



INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON



Mécanique des matériaux granulaires

Guilhem Mollon
2015

INSA de Lyon
Département Génie Mécanique et Développement
Quatrième année
Edition 1, 2016-2017

Avant-propos

Cet ouvrage constitue le support écrit du cours de Mécanique des Milieux Granulaires dispensé dans le cadre du module Mécanique Avancée de quatrième année du département Génie Mécanique et Développement de l'INSA Lyon. A ce titre, il s'adresse à des élèves ingénieurs en génie mécanique disposant de pré-requis en mécanique générale, et se veut avant tout généraliste dans son approche des milieux granulaires et de leur modélisation. On essaiera autant que possible d'alterner les points de vue : mécanicien, physicien, géomécanicien, etc.

Ce support de cours n'est en aucun cas un traité exhaustif, et s'appuie d'une manière plus ou moins importante sur différents cours et ouvrages, en particulier sur les livres de G. Thomas et O. Bonnefoy, de G. Philliponat et B. Hubert, et de F. Radjai et F. Dubois, ainsi que sur les cours de J. Duran et d'O. Pouliquen. Le lecteur souhaitant approfondir le sujet est invité à consulter ces ouvrages, les autres sources citées comme références bibliographiques du présent cours, et la très riche littérature scientifique sur le sujet.

Le cours présenté ici est composé de deux parties distinctes :

-Dans la première partie (composée des chapitres 1, 2, et 3), on aborde quelques généralités sur les matériaux granulaires : leurs usages et les enjeux associés, leur historique en tant qu'objet d'étude scientifique, leurs spécificités par rapport à d'autres matériaux plus classiques, les lois physiques auxquelles ils obéissent à petite échelle, et leurs comportements mécaniques, qui les font s'apparenter à un solide, à un fluide ou à un gaz selon le confinement et l'énergie auxquels ils sont soumis.

-Dans la deuxième partie (composée des chapitres 4 et 5), on décrit une technique numérique permettant de modéliser dans un même formalisme ces différents comportements, appelée "modélisation par éléments discrets". Cette méthode est d'abord décrite dans ses grands principes (idée générale, schéma numérique de résolution, algorithme général d'un code, techniques particulières associées à la détection de contact et à la génération d'échantillons, etc.), puis certains aspects plus pointus sont abordés (lois de contact enrichies et grains de morphologies complexes).

Dans le cadre du module Mécanique des Matériaux Granulaires, ce cours s'accompagne de plusieurs séances de travaux pratiques permettant d'implémenter et de mettre en pratique la modélisation par éléments discrets, et qui font l'objet de supports séparés.

Sommaire

Avant-propos	2
Sommaire	3
Chapitre 1 : Introduction aux matériaux granulaires	5
A. Où rencontre-t-on les milieux granulaires ?	5
1. Enjeux économiques	5
2. Applications industrielles	5
3. Géophysique, environnement, et physique	7
B. Histoire et spécificités de la matière en grains	8
1. Brève histoire de la science granulaire	8
2. Spécificités de la matière en grains	9
C. A l'échelle du grain	12
1. Ordres de grandeur	12
2. Interactions de contact standards entre particules	14
3. Interactions cohésives	17
4. Interactions particule-environnement	19
Conclusion	21
Chapitre 2 : Milieux granulaires en phase solide	22
A. Statique des assemblages granulaires	22
1. Morphologie et granulométrie	22
2. Empilements de particules	29
3. Des contacts aux contraintes	35
4. Voûtes : l'exemple du silo	38
B. Elastoplasticité	41
1. Petites déformations	41
2. Plasticité de Mohr-Coulomb	46
Conclusion	56
Chapitre 3 : Milieux granulaires en écoulement	57
A. Ecoulement plastique	57
1. Dilatance de Reynolds	57
2. Essai de cisaillement rectiligne	58
3. Liquéfaction des milieux saturés	60
B. Ecoulements denses	61
1. Ecoulement sur une pente	61
2. Ecoulement sur un tas	65
3. Ségrégation en écoulement	67
4. Ecoulement en silo	69
C. Ecoulements collisionnels	71
1. Analogie avec un gaz	71
2. Théorie cinétique des gaz granulaires	73
3. Expérience de Bagnold	74
4. Ségrégation sous vibrations	76

Chapitre 4 : Introduction à la modélisation discrète	78
A. Principes de la méthode	78
B. Efforts de contact standards	79
1. Raideur normale	80
2. Amortissement visqueux	81
3. Raideur tangentielle	82
4. Frottement et glissement	84
5. Résistance au roulement	85
C. Résolution numérique	86
1. Schéma de résolution explicite	86
2. Algorithme général	88
3. Détermination des paramètres numériques	90
D. Techniques de modélisation	93
1. Détections de voisinage	93
2. Génération d'un état initial	95
 Chapitre 5 : Modélisation discrète avancée	100
A. Lois de contact enrichies	100
1. Raideur normale non linéaire	100
2. Description générale des lois cohésives	101
3. Cohésion capillaire	103
4. Modèles d'adhésion fondés sur la physique	106
B. Grains de morphologies complexes	108
1. Génération d'échantillons complexes	108
2. Modélisation par clusters de disques ou de sphères	112
3. Modélisation par polygones ou polyèdres	114
 Références bibliographiques	117

Chapitre 1 : Introduction aux matériaux granulaires

A. Où rencontre-t-on les milieux granulaires ?

1. Enjeux économiques

On estime que, dans le monde entier, l'industrie manipule de l'ordre de la dizaine de milliards de tonnes de matériaux granulaires chaque année. D'après l'Union Nationale des Producteurs de Granulats, la production de granulats en France atteint 7 tonnes par habitant et par an. Par ailleurs, les poudres et autres produits en grains représentent, en masse, 70% des matières premières de l'industrie mondiale, et 50% des produits finis (soit que ces produits soient eux-mêmes granulaires, soit qu'un matériau granulaire soit intervenu dans leur élaboration) [1].

Le traitement et le transport de ces matières correspond à 10% des dépenses énergétiques de la planète [2]. La seule vente de matériaux granulaires représente 1% du PIB de la France. On estime qu'il s'agit du deuxième matériau le plus utilisé par les activités humaines, après l'eau. La plupart du temps, les procédés associés aux matériaux granulaires sont rudimentaires, fondés sur l'expérience, et peu optimisés. Il s'agit donc d'un important levier économique.

Les enjeux humains liés à la compréhension de ces matériaux sont également importants : les glissements de terrain, par exemple, font environ 32000 victimes par an dans le monde [3].

2. Applications industrielles

De très nombreuses industries font appel, directement ou indirectement, aux matériaux granulaires. Elles manipulent des quantités plus ou moins importantes de matériaux à plus ou moins grande valeur ajoutée.

-Industrie minière

L'extraction de matière première dans les mines souterraines et les carrières fait face à de nombreuses problématiques : stabilité des galeries (mines souterraines) ou des parois (mines à ciel ouvert), comportement à l'explosif, résistance à l'attaque des outils de coupe, optimisation du stockage (stabilité et encombrement des tas, pertes de matière par érosion éolienne), transport court par convoyeurs (à bandes, à vis, etc.), transport routier, ferroviaire et maritime (optimisation du chargement, stabilité sous vibrations), comportement au concassage et au broyage (usure des outils, etc.).

-Génie civil et construction

La fabrication du ciment, élément essentiel du béton, nécessite de nombreuses opérations d'extraction, mélanges, cuisson, conditionnement, etc., le tout pour des volumes très importants. Le béton lui-même, lors de sa mise en œuvre, est un matériau granulaire saturé d'eau qu'il faut comprendre et contrôler (coulabilité, viscosité, résistance).

Toutes les interactions entre les constructions et le sol sont étudiées par une discipline nommée géotechnique, qui s'intéresse au comportement des matériaux granulaires naturels (aussi appelés géomatériaux) sous différentes sollicitations mécaniques : fondations superficielles et profondes, tunnels, soutènements, etc.

Les terrassements (c'est à dire les opérations consistant à déplacer une grande quantité de géomatériaux pour l'utiliser à un autre endroit : construction d'un barrage poids, compactage d'îles artificielles, etc.), en particulier, représentent des défis importants en termes d'économies d'énergie et de matériau. Dans les transports, enfin les matériaux granulaires et leurs propriétés mécaniques sont essentiels dans le cas des ballasts de chemin de fer, des remblais autoroutiers, et des tarmacs d'aéroports.

-Energie

L'extraction de ressources énergétiques fossiles fait appel aux connaissances sur les propriétés du sous-sol en tant que milieu granulaire, et se trouve au centre de nombreuses problématiques scientifiques et environnementales : forages pétroliers, ancrage et sécurité des équipements d'extraction offshore, fracturation hydraulique pour l'extraction de gaz de schistes.

D'un autre côté, les matériaux granulaires ont leur importance dans la transition énergétique : fondations des éoliennes et hydroliennes offshore, stockage du CO₂ en couches géologiques profondes, filtration des particules fines issues des combustibles fossiles, etc.

-Industries de transformation

L'industrie agroalimentaire est une grosse productrice de matière en grains : céréales, fruits, aliments pour animaux, aliments en poudre (sucre, farine), etc. Cette production s'accompagne de problématiques mécaniques liées au stockage, au transport, et au conditionnement.

L'industrie pharmaceutique également traite essentiellement de matériaux granulaires, et ce à deux échelles : les principes actifs et les excipients sont généralement à l'état de poudres fines, qui doivent subir des opérations contrôlées de broyage, de mélanges de précision, et de compaction. A l'issue de ces opérations, les produits pharmaceutiques sont généralement traités à l'état de milieu granulaire grossier (granules, cachets, pilules, etc.), qui sont soumis à des opérations de tri, transport, conditionnement, etc.

Dans l'industrie chimique, les matériaux granulaires sont souvent utilisés lors de réactions solides-solides, du fait de leur grande surface d'échange. On peut citer par exemple les filtres à charbons actifs utilisés dans les masques à gaz, les combustibles solides (comme par exemple le propergol utilisé par l'industrie spatiale), l'industrie cosmétique, les toners de photocopieuse, et les réacteurs à lit fluidisé (mélange fluide-poudre agité et chauffé pour augmenter les cinétiques de réactions chimiques).

Dans l'industrie mécanique elle-même, les matériaux granulaires sont moins présents, mais des problématiques apparaissent fréquemment dans le traitement et le convoyage de petites

pièces en grandes quantités (vis, etc.), dans la mise en forme de poudres métalliques, ou dans des applications particulières telles que le transport pneumatique.

3. Géophysique, environnement, et physique

Au delà du monde industriel, les milieux granulaires sont au centre de nombreuses problématiques environnementales et humaines, liées à la prédition et à la prévention des risques naturels.

-Stabilité des pentes

Les instabilités gravitaires sont à l'origine de catastrophes humaines et matérielles très fréquentes dans le monde. Elles peuvent prendre la forme d'écoulements granulaires secs (avalanches rocheuses) ou saturés d'eau (glissements de terrains), d'origines climatiques, sismiques ou anthropiques. Le déclenchement, la propagation et l'arrêt de ces écoulements font l'objet d'efforts de recherche intenses afin de mettre en œuvre et dimensionner des systèmes de protection ou de planifier l'occupation humaine d'un territoire. Le même genre de problématiques apparaît dans le cas des avalanches de neiges, compliquées par les comportements très variés de ces avalanches très particulières (plaques, grains, aérosols, etc.).

-Volcanologie et sismologie

Les coulées pyroclastiques sont une classe particulière d'écoulement granulaire d'origine volcanique, pour lesquels la matière granulaire (composée de cendres fines et de blocs de différentes tailles) évolue au sein de gaz à haute pression. Il s'agit donc d'écoulements de type aérosol, caractérisés par des températures et des vitesses élevées. La dynamique interne de ces coulées est un des objets d'étude de la science granulaire, au même titre que celle des panaches volcaniques et de leur évolution dans l'atmosphère. Ce fût par exemple le cas en 2010 lors de l'éruption du volcan islandais Eyjafjöll.

Les séismes sont à l'origine de nombreux questionnements fondamentaux sur les comportements vibratoires des milieux granulaires composant le sol. On s'interroge par exemple sur les modes de propagation d'ondes de volume (plane et de cisaillement) et d'ondes de surfaces dans un tel milieu, ou sur la raison de certains phénomènes locaux d'amortissement ou d'amplification de l'onde sismique. Un autre phénomène essentiel dans le cadre de la construction parasismique est celui de la liquéfaction des sols, au cours duquel un sable grossier, peu dense et saturé d'eau, peut perdre subitement la totalité de sa résistance mécanique lorsqu'il est soumis à des vibrations.

-Sédimentologie

Le domaine de l'hydrologie est particulièrement tributaire de la science granulaire, dans la mesure où le lit de chaque fleuve est le fruit d'un équilibre dynamique entre deux phénomènes : l'arrachement et le convoyage de particules par le courant, d'une part, et le dépôt de particules sur le lit du fleuve, d'autre part. Les problématiques de dynamique fluviale

(évolution naturelle des lits de cours d'eau, ensablements, crues, érosion hydrique) peuvent souvent être envisagées sous l'angle de l'interaction entre un fluide et un milieu granulaire.

C'est également le cas de la dynamique littorale, qui s'intéresse à l'évolution des côtes et présente de forts enjeux en termes de protection du patrimoine économique, touristique, environnemental et culturel. Le Mont-Saint-Michel, par exemple, fait l'objet d'un projet de désensablement piloté par la construction d'un barrage sur la rivière desservant la baie, qui permettra de contrôler son débit et d'optimiser l'évacuation de sédiments vers le large.

Les dunes de sable sont un autre objet d'étude fréquent en sédimentologie. Leur formation et leur déplacement trouvent leurs origines dans des interactions complexes entre la topographie et le climat. La lutte contre la désertification est un enjeu essentiel dans un grand nombre de pays en développement (10% des terres émergées de la planète sont constituées de désert de sable), et justifie un effort de recherche important. Plus proche de nous, la Dune du Pyla, près d'Arcachon, progresse chaque année d'environ 1m sur la forêt Landaise.

-Chez les physiciens

Même lorsqu'elle est simplifiée à l'extrême (ensemble de billes sphériques de mêmes tailles), la matière granulaire est encore au centre de nombreuses questions théoriques sur lesquelles travaillent une importante communauté de physiciens. Des phénomènes tels que la ségrégation (tri naturel des particules en fonction de leur taille ou de leur densité), la formation de motifs périodiques dans du sable vibré, ou les phénomènes de corrugation observés sur certaines pistes sableuses restent encore mal expliqués.

A des échelles plus importantes, la matière en grain intervient également en planétologie, par exemple dans l'étude des cratères d'impacts. Les anneaux de Saturne sont composés d'un grand nombre de particules (d'un diamètre allant du centimètre à quelques mètres) en interaction gravitationnelle permanente. Et la Nasa dépense beaucoup d'argent pour financer des études granulaires afin de s'assurer que les roues de ses véhicules d'exploration leur permettent une locomotion efficace sur les sols particuliers (appelés "régolithes") des planètes explorées.

B. Histoire et spécificités de la matière en grains

1. Brève histoire de la science granulaire

Il n'est pas possible de définir de manière catégorique le début de l'étude scientifique des matériaux granulaires. Une connaissance empirique du comportement mécanique de ces matériaux existait déjà dès lors que l'Homme a commencé à se bâtir des habitations et des équipements en terre.

L'acte fondateur de la mécanique granulaire en tant que science est à porter au crédit de Charles-Augustin Coulomb (1736-1806) et de son article "Essai sur une application des règles de Maximis et de Minimis à quelques problèmes de Statique relatifs à l'architecture", paru en 1773. Coulomb est un officier du génie militaire, et son ouvrage contient des observations

expérimentales et du calcul différentiel appliqués à la stabilité des talus, à l'équilibre des assemblages en pierres, à la stabilité des voûtes de maçonneries, etc. De cet ouvrage sont également tirées les lois de Coulomb sur le frottement, qui s'appliquent en particulier aux matériaux granulaires.

Michael Faraday (1791-1867) s'intéresse en 1831 à la mise en tas spontanée d'un milieu granulaire soumis à des vibrations verticales. Son approche est plus dynamique de celle de Coulomb, et présente le premier système artificiel permettant l'analyse de la formation de motifs organisés dans un milieu qui ne l'est pas initialement. Cette question de l'ordre et du désordre sera au cœur de la physique des deux siècles suivants, bien au delà du champ des milieux granulaires.

En 1857, William Rankine (1820-1872) examine de manière théorique la conséquence des lois de mobilisation du frottement de Coulomb dans les matériaux granulaires, avec une approche d'ingénieur. Il propose les concepts d'états d'équilibre limite actif et passif d'un milieu granulaire, qui sont aujourd'hui quotidiennement utilisés dans le domaine du génie civil.

Osborne Reynolds (1842-1912) se détourne provisoirement de l'hydrodynamique en 1885 et s'intéresse aux milieux granulaires, en particuliers les angles de talus. Il propose le concept fondamental de dilatance, qui stipule qu'un milieu granulaire compact soumis à une déformation va toujours commencer par se dilater pour briser son enchevêtrement.

En 1895, un ingénieur de Brême du nom de Janssen énonce une loi donnant l'effort vertical appliqué par une quantité donnée de maïs stockée dans un silo, en évaluant la redistribution des forces sur les parois. Il illustre ainsi dans un cas pratique la notion d'effet de voûte, essentielle dans le comportement statique des milieux granulaires. Cette loi est aujourd'hui utilisée de manière universelle dans l'ingénierie du stockage. Son approche sera reprise et affinée en 1906 par Lord Rayleigh.

Entre 1940 et 1970, Ralph Bagnold (1896-1990) publie de nombreuses observations sur le comportement et l'écoulement du sable, issues en particulier de son expérience dans le désert en tant que membre de l'armée britannique pendant la première guerre mondiale. Il propose en 1954 un nombre adimensionnel permettant de définir différents régimes d'écoulement granulaire sur une pente (visqueux, inertiel, etc.), qui sera connu par la suite sous le nom de Nombre de Bagnold. Il est également le premier à avoir écrit un ouvrage sur la formation et la dynamique des dunes de sable.

2. Spécificités de la matière en grains

Les matériaux granulaires sont différents des matériaux "continus" à bien des égards. Ces spécificités, d'ordres géométriques, mécaniques et physico-chimiques, sont à l'origine des propriétés les plus intéressantes de ces matériaux mais aussi des difficultés que l'on rencontre quand on essaie de les modéliser.

- Pas de mise en équation universelle

Les matériaux "classiques" de l'ingénierie sont généralement décrits par des modèles mathématiques, issues de théories robustes, sur lesquels on peut s'appuyer dans la plupart des situations pratiques et pour lesquels le champ d'application est très large. En mécanique du solide élastique, par exemple, on dispose de la loi de Hooke. Cette loi permet une mise en équation et prédit le comportement du matériau en fonction d'un nombre réduit de paramètres faciles à déterminer. Il en va de même pour les fluides newtoniens avec l'équation de Navier-Stokes. Bien sûr, il existe des solides non-élastiques et des fluides non-newtoniens, pour lesquels ces lois ne s'appliquent pas aussi bien, mais on peut alors les faire évoluer, ajouter des paramètres, etc.

Pour les milieux granulaires, aucune équation de comportement universelle n'a encore été trouvée, et on ne sait même pas si une telle équation existe. On doit donc généralement se contenter de lois mineures, fondées sur l'expérience ou sur des théories plus ou moins abouties, avec des domaines d'application restreints (géométrie particulière, régime particulier d'écoulement, type particulier de matériau granulaire). Ces lois donnent satisfaction sur un plan pratique lorsque l'on se trouve dans leur champ d'application, mais deviennent inefficaces dès que l'on se trouve dans une situation inconnue.

-Grand nombre de particules

Les matériaux granulaires sont aussi parfois appelés "solides divisés", car ils sont composés d'un grand nombre de solides. Pour étudier le comportement de chacun de ces solides indépendamment, on dispose des théories bien vérifiées de la mécanique du solide (lois de la dynamique, élasticité, éventuellement avec de la plasticité et de la rupture, contacts frottants, etc.). La difficulté survient lorsqu'on souhaite étudier l'ensemble de ces solides et de leurs interactions : une cuillère de sucre contient environ 10^5 grains de sucre, et la Dune du Pyla contient environ 10^{20} grains de sable. Dans ces conditions, toute méthode consistant à s'intéresser à la notion de grains en interactions peut très vite se heurter à des difficultés en termes de coûts de calcul.

-Fluctuations thermiques négligeables

Dans le cas des gaz et des liquides, on peut généralement passer de l'échelle de la molécule à celle du milieu continu par des méthodes de physique statistique, car le milieu est en agitation thermique permanente (mouvement brownien) : il explore continuellement un grand nombre de configurations, et les moyennes spatiale et temporelle de ces configurations ont un sens thermodynamique. On peut donc changer d'échelle par des méthodes statistiques. Dans les milieux granulaires, dès que les particules sont d'une taille supérieure au micron, ces fluctuations deviennent négligeables car les grains sont trop gros et leur inertie trop importante. Le système n'exploré plus, reste dans une configuration fixée, et le passage à l'échelle supérieure n'est plus directement possible.

-Séparation des échelles délicate

Dans les milieux classiques (gaz, liquides, solides), les comportements significatifs pour l'ingénieur se situent à une échelle très largement supérieure à celle des particules élémentaires, et il est légitime de considérer le matériau comme un milieu continu sur le plan mathématique. Dans les milieux granulaires, cette distinction est beaucoup moins nette, car certains phénomènes macroscopiques se déroulent à l'échelle globale du système tandis que d'autres se déroulent à l'échelle du grain. Par exemple, lors de la rupture d'un talus, une bande de cisaillement de quelques grains de largeur se développe et sert de surface de glissement : le phénomène est à la fois global (mouvement d'une grande masse de sol) et local (bande de cisaillement étroit). Il est impossible de traiter le problème avec exactitude en ignorant une des deux échelles.

-Interactions complexes aux contacts

La mécanique des contacts frottants en conditions dynamiques et la tribologie sont des disciplines riches et complexes, qui interviennent au niveau de chacun des contacts inter-particulaires présents dans un matériau granulaire. Selon les phénomènes que l'on souhaite étudier, on peut donc choisir de prendre en compte une partie plus ou moins importante de cette complexité, et aboutir à des systèmes comprenant à la fois des nombres très importants de particules et des interactions très riches entre ces particules. Il convient donc d'adapter la richesse de sa modélisation aux objectifs d'étude.

-Milieux fortement dissipatifs

Du fait du grand nombre de contacts entre solides, les milieux granulaires dissipent énormément d'énergie aux petites échelles. Toutes les approches macroscopiques reposant sur des théories énergétiquement conservatives sont donc vouées à l'échec.

-Surface spécifique élevée

La surface spécifique est la surface totale de solide accessible au milieu extérieur, rapporté à la masse de solide. Elle évolue en fonction de la finesse des grains. Pour une collection de sphères de rayon R et de masse volumique ρ , elle se calcule par :

$$S_{spé} = 3/(\rho R) \quad (1.1)$$

Il s'agit d'une grandeur essentielle dans un cadre physico-chimique, car c'est elle qui pilote la quantité et la vitesse des échanges entre la matière solide et son environnement. Une collection de grains de blés a une surface spécifique approximative de $0.1 \text{ m}^2/\text{kg}$, tandis que cette grandeur passe à $100 \text{ m}^2/\text{kg}$ lorsqu'on broie ces grains de blé en farine. La réactivité en est largement augmentée, ce qui permet l'utilisation de ce matériau en agroalimentaire. Cette propriété des milieux granulaires en général et des poudres fines en particulier est la raison principale de leur utilisation dans de nombreuses industries (chimique, pharmaceutique, etc.).

-Plusieurs états

En général, la matière composant les grains est à l'état solide, et le milieu ambiant est à l'état fluide (gazeux ou liquide), même si certaines exceptions existent dans des applications très spécialisées (exemples : fusion partielle ou totale des grains lors de la mise en forme d'une pièce à partir de poudre métallique moulée et chauffée, milieu granulaire dans le vide, ou inclus dans une matrice solide amorphe, etc.). En revanche, l'assemblage des grains et de leur milieu interstitiel peut avoir des comportements très divers que l'on rapproche souvent, par analogie, avec les trois états classiques de la matière :

- Etat "solide" : c'est celui que l'on rencontre le plus souvent, et qui permet par exemple de marcher sur une plage sans s'enfoncer.
- Etat "liquide" : c'est celui que l'on rencontre dans les écoulements granulaires denses, par exemple les glissements de terrain.
- Etat "gazeux" : c'est celui pour lequel les grains sont très dispersés et interagissent essentiellement par le biais de collisions, par exemple dans les avalanches de neige poudreuse, les coulées pyroclastiques, ou lors d'un transport pneumatique.

L'état d'un milieu granulaire dépend généralement de son confinement et de l'énergie qui lui est injectée, et plusieurs états différents peuvent coexister au sein d'un seul système. La simple description de chacun des trois états possibles est déjà complexe, mais la vraie difficulté consiste à comprendre et prévoir les transitions entre les états, que l'on peut également appeler changements de phases par analogie thermodynamique.

C. A l'échelle du grain

1. Ordres de grandeur

Les particules composant un milieu granulaire peuvent avoir des dimensions très variées d'un matériau à l'autre, et souvent au sein d'un même matériau. A ce titre, l'exemple du mélange constituant le béton à haute performance est particulièrement intéressant car des grains de tailles très variées entrent dans sa composition, des fumées de silice ultra-fines aux granulats grossiers.

-Fumées de silice

Ces particules ultra-fines (diamètre typique de 200nm) et de forme quasi-sphérique sont des sous-produit de la métallurgie, en particulier de la production de silicium. Elles améliorent les propriétés du béton vis-à-vis de la chaleur et des agressions chimiques, entre autres. Parmi les milieux granulaires de tailles équivalentes, on trouve les nanoparticules et les suspensions colloïdales.

-Cendres volantes

Ces particules vitreuses sphériques fines (diamètre typique de 10µm) sont des sous-produits des centrales thermiques, issues de la combustion de charbon pulvérisé. Elles améliorent la maniabilité du béton et sa résistance mécanique. Parmi les milieux granulaires de tailles équivalentes, on trouve les argiles, les particules atmosphériques, les poudres cosmétiques, les cendres volcaniques, etc.

-Ciment

Le ciment peut prendre plusieurs formes, mais il est généralement composé de particules anguleuses (diamètre typique de 100µm), obtenues par broyage et mélange de silice, d'alumine et de carbonate de calcium, puis cuisson et nouveau broyage. Sa réaction de prise en présence d'eau est la principale origine de la résistance du béton. Parmi les milieux granulaires de tailles équivalentes, on trouve les poudres pharmaceutiques, les combustibles solides, le lait en poudre, etc.

-Sable

Le sable est composé de particules de formes très variables (diamètre typique de l'ordre de 1 mm), issues de la dégradation naturelle des roches. Parmi les milieux granulaires de tailles équivalentes, on trouve les céréales, le sucre en poudre, les cristaux de glace, etc.

-Granulats

Les granulats sont l'ensemble des particules de faible coût et de grande taille (diamètre typique supérieur à 1cm) que l'on utilise pour produire du béton résistant sans faire exploser son prix. Parmi les milieux granulaires de tailles équivalentes, on trouve les fruits, les gélules, ainsi que des milieux de taille supérieure comme les blocs d'avalanches rocheuses.

-Empilement d'Apollonius

L'intérêt de multiplier les échelles granulaires dans un même matériau est d'augmenter sa compacité et de limiter la présence de vides, ce qui améliore généralement ses performances mécaniques. Les principes géométriques de cette démarche (Fig. 1.1) étaient déjà esquissés dans la Grèce Antique par Apollonius de Perge (262BC-190BC), dans un cadre purement abstrait. Cette exigence est souvent la source de grandes difficultés liées aux procédés de mélange.

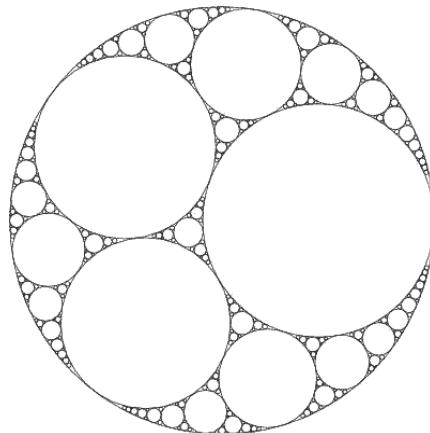


Fig. 1.1 : Empilement apollonien

2. Interactions de contact standards entre particules

Par contact standard, on entend ici contact inter-particulaire "non cohésif", c'est-à-dire pour lequel aucune force d'adhésion ne se développe entre deux particules en contact. Pour décrire ces contacts simples, on a recours à plusieurs outils mécaniques : l'élasticité, le frottement, et la notion de choc.

-Elasticité

La théorie du contact de Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) est une extension de la théorie de l'élasticité au cas du contact entre deux solides de surfaces courbes, en 2D ou en 3D, sous les hypothèses suivantes :

- Les deux solides sont élastiques linéaires isotropes
- Les surfaces sont parfaitement lisses
- Pas de frottement, pas d'adhésion de surface
- Les déformations des solides restent localisées autour du contact
- Pas d'effet dynamique au contact (chargement quasi-statique)

Cette théorie fut à l'origine développée pour expliquer les franges de couleur apparaissant lorsqu'on envoyait de la lumière blanche sur une lentille comprimée sur un plan. En 3D, on considère le contact entre deux sphères de rayons quelconques R_1 et R_2 (Fig. 1.2). Si on applique un effort F à ces deux sphères sous les hypothèses précédentes, une zone de contact circulaire de rayon r se développe, et les centres des deux sphères se rapprochent d'une distance δ , avec :

$$r = k_1 \cdot F^{1/3} \quad (1.2)$$

$$F = k_2 \cdot \delta^{3/2} \quad (1.3)$$

où k_1 et k_2 sont des constantes qui dépendent des propriétés élastiques des matériaux et des deux rayons des sphères.

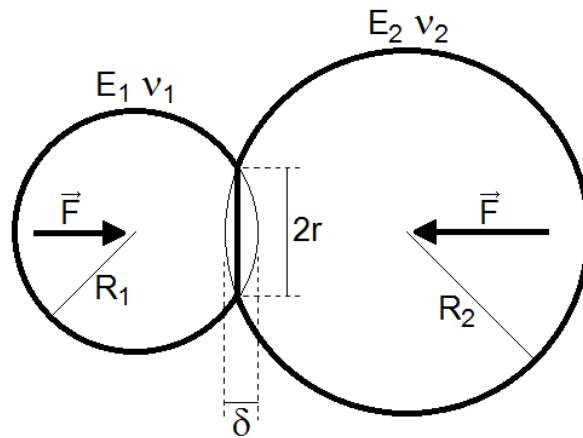


Fig. 1.2 : Contact de Hertz entre deux sphères

En 2D, on considère le contact entre deux cylindres coaxiaux de longueurs infinies et de rayons quelconques R_1 et R_2 (Fig. 1.2). Si on applique un effort F à ces deux cylindres, une zone de contact rectangulaire de petite dimension r se développe, et les axes des deux cylindres se rapprochent d'une distance δ , avec :

$$r = k_1 \cdot F^{1/2} \quad (1.4)$$

$$F = k_2 \cdot \delta^{1/0.9} \quad (1.5)$$

où k_1 et k_2 sont des constantes qui dépendent des propriétés élastiques des matériaux et des deux rayons des cylindres.

On constate en particulier qu'en 2D la loi effort-déplacement est quasi-linéaire (exposant 1/0.9), tandis qu'en 3D elle s'éloigne très nettement de la linéarité (exposant 3/2). Cette non-linéarité survient en 2D et en 3D du fait de l'évolution de la surface de contact, alors même que tous les comportements des pièces sont linéaires. Pour les deux cas, la raideur tangente augmente progressivement avec la déformation.

-Frottement

Les lois du frottement solide reposent sur des observations expérimentales, mises en évidence en premier par Léonard De Vinci (1452-1519). Elles seront reprises au XVII^e siècle par Guillaume Amontons (1663-1705), puis popularisées par Coulomb avec une application particulière aux milieux granulaires. L'expérience de De Vinci consistait à disposer un attelage de forme et de masse connues sur un plan horizontal et à lui appliquer un effort horizontal par un système de poulies (Fig. 1.3).

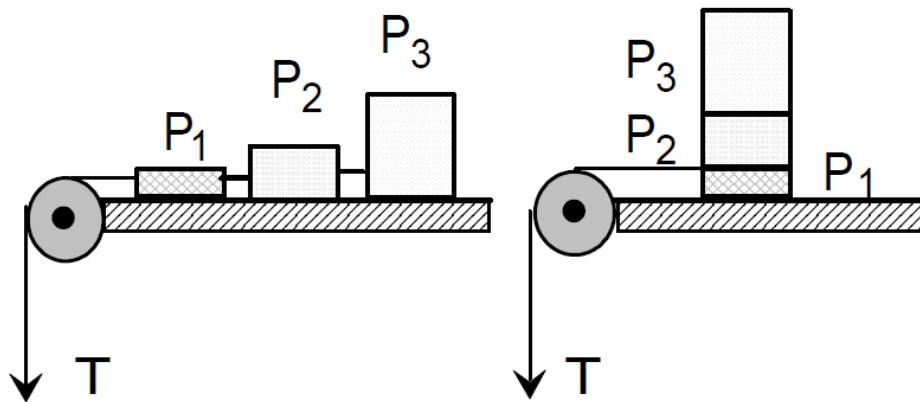


Fig. 1.3 : Expérience de De Vinci

Les lois du frottement obtenues d'une telle expérience sont au nombre de trois :

-L'effort nécessaire pour mettre en mouvement un attelage est proportionnel à la charge verticale qui lui est appliquée : lors de la mise en mouvement, T est proportionnelle à $P_1 + P_2 + P_3$.

-Cet effort ne dépend pas de la surface de contact : le coefficient de proportionnalité est le même dans les deux configurations de la Fig. 1.3. Ce coefficient est appelé coefficient de frottement.

-Il faut distinguer un frottement statique (qu'il faut vaincre pour mettre en mouvement l'attelage) et un frottement dynamique (qu'il faut vaincre pour maintenir un mouvement à vitesse constante). Le frottement statique est supérieur au frottement dynamique.

Puisqu'elles sont empiriques les lois du frottement sont inexactes, et la réalité du frottement à l'échelle microscopique est beaucoup plus complexe. Il faut noter également qu'elles s'appliquent initialement à des solides indéformables, ce qui représente un simplification forte. Le frottement est l'une des manifestations de la dissipation d'énergie lors du mouvement relatif de deux solides. En réalité, cette dissipation est due à des phénomènes physiques complexes :

- Production de chaleur
- Instabilités dynamiques
- Dégénération des surfaces
- Evolution physico-chimique des matériaux superficiels
- Production d'électricité statique
- etc.

Elasticité et frottement

Les points de vue de Hertz et Coulomb sont a priori opposés : Hertz considère des solides déformables et non-frottants, tandis que Coulomb considère des solides frottants et indéformables. Combiner les deux théories avec précision dans un cadre dynamique donne

lieu à d'innombrables complications, qui sont l'objet de la discipline nommée "mécanique des contacts".

Dans le cas de pièces mécaniques, cette complexité doit être prise en compte de manière aussi précise que possible, mais dans le cas des interactions au sein de milieux granulaires, elle est noyée sous le nombre et on simplifie généralement beaucoup la réalité : l'effort normal est calculé à partir de la théorie de l'élasticité en ignorant le frottement, tandis que l'effort tangentiel est calculé à partir des lois de frottement en négligeant la déformation des grains.

-Chocs inélastiques

La théorie de Hertz suppose que les solides en contact sont au repos, c'est-à-dire en conditions statiques. Ceci est vrai en particulier si la vitesse relative des deux solides est négligeable devant la vitesse de propagation des ondes élastiques dans les matériaux qui les composent. Lors d'une collision, ce n'est pas le cas, et le modèle hertzien est mis en défaut.

Par conséquent, la notion de choc introduit généralement des dissipations énergétiques, liées à divers phénomènes physiques :

- Phénomènes liés aux frottements (voir plus haut)
- Ondes élastiques propagées à l'intérieur des solides entrechoqués
- Emission acoustique
- Plastification des zones impactées
- Dégénération, microfissuration
- etc.

Dans les milieux granulaires, cette complexité est généralement modélisée par des lois simples, prenant en compte un ou deux paramètres phénoménologiques tels que des coefficients de restitution (rapport entre la vitesse normale incidente et la vitesse normale de rebond).

3. Interactions cohésives

Par opposition avec les forces de contact standards, on définit un certain nombre d'interactions attractives, ou cohésives, qui peuvent s'exercer entre les grains d'un milieu granulaire du fait de phénomènes physiques de différentes natures : électrostatiques, Van Der Waals, ou capillaires.

-Force électrostatique

Les interactions électrostatiques apparaissent le plus souvent par frottement de particules entre elles, ou avec les parois d'un contenant. Les charges qui apparaissent peuvent se dissiper rapidement ou non, mais restent non-permanentes au sens où elles peuvent se dissiper dans le fluide interstitiel (gaz ou liquide). Elles peuvent être sources de répulsion, mais le plus souvent elles induisent de la cohésion inter-granulaire. Pour deux particules ponctuelles de charges q_1 et q_2 séparées d'une distance r dans un milieu de permittivité ϵ , la force de Coulomb s'exprime par :

$$F_c = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon r^2} \quad (1.6)$$

Lorsqu'on considère une interaction solide-solide (par exemple grain-grain), cette force doit être intégrée sur la surface (si le solide est conducteur) ou le volume (si le solide est isolant).

L'interaction électrostatique a une portée de l'ordre de quelques microns. Pour les particules d'un diamètre suffisant (par exemple supérieur à 100µm), elle devient négligeable devant les forces de pesanteur. Dans les poudres fines, elle est fréquemment à l'origine d'agglomérations non désirées. Dans les milieux granulaires plus grossiers, elle n'a pas d'effet mécanique décelable, mais elle peut-être à l'origine d'explosions si elle est combinée à des rejets de gaz combustibles. Cette situation accidentelle se produit occasionnellement dans certains silos (matériaux organiques, céréales, charbon).

-Forces de van Der Waals

Les forces de Van Der Waals sont des interactions d'origine électromagnétique qui s'exercent à l'échelle de la molécule, avec une évolution en $1/r^7$. Elles sont en fait la somme de plusieurs contributions : l'énergie de Keesom (entre deux dipôles permanents), l'énergie de Debye (liée à la polarisabilité d'une molécule), et l'énergie de London (liée à l'apparition de dipôles induits).

Pour des particules solides (par exemple deux sphères de rayon R séparées par une distance a , l'évolution n'est plus en $1/r^7$ car les forces sont intégrées sur toute la matière. Il en résulte un effort attractif de la forme :

$$F_{VDW} = K \frac{R}{a^2} \quad (1.7)$$

Les forces de Van Der Waals sont permanentes, avec un effet important à très courte distance (de l'ordre du nanomètre). Pour des distances de l'ordre de la centaine de nanomètres, elles sont totalement négligeables. Elles n'ont d'effet notable en mécanique granulaire que sur les poudres ultra-fines.

-Force capillaire

Dans la situation relative fréquente d'un milieu granulaire humide mais non-saturé (c'est-à-dire un milieu triphasique solide-liquide-gaz), des efforts attractifs se développent entre les grains du fait de la présence de ponts capillaires. Ce phénomène est particulièrement important dans le cas des géomatériaux (sable, argile, etc.). Dans le cas très simplifié (Fig. 1.4) de deux sphères indéformables de rayon R en contact avec un fluide parfaitement mouillant de tension superficielle γ , l'expression de la force attractive est :

$$F_a = \frac{2\pi R\gamma}{1 + \tan \frac{\theta}{2}} \quad (1.8)$$

L'angle θ , appelé angle de section mouillée, dépend fortement de la quantité de liquide présente dans le pont capillaire, qui est elle-même dépendante de la pression de vapeur d'eau au sein de l'air environnant par l'intermédiaire d'un équilibre thermodynamique.

Pour les milieux granulaires grossiers, sa contribution est limitée. Les châteaux de sable, par exemple, sont des structures peu cohésives et assez fragiles. Pour des grains encore plus gros, la force capillaire est négligeable. En revanche, dans les milieux fins et ultrafins, elle peut être essentielle.

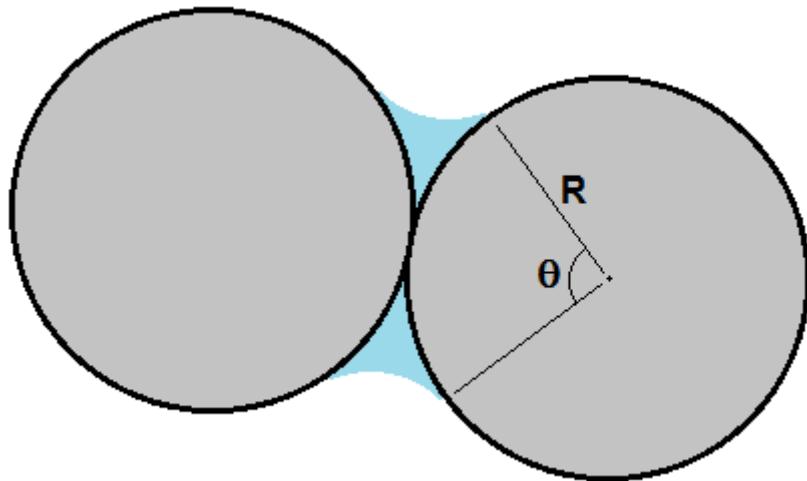


Fig. 1.4 : Géométrie d'un pont capillaire

-Cimentation physico-chimique

Dans beaucoup de matériaux naturels, les grains sont cimentés par des actions physico-chimiques, ou pris dans une matrice de matériaux plus fins ou de solide amorphe. C'est le cas par exemple des roches sédimentaires. Cette situation est également présente à différentes échelles dans de nombreux matériaux de synthèse (béton durci, agglomérés de bois, matériaux microstructurés, etc.). Dans toutes ces situations, la structure granulaire et la cimentation pilotent la résistance et les modes de rupture des matériaux. Selon le type d'approche, ces matériaux peuvent être considérés comme continus ou comme un cas limite de matériau granulaire cohésif.

4. Interactions particule-environnement

Outre leurs interactions réciproques en situation de contact ou de proximité, les grains solides subissent également des effets liés à leur environnement. On n'évoquera pas ici les cas très particuliers de milieu granulaire en présence de champs électromagnétiques, mais on se limitera aux effets de la gravité et du fluide interstitiel.

-Gravité

La force de pesanteur s'applique aux matériaux granulaires comme à toute matière, selon la formule classique :

$$P = mg \quad (1.9)$$

Sa contribution est essentielle dans la plupart des situations, par exemple la trajectoire balistique d'un grain en écoulement entre deux contacts successifs, ou le calcul de l'état de contrainte au sein d'un matériau granulaire au repos.

-Trainée hydrodynamique

La force appliquée à un solide en mouvement relatif par rapport à un fluide environnant nous vient de Georges Gabriel Stokes (1819-1903), et s'écrit :

$$F_t = \frac{1}{2} \rho_f \cdot SC \cdot v^2 \quad (1.10)$$

On appelle cette action la force de trainée, et celle-ci repose sur le nombre de Reynolds (appliqué à cette situation) :

$$R_e = \frac{\rho_s \cdot v L}{\eta} \quad (1.11)$$

Dans ces expressions, v est la vitesse relative solide fluide, η est la viscosité du fluide, ρ_s et ρ_f sont les masses volumiques du solide et du fluide, L est une dimension caractéristique du système (par exemple la taille de la particule), S est le maître-couple du solide (la surface projetée qu'il offre en résistance au fluide), et C est le coefficient de trainée.

Pour des nombres de Reynolds faibles (typiquement inférieurs à 1), on est dans une configuration pour laquelle la vitesse relative fluide-solide est faible, le solide a une faible masse volumique, et le fluide a une grande viscosité. Dans ce cas, les effets visqueux dominent, l'écoulement est laminaire, et le coefficient de trainée s'écrit pour une sphère :

$$C = \frac{24}{R_e} \quad (1.12)$$

Pour ce mode d'écoulement, les effets du fluide environnant sur la trajectoire de la particule ne peuvent pas être ignorés. Pour des Reynolds de l'ordre de 10 à 100, des instabilités apparaissent (Tourbillons de Von Karman), et il s'agit d'une phase de transition entre les régimes laminaire et turbulent.

Pour des Reynolds très élevés (supérieurs à 100), le régime est entièrement turbulent, les termes visqueux deviennent négligeables devant les termes inertIELS, et le coefficient de trainée est constant, par exemple pour une sphère :

$$C = 0.44 \quad (1.13)$$

On distingue donc deux situations limites. Pour un Reynolds très élevé, on peut ignorer la contribution du fluide à la trajectoire de la particule. C'est le cas par exemple du mouvement

ballistique d'un grain de sable dans l'air. En revanche, pour un Reynolds très faible, le fluide environnant exerce une force de freinage qui contrôle l'essentiel de la trajectoire du solide. C'est le cas par exemple pour la trajectoire de grains de poudres ultrafines dans l'air, ou de grains de sable dans l'eau.

Conclusion

Les matériaux granulaires sont présents dans une grande partie des applications industrielles et scientifiques, et présentent des propriétés uniques qui les distinguent des solides et des fluides. De manière schématique, on peut dégager deux grandes familles de matériaux granulaires :

-Milieux granulaires grossiers

Il s'agit des matériaux composés de particules de taille supérieure à $100\mu\text{m}$. Les grains y sont sujets à la gravité, aux lois de frottement et de chocs. Cette situation peut être traitée par une approche purement mécanique, en utilisant les lois du mouvement et les lois de contact. C'est la plus simple à traiter, mais elle reste pourtant assez mal comprise dans sa globalité. L'essentiel de ce cours est consacré à cette classe de matériaux, que l'on qualifie souvent de "pulvérulents".

-Poudres

Il s'agit des matériaux fins et ultrafins, pour lesquels les particules sont de taille inférieure à $10\mu\text{m}$. Les grains y sont essentiellement sujets à des forces cohésives de différentes natures (capillaire, électrostatique, Van Der Waals), et interagissent fortement avec le fluide environnant. Une approche purement mécanique ne suffit généralement pas, et la physico-chimie entre en jeu. Cette situation est beaucoup plus complexe à traiter.

