

אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 2

סכומים ישרים, מרחבים שמורים, ונילפוטנטיות

תאריך הגשה: 30.11.2022

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} ויהיו $U, W \leq V$ עבורם $V = U \oplus W$. יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו B, C בסיסים של U, W בהתאמה. הראו ש- T שומר אם ורק אם ניתן לכתוב

$$[T]_{B \cup C} = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

עבור מטריצות

$$\begin{aligned} X &\in \text{Mat}_{\dim(U)}(\mathbb{F}) \\ Y &\in \text{Mat}_{\dim(U) \times \dim(W)}(\mathbb{F}) \\ Z &\in \text{Mat}_{\dim(W)}(\mathbb{F}) \end{aligned}$$

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי, יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי B בסיס של V .

1. נסמן $A = [T]_B$ ונזכיר כי

$$\begin{aligned} T_A: \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

נכי

$$\begin{aligned} \rho_B: V &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned}$$

הראו כי

$$T_A = \rho_B^{-1} \circ T \circ \rho_B$$

2. הראו כי $W \leq V$ הינו T -שמור אם ורק אם $\rho_B(W)$ הינו T_A -שמור.

תרגיל 3. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי, יהי $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V .

1. נניח כי $[T]_B = J_m(\lambda)$. מיצאו את המרחבים ה- T -שמורים של V .

2. נניח כי

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j$ לכל $i \neq j$. מיצאו את המרחבים ה- T -שמורים של V .

תרגיל 4. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי, יהי $T \in \text{End}(V)$ ויהיו $V_1, \dots, V_k \leq V$ כולם T -שמורים וכך שמתקיים $V = \bigoplus_{i \in [k]} V_i$. במקרה זה נכתוב $T = \bigoplus_{i \in [k]} T|_{V_i}$. הראו כי

$$\ker(T) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker(T|_{V_i})$$

$$\text{Im}(T) = \bigoplus_{i \in [k]} \text{Im}(T|_{V_i})$$

תרגיל 5. יהי V מרחב וקטורי מממד $n > 0$ ותהי

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k = n$$

סדרת מספרים.

1. נניח כי $n_i - n_{i-1}$ מונוטונית יורדת (לאו דווקא ממש). הראו שיש העתקה $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה

$$n_i = \dim \ker(T^i)$$

לכל $i \in [k]$.

רמז: חישבו על מטריצות מהצורה $J_m(0)$.

2. נניח כי יש $i \in [k]$ עבורו $n_{i+1} - n_i > n_i - n_{i-1}$. הראו שאין העתקה $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה

$$n_i = \dim \ker(T^i)$$

לכל $i \in [k]$.