2}(E_{2,1}-E_{1,2})=\frac{1}{2}E_{2,1}-\frac{1}{2}E_{1,2},T(E_{2,2})=\frac{1}{2}(E_{2,2}-E_{2,2})=0\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}[T(E_{1,1})]_E&=0\\ [T(E_{1,2})]_E&=\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_3\\ [T(E_{2,1})]_E&=-\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3\\ [T(E_{2,2})]_E&=0\end{aligned}$$

ואז

$$[T]_E=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

תרגיל 3. יהי $V=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ עם הבסיס $B=(f_1,f_2)$ כאשר

$$\begin{aligned}f_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)&=x\\ f_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)&=y,\end{aligned}$$

ותהי

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

מיצאו $T\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ עבורו $[T]_B=A$.

פתרון. מתקיים

$$[T]_B=\begin{pmatrix}|&|\\ [T(f_1)]_B&[T(f_2)]_B\\ |&|\end{pmatrix}$$

לכן נדרוש

$$[T(f_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[T(f_2)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

אז

$$T(f_1) = f_1 + 2f_2$$
$$T(f_2) = 3f_1 + 4f_2.$$

לכן, אם $f \in V$ איבר כללי, נכתוב

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$

ונקבל כי

$$\begin{aligned}(T(f))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (T(\alpha f_1 + \beta f_2))\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(f_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta T(f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(f_1 + 2f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta(3f_1 + 4f_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \alpha(x + 2y) + \beta(3x + 4y)\end{aligned}.$$

טענה 1.1.9. תהיינה $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונניח כי לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים $Av = Bv$. אז $A = B$.

הוכחה. מהנתון, מתקיים $(A-B)v = 0$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$. בפרט העמודה ה־i של $A - B$, שהינה $(A-B)e_i$, שווה ל־0. לכן $A - B = 0$. ■

טענה 1.1.10. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ עם בסיסים B, C, D בהתאמה, ותהיינה

$$S \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$$
$$T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W).$$

אז

$$[T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B.$$

הוכחה. לכל $u \in U$ מתקיים

$$\begin{aligned}[T]_D^C [S]_C^B [u]_B &= [T]_D^C [S(u)]_C \\ &= [T \circ S(u)]_D \\ &= [T \circ S]_D^B [u]_B\end{aligned}$$

לכן

$$[T]_D^C [S]_C^B = [T \circ S]_D^B,$$

כנדרש. ■

תרגיל 4. תהי $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה.

1. יהי E הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס B של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_E^B$.
2. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^E$.
3. יהי B בסיס של $\mathbb{F}^n$. מיצאו בסיס C של $\mathbb{F}^n$ עבורו $A = M_C^B$.

4. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n\in\mathbb{N}_+$ מעל $\mathbb{F}$, יהי $T\in\operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ איזומורפיזם ויהי $B=(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס של V. מיצאו בסיס C של V עבורו $A=[T]_C^B$.

פתרון. 1. אם $B=(v_1,\ldots,v_n)$, מתקיים מההגדרה כי

$$M_E^B=\begin{pmatrix}| & & |\\ [v_1]_E & \cdots & [v_n]_E\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \cdots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}.$$

לכן ניקח את $(v_1,\ldots,v_n)$ להיות עמודות A, לפי הסדר.

2. לכל $v\in\mathbb{F}^n$ מתקיים

$$M_E^CM_C^Ev=M_E^C[v]_C=[v]_E=v$$

ולכן $M_C^E=\left(M_E^C\right)^{-1}$. אם ניקח $C=(u_1,\ldots,u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של A^{-1} נקבל מהסעיף הקודם כי $M_E^C=A^{-1}$ ולכן $M_C^E=\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