Chapitre 2 : Milieux granulaires en phase solide

A. Statique des assemblages granulaires

1. Morphologie et granulométrie

-Descripteurs liés aux rapports de dimensions

La forme, ou morphologie, est une propriété géométrique fondamentale de la matière solide en général, et des grains composant un matériau granulaire en particulier. Il existe d'innombrables méthodes permettant de décrire de manière plus ou moins complète la morphologie d'un grain [4]. On cherche en général à synthétiser la complexité d'une morphologie sous la forme d'un nombre réduit de "descripteurs" morphologiques. Une approche courante est par exemple celle de la "boîte" (Fig. 2.1), qui consiste à s'intéresser à une boîte parallélépipédique abstraite contenant entièrement la particule. Cette boîte peut être par exemple choisie de manière à ce que son volume soit minimal, et on considère ensuite les trois dimensions du parallélépipède ainsi obtenu : la grande dimension L ("Large"), la petite dimension S ("Small") et la dimension restante I ("Intermediate"). A partir de ces trois grandeurs, des descripteurs simples peuvent être construits :

$$Aplatissement = \frac{S}{I} \quad (2.1)$$

$$Elongation = \frac{I}{L} \quad (2.2)$$

$$Rapport d'Aspect = \frac{S}{L} \quad (2.3)$$

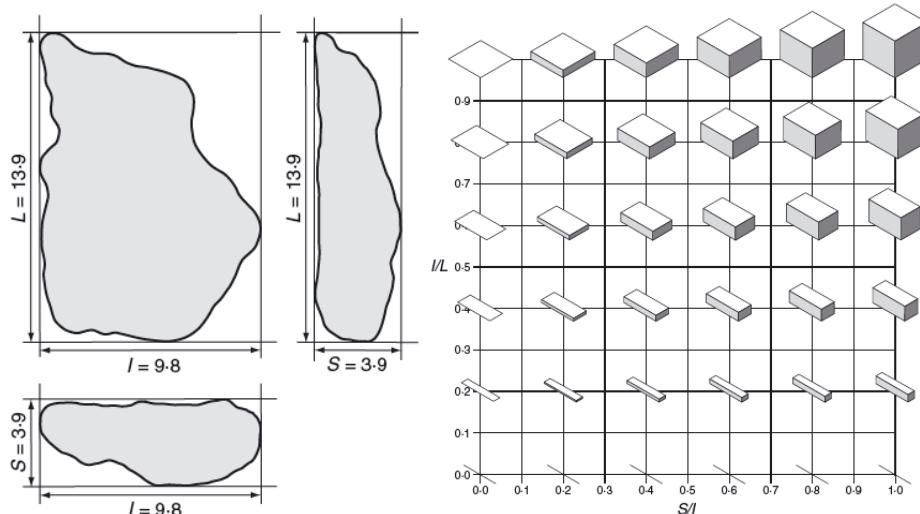


Fig. 2.1 : Classification morphologique à partir des dimensions de boîte englobante

Ces descripteurs ne sont pas faciles à déterminer de manière précise car l'opération d'ajustement de la boîte requiert la connaissance de la forme exacte de la particule dans l'espace, qui est généralement inconnue. On a plus communément recours à des photographies (projections 2D de la forme réelle), et les valeurs des descripteurs ne sont qu'estimées grossièrement. Par ailleurs, ces descripteurs s'appliquent à une particule unique, mais n'ont d'intérêt sur le plan granulaire que s'ils représentent toute une population de grains. On a donc recours à des moyennes sur des échantillons suffisamment importants, avec toute la perte d'information que cela implique sur les formes individuelles. Cet exemple est donc révélateur des difficultés qui surviennent inévitablement lorsque l'on cherche à décrire la morphologie d'un milieu granulaire : tout est une question de compromis entre le coût de l'estimation (humain, temporel, financier) et sa représentativité statistique.

-Descripteurs de forme

En plus des rapports des dimensions des grains, de nombreux autres descripteurs ont été proposés, parfois sous le même nom, et sans que l'on sache vraiment lesquels sont les plus porteurs de sens. Ces descripteurs peuvent généralement être obtenus à partir de photographies de particules et d'analyses numériques automatisées de ces images. La meilleure approche consiste à prendre plusieurs photographies d'un même grain sous des angles différents et à faire la moyenne des descripteurs obtenus pour ces différents angles. Parmi les descripteurs les plus courants, on peut citer les trois suivants :

$$Rondeur = \frac{\sum R_c}{n_c \cdot R_{insc}} \quad (2.4)$$

$$Circularité = \sqrt{\frac{R_{insc}}{R_{circ}}} \quad (2.5)$$

$$Quotient Isopérimétrique = \frac{4\pi \cdot A}{P^2} \quad (2.6)$$

Pour le calcul du descripteur "Rondeur" on approxime le contour intérieur de la particule avec une collection de n_c disques de rayons respectifs R_c , et on fait le rapport de la moyenne de ces rayons à celui du cercle inscrit au contour (Fig. 2.2a). Ce rapport tend vers 1 pour un disque parfait, et prend des valeurs très élevées pour des particules aux contours très agités. Il mesure donc la présence ou l'absence d'angularité.

La circularité d'une particule se calcule à partir des rayons de ses cercles inscrit et circonscrit (Fig. 2.2b). contrairement à la rondeur, elle ne s'intéresse pas à la tortuosité des bords mais plus à la forme générale de la particule et à sa proximité à une forme circulaire. Le quotient isopérimétrique a une fonction intermédiaire entre les deux précédents, et s'intéresse au rapport entre la surface photographiée du grain et le carré de son périmètre mesuré (Fig. 2.2c) : il vaut 1 pour une forme circulaire, et sa valeur décroît pour des formes plus complexes.

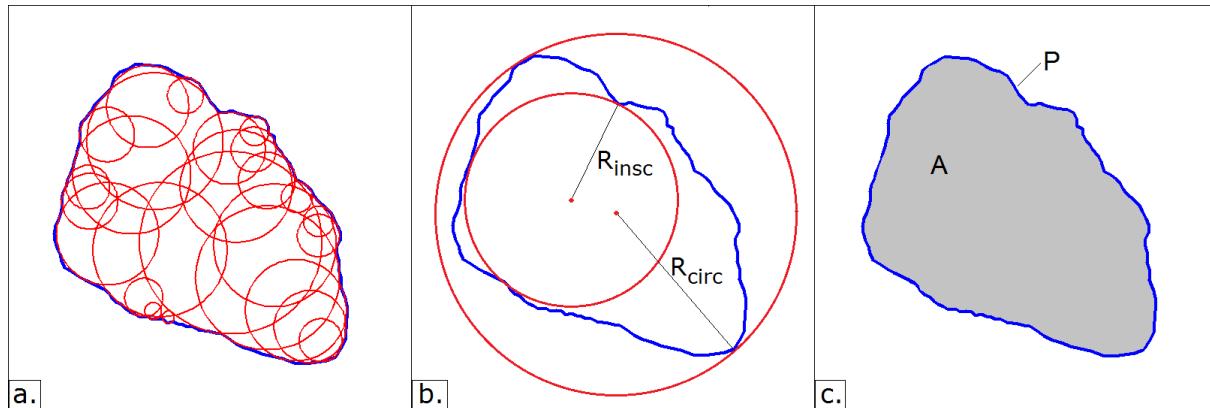


Fig. 2.2 : Descripteurs de forme. a. Rondeur ; b. Circularité ; c. Quotient isopérimétrique

-Descripteurs de Fourier

Une approche alternative aux descripteurs de forme classiques consiste à représenter les caractéristiques statistiques du contour d'un grain sous forme de spectre. Comme les précédentes, cette méthode s'appuie sur des photographies de grains (c'est-à-dire des projections 2D de la forme tridimensionnelle), et peut s'automatiser numériquement sous la forme d'algorithmes de traitement d'images. Elle consiste à discréteriser le contour projeté du grain, et à le "déplier" : pour chaque point du contour repéré par un angle θ en coordonnées polaires, on calcule la distance r au centre de la particule (Fig. 2.3). On obtient ainsi un signal discret, 2π -périodique, qui donne le rayon en fonction de l'angle (r en fonction de θ). Ce signal est ensuite soumis à une transformée de Fourier discrète pour obtenir un spectre complexe, et on s'intéresse au module de ce spectre (Fig. 2.4). Les amplitudes de chacun de ses modes sont nommées "Descripteurs de Fourier".

Après normalisation par rapport au premier mode, et si le centre de la particule a été correctement choisi, on peut donner les éléments suivants :

- Le mode D_0 est égal à 1
- Le mode D_1 est égal à 0
- Le mode D_2 représente assez bien l'élargissement de la particule
- Les modes D_3 à D_7 représentent assez bien la circularité de la particule
- Les modes supérieurs à D_8 représentent assez bien la rugosité de la particule

On constate qu'un tel spectre, lorsqu'il est appliqué à une particule seule ou moyenné sur un grand nombre de particules, permet de synthétiser en un seul objet un grand nombre de propriétés morphologiques, allant des propriétés d'ensemble (pour les premiers modes) aux propriétés locales de la surface du grain (pour les modes élevés). On estime donc généralement que les descripteurs de Fourier constituent une très bonne "signature" de l'identité morphologique d'un matériau granulaire.

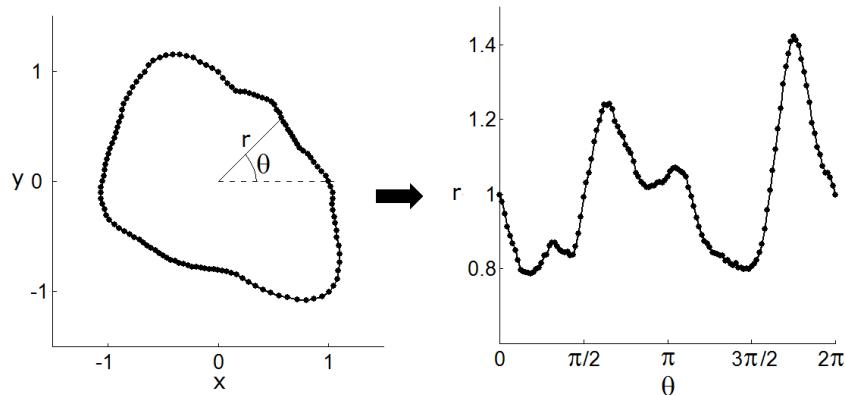


Fig. 2.3 : Signal de Fourier discret en coordonnées polaires et cartésiennes

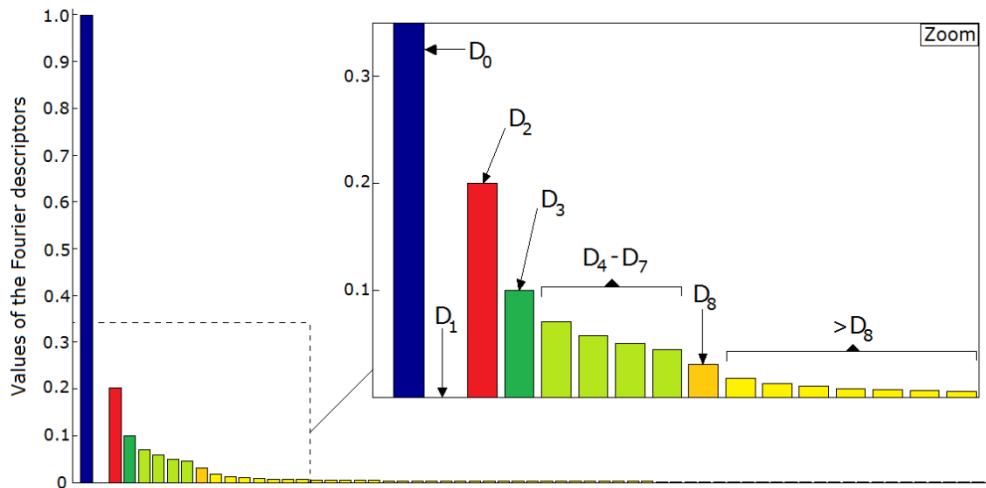


Fig. 2.4 : Exemple de spectre de descripteurs de Fourier

-Granulométrie expérimentale

La granulométrie est l'analyse statistique de la distribution des tailles de particules au sein d'un mélange granulaire. Cette analyse repose sur des techniques expérimentales, qui varient en fonction des tailles de particules en jeu. Pour les particules de taille importante (supérieures à 1mm), on a recours à des opérations de tamisage. Cette méthode est à la fois la plus ancienne, la plus courante, et la plus économique. Elle consiste à mesurer le poids de la fraction de matière qui réussit à franchir un réseau de mailles calibrées. On superpose généralement plusieurs tamis de tailles de mailles décroissantes, et on mesure la masse retenue par chaque tamis.

Il faut noter néanmoins que les proportions de tamisat (partie de l'échantillon passé au travers du tamis) et de refus (partie retenue par le tamis) sont largement dépendantes d'un certain nombre de facteurs liés aux moyens de mesure : forme des ouvertures des mailles (circulaires, carrées, etc.), caractéristiques de la vibration imposée (fréquence, amplitude, énergie, temps d'application, etc.), et morphologies des particules du matériau testé. On peut notamment s'interroger sur la notion de "taille" d'une particule. Dans la mesure où celles-ci ne sont

généralement pas sphériques, il n'existe pas d'indicateur univoque pour cette taille. La facilité d'une particule à passer au travers d'une maille va donc dépendre de sa forme (par exemple des dimensions L , I , et S évoquées plus haut). Pour cette raison, des résultats d'analyse granulométrique ne se suffisent pas à eux-mêmes, ils doivent être complétés d'informations sur la morphologie des particules du matériau granulaire et sur le moyen de mesure.

Pour des matériaux plus fins ($1\mu\text{m}$ à $100\mu\text{m}$), on utilise la sédimentométrie, qui repose sur la loi de Stokes évoquée dans le chapitre 1. On plonge le mélange granulaire dans une colonne d'eau, et on estime la proportion de particules de chaque taille par l'intermédiaire de leur vitesse de sédimentation : plus une particule est petite, plus elle chute lentement. Cette vitesse de chute est mesurée de différentes manières : mesure du poids de la matière atteignant le fond au cours du temps, mesure de la concentration de matière solide par prélèvement à une hauteur donnée de la colonne d'eau, ou mesure de l'absorption de rayons X à différentes hauteurs et corrélation avec la concentration solide.

Pour les particules d'encore plus petites tailles, on peut accélérer la méthode précédente par des opérations de centrifugation, ou avoir recours à de la diffractométrie laser. On peut également utiliser de l'analyse d'images issues de prises de vues au microscope.

Analyse granulométrique

L'analyse granulométrique est l'exploitation scientifique des résultats de mesures issues des techniques décrites dans la section précédente. L'outil théorique le plus répandu pour conduire cette analyse est la courbe granulométrique en masse. Cette courbe fournit le pourcentage cumulé de la masse d'éléments inférieurs à un diamètre donné (Fig. 2.5). En règle générale, on représente l'axe des abscisses (diamètre des grains) en échelle logarithmique, pour faire apparaître clairement l'ensemble des ordres de grandeur possibles.

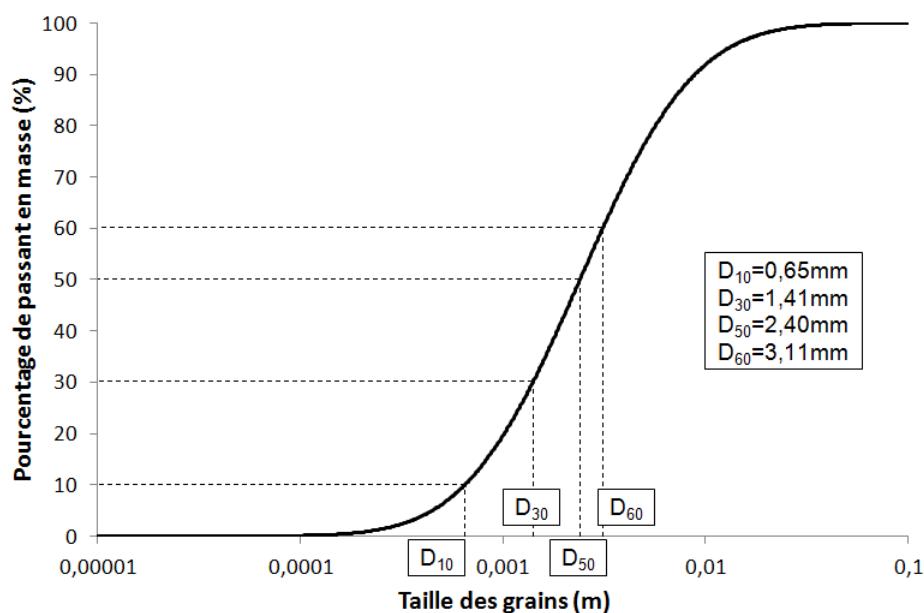


Fig. 2.5 : Courbe granulométrique et indicateurs associés

La totalité de la courbe a son importance dans le comportement du matériau, mais on a coutume de la résumer par un nombre réduit d'indicateurs. Le plus important d'entre eux est le diamètre médian du matériau granulaire, noté D_{50} . Cette valeur de diamètre est celle pour laquelle la moitié de la masse passe le tamis et la moitié est retenue. Elle s'obtient à partir de la courbe granulométrique en tirant un trait horizontal à l'ordonnée 50% et en repérant son intersection avec la courbe granulométrique (Fig. 2.5). Elle fournit une estimation de l'ordre de grandeur moyen des grains du matériau, mais ne donne aucune indication quant à la dispersion des diamètres.

Dans un cadre normatif, on mesure également les diamètres D_{10} , D_{30} et D_{60} , correspondant aux ouvertures de tamis pour lesquelles on a respectivement 10%, 30% et 60% de passant en masse (Fig. 2.5). A partir de ces mesures, on peut construire deux indicateurs granulométriques : le coefficient d'uniformité C_u et le coefficient de courbure C_c .

$$C_u = D_{60}/D_{10} \quad (2.7)$$

$$C_c = \frac{D_{30}^2}{D_{10} \cdot D_{60}} \quad (2.8)$$

Dans le cadre de la mécanique des sols, on considère qu'un matériau pour lequel $C_u < 3$ possède une granulométrie "serrée", ou "uniforme". Dans le cas contraire, on lui attribue une granulométrie "étalée". Les physiciens utilisent un vocabulaire légèrement différent et parlent de matériau "monodisperse" (C_u très faible), "faiblement polydisperse" ($C_u < 3$), ou "fortement polydisperse" ($C_u > 3$). Dans la Fig. 2.5, on a $C_u = 4.8$.

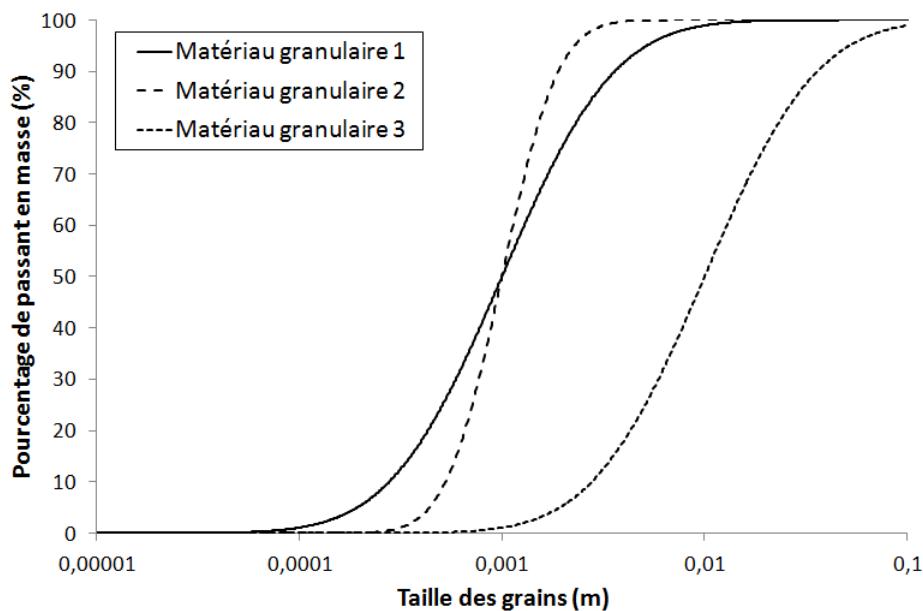


Fig. 2.6 : Exemples de courbes granulométriques pour trois matériaux différents

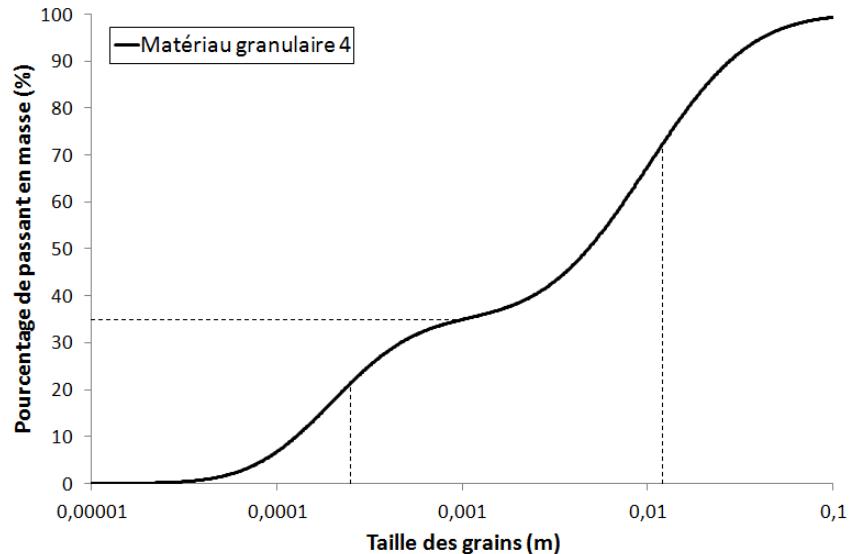


Fig. 2.7 : Courbe granulométrique d'un matériau granulaire à distribution bimodale

A partir de l'observation de courbes granulométriques, on peut très rapidement prendre la mesure de la composition d'un matériau granulaire. Dans la Fig. 2.6, par exemple, il apparaît de manière évidente que le matériau 2 a une granulométrie plus serrée que le matériau 1 (il sera composée de grains de tailles plus uniformes, même si les diamètres médians sont comparables), et que le matériau 3 a une granulométrie plus grossière que les deux premiers (son D_{50} semble environ 10 fois supérieur). De la même manière, la courbe représentée sur la Fig. 2.7 montre une distribution granulométrique extrêmement étalée et fortement bimodale : on peut assez facilement estimer les diamètres médians des deux populations de grains (environ 0.25mm et 12mm) et les proportions massiques approximatives de chacune d'entre elles (respectivement 35% et 65%). Des outils statistiques adaptés peuvent permettre d'affiner ces estimations. On peut voir plusieurs exemples de courbes granulométriques de matériaux naturels sur la Fig. 2.8.

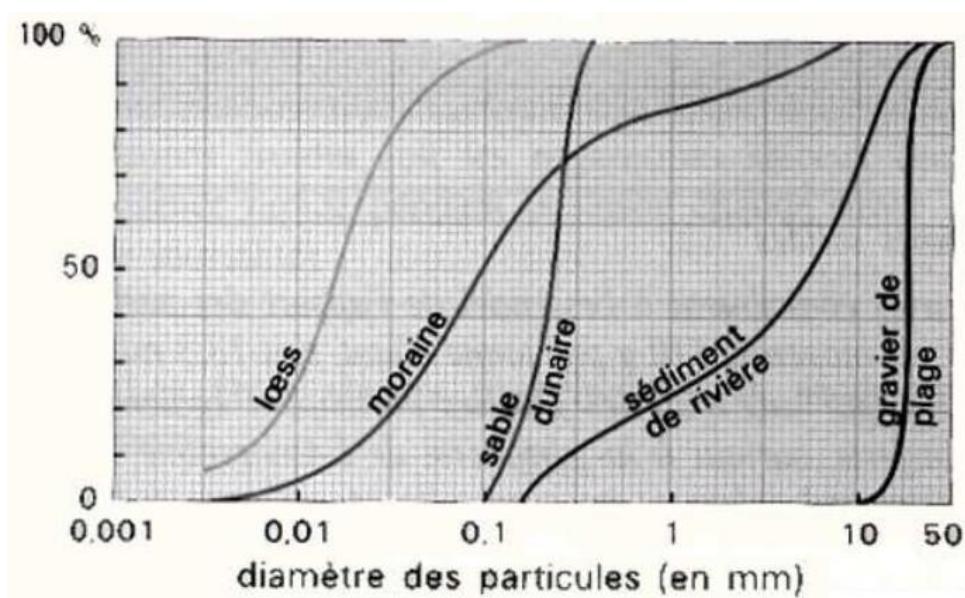


Fig. 2.8 : Courbes granulométriques de matériaux réels

2. Empilements de particules

-Densité granulaire

La notion de densité est une propriété essentielle de tout assemblage granulaire. Suivant les champs d'application, elle est exprimée par différentes grandeurs : selon le cas, on peut parler de fraction solide, de masse volumique apparente, d'indice des vides, etc. Il est néanmoins facile de naviguer entre ces différents indicateurs à partir de formules adaptées, puisqu'ils portent tous la même signification.

La grandeur "Fraction solide", notée F_s , est le rapport du volume de matière solide V_s par le volume apparent de l'espace qui la contient V_{app} . Si l'assemblage granulaire est réalisé dans un récipient, alors son volume est pris en compte pour V_{app} . On note aussi parfois V_p le volume des pores, c'est à dire le complémentaire de V_s dans V_{app} (Fig. 2.9). On a alors :

$$F_s = \frac{V_s}{V_{app}} = \frac{V_s}{V_s + V_p} \quad (2.9)$$

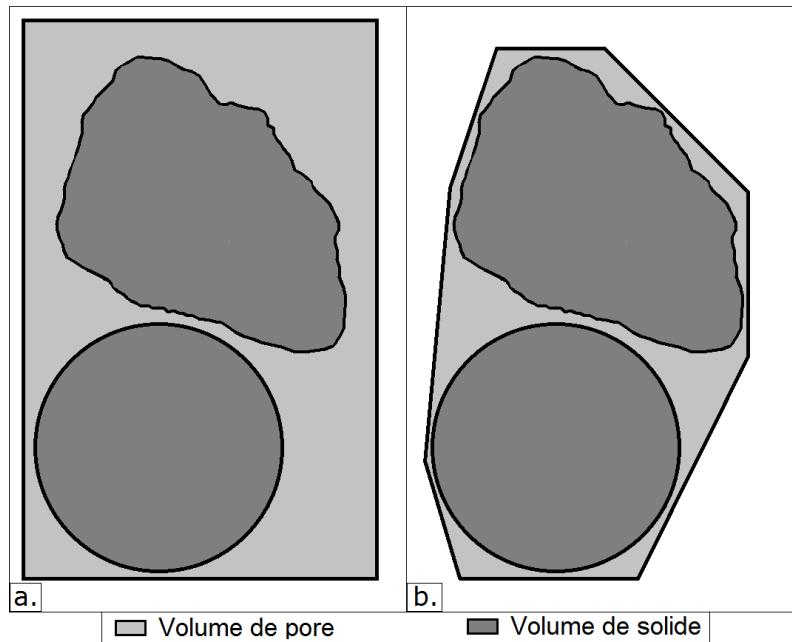


Fig. 2.9 : Caractère équivoque de la notion de densité granulaire : choix du volume du contenant

Les figures 2.9, 2.10 et 2.11 permettent de constater que la notion de fraction solide telle que définie dans l'équation précédente n'est pas objective, pour plusieurs raisons. Premièrement, le choix du volume de contenant utilisé dans le calcul de V_{app} est subjectif (il peut envelopper la particule ou la collection de particules de manière plus ou moins rapprochée, Fig. 2.9). Deuxièmement, la notion de "vide" peut recouvrir différentes conventions : porosité externe uniquement (Fig. 2.10a), porosité interne connectée (c'est-à-dire en liaison directe avec le milieu extérieur, Fig. 2.10b), ou porosité interne non-connectée (Fig. 2.10c). Ces conventions doivent être fixées lorsque l'on définit la grandeur F_s .

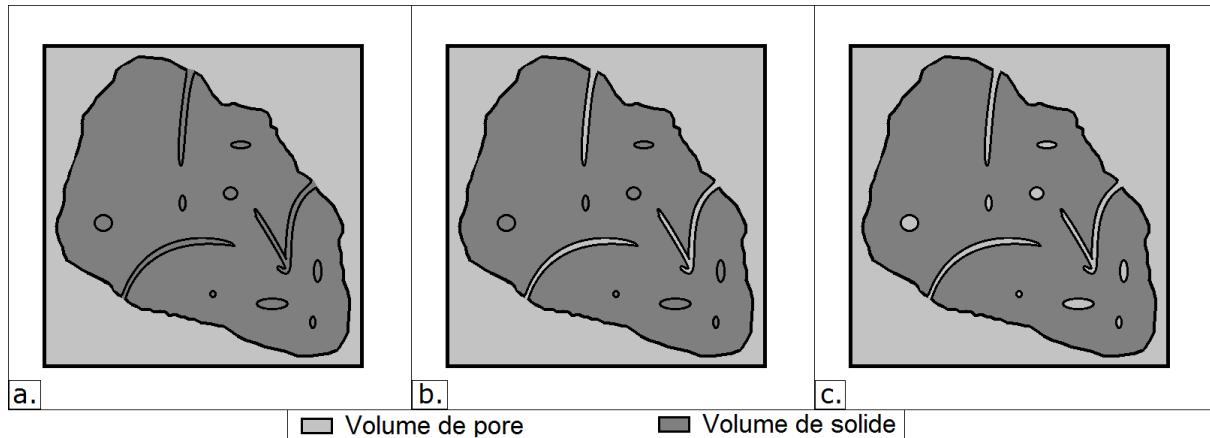


Fig. 2.10 : Caractère équivoque de la notion de densité granulaire : choix de la porosité prise en compte. a. Porosité externe ; b. Porosité interne connectée ; c. Porosité interne totale

Enfin, la notion de densité opère une moyenne sur le contenant, mais peut cacher de fortes disparités internes. La Fig. 2.11 représente ainsi trois étapes d'une opération de compaction isotrope d'un échantillon 2D, par rapprochement progressif des quatre parois. Les deux situations extrêmes présentent des fractions solides faible (0.46) et élevée (0.80), qui semblent représentatives car la densité est approximativement homogène dans l'échantillon. Dans la configuration intermédiaire, en revanche, la fraction solide obtenue est une moyenne entre des zones compactes (près des bords) et des zones peu denses (au centre). Elle ne représente donc pas rigoureusement la réalité de l'échantillon.

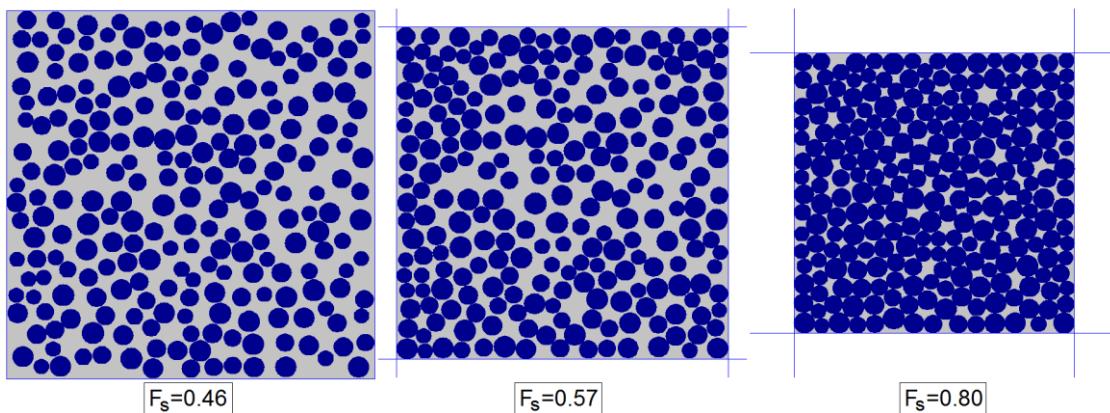


Fig. 2.11 : Caractère équivoque de la notion de densité granulaire : influence de l'inhomogénéité de densité

En mécanique des sols, la fraction solide est souvent nommée "compacité", avec la même définition, mais on a plus souvent recours aux notions de porosité n et d'indice des vides e , calculés par les formules suivantes :

$$n = V_p/V_{app} \quad (2.10)$$

$$e = V_p/V_s \quad (2.11)$$

Les trois grandeurs F_s , n , et e sont des propriétés purement géométriques, dépendant des volumes de chaque phase. Ils ne sont donc pas directement mesurables dans le cas d'un matériau réel, car la forme, la taille et la position de chacune des particules ne sont généralement pas connues. Pour contourner cette difficulté, on fait appel à la notion de masse volumique apparente :

$$\rho_{app} = \frac{m_s}{V_{app}} \quad (2.12)$$

Dans cette expression, m_s est la masse de matière solide, que l'on peut facilement mesurer par pesée, et V_{app} est le volume du contenant, souvent mesurable également. Lorsque la masse volumique réelle ρ_s du matériau composant les grains solides est connue, on peut accéder à la fraction solide par :

$$F_s = \frac{\rho_{app}}{\rho_s} \quad (2.13)$$

-Empilements ordonnés

Afin de caractériser les empilements réels, il s'avère intéressant de les positionner par rapport à des assemblages modèles, soit parfaitement ordonnés soit parfaitement aléatoires. Les assemblages ordonnés constituent une classe analogue à celle des empilements construits à l'échelle cristallographique, c'est-à-dire celle de l'atome. Ils servent de point de repère pour les empilements à l'échelle de quelques grains. Le cas des empilements de disques (2D) ou sphères (3D) de même taille est certainement le système le plus étudié.

A deux dimensions, on distingue deux types d'assemblages monodisperses ordonnés : l'hexagonal compact (Fig. 2.12a) et le cubique simple (Fig. 2.12b).

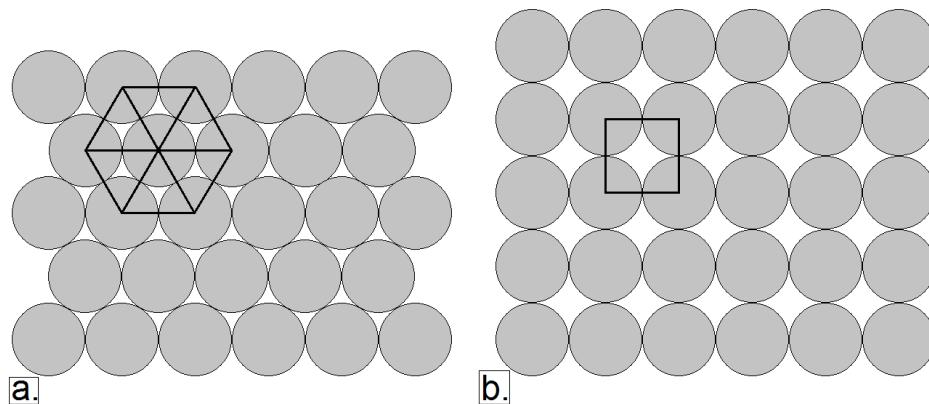


Fig. 2.12 : Empilements 2D réguliers. a. Hexagonal compact ; b. Cubique simple

Dans le premier cas l'assemblage est construit sur une maille triangulaire, chaque disque est en contact avec 6 voisins, et la fraction solide vaut :

$$F_{s,Hex2D} = \frac{\pi R^2}{2R^2\sqrt{3}} = 0.907 \quad (2.14)$$

Dans le second cas, l'assemblage est construit sur une maille carrée, chaque disque est en contact avec 4 voisins, et la fraction solide est :

$$F_{s,Cub2D} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = 0.785 \quad (2.14)$$

Pour ces deux assemblages, on constate que la densité granulaire est indépendante de la valeur du rayon. On aura donc la même fraction solide, qu'il s'agisse d'oranges ou de nanoparticules.

En trois dimensions, on compte un plus grand nombre d'assemblages réguliers possibles (cubique simple, cubique centré, cubique faces centrées, etc.), qui résultent des différentes possibilités de superpositions de couches de sphères disposées selon les motifs de la Fig. 2.12. Les plus intéressants sont l'hexagonal compact et le cubique faces centrées. Pour ces réseaux, la maille élémentaire est un tétraèdre régulier et chaque sphère possède 12 contacts avec ses voisines. Ces assemblages sont ceux pour lesquels la densité est maximale ($F_{s,Hex3D} = 0.74$). Ceci fût conjecturé par Kepler au XVII^e siècle, mais ne fût démontré mathématiquement qu'en 1998. On constate que les assemblages 3D sont toujours beaucoup moins denses que les assemblages 2D, pour lesquels des fractions solides de 0.8 sont relativement faciles à atteindre tandis qu'elles sont impossibles en 3D.

L'ordre géométrique représenté dans ce genre d'empilement est généralement une illusion. De manière à démontrer qu'un édifice, apparemment le plus simple et le plus ordonné possible, présente une complexité interne, on considère l'empilement de type "boulets de canons" (Fig. 2.13). Il s'agit d'un assemblage de type hexagonal soumis à gravité, auto-stable à la condition que les roulements de la rangée inférieure soient bloqués. Si on suppose les boulets parfaitement lisses et identiques, on peut déterminer le réseau théorique des contacts, qui est parfaitement régulier. On constate d'ailleurs que ce réseau est hyperstatique, puisque le nombre de contacts présents est supérieur à celui qui serait strictement nécessaire à l'équilibre de chaque disque (en particulier s'ils sont frottants).

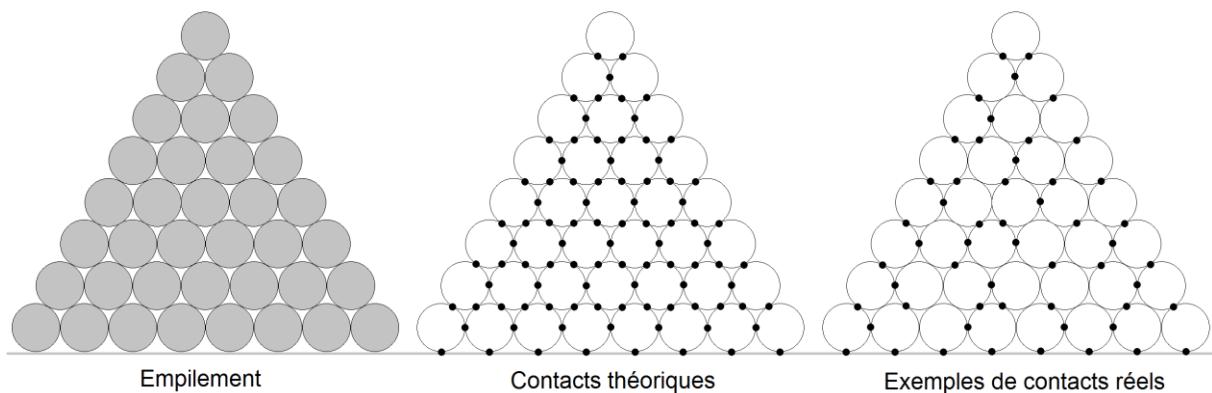


Fig. 2.13 : Empilement de type "boulet de canon", théorie et réalité

Dans le cas d'un empilement réel, en revanche, on ne peut garantir que les boulets soient tous strictement lisses et identiques, et une légère dispersion apparaît. Il est donc possible de supprimer aléatoirement de nombreux contacts du réseau théorique sans compromettre l'équilibre global et l'apparence d'un tas ordonné (à quelques micromètres près). Ce désordre

caché peut-être mis en évidence expérimentalement, et conduit au fait que la solution de ce problème est essentiellement indéterminée (c'est-à-dire qu'un grand nombre de dispositions des contacts sont possibles pour un même état de stabilité globale). Si on autorise des forces tangentielles à se développer aux contacts (contacts frottants), l'indétermination est encore plus grande car l'intensité de cette composante tangentielle est quelconque (tant que le critère de Coulomb n'est pas violé). En conséquence, l'ordre est géométrique, mais il n'existe pas sur le plan mécanique.

-Empilements aléatoires

Bien que l'empilement régulier de sphères selon un réseau hexagonal corresponde au minimum d'énergie potentielle en présence de gravité (densité granulaire maximale), ils sont très difficiles à réaliser en pratique, sauf à disposer chaque sphère à la bonne place à la main. Par exemple, si on fait vibrer verticalement un ensemble aléatoire de billes dans un récipient pour compacter l'empilement, on obtient une fraction solide critique de $F_s = 0.64$, inférieure à la valeur théorique maximale de $F_s = 0.74$. On appelle cette situation l'empilement aléatoire le plus dense (en 2D, sa fraction solide vaut $F_s = 0.82$). Sous vibrations, le système semble bloqué dans cet état et n'évolue pas vers l'état cristallin qui serait pourtant plus dense. Par opposition avec l'empilement aléatoire le plus dense, on définit l'empilement statique le plus lâche, qui pour les sphères monodisperses vaut environ $F_s = 0.55$.

Lorsque l'on est en présence de mélanges granulaires contenant des sphères de tailles différentes, l'ordre n'est de toute façon plus accessible. Un exemple intéressant est celui du milieu bidisperse, pour lequel on considère un mélange de petites et de grosses sphères de rayons respectifs R_p et R_g de même densité ρ . On appelle C la concentration massique de grosses billes :

$$C = \frac{m_p}{m_g + m_p} \quad (2.15)$$

Il est instructif de déterminer la fraction solide d'un tel mélange. On appelle F_{s0} la fraction solide de l'empilement lorsqu'il n'y a qu'un type de particule ($F_{s0} = 0.64$, que ce soit pour les petites ou les grosses billes). Deux cas limites se présentent :

-Si $m_g \gg m_p$, on considère un peu de petites particules dans un empilement de grosses (Fig. 2.14a). Les petites billes se mettent dans les interstices laissés par les grosses. Le volume occupé par toutes les billes est égal à $(m_p + m_g)/\rho$, et le volume apparent est donné par l'empilement des grosses seules (que les petites soient là ou non, il est identique dans le cas limite) et vaut $m_g/(\rho F_{s0})$. La fraction volumique est donc égale à $F_s = F_{s0}/C$.

-Si $m_g \ll m_p$, on considère un peu de grosses particules dans un empilement de petites (Fig. 2.14b). Le volume occupé par les billes est toujours $(m_p + m_g)/\rho$, mais le volume occupé par l'empilement vaut $m_p/(\rho F_{s0}) + m_g/\rho$ car les grosses particules ne créent pas de vide là où il y en aurait eu si le mélange n'était composé que de petites. La fraction volumique totale vaut donc : $F_s = F_{s0}/(1 - C(1 - F_{s0}))$.

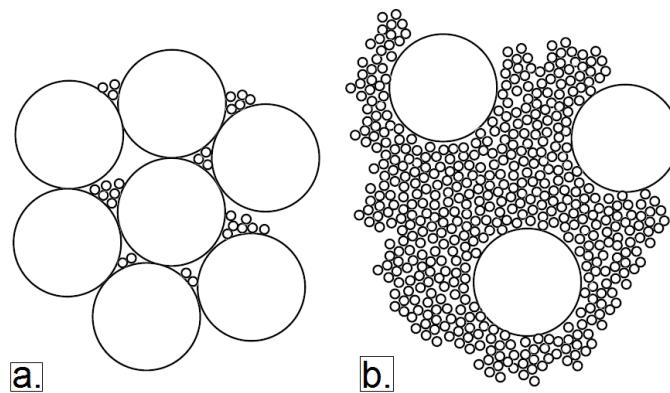


Fig. 2.14 : Cas limites d'une distribution bimodale parfaite. a. Quelques petites particules parmi les grosses ; b. Quelques grosses particules parmi les fines

Ces deux cas limites sont présentés sur la Fig. 2.15 comme asymptotes théoriques pour des valeurs de C faibles ou élevées, assorties d'un exemple de courbe expérimentale obtenue pour l'ensemble des valeurs $0 < C < 1$. Ce type de courbe dépend bien entendu des tailles des particules, et son amplitude peut varier, mais elle a toujours la même allure. On constate que le mélange de deux populations de sphères de tailles différentes conduit toujours à un assemblage plus dense que chacune des populations prises individuellement. Ce principe peut être étendu à des mélanges de plusieurs tailles, un cas extrême étant l'empilement Apollonien (Chapitre 1), qui a une fraction solide $F_s = 1$ à la limite. Pour revenir au cas bidisperse, on constate également qu'il existe une valeur expérimentale de la fraction massique (ici proche de $C = 0.3$) permettant de maximiser la densité granulaire (ici $F_s = 0.81$).

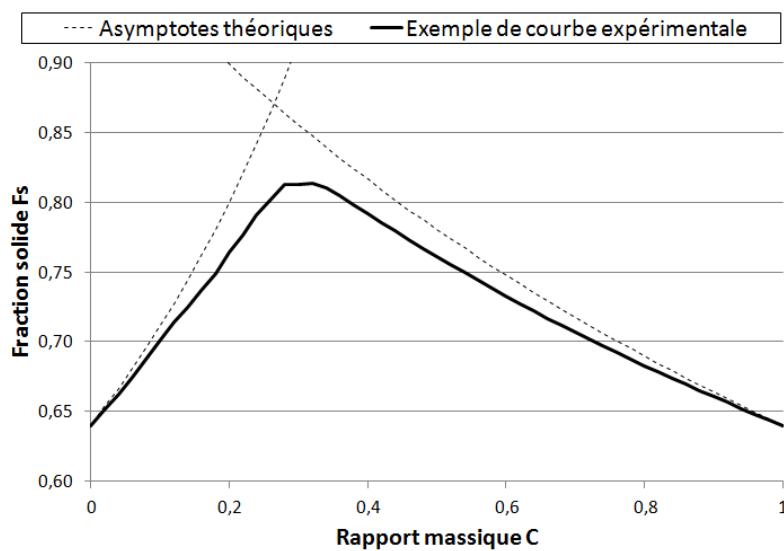


Fig. 2.15 : Exemple de l'influence du rapport massique entre petites et grosses particules sur la fraction solide maximale d'un mélange bimodal

3. Des contacts aux contraintes

-Nombre de Coordination

On appelle Nombre de Coordination (ou Coordinence) N_c le nombre moyen de contacts d'une particule avec ses voisines. Il s'agit d'une grandeur essentielle dans la description de l'état mécanique d'un échantillon granulaire et de son réseau de forces de contact. Dans le cas des particules sphériques/circulaires monodispersées, les valeurs statiques de N_c sont bien connues pour les états les plus particuliers :

- Assemblage 2D cubique simple : $N_c = 4$
- Assemblage 2D hexagonal compact : $N_c = 6$
- Assemblage 2D aléatoire le plus dense : $N_c = 4.5$
- Assemblage 3D cubique simple : $N_c = 6$
- Assemblage 3D hexagonal compact : $N_c = 12$
- Assemblage 3D aléatoire le plus dense : $N_c = 6.2$

Dans le cas d'assemblages polydispersés, ces valeurs ont tendance à augmenter. C'est également le cas en présence de particules non-convexes, pour lesquelles on peut avoir plusieurs contacts au sein d'une seule paire de particules (Fig. 2.16). Dans le cas d'assemblages réels (sable anguleux, par exemple), le nombre de coordination en 3D peut facilement atteindre $N_c = 20$.

