20 stycznia 2020

Paweł Golik
298868
G1

Zmodyfikowana metoda Eulera dla układu dwóch równań.

Projekt nr 30

1 Wstęp

Zamierzeniem projektu jest zbadanie problemu rozwiązania układu dwóch równań różniczkowych: $y'(t) = f(t, y(t), x(t)) \quad \wedge \quad x'(t) = f(t, x(t), y(t))$, dla $t \in [a, b]$ z warunkiem początkowym $x(a) = x_0 \wedge y(a) = y_0$.

W projekcie uwzględniono zagadnienie wpływu liczby punktów n w przedziale $[a, b]$ na dokładność przybliżeń. Wykreślono także poglądowe wykresy funkcji będących rozwiązaniami układu równań otrzymanych badaną metodą oraz dla sprawdzenia poprawności - wbudowaną funkcją środowiska MATLAB.

Algorytm przetestowany został na różnych przykładach układów dwóch równań różniczkowych, na różych przedziałach $[a, b]$ dla paru wartości liczby kroków n. W większości przypadków algorytm przybliżał rozwiązania z dobrą dokładnością, która zależała od doboru warunków początkowych oraz liczby kroków w przedziale. Dla każdego z przykładów można było dobrać te parametry tak, aby wielkość błędu wzrosła, co dowodzi o konieczności dobrej znajomości zmodyfikowanej metody Eulera w celu stosowania jej do rozwiązywania układów równań.

2 Opis użytych metod

Rozwiązywanie układu dwóch równań różniczkowych:

W złożonych problemach praktycznych uzyskanie rozwiązania analitycznego często jest niemożliwe.
Nawet jeśli mamy rozwiązanie analityczne, jego wykorzystanie często jest drogie (wymaga wielu operacji arytmetycznych) oraz może być obarczone większymi błędami niż skorzystanie z rozwiązania numerycznego.
Z drugiej strony niestabilne równania rózniczkowe ciężko jest rozwiązywać numerycznie.

Rozpatrywać będziemy metody dyskretne, to jest takie, które dają przybliżone rozwiązanie w postaci dyskretnej (jako wartości dla skończonej liczby argumentów).

Punkty, w których poszukujemy przybliżonego rozwiązania nazywamy węzłami. Obiera się je z góry, albo wybiera się kolejno w trakcie konstruowania rozwiązania przybliżonego.

Oznaczmy węzły przez $x_0, x_1, ..., x_n$.
Odległość $x_{i+1} - x_i$ (i = 0, ..., n-1) nazywa się krokiem całkowania.

Często przyjmuje się, że węzły są równoodległe, tj. $x_i = a + hi$, $i = 0, ..., n$, gdzie $h = \frac{b-a}{n}$.

Przez $y_i^{'}$ będziemy oznaczać przybliżone wartości funkcji y w punktach x_i.

Zmodyfikowana metoda Eulera:

Wiele metod rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych otrzymuje się przez zastąpienie pochodnych w równaniu różniczkowym wyrażeniami, które przybliżają pochodne.

W równaniu

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

pochodną $y'(x)$ zastąpmy ilorazem różnicowym

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Mamy

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x)),$$

co pozwala obliczyć przybliżoną wartość funkcji $y(x+h)$ korzystając z wartości $y(x)$. Jest to metoda Eulera.

Zmodyfikowana metoda Eulera:

$$y'_{i+1} = y'_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y'_i + \frac{h}{2} f(x_i, y'_i))$$

Metoda jest jednokrokowa (korzysta tylko z informacji z poprzedniego kroku, tj. przy obliczaniu y'_{i+1} wykorzystuje się tylko y'_i).

Jest jawna - przybliżenie y'_{i+1} występuje tylko po lewej stronie wzoru.

Przybliżenie rozwiązania może być bardzo niedokładne (h musi być małe).

Błąd się kumuluje.

3 Działanie programu:

Początkowo program wyznacza wartości kolejnych przybliżeń rozwiązań układu $x(t)$ oraz $y(t)$ dla każdego z n punktów równoodległych o h w przedziale $[a, b]$, przy pomocy metody zmodyfikowanej Eulera.

