אלגברה ב' - גיליון תרגילי בית 2
סכומים ישרים, מרחבים שמורים, ונילפוטנטיות

תאריך הגשה: 30.11.2022

תרגיל 1. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי, יהי $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהיו $V_1, \ldots, V_k \leq V$ כולם T־שמורים וכך שמתקיים $V = \bigoplus_{i \in [k]} V_i$.

1. הראו כי

$$\ker(T) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker\left(T|_{V_i}\right)$$
$$\operatorname{Im}(T) = \bigoplus_{i \in [k]} \operatorname{Im}\left(T|_{V_i}\right).$$

2. הראו כי

$$\ker(T - \lambda \operatorname{Id}_V) = \bigoplus_{i \in [k]} \ker\left(T|_{V_i} - \lambda \operatorname{Id}_{V_i}\right)$$

לכל $\lambda \in \mathbb{F}$, והסיקו שהערכים העצמיים של T הם אלו של כל ה־ $T|_{V_i}$ וגם כי

$$r_{T,a}(\lambda) = \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},a}(\lambda)$$
$$r_{T,g}(\lambda) = \sum_{i \in [k]} r_{T|_{V_i},g}(\lambda)$$

לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ וכאשר $r_{S,a}(\lambda), r_{S,g}(\lambda)$ הריבויים האלגברי והגיאומטרי של λ כערך עצמי של $S \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

תרגיל 2. יהי V מרחב וקטורי ממימד $n > 0$ ותהי

$$0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < n_k = n$$

סדרת מספרים.

1. נניח כי $n_i - n_{i-1}$ מונוטונית יורדת (לאו דווקא ממש). הראו שיש העתקה $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה

$$n_i = \dim \ker\left(T^i\right)$$

לכל $i \in [k]$.

רמז: חישבו על מטריצות מהצורה $J_m(0)$.

2. נניח כי יש $i \in [k]$ עבורו $n_{i+1} - n_i > n_i - n_{i-1}$. הראו שאין העתקה $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$ עבורה

$$n_i = \dim \ker\left(T^i\right)$$

לכל $i \in [k]$.

תרגיל 3. יהי $V = \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$ ויהי

$$T \colon V \to V$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b & c \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

מיצאו בסיס וצורת ז'ורדן עבור T ובסיס וצורת ז'ורדן עבור $S := T^2$.

תרגיל 4. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי B בסיס של V.

1. נסמן $A = [T]_B$ ונזכיר כי

$$\begin{aligned} T_A \colon \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

וכי

$$\begin{aligned} \rho_B \colon V &\to \mathbb{F}^n \\ v &\mapsto [v]_B \end{aligned} .$$

הראו כי

$T = \rho_B^{-1} \circ T_A \circ \rho_B$.

2. הראו כי $W \leq V$ הינו T־שמור אם ורק אם $\rho_B(W)$ הינו T_A־שמור.

תרגיל 5. יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי, יהי $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ ויהי $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V.

1. נניח כי $[T]_B = J_m(\lambda)$. מיצאו את המרחבים ה־T־שמורים של V.
2. יהי $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ ויהי

$$\begin{aligned} T \colon V &\to V \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} .$$

מיצאו את כל התת־מרחבים ה־T־שמורים של V.