Lorsqu'un échantillon granulaire est soumis à une sollicitation mécanique (écrasement, cisaillement, écoulement, etc.), il est très intéressant de suivre l'évolution de N_c au cours de la transformation. Ce paramètre est néanmoins généralement inaccessible à la mesure expérimentale dans le cas de matériaux granulaires réels, et n'est utilisé que dans un cadre numérique pour améliorer notre compréhension des phénomènes micromécaniques.

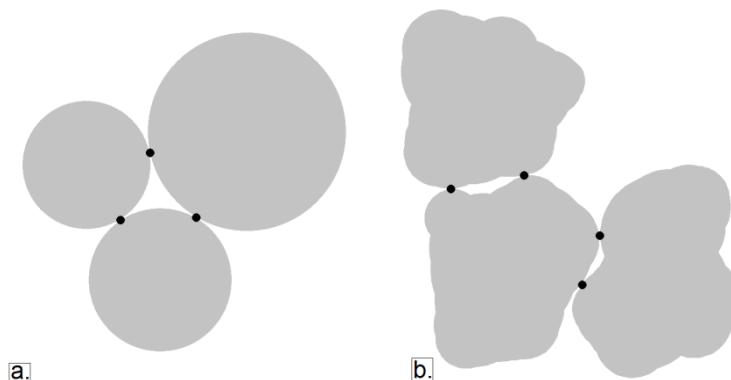


Fig. 2.16 : influence de la morphologie sur le nombre de coordination. a. Particules convexes (pas plus d'un contact par paire de particules) ; b. Particules non-convexes avec contacts multiples

-Chaînes de forces

On s'intéresse maintenant aux forces qui se développent entre les grains lorsque l'on soumet un empilement à des contraintes extérieures. Puisque les surfaces des grains sont généralement pourvues d'un coefficient de frottement, ces forces ont généralement une

composante normale F_n et une composante tangentielle F_t . Si on considère un empilement régulier de disques contraints par un effort appliqué sur une paroi mobile, on peut observer expérimentalement les lieux les plus contraints en utilisant un matériau biréfringent et en appliquant les principes de la photoélasticité. L'indice de réfraction de ces matériaux dépend de leur état de contrainte, et les disques les plus contraints apparaissent plus clairs sur les photographies. Cette expérience est couramment menée dans un cadre de recherche académique ([5] et [6] par exemple), et conduit à des observations comparables à celles de la Fig. 2.17.

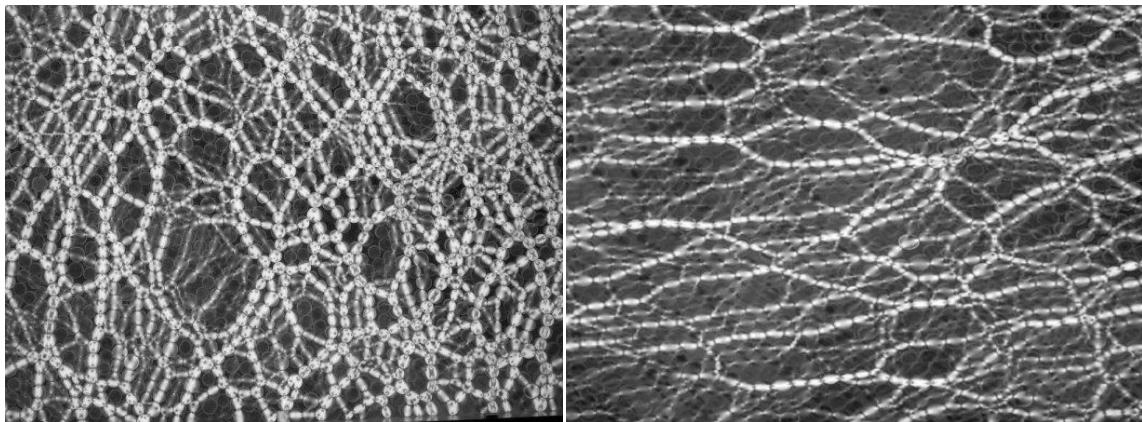


Fig. 2.17 : Chaînes de forces dans un milieu granulaire soumis à un effort isotrope ou non

Ces expériences nous montrent que les efforts se répartissent de façon fortement inhomogène, bien que l'empilement soit régulier. Il existe des chaînes de forces, avec des grains supportant des forces importantes et des grains qui ne sont pas contraints. Comme dans l'exemple de l'empilement "boulets de canon", ce contraste entre désordre des forces et ordre apparent de l'empilement s'explique par les imperfections des disques.

Ce désordre est encore plus présent dans les empilements aléatoires, pour lesquels on observe également des lignes de forces bien marquées. Les statistiques de la répartition des forces font l'objet de nombreux travaux de recherche. En particulier, l'intensité moyenne et l'orientation principale de ces chaînes sont fortement dépendantes des conditions de chargement appliquées à l'échantillon, comme le montrent les deux exemples de la Fig. 2.17. Par ailleurs, le réseau formé par ces chaînes de forces est fortement intermittent et soumis à des fluctuations spatiales et temporelles qui contrôlent le comportement mécanique de l'échantillon.

-Contraintes équivalentes

Les fortes disparités locales du réseau de forces posent la question de la notion de contrainte. Dans un milieu continu classique, on définit généralement une champ de contraintes continu, excepté en présence de fissures. A la limite, on peut considérer qu'un milieu granulaire est "fissuré partout", et la notion de contrainte doit être avant tout reliée à la notion de "volume élémentaire représentatif", ou VER. Celui-ci est utilisé afin de définir le concept de milieu continu équivalent.

Le VER est une notion classique de micromécanique, et s'étend donc au-delà du champ granulaire. Il s'agit d'un concept dont on a besoin dès lors que le matériau étudié présente des hétérogénéités à petite échelle. Un VER est une région de l'espace composée d'une partie du matériau étudié, et qui doit être aussi petite que possible (afin de conserver un caractère "local" vis-à-vis de l'échelle du système global étudié), mais néanmoins suffisamment grande par rapport à la taille des constituants micromécaniques du matériau pour permettre une description statistique correcte de son comportement. La forme du VER n'est pas un paramètre essentiel, même si une forme compacte et convexe est généralement plus porteuse de sens.

En général, dans le cas des matériaux granulaires, on considère qu'un VER de quelques dizaines de particules est suffisant, car il permet d'effectuer une moyenne locale représentative de l'état du matériau. L'exemple de la Fig. 2.18 montre que le VER noir semble suffisant (il englobe plusieurs chaînes de forces et permet de représenter l'état "moyen" du matériau dans cette région), tandis que le VER blanc est trop petit (selon sa position, il est susceptible de ne comprendre que des disques peu chargés, ce qui n'est pas représentatif de l'état local du matériau).

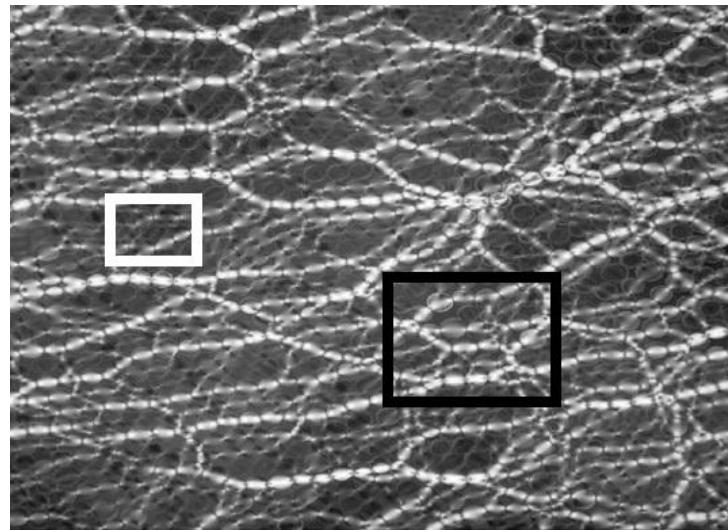


Fig. 2.18 : Notion de Volume Elémentaire Représentatif

Une fois que le VER est correctement défini, on peut proposer une définition rigoureuse de la notion de tenseur de contraintes granulaires. Pour chaque point de contact n à l'intérieur du VER, on définit le vecteur \vec{l}^n qui relie les centres des deux particules A et B en contact (parfois appelé "vecteur branche"), et on définit la force de contact \vec{F}^n , appliquée par une particule sur l'autre (dans la même direction $A \rightarrow B$ que pour \vec{l}^n). Chacun de ces vecteurs a des composantes dans les trois directions de l'espace, notées i , j , ou k . En 3D, le tenseur de contrainte équivalente est un tenseur symétrique d'ordre 2 qui possède six composantes indépendantes, et qui s'exprime sous forme matricielle dans une base donnée:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{ij} & \sigma_{ik} \\ \sigma_{ij} & \sigma_{jj} & \sigma_{jk} \\ \sigma_{ik} & \sigma_{jk} & \sigma_{kk} \end{bmatrix}_{i,j,k} \quad (2.16)$$

Chacune de ces six composantes se calcule alors par une formule analogue à la suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V_{VER}} \sum_{n \in VER} F_i^n \cdot l_j^n \quad (2.17)$$

Dans cette expression, V_{VER} est le volume du VER et F_i^n et l_j^n sont les composantes du vecteur force et du vecteur branche du contact n dans les directions i et j respectivement. Cette formule peut également s'appliquer dans un cadre bidimensionnel, en remplaçant V_{VER} par la surface du VER considéré (Fig. 2.19). Comme pour le nombre de coordination, les efforts de contact sont inaccessibles à la mesure expérimentale, et la formule (2.17) ne peut donc être appliquée que dans un cadre théorique ou numérique. La contrainte elle-même, en revanche, peut être mesurée à l'aide de capteurs adaptés.

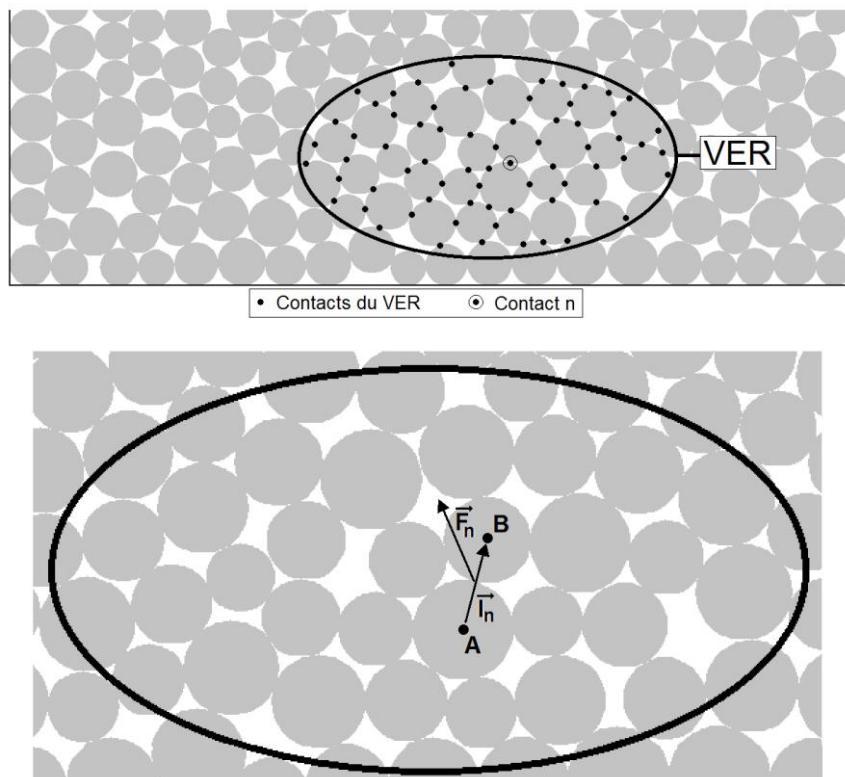


Fig. 2.19 : Méthode de calcul du tenseur de contraintes équivalentes dans un VER

4. Voûtes : l'exemple du silo

-Effet de voûte

Lorsque l'on soumet un matériau granulaire 2D biréfringent à une indentation verticale (Fig. 2.20), l'observation des chaînes de forces est très instructive. D'une part, on remarque que la variation de la contrainte appliquée par l'indentateur provoque l'apparition et la disparition de chemins de contraintes complexes et fluctuants, avec un enrichissement global lorsque la contrainte augmente. D'autre part, on observe une fuite des chaînes de forces vers les parois latérales du récipient. Ce comportement est différent de celui d'un solide homogène. Pour

simplifier, on peut dire qu'un matériau granulaire a tendance à rediriger les forces dans les directions perpendiculaires à la contrainte initiale. Ce phénomène, parfois spectaculaire, est appelé effet de voûte.

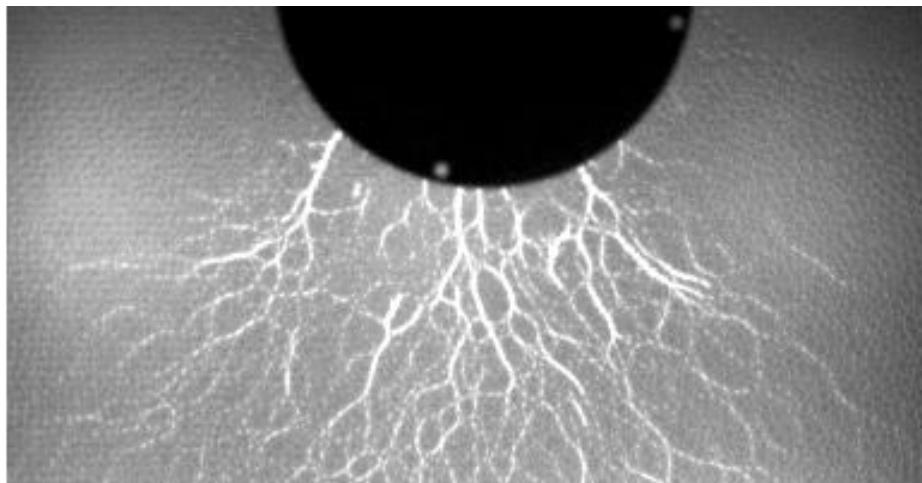


Fig. 2.20 : Déviation des chaînes de forces vers les parois latérales

L'effet de voûte est particulièrement présent dans les systèmes de stockage et de distribution de matière granulaire que sont les trémies convergentes (Fig. 2.21). Dans ces systèmes, on constate que l'effort vertical dû au poids du matériau est systématiquement dévié vers les parois latérales : des chaînes de forces se développent à partir des parois, jusqu'à se rencontrer dans la zone centrale du silo. Au cours d'un écoulement, il n'est pas rare qu'une telle chaîne continue soit stable dans le temps tout en reliant une paroi à l'autre. L'écoulement est alors bloqué, malgré le poids du matériau sus-jacent. Cette situation est recréée artificiellement par les architectes depuis des siècles pour franchir des portées plus ou moins longues en soutenant des charges plus ou moins lourdes (Fig. 2.21).

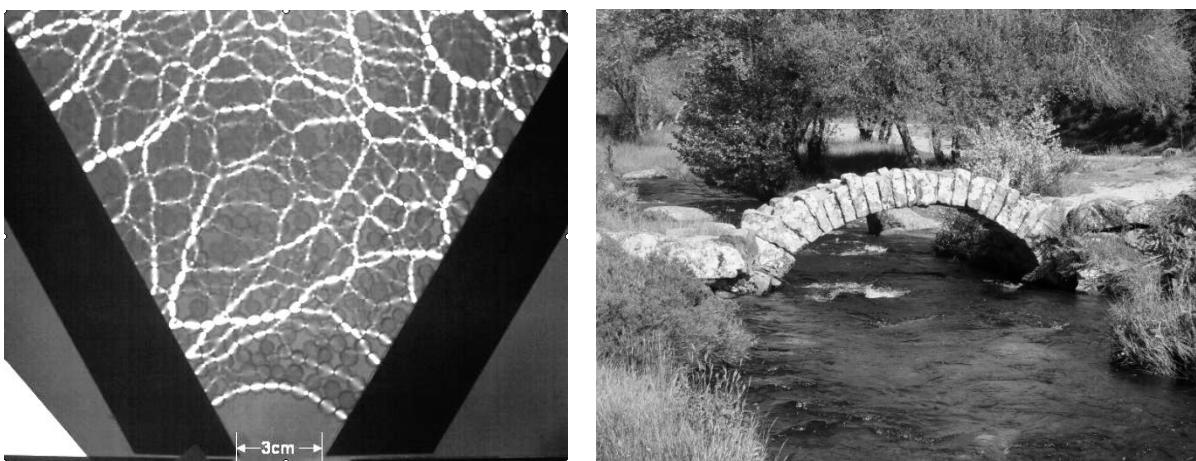


Fig. 2.21 : Voûtes se formant lors du blocage d'un écoulement en silo, et analogie avec les voûtes architecturales

-Silo de Janssen

Janssen s'est intéressé en 1895 aux contraintes qui se développent dans un silo de stockage de maïs. Considérons un tube cylindrique de diamètre D rempli d'un milieu granulaire de densité apparente ρ (Fig. 2.22). On se demande quelle est la pression qui s'exerce au fond du récipient en fonction de la hauteur de grains dans le silo. Pour effectuer son calcul, Janssen a réalisé trois hypothèses [7] :

-On suppose la contrainte verticale σ_{zz} uniforme dans la section du cylindre (c'est-à-dire à une hauteur et à un instant donnés).

-Le milieu frotte sur les parois latérales et se trouve sur le points de glisser : il existe alors une contrainte tangentielle $\tau = \mu \cdot \sigma_{xx}$, dirigée vers le haut, où μ est le coefficient de frottement paroi-grains et σ_{xx} est la contrainte normale horizontale au niveau des parois.

-La contrainte normale horizontale est partout proportionnelle à la contrainte normale verticale, et on a $\sigma_{xx} = K \cdot \sigma_{zz}$ où K est une constante. Notons que pour un fluide la pression serait isotrope et on aurait $K = 1$.

Avec ces hypothèses, on peut écrire l'équilibre vertical d'une tranche de matériau granulaire d'épaisseur dz , soumis à son poids, aux pressions provenant des couches supérieure et inférieure, et à la force de frottement dirigée vers le haut au niveau de la paroi :

$$\frac{\pi D^2}{4} [\sigma_{zz}(z) - \sigma_{zz}(z + dz)] - \pi D \tau \cdot dz + \frac{\pi D^2}{4} \rho g \cdot dz = 0 \quad (2.18)$$

L'introduction des hypothèses de Janssen permet de réécrire cette formule sous forme d'une équation différentielle :

$$\frac{d\sigma_{zz}}{dz} = \rho g - \frac{4K\mu}{D} \sigma_{zz} \quad (2.19)$$

Cette équation s'intègre à partir de la surface supérieure du matériau granulaire, pour laquelle on sait que la contrainte verticale est nulle. On obtient :

$$\sigma_{zz} = \rho g \lambda (1 - e^{-z/\lambda}) \quad (2.20)$$

Dans cette expression, $\lambda = D/(4\mu K)$ est une longueur caractéristique. Pour des valeurs typiques de $\mu = 0.5$ et $K = 1$, on a $\lambda = 2D$. On en déduit que :

-Pour $z \ll \lambda$, la pression augmente linéairement avec la hauteur de matériau, ce qui est le comportement attendu, correspondant au cas hydrostatique d'un fluide classique :

$$\sigma_{zz} = \rho g z \quad (2.21)$$

- Pour $z \gg \lambda$, la pression sature et devient constante :

$$\sigma_{zz} = \rho g \lambda \quad (2.22)$$

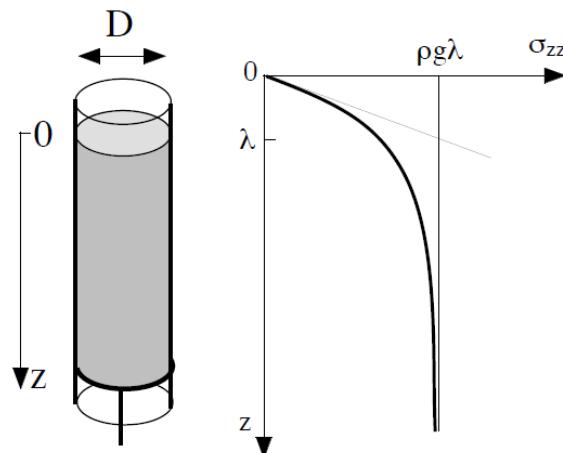


Fig. 2.22 : Distribution de la contrainte verticale dans un silo cylindrique

Cette saturation (Fig. 2.22) est contre-intuitive, mais elle est pourtant fréquemment confirmée par l'expérience. Elle signifie qu'une fois dépassée la hauteur λ , tout ajout de matériau n'affectera pas la pression au fond : le surplus de poids n'est pas transmis au fond mais est reporté sur les parois latérales par effet de voûte, et repris par ces parois sous l'effet du frottement.

Le simple modèle de Janssen permet de comprendre qualitativement les propriétés de vidange d'un silo ou d'un sablier. On observe en effet que la vitesse de vidange d'un sablier est constante dans le temps, et en particulier qu'elle est indépendante de la hauteur de sable et ne dépend que du diamètre du col. Ceci s'explique simplement par le fait que la pression au niveau du trou qui contrôle l'écoulement est indépendante de la hauteur de grains, grâce aux voûtes de décharge qui renvoient le reste de la pression verticale vers les parois, comme dans le cas du silo de Janssen. Puisque la pression est constante, la vitesse d'écoulement l'est également. Cette propriété est à l'origine de l'utilisation historique des sabliers comme outil de mesure du temps, par opposition avec les clepsydres emplies de fluides pour lesquelles la vitesse d'écoulement dépend de façon non-linéaire de la quantité de fluide encore présente en partie supérieure.

B. Elastoplasticité

1. Petites déformations

Comportement élastique aux très petites déformations

Le comportement élastique (c'est-à-dire parfaitement réversible) des milieux granulaires est quasi-inexistant en réalité. On peut néanmoins s'en approcher dans des conditions idéales, à condition de rester dans le domaine des très petites déformations.

Dans la situation idéale d'un milieu granulaire sphérique monodisperse disposé selon un motif hexagonal compact, tous les contacts susceptibles de se produire lors d'une sollicitation en compression sont déjà actifs. On peut donc supposer, en première approximation et en restant

dans le domaine des très petites déformations, que la relation charge-déplacement d'un tel milieu est entièrement contrôlée par la loi de Hertz, et que sa déformée D sous une force F suit la relation $F \propto D^{3/2}$ (c'est-à-dire F est proportionnel à $D^{3/2}$). Cette relation diffère de la loi de Hooke ($F \propto D$), ce qui démontre que même dans des conditions idéales un milieu granulaire ne peut pas prétendre avoir un comportement élastique linéaire.

Dès que l'on introduit un peu de réalisme dans l'empilement, la situation se complique. Si, comme dans une section précédente, les sphères ne sont pas parfaitement identiques et lisses, certains contacts n'ont pas lieu à l'état non-chargé. On est dans un état d'empilement hexagonal quasi-parfait géométriquement, mais désordonné sur le plan mécanique. Les contraintes cheminent en réalité selon des chaînes de forces qui ne sont pas réparties de façon homogène dans le milieu. Si on considère deux particules très proches dans le réseau mais pas en contact, il est clair qu'une compression progressive du matériau va commencer par les rapprocher progressivement, sans pour autant modifier le cheminement des contraintes. A partir d'une certaine compression, en revanche, ces sphères vont se mettre en contact, ce qui aura pour effet d'enrichir les chemins de contraintes et de modifier l'équilibre du réseau de forces. Des résultats théoriques et expérimentaux [2] montrent que, dans cette situation, la déformée évolue avec l'effort de compression selon une loi de type $F \propto D^{7/2}$. Cette loi est très fortement non-linéaire (la rigidité du matériau augmente avec l'effort qui lui est appliqué), et s'écarte également de la loi de Hertz : l'augmentation de rigidité semble conjointement due à l'augmentation du nombre de contact et à la non-linéarité de chaque contact.

Dans le cas d'un matériau granulaire réel, aucune loi simple telle que la précédente ne peut être formulée a priori, et le comportement mécanique n'est accessible que par la mesure expérimentale. La notion de très petite déformation elle-même est difficile à appréhender car il est quasiment impossible de déformer un matériau granulaire réel sans modifier le réseau de contacts. La déformation d'un matériau granulaire réel est donc due à deux causes principales : d'une part la déformation individuelle de chaque grain sous l'effet des forces de contact qu'il subit, et d'autre part le réarrangement géométrique des grains dû au glissement, à la fermeture de nouveaux contacts, et à l'ouverture de contacts existants.

On suppose généralement que l'on est en présence de très petites déformations si c'est la première cause qui est prépondérante, et de petites déformations si c'est la deuxième. La distinction n'est cependant pas très nette. Il faut néanmoins préciser que le deuxième phénomène (glissement ou ouverture de contacts et réarrangement de la position des grains) fait intervenir des déplacements irréversibles, et fait donc au sens strict sortir le matériau de son domaine élastique.

-Propagation d'ondes

La propagation d'ondes le long d'une chaîne de billes 1D (Fig. 2.23) est largement documentée dans la littérature à la fois théorique et expérimentale [8]. Ce modèle présente l'intérêt d'être très simple et d'incorporer les non-linéarités du contact hertzien, mais certains aspects importants tels que le frottement et le désordre des milieux granulaires réels ne sont pas pris en compte.

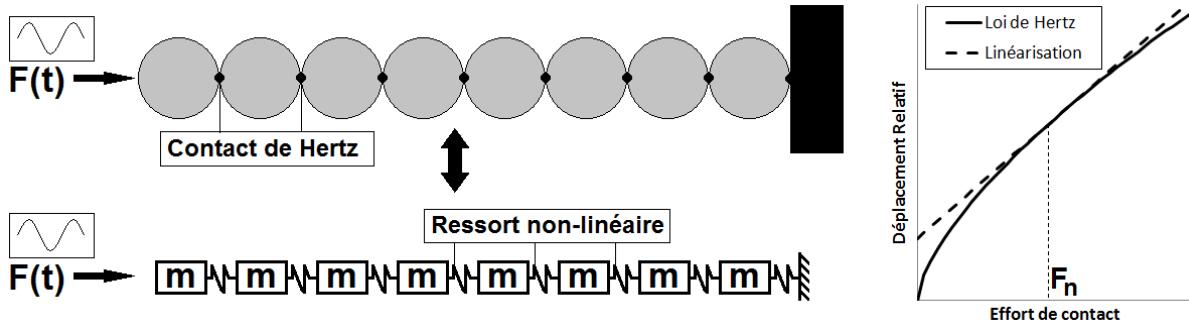


Fig. 2.23 : Chaîne de particules 1D soumis à vibration, et modélisation par une suite d'oscillateurs pesants.

Si on s'intéresse à la propagation acoustique de petite amplitude, on peut faire l'hypothèse que la loi de Hertz reste valide en régime faiblement dynamique, et il est légitime de modéliser une chaîne de billes identiques par une chaîne de masses ponctuelles, chacune interagissant avec ses voisines par la loi de Hertz (représentée par un ressort non-linéaire, Fig. 2.23). La dynamique de la chaîne est décrite par un système d'équations différentielles non linéaires couplées, que l'on peut ensuite simplifier en se plaçant dans l'approximation des très faibles déformations. Il s'agit donc de linéariser le comportement des ressorts à la limite des très petites déformations, autour d'un point d'équilibre qui correspond à l'effort moyen F_n au sein de chaque contact. Si l'effort $F(t)$ appliqué en bout de chaîne oscille faiblement autour de F_n , chaque contact de Hertz peut alors être modélisé par un ressort linéaire, de raideur :

$$D_n = (3E'^2 RF_n)^{1/3} \quad (2.22)$$

Dans cette expression, $E' = E/(2 - 2\nu^2)$ est le module réduit du matériau des billes, et R est leur rayon. Pour de grandes longueurs d'ondes (c'est-à-dire dans le cas où le milieu est considéré comme non-dispersif), la vitesse de propagation de la perturbation appliquée à l'extrémité de la chaîne est alors :

$$c_{1D} = 2R\sqrt{D_n/m} \quad (2.23)$$

On en déduit donc que la vitesse de propagation d'une onde dans un matériau granulaire 1D dépend fortement de l'effort moyen F_n qui lui est appliqué, avec une loi du type :

$$c_{1D} \propto F_n^{1/6} \quad (2.24)$$

Dans un milieu 3D plus proche de la réalité, on remplace cette force par la contrainte de confinement, notée σ_m . Il existe plusieurs différences essentielles entre les cas 1D et 3D.

-Premièrement, la position et le nombre des contacts ne sont pas aussi bien définis dans le cas 3D que dans le cas 1D, même s'ils peuvent être représentés par le nombre de coordination N_c .

-Deuxièmement, les billes ne sont pas forcément alignées, et des efforts tangentiels se développent au sein de chaque contact. Sous les mêmes hypothèses de linéarisation que dans le cas 1D, on peut démontrer que ces efforts tangentiels peuvent être représentés par une loi

linéarisée de raideur $D_t = 4Ga/(2 - \nu)$, où G est le module de cisaillement du matériau des billes et a est le rayon de contact de Hertz (voir chapitre 1), qui dépend de l'effort normal appliqué au contact : c'est la loi de Hertz-Mindlin linéarisée.

-Troisièmement, la densité granulaire n'est pas fixée comme dans le cas 1D, mais présente une variabilité représentée par la fraction solide F_s .

Du fait de ces différences, la vitesse de propagation d'une onde dans un milieu granulaire 3D vérifie généralement une loi de la forme suivante :

$$c_{3D} \propto \sigma_m^{1/6} \cdot N_c^{1/3} \cdot F_s^{-1/6} \quad (2.25)$$

Bien évidemment, cette expression est rendue plus complexe que dans le cas 1D par le fait que le nombre de coordination N_c et la fraction solide F_s ne sont pas indépendants de la contrainte de confinement σ_m : Si on augmente la contrainte subie par un milieu granulaire, les grains ont tendance à se serrer (F_s augmente) et le nombre de contacts est plus important (N_c augmente). Il en résulte que la vitesse de propagation acoustique augmente avec la pression moyenne appliquée au matériau, à la fois du fait de la non-linéarité du contact Hertzien et du fait de l'augmentation du nombre de contacts.

Dans le cas des milieux continus, on relie de manière rigoureuse la vitesse de propagation des ondes acoustiques à la raideur du matériau, sous la forme d'une loi du type $c_{3D} = \sqrt{E/\rho}$. Par conséquent, en faisant l'analogie entre le matériau granulaire et un milieu continu équivalent, on peut écrire une propriété fondamentale des milieux granulaires : leur rigidité n'est pas constante, elle augmente avec la contrainte moyenne qu'on leur fait subir. Par ailleurs, cette rigidité n'a de sens qu'après linéarisation, c'est-à-dire si on s'intéresse à de très petites déformations autour d'un état d'équilibre. Le cas de la propagation des ondes acoustiques de faibles amplitudes est à peu près le seul où cette approximation peut être réalisée avec rigueur. Dès que l'on sort de ce cadre, on doit considérer que les matériaux granulaires ont un comportement essentiellement non-linéaire.

Comportement inélastique aux petites déformations

La discipline d'ingénierie qui s'intéresse le plus au comportement mécanique des matériaux granulaires est la mécanique des sols [9], ou géomécanique, qui peut être considérée comme une sous-discipline du génie civil. Cette discipline a développé un grand nombre de théories et de dispositifs expérimentaux pour caractériser ce comportement. Celui qui est le plus couramment utilisé pour déterminer le comportement des milieux granulaires aux petites déformations est appelé "essai œdométrique". Dans sa version la plus simple, il s'agit d'un essai de compression confinée (Fig. 2.24a), mais dans sa version classique il contient des ingrédients plus complexes consacrés à l'étude de l'écoulement de l'eau interstitielle sous contrainte (que l'on étudie dans le cadre de la théorie de la consolidation). On se limite ici à l'étude des milieux granulaires secs.

L'essai œdométrique est très simple dans son principe (même s'il peut être plus compliqué sur le plan technologique dans certaines applications) : un échantillon de matériau granulaire est disposé dans un bâti rigide, puis surmonté d'un couvercle auquel on applique une charge verticale P , qui se traduit par une contrainte verticale $\sigma_v = P/S$ dans l'échantillon (S étant sa section horizontale). Sous cette contrainte, l'échantillon de matériau se comprime et sa hauteur

H diminue. De manière concomitante, sa fraction solide F_s augmente et son indice des vides $e = e_0 + (1 + e_0)(H - H_0)/H_0$ (où e_0 et H_0 sont l'indice des vides et la hauteur de l'échantillon avant chargement) diminue. Dans le déroulement habituel de l'essai, on représente les mesures dans un graphique $e = f(\log(\sigma_v))$, et on procède selon les étapes suivantes (Fig. 2.24b) :

- On applique un chargement P croissant progressivement (section A-B-C)
- On décharge jusqu'à une valeur très faible de P (section C-D)
- On recharge en dépassant la première valeur de P atteinte (section D-E-F)
- On décharge totalement l'échantillon (section F-G)

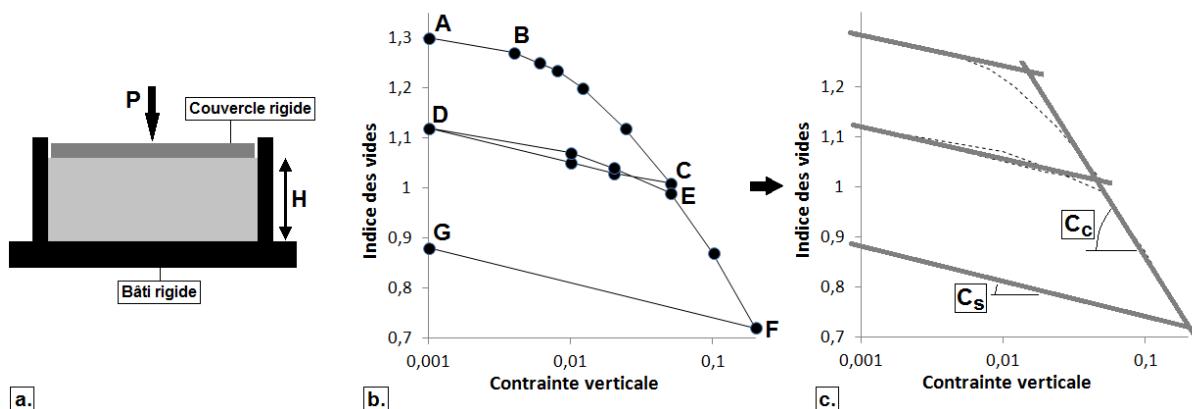


Fig. 2.24 : Essai œdométrique. a. Configuration de l'essai ; b. Courbe expérimentale typique ; c. Exploitation de la courbe et détermination des coefficients caractéristiques

La courbe expérimentale $e = f(\log(\sigma_v))$ a généralement l'allure de celle présentée en Fig. 2.24b. Elle démarre au point A avec une pente faible, mais change assez vite pour prendre une pente élevée à partir du point B. Lors du déchargement de C à D, la pente est de nouveau faible, ainsi qu'au début du rechargement sur la section D-E. La pente augmente à nouveau lorsque l'on dépasse le point E pour atteindre le point F. Enfin, le dernier déchargement s'effectue selon une pente faible jusqu'au point G.

Ce comportement est modélisé sur la Fig. 2.24c. On considère que le matériau se déforme selon deux lois affines (dans le repère $\log(\sigma_v) - e$) différentes selon la valeur de σ_v . En réalité, on définit une deuxième valeur de contrainte notée σ_p , que l'on appelle "contrainte de surconsolidation", et qui correspond à la plus forte contrainte que l'échantillon a reçue au cours de son histoire. Sur le segment B-C, par exemple, on a $\sigma_v = \sigma_p$, puisque l'échantillon est en cours de chargement. Au cours du déchargement-rechargement sur la section C-D-E, en revanche, on a $\sigma_v < \sigma_p$, puisque l'on décharge, mais on retrouve l'égalité $\sigma_v = \sigma_p$ à partir du point E et jusqu'à F. On en déduit que :

-lors d'un chargement avec $\sigma_v = \sigma_p$ (c'est-à-dire pour lequel on confronte le matériau à des niveaux de contrainte qu'il n'a jamais connu), l'indice des vides augmente linéairement avec $\log(\sigma_v)$, selon une pente importante notée C_c . On prend généralement la valeur absolue de cette pente, et on la nomme "indice de compression". On dit que le matériau est "normalement consolidé". C'est le cas sur les sections B-C et E-F

-lors d'un déchargement, ou d'un rechargement avec $\sigma_v < \sigma_p$, l'indice des vides évolue linéairement avec $\log(\sigma_v)$, selon une pente beaucoup plus faible notée C_s , que l'on nomme "indice de gonflement". On dit alors que le matériau est surconsolidé, c'est-à-dire qu'il évolue à des niveaux de contraintes inférieurs à ce qu'il a connu dans son passé et dont il a gardé la mémoire. On rencontre fréquemment des écarts de l'ordre de $C_s \approx C_c/10$, c'est-à-dire que, à un niveau de contrainte donné, un matériau surconsolidé est environ 10 fois plus raide qu'un matériau normalement consolidé. C'est le cas sur les sections A-B, C-D-E, et F-G.

Si on exprime les résultats de mesures œdométriques sur un graphique contraintes-déformations plus classiques (Fig. 2.25), il est plus difficile de trouver un modèle intuitif à l'œil nu (ce qui justifie l'utilisation courante du système $\log(\sigma_v) - e$), mais on observe plusieurs éléments intéressants :

-Le comportement en chargement est fortement non-linéaire, avec une rigidification progressive du matériau au fur et à mesure que la contrainte augmente.

-Le comportement en déchargement-rechargement est également non-linéaire, mais globalement beaucoup plus raide que lors d'un premier chargement.

-Si on décharge complètement l'échantillon, des déformations irréversibles apparaissent, et il ne retrouve pas sa hauteur initiale.

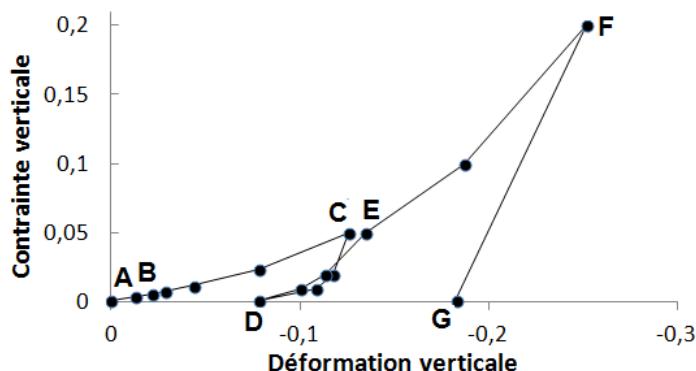


Fig. 2.25 : Résultats d'essai œdométrique exprimés dans un repère contrainte-déformation classique

Le comportement d'un matériau granulaire est donc fortement inélastique, même aux petites déformations, et dépend de l'histoire des chargements passés subis par le matériau.

2. Plasticité de Mohr-Coulomb

-Le modèle de Mohr-Coulomb

Au delà du comportement inélastique en petites déformations se pose la question de la contrainte maximale que peut subir un milieu granulaire avant de céder et d'entrer en grandes déformations. Cette question est essentielle dans beaucoup de champs applicatifs, en particulier en géotechnique (dimensionnement des barrages, soutènements, fondations, etc.) et en géophysique (prévision des glissements de terrain, etc.). Le modèle de plasticité le plus

simple permettant de prédire la rupture d'un matériau granulaire est le modèle de Mohr-Coulomb. Il s'exprime par un critère de rupture sur les contraintes uniquement, et se base sur le concept de frottement interne.

Une façon très simple de définir ce modèle est d'utiliser la définition suivante : le matériau idéal de Mohr-Coulomb va céder au point P s'il existe en ce point un plan repéré par une normale \vec{n} , et selon lequel on a :

$$|\tau| = \mu \cdot \sigma \quad (2.26)$$

Dans cette expression, τ est la contrainte tangentielle sur le plan considéré, σ est la contrainte normale, et μ est un coefficient interne au matériau. La rupture survient donc si la contrainte tangentielle atteint une certaine proportion de la contrainte normale, ce qui est analogue à l'initiation du glissement dans un contact frottant. La différence entre le milieu granulaire et le contact frottant réside dans la non-connaissance a priori du plan de glissement. Le milieu granulaire sous contraintes peut céder dans n'importe quelle direction en fonction de l'état de contrainte qu'il subit. Ainsi, pour savoir si un milieu granulaire est en rupture, il faut tester la relation (2.26) en tous les points et selon toutes les orientations possibles.

Pour mettre ce modèle en évidence de manière expérimentale, considérons par exemple la configuration de l'essai triaxial de révolution (Fig. 2.26a). Ce test est couramment pratiqué en génie civil, en géométrie cylindrique, par exemple sur des échantillons de carottes prélevées dans un sol à étudier. On considère ici un matériau granulaire sec, par exemple un sable. Un tel échantillon cylindrique est d'abord placé dans une membrane imperméable, puis mis en place dans un dispositif entre deux plaques horizontales (l'une servant de plan fixe, l'autre permettant d'appliquer le chargement vertical sous la forme d'une contrainte σ_v), et l'ensemble est noyé dans de l'eau sous pression qui apporte une contrainte radiale de confinement σ_r par l'intermédiaire d'une membrane imperméable. Au début de l'essai on impose $\sigma_v = \sigma_r$, c'est-à-dire un état de contraintes isotrope, puis on augmente progressivement σ_v pour obtenir un tenseur de contraintes cylindrique de la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

On suppose que cet état de contrainte est homogène dans l'échantillon cylindrique, ce qui est réaliste tant que la rupture n'est pas survenue. Lorsque l'on augmente la contrainte verticale, celle-ci prend successivement les valeurs croissantes σ_{v1}, σ_{v2} , etc., jusqu'à ce que l'échantillon cède pour une valeur de contrainte verticale $\sigma_{v,max}$.

Une telle succession d'états de contrainte se représente de manière idéale dans le plan de Mohr (σ, τ) puisque l'on connaît (par la géométrie) la valeur et l'orientation des contraintes principales mineure (σ_r) et majeure (σ_v) à tout moment. On sait en effet que le cercle de Mohr représentant un état de contrainte donné coupe l'axe des abscisses (contraintes normales) en deux valeurs correspondant aux contraintes principales mineure et majeure (Fig. 2.26b).

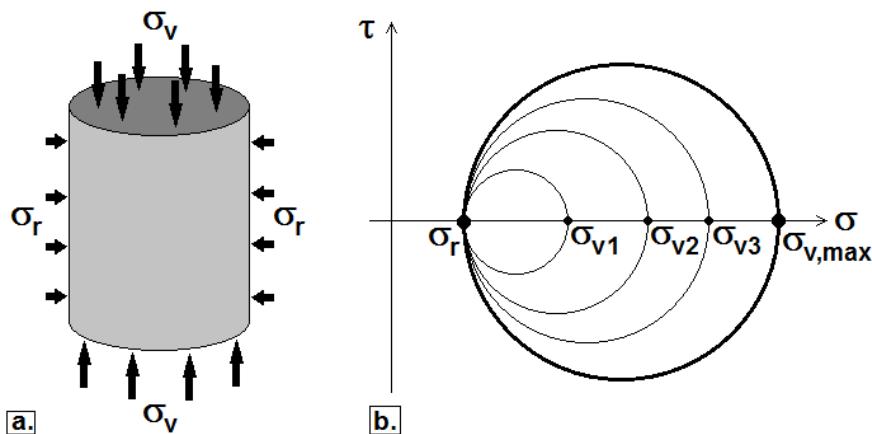


Fig. 2.26 : Essai triaxial de révolution. a. Forme de l'échantillon et chargement ; b. Evolution des cercles de Mohr lors du chargement

Au début de l'essai, on a $\sigma_v = \sigma_r$ et le cercle de Mohr se réduit en un point situé en $(\sigma_r, 0)$ dans le plan de Mohr. En augmentant progressivement la valeur de la contrainte verticale, on peut tracer différents cercles de plus en plus grands, qui coupent l'axe horizontal successivement en σ_{v1} , σ_{v2} , etc. Lorsqu'on atteint la rupture plastique, on obtient donc un cercle de Mohr dont les points d'intersection avec l'axe horizontal sont $(\sigma_r, 0)$ et $(\sigma_{v,max}, 0)$: il décrit totalement l'état de contrainte dans l'échantillon au moment de la rupture. On rappelle que chacun des points (σ, τ) appartenant à un cercle de Mohr fournit les valeurs des contraintes normale et tangentielle sur un plan d'une inclinaison donnée.

On peut recommencer cette expérience avec plusieurs valeurs de la contrainte de confinement σ_r , ce qui fournit un ensemble de cercles de Mohr à la rupture. Si on trace l'ensemble de ces cercles sur un même plan de Mohr, on constate qu'ils sont tous tangents à deux droites issues de l'origine, de coefficients directeurs $-\mu$ et μ (Fig. 2.27). Ces deux droites séparent l'espace des états de contraintes licites (points (σ, τ) appartenant à la zone "blanche" de la Fig. 2.27) des états de contraintes conduisant à la rupture (points (σ, τ) se trouvant sur l'une des deux droites, et pour lesquels on a $|\tau| = \mu \cdot \sigma$), et des états de contraintes physiquement impossibles (points (σ, τ) appartenant à la zone "grise" de la Fig. 2.27).

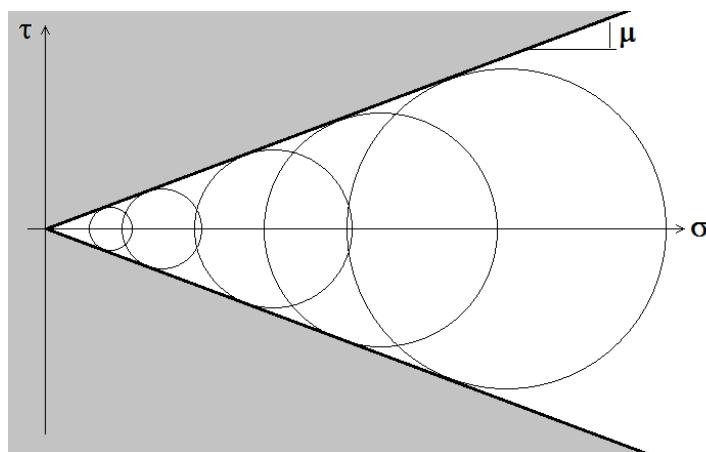


Fig. 2.27 : Détermination expérimentale des droites de Coulomb à partir de plusieurs cercles de Mohr à la rupture

Plutôt que d'utiliser le coefficient μ , on utilise plus couramment le paramètres φ , nommé angle de frottement interne du matériau, et défini par :

$$\mu = \tan(\varphi) \quad (2.28)$$

La Fig. 2.27 permet de comprendre pourquoi la rupture survient lorsque le cercle devient tangent aux droites de Mohr. En effet, lorsque le cercle de Mohr est plus petit (par exemple le cercle correspondant à σ_{v3} dans la Fig. 2.26b), aucune inclinaison de plan (c'est-à-dire aucun point du cercle) ne permet de vérifier $|\tau| = \mu \cdot \sigma$, et le critère de Mohr-Coulomb n'est violé dans aucune direction : le matériau ne cède pas. En revanche, dès lors que le cercle de Mohr est suffisamment grand pour atteindre les droites de Coulomb, il existe deux points du cercle (c'est-à-dire deux orientations de plans, Fig. 2.28) pour lesquels la contrainte tangentielle atteint une proportion suffisante de la contrainte normale : un glissement se produit et la rupture survient.