Następnie dzięki wbudowanej funkcji MATLAB *dsolve* dokonano sprawdzenia metody:

```
syms x(tt) y(tt)
ode1 = diff(x) == x_rr(tt,x,y); %pobranie I-szego rownania z funkcji x_rr
ode2 = diff(y) == y_rr(tt,x,y); %pobranie II-giego rownanie z funkcji y_rr
odes = [ode1; ode2];
cond1 = x(a) == x_t0; %warunki początkowe  na początku programu
cond2 = y(a) == y_t0; %warunki początkowe na początku programu
conds = [cond1; cond2];
[xSol(tt), ySol(tt)] = dsolve(odes,conds);
```

Powyższy kod oblicza dokładne funkcje będące rozwiązaniami układu przy zadanych warunkach początkowych.

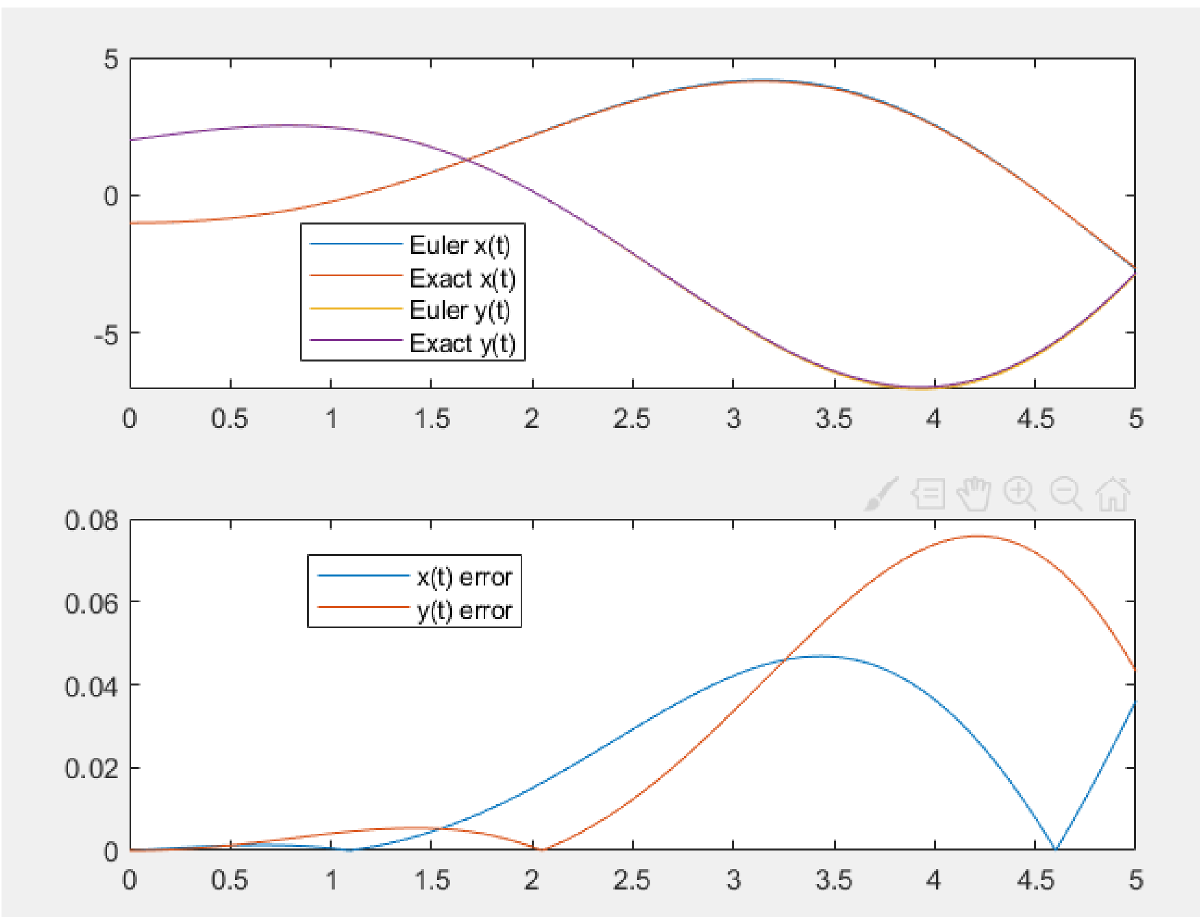
Otrzymane funkcje pozwoliły w dalszej kolejności na obliczenie błędu w każdym z n punktów oraz na wykreślenie dokładnych rozwiązań, a także ich przybliżeń (wbudowana funkcja *plot*.)