3. מתקיים $M_C^B=M_C^EM_E^B$ לכן נרצה שיתקיים $A=M_C^EM_E^B$ או במילים אחרות $M_C^E=\left(M_E^B\right)^{-1}A=M_B^EA$. מהסעיף הקודם, נרצה $C=(u_1,\ldots,u_n)$ כאשר u_i העמודה ה־i של $\left(M_B^EA\right)^{-1}=A^{-1}M_E^B$, כלומר

$$u_i=A^{-1}M_E^Be_i=A^{-1}M_E^B[v_i]_B=A^{-1}v_i.$$

4. עבור כל בסיס C' מתקיים $[T]_{C'}^B=M_{C'}^B[T]_B^B$ לכן נרצה $A=M_C^B[T]_B^B$. כיוון ש־T איזומורפיזם, המטריצה $[T]_B^B$ הפיכה, ולכן נרצה $M_C^B=A\left([T]_B^B\right)^{-1}$. כעת, אם $C=(v_1,\ldots,v_n)$ נקבל כי $M_C^B=M_{\hat{C}}^E$ כאשר $\hat{C}=([v_1]_B,\ldots,[v_n]_B)$ לפי הסעיף הקודם, נרצה $\hat{C}=(u_1,\ldots,u_n)$ עבור

$$u_i=\left(A[T]_B^{-1}\right)^{-1}e_i=[T]_BA^{-1}e_i.$$

לכן

$$v_i=\rho_B^{-1}\left([T]_BA^{-1}e_i\right).$$

תרגיל 5. יהי $V=\mathbb{C}_3[x]$, תהי

$$\begin{aligned}T\colon V&\to V\\ p(x)&\mapsto p(x+1)\end{aligned},$$

יהי $E=\left(1,x,x^2,x^3\right)$, הבסיס הסטנדרטי ותהי $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. כיתבו מפורשות בסיס C של V עבורו $A=[T]_C^E$.

פתרון. לפי התרגיל הקודם, נרצה קודם $\hat{C}=(u_1,\ldots,u_4)$ כאשר $u_i=[T]_EA^{-1}e_i$. חישבנו ב־1 כי

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{pmatrix}$$

וניתן לראות כי $A^2=I$ כלומר $A^{-1}=A$. נשים לב כי

$$\begin{aligned}Ae_1&=e_2\\ Ae_2&=e_1\\ Ae_3&=e_4\\ Ae_4&=e_3\end{aligned}$$

ואז נקבל

$$u_1 = [T]_E Ae_1 = [T]_E e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [T]_E Ae_2 = [T]_E e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = [T]_E Ae_3 = [T]_E e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = [T]_E Ae_4 = [T]_E e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

כלומר

$$\hat{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right),$$

ולבסוף

$$C = \left(\rho_E^{-1}(u_1), \ldots, \rho_E^{-1}(u_4)\right) = \left(x + 2x^3 + 3x^3, 1 + x + x^2 + x^3, x^3, x^2 + 3x^3\right).$$

1.2 גרעין ותמונה

הגדרה 1.2.1 (גרעין של העתקה לינארית). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. הגרעין של T הוא

$$\ker(T) \coloneqq \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

הגדרה 1.2.2 (תמונה של העתקה לינארית). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. התמונה של T היא

$$\operatorname{Im}(T) \coloneqq \{T(v) \mid v \in V\}.$$

הגדרה 1.2.3 (דרגה של אופרטור לינארי). יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה ותהי $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. הדרגה של T היא

$$\operatorname{rank}(T) \coloneqq \dim(\operatorname{Im}(T)).$$

הערה 1.2.4. אם V, W סוף־מימדיים עם בסיסים B, C בהתאמה, אז

$$\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank}\left([T]_C^B\right).$$

משפט 1.2.5 (משפט המימדים). יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $T \in \operatorname{End}(V)$. אז

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}(T) + \dim \ker(T).$$

תרגיל 6. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי ויהי $v \in V$. מיצאו בסיס B של V עבורו $[v]_B = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

פתרון. נשלים את (v) לבסיס $B_0 = (v_1, \ldots, v_n)$ של V כאשר $v_1 = v$. תהי

$$A := \begin{pmatrix}1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

A הפיכה, ולכן מתרגיל קודם קיים בסיס $B = (u_1, \ldots, u_n)$ של V עבורו $M_B^{B_0} = A$. נקבל

$$\begin{aligned}[v]_B &= [\mathrm{Id}_V\, v]_B \\ &= [\mathrm{Id}_V]_B^{B_0}\,[v]_{B_0} \\ &= A\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

מפורשות, ראינו כי ניתן לקחת $u_i = \rho_{B_0}^{-1}\left(A^{-1}e_i\right)$.