Le plan de Mohr permet également de prédire selon quelle inclinaison la rupture a lieu : selon la Fig. 2.28, on sait que la normale au plan de rupture est inclinée d'un angle $\pm\theta/2$ par rapport à la direction de la contrainte principale maximale (c'est-à-dire la direction verticale dans le cas présent). Par conséquent, cette normale est inclinée d'un angle $\pm\delta$, avec :

$$\delta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad (2.29)$$

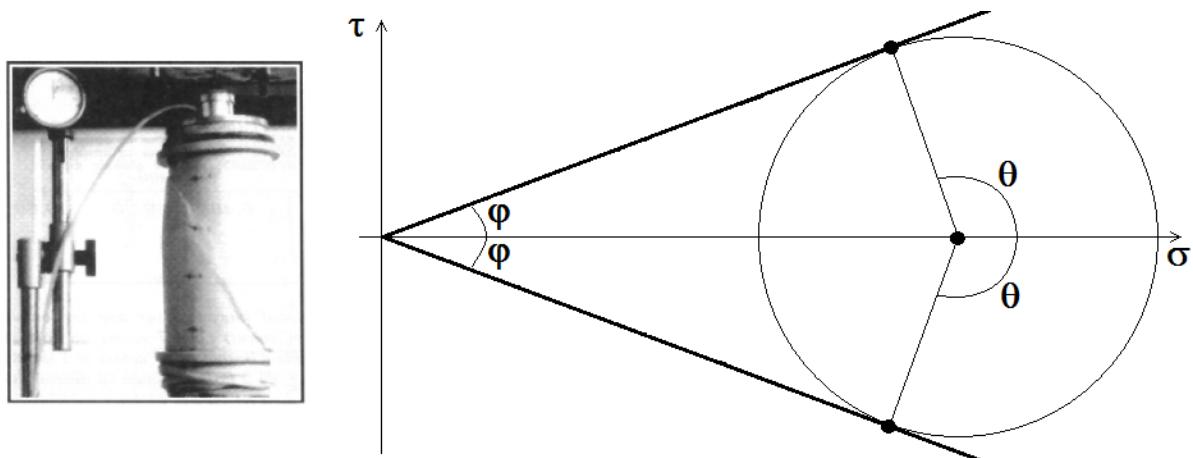


Fig. 2.28 : Rupture d'un essai triaxial de révolution, et diagramme de Mohr correspondant

La rupture représentée sur la Fig. 2.28 est cohérente avec cette orientation. En revanche, le fait que la rupture soit localisée sur un seul plan de glissement (et ne corresponde plus à une répartition homogène du tenseur de contraintes) est une observation expérimentale classique qui ne peut pas être prédictive par la théorie de Mohr-Coulomb en l'état. Cette bifurcation est un phénomène encore mal modélisé, qui concentre de nombreux efforts de recherche.

-Angle de talus

Si on verse un matériau pulvérulent (c'est-à-dire dénué de cohésion) sur un plan horizontal rugueux à partir d'une source ponctuelle (Fig. 2.29), le matériau a tendance à s'organiser pour former une structure de géométrie conique. La mesure de l'angle entre le sol et la génératrice de ce cône est appelée "angle de talus naturel". On peut l'obtenir de différentes façons, mais cet angle est défini comme l'angle maximal que peut supporter un matériau donné sans s'écouler. C'est une propriété intrinsèque du matériau (du matériau de composition, de la rugosité de surface, de la granulométrie et de la morphologie des particules qui le composent), même si cette propriété est légèrement dépendante des conditions de "mise en tas" (et en particulier de la compacité de l'assemblage granulaire). Cet angle peut prendre des valeurs faibles (de l'ordre de 5 à 10° pour des sphères monodisperses très peu frottantes) ou élevées (de l'ordre de 40 à 45° pour des matériaux très anguleux avec une granulométrie très étalée).

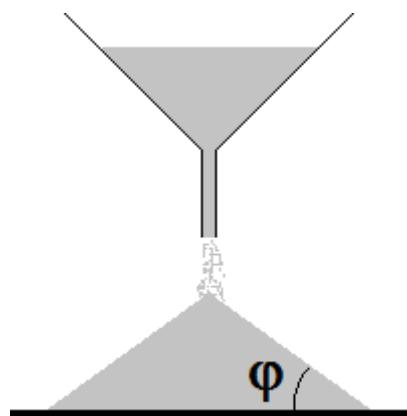


Fig. 2.29 : Mise en évidence expérimentale d'un angle de talus naturel

Si on se place dans le cadre de la plasticité de Mohr-Coulomb, on peut montrer que l'angle de talus naturel est identique à l'angle de frottement interne φ caractérisant le critère de plasticité du matériau. Imaginons pour cela l'expérience de pensée représentée sur la Fig. 2.30 : On suppose une masse granulaire pulvérulente de géométrie carrée, reposant sur un support horizontal et adossée sur un seul côté à un plan vertical. Bien évidemment, une telle masse n'est pas stable, elle va donc se rompre selon un plan de glissement δ , pour tendre vers une forme triangulaire. Cet angle δ correspond à l'angle de talus naturel.

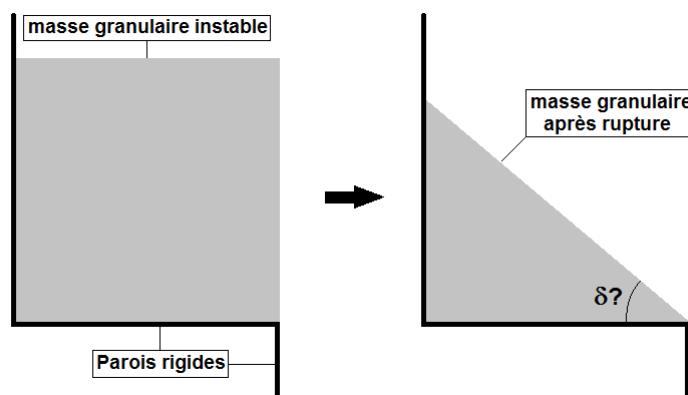


Fig. 2.30 : Expérience de pensée pour relier angle de talus et angle de frottement interne

On considère maintenant une ligne de glissement candidate inclinée d'un angle δ , et on effectue le bilan des efforts appliquée au bloc de matériau en glissement potentiel (Fig. 2.31) : on compte le poids \vec{P} , et les composantes normale \vec{R} et tangentielle \vec{T} de la réaction du bloc de matériau inférieur. Un rapide calcul d'équilibre statique selon la direction horizontale donne, en cas de stabilité :

$$T = R \cdot \tan(\delta) \quad (2.30)$$

Si on augmente progressivement l'angle d'inclinaison δ , on finit par atteindre une inclinaison égale à l'angle de frottement interne du matériau granulaire, et on a :

$$T = R \cdot \tan(\varphi) \quad (2.31)$$

Cet état correspond très exactement à la rupture du matériau selon le critère de Mohr-Coulomb. On en déduit que, pour $\delta < \varphi$ le glissement ne se fait pas, mais qu'il survient exactement pour $\delta = \varphi$. Par conséquent, l'angle naturel de talus est égal à l'angle de frottement interne du matériau.

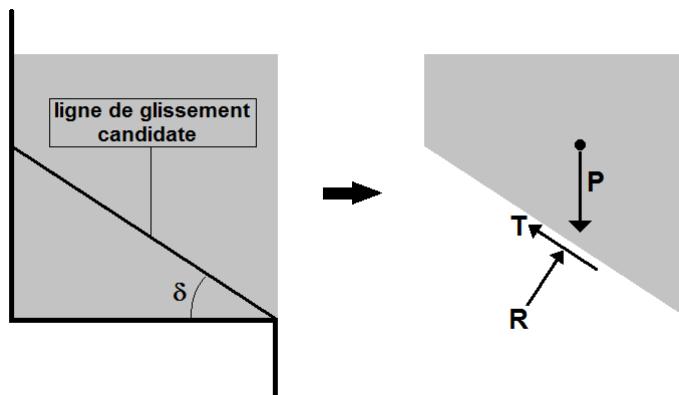


Fig. 2.31 : Equilibre d'un bloc en rupture

Il faut préciser ici que l'angle φ n'est pas égal à l'angle de frottement existant au niveau du contact entre deux grains composant le matériau : il lui est toujours supérieur. Ceci se comprend aisément sur la Fig. 2.32, qui montre une vue zoomée de la zone de glissement. On conçoit que l'effort tangentiel qu'il faut vaincre pour mettre la masse supérieure en mouvement n'est pas lié uniquement au frottement inter-particulaire, mais également à la rugosité de la surface de glissement du fait de la granularité du matériau. C'est la raison pour laquelle l'angle de frottement interne est supérieur à celui lié au simple contact entre les particules : il tient également compte de l'enchevêtrement des grains.

Du point de vue de l'ingénieur, l'angle de talus est une propriété essentielle du matériau granulaire, qui reste relativement facile à mesurer. C'est ce paramètre qui contrôle la stabilité des pentes naturelles et des talus artificiels (autoroutiers, ferroviaires, etc.), ainsi que l'encombrement et l'efficacité des zones de stockage de matériaux (industrie minière, cimenterie, etc.).

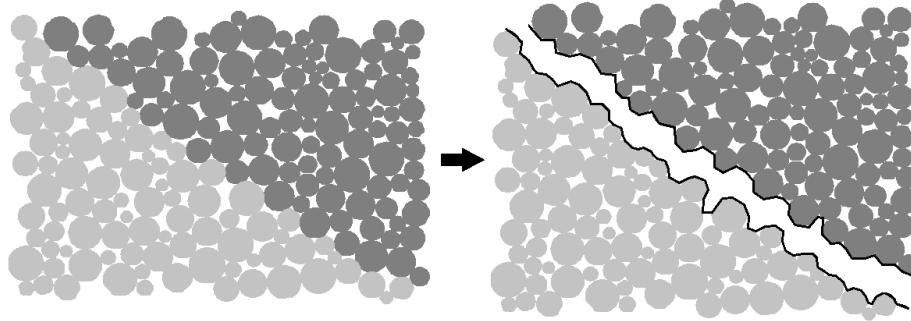


Fig. 2.32 : Rugosité de la surface de glissement en relation avec la granulométrie

-Etats limites de Rankine

La théorie de Rankine décrit les conséquences du modèle de Mohr-Coulomb lorsqu'il est appliqué à un massif de matériau granulaire soumis à des déplacements imposés à ses limites. Il repose sur la notion de coefficient de poussée. Si on considère un point donné dans un massif au repos (Fig. 2.33a), on peut, pour des raisons de symétrie, émettre que ses directions principales sont orientées selon les axes verticaux et horizontaux, et on établit donc que sa contrainte principale maximale est la contrainte verticale σ_{v0} (qui dépend du poids du matériau sus-jacent et d'une éventuelle contrainte de confinement supplémentaire) et que sa contrainte principale minimale est la contrainte horizontale σ_{h0} . Ces deux contraintes sont liées par une relation de proportionnalité :

$$\sigma_{h0} = K_0 \cdot \sigma_{v0} \quad (2.32)$$

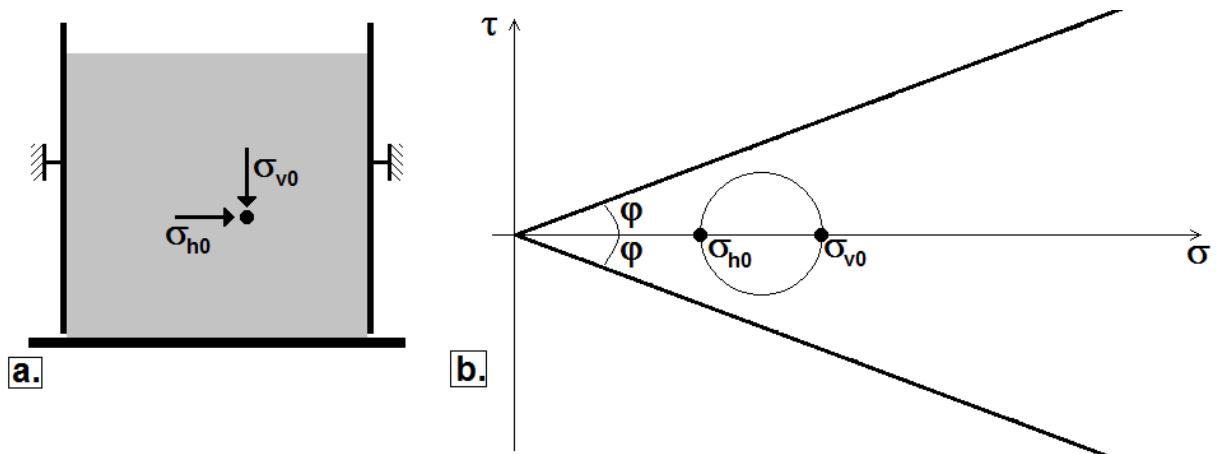


Fig. 2.33 : Etat de contrainte dans un matériau granulaire au repos. a. Orientation des contraintes principales ; b. Cercle de Mohr correspondant

Le coefficient K_0 est nommé coefficient des terres au repos (c'est un concept qui provient de la mécanique des sols). Il vaut environ 0.5 pour le sable normalement consolidé, et 0.7 pour l'argile normalement consolidée, mais peut être supérieur à 1 pour les sols fortement surconsolidé (c'est-à-dire qui subissent à l'état actuel une contrainte verticale bien inférieure à celle qu'ils ont pu subir dans leur passé, et qui gardent une mémoire de cette contrainte). Pour les matériaux pulvérulents, K_0 est estimé efficacement par la formule de Jaky :

$$K_0 = 1 - \sin(\varphi) \quad (2.33)$$

Dans le cas classique $K_0 = 0.5$, l'état de contrainte associé est représenté dans le plan de Mohr, Fig. 2.33b. C'est également l'état postulé dans le cas du silo de Janssen (voir une section précédente).

Si on décide d'écartier progressivement les deux parois latérales du contenant, le matériau granulaire va progressivement se détendre (Fig. 2.34a) : la contrainte verticale va rester inchangée ($\sigma_v = \sigma_{v0}$), mais la contrainte horizontale va diminuer progressivement (cercles successifs de la Fig. 2.34b). Le Plan de Mohr nous informe néanmoins que cette contrainte ne peut pas diminuer éternellement sans mettre en péril l'équilibre du matériau, puisque le cercle de Mohr finit par devenir tangent aux droites de Coulomb : le matériau est en état de rupture, et "suit" les parois latérales en leur appliquant une contrainte horizontale constante notée σ_{ha} . On dit que le sol est en état "d'équilibre limite actif" (formulation anglo-saxonne), ou qu'il est en état de "poussée" (formulation française). On a dans ce cas :

$$\sigma_{ha} = K_a \cdot \sigma_v \quad (2.34)$$

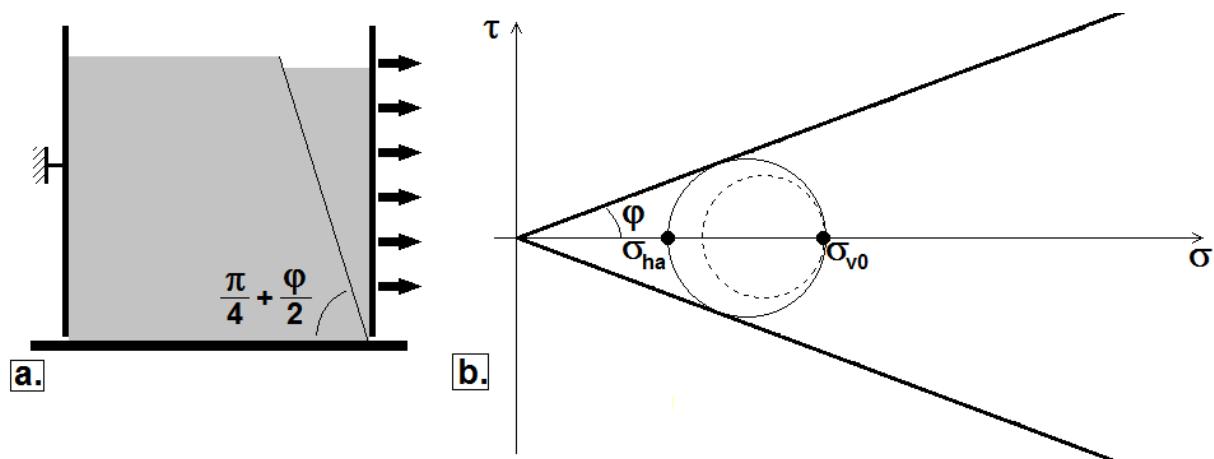


Fig. 2.34 : Equilibre limite de poussée. a. Forme de la rupture ; b. Cercle de Mohr correspondant

Le coefficient K_a est nommé "coefficient de poussée". Il est directement relié à l'angle de frottement par la formule suivante, que l'on peut déterminer par quelques calculs géométriques simples dans le plan de Mohr :

$$K_a = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.35)$$

En état de poussée, une ligne de glissement se développe, et un "coin" de matériau se désolidarise du reste du massif pour suivre la paroi (Fig. 2.34a).

Si, à partir de l'état de repos, on décide en revanche de rapprocher les parois latérales (Fig. 2.35a), le matériau se trouve comprimé. Comme dans la situation précédente, la contrainte verticale n'évolue pas (elle est uniquement définie par le poids du matériau sus-jacent plus une

éventuelle pression de confinement vertical), et on a toujours $\sigma_v = \sigma_{v0}$. Par contre, la contrainte horizontale augmente progressivement. Elle commence par atteindre la valeur de σ_{v0} (et passe brièvement par un état de contraintes isostatique, Fig. 2.35b), puis la dépasse et devient contrainte principale maximale. Elle augmente ainsi jusqu'à ce que le cercle de Mohr devienne tangent aux droites de Coulomb, ce qui signifie que le matériau entre en rupture : la contrainte horizontale atteint une valeur maximale notée σ_{hp} . On dit que le sol est en état "d'équilibre limite passif" (formulation anglo-saxonne), ou qu'il est en état de "butée" (formulation française). On a dans ce cas :

$$\sigma_{hp} = K_p \cdot \sigma_v \quad (2.36)$$

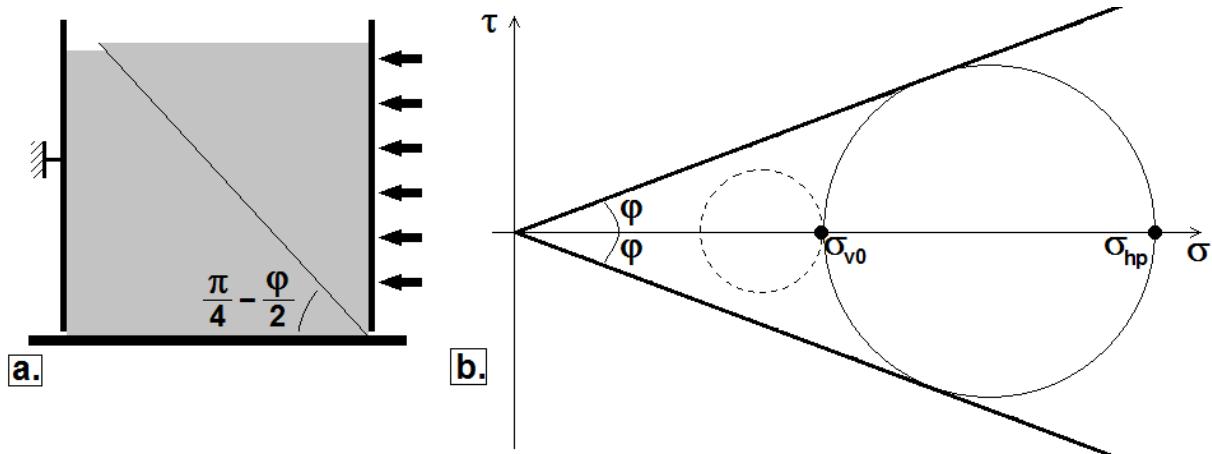


Fig. 2.35 : Equilibre limite de butée. a. Forme de la rupture ; b. Cercle de Mohr correspondant

Le coefficient K_p est nommé "coefficient de butée". Il est directement relié à l'angle de frottement par la formule suivante, obtenue également par observation du plan de Mohr (Fig. 2.35b) :

$$K_p = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.37)$$

En état de butée, une ligne de glissement différente de celle de la poussée se développe, et un "coin" de matériau (d'un volume nettement plus important) se désolidarise du reste du massif pour suivre la paroi (Fig. 2.35a). Un exemple expérimental d'une telle rupture est présenté sur la Fig. 2.36, avec des lignes de glissement très nettes.

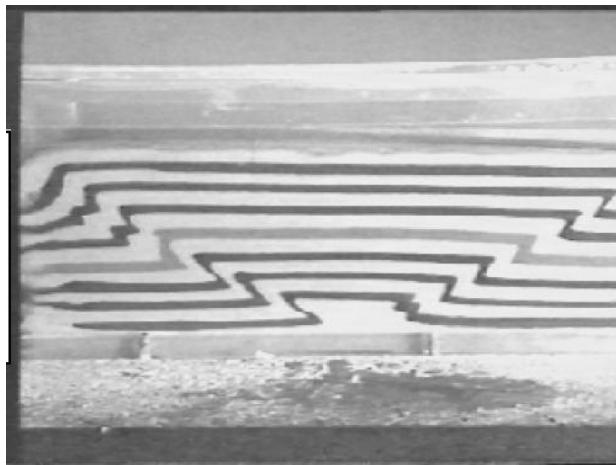


Fig. 2.36 : Faciès de rupture expérimentale en butée

-Mohr-Coulomb cohésif

Quelle que soit son origine (électrostatique, Van Der Waals, capillaire, etc.), la présence d'une cohésion intergranulaire modifie de manière conséquente le critère de plasticité d'un matériau granulaire et les comportements mécaniques associés. Un modèle de plasticité permettant de reproduire efficacement les comportements de cette classe de matériaux consiste donc à ajouter un paramètre au modèle de Mohr-Coulomb décrit dans les sections précédentes : la cohésion macroscopique c , exprimée généralement en kPa . Dans ce cas, la plasticité est atteinte en un point donné s'il existe une orientation de facette pour laquelle on a :

$$|\tau| = c + \sigma \cdot \tan(\varphi) \quad (2.38)$$

Dans ce cadre, un milieu pulvérulent (comme par exemple un sable sec) est un cas particulier du modèle de Mohr-Coulomb cohésif pour lequel on vérifie $c = 0$. Si cette cohésion est non-nulle, le critère de plasticité tracé dans le plan de Mohr a l'allure proposée sur le Fig. 2.37. Dans ce cas, on constate que la contrainte correspondant au plan de rupture est inclinée d'un angle $\alpha > \varphi$: la cohésion apporte un surplus de résistance à la fois en cisaillement et en traction. Ce rôle est primordial dans le cas d'une contrainte moyenne (ou contrainte de confinement) faible, c'est-à-dire pour des valeurs de σ d'un ordre de grandeur comparable à la cohésion c . En revanche, la Fig. 2.37 montre clairement que pour des valeurs élevées de la contrainte de confinement (i.e. pour $\sigma \gg c$), la contribution de la cohésion à la résistance du matériau devient négligeable et l'angle α tend vers l'angle φ : on retrouve à la limite le comportement d'un matériau purement frottant.

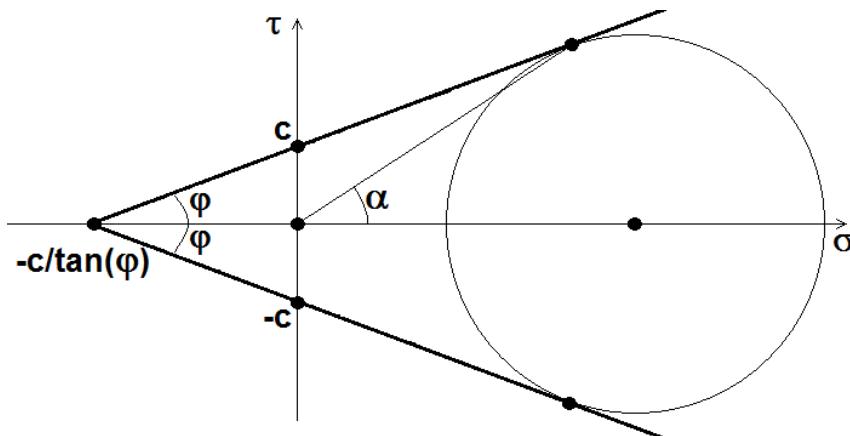


Fig. 2.37 : Diagramme de Mohr à la rupture d'un sol frottant et cohésif

La cohésion macroscopique permet de dépasser l'angle de talus naturel (égal à l'angle de frottement interne φ) et d'obtenir sous forme stable des talus de pente verticale. La cohésion contrôle alors la hauteur maximale supportable pour un tel talus, qui vaut pour un matériau cohésif de poids volumique γ :

$$H_{max} = 3.85 \frac{c}{\gamma} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad (2.39)$$

Dans le cadre des états limites de Rankine, la cohésion macroscopique apporte également un surplus de résistance à la poussée et à la butée, et modifie les valeurs de K_a et K_p .

Conclusion

Des éléments présentés dans ce chapitre, on retient que plusieurs outils conceptuels permettent de décrire la nature et l'état d'un matériau granulaire : morphologie, granulométrie, densité granulaire, nombre de coordination, état de contrainte, etc. Sur le plan mécanique, plusieurs spécificités du comportement des matériaux granulaires sont apparues :

-Ils peuvent parfois sembler ordonnés géométriquement, mais l'ordre n'existe jamais sur le plan mécanique : les forces se répartissent de manière inhomogène, et forment des chaînes et des voûtes.

-Dès les très petites déformations, l'élasticité linéaire est quasiment absente, du fait de la non-linéarité du contact hertzien et de la création-destruction de contacts interparticulaires.

-Le comportement en petites déformations est dépendant de l'historique du chargement subi par le matériau dans son histoire. En particulier, un matériau déjà soumis par le passé à des confinements importants (c'est à dire surconsolidé) est beaucoup plus rigide qu'un matériau qui expérimente pour la première fois ce niveau de confinement.

-Pour rompre un matériau granulaire en cisaillement, il faut vaincre à la fois les efforts de frottement intergranulaires et l'enchevêtrement géométrique des grains. Le chapitre suivant explore les différents comportements observables lorsque ces résistances sont vaincues.

Chapitre 3 : Milieux granulaires en écoulement

A. Ecoulement plastique

1. Dilatance de Reynolds

La compacité (ou fraction solide) d'un assemblage granulaire non-cohésif a un effet décisif sur son comportement plastique, à la fois en terme de critère (quand la plasticité se produit-elle ?) et de comportement (comment le matériau s'écoule-t-il après avoir plastifié ?). Ce paramètre est totalement absent du modèle de Mohr-Coulomb, qui utilise simplement la notion d'angle de frottement interne en tant que propriété intrinsèque du matériau. Lorsqu'on cherche à prédire le comportement du matériau granulaire après sa rupture, on doit donc faire appel à des modélisations plus riches qui décrivent son écoulement plastique.

Afin de mieux cerner le rôle de la fraction volumique, on imagine un assemblage granulaire très simple, proposé initialement par Rowe [10]. On considère un disque A soumis à un effort vertical N , reposant sur deux disques B et C. On suppose que A ne peut pas rouler mais seulement glisser (on bloque son degré de liberté rotationnel) et on cherche à déterminer l'effort horizontal T nécessaire pour déclencher son mouvement (Fig. 3.1a).

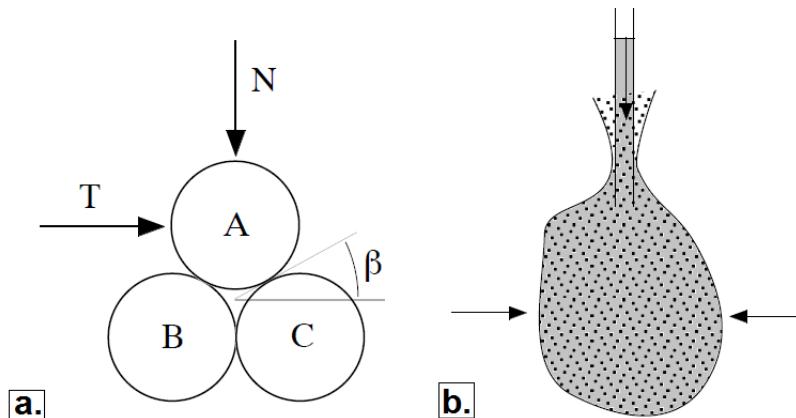


Fig. 3.1 : Dilatance de Reynolds. a. Explication heuristique ; b. Mise en évidence expérimentale

Ce petit modèle peut être vu comme l'étude de la résistance au cisaillement d'un empilement régulier puisqu'il suffit de reproduire cette maille à l'identique pour créer un réseau hexagonal compact. Si β est l'angle que forme le plan de contact entre la bille A et la bille C, et si $\tan(\delta)$ est le coefficient de frottement intergranulaire au niveau du contact, on conçoit assez facilement que le glissement de A se produira lorsque l'effort horizontal vaudra :

$$T = N \cdot \tan(\beta + \delta) \quad (3.1)$$

On trouve donc que, pour déloger la bille de son trou (ou pour déclencher la rupture par cisaillement de la maille), on doit appliquer un effort tangentiel proportionnel à l'effort normal, ce qui est en accord avec le modèle de Mohr-Coulomb. On constate également que le coefficient de frottement macroscopique $\tan(\beta + \delta)$ est le produit de deux contributions,

l'une liée au frottement de contact (δ), et l'autre à l'enchevêtrement des grains (β). Si le matériau est initialement dense, une friction microscopique nulle ($\delta = 0$) n'implique donc pas une friction macroscopique nulle puisque l'enchevêtrement géométrique doit encore être vaincu.

Pour que l'assemblage dense se déforme, les grains doivent d'abord s'écarter. Le mouvement relatif des grains va donc induire une diminution de la fraction volumique au cours de la déformation. Le premier à mettre en évidence ce phénomène fut Reynolds en 1885 [11]. Son expérience consiste en une poche élastique pleine de sable compacté et saturé d'eau, surmontée d'un tube capillaire (Fig. 3.1b). Si on appuie sur la poche, on constate contre toute attente que le niveau d'eau baisse dans le capillaire : le sable aspire l'eau au lieu de la repousser vers l'extérieur.

En appuyant sur la poche, on déforme en réalité l'assemblage granulaire. Le milieu se dilate donc, et l'eau descend remplir les pores ainsi créés. C'est le même phénomène qui explique l'assèchement du sable autour des pieds lorsque l'on marche sur le sable mouillé d'une plage. La déformation produite par le poids du pieds induit une dilatation du milieu en profondeur, et l'eau interstitielle est aspirée vers le bas.

Le phénomène de la dilatance de Reynolds dépend bien entendu des conditions initiales et de la façon dont la sollicitation mécanique est appliquée. Partant d'un empilement lâche, les grains n'ont pas à se désenchevêtrer et il n'y a pas de dilatance. Une contractance peut même être observée si l'assemblage initiale est suffisamment peu dense. De la même manière, l'application d'une contrainte de compression isotrope sur un échantillon n'a aucune chance de créer une dilatance : il faut pour cela que les grains puissent se déplacer les uns par rapport aux autres, c'est-à-dire une sollicitation de cisaillement peu confiné.

2. Essai de cisaillement rectiligne

Le comportement décrit dans la section précédente peut être mis en évidence de manière plus quantitative à l'aide d'une expérience de cisaillement rectiligne, aussi appelée "boîte de Casagrande". L'appareillage (Fig. 3.2) est composé de deux demi-boîtes rigides (généralement en acier), libres de glisser l'une sur l'autre. Dans la demi-boîte supérieure, on prévoit un piston lié à une plaque horizontale qui coulissoit verticalement, et on applique un effort vertical F_V à ce piston. Cet effort est donc répercuté sur le matériau granulaire emplissant les deux demi-boîtes, et se traduit par une contrainte verticale σ_V fixe, connue et contrôlée.

La demi-boîte inférieure est fixe, et la demi-boîte supérieure se voit appliquer un déplacement imposé Δx dans la direction horizontale, l'effort horizontal F_h associé étant mesuré par un capteur. Au cours de l'essai, on constate l'apparition d'une surface de glissement entre les zones de matériau granulaire solidaires avec les demi-boîtes inférieure et supérieure. Cette surface est en générale plane, avec une épaisseur de quelques dizaines de diamètres caractéristiques de grains. On peut donc estimer la contrainte de cisaillement τ se développant dans ce plan à partir de l'effort F_h . Ce cisaillement se traduit également par une évolution ΔV du volume du matériau cisaillé (dilatance ou contractance), qui est mesurée par un capteur de déplacement placé sur le piston.

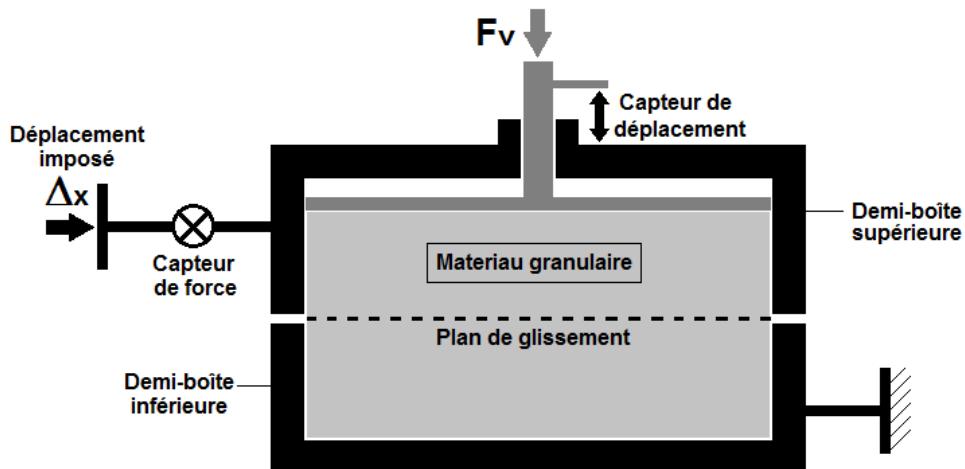


Fig. 3.2 : Appareil de cisaillement rectiligne

Lorsqu'on fait varier progressivement le déplacement Δx , on peut obtenir deux types de comportements différents (Fig. 3.3), selon que le matériau est initialement dense (i.e. fortement compacté, courbes continues) ou lâche (i.e. simplement déposé par gravité, courbes pointillées). Dans le cas d'un matériau dense, la contrainte tangentielle supportée par le matériau lorsqu'il subit le cisaillement (Fig. 3.3a) commence par fortement augmenter, puis atteint un pic de résistance et diminue jusqu'à un palier qui correspond à l'écoulement plastique en régime établi. Selon que l'on considère la contrainte tangentielle de pic ou la contrainte tangentielle de palier, on peut donc calculer deux types d'angles de frottement internes au matériau : l'angle de frottement "de pic" et l'angle de frottement "résiduel" :

$$\tan(\varphi_{pic}) = \frac{\tau_{pic}}{\sigma_v} \quad (3.2)$$

$$\tan(\varphi_{résiduel}) = \frac{\tau_{palier}}{\sigma_v} \quad (3.3)$$

On a donc un angle de frottement φ_{pic} qui correspond à l'effort nécessaire pour rompre localement l'assemblage granulaire, et un angle de frottement $\varphi_{résiduel}$ plus faible qui correspond à l'effort nécessaire pour entretenir le cisaillement une fois que cet enchevêtrement a été rompu. Dans le cas d'un matériau initialement lâche, en revanche, on ne distingue pas de pic de résistance en cisaillement, et on tend directement vers le palier correspondant à l'état résiduel. On en déduit donc que, si le matériau pulvérulent n'a pas été suffisamment compacté, l'enchevêtrement des grains n'offre pas de surplus de résistance par rapport à l'état résiduel.

Si on s'intéresse maintenant à la variation de volume dans les échantillons (Fig. 3.3b), on constate également une différence de comportement en fonction de la compacité initiale. Au cours de la sollicitation, l'échantillon dense commence par connaître une très légère contractance, puis se dilate fortement, ce qui correspond au désenchevêtrement proposé par Reynolds. Le volume atteint ensuite un palier. En revanche, l'échantillon lâche voit son volume diminuer et atteindre également un palier. Il connaît donc une contractance due au cisaillement.

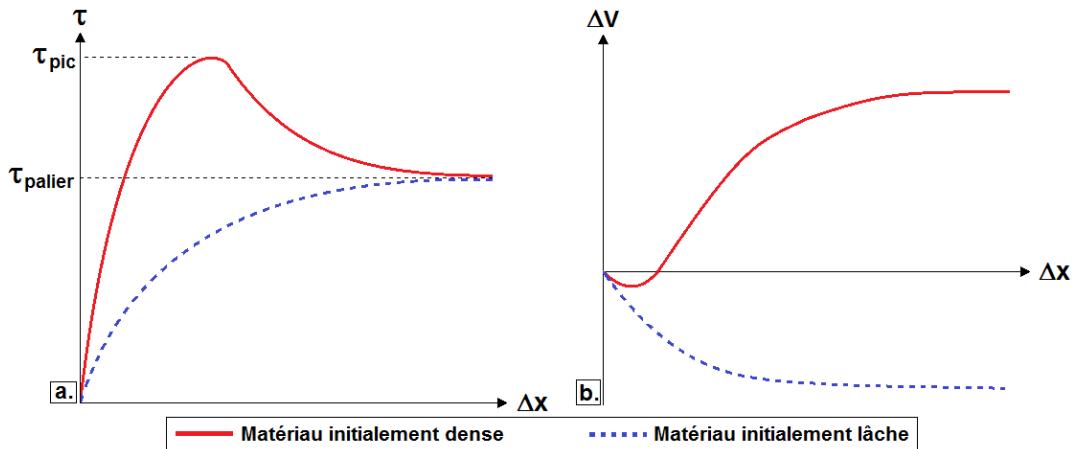


Fig. 3.3 : Comportements expérimentaux de matériaux dilatants et contractants

En réalité, on est en mesure de démontrer expérimentalement que, au niveau de la surface de cisaillement, la densité finale atteinte au palier est la même pour les deux échantillons. Par conséquent, au niveau du palier de cisaillement (c'est-à-dire lorsque l'on a suffisamment cisaillé pour atteindre un palier de contrainte tangentielle et un palier de variation volumique), le matériau cisaillé présente le même angle de frottement $\varphi_{r\acute{e}sidual}$ et la même fraction solide $F_{s,r\acute{e}sidualle}$ quelle que soit sa densité initiale, et la mémoire de l'assemblage granulaire de départ est définitivement perdue. On appelle cette configuration "l'état critique" d'écoulement plastique.

3. Liquéfaction des milieux saturés

Les vibrations, et notamment les séismes, provoquent dans les sols des contraintes, et particulièrement des contraintes de cisaillement. S'agissant de sollicitations très brèves, les massifs de sols saturés d'eau se trouvent en conditions non-drainées, c'est-à-dire que l'eau n'a pas le temps de se déplacer dans l'espace poral pour équilibrer les différences de pressions d'une zone à l'autre.

Il s'ensuit, pour les sols contractants situés sous la nappe, une augmentation rapide des pressions interstitielles : les matériaux granulaires voudraient se contracter sous la sollicitation, mais ne le peuvent pas car l'eau n'a pas le temps de s'échapper des pores, et celle-ci subit donc des pressions très importantes. En retour, sous l'effet de la poussée d'Archimède, les grains sont "soulagés" d'une grande partie de leur contrainte normale. La contrainte tangentielle, elle, reste constante, puisque le fluide n'est pas capable de la reprendre. En résumé, la contrainte normale reprise par le squelette granulaire (aussi nommée "contrainte effective") diminue tandis que la contrainte de cisaillement reste stable, et le matériau évolue progressivement vers la rupture à chaque cycle de sollicitation.

Dans certaines conditions, ces modifications du tenseur des contraintes peuvent conduire à la rupture totale du massif de sol, qui se manifeste par une perte totale de résistance et un comportement de liquide. C'est le phénomène de liquéfaction du sol. Il se produit particulièrement pendant les séismes et peut avoir des effets ravageurs : rupture de barrages, glissements de terrain du type coulées boueuses, enfouissement et basculement d'immeubles, etc.

D'un point de vue micromécanique, la liquéfaction nécessite un assemblage granulaire contractant, donc très peu dense et avec un équilibre statique précaire. Les vibrations conduisent alors à la rupture des contacts les plus faibles, et comme le squelette granulaire est dans l'impossibilité de se contracter (du fait de la saturation en eau), l'ensemble se comporte comme une suspension granulaire dense et ne résiste plus au cisaillement. Ce phénomène ne peut donc se produire que dans des matériaux pulvérulents (sans cohésion), avec un degré de saturation proche de 100% (l'eau ou un autre liquide incompressible occupe la totalité de l'espace poral), une granulométrie peu étalée ($C_u < 1.5$), et une faible densité granulaire (forte contractance). On étudie expérimentalement le potentiel de liquéfaction d'un milieu granulaire en laboratoire, à l'aide d'essais cycliques.

B. Ecoulements denses

1. Ecoulement sur une pente

Le régime d'écoulement dense fait l'objet à l'heure actuelle de nombreuses recherches, et ses équations constitutives ne sont pas entièrement établies. Leur existence même est incertaine. Pour les milieux pulvérulents, des approches hydrodynamiques (c'est-à-dire écrites dans le cadre de la mécanique des fluides) permettent néanmoins de décrire avec plus ou moins de bonheur certaines configurations simples. C'est le cas, dans une certaine mesure, des écoulements granulaires denses sur pentes, pour lesquelles les applications géophysiques sont évidentes.

Une approche a ainsi été proposée en 1989 par Savage et Hutter [12], s'inspirant des équations de St Venant pour les écoulements de fluides à surfaces libres. Elle repose sur l'hypothèse que la couche qui coule est fine devant les autres longueurs caractéristiques de l'écoulement (dimensions longitudinale et transversale). C'est le cas dans de nombreux écoulements naturels où une couche de matériau de quelques dizaines de mètres d'épaisseur s'écoule sur des kilomètres. La configuration d'étude, limitée à une approximation 2D, est présentée sur la Fig. 3.4 : une couche dense s'écoule sur une pente inclinée d'un angle θ .

L'idée des équations de St Venant est de tirer profit de l'hypothèse de couche mince pour oublier la direction \vec{z} (normale à la pente) et décrire l'écoulement par son épaisseur locale $h(x, t)$ et sa vitesse moyenne selon \vec{x} . Ainsi, pour un instant donné et une "tranche" donnée de matériau granulaire, on approxime le champ de pression appliqué par le matériau amont par une force résultante $\vec{p}(x)$ et le champ de pression aval par une force résultante $\vec{p}(x + dx)$. De même, la pression normale de réaction appliquée par la pente sur le matériau est approximée par une force \vec{R} , et le champ de force tangentielle lié au frottement est appelé $\vec{\tau}$. Le poids \vec{P} de la tranche vient compléter les efforts subis par cette tranche de matériau.