4 Prezentacja przykładów oraz wyników

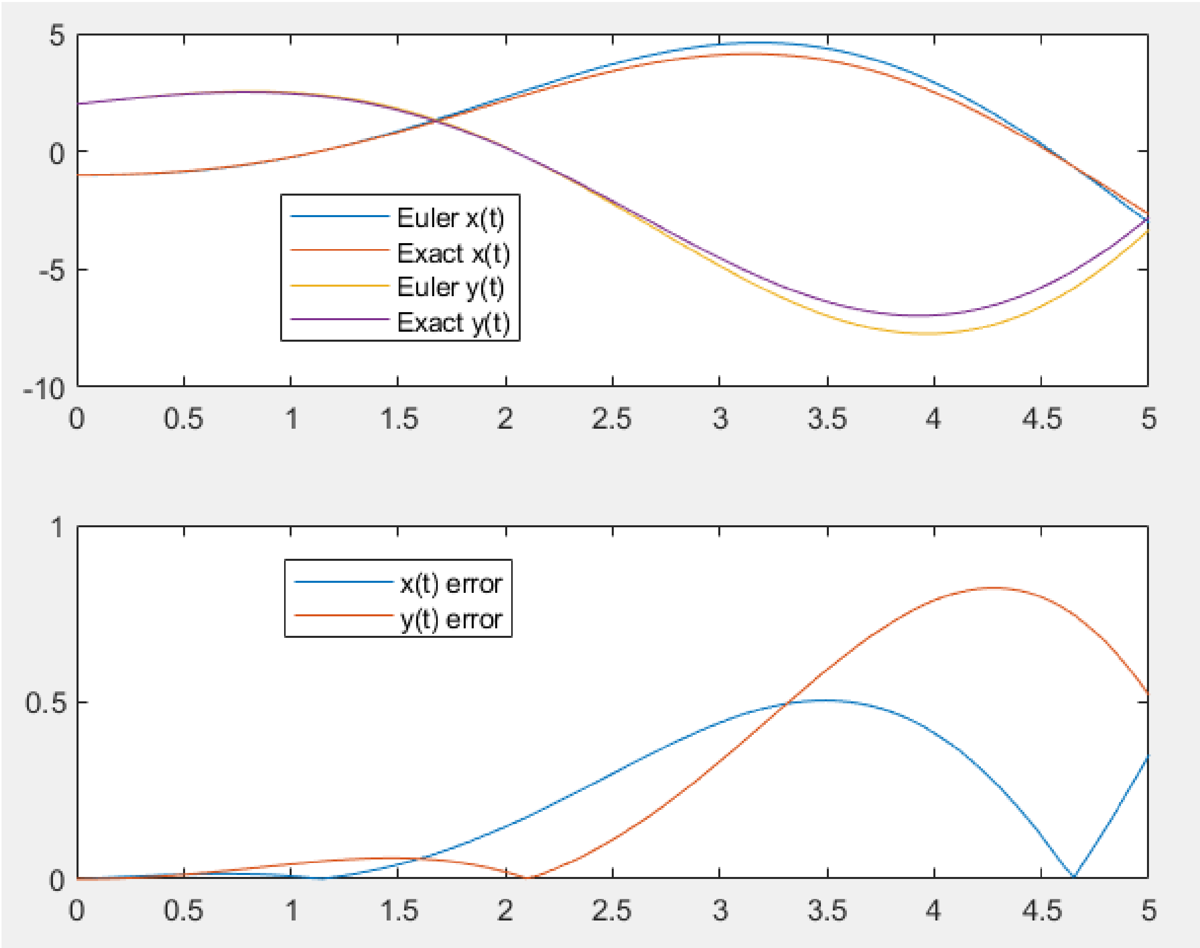
Zachowanie metody dla różnej liczby kroków - n.