תרגיל 7. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. הראו כי $\operatorname{rank} T = 1$ אם ורק אם יש בסיסים B, C ל־V כך שכל מקדמי $[T]_C^B$ הם 1.

פתרון. נניח כי יש בסיסים B, C כמתואר. אז $\operatorname{rank} T = \operatorname{rank}[T]_C^B = 1$.
בכיוון השני, נניח כי $\operatorname{rank} T = 1$. כלומר, $\dim \operatorname{Im} T = 1$. ממשפט המימדים מתקיים $\dim V = \dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T$, לכן

$$\dim\ker T = \dim V - \dim\operatorname{Im} T = \dim V - 1.$$

יהי $n := \dim V$ ויהי

$$\tilde{B} := (u_1, \ldots, u_{n-1})$$

בסיס של $\ker T$.

יהי w וקטור פורש של $\operatorname{Im} T$ ויהי C בסיס של V כך שמתקיים $[w]_C = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$, שקיים לפי התרגיל הקודם. יהי $v := T^{-1}(w)$, ואז $(v, u_1, \ldots, u_{n-1})$ בלתי־תלויים לינארית, כי $v \notin \ker T$. לכן זה בסיס של V. אז גם $B := (v, v+u_1, \ldots, v+u_{n-1})$ בסיס של V כי המטריצה

$$\begin{pmatrix}| & & | \\ [v]_{\tilde{B}} & \cdots & [v+u_{n-1}]_{\tilde{B}} \\ | & & |\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ & 0 & & 1 & 0\\ 0 & & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

הפיכה.

נסמן $C=(w_1,\ldots,w_m)$. מתקיים

$$T(v)=w=w_1+\ldots+w_m$$

ולכל $i\in[n-1]$ מתקיים

$$\begin{aligned}T(v+u_i)&=T(v)+T(u_i)\\&=T(v)+0\\&=T(v)\\&=w_1+\ldots+w_m\end{aligned}$$

לכן $[T]_C^B$ מטריצה שכל מקדמיה הם 1.

תרגיל 8. תהי

$$\begin{aligned}T\colon\mathbb{R}_3[x]&\to\mathbb{R}_3[x]\\ .p(x)&\mapsto p(-1)\end{aligned}$$

מיצאו בסיסים B,C של $\mathbb{R}_3[x]$ עבורם

$$.[T]_C^B=A:=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

פתרון. ניקח בסיס $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3):=\left(x+1,x^2-1,x^3+1\right)$ של $\ker(T)$, כאשר זהו בסיס כי זאת קבוצה בלתי־תלוייה לינארית מגודל מקסימלי (הגרעין לכל היותר 3 מימדי כי $T\neq0$). מתקיים $T(x)=-1=:w$ ואז $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(w)$. נחשב בסיס C עבורו $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. נשלים את (v) לבסיס

$$.C_0=(v_1,v_2,v_3,v_4):=\left(-1,x,x^2,x^3\right)$$

המטריצה

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

הפיכה ולכן קיים בסיס $C=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ עבורו $M_C^{C_0}=X$, כשראינו שאז $[w]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. כפי שראינו, ניתן לחשב את C לפי $u_i=\rho_{C_0}^{-1}\left(X^{-1}e_i\right)$. מתקיים

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$u_1=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)=-1-x-x^2-x^3$$

$$u_2=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=x$$

$$u_3=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=x^2$$

$$.u_4=\rho_{C_0}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x^3$$

כלומר, $C=\left(-1-x-x^2-x^3,x,x^2,x^3\right)$.

ניקח $v=x\in V$ כך שיתקיים $T\left(v\right)=-1=w$ ואז

$$B=\left(v,v+b_1,v+b_2,v+b_3\right)=\left(x,2x+1,x^2+x-1,x^3+x+1\right)$$

כמו בתרגיל הקודם.

אכן, מתקיים

$$\begin{aligned}T\left(x\right)&=-1\\T\left(2x+1\right)&=-2+1=-1\\T\left(x^2+x-1\right)&=\left(-1\right)^2-1-1=1-2=-1\\T\left(x^3+x+1\right)&=\left(-1\right)^3-1+1=-1\end{aligned}$$

וגם $[-1]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, לכן

$$,[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

כפי שרצינו.