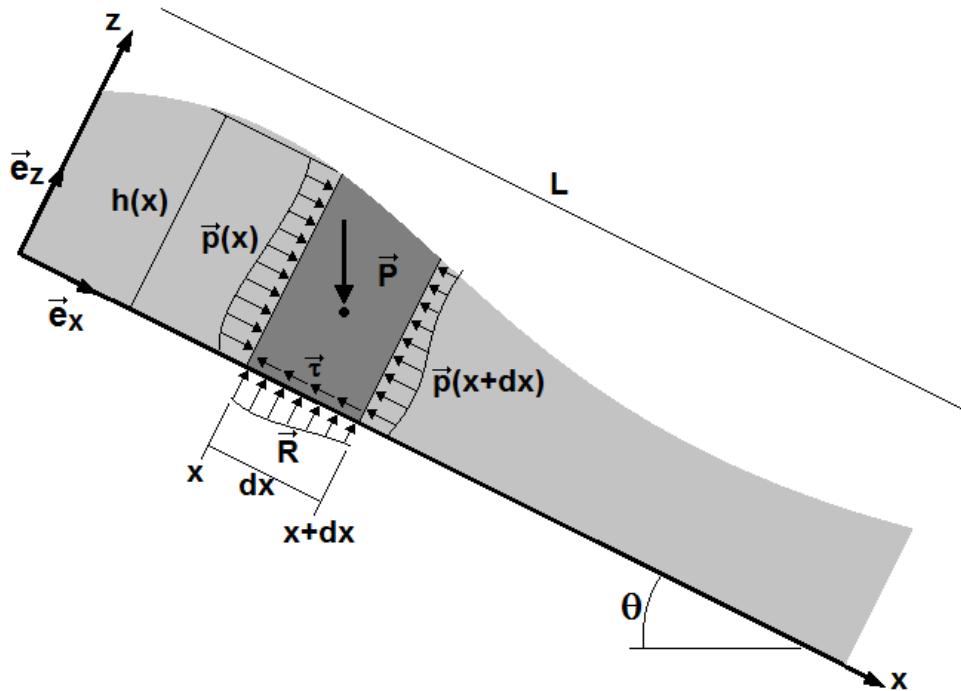


Fig. 3.4 : Ecoulement dense sur une pente

Pour obtenir les équations moyennées dans l'épaisseur (ou équations de St Venant), la première hypothèse consiste à considérer le matériau comme un milieu fluide incompressible. Cette incompressibilité, qui va à l'encontre des résultats proposés dans les sections précédentes, se justifie plus ou moins pour les écoulements granulaires denses (pour lesquels la fraction solide varie peu entre 0.5 et 0.6), et reste une hypothèse dont on ne peut pas se passer mais dont on doit bien garder les limites en tête. Sous ce postulat, il est possible d'écrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Si on note ρ la densité du matériau et qu'on s'intéresse à son champ de vitesse $\vec{u} = u(x, z, t)\vec{e}_x + v(x, z, t)\vec{e}_z$, la conservation de la masse s'écrit (formule de la divergence nulle) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3.4)$$

La conservation de la masse peut également s'étudier selon une approche basée sur des raisonnements de bilan dans une petite tranche dx de matériau comme indiqué sur la Fig. 3.4. On définit la vitesse moyenne dans l'épaisseur \bar{u} à un instant t par :

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{h(x)} \int_0^{h(x)} u(x, z) dz \quad (3.5)$$

L'équation (3.4) nous indique que la variation de volume d'un petit élément dx en un temps dt est égale au flux de matière entrant moins le flux de matière sortant, ce qui s'exprime de la manière suivante :

$$dV = \int_0^{h(x)} u(x, z) dt dz|_x - \int_0^{h(x+dx)} u(x+dx, z) dt dz|_{x+dx} \quad (3.6)$$

Avec $dV = dx dh$ et en divisant par dx et dt , l'équation de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

Par ailleurs, les équations de la quantité de mouvement s'écrivent en termes du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g \cdot \sin \theta - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (3.8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\rho g \cdot \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (3.9)$$

On peut maintenant tirer parti du fait que l'épaisseur de l'écoulement est très petite devant sa longueur. On en déduit alors que la vitesse du matériau dans la direction normale à la pente est négligeable ($v \approx 0$), et on peut en déduire que la contrainte de cisaillement varie peu selon la direction x ($\partial \sigma_{xz} / \partial x \approx 0$). Sous ces hypothèses, l'équation (3.9) se réduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho g \cdot \cos \theta \quad (3.10)$$

La pression verticale est donc donnée par l'équilibre hydrostatique. Si on intègre cette équation selon z , avec comme condition limite que la contrainte normale à la pente est nulle à la surface, on obtient :

$$\sigma_{zz} = \rho g \cdot \cos \theta \cdot (h - z) \quad (3.11)$$

On fait ensuite l'hypothèse selon laquelle il existe en tout point de l'écoulement un coefficient de proportionnalité entre la contrainte σ_{zz} (direction normale à la pente) et la contrainte σ_{xx} (direction de la pente, analogue aux pressions $\vec{p}(x)$ et $\vec{p}(x + dx)$ de la Fig. 3.4) :

$$\sigma_{xx} = k \cdot \sigma_{zz} \quad (3.12)$$

Cette constante k a un rôle analogue au coefficient des terres au repos K_0 utilisé dans le cadre des états limites de Rankine (voir chapitre précédent). Sous ces hypothèses, on peut réécrire l'équations de conservation de la quantité de mouvement moyennée dans l'épaisseur de la manière suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \alpha \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} \right) = \rho g h \cdot \cos \theta \left(\tan \theta - \frac{\tau}{\rho g h \cdot \cos \theta} - k \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (3.13)$$

Cette équation forme, avec l'équation (3.7), un système d'équations aux dérivées partielles couplées, portant sur les deux variables $\bar{u}(x, t)$ et $h(x, t)$, soit la vitesse moyenne et l'épaisseur de l'écoulement à chaque instant et à chaque position. Ce système doit donc permettre, après résolution (éventuellement analytique, et plus souvent numérique),

d'expliciter ces deux variables, à condition d'avoir choisi des valeurs correctes pour un certain nombre de paramètres apparaissant dans l'équation (3.13).

On a déjà exprimé que la constante k est analogue au K_0 de Rankine, et certaines expériences numériques suggèrent qu'elle aurait une valeur proche de 1 (correspondant à un état de contrainte isostatique dans l'écoulement). Le coefficient α correspond à une hypothèse cinématique forte sur le profil de vitesse dans l'écoulement. Il prendra par exemple les valeurs respectives 1, 4/3, et 5/6 pour des profils de vitesse uniforme, linéaire, et parabolique (Fig. 3.5). On peut donc le caler avec plus ou moins de confiance à partir d'une certaine connaissance expérimentale des phénomènes.

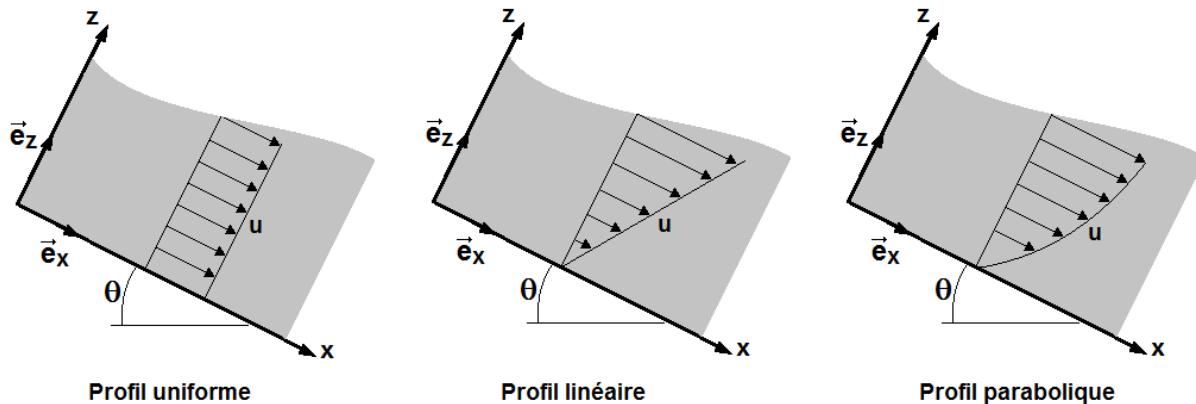


Fig. 3.5 : Profils cinématiques introduits dans la théorie, à déterminer expérimentalement

Le paramètre τ , en revanche, représente la contrainte tangentielle appliquée à l'interface entre le support et l'écoulement. C'est par ce terme que l'on peut réintroduire une rhéologie particulière au matériau et contrôler le comportement du matériau, et c'est sur lui que se concentrent beaucoup de recherches. Un choix de modélisation simple consiste à utiliser une simple loi de frottement de Coulomb, avec une proportionnalité entre la contrainte de cisaillement et la contrainte normale :

$$\tau = \mu \rho g h \cdot \cos \theta \quad (3.14)$$

On introduit donc un coefficient de frottement μ qu'il s'agira de déterminer, par exemple par calage sur des résultats expérimentaux. Cette modélisation simple des efforts tangentiels donne des résultats satisfaisants dans certaines situations simples, mais présente néanmoins l'inconvénient d'être non-prédicatif, puisqu'il repose sur un paramètre qu'il faut caler expérimentalement. De nombreux modèles plus complexes (pour lesquels τ devient une fonction d'autres grandeurs, comme la vitesse ou l'épaisseur) peuvent être imaginés pour coller au plus près de la réalité expérimentale dans des situations plus délicates, comme les pentes de faibles inclinaisons ou les masses granulaires de forts volumes. On observe par exemple (Fig. 3.6, [13]) une forte dépendance de la distance totale parcourue par une avalanche rocheuse en fonction du volume de celle-ci, et la notion de coefficient de frottement constant μ s'avère incapable de reproduire ce comportement (à part si on recalcule la valeur de μ pour chaque cas, ce qui annule le caractère prédictif de la théorie).

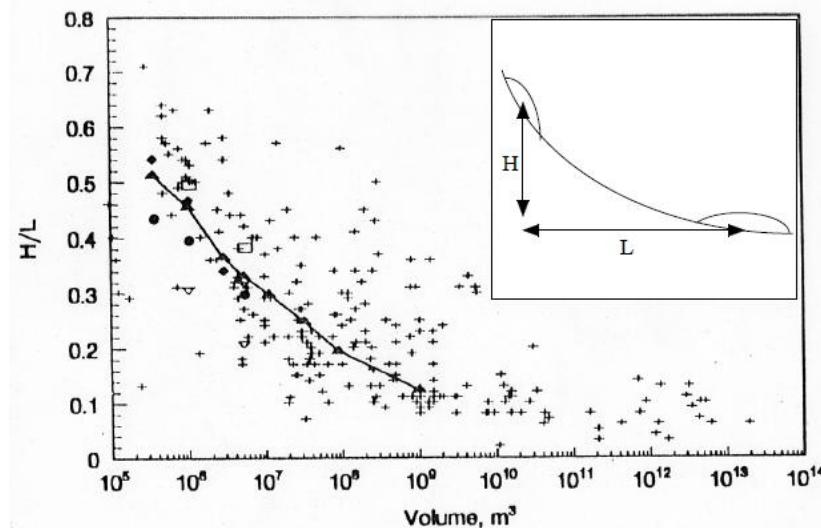


Fig. 3.6 : Distribution observée des distances relatives d'arrêt d'avalanches rocheuses en fonction de leurs volumes (tiré de [13])

Enfin, il faut garder à l'esprit que l'approche "couche mince" repose sur des hypothèses fortes qui sont souvent mises en défaut (écoulement épais, surface à très forte rugosité, etc.). Cette approche est pourtant utilisée de manière très courante par différents services d'aménagement du territoire et entreprises privées pour prédire la course et la zone d'arrêt d'écoulements naturels, comme les glissements de terrain et les avalanches rocheuses.

2. Ecoulement sur un tas

Dans de nombreuses situations naturelles et industrielles, on ne peut pas utiliser directement les résultats énoncés dans la section précédente car le matériau granulaire ne s'écoule pas sur une pente solide et bien déterminée, mais s'écoule du fait de sa propre instabilité. On parle alors d'écoulement sur un tas. Deux situations expérimentales simples permettent en particulier de mettre en œuvre un tel écoulement : l'écoulement sur pente granulaire (Fig. 3.7a) et l'écoulement en tambour tournant (Fig. 3.7b).

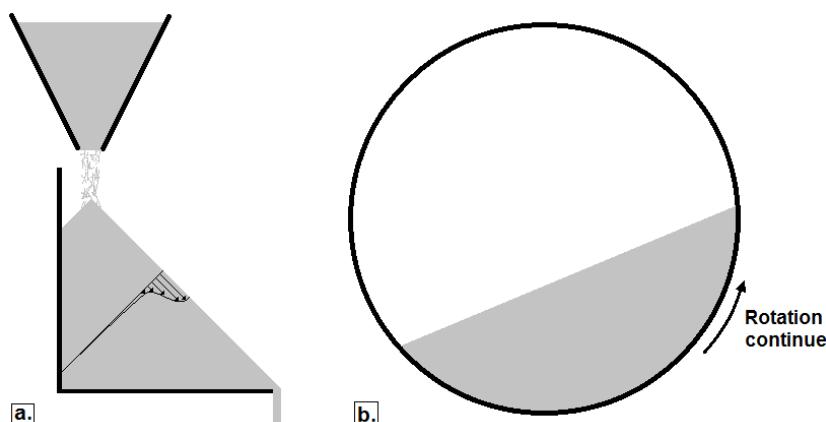


Fig. 3.7 : Configurations expérimentales d'écoulement sur un tas. a. Expérience du tas de sable ; b. Ecoulement en tambour tournant

Si la rotation du tambour (Fig. 3.7b) est lente ou si le débit d'injection sur le tas est faible (Fig. 3.7a), on voit un nouveau comportement apparaître : l'écoulement n'est pas régulier, mais plutôt intermittent. la pente du tas augmente progressivement sans rupture jusqu'à une valeur maximum notée θ_s , puis l'instabilité se produit. Une avalanche se déclenche, et laisse en place une nouvelle surface libre avec un angle d'inclinaison plus faible, nommé angle de repos et noté θ_r . La différence entre les deux angles est typiquement de quelques degrés. L'angle θ_s correspond donc à l'extrême limite du domaine de stabilité, tandis que l'angle θ_r correspond à un état d'équilibre surabondant. La détermination expérimentale de ces angles sur les deux montages de la Fig. 3.7 est relativement aisée.

Lorsqu'une avalanche se déclenche, on observe un écoulement qui reste superficiel et mobilise une épaisseur de matériau de l'ordre de 10 à 20 tailles de grains. On peut alors décider d'utiliser le modèle de la section précédente, en délimitant une partie "fluide" (avalanche en cours) et une partie "solide" (matériau granulaire sous-jacent, approximativement au repos) qui sert de support à l'écoulement. On est donc amené à définir une "ligne de glissement" (Fig. 3.8), qui n'est pas connue a priori et dont la profondeur peut dépendre de la position x et du temps t .

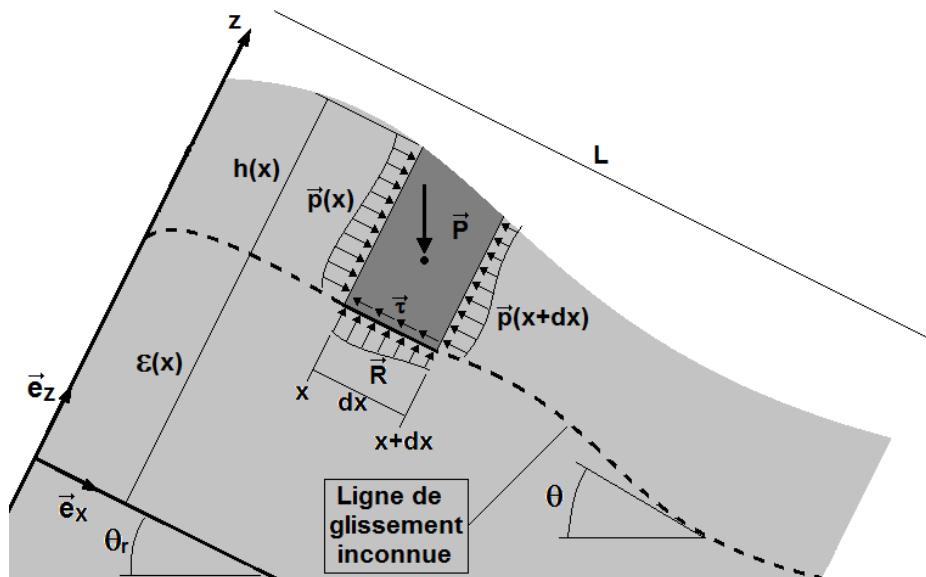


Fig. 3.8 : Ecoulement sur un tas : différences avec un écoulement sur substrat fixe

On est donc amené à réécrire les équations qui gouvernent l'écoulement sur une pente :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

$$\rho \left(\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \alpha \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} \right) = \rho gh \cdot \cos \theta \left(\tan \theta - \frac{\tau}{\rho gh \cdot \cos \theta} - k \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (3.16)$$

La différence essentielle entre le cas présent et celui de l'écoulement sur une pente est que, dans l'équation (3.16), la valeur de θ est maintenant inconnue puisque liée à la variation spatio-temporelle de la profondeur de la couche en écoulement. On peut néanmoins écrire que

cette inclinaison est peu éloignée de l'angle de repos, et la réécrire en faisant intervenir la position $\varepsilon(x, t)$ de la surface de glissement par rapport à un repère fixe donné :

$$\theta = \theta_r + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad (3.17)$$

On a donc trois inconnues ($\bar{u}(x, t)$, $h(x, t)$ et $\varepsilon(x, t)$) pour deux équations et le système n'est pas fermé. Ainsi, en plus des difficultés et choix déjà présentés dans la section précédente (choix des valeurs de k et α et de l'expression de τ), on est dans l'obligation d'écrire une équation supplémentaire.

Plusieurs propositions ont été effectuées dans la littérature scientifique pour cette équation manquante. La plus utilisée consiste à considérer que les grains se déposent si l'angle local est plus faible que l'angle de repos, et se mettent en mouvement sinon. On obtient alors comme troisième équation :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\beta(\theta - \theta_r) = -\beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad (3.18)$$

β est alors un paramètre qu'il faut également caler. D'autres approches existent, mais le sujet de recherche dans son ensemble est encore en développement.

3. Ségrégation en écoulement

Le problème de la ségrégation se rencontre dès que l'on manipule des mélanges de grains de propriétés différentes. À la différence des liquides qu'il est souvent facile de mélanger, un mélange homogène de grains est difficile à obtenir dès qu'il existe des différences de tailles, de masses, de propriétés mécaniques, etc. La ségrégation est en réalité l'opération exactement inverse à l'opération de mélange, c'est-à-dire la séparation spontanée d'un matériau granulaire mélangé en phases homogènes. Malgré les problèmes industriels qu'elle pose, la ségrégation par taille est encore largement mal comprise. On omettra dans cette section la ségrégation sous vibration (renvoyée à une section ultérieure consacrée aux phénomènes collisionnels), et on décrira uniquement la ségrégation sous cisaillement.

On considère un mélange homogène de gros et petits grains que l'on fait s'écouler sur un plan incliné rugueux. Le long de la pente, les gros grains remontent spontanément à la surface libre (Fig. 3.9). Les mécanismes à l'origine de cette observation sont assez simples, et on peut en proposer une heuristique. Lors de l'écoulement, les grains bougent continuellement les uns par rapport aux autres et des trous se forment entre eux, dans lesquels des particules de la couche supérieure peuvent tomber. Les gros grains ne peuvent tomber que dans les gros trous, tandis que les petits grains peuvent tomber dans les petits et gros trous. Cette asymétrie dans les mouvements fluctuants d'échanges de couches donne lieu à la ségrégation.

Pour les écoulements géophysiques cette ségrégation peut avoir une grande importance. Les gros blocs se retrouvent sur le dessus de l'écoulement où la vitesse est plus grande. En conséquence, par un effet de "tapis roulant", il se rassemblent au front de l'avalanche et influencent l'écoulement (Fig. 3.9b). Un des exemples de cette influence est la tendance de ce type d'écoulement à former des "digitations" qui apparaissent lorsque la pente devient plus douce en fin d'avalanche. Les gros blocs ont alors tendance à former des canaux dans lesquels

les petits blocs s'engouffrent, ce qui les canalise et augmente leur distance d'arrêt (Fig. 3.9c, [14]).

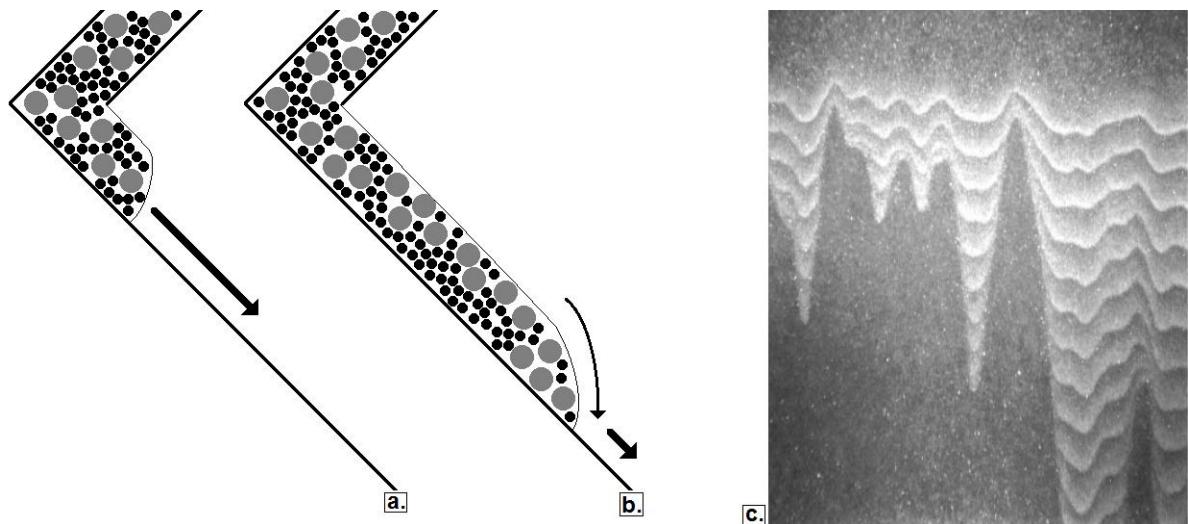


Fig. 3.9 : Ségrégation sous cisaillement. a. Début d'écoulement ; b. Ecoulement établi, ségrégation en partie supérieure et en partie avant de l'écoulement ; c. Digitation observée expérimentalement, liée à une canalisation des petites particules par les grosses

Une autre configuration très étudiée où la ségrégation est observée est la configuration du tambour tournant (Fig. 3.10). Lorsqu'un mélange de particules grosses et petites (respectivement denses et peu denses) est entraîné dans un tambour bidimensionnel, on retrouve rapidement les petites (respectivement peu denses) particules à la périphérie du tambour et les grosses (respectivement denses) au centre. Il s'agit cette fois d'un effet inertiel : les zones périphériques connaissent plus d'agitation granulaire (du fait des rugosités du tambour et des avalanches successives en surface), et les particules de petite taille ou de faible densité (i.e. celles avec la plus petite inertie) sont plus facilement entraînées dans ces zones que les particules à forte inertie.

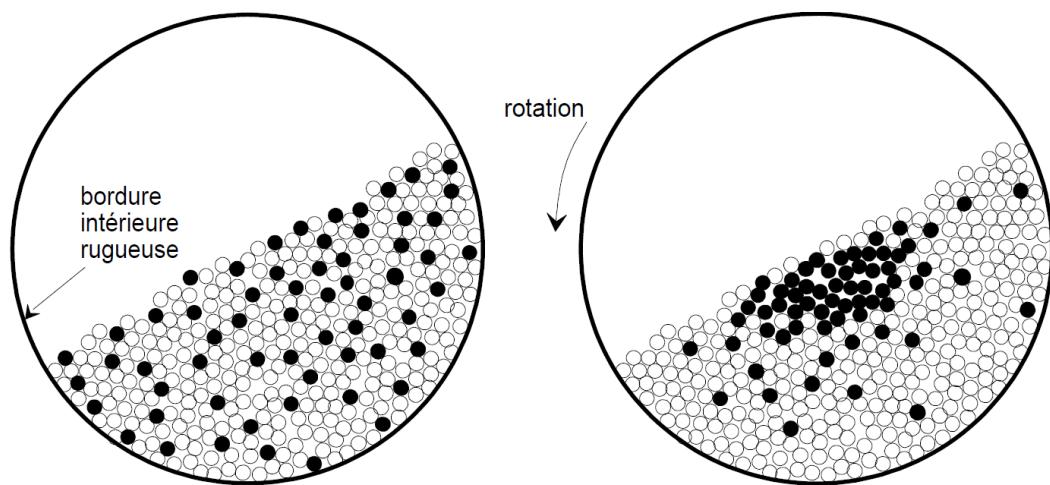


Fig. 3.10 : Ségrégation en tambour tournant, les particules denses (en noir) se retrouvant en partie centrale du tambour

4. Ecoulement en silo

L'écoulement granulaire le plus répandu dans les applications industrielles est l'écoulement en silo convergent. On l'utilise dès qu'on a besoin de canaliser une grande quantité de matériau granulaire dans un récipient de petite taille. On rencontre cet écoulement dans de nombreux domaines [15], en particulier dans les industries minière, agroalimentaire, chimique, pharmaceutique, etc. Dans le cadre de ces applications pratiques, mais aussi dans une optique plus fondamentale de physique granulaire, on s'intéresse principalement à trois questions. Quel est le débit d'écoulement au travers d'un silo convergent de géométrie donnée ? Y'a t'il un risque de blocage de l'écoulement ? Quelles sont les causes et conséquences des vibrations induites par l'écoulement.

Sur le plan technologique, un silo est un réservoir, généralement cylindrique, monté sur une partie de section conique ou pyramidale inversée, appelée trémie, à la base de laquelle se trouve l'ouverture par laquelle s'effectue la vidange du silo. Les dimensions de l'ensemble sont extrêmement variables selon les industries et les usages (Fig. 3.11). L'écoulement est en majeure partie contrôlé par la partie convergente (la trémie), tandis que la partie prismatique (réservoir) n'a qu'une influence négligeable sur cet aspect, et l'intervient que dans les propriétés de stockage du silo (volume maximal, masse stockée, etc.). Cette observation est directement reliée à la Théorie de Janssen (voir chapitre précédent).

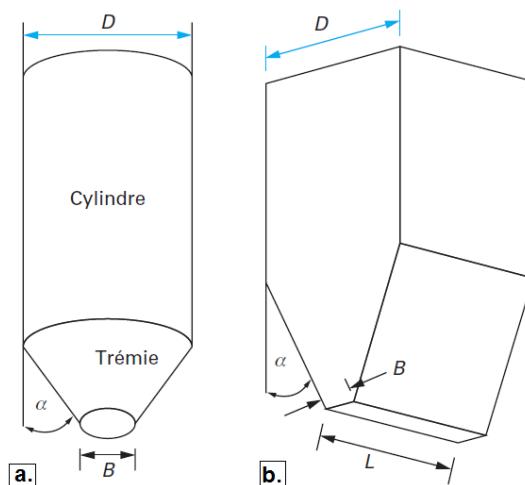


Fig. 3.11 : Géométries de silos classiques. a. Silo conique ou axisymétrique ; b. Silo plan

Deux cas limites d'écoulement peuvent se produire. Dans le premier cas, qui correspond généralement au comportement souhaité pour le système, la masse stockée se déplace uniformément vers le bas en tout point du silo à chaque fois que l'orifice inférieur est ouvert. Cet écoulement se produit lorsque les parois du silo sont suffisamment pentues et lisses et lorsque le matériau présente une bonne aptitude à l'écoulement sous contraintes (matériau peu frottant et surtout peu cohésif). Ce cas de figure, appelé "écoulement en masse", présente l'intérêt de garantir un temps de stockage homogène du matériau et une vidange complète du silo.

Dans un deuxième cas limite, une partie seulement du matériau, contenu dans une cheminée centrale, s'écoule vers la sortie. Dans la zone périphérique, située autour de cette cheminée, les particules restent immobiles (Fig. 3.12). Ce volume mort est le principal inconvénient de ce type d'écoulement, dit "en cheminée". En effet, il conduit à une forte hétérogénéité des temps de stockage, selon que la matière appartient à la zone d'écoulement ou à la zone stagnante. Par ailleurs, la vidange complète n'est pas possible sans intervention extérieure. Ce cas présent néanmoins l'avantage de réduire l'usure des parois (puisque le différentiel principal de vitesse s'effectue à l'intérieur du milieu granulaire et non à son contact avec la paroi), et donc d'améliorer la durabilité des systèmes.

L'apparition d'un régime d'écoulement ou de l'autre dépend de nombreux paramètres, comme la géométrie du silo (pente des parois et rugosité) et les propriétés du matériau granulaire (morphologie, granulométrie, cohésion, évolution dans le temps, etc.). En pratique, la plupart des silos ont un fonctionnement intermédiaire avec formation d'une cheminée et écoulement lent dans le reste de la trémie. On estime qu'un écoulement en masse est très probable pour des angles d'ouverture $\alpha < 10^\circ$ et qu'un écoulement en cheminée est probable pour des angles d'ouverture $\alpha > 30^\circ$.

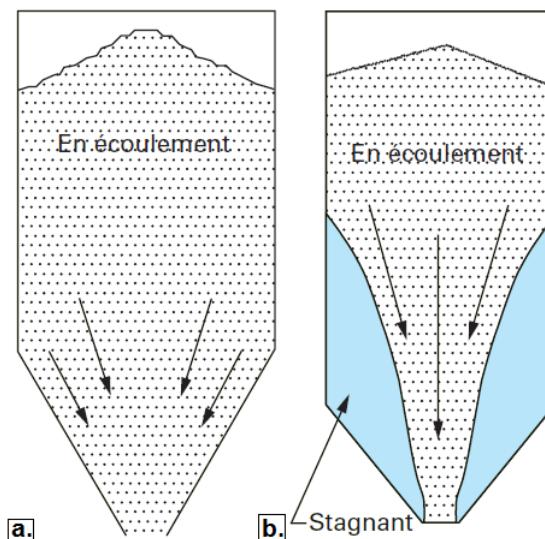


Fig. 3.12 : Régimes d'écoulement en silo. a. Ecoulement en masse ; b. Ecoulement en cheminée

Pour calculer le débit d'écoulement d'un silo, on a recours à des lois semi-empiriques, c'est-à-dire fondée sur des résultats expérimentaux et des approches dimensionnelles. En particulier, dans le cas d'un matériau granulaire pulvérulent (i.e. sans cohésion), on peut appliquer la formule de Berverloo au cas des silos à fond plat à ouverture circulaire :

$$\dot{M} = 0.58 \rho_b \cdot \sqrt{g} \cdot (D - k \cdot d)^{2.5} \quad (3.19)$$

Dans cette expression, \dot{M} représente le débit massique d'écoulement au travers de l'ouverture de la trémie, ρ_b est la masse volumique apparente du matériau granulaire, g est l'accélération de la gravité, D et d sont respectivement les diamètres de l'ouverture et d'une particule typique, et k est un coefficient constant proche de 1.4. Cette relation est valable lorsque la taille de l'orifice est suffisamment grande devant la taille des grains ($D > 8d$ par exemple).

On constate que l'expression de Beverloo donne un exposant 2.5 pour la relation entre le débit et le diamètre d'ouverture. Pour les silos coniques, la même formule est appliquée mais avec quelques différences permettant de faire apparaître l'angle d'ouverture de la trémie α :

$$\dot{M} = \pi \frac{1 - (\cos \alpha)^{1.5}}{6 \times (\sin \alpha)^{2.5}} \rho_b \cdot \sqrt{g} \cdot (D - k \cdot d)^{2.5} \quad (3.20)$$

Il est important de noter que plusieurs tentatives ont été effectuées pour retrouver ces résultats empiriques par le calcul, en se fondant sur des méthodes issues de la mécanique des milieux continus et de la mécanique des fluides. Pour l'instant, toutes ces tentatives ont échoué. On notera également que les formules (3.19) et (3.20) ne font apparaître aucune propriété mécanique du milieu granulaire (comme par exemple un angle de frottement interne), ce qui peut rendre suspicieux.

Une autre problématique liée à l'écoulement en silo est la possible formation de voûtes stables au dessus de l'orifice de vidange, qui peuvent conduire à l'arrêt de l'écoulement. Une telle voûte peut être due à l'imbrication des particules (pour des grains grossiers et peu cohésifs), ou aux forces de cohésion entre particules fines. Dans le premier cas, on recommande d'utiliser un diamètre de sortie 5 à 10 fois supérieur au plus gros diamètre de grain. Pour le voûtement cohésif, la cohésion et la résistance à la compression de la poudre entrent en jeu, et on a recours à des abaques pour déterminer le diamètre d'ouverture minimal permettant d'éviter les risques de bouchon.

C. Ecoulements collisionnels

1. Analogie avec un gaz

On a exploré des comportements solides et liquides des milieux granulaires dans les chapitres précédents, mais il existe également des situations pour lesquels un tel matériau peut présenter un comportement analogue à celui d'un gaz. On parle alors parfois de gaz granulaire. Cette analogie est utilisée lorsque le matériau est extrêmement agité, et permet sous certaines conditions (assez restrictives malheureusement) de mettre son comportement en équations.

Les deux situations les plus classiques pour lesquels l'analogie gazeuse est utilisée sont, d'une part le cas des matériaux fortement vibrés (même s'il ne s'agit pas à proprement parler d'un écoulement granulaire), et d'autre part des écoulements sur une pente très inclinée. Dans les deux cas, le milieu ressemble à un gaz, au sens où les particules sont très agitées, et bougent indépendamment les unes des autres sans interagir, sauf au cours de brèves collisions. Un tel régime, dit "collisionnel", correspond donc à la situation où aucun contact interparticulaire n'est persistant ou durable. Pour décrire la dynamique de ces écoulements, on raisonne donc sur le plan énergétique en termes de collisions entre particules. On comprend donc que ce type de comportement s'observe uniquement lorsque l'énergie fournie au système (vibrations ou forte pente, par exemple) est suffisante pour compenser les pertes liées à chacune de ces collisions. Dans le cas contraire, le système évolue naturellement vers un état plus apaisé.

Pour pousser l'analogie plus loin, on utilise souvent une grandeur appelée "température granulaire", que l'on définit comme la moyenne du carré de la fluctuation des vitesses. Par fluctuation, on entend écart à la moyenne locale des vitesses des particules. La fluctuation de

vitesse d'une particule donnée est donc égale à sa vitesse dans un référentiel lié au mouvement moyen des particules de son entourage. Pour un comportement granulaire solide elle est nulle (toutes les vitesses sont négligeables), et pour un comportement liquide elle est faible (les vitesses varient de manière continue dans l'échantillon). Mais pour un comportement gazeux elle peut être très élevée, car chaque particule évolue le plus souvent en vol libre (entre deux collisions), avec une vitesse qui n'est pas directement liée à celle de ses voisines en l'absence de contacts persistants. La température granulaire est donc une mesure de l'agitation d'un milieu granulaire donnée par :

$$T = \langle \vec{q}^2 \rangle \quad (3.21)$$

Dans cette expression, \vec{q} est la fluctuation de vitesse d'une particule, et l'opérateur $\langle \rangle$ correspond à une moyenne spatio-temporelle effectuée sur toutes les particules d'un échantillon et sur un intervalle de temps donné.

La définition de cette grandeur permet de s'inspirer de la théorie cinétique des gaz denses pour formuler des équations constitutives pour les écoulements de milieux granulaires. Néanmoins, la différence fondamentale entre un gaz granulaire et un gaz moléculaire réside dans la dissipation d'énergie lors des collisions. On a vu dans un chapitre précédent que cette perte d'énergie peut être décrite par un coefficient de restitution e relatif à la notion de choc inélastique.

Dans le cas du choc purement normal d'une particule sphérique avec une paroi rigide, ce coefficient relie la vitesse incidente V_i et la vitesse restituée V_r par la relation :

$$e = \frac{V_r}{V_i} \quad (3.22)$$

Le cas légèrement plus complexe de la collision parfaitement frontale entre deux billes de masses m_1 et m_2 , de vitesses incidentes v_{i1} et v_{i2} et de vitesses restituées v_{r1} et v_{r2} , peut s'écrire à parti de deux relations :

$$m_1 \cdot v_{i1} + m_2 \cdot v_{i2} = m_1 \cdot v_{r1} + m_2 \cdot v_{r2} \quad (3.23)$$

$$v_{r1} - v_{r2} = -e \cdot (v_{i1} - v_{i2}) \quad (3.24)$$

La première équation correspond à la conservation de la quantité de mouvement, et la deuxième correspond à la définition du coefficient de restitution (rapport des vitesses relatives restituée et incidente dans la direction normale au contact). On en tire :

$$v_{r1} = v_{i1} + \left(\frac{1+e}{1+m_1/m_2} \right) (v_{i1} - v_{i2}) \quad (3.25)$$

On obtient directement v_{r2} par permutation des indices. Cette théorie s'étend également au cas du choc non-frontal (Fig. 3.13), c'est-à-dire du choc pour lequel la direction de la vitesse relative entre les deux billes n'est pas colinéaire au vecteur joignant leurs centres. Dans ce cas-là, la vitesse a une composante normale et une composante tangentielle dans le plan tangent au contact. La vitesse normale restituée de chaque bille est alors calculée par la formule (3.25), tandis que la vitesse tangentielle reste inchangée au cours du choc.

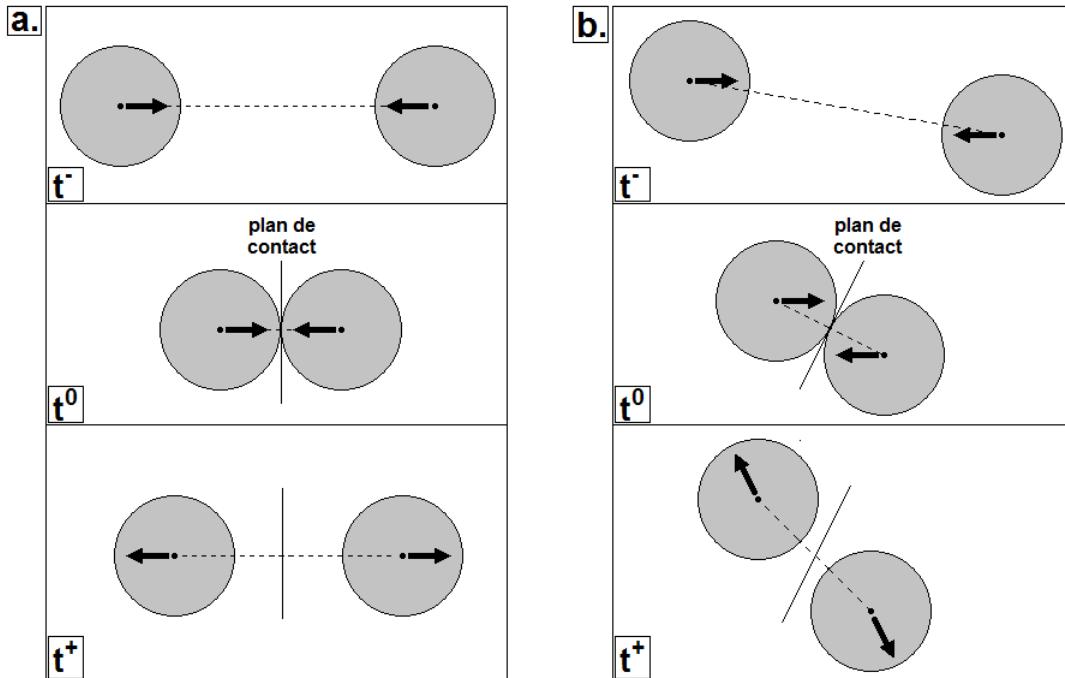


Fig. 3.13 : a. Vitesse relative colinéaire au vecteur reliant les centres des particules, et application directe de la relation (3.25) ; b. Vitesse relative non-alignée, application de la relation (3.25) pour les composantes normales au plan de contact, et composantes tangentielles non modifiées.

La variation d'énergie cinétique correspondant à la collision s'en déduit, par exemple dans le cas $m_1 = m_2 = m$:

$$E_r - E_i = -\frac{m}{4}(1 - e^2)(\overrightarrow{v_{i1}} - \overrightarrow{v_{i2}})^2 \quad (3.26)$$

Puisque le coefficient de restitution est toujours compris entre 0 et 1, la variation d'énergie au cours du choc est toujours négative : un choc est forcément dissipatif. On notera également que le cas $e = 1$ correspond à une conservation de l'énergie (choc élastique) et que le cas $e = 0$ correspond à une dissipation totale de l'énergie cinétique initiale (choc parfaitement inélastique). Dans les faits, le coefficient de restitution est une propriété des matériaux composant les solides en collision, comme par exemple $e \approx 0.5$ pour le bois et $e \approx 0.95$ pour l'acier.

2. Théorie cinétique des gaz granulaires

Plusieurs approches ont été proposées pour la mise en équation du comportement mécanique d'un gaz granulaire, mais le consensus n'est pas atteint et toutes ces approches reposent généralement sur des hypothèses assez restrictives. Elles permettent néanmoins d'affiner notre compréhension de certains phénomènes et de faire certaines prédictions. C'est le cas de l'approche de Haff, publiée en 1983, détaillée dans [7], et présentée succinctement ici.

On considère un ensemble de particules circulaires de diamètre homogène d et de densité ρ_p . Une hypothèse de base pour cette théorie cinétique est que les particules interagissent uniquement lors de collisions binaires (c'est-à-dire n'impliquant que deux particules à la fois) et instantanées. On se restreint également au cas dense, en supposant que la fraction solide F_s occupée par les billes est proche de la fraction volumique maximale F_{s0} . Pour décrire la densité du milieu granulaire, on peut faire référence à la distance moyenne interparticulaire s , définie par :

$$\frac{F_s}{F_{s0}} = \frac{1}{(1 + s/d)^3} \quad (3.27)$$

L'hypothèse de milieu dense en terme de distance interparticulaire signifie $s \ll d$, autrement dit le libre parcours moyen de chaque particule est beaucoup plus faible que son diamètre. Ceci permet de s'affranchir des effets de compressibilité du milieu (ce qui est contraire à la réalité, mais nécessaire pour une dérivation aisée des équations qui vont suivre), et on peut alors considérer que la fraction solide est constante et vaut $F_s = F_{s0}$. On s'intéresse donc à un gaz de particules proches les unes de autres qui s'agitent et se cognent dans la cage formée par leurs voisines.

Avec ces hypothèses, en utilisant le formalisme de Boltzmann, on peut écrire les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour ce matériau en fonction de grandeurs moyennes telles que la densité du milieu $\rho = \rho_p \cdot F_s$, le vecteur vitesse moyenne \vec{v} et la température granulaire T . Ces équations sont fermées à partir de loi de comportement reliant la pression, la viscosité, la conductivité (au sens de la température granulaire) et le taux de dissipations en fonction de la densité et de la température granulaire.

La différence essentielle avec un gaz moléculaire réside dans la dernière équation (conservation de l'énergie), qui indique que la variation d'énergie interne (énergie cinétique due au mouvement fluctuant) est due à l'équilibre de trois termes : le travail des forces visqueuses, le gradient de flux de chaleur (ici lié à la notion de température granulaire), et la perte d'énergie due aux collisions inélastiques (terme absent de la théorie cinétique des gaz classique). En conséquence, pour un gaz granulaire, la température résulte d'un équilibre entre dissipation due aux chocs et agitation induite par le cisaillement. Il doit donc y avoir suffisamment d'énergie injectée dans le système pour entretenir ce cisaillement à un niveau suffisant pour maintenir l'agitation.

3. Expérience de Bagnold

A partir de la théorie décrite dans la section précédente, on peut s'intéresser à des situations simples mais néanmoins instructives, telles que le cisaillement simple (Fig. 3.14). Dans cette configuration, un taux de cisaillement $\dot{\Gamma}$ constant est appliqué à un échantillon granulaire et le champ de vitesse est donc fixé. Il présente un profil linéaire et vaut :

$$\vec{v} = \dot{\Gamma} y \cdot \vec{e}_x \quad (3.28)$$

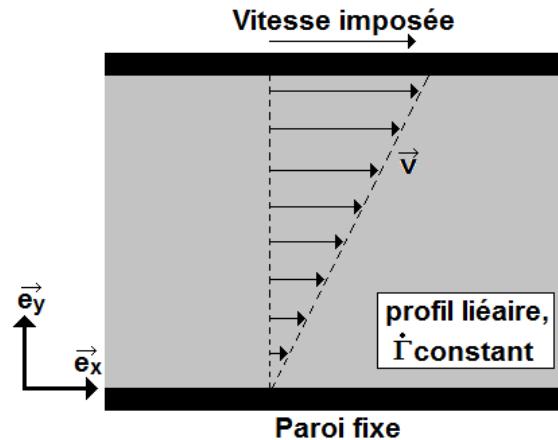


Fig. 3.14 : Ecoulement cisaillé à taux de cisaillement constant

On peut alors montrer que la température granulaire suit la loi suivante :

$$T \sim \frac{d^2}{1 - e^2} \dot{\Gamma}^2 \quad (3.29)$$

Dans cette expression, \sim signifie "proportionnel à". On peut également démontrer que la pression P est proportionnelle à T , et que la viscosité apparente est proportionnelle à \sqrt{T} . Cette configuration simple met en évidence le couplage entre la température granulaire et l'écoulement : plus on cisaille le milieu, plus la température d'équilibre est grande, et donc plus la pression et la viscosité sont grandes.

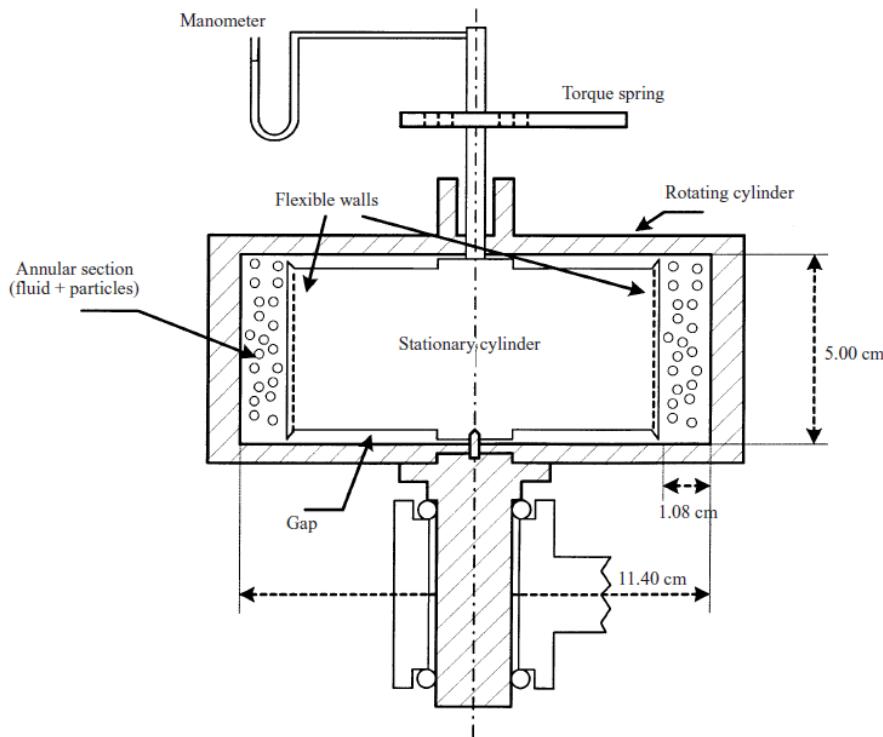


Fig. 3.15 : Rhéomètre de type Couette utilisé dans l'expérience de Bagnold

Avant que cette théorie n'existe, Bagnold avait déjà obtenu expérimentalement des résultats du même ordre, en réalisant en 1954 une expérience de rhéométrie granulaire. L'expérience consistait en une cellule de cisaillement de type Couette (cisaillement annulaire, Fig. 3.15). L'espace situé entre deux cylindres concentriques était rempli d'un milieu granulaire en suspension dans un fluide de même densité et de viscosité η_f (afin d'éviter la sédimentation et le dépôt des particules). Pour créer le cisaillement, le cylindre intérieur était maintenu fixe et le cylindre extérieur subissait une rotation imposée. Plusieurs capteurs de contraintes aux parois étaient mis en place pour mesurer les efforts normaux et tangentiels et en déduire pression et viscosité.

Les résultats expérimentaux de Bagnold montrent qu'à faible cisaillement le comportement est de type visqueux : ce sont les interactions hydrodynamiques qui dominent, les grains sont considérablement freinés par le fluide environnant, et on est dans la situation d'un écoulement dense comme décrit dans une section précédente, avec des contacts persistants entre les grains. Les mesures de pressions et de contraintes de cisaillement donnent alors :

$$P = \text{cste} \quad (3.30)$$

$$\tau \sim \eta_f \cdot \dot{\Gamma} \quad (3.31)$$

A fort cisaillement, les collisions entre grains deviennent prépondérantes et Bagnold trouve alors un régime collisionnel : les mesures de pression normale et de contrainte tangentielle donnent des résultats en accord avec la théorie cinétique :

$$P \sim \rho_p d^2 \cdot \dot{\Gamma}^2 \quad (3.32)$$

$$\tau \sim \rho_p d^2 \cdot \dot{\Gamma}^2 \quad (3.33)$$

La contribution de Bagnold a permis de caractériser la transition entre le régime visqueux (écoulement dense) et le régime collisionnel par l'intermédiaire d'un nombre adimensionnel, appelé de nos jours nombre de Bagnold :

$$B_a = \frac{\rho_p d^2 \cdot \Gamma}{\eta_f} \quad (3.34)$$

Ce nombre représente un rapport de force entre les contraintes collisionnelles et les contraintes visqueuses. La transition entre les deux régimes se situe aux alentours de $B_a = 40$.