1. $\begin{cases} x' = x + y - cos(t) \\ y' = -2x - y + sin(t) + cos(t) \end{cases}$

Przybliżenie dla przedziału $[0, 5]$, warunków początkowych: $x(0) = -1$, $y(0) = 2$ oraz dla 1000 kroków.



Przybliżenie dla przedziału $[0, 5]$, warunków początkowych: $x(0) = -1$, $y(0) = 2$ oraz dla 100 kroków.

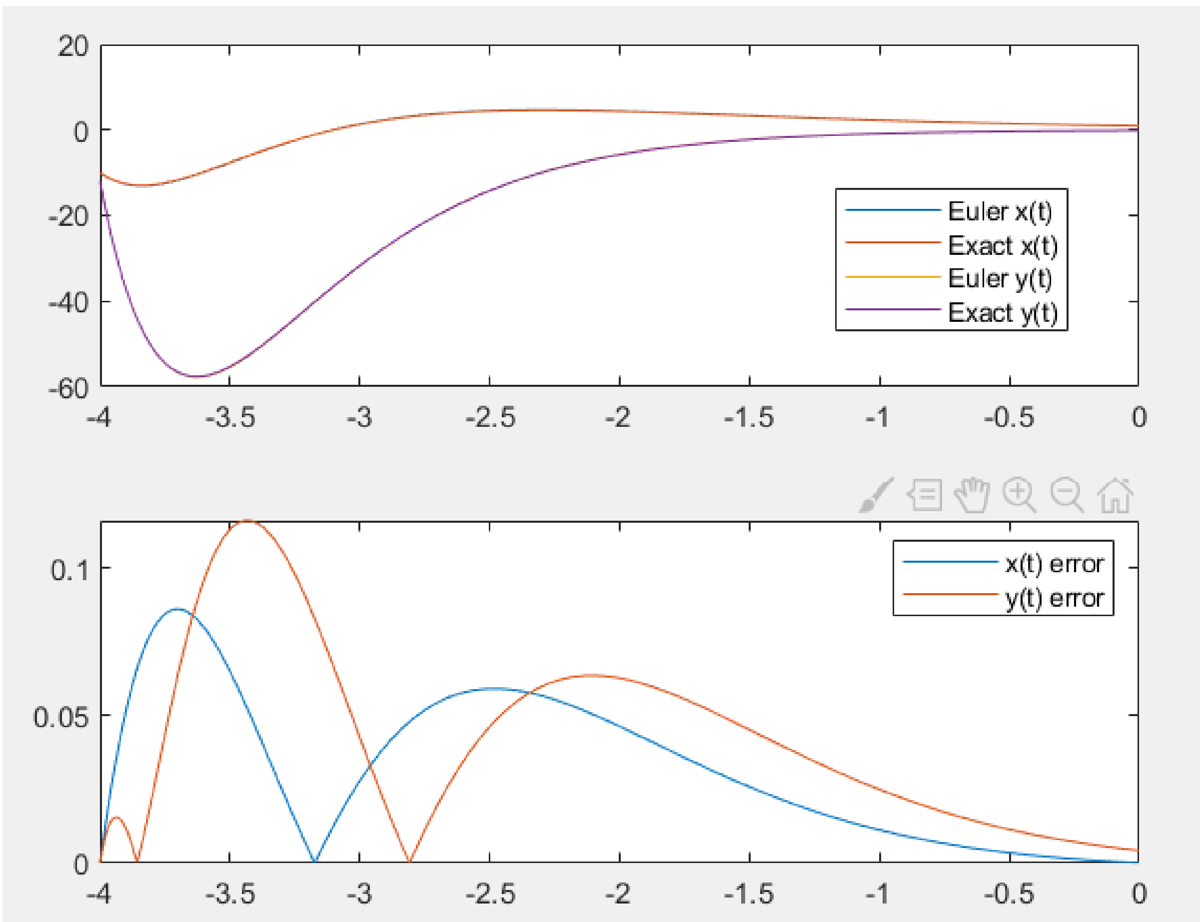


Zmniejsznie liczby kroków spowodowało znaczące pogorszenie się błędu przybliżenia.