4. Ségrégation sous vibrations

Lorsque l'on fait vibrer un milieu granulaire polydisperse, les gros grains se retrouvent à la surface libre. Ce phénomène est souvent appelé "phénomène des noix du Brésil", puisqu'il était couramment observé dans les camions transportant des fruits secs de leur lieu de production à leur lieu de vente par des camions circulant sur des routes de mauvaise qualité. La ségrégation par vibrations a donné lieu à de nombreuses expériences qui ont exhibé l'existence de plusieurs mécanismes pouvant expliquer la remontée des grosses particules.

Un premier mécanisme invoqué est la percolation des petites sous les grosses lors de la vibration : dans la phase de vol libre de la vibration (i.e. entre deux collisions), de petits grains peuvent s'infiltre sous les gros et ainsi les repousser vers le haut. Cette explication est proche de celle invoquée pour expliquer le même phénomène dans les écoulements denses cisaillés.

Un autre mécanisme a été mis en évidence, faisant intervenir des mouvements collectifs de convection dans le récipient vibré (Fig. 3.16). En effet, lorsqu'on fait vibrer un tel récipient rempli de grains, les effets de bord conduisent à la formation de rouleaux, et les grains ont tendance à remonter par le centre et redescendre par les bords. La zone de redescente est petite, de l'ordre de quelques diamètres de petits grains. Une grosse particule injectée dans le système est donc remontée par le centre du récipient, mais ne peut être réinjectée dans les fines couches de redescente et reste coincée à la surface. Les deux phénomènes sont présents lors de la vibration d'un milieu granulaire, ce qui rend l'interprétation des expériences délicate.

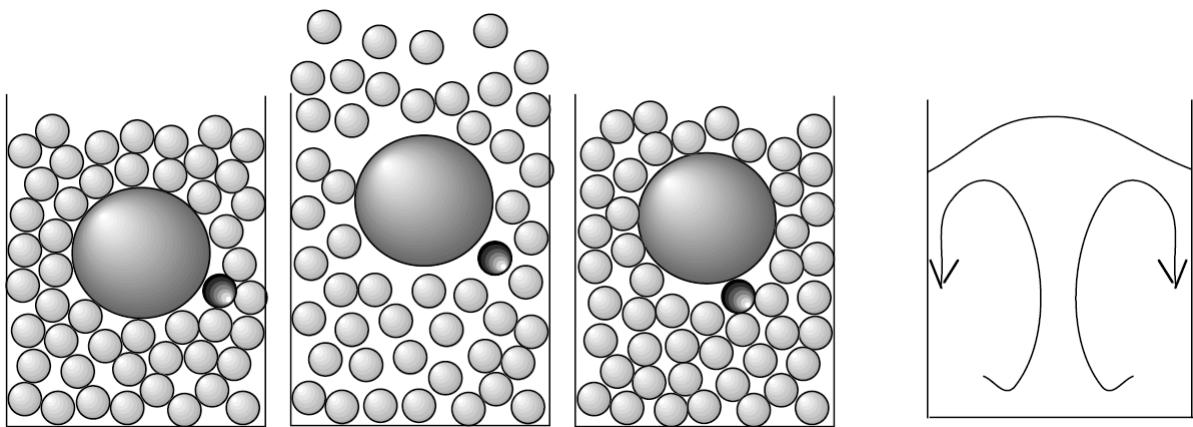


Fig. 3.16 : Mise en évidence de la ségrégation par vibrations dans un récipient

Chapitre 4 : Introduction à la modélisation discrète

A. Principes de la méthode

Dans les chapitres précédents, on a présenté un grand nombre de situations et de comportements différents impliquant des matériaux granulaires. Dans certaines situations, on a pu mettre en évidence certaines techniques de résolution fondées sur l'analogie avec un milieu continu : approche élastoplastique de Mohr-Coulomb pour la plasticité, approche hydrodynamique pour les écoulements denses, approche cinétique pour les écoulements collisionnels, etc. Dans chacune de ces situations, néanmoins, les approches continues se heurtent couramment à des difficultés lorsque leurs résultats sont confrontés avec les observations expérimentales.

Ces difficultés sont toujours liées, d'une manière ou d'une autre, à l'hypothèse de continuité du matériau granulaire, qui est absolument nécessaire pour une mise en équation sous la forme d'équations aux dérivées partielles (il n'y a pas de dérivabilité spatiale sans continuité des champs). On sait pourtant qu'un milieu granulaire est tout sauf continu, puisqu'il est constitué d'une grande quantité de corps (généralement) rigides, en interactions réciproques. Cette incohérence forcée a pour conséquence de limiter très fortement le champ d'application de chacune des méthodes proposées, en les faisant reposer sur des hypothèses très restrictives. En conséquence, les méthodes continues s'avèrent à la fois peu précises dans leur champs d'application restreint respectifs, et incapables de prendre en considération des changements de configuration au sein du système (passage d'un écoulement dense à un écoulement collisionnel, etc.).

Une alternative intéressante aux méthodes continues repose sur le concept de modèle discret. En un sens, la modélisation discrète (souvent abrégée DEM pour Discrete Element Modelling) est plus simple que la modélisation continue. Elle consiste en effet à revenir vers une conception plus intuitive du matériau granulaire, en s'intéressant aux comportements individuels des grains en interactions réciproques, considérés comme des solides rigides. Concrètement, dans le cadre de la modélisation discrète, on cherche à appliquer les équations de la dynamique à chaque grain composant le milieu granulaire, en essayant de reproduire au mieux les comportements dynamiques locaux existant au niveau de chaque interaction. Cette méthode se situe donc à la frontière entre la dynamique des solides et la mécanique des contacts, et ne repose généralement pas sur les concepts de la mécanique des milieux continus.

Historiquement, les principes de la modélisation discrète sont issus de l'article fondateur de P.A. Cundall et O.D.L. Strack (1979 [16]), qui appliquent cette méthode à des problématiques géomécaniques telles que la fracturation des massifs rocheux. A la même époque, une méthode assez proche appelée Dynamique Moléculaire (MD pour Molecular Dynamics) est déjà assez répandue chez les physiciens pour calculer des trajectoires de particules à l'échelle atomique, et cette approche sera étendue à des échelles plus macroscopiques et granulaires par Allen et Tildesley (1987 [17]). Une méthode alternative appelée NSCD (Non-Smooth Contact Dynamics) est proposée en 1992 par J.J. Moreau et M. Jean [18], fondée sur un formalisme mathématique rigoureux, et cette méthode connaît aujourd'hui un développement plus confidentiel malgré certains avantages.

Actuellement, l'approche DEM de Cundall et Strack reste la plus répandue dans le monde, et son usage tend à se généraliser dans les milieux académiques et industriels. Cette méthode, parfois appelée DEM-MD (bien que cette appellation prête souvent à discussion car il ne s'agit pas de molécules mais bien de solides), présente de nombreux avantages et un inconvénient majeur.

Premièrement, elle présente l'avantage d'être simple, car elle repose uniquement sur la résolution de l'équation du mouvement de Newton appliquée à chaque grain i :

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = \sum \vec{F}_i \quad (4.1)$$

Dans cette expression, m_i est la masse du grain i , \vec{x}_i est son vecteur position, et $\sum \vec{F}_i$ est la résultante des forces subies par ce grain (y compris les efforts à distance, tels que la gravité). Une équation analogue peut être écrite pour les degrés de liberté rotationnels.

La méthode DEM-MD est également flexible, car le contenu physique implémenté dans l'expression de la force \vec{F}_i (efforts normaux, efforts de frottement, cohésion, cimentation, lois multiphysiques, etc...) peut être très variable et laisse une grande liberté au modélisateur. Elle est générale, car elle permet dans un même cadre numérique de traiter une très grande variété de situations et de comportements, du quasi-statique au collisionnel violent. En dernier lieu, elle est également très instructive, car elle permet d'obtenir des informations cinématiques et dynamiques à l'échelle du grain (vitesses instantanées et efforts de contact, par exemple), qui restent largement inaccessibles à la mesure expérimentale. On assimile donc souvent une simulation discrète à une "expérimentation numérique", même s'il est important de garder à l'esprit les limites de l'analogie expérimentale.

Puisqu'il en faut un, la méthode DEM présente néanmoins un inconvénient majeur, lié à ses temps de calculs excessivement longs. Pour cette raison, elle est généralement appliquée à la simulation d'échantillons granulaires de taille limitée, et son application est souvent restreinte à un cadre académique. Néanmoins, l'amélioration constante des moyens de calcul et le développement d'algorithmes de calcul parallèle lui permettent aujourd'hui de se démocratiser de plus en plus dans l'industrie, dans un cadre réellement opérationnel.

B. Efforts de contact standards

Dans ce chapitre, on va passer en revue les différents types d'efforts intergranulaires que le modélisateur est susceptible d'introduire dans une modélisation DEM classique, contenant les ingrédients standards d'une loi de contact simple : des raideurs de contact dans les directions normale et tangentielle, un coefficient d'amortissement, et un coefficient de frottement. Par souci de simplicité, ces éléments de loi de contact seront présentés dans le cas où le milieu granulaire 2D est composé d'un ensemble de disques de différents diamètres. Son extension à un ensemble de sphères 3D présente quelques complications supplémentaires liées aux degrés de liberté en rotations (difficultés analogues à celles de la dynamique du solide en général). Le cas de particules non circulaires/sphériques sera abordé dans un chapitre ultérieur.

1. Raideur normale

On se place ici dans la situation où deux grains, notés i (de centre C_i et de rayon r_i) et j (de centre C_j et de rayon r_j), sont en contact en un point C . Les points C_i , C_j et C sont alignés, et cet alignement permet de définir une direction \vec{n} dite "normale au contact", et pointant par exemple de C_i vers C_j . Par ailleurs, la droite tangente aux deux cercles et passant par le point C est orthogonale à \vec{n} , et permet de définir la direction \vec{t} dite "tangentielle au contact" (par exemple telle que la base (\vec{n}, \vec{t}) soit orthonormée directe (Fig. 4.1). Avec ce repère, on peut exprimer toute force de contact appliquée par le grain i sur le grain j de la manière suivante :

$$\vec{F}_{ij} = F_n \vec{n} + F_t \vec{t} \quad (4.2)$$

Les composantes normale F_n et tangentielle F_t de l'effort de contact sont généralement calculées selon des procédures différentes, en fonctions de grandeurs cinématiques (positions et vitesses des deux grains) ou de paramètres multi-physics.

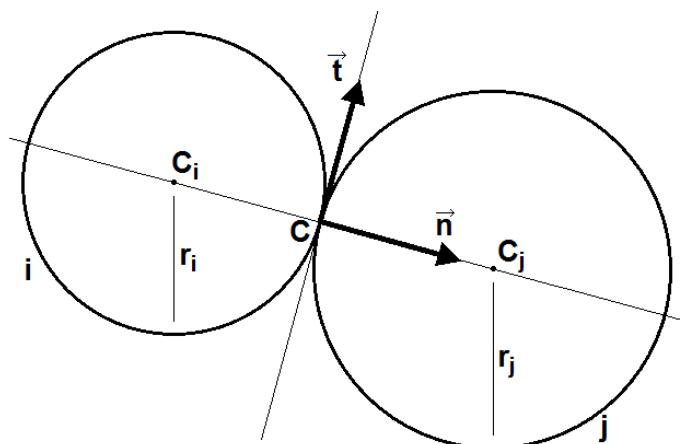


Fig. 4.1 : Repère local du contact

Dans le cas général du contact entre deux solides, les zones proches du contact sont soumises à des déformations (par exemple selon la théorie de Hertz), qui sont à l'origine des efforts de contact. Ces déformations restent en général négligeables devant la taille des solides en contacts. Dans le cadre de la méthode DEM-MD, elles sont prises en compte par un modèle très simplifié. On considère en effet que les grains restent rigides et indéformables mais qu'ils ont la possibilité de s'interpénétrer légèrement, et l'effort de contact est alors calculé à partir de cette interpénétration. Dans le cas général, il est souhaitable qu'elle reste aussi faible que possible. On obtient ce résultat en développant un effort répulsif entre les grains qui tend à s'opposer à l'interpénétration.

La situation idéale du paragraphe précédent (Fig. 4.1) est donc modélisée par la situation de la Fig. 4.2a (pour laquelle l'interpénétration est fortement exagérée). Dans cette figure, on voit apparaître la distance δ_n relative aux grains i et j , appelée distance de séparation ou d'interpénétration, et calculée comme suit :

$$\delta_n = \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| - r_i - r_j \quad (4.3)$$

Dans cette expression, \vec{x}_l et \vec{x}_j sont les vecteurs positions des centres des deux grains. Lorsque $\delta_n > 0$, les grains ne se touchent pas, et il n'y a pas d'effort de répulsion s'opposant à l'interpénétration. En revanche, lorsque $\delta_n < 0$, les grains s'interpénètrent, et un effort répulsif doit se développer. Le modèle le plus simple consiste à considérer que cet effort est proportionnel à l'interpénétration. On imagine alors un ressort linéaire se positionnant au contact, et on peut écrire :

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_n > 0 \\ -k_n \cdot \delta_n & \text{si } \delta_n < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

La constante du ressort k_n est appelée "raideur normale de contact". Dans la majorité des applications elle n'est pas reliée aux propriétés physiques des grains. Contrairement à une application stricte de la théorie de Hertz, on considère qu'il s'agit d'un paramètre numérique constant, qui doit être choisi par le modélisateur en fonction de ses objectifs, et qui doit être pris suffisamment élevé pour que l'interpénétration entre les grains reste limitée.

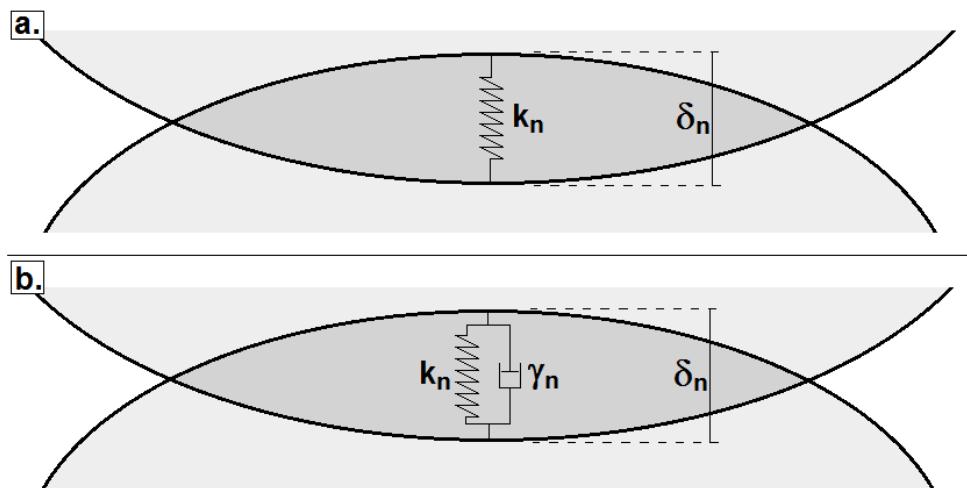


Fig. 4.2 : Loi de contact normale. a. Raideur normale de contact ; b. Raideur normale et amortissement visqueux

2. Amortissement visqueux

L'utilisation seule d'une pénalisation élastique du contact dans la direction normale (décrise dans la section précédente) ne peut prétendre à reproduire la réalité du comportement d'un milieu granulaire, car elle n'introduit aucune dissipation d'énergie. Or il est clair que l'une des caractéristiques principales d'un milieu granulaire est d'être fortement dissipatif à chacune des interactions entre les grains. Dans la mécanique analytique du solide, ce comportement est introduit par l'intermédiaire d'un coefficient de restitution, mais cette technique ne peut pas être utilisée dans le cadre d'une résolution explicite du contact car elle repose sur des chocs infiniment courts.

La manière la plus simple de modéliser cette dissipation en DEM explicite est d'introduire un amortissement visqueux en parallèle de la raideur normale de contact (Fig. 4.2b). Le coefficient d'amortissement est noté γ_n . Concrètement, ceci revient à appliquer une force proportionnelle à la vitesse normale relative des grains, et dans une direction opposée à cette

vitesse relative. Lors d'un choc simple, cette force sera donc répulsive pendant la phase de chargement (i.e. lorsque les grains s'interpénètrent mais sont en train de se rapprocher), et attractive pendant la phase de déchargement (i.e. lorsque les grains recommencent à s'éloigner). Cette force dissipe de l'énergie pendant toute la durée du contact. On remplace donc l'équation (4.4) par la formule suivante :

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_n > 0 \\ -k_n \cdot \delta_n - \gamma_n \cdot \frac{d\delta_n}{dt} & \text{si } \delta_n < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Il faut noter, néanmoins, que cette formulation présente l'inconvénient d'appliquer une force globalement attractive (en incluant à la fois le ressort et l'amortisseur) pendant une certaine phase du contact. En effet, à la toute fin du déchargement (lorsque les deux grains sont sur le point de se séparer), l'interpénétration est devenue très faible tandis que la vitesse d'éloignement est maximale. L'effort répulsif $-k_n \cdot \delta_n$ devient donc négligeable devant l'effort attractif $-\gamma_n \cdot \frac{d\delta_n}{dt}$, et les grains ont tendance à développer une force de contact globale qui restreint leur séparation. En l'absence de cohésion, cette force n'est pas physiquement réaliste. Pour résoudre cette difficulté, on peut par exemple décider d'écrêter l'effort de contact : on calcule une valeur de F_n à partir de l'équation (4.5), et on la remplace par zéro si elle est attractive.

On remarque que la formule (4.5) fait intervenir la grandeur $\frac{d\delta_n}{dt}$, qui n'a pas encore été exprimée. Il s'agit d'une grandeur purement locale (vitesse relative des grains projetée sur la direction normale \vec{n} , que l'on peut exprimer à partir de grandeurs globales de la manière suivante :

$$\frac{d\delta_n}{dt} = (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{n} \quad (4.6)$$

Dans cette expression, les termes \vec{v}_i et \vec{v}_j représentent les vecteurs vitesse des centres de masse des grains i et j dans le repère global, définis par :

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{x}_i}{dt} \quad (4.7)$$

D'une manière plus générale une équation du type de (4.6) est appelée un "mapping". Il s'agit d'une relation linéaire entre, d'une part des grandeurs globales relatives à la cinématique des particules et qui seront nécessaire à l'intégration des équations du mouvement (vitesses, positions, etc.), et d'autre part des grandeurs locales nécessaires au calcul des efforts de contact par application d'une loi de contact donnée (vitesses relatives, distance de séparation, etc.).

3. Raideur tangentielle

Les calculs de raideur proposés dans la direction normale sont rendus simples par l'existence de la formule (4.3), qui permet à tout moment de connaître l'état de compression du ressort normal en fonction des positions des particules. On sait notamment que le point d'équilibre du ressort correspond à des positions pour lesquelles les grains sont parfaitement tangents. Une

telle formule n'existe pas dans la direction tangentielle, ce qui complique les choses. On souhaite pourtant profiter de la souplesse de l'approche régularisée (i.e. faisant intervenir une raideur s'opposant à l'interpénétration) dans la direction tangentielle également. Pour cette raison, on imagine que, lors d'une interpénétration, un ressort est mis en place dans la direction tangentielle également, et vient développer un effort tangentiel qui s'ajoute aux efforts normaux des sections précédentes (Fig. 4.3). Par analogie avec la direction normale, on appelle δ_t l'allongement de ce ressort.

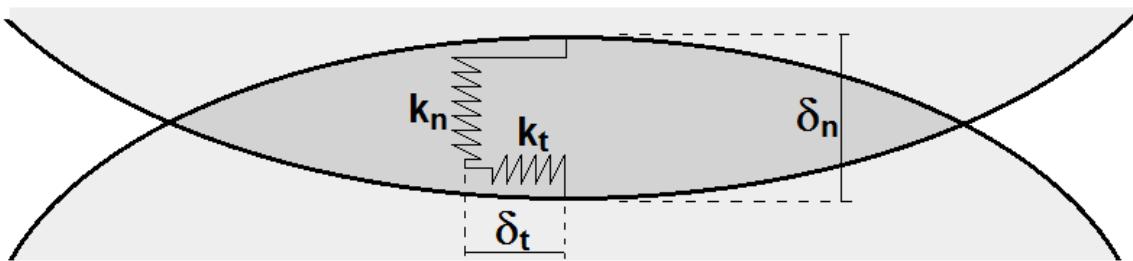


Fig. 4.3 : Raideur tangentielle de contact

A un instant donné et pour une position donnée des particules en interpénétration, il est impossible de déterminer la valeur de δ_t , car on ne sait pas par quel chemin les particules sont arrivées dans cette configuration : ce pourrait être par une trajectoire purement normale (dans ce cas on aurait $\delta_t = 0$) ou avec une certaine quantité de mouvement tangentiel (dans ce cas on aurait $\delta_t \neq 0$ mais inconnu). On doit donc avoir recours à l'histoire du chargement, et non plus uniquement à la configuration instantanée du système. En supposant pour l'instant que les grains ne peuvent pas tourner, il faut donc passer par l'équation suivante, analogue à (4.6)

$$\frac{d\delta_t}{dt} = (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{t} \quad (4.8)$$

Par cette formule, on est capable de calculer δ_t par intégration temporelle des cinématiques des deux grains (\vec{v}_i et \vec{v}_j), c'est-à-dire de prendre en compte l'historique de chargement, pourvu que l'on ait défini une condition initiale à cette intégration. Celle-ci est triviale : on considère que $\delta_t = 0$ à l'instant où les grains entrent exactement en contact. En d'autres termes, le ressort tangentiel est à l'état d'équilibre au moment où les grains commencent à s'interpénétrer, et son allongement δ_t est intégré dans le temps en fonction des mouvements tangentiels relatifs des grains. On peut alors mettre en place un effort de contact tangentiel :

$$F_t = -k_t \cdot \delta_t \quad (4.9)$$

Cette formule fait intervenir une raideur tangentielle de contact k_t , qui est un paramètre numérique de régularisation au même titre que k_n . Si nécessaire, on peut également lui adjoindre un amortissement visqueux tangentiel γ_t .

4. Frottement et glissement

Comme dans tout contact entre deux solides, on est amené à intégrer à la loi tangentielle la notion de frottement. Celle-ci spécifie une limite supérieure à la norme de l'effort tangentiel, choisie comme proportionnelle à la valeur de l'effort normal. On définit donc un coefficient de frottement de contact μ , et on borne la force tangentielle de la manière suivante :

$$|F_t| \leq \mu \cdot F_n \quad (4.10)$$

Pour imposer cette condition, on procède d'une manière analogue à celle utilisée pour l'effort normal : une force tangentielle candidate est d'abord calculée à partir de la formule (4.9) (ce qui suppose une intégration préalable de $d\delta_t/dt$ pour accéder à δ_t), puis sa valeur absolue est comparée à la borne supérieure $\mu \cdot F_n$ (ce qui suppose d'avoir au préalable calculé F_n) :

$$F_t = \begin{cases} -k_t \cdot \delta_t & \text{si } |-k_t \cdot \delta_t| \leq \mu \cdot F_n \\ \text{sign}(-k_t \cdot \delta_t) \cdot \mu \cdot F_n & \text{si } |-k_t \cdot \delta_t| > \mu \cdot F_n \end{cases} \quad (4.11)$$

Dans le cas où $|-k_t \cdot \delta_t| > \mu \cdot F_n$, le contact passe du mode "adhérence" au mode "glissement". Dans le premier cas, l'effort de rappel tangentiel était entièrement associé à l'extension du ressort tangentiel. Dans le deuxième cas, il est borné par la notion de frottement, et les particules glissent sans conserver la mémoire de leur état de contact adhérent initial. Le ressort tangentiel ne s'allonge plus, sinon son surcroît d'extension augmenterait l'effort tangentiel au delà de la valeur seuil, par application de la formule (4.9). Par conséquent, lors du glissement, on décale progressivement la position d'équilibre du ressort tangentiel, en fixant :

$$\delta_t = \pm \mu F_n / k_t \quad (4.12)$$

La loi de contact finale prend l'allure du modèle rhéologique présenté en Fig. 4.4.

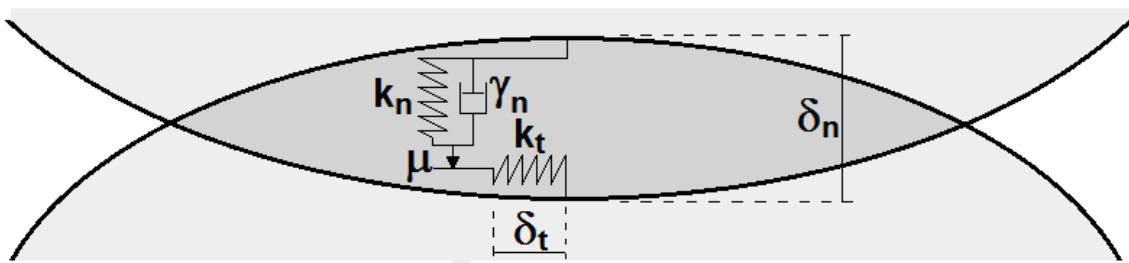


Fig. 4.4 : Loi de contact standard complète

On a donc entièrement défini la loi de contact standard de la DEM explicite. Celle-ci comprend deux paramètres numériques de régularisation (les raideurs normale et tangentielle), et deux paramètres plus physiques liés à des modes de dissipation d'énergie dans les directions normale (amortissement visqueux) et tangentielle (coefficient de frottement). Localement, les conditions de contact sont pilotées par la distance d'interpénétration δ_n et l'allongement du ressort tangentiel δ_t .

Jusqu'à présent, on a fait l'hypothèse simplificatrice que les grains ne pouvaient pas subir de rotation. Il faut lever cette hypothèse pour prendre en compte un comportement réaliste des matériaux granulaires, pour lesquels la notion de roulement est primordiale. On peut en effet très bien avoir un déplacement relatif des grains en contact tout en conservant localement la condition $d\delta_t/dt = 0$, si on respecte les conditions du roulement sans glissement. Dans ce cas, la vitesse relative tangentielle est nulle et le ressort tangentiel ne se charge pas.

Dans le cas général, on doit donc faire usage des vitesses angulaires des grains, notées $\vec{\omega}_i$ et $\vec{\omega}_j$. Par simplicité, on peut supposer que les grains se touchent en un point unique noté C (en reprenant donc la schématisation de la Fig. 4.1). La vitesse tangentielle relative des particules au niveau de leur point de contact C est alors donnée par :

$$\frac{d\delta_t}{dt} = (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{t} - (r_i \cdot \vec{\omega}_i + r_j \cdot \vec{\omega}_j) \wedge \vec{n} \quad (4.13)$$

Cette expression vient enrichir l'équation (4.8) en tenant compte de la rotation des grains. Pour traiter d'une manière dynamique ces rotations, il est nécessaire de définir les couples appliqués aux particules par les composantes tangentielles des efforts de contact. Pour la particule i , le couple appliqué par le contact avec la particule j sera par exemple noté $\vec{\tau}_i$, et donné par :

$$\vec{\tau}_i = -(r_i \cdot \vec{n}) \wedge (F_t \cdot \vec{t}) \quad (4.14)$$

La rotation de la particule et le couple total $\sum \vec{\tau}_i$ qu'elle subit sur l'ensemble de ses contacts sont ensuite reliés par une équation de la dynamique analogue à la formule (4.1), faisant apparaître l'inertie I_i de la particule :

$$I_i \cdot \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} = \sum \vec{\tau}_i \quad (4.15)$$

Il faut noter que les équations (4.13) et (4.14) reposent sur l'hypothèse que les grains se touchent en un point unique, ce qui est inexact dans le cadre de la DEM explicite puisqu'on y autorise de petites interpénétrations. Il en résulte souvent une légère déviation des résultats simulés par rapport à la conservation de la quantité de mouvement. Selon la précision souhaitée, on peut négliger ces erreurs (en s'assurant que la raideur normale est suffisamment importante pour garantir une interpénétration minime et limiter l'amplitude de la déviation), ou les corriger avec des termes additionnels appropriés (voir référence [19]).

5. Résistance au roulement

La possibilité d'un roulement sans glissement a été évoquée dans la section précédente. Dans la dynamique des solides classique, cette situation correspond à un cas limite de contact parfait pour lequel aucune énergie n'est dissipée. Dans le cadre de la mécanique granulaire, en revanche, il est souvent utile de remettre en cause cette perfection, en considérant que deux grains ne sont pas entièrement libres de rouler l'un sur l'autre sans dissiper d'énergie. On introduit donc parfois une résistance au roulement, sous la forme de couples résistants appliqués à des grains en roulement relatif. Ceci peut servir à représenter une rugosité de surface de particules circulaires, ou même à intégrer dans la modélisation la non-circularité

des grains réels (qui s'oppose naturellement au roulement). Une telle approche amène souvent des résultats quantitatifs plus proches du comportement réel des matériaux granulaires complexes, tels que le sable par exemple. Dans d'autres situations (écoulement collisionnel, par exemple), cet ingrédient est superflu.

Plusieurs approches existent pour introduire la résistance au roulement. Il est d'abord nécessaire de définir la notion de vitesse de roulement relatif des grains \vec{v}_r de manière objective (i.e. indépendamment de l'observateur). Un exemple d'une telle formule est donné par l'équation (4.16) :

$$\vec{v}_r = \frac{r_i r_j}{r_i + r_j} (\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j) \quad (4.16)$$

La méthode la plus simple pour introduire une résistance au roulement est alors d'appliquer aux grains en contact des couples proportionnels à la vitesse de roulement \vec{v}_r et de signes opposés, ce qui est analogue à la notion d'amortissement visqueux défini pour la force normale. On définit donc l'amortissement de roulement δ_r , et on calcul le couple résistant $\vec{\tau}_r$:

$$\vec{\tau}_r = -\delta_r \cdot \vec{v}_r \quad (4.17)$$

Ce couple devra ensuite être ajouté aux autres couples de contact dans l'équation de la dynamique (4.15). Une autre approche consisterait à définir un seuil μ_r analogue au coefficient de frottement, mais adaptée à la résistance au roulement. Ceci nécessiterait, de la même manière que pour l'effort tangentiel, l'utilisation d'un paramètre de régulation k_r comparable à une raideur de torsion positionnée au point de contact.

C. Résolution numérique

1. Schéma de résolution explicite

La résolution numérique d'un problème de simulation discrète dans un cadre explicite repose sur l'intégration temporelle d'un système composé d'un certain nombre d'équations différentielles ordinaires, constituées des formules (4.1) et (4.15) appliquées à chaque particule. Plusieurs schémas de résolution sont disponibles dans la littérature scientifique afin de traiter ce genre de problème numérique. On peut citer par exemple le schéma de Newmark explicite (utilisé notamment en dynamique des structures) ou le schéma prédicteur-correcteur de Gear (utilisé en dynamique moléculaire traditionnelle).

Néanmoins, ces schémas nécessitent souvent de travailler avec des grandeurs suffisamment dérivables, ce qui n'est pas nécessairement le cas en DEM. C'est pour cette raison qu'on a le plus souvent recours au schéma d'intégration de Verlet, aussi appelé "leapfrog" (saut-mouton). Celui-ci consiste à partir d'un état initial à $t = 0$ pour lequel toutes les positions \vec{x}_i et les vitesses \vec{v}_i sont connues, à définir un pas de temps Δt , et à progresser de proche en proche en linéarisant les équations du mouvement. Toutes les variables de position et d'accélération seront calculées à des instants correspondant à des valeurs entières du pas de temps (i.e. $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t$, etc.) et les variables de vitesse seront calculées à des demi-valeurs du pas de temps (i.e. $t = \Delta t/2, 3\Delta t/2, 5\Delta t/2$, etc.).

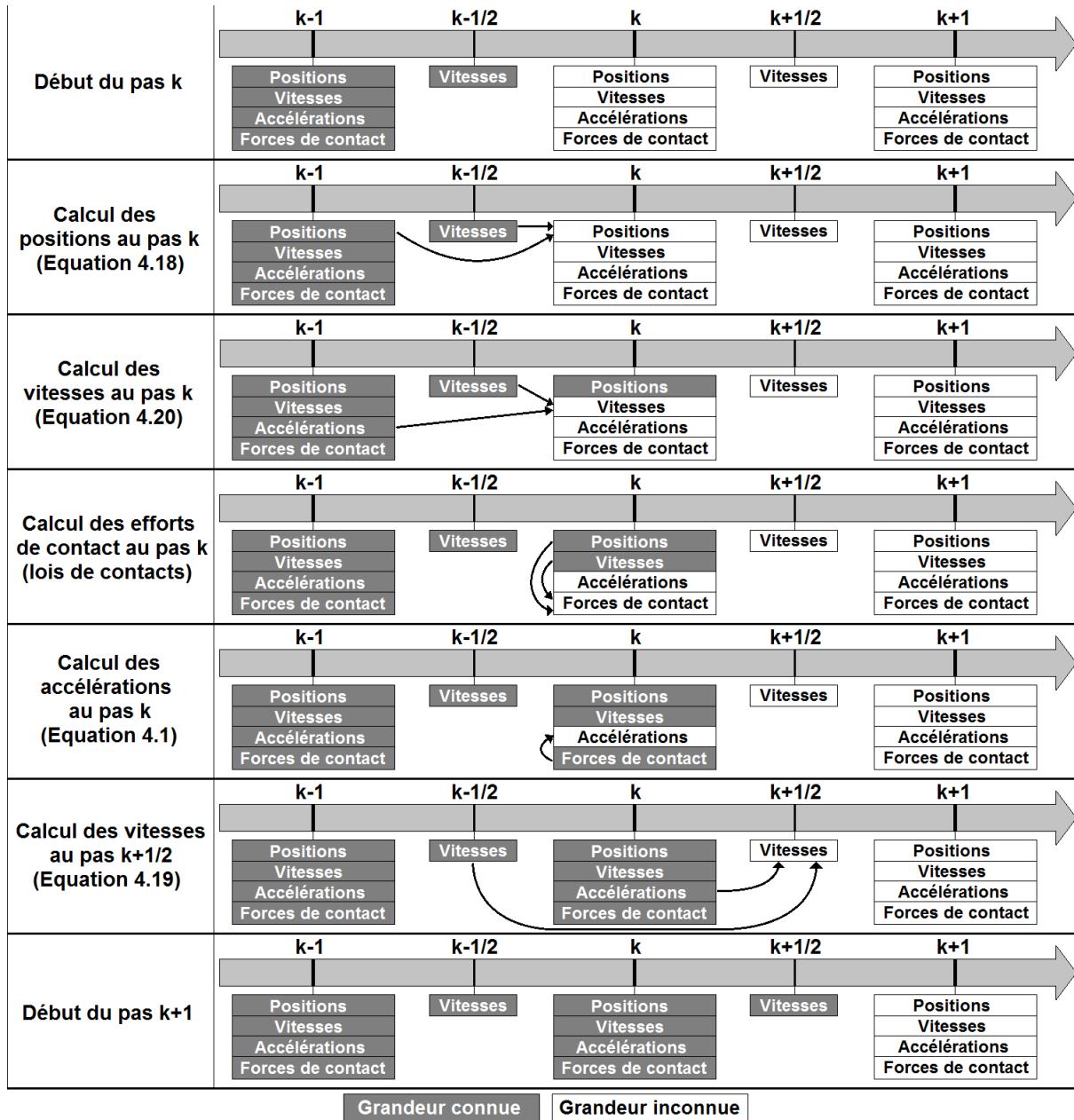


Fig. 4.5 : Schéma d'intégration temporelle de Verlet

Dans la suite, on notera \vec{x}_k et \vec{a}_k la position et l'accélération du centre de masse d'une particule à l'instant $t = k\Delta t$, et $\vec{v}_{k+1/2}$ sa vitesse à l'instant $t = (k + 1/2)\Delta t$. Les degrés de liberté rotationnels sont traités comme les translationnels, bien qu'ils ne soient pas détaillés ici pour des raisons de clarté. Le déroulement des calculs s'effectue par linéarisation locale du mouvement, en utilisant les relations suivantes :

$$\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} + \vec{v}_{k-1/2} \cdot \Delta t \quad (4.18)$$

$$\vec{v}_{k+1/2} = \vec{v}_{k-1/2} + \vec{a}_k \cdot \Delta t \quad (4.19)$$

Il apparaît clairement que chaque grandeur est calculée à partir de grandeurs qui la précédent strictement dans le temps, ce qui est la définition d'un schéma explicite. On constate également que l'équation (4.19) fait intervenir l'accélération à l'instant $t = k\Delta t$. Celle-ci s'obtient à partir du principe fondamental de la dynamique (4.1), et fait donc intervenir les forces appliquées à chaque grain au même instant. Ces forces sont calculées en utilisant les équations décrivant le loi de contact, en fonction notamment de \vec{x}_k et \vec{v}_k . Lorsque l'équation (4.19) est utilisée, la position \vec{x}_k est connue, mais ce n'est pas le cas de \vec{v}_k (en effet, seule $\overrightarrow{v_{k-1/2}}$ est connue). Avant de calculer les efforts de contact et d'appliquer (4.19), on a donc recours, sur un demi-pas de temps, à la formule suivante :

$$\vec{v}_k = \overrightarrow{v_{k-1/2}} + \overrightarrow{a_{k-1}} \cdot \Delta t / 2 \quad (4.20)$$

Le schéma, présenté de cette façon, fournit une estimation de la nouvelle position des particules \vec{x}_k à partir des anciennes positions \vec{x}_{k-1} , avec une précision de l'ordre de $O(\Delta t^4)$. L'ensemble de ces étapes est résumé dans la Fig. 4.5.

2. Algorithme général

Le schéma de résolution numérique de Verlet est utilisé au sein d'un algorithme plus complexe permettant de commander l'ensemble de la simulation. Dans sa version la plus simple, cet algorithme est composé des étapes suivantes :

1. Définition de l'état initial : \vec{x}_0 et $\overrightarrow{v_{1/2}}$ pour chaque particule composant l'échantillon
2. Définition de la valeur du pas de temps : Δt
3. Définition de la durée souhaitée de la simulation : $k_{fin} = t_{fin}/\Delta t$
4. Initialisation du temps : $k = 0$
5. Tant que $k < k_{fin}$, boucle principale :
 6. Avancée dans le temps : $k = k + 1$
 7. Boucle sur tous les grains i :
 8. Calcul de la nouvelle position \vec{x}_k du grain i par la formule (4.18)
 9. Calcul de la vitesse \vec{v}_k du grain i par la formule (4.20)
 10. Mise à jour de l'allongement δ_t des ressorts tangentiels par intégration de (4.8)
 11. Fin de la boucle sur i
 12. Boucle sur tous les grains i
 13. Initialisation des résultantes d'efforts sur le grain i : $\vec{F}_i = \vec{0}$
 14. Application des efforts à distance (par exemple la pesanteur) : $\vec{F}_i = \overrightarrow{F_{dist}}$
 15. Boucle sur tous les grains j
 16. En cas de contact entre i et j , calcul de l'effort de contact \vec{F}_{ij}
 17. Mise à jour de la résultante des forces sur i : $\vec{F}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{ij}$
 18. Fin de la boucle sur j
 19. Calcul de l'accélération \vec{a}_k du grain i à partir de l'équation (4.1)
 20. Calcul de la vitesse de demi-pas de temps $\overrightarrow{v_{k+1/2}}$ à partir de l'équation (4.19)
 21. Fin de la boucle sur i
 22. Sauvegarde, Tracé, Monitoring, etc.
 23. Fin de la boucle principale

On constate immédiatement que cet algorithme est composé pour partie de trois boucles imbriquées : une boucle temporelle principale permettant l'intégration selon le schéma de Verlet, et une double boucle permettant de tester toutes les paires de grains pour détecter d'éventuels contacts et calculer les efforts associés. La boucle principale est inévitable, mais la double boucle est problématique : on conçoit en effet qu'une telle structure algorithmique est très couteuse sur un plan calculatoire, puisqu'elle implique n_{grains}^2 détections de contact, où n_{grains} est le nombre de particules de la simulation. On parle d'un coût en n^2 à chaque pas de temps.

Pourtant, beaucoup des calculs effectués lors de cette double boucle sont inutiles, car deux grains détectés comme très éloignés à un pas de temps donné n'ont aucune chance d'être en contact au pas suivant. Il est donc inutile de tester à nouveau leur contact pendant un certain laps de temps, qui dépend de la situation simulée. On est donc amené à définir la notion de liste de voisinage. Une telle liste est définie pour chaque grain i , et contient la liste des quelques grains j situés à proximité et susceptibles d'entrer en contact avec i . Bien entendu, cette liste doit être mise à jour périodiquement. L'algorithme précédent est donc remplacé par le suivant :

1. Définition de l'état initial : \vec{x}_0 et $\vec{v}_{1/2}$ pour chaque particule composant l'échantillon
2. Définition de la valeur du pas de temps : Δt
3. Définition de la durée souhaitée de la simulation : $k_{fin} = t_{fin}/\Delta t$
4. Définition de la période n_v de mise à jour des listes de voisinage
5. Initialisation du temps : $k = 0$
6. Tant que $k < k_{fin}$, boucle principale :
7. Avancée dans le temps : $k = k + 1$
8. Boucle sur tous les grains i :
 9. Calcul de la nouvelle position \vec{x}_k du grain i par la formule (4.18)
 10. Calcul de la vitesse \vec{v}_k du grain i par la formule (4.20)
 11. Mise à jour de l'allongement δ_t des ressorts tangentiels par intégration de (4.8)
12. Fin de la boucle sur i
13. Boucle sur tous les grains i
 14. Si k est un multiple de n_v
 15. Mise à jour de la liste de voisinage du grain i
 16. Fin du test sur k
 17. Initialisation des résultantes d'efforts sur le grain i : $\vec{F}_i = \vec{0}$
 18. Application des efforts à distance (par exemple la pesanteur) : $\vec{F}_i = \vec{F}_{dist}$
 19. Boucle sur tous les grains j appartenant à la liste de voisinage de i
 20. En cas de contact entre i et j , calcul de l'effort de contact \vec{F}_{ij}
 21. Mise à jour de la résultante des forces sur i : $\vec{F}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{ij}$
 22. Fin de la boucle sur j
 23. Calcul de l'accélération \vec{a}_k du grain i à partir de l'équation (4.1)
 24. Calcul de la vitesse de demi-pas de temps $\vec{v}_{k+1/2}$ à partir de l'équation (4.19)
25. Fin de la boucle sur i
26. Sauvegarde, Tracé, Monitoring, etc.
27. Fin de la boucle principale

Dans cette version de l'algorithme, la détection de contact est effectuée $n_{grains} \cdot n_{voisins}$ fois, où $n_{voisins}$ est le nombre moyen d'élément dans une liste de voisinage, qui est une grandeur peu variable. On passe donc à une complexité calculatoire en n à chaque pas de temps au lieu de n^2 , ce qui présente un gain de temps considérable pour des échantillons granulaires importants. Une simulation contenant quelques milliers de grains réalisée avec cet algorithme peut aujourd'hui être lancée sans difficulté sur un ordinateur du commerce. Les simulations les plus lourdes à l'heure actuelle tournent sur des machines massivement parallèles, et peuvent contenir plusieurs centaines de milliers de grains.

3. Détermination des paramètres numériques

Avant l'exécution de l'algorithme principal, quelques paramètres numériques doivent être déterminés. En particulier, on doit définir la valeur des raideurs de contact normale et tangentielle, puis définir le pas de temps utilisé dans le schéma de résolution explicite.

La raideur normale k_n doit être choisie de manière à garantir que les distances d'interpénétration restent faibles devant les diamètres de particules. Pour des raisons qui apparaîtront clairement dans la suite, on souhaite également que cette raideur ne soit pas trop importante. Il ne suffit donc pas de lui donner une valeur déraisonnablement grande afin de minimiser l'interpénétration, mais de trouver la valeur de k_n la plus petite possible conduisant néanmoins à des interpénétrations acceptables.

Une méthode consiste à déterminer *a priori* un effort normal N_c de contact caractéristique de la configuration simulée. Dans le cas d'un système quasi-statique ou d'écoulement dense piloté par la gravité (tassement d'un sol, etc.), on peut par exemple utiliser comme effort caractéristique le poids d'une quantité donnée de particules susceptibles de former une chaîne de force concentrée sur un seul contact. Si m_{moy} est la masse moyenne d'un grain, on prendra alors par exemple :

$$N_c = n \cdot g \cdot m_{moy} \quad (4.21)$$

On prendra par exemple $n = 100$. Dans une configuration quasi-statique ou d'écoulement dense soumise à un effort contrôlé (essai triaxial, etc.), la valeur de N_c sera choisie comme l'effort normal caractéristique appliqué à un contact au sein d'une chaîne de force. L'interpénétration caractéristique s'exprime alors par :

$$\delta_c = -N_c/k_n \quad (4.22)$$

On choisira alors la raideur normale de contact permettant de limiter l'interpénétration caractéristique à une certaine fraction f du diamètre D_{min} de la plus petite particule :

$$\delta_c/D_{min} = f \quad (4.23)$$

On pourra utiliser par exemple des fractions maximales de l'ordre de $f = 0.01$ ou $f = 0.001$ (soit une interpénétration caractéristique de l'ordre du centième ou du millième du plus petit diamètre).

Dans une situation collisionnelle (écoulement rapide ou milieu granulaire vibré), on ne peut pas raisonner en effort normal caractéristique N_c puisque les contacts s'effectuent sous forme de chocs très courts, et on utilisera plutôt la vitesse incidente caractéristique V_c lors de ces chocs. L'interpénétration caractéristique s'obtient alors en égalisant l'énergie cinétique de choc et l'énergie potentielle élastique stockée dans la raideur normale :

$$\frac{1}{2}m_{moy}V_c^2 = \frac{1}{2}k_n\delta_c^2 \quad (4.24)$$

L'application de la formule (4.23) permet alors d'obtenir une valeur satisfaisante de k_n . La raideur tangentielle k_t a, dans la majorité des cas, une influence négligeable sur le comportement du système, et sa valeur peut être prise entre $k_n/2$ et k_n par exemple. Il est important de garder à l'esprit que le choix correct de paramètres tels que N_c , V_c et f n'est absolument pas univoque, et relève largement de l'art du modélisateur. Les méthodes proposées ici sont donc largement heuristiques.

Le choix d'une valeur de la raideur normale de contact permet ensuite d'accéder à la notion de pas de temps critique. Compte tenu des modèles rhéologiques présentés dans les figures 4.2 à 4.4, un système granulaire dense modélisé en DEM peut être assimilé à un réseau d'oscillateurs masse-ressort-amortisseur interconnectés aux contacts. Il est donc systématiquement sujet à des phénomènes oscillatoires à toutes les échelles du système (bien que ces oscillations soient souvent limitées par les amortisseurs visqueux mis en place aux contacts).

L'exemple de système oscillant le plus simple et le plus critique est présenté sur la Fig. 4.6. Il s'agit de la configuration de la simple particule pesante en contact avec un plan horizontal, mais ne se trouvant pas en situation d'équilibre vis-à-vis des efforts verticaux (vitesse verticale non-nulle et/ou position différente de celle correspondant à l'équilibre du ressort). C'est le schéma classique d'un oscillateur de Kelvin-Voigt, qui obéit ici à l'équation différentielle suivante :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg - k_n\delta_n - \gamma_n \frac{d\delta_n}{dt} \quad (4.25)$$

Dans cette expression (qui correspond à l'équation de la dynamique projetée sur la direction verticale), le paramètre de position x et la distance d'interpénétration δ_n sont liés par :

$$\delta_n = x - r \quad (4.26)$$

Si on note $x_0 = r - mg/k_n$ la position d'équilibre du ressort, l'équation (4.25) peut se réécrire :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_n(x - x_0) - \gamma_n \frac{dx}{dt} \quad (4.27)$$

Le grain de masse m subit donc une oscillation amortie autour de la position x_0 , dont l'expression est donnée par :

$$x(t) = x_0 + A \cdot e^{s_0 t} \quad (4.28)$$

Dans cette expression, A représente l'amplitude de l'oscillation (qui dépend des conditions initiales), et $s_0 = -\mu_0 \pm \sqrt{\mu_0^2 - \omega_0^2}$. Le système contient donc deux échelles de temps différentes, liées respectivement à la raideur et à l'amortissement, avec pour fréquences caractéristiques :

$$\omega_0 = \sqrt{k_n/m} \quad (4.29)$$

$$\mu_0 = \gamma_n/2m \quad (4.30)$$

Selon les valeurs de k_n , γ_n , et m , on peut donc avoir plusieurs types de comportement. Si $\mu_0 \gg \omega_0$, l'amortissement domine et le système n'oscille pas, il tend asymptotiquement vers son équilibre. En revanche, si $\mu_0 \ll \omega_0$, l'amortissement n'est pas notable à l'échelle d'une oscillation, et le système est en oscillation quasi-libre avec une période égale à $2\pi/\omega_0$.

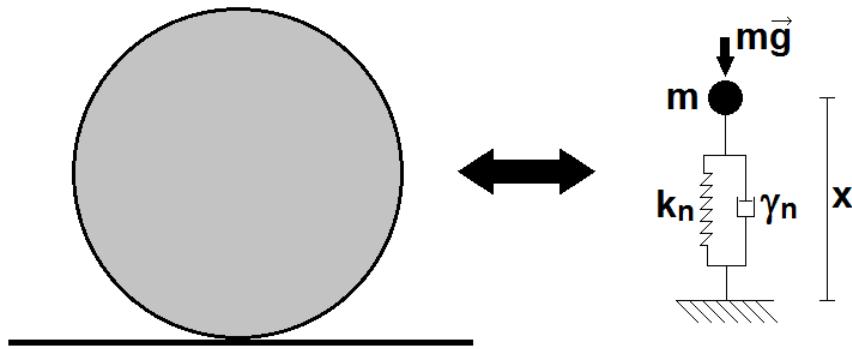


Fig. 4.6 : Equivalent dynamique d'un disque posé sur un plan

L'algorithme d'intégration temporelle doit être capable de résoudre ces petits mouvements rapides avec exactitude, et la durée du pas de temps du schéma de Verlet doit donc être choisie en relation avec ce mouvement oscillatoire. On utilise généralement la règle suivante :

$$\Delta t = \varepsilon / \omega_{max} = \varepsilon \cdot \sqrt{m_{min}/k_n} \quad (4.31)$$

Des valeurs de ε proches de 1/50 sont couramment utilisées, ce qui signifie que le pas de temps critique Δt est choisi de manière à permettre de discréteriser en 50 étapes successives une période de l'oscillateur le plus rapide du système (correspondant généralement à la particule de plus faible masse).

Il apparaît ici clairement que, comme évoqué précédemment, il serait imprudent de choisir une raideur normale trop élevée. Certes, celle-ci permettrait de limiter les interpénétrations, mais elle conduirait à un pas de temps critique beaucoup plus faible (car un oscillateur plus raide oscille plus vite), ce qui se traduirait par des coûts calculatoires très importants. On est donc souvent amené à faire un compromis entre la précision (k_n élevé) et le coût calculatoire (k_n faible) d'une simulation, de la même manière que dans la définition d'un maillage EF.

D. Techniques de modélisation

1. Détections de voisinage

Dans l'algorithme général de résolution explicite d'un problème discret, l'étape 15 est susceptible de représenter une part importante du coût calculatoire de la simulation. Il s'agit de la génération d'une liste de voisinage pour chaque particule. Cette opération repose donc sur une étape de détection de voisinage, qui permet de déterminer, pour deux particules i et j , s'il est probable qu'elles entrent en contact dans un avenir proche. La notion d'avenir proche étant très vague, on conçoit immédiatement que toutes les méthodes de détection du voisinage reposent sur des paramètres arbitraires, choisis par le modélisateur, permettant d'ajuster le compromis entre le coût de calcul et l'assurance de ne manquer aucun contact. En pratique, cette détection peut être effectuée selon un grand nombre de méthodes. Celles-ci sont issues d'un champ disciplinaire émergent qui sort très largement du cadre des milieux granulaires, appelé "géométrie computationnelle". Elles sont couramment utilisées dans les industries de l'infographie et du jeu vidéo, par exemple, ou encore en robotique. On ne décrit ici sommairement que les méthodes les plus répandues, dans le cas de particules circulaires/sphériques.

-Méthode directe

Elle consiste simplement à effectuer une double boucle sur tous les couples possibles de particules, et à sélectionner comme susceptibles de rentrer en contact toutes les paires de particules dont la distance δ_n est inférieure à une distance δ_{voisin} choisie par le modélisateur (Fig. 4.7). On pourra prendre par exemple $\delta_{voisin} \cong D_{max}$, où D_{max} est le diamètre de la plus grosse particule du système. La méthode directe présente l'intérêt d'être très simple à coder, mais elle est relativement coûteuse en temps de calcul.

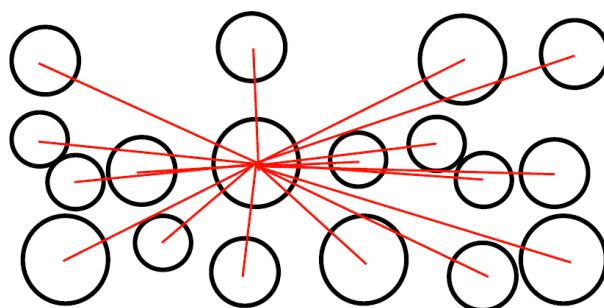


Fig. 4.7 : Méthode de détection directe

-Méthode de partition du conteneur

Cette méthode consiste à subdiviser l'ensemble du système selon une grille fixe (en deux ou trois dimensions selon le problème), avec un pas d'espace c donné (Fig. 4.8). Chaque particule a donc son centre qui appartient à une "case", de surface c^2 (respectivement de volume c^3), et l'identité de cette case est assez facile à déterminer à partir des coordonnées du centre en question. Ensuite, pour une particule donnée, la liste de voisinage est composée de toutes les particules dont le centre appartient à la même case et à ses cases voisines (au nombre de 8 en

2D et de 26 en 3D). La longueur du côté de case peut être prise par exemple comme $c \approx D_{max}$. Cette méthode est très performante, excepté pour des matériaux fortement polydisperses pour lesquels elle a tendance à former des listes de voisinage trop longues. La méthode peut également devenir très coûteuse si les particules sont très dispersées dans l'espace. Elle reste néanmoins la méthode de détection de voisinage la plus répandue.

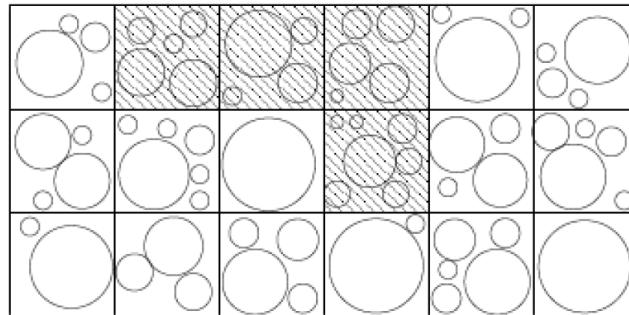


Fig. 4.8 : Méthode de partition du conteneur

-Méthode de triangulation

Cette méthode repose sur un outil mathématique très répandu, appelé triangulation de Delaunay (Fig. 4.9). Il s'agit d'une technique permettant, à partir d'un nuage de points dispersés de manière aléatoire dans l'espace, de relier l'ensemble de ces points selon un réseau de triangles le plus réguliers possibles. Il en résulte un pavage de l'espace, et une mise en relation directe de chaque point avec ses voisins les plus directs. Appliquée à la détection de voisinage, cette méthode est séduisante mais présente l'inconvénient d'être coûteuse en temps de calculs, et peut parfois être amenée à rater certains voisinages si l'échantillon est très polydisperse. Elle est donc peu utilisée dans le contexte de la DEM.

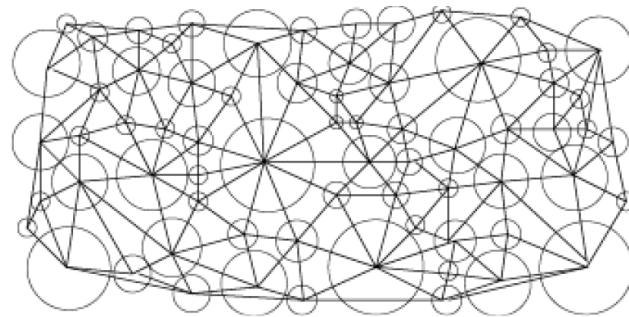


Fig. 4.9 : Méthode de triangulation de Delaunay

-Méthode "sweep and prune"

Cette méthode consiste à représenter chaque objet par une boîte qui le contient exactement, c'est-à-dire à définir sur chaque axe x et y (et éventuellement z) l'intervalle (par exemple $[x_{min}, x_{max}]$) sur lequel la particule s'étend (Fig. 4.10). Pour un axe donné, cet intervalle peut alors être comparé à ceux des autres particules de manière à détecter une possible intersection de ces intervalles, et une liste de voisinage "projétée" sur un axe. La liste de voisinage finale est alors l'intersection des listes réalisées pour tous les axes. Cette méthode est très rapide

mais peut être complexe à implémenter. Elle trouve toute son efficacité lorsqu'il s'agit de détecter le voisinage d'objets de formes complexes, c'est à dire non circulaires/sphériques.

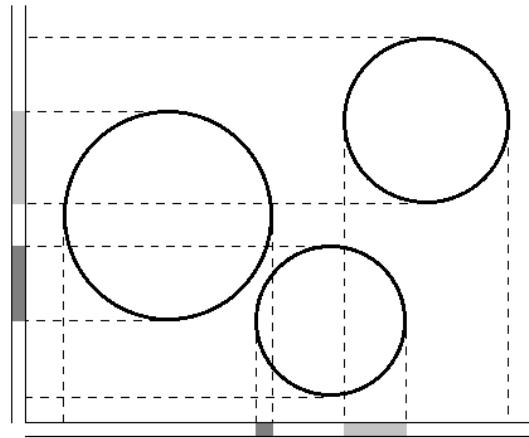


Fig. 4.10 : Méthode Sweep and Prune. Les intersections en gris clair sont détectées seulement sur un axe et sont ignorées, mais l'intersection en gris foncé est commune aux deux axes et est donc significative.

Il faut également noter que, en plus de la technique de détection du voisinage et de ses éventuels paramètres numériques, le modélisateur doit également être très vigilant à la fréquence à laquelle cette opération est menée. Celle-ci dépend essentiellement du type de simulation effectuée. Si on est dans une situation pour laquelle les grains se déplacent peu (sollicitation quasi-statique), on peut envisager d'espacer considérablement la mise à jour des listes de voisinage, qui est généralement coûteuse. En revanche, dans une situation de milieu fortement vibré ou d'écoulement désordonné, la configuration géométrique du système évolue très vite et cette mise à jour devra être plus fréquente. Le compromis entre le gain de temps et le risque de rater une collision relève donc d'un choix effectué par le modélisateur.

2. Génération d'un état initial

Le modélisateur souhaitant réaliser la simulation discrète d'un système granulaire se trouve souvent en situation de difficulté devant la première étape de l'algorithme général, consistant à mettre en place l'état initial de son système. Concrètement, cette opération revient à créer un échantillon satisfaisant à des conditions cibles en termes de remplissage d'un conteneur, de granulométrie, de fraction solide, et d'état de contrainte. Il ne s'agit pas d'un problème trivial. On peut néanmoins le décomposer en deux parties très différentes.

D'un côté, on s'intéresse aux positions et diamètres des particules, qui permettent de satisfaire aux critères de forme générale de l'échantillon, de granulométrie et de fraction solide. Il s'agit donc de grandeurs essentiellement géométriques, qui ne font pas intervenir la mécanique dans leur définition. Des méthodes fondées uniquement sur la géométrie peuvent permettre de résoudre cette partie du problème.

D'un autre côté, on s'intéresse aux efforts de contact dans l'échantillon initial, ce qui permet de satisfaire aux critères d'état de contrainte. La présence d'efforts de contact implique la notion d'interpénétration, de loi de contact, d'histoire de chargement, etc. Il apparaît donc que, de

manière récursive, la mise en place de l'état de contrainte d'un échantillon initial de simulation discrète ne peut s'obtenir que par une simulation discrète préalable. Néanmoins, il n'est pas nécessaire que celle-ci parte d'un état initial bien contrôlé, seul son état final est important. La démarche globale est donc la suivante :

1. Générer par une méthode géométrique un échantillon de départ (positions et diamètres de toutes les particules) en l'absence de contact.
2. Effectuer une simulation discrète de cet échantillon sous certaines sollicitations pour atteindre l'état de contrainte souhaité.
3. Effectuer enfin la simulation souhaitée sur cet échantillon bien contrôlé.

Chacune des étapes 1. et 2. peut être extrêmement coûteuse en temps de calcul, alors même qu'il ne s'agit pas encore de la simulation souhaitée à proprement parler (étape 3.). On cherche donc généralement à utiliser une méthode géométrique (étape 1.) telle que son coût soit limité et que l'échantillon qu'elle fournit soit très proche de l'état souhaité de manière à réduire au maximum le coût de l'étape 2. On va présenter ici brièvement certaines de ces méthodes géométriques.

-Mise en place sur grille fixe

Cette méthode est de loin la plus simple et la plus rapide de toutes (Fig. 4.11). Elle consiste à mettre en place les centres des particules sur une grille fixe (à maille rectangulaire ou hexaédrique), en s'assurant que la distance de maille de la grille est plus importante que le diamètre de la plus grosse particule. On s'assure ainsi qu'aucune interpénétration n'a lieu dans cet état initial. Les fractions solides obtenues sont extrêmement faibles (en particulier pour des échantillons fortement polydispersés), ce qui implique que l'étape suivante de compaction de cet échantillon est toujours très coûteuse. On préfère donc généralement avoir recours à des techniques plus sophistiquées.

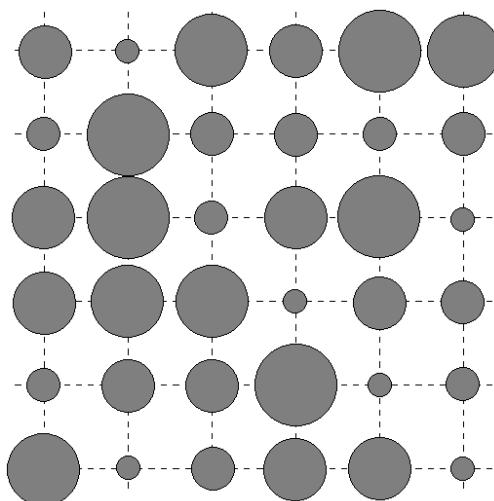


Fig. 4.11 : Packing sur une grille carrée

-Mise en place aléatoire

Cette méthode consiste à placer les grains les uns après les autres à une position aléatoire dans le conteneur tout en s'assurant, à chaque fois qu'on place une particule, qu'elle ne présente pas d'interpénétration avec les particules déjà positionnées. Si c'est le cas, la position est refusée et une autre position aléatoire est proposée pour la particule, suivie d'un nouveau test, etc. Cette méthode est intéressante, surtout si on prend garde à effectuer le placement par ordre décroissant de tailles de particules. Elle peut néanmoins être extrêmement coûteuse si l'échantillon est de grande dimension (à chaque nouvelle particule on doit tester l'interpénétration avec toutes les particules précédentes) et si on vise une fraction solide élevée (les espaces vides sont de plus en plus rares, et la probabilité d'un emplacement aléatoire valide diminue très vite). Certaines techniques récentes fondées sur la notion de level-set permettent néanmoins de rendre ces méthodes très intéressantes.

-Minimisation de potentiel

Il s'agit dans ce cas de positionner les grains dans le conteneur du bas vers le haut par couches successives, en minimisant à chaque nouvelle particule la hauteur à laquelle on la positionne sur la dernière couche de particules déjà en place. Cette minimisation peut être locale (i.e. on sélectionne aléatoirement la position horizontale de départ de la particule, puis on cherche une position d'équilibre local de cette particule autour de cette position de départ, Fig. 4.12a) ou globale (i.e. on calcule à chaque instant une fonction potentielle sur toute la largeur de l'échantillon, et la particule est directement placée à la position de potentiel minimum, Fig. 4.12b). Ces méthodes présentent néanmoins l'inconvénient de laisser de grands espaces libres sous les particules de plus grands diamètres.

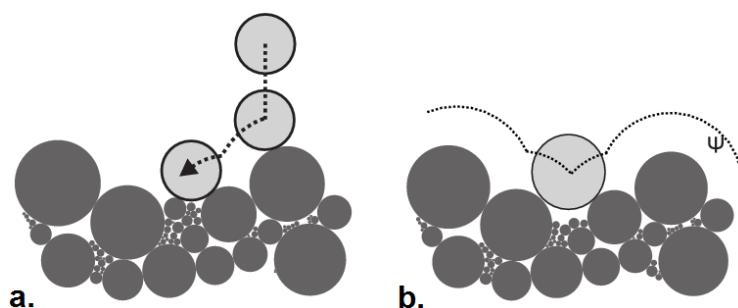


Fig. 4.12 : Packing par minimisation de potentiel. a. Relaxation locale ; b. Minimisation du potentiel calculé sur toute la largeur de l'échantillon

-Méthodes d'assemblage géométrique

Certaines méthodes géométriques permettent de réaliser des assemblages denses de disques ou de sphères à partir de propriétés géométriques du triangle et du tétraèdre. Elles requièrent un découpage préalable du conteneur en triangles/tétraèdres, ce qui ne pose généralement pas de difficulté (Fig. 4.13). Elles présentent néanmoins généralement l'inconvénient d'être complexes à implémenter, et d'avoir des difficultés à respecter une granulométrie prédéfinie.

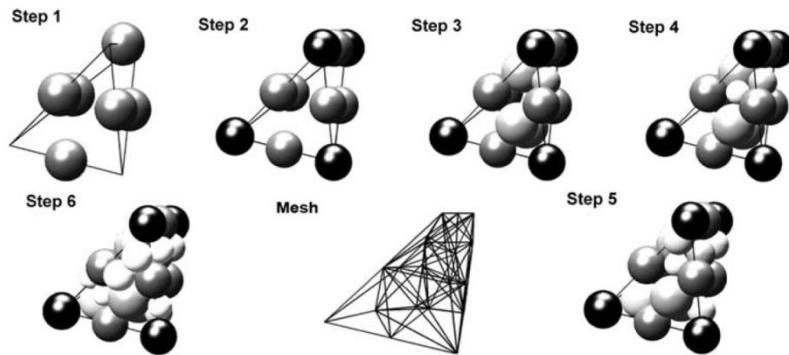


Fig. 4.13 : Packing de sphères fondé sur les propriétés du tétraèdre

-Partition de Voronoi Contrainte

Une méthode récente propose de réaliser une partition de Voronoi contrainte du conteneur pour effectuer le packing (Fig. 4.14). La partition de Voronoi est un outil mathématique (très proche conceptuellement de la triangulation de Delaunay, dont elle est la partition duale exacte) qui permet, à partir d'un ensemble de points positionnés arbitrairement dans l'espace, de partitionner cet espace en autant de régions polygonales (polyédriques en 3D) qu'il y a de points. En particulier, le polygone relatif à un point donné i du nuage de points initial est composé de l'ensemble des points de l'espace situés plus près de i que de n'importe quel autre point j du nuage initial. Un tel polygone/polyèdre est nommé "cellule de Voronoi". Un positionnement judicieux (qu'on peut obtenir par différentes méthodes) des points du nuage initial permet d'avoir un contrôle très précis de la distribution des tailles des cellules. Chaque cellule peut ensuite être remplie d'un grain, et la granulométrie des grains reproduira celle des cellules. Cette méthode présente certaines analogies avec la technique de la grille, mais permet de réaliser des assemblages beaucoup plus denses.

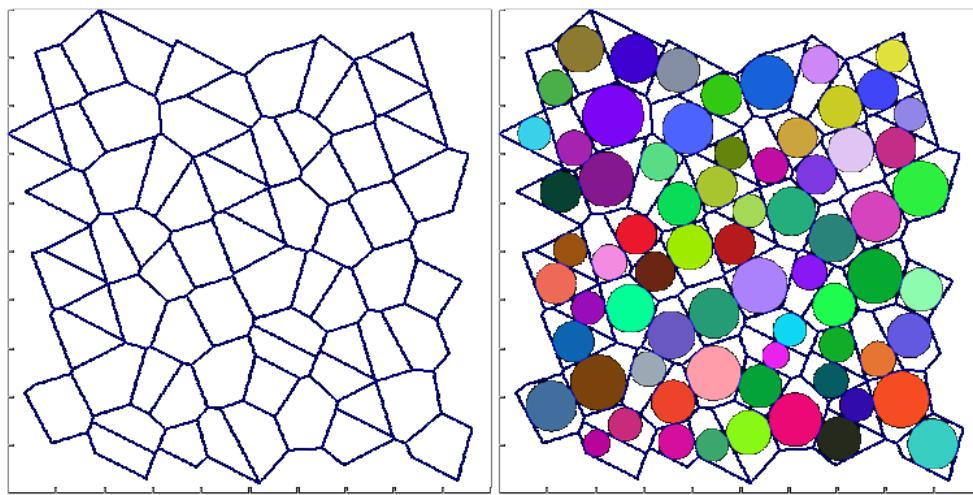


Fig. 4.14 : Partition de Voronoi et remplissage des cellules par des grains circulaires

Quelle que soit la méthode utilisée pour générer ce premier assemblage géométrique de grains, aucun contact n'est encore pris en compte et aucun état de contrainte n'existe. Il est donc nécessaire d'effectuer une étape de simulation DEM pour mettre en place cet état

d'équilibre. Suivant le type de situation souhaitée, on peut utiliser différentes sollicitations lors de cette pré-simulation : déposition sous gravité (on atteindra généralement un état représentatif d'un matériau granulaire peu dense), compression isotrope ou anisotrope (on pourra alors avoir un bon contrôle des contraintes verticale et horizontale régnant dans l'échantillon), ou gonflement progressif des grains. Dans les cas les plus défavorables, et si la méthode de packing initial a été mal choisie ou mal implémentée, cette pré-simulation peut être beaucoup plus coûteuse en temps que la simulation elle-même que l'on souhaite effectuer par la suite.

Chapitre 5 : Modélisation discrète avancée

A. Lois de contact enrichies

1. Raideur normale non linéaire

Dans le chapitre précédent, on a introduit la notion de raideur normale de contact, en prenant soin de préciser qu'il s'agissait d'un paramètre numérique nécessaire à la régularisation des équations de la dynamique, à des fins de résolution numérique explicite. En conséquence, cette raideur est déconnectée de toute réalité physique, et sa valeur est choisie sous forme de compromis entre la précision numérique et le temps de calcul.

Dans certaines conditions, néanmoins, on peut souhaiter une représentation plus réaliste des phénomènes d'élasticité se produisant dans les grains autour du contact. Ceci peut permettre, par exemple, de calculer un champ de contraintes dans les particules, de connaître précisément la surface de contact entre grains, ou de disposer de relations interpénétration/force plus réalistes. Il faut alors avoir recours à la théorie de Hertz. Celle-ci est déjà évoquée dans le premier chapitre de cet ouvrage. Elle introduit nécessairement une non-linéarité dans la relation $F_n - \delta_n$ (Fig. 5.1). En modélisation discrète, on utilise souvent une version plus élaborée de la théorie de Hertz, appelée loi de Hertz-Mindlin, permettant également de représenter de manière plus fidèle les phénomènes tangentiels.

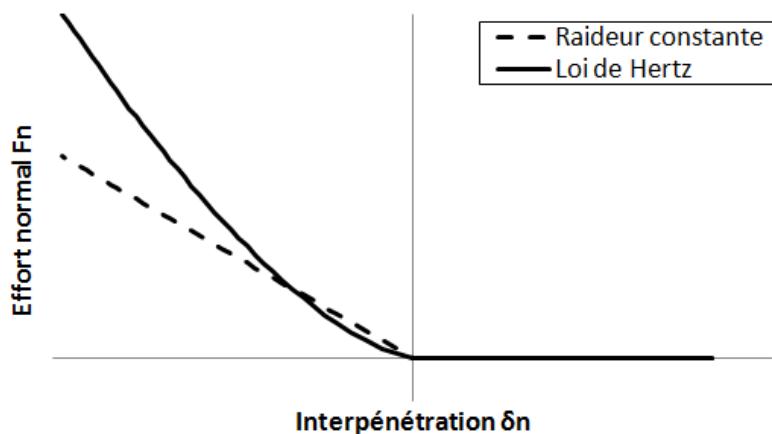


Fig. 5.1 : Loi d'interpénétration linéaire et loi de Hertz, pour laquelle la raideur tangente de contact dépend de l'interpénétration

La difficulté dans l'utilisation de ce type de loi est que le module tangent (i.e. la relation linéarisée $F_n - \delta_n$ au voisinage d'une valeur donnée de δ_n) dépend du niveau de chargement. Le raisonnement effectué au chapitre précédent permettant de déterminer le pas de temps critique ne peut donc pas être tenu directement : les contacts sont de plus en plus raides lorsque l'interpénétration augmente, et le pas de temps critique est aussi de plus en plus petit. Pour déterminer un pas de temps valable (mais pas trop coûteux), il est donc nécessaire d'avoir une connaissance préalable du niveau de contrainte subi par le système et donc de l'interpénétration typique que les contacts sont susceptibles de subir.

Il faut néanmoins noter que les lois de contact non-linéaires n'ont d'influence notable sur le comportement d'une simulation discrète que dans une classe très limitée de configurations. Dans toutes les situations dynamiques (écoulements collisionnels, écoulements denses, etc.) ou impliquant de grands déplacements (plastification et rupture de massifs granulaires), on ne distingue aucune différence dans les comportements macroscopiques lors de l'introduction de cette loi. Une loi de contact non-linéaire ne trouve donc son intérêt que dans des systèmes granulaires denses soumis à de très petites perturbations, pour lesquels les grains ne se déplacent presque pas les uns par rapport aux autres. C'est le cas par exemple de la propagation d'ondes élastiques dans les milieux granulaires, pour laquelle la loi de contact a une influence prépondérante.

2. Description générale des lois cohésives

On appelle lois cohésives les lois d'interaction autorisant l'existence d'un effort attractif entre grains, que ces grains soient en contact ou simplement en situation de proximité. Cette situation se rencontre couramment dans les milieux granulaires de granulométries très fines, pour lesquels certains effets physiques deviennent prépondérants : interactions électrostatiques, forces de Van Der Waals, etc. On utilise également souvent les lois cohésives pour modéliser les milieux granulaires « collés » par l'intermédiaire d'une matrice interstitielle (sols renforcés à la chaux, certains matériaux microstructurés, etc.). Il faut noter néanmoins que la DEM n'est raisonnablement applicable que lorsque les interactions entre grains restent binaires (i.e. lorsque la relation effort-déplacement liant deux grains ne fait pas intervenir de données liées à d'autres grains). Concrètement, ceci correspond à des concentrations de matériaux matriciels faibles, pour lesquelles les particules sont simplement reliées par des « ponts » (Fig. 5.2).

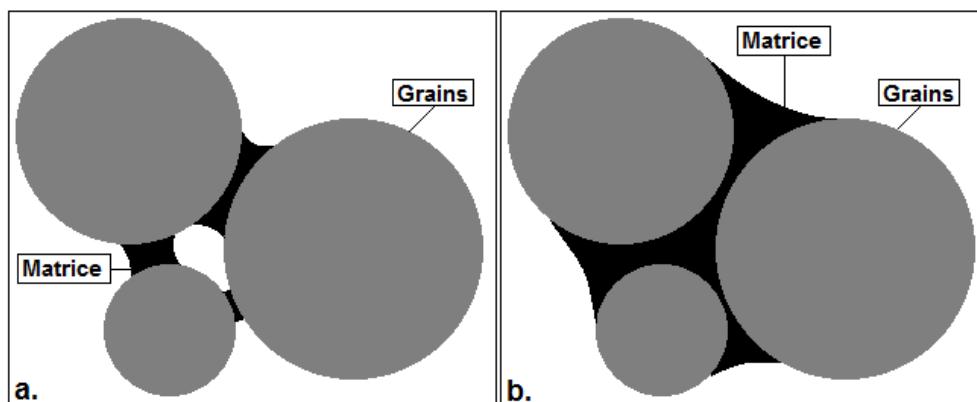


Fig. 5.2 : Exemples de milieu granulaire cimenté. a. Faible densité de matériau matriciel, relations binaires entre les grains, modélisable par de la DEM cohésive ; b. Forte densité de matériau matriciel, recours nécessaire à la mécanique des milieux continus

Pour définir numériquement une loi cohésive, on a recours à deux ingrédients :

-Une relation liant l'interpénétration normale δ_n et la force normale F_n . Contrairement aux cas évoqués dans les sections précédentes, celle-ci doit être valable à la fois pour des valeurs négatives et positives de δ_n , de façon à ce que l'effort normal F_n puisse être répulsif (si les grains sont en interpénétration) ou bien attractif (si les grains ne s'interpénètrent pas

mais sont suffisamment proches pour que l'attraction ait lieu). Une relation de proportionnalité entre δ_n et F_n peut très bien faire l'affaire, par exemple (Fig. 5.3). Une telle relation doit également exister dans la direction tangentielle pour relier δ_t et F_t , comme dans le cas de la loi de contact standard.

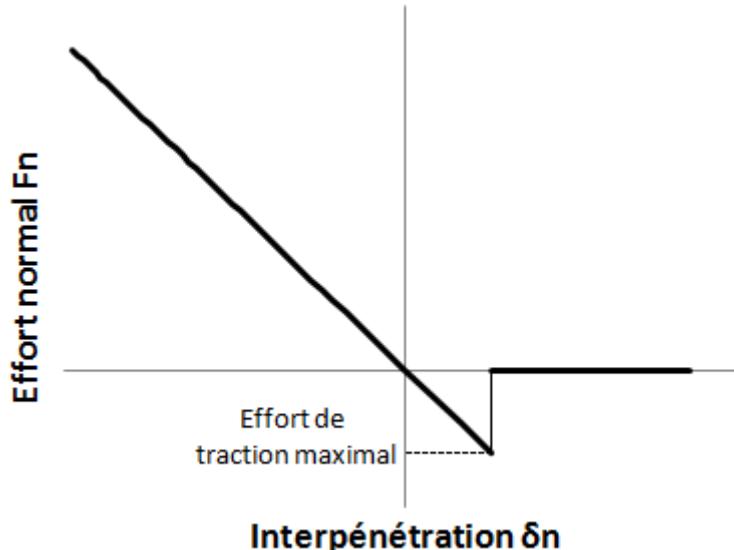


Fig. 5.3 : Exemple de loi cohésive simple

-Un critère de rupture de la loi cohésive, définissant un domaine pour lequel les relations précédentes existent et son domaine complémentaire pour lequel les grains n'interagissent pas. Le critère pourra par exemple s'écrire à la manière d'un critère de plasticité :

$$f(F_n, F_t) \geq 0 \quad (5.1)$$

La fonction f qui définit le critère de rupture dépend ici de F_n et F_t , et doit rester positive pour que les relations $\delta_n - F_n$ et $\delta_t - F_t$ définies précédemment soient appliquées. Si, en revanche, la fonction f devient nulle ou négative, la rupture se produit et l'interaction entre les grains n'est plus prise en compte par le solveur.

Il peut par exemple s'agir d'un effort maximal de traction tolérable par la liaison. On peut aussi mettre en place à la fois un effort de traction maximal et un effort de cisaillement maximal, ou même coupler les deux sous un critère unique (Fig. 5.4).

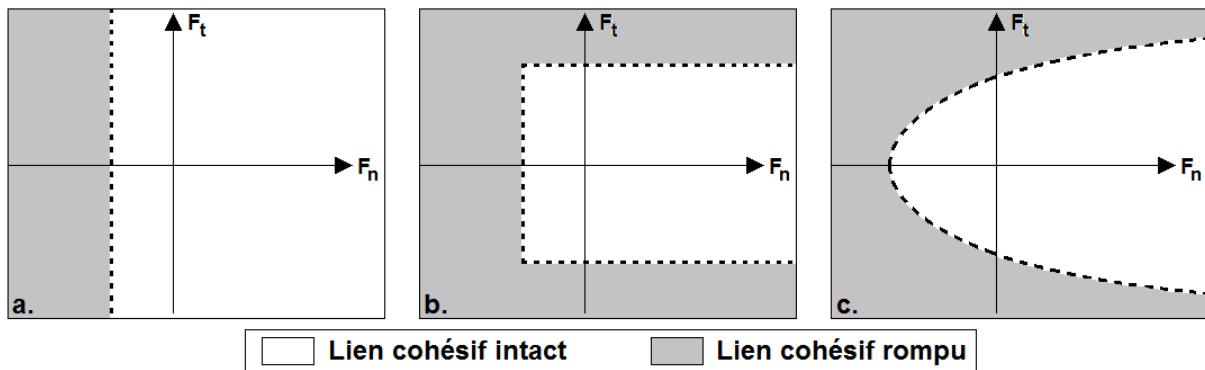


Fig. 5.4 : Exemples de critères de rupture de lien cohésif. a. Rupture par effort normal maximal ; b. Rupture par effort normal ou tangentiel maximal ; c. Critère parabolique fondé sur une combinaison des efforts normal et tangentiel

Une loi cohésive simplifiée couramment utilisée consiste à combiner deux types de relations : d'une part, une loi linéaire de raideur normale de contact produisant un effort répulsif proportionnel à l'interpénétration si celle-ci est négative ; et d'autre part, une loi produisant un effort attractif constant dès-lors que la distance de séparation des grains est inférieure à une certaine distance d'influence. L'addition de ces deux efforts produit la loi de cohésion représentée sur la Fig. 5.5, qui présente l'avantage d'être très facile à implémenter. Il faut remarquer que, dans cette loi particulière, le point d'équilibre (i.e. le point pour lequel l'effort normal entre les grains est nul) correspond à une interpénétration non-nulle pour laquelle l'effort répulsif de déformation de la zone de contact compense l'effort attractif entre les grains.

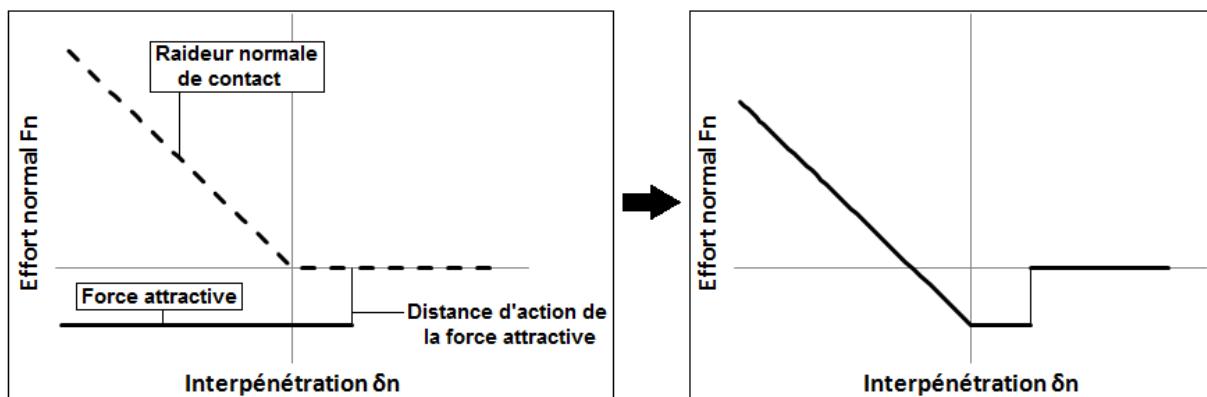


Fig. 5.5 : Loi de contact cohésive simple : combinaison d'une loi de contact pénalisée simple et d'un effort attractif portant sur une certaine distance d'action

3. Cohésion capillaire

Un cas particulier de cohésion est celui des milieux granulaires non-saturés, c'est-à-dire des systèmes triphasiques contenant des grains, du liquide et du gaz (exemple : sable mouillé utilisé pour réaliser des châteaux). Selon la teneur en eau d'un milieu granulaire, il peut adopter plusieurs comportements (Fig. 5.6). Le régime sec correspond à un cas limite pour lequel l'eau est totalement absente du système, mais dans la pratique le cas des très faibles

teneurs en eau correspond le plus souvent au régime "hygroscopique" pour lequel l'eau est présente uniquement à la surface des grains, sous forme liée ou adsorbée. Dans ce cas le matériau a un comportement largement non-cohésif. Lorsque la quantité d'eau est suffisante, des ponts liquides se forment entre les grains en contact ou très proches de l'être, pour former le régime "pendulaire". Lorsque les ponts liquides s'interconnectent, on entre dans le régime funiculaire pour lequel l'air n'est plus présent qu'à l'état de bulles plus ou moins étendues. Lorsque la phase liquide occupe totalement l'espace interstiel mais que la pression de fluide reste négative (relativement à une pression de gaz extérieure), on est dans le régime capillaire. Le liquide exerce alors une force de succion sur les grains qui créé une cohésion macroscopiques. A l'extrême, lorsque tous les grains sont plongés dans un fluide à pression ambiante, on est en régime saturé.

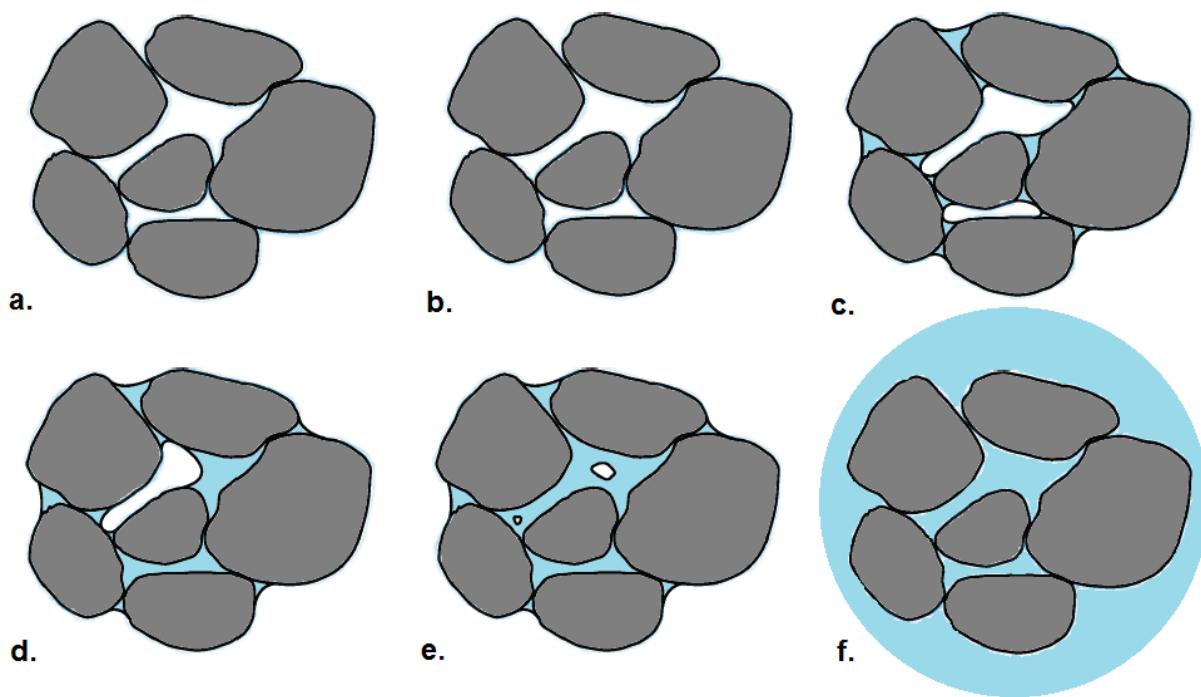


Fig. 5.6 : Evolution du comportement avec la teneur en eau. a. Régime sec ; b. Régime hygroscopique ; c. Régime pendulaire ; d. Régime funiculaire ; e. Régime capillaire ; f. Régime saturé

Pour les régimes pendulaire, funiculaire et capillaire, des forces de cohésion importantes se développent, rassemblées sous le terme général de "cohésion capillaire". Le seul cas de matériau non-saturé que l'on puisse traiter de manière simple par modélisation discrète est le régime pendulaire, puisque chaque pont liquide ne relie que deux grains et peut donc être modélisé par une loi cohésive binaire adéquate (bien qu'un telle loi ne soit souvent qu'une approximation).

L'origine physique des forces de capillarité est liée aux phénomènes de tension superficielle qui se produisent à l'interface entre deux liquides non miscibles ou entre un liquide et un gaz [20]. Les molécules ayant tendance à être attirées vers leurs milieux d'appartenance respectifs, elles génèrent une force de tension à l'interface qui se comporte, dès-lors, comme une membrane tendue s'opposant à ses déformations. Cette tension est quantifiée par une grandeur macroscopique appelée tension superficielle. Elle dépend fortement du liquide considéré et de

sa température. Cette tension est à l'origine de la forme concave des ponts liquides interparticulaires, car elle engendre une dépression dans le liquide, créant un saut de pression entre les deux phases à la traversée de l'interface. La loi de Laplace permet d'exprimer cette différence de pression Δu comme le produit de la tension superficielle γ_l par la courbure moyenne C de la surface extérieure du pont au niveau de l'interface :

$$\Delta u = \gamma_l \cdot C \quad (5.2)$$

Cette courbure pilote donc totalement la géométrie de la phase liquide, qui peut être très complexe en cas de grains non-sphériques ou d'interconnexions entre plusieurs ponts. La tension superficielle contribue donc doublement (Fig. 5.7) à la cohésion par capillarité entre deux grains avec, d'une part l'effet de membrane tendue à l'interface (γ_l), et d'autre part l'action de la différence de pression (Δu). Dans le cas très simplifié de deux sphères de même taille, l'effort attractif peut s'écrire :

$$F_{cap} = -2\pi \cdot \gamma_l \cdot y_0 - \pi \cdot \Delta u \cdot y_0^2 \quad (5.3)$$

Dans cette expression, y_0 représente le rayon de gorge, c'est-à-dire le rayon le plus faible du pont liquide. Celui-ci dépend de très nombreux paramètres : diamètre des grains, distance de séparation, volume d'eau présent dans le pont liquide, angle de mouillage, pureté de l'eau, etc. Il s'agit donc d'un calcul d'une grande complexité, qui présente pourtant une simplification considérable par rapport à la réalité (formes des grains complexes, etc.).

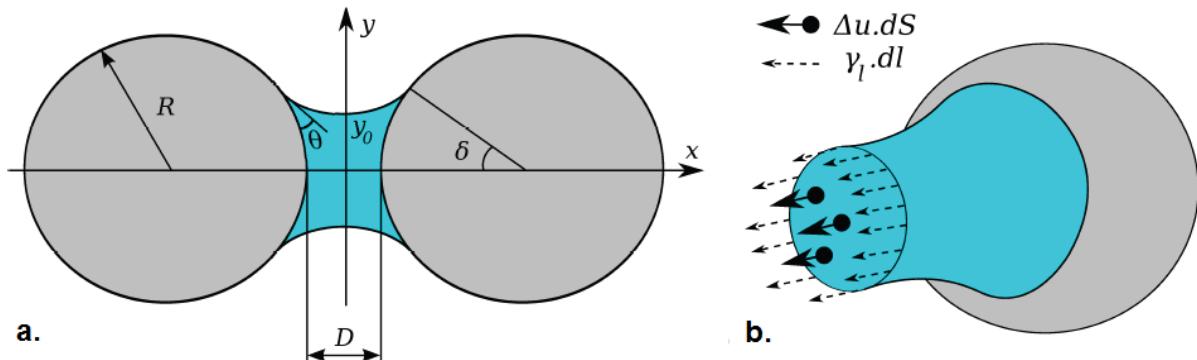


Fig. 5.7 : Pont capillaire entre deux sphères de même diamètre. a. Géométrie du problème ; b. Efforts liés à l'effet membrane et à la dépression du fluide

En réalité, le calcul exact de l'effort attractif d'origine capillaire est un problème non-résolu, et on a donc recours à des approches très simplifiées lorsque l'on souhaite conduire une modélisation discrète de ce phénomène. On reproduit donc par exemple l'approche proposée sur la Fig. 5.5, en superposant une loi de contact pénalisée linéairement et une force d'attraction. Les deux différences essentielles avec le cas précédent sont visibles sur la Fig. 5.8. :

-D'une part, l'effort attractif n'est pas constant mais dépend de la distance de séparation entre les particules : Lorsque les particules s'éloignent, la section du pont liquide se rétrécit, la pression au sein du liquide évolue, et il en résulte une diminution de l'effort attractif.

-D'autre part, lorsque l'on étire trop ce pont liquide, il finit par rompre (à une distance de séparation qui dépend notamment du volume de liquide et de sa tension superficielle). Contrairement au cas d'une cohésion simple, il ne suffit pas alors de rapprocher très légèrement les grains pour reformer le pont, car l'eau s'est répartie également autour des surfaces extérieures des deux grains. Pour reformer le pont, il est donc nécessaire de rapprocher beaucoup plus les grains. Il en résulte un comportement différent en chargement et déchargement, résumé sous le terme général d'hystérésis. Il s'agit d'une propriété essentielle des milieux granulaires non saturés.

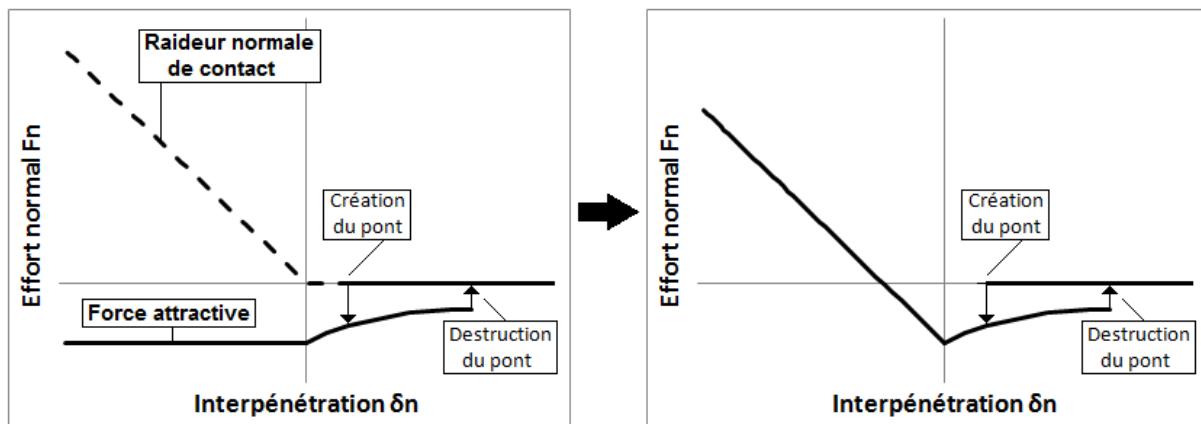


Fig. 5.8 : Exemple de loi de cohésion capillaire présentant une dépendance à la distance et un hystérésis de création-destruction de pont capillaire

4. Modèles d'adhésion fondés sur la physique

Pour des grains de petites tailles (poudres cohésives) et en dehors du cas de la cohésion capillaire, les forces de cohésion entre particules sont des interactions de surface qui ont des origines physico-chimiques variées. Pour les représenter de manière simple, on a coutume d'utiliser une grandeur un peu plus macroscopique nommée "énergie d'adhésion" et notée γ . Il s'agit de l'énergie par unité de surface (exprimée donc en J/m²) requise pour séparer deux particules en contact (Fig. 5.9).

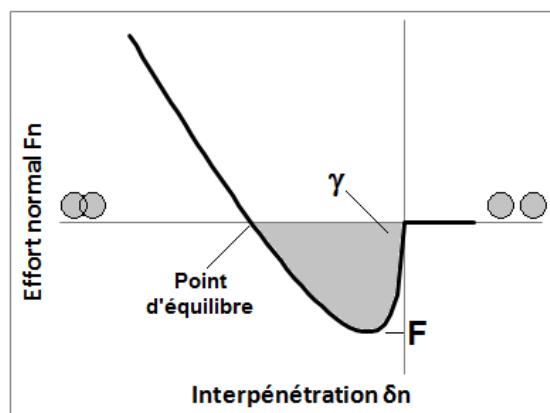


Fig. 5.9 : Exemple de loi d'adhésion fondée sur la notion d'énergie de Dupré

On nomme également cette grandeur "énergie de Dupré". Pour deux sphères en contact, la force attractive résultant de cette énergie d'adhésion peut s'approcher par :

$$F \approx -2\pi R^* \gamma \quad (5.4)$$

Dans cette expression, R^* est la moyenne harmonique des rayons des deux sphères :

$$R^* = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.5)$$

Deux modèles principaux de contact adhésif élastique sont couramment utilisés et adaptés dans la littérature scientifique. Le modèle JKR (Johnson-Kendall-Roberts [21]) est fondé sur la théorie de Hertz et consiste à introduire des forces attractives sur les portions de surface en contact (définies par un rayon de contact conforme à la théorie de Hertz). Cette approche combine donc la déformation élastique des grains et les énergies de surface (Fig. 5.10). L'expression du rayon de contact est alors :

$$a^3 = \frac{R^*}{E^*} \left(F_n + 3\gamma\pi R^* + \sqrt{6\gamma\pi R^* F_n + (3\gamma\pi R^*)^2} \right) \quad (5.6)$$

E^* représente le module d'Young réduit des deux particules en contact. Cette expression n'est pas explicite, ce qui présente des inconvénients considérable si on souhaite l'implémenter dans un code DEM. On a donc parfois recours à une version simplifiée du modèle JKR, pour laquelle l'effort de contact est donné directement par :

$$F_n = E^* R^{*1/2} \delta_n^{3/2} - \sqrt{6\pi\gamma} \cdot E^{*1/2} R^{*3/4} \delta_n^{3/4} \quad (5.7)$$

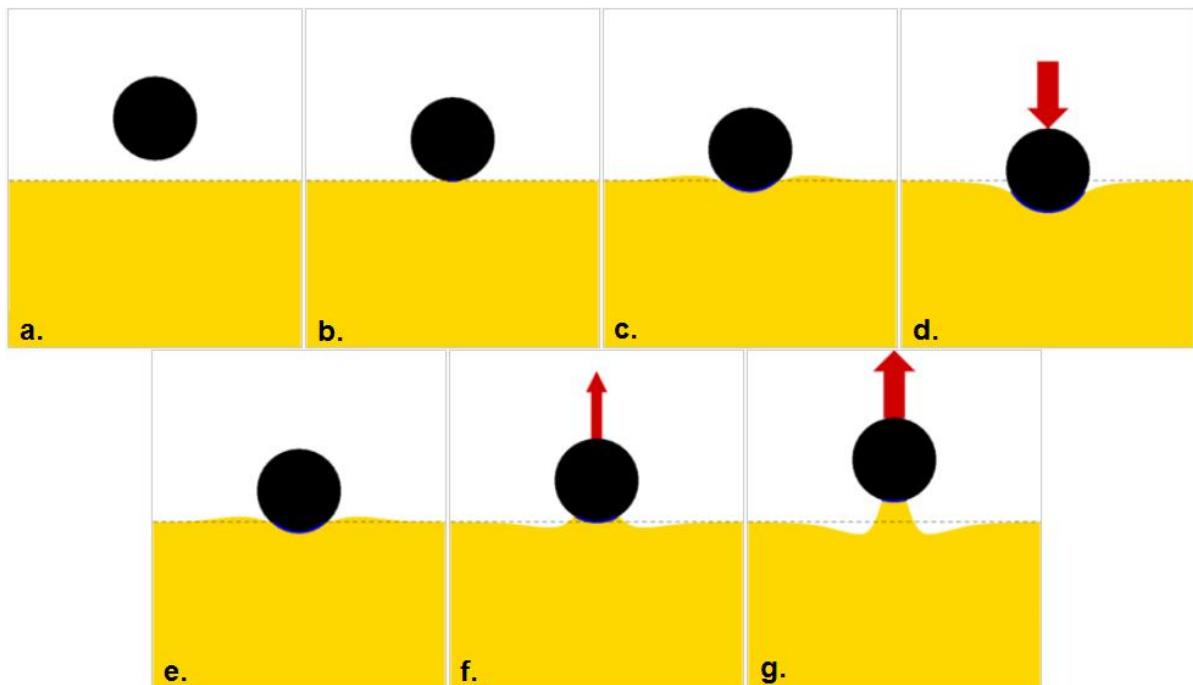


Fig. 5.10 : Comportement physique du modèle JKR : a. b. c. Mise en contact au point d'équilibre attraction-répulsion ; d. Application d'un effort de compression ; e. Retour au point d'équilibre ; f. g. Application d'un effort de traction

Selon la théorie JKR, l'effort maximal que peut reprendre le lien cohésif entre les deux grains est donné par :

$$F = -\frac{3}{2}\pi R^* \gamma \quad (5.8)$$

Le deuxième type de modèle est appelé DMT, pour Derjaguin-Müller-Toporov [22]. Il consiste à négliger l'effet de la déformation des grains sur les efforts attractifs, et à représenter cette déformation par une simple loi d'interpénétration issue de la théorie de Hertz. Dans ce cas, on retrouve un effort résistant maximal identique à celui de la formule (5.4).

Il a été démontré que les modèles JKR et DMT représentent deux cas limites : celui des grosses particules très déformables avec une forte énergie de surface pour le modèle JKR, et celui des petites particules rigides faiblement adhésives pour le modèle DMT. Plusieurs formules d'unifications existent dans la littérature pour englober ces approches dans un cadre commun.

Une extension courante de ces approches consiste à définir des modèles de zones cohésives (autrement appelées CZM pour cohesive-zone models). Ces modèles consistent à utiliser une loi d'adhésion couplée avec un paramètre d'endommagement. Celui-ci dégrade progressivement les qualités de la liaison cohésive en fonction des sollicitations mécaniques qu'elle reçoit, jusqu'à provoquer sa rupture définitive. Ce type de modèle est donc très adapté à l'étude de la dégradation et de la rupture de matériaux granulaires cimentés.

B. Grains de morphologies complexes

1. Génération d'échantillons complexes

La forme circulaire-sphérique a été utilisée historiquement en modélisation discrète pour des raisons liées à sa simplicité d'implémentation, et au coût calculatoire plus réduit de la détection de contact. On a vu en effet dans le chapitre précédent qu'il n'y avait aucune difficulté avec ce genre de forme à déterminer immédiatement la distance de séparation-interpénétration et la direction de la normale au contact, soit deux éléments indispensables dans la formulation d'une loi d'interaction. Beaucoup de matériaux se prêtent très bien à cette hypothèse, des granulats roulés utilisés dans la formulation du béton aux usines de balles de golf.

Néanmoins, dans de nombreuses situations, la morphologie réelle des grains s'éloigne sensiblement de cette hypothèse. On peut citer par exemple le cas des grains allongés (céréales telles que blé et riz, gélules pharmaceutiques, etc.), des grains aplatis (pièces de monnaie, certaines graines végétales, argile en plaquettes, etc.), des grains anguleux (carrés de sucre, ballast SNCF, ouvrages en maçonnerie, etc.), ou des grains à morphologies très complexes (grains de sable, rochers, etc.). Pour décrire ces morphologies, on peut par exemple avoir recours aux outils géométriques décrits dans le deuxième chapitre (aplatissement, élongation, etc.).

Dans certaines situations, la forme des particules est certes non-sphérique, mais elle est parfaitement connue et contrôlée. C'est le cas par exemple des gélules pharmaceutiques, que

l'on peut aisément modéliser comme un cylindre (partie 1) combiné à deux demi-sphères (parties 2 et 3, Fig. 5.11). Sur une telle forme, il est relativement aisé de définir de manière univoque et rapide les notions de distance d'interpénétration et de normale au contact : il suffit pour ça de balayer les différentes combinaisons entre les parties 1, 2, et 3 de deux particules potentiellement en contact. On ne rencontrera que des contacts sphère-sphère, sphère-cylindre ou cylindre-cylindre, qui sont facile à résoudre. Ceci est rendu d'autant plus simple que cette forme est convexe, et qu'il n'y a donc pas plus d'un contact possible entre deux particules. Une telle approche est donc intéressante, mais présente l'inconvénient d'être dédiée à un type de particule donné. On peut coder des programmes DEM de cette manière pour un grand nombre de particules de morphologies simples et connues, mais ces programmes seront difficilement applicables directement à d'autres morphologies. L'ingénieur qui sait précisément sur quel type de particules il souhaite effectuer des simulations se dirigera naturellement vers ce type d'implémentation.

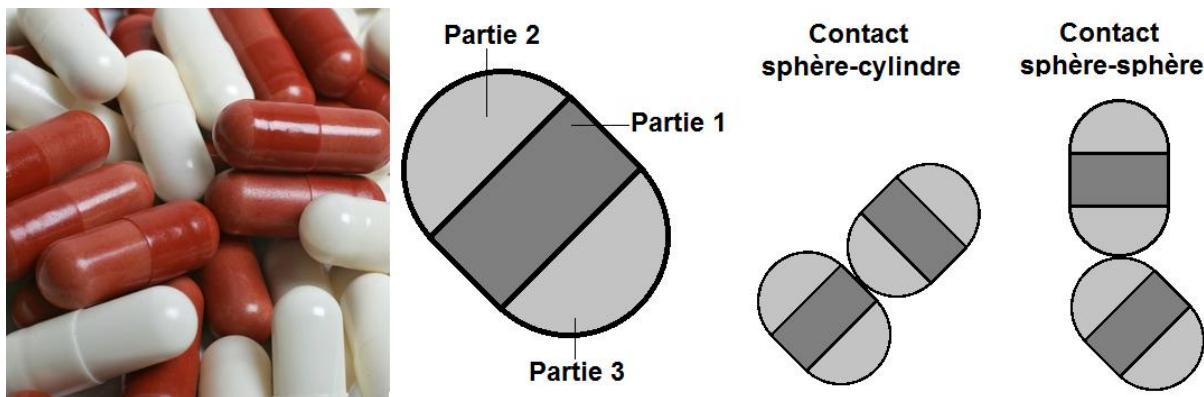


Fig. 5.11 : Principe d'un code DEM développé pour un type de particule non-sphérique particulier

Dans de nombreuses autres situations, on est face à des grains dont la forme est non-seulement non-sphériques, mais également inconnue et aléatoire. C'est en particulier le cas de tous les matériaux naturels (géomatériaux) qui sont rencontrés dans le génie minier et le génie civil.

Une approche récente consiste à développer des bibliothèques de formes de particules types, que l'on peut ensuite utiliser en l'état dans la simulation d'un matériau granulaire connu. L'échantillon généré n'est pas réellement aléatoire (même s'il est composé de plusieurs milliers de grains, ils sont tous issus d'une bibliothèque de forme qui en contient généralement entre 10 et 100, ce qui rend les répétitions de formes inévitables), mais on le suppose représentatif du matériau réel. C'est par exemple la stratégie développée par la SNCF pour modéliser le ballast de ses voies [23] (Fig. 5.12).

Une des difficultés de cette technique est l'acquisition de formes 3D de grains réels. Plusieurs techniques modernes sont utilisées pour scanner un tel grain, comme par exemple la tomographie-X (Fig. 5.13).

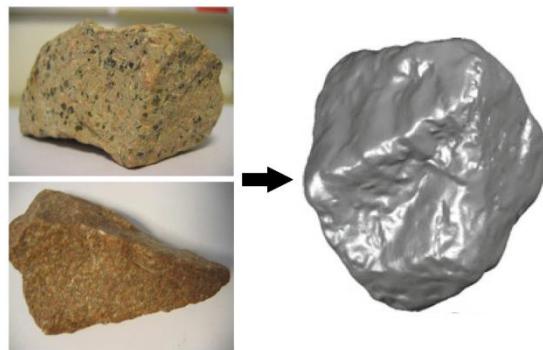


Fig. 5.12 : Grains de ballast réels, et exemple de morphologie issue d'une bibliothèque de formes de grains

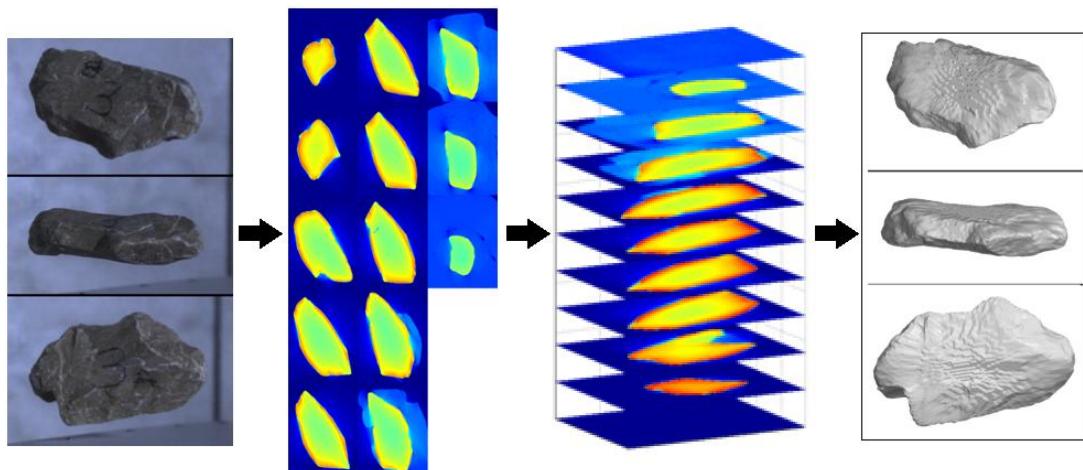


Fig. 5.13 : Numérisation de la forme 3D d'un grain réel, par scan dans un tomographe-X, et reconstruction de la forme couche par couche.

A l'opposé, des techniques numériques se développent actuellement dans le but de générer de manière totalement aléatoire des échantillons granulaires tout en conservant un contrôle total de leurs caractéristiques morphologiques. Celles-ci reposent sur la notion de descripteur de Fourier, décrite au chapitre 2 de cet ouvrage. Pour caractériser la morphologie d'une particule (on se limite ici au cas 2D), on peut en effet en discréteriser le contour puis le soumettre à une transformée de Fourier pour en obtenir un spectre d'amplitudes (Fig. 2.4). Si cette opération est effectuée sur suffisamment de grains, le spectre moyen obtenu est considéré comme une signature morphologique de la population de grains étudiée.

Dans une perspective de modélisation, il est souhaitable de pouvoir effectuer l'opération inverse, c'est-à-dire de pouvoir générer des formes aléatoires à partir d'un spectre donné, qui représente le matériau granulaire souhaité. Il est donc nécessaire d'introduire un aléa dans les formes à partir d'un spectre déterministe. Pour cela, on génère des angles de phase aléatoires (uniformément en $-\pi$ et π) pour chacun des modes du spectre, et on applique une transformation de Fourier inverse au spectre complexe ainsi généré (amplitudes déterministes et phases aléatoires). Un exemple de résultat est fourni sur la Fig. 5.14, pour laquelle on a généré deux particules différentes à partir d'un même spectre [24] (en l'occurrence, celui de la Fig. 2.4).

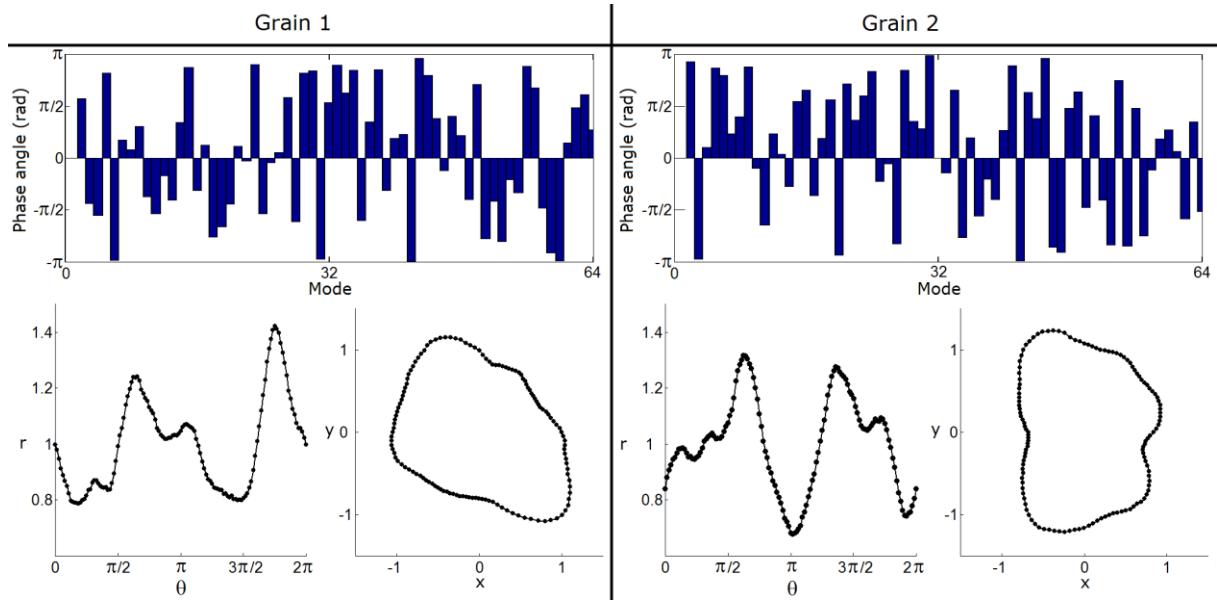


Fig. 5.14 : Génération aléatoire de particules : pour chaque grain, un jeu d'angles de phase aléatoires a été généré. Les deux grains obtenus sont différents, mais partagent des caractéristiques morphologiques communes : élongation, irrégularité, rugosité, etc.

Ainsi, par un contrôle précis du spectre utilisé comme donnée d'entrée, on est en mesure de générer des échantillons granulaires avec des propriétés très variées (Fig. 5.15) : le premier mode significatif du spectre contrôle l'élongation des particules, les modes suivants contrôlent l'irrégularité générale de leurs formes, et les modes élevés contrôlent la rugosité de leurs surfaces.

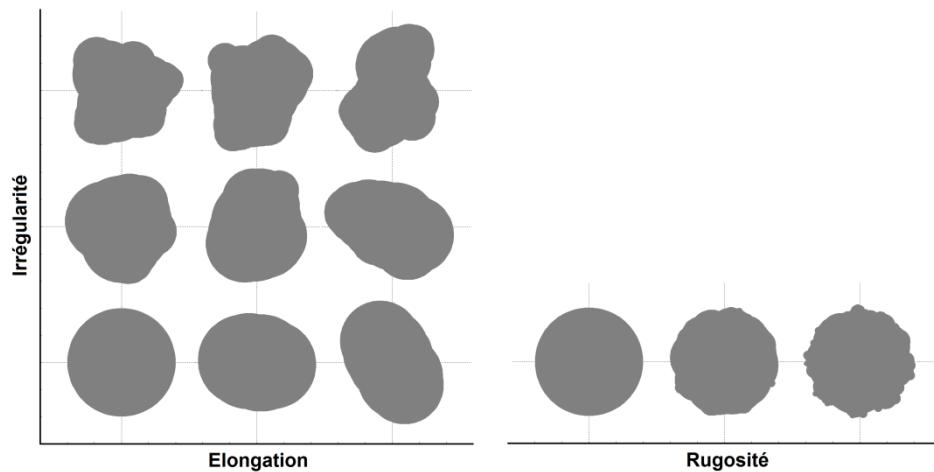


Fig. 5.15 : Variété des formes aléatoires potentiellement générées, disposée selon trois axes : élongation, irrégularité, rugosité

Cette approche a récemment été étendue au cas tridimensionnel, en faisant intervenir des concepts moins triviaux tels que la théorie des champs aléatoires [25]. En couplant ces méthodes de génération de formes avec les algorithmes d'assemblage d'échantillons granulaires (présentés au chapitre précédent), on est maintenant en mesure de créer rapidement des systèmes granulaires d'une grande complexité (Fig. 5.16).

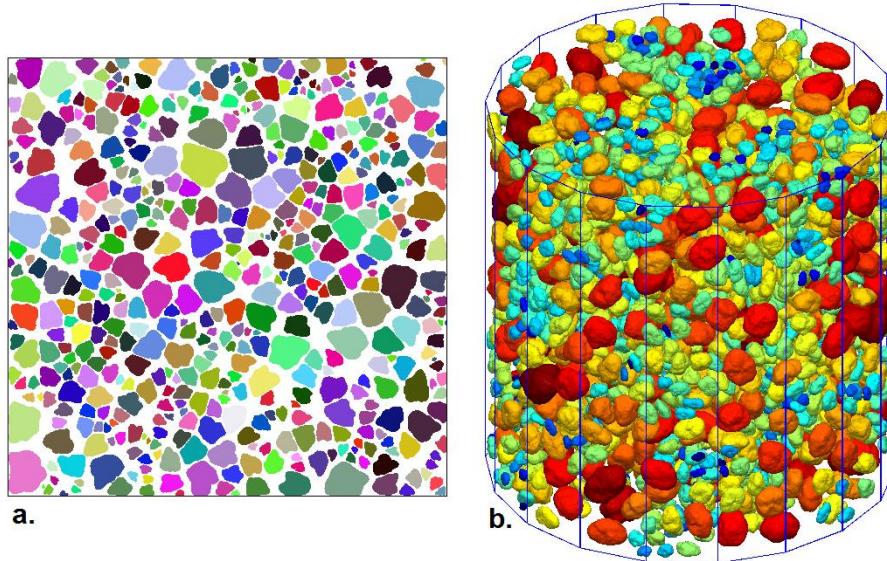


Fig. 5.16 : Exemples d'échantillons finaux. a. 2D ; b. 3D

2. Modélisation par clusters de disques ou de sphères

La section précédente a présenté plusieurs approches permettant la génération d'échantillons granulaires de morphologies non-sphériques, mais n'a pas fourni d'information sur l'implémentation de ces formes dans un calcul DEM. On sait en effet que deux données sont absolument essentielles à l'utilisation d'une loi de contact : la distance de séparation-interpénétration entre deux particules, et la direction normale au contact (potentiel ou effectif) entre ces particules. Pour des disques ou des sphères, ces données sont triviales, mais il n'en va pas de même pour les formes arbitraires décrites dans la Fig. 5.16.

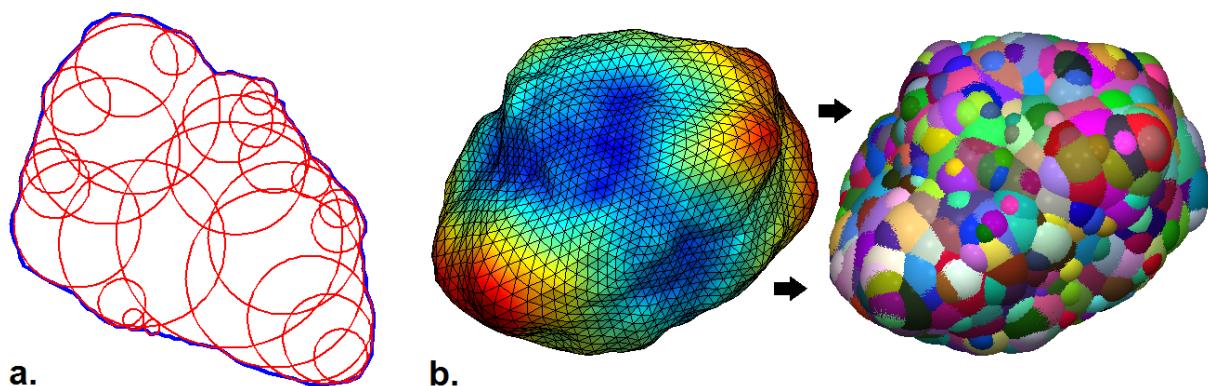


Fig. 5.17 : Exemple de grains de morphologie complexe, et clusters associés. a. en 2D ; b. en 3D

La méthode la plus simple pour traiter ce problème consiste à considérer chaque grain comme un ensemble de disques (ou de sphères en 3D), liés rigidement les uns aux autres, partiellement superposés, et présentant un contour extérieur équivalent à celui de la particule cible. Un tel ensemble est appelé "cluster" (Fig. 5.17). L'intérêt de cette technique consiste à remplacer un contact entre deux contours (surfaces en 3D) complexes par un contact entre deux contours circulaires (surfaces sphériques en 3D). Lorsque deux grains sont en situation de voisinage, le contact peut donc être détecté en balayant les différentes combinaisons de distances entre les disques/sphères appartenant à chacun des grains. Ce modèle donne par ailleurs la possibilité de considérer plusieurs contacts par paire de particules, cette situation étant rendue possible par la non-convexité des formes générées.

Le défaut principal de cette technique est que le contour réel de la particule générée ne peut pas être parfaitement approché par des formes aussi simples que des disques, et que le cluster ne reste qu'une approximation de ce contour. Le nombre de disques nécessaires pour avoir une approximation correcte d'un contour de grain dépend de la complexité de celui-ci, mais on considère généralement qu'entre 20 et 30 disques sont suffisants en 2D pour une approximation satisfaisante. En 3D, il faut compter entre 200 et 400 sphères pour représenter correctement une particule telle que celle de la Fig. 5.17b. Bien entendu, ceci implique des coûts importants en termes de mémoire et de temps de calcul.

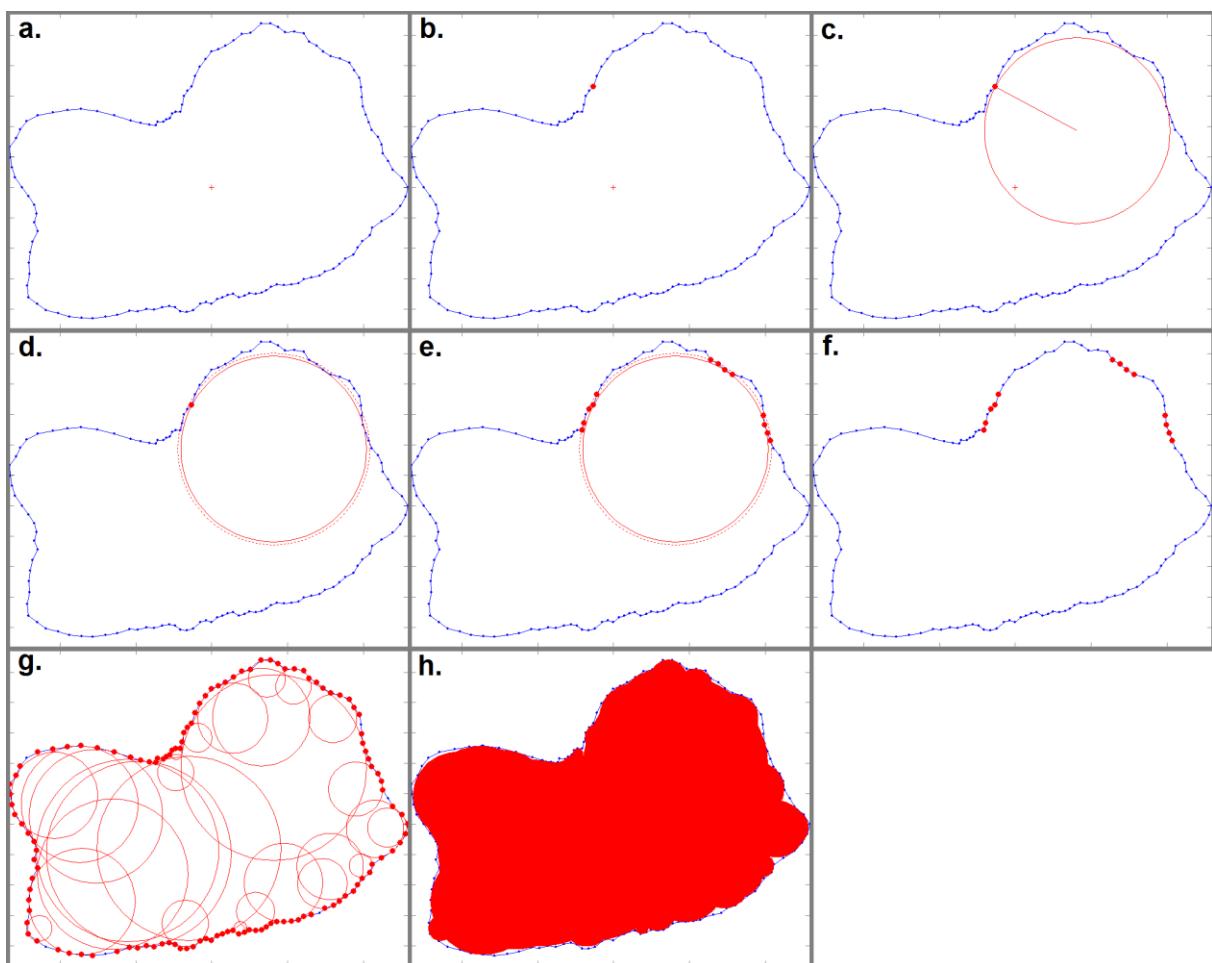


Fig. 5.18 : Algorithme de remplissage d'un contour 2D par un cluster de disques

Plusieurs algorithmes peuvent être imaginés pour effectuer le remplissage optimal d'une forme complexe par un ensemble de disques. L'un de ces algorithmes est présenté sur la Fig. 5.18. Les différentes étapes de cet algorithme sont les suivantes :

- a. Discréter finement le contour de la particule en un grand nombre de points.
- b. Choisir aléatoirement un point du contour.
- c. Définir le cercle \mathcal{C} de plus grand rayon tangent au contour en ce point, et également en contact avec une ou plusieurs autres zones du contour.
- d. Considérer un cercle \mathcal{C}' concentrique à \mathcal{C} mais légèrement plus grand.
- e. Déterminer l'ensemble des points du contour situés à l'intérieur de \mathcal{C}' .
- f. Marquer tous ces points comme "couverts" par le cercle \mathcal{C} .
- g. Boucler sur les étapes b. à f. avec les points non-couverts, jusqu'à ce que tous le soient.
- h. L'ensemble des cercles \mathcal{C} représente le cluster recherché.

Au delà de l'aspect "contact", développé dans les paragraphes précédents, il convient d'être vigilant à la partie "dynamique" lorsque l'on implémente ce genre de méthode. En effet, les propriétés dynamiques (masse, centre de masse, moment ou matrice d'inertie) de la particule ne doivent en aucun cas être reliées aux disques (sphères en 3D) qui composent le cluster représentant le grain. Si la masse (par exemple) de la particule était prise comme la somme des masses des disques, le résultat serait faux puisque ceux-ci se superposent très largement. Le cluster n'est donc utilisé que pour la détection et la résolution du contact, et les caractéristiques dynamiques doivent absolument rester celles de la forme initiale du grain.

3. Modélisation par polygones ou polyèdres

Une approche alternative à celle du cluster consiste à représenter les grains de formes complexes par des polygones (en 2D) ou des polyèdres (en 3D). Dans le cas des polyèdres, les contacts entre grains peuvent être de différents types (Fig. 5.19) : ponctuels (contact coin-face ou arête-arête), linéaires (contacts arête-face), ou surfaciques (contact face-face).

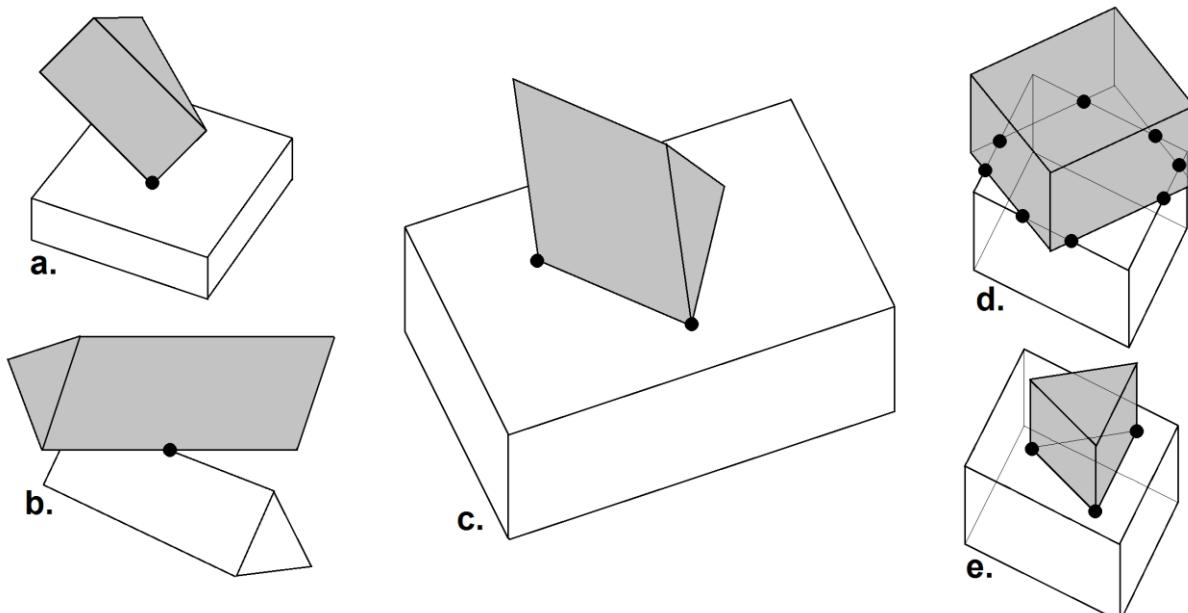


Fig. 5.19 : Types de contacts entre polyèdres, et points de contacts associés

Pour des raisons pratiques, chaque contact qui n'est pas ponctuel est en réalité traité à l'aide de plusieurs contacts ponctuels. Un contact linéaire entre une arête et une face (Fig. 5.19c) sera en réalité représenté par deux contacts ponctuels aux extrémités de la ligne de contact réelle. Ceci permet de traiter correctement les conditions de non-interpénétration (si aucune des deux extrémités n'interpénètre, alors aucun point de la ligne de contact n'interpénètre) et de prendre en compte des lois de contacts qui, en général, ne sont écrites que pour des contacts ponctuels. De la même manière, un contact surfacique (face-face, Figs. 5.19d et 5.19e) sera représenté par un certain nombre de contacts ponctuels délimitant le polygone de contact.

En 2D et en 3D, la difficulté principale lors de la résolution d'un contact entre polygones reste la définition univoque de la distance d'interpénétration et de la direction normale au contact (Fig. 5.20). L'absence de courbure locale empêche un calcul direct de ces informations, et on est obligé d'avoir recours à des approches parfois moins satisfaisantes que pour l'approche par clusters.

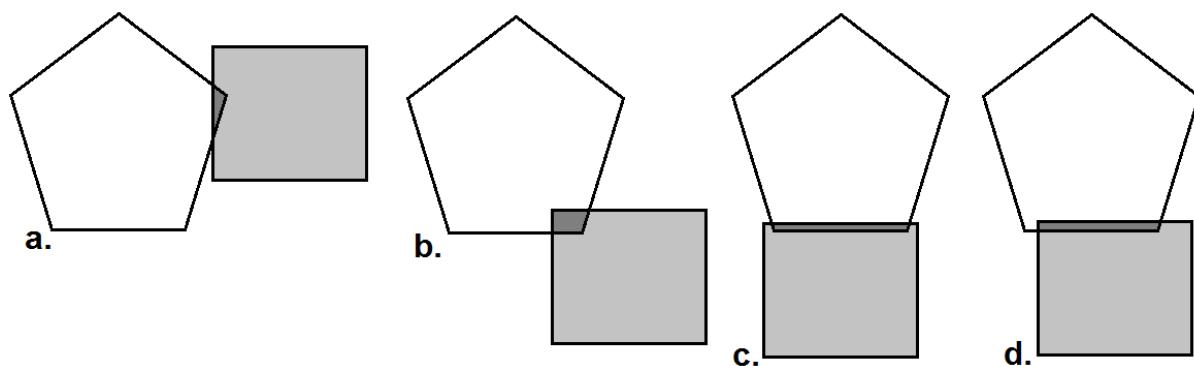


Fig. 5.20 : Quatre situations d'interpénétration, présentant pour chacune d'entre elles des difficultés dans la détermination de la normale au contact et de la distance d'interpénétration

Malgré ces difficultés, les formes polygonales/polyédriques présentent de nombreux avantages dans certaines situations. Ce sont les seules permettant de représenter finement le comportement de particules très anguleuses, et la présence de facettes planes permet leur utilisation dans de nombreux domaines d'application, tels que la modélisation de structures maçonnées (Fig. 5.21).

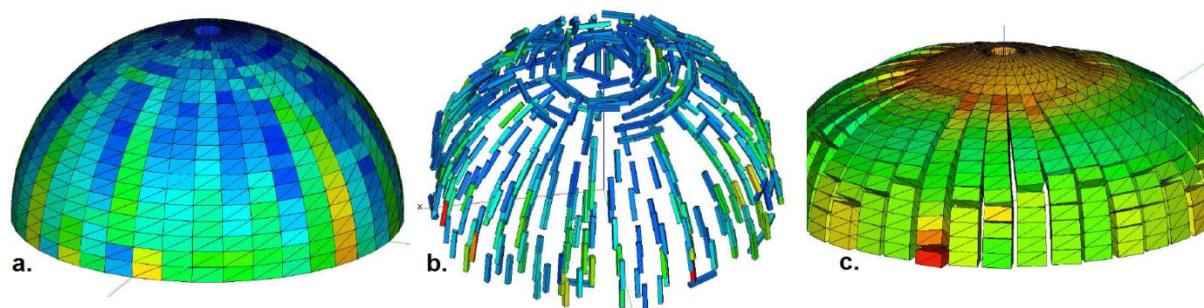


Fig. 5.21 : Modélisation d'un dôme en maçonnerie. a. Etat stable ; b. Réseau des forces de contact principales ; c. Dôme en cours d'effondrement

Une méthode récente permet de profiter des avantages d'une modélisation par polyèdres tout en rendant l'étape de résolution du contact plus robuste : il s'agit de la technique des sphéro-polyèdres. Dans cette méthode, on considère chaque polyèdre, on remplace chacun de ses coins par une petite sphère de rayon r (avec r beaucoup plus faible que la dimension du polyèdre), et on remplace également chaque arête par un cylindre de même axe et de rayon r . Les faces du sphéro-polyèdre ferment ensuite cette forme de la manière adéquate. Bien entendu, on réduit au préalable les dimensions du polyèdre d'une distance r dans chaque direction, pour que les dimensions finales du sphéro-polyèdre soient conformes à celles du polyèdre initial (Fig. 5.22).

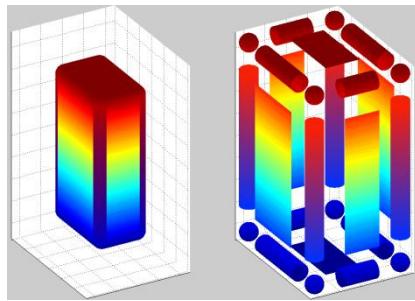


Fig. 5.22 : Modélisation d'une brique parallélépipédique par un sphéro-polyèdre composé de 6 plans, 12 cylindres, et 8 sphères

Cet artifice (qui revient à "arrondir les angles") permet de décomposer l'ensemble des contacts possibles selon les catégories suivantes : sphère-sphère, sphère-cylindre, sphère-plan, cylindre-cylindre. Pour chacune de ces situations, la normale au contact et la distance d'interpénétration peuvent être définies de manière simple et univoque.

De la même manière que pour les clusters, il faut être vigilant sur les propriétés dynamiques du sphéro-polyèdre : celles-ci ne sauraient être en aucune façon reliées à celles des sphères et des cylindres qui le composent (et qui ne sont utilisés ici que comme "contacteurs"), mais doivent être prises identiques à celles du polyèdre d'origine.

Références bibliographiques

- [1]. Thomas, G. et Bonnefoy, O. (2012). Poudres et mélanges granulaires, Technosup, Ellipses
- [2]. Duran, J. (1996). Sable, poudres et grains : introduction à la physique des matériaux granulaires. Cours de l'ESPCI, 266p.
- [3]. Petley, D. (2012). Global patterns of loss of life from landslides, Geology, 40, 927-930.
- [4]. Blott, S. J., and Pye, K. (2008). Particle shape: a review and new methods of characterization and classification. Sedimentology. 55. 31-63
- [5]. Majmudar, T.S., and Behringer, R.P. (2005). Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. Nature, 435, 1079-1082
- [6]. Antony, S.J. (2007). Link between single-particle properties and macroscopic properties in particulate assemblies: role of structures within structures. Philos. Trans. A. Math. Phys. Eng. Sci. 2007 Dec 15; 365(1861): 2879-91.
- [7]. Pouliquen, O. (2001). Les milieux granulaires : Entre fluide et solide. Cours de l'ENSTA, 74p.
- [8]. Yang, Y. (2013). Propagation des ondes acoustiques dans les milieux granulaires confinés. Thèse de doctorat de l'Université Paris Est, 120p.
- [9]. Philipponnat, G. et Hubert, B. (1997). Fondations et ouvrages en terre, Eyrolles, 576p.
- [10]. P. W. Rowe, Proc. R. Soc. London Ser. A 269 (1962) 500.
- [11]. O. Reynolds, Philos. Mag. Ser 5, 50 (1885) 469.
- [12]. S. B. Savage et K. Hutter, the motion of a finite mass of granular material down a rough incline, J. Fluid Mech. 199 (1989) 177-215.
- [13]. C. S. Campbell, P. W. Cleary et M. Hopkins, Large-scale landslide simulations: global deformation, velocities and basal friction, J. Geophys. Res. 100 (1995) 8267-8283.
- [14]. A. Daerr, Dynamical equilibrium of avalanches on a rough plane, Phys. Fluids, 13(7), 2001, 2115-2124
- [15]. K. Saleh et P. Guigon, Mise en oeuvre des poudres : stockage et écoulement des silos ; Techniques de l'Ingénieur, j2255, 2012
- [16]. Cundall, P. A., and Strack O. D. L. (1979): A discrete numerical model for granular Assemblies. Geotechnique. 29. 47-65

- [17]. Allen, M.P., and Tildesley, D.J. (1987). Computer simulation of liquids, Clarendon, Oxford
- [18]. Jean, M. and Moreau, J.J. (1992). Unilaterality and dry friction in the dynamic of rigid body collections. Proc. Contact Mechanics Int. Symp., Ed. A. Curnier, 31-48
- [19]. Radjai, F. and Dubois, F. (2011). Discrete-element Modeling of Granular Materials. Wiley, 425p
- [20]. Scholtès, L. (2008). Modélisation micromécanique des milieux granulaires partiellement saturés. Thèse de doctorat de Grenoble INP, 202p.
- [21]. Johnson, K.L., Kendall, K., and Roberts, A.D. (1971). Surface energy and the contact of elastic solids. Proc. R. Soc. Lond. A., 234, 301-313
- [22]. Derjaguin, B. Muller, V., a,d Toporov, Y. (1975). J. Colloid Interface Sci., 53, p314.
- [23]. Saussine, G. (2006). Contribution à la modélisation de granulats tridimensionnels : application au ballast. Thèse de doctorat de l'Université Montpellier 2, 224p.
- [24]. Mollon, G., and Zhao, J. (2012), "Fourier-Voronoi-based generation of realistic samples for discrete modelling of granular materials", *Granular Matter*, 14(2012), 621-638
- [25]. Mollon, G., and Zhao, J. (2014), "3D generation of realistic granular samples based on random fields theory and Fourier shape descriptors", *Computer Methods for Applied Mechanics and Engineering*, 279, 46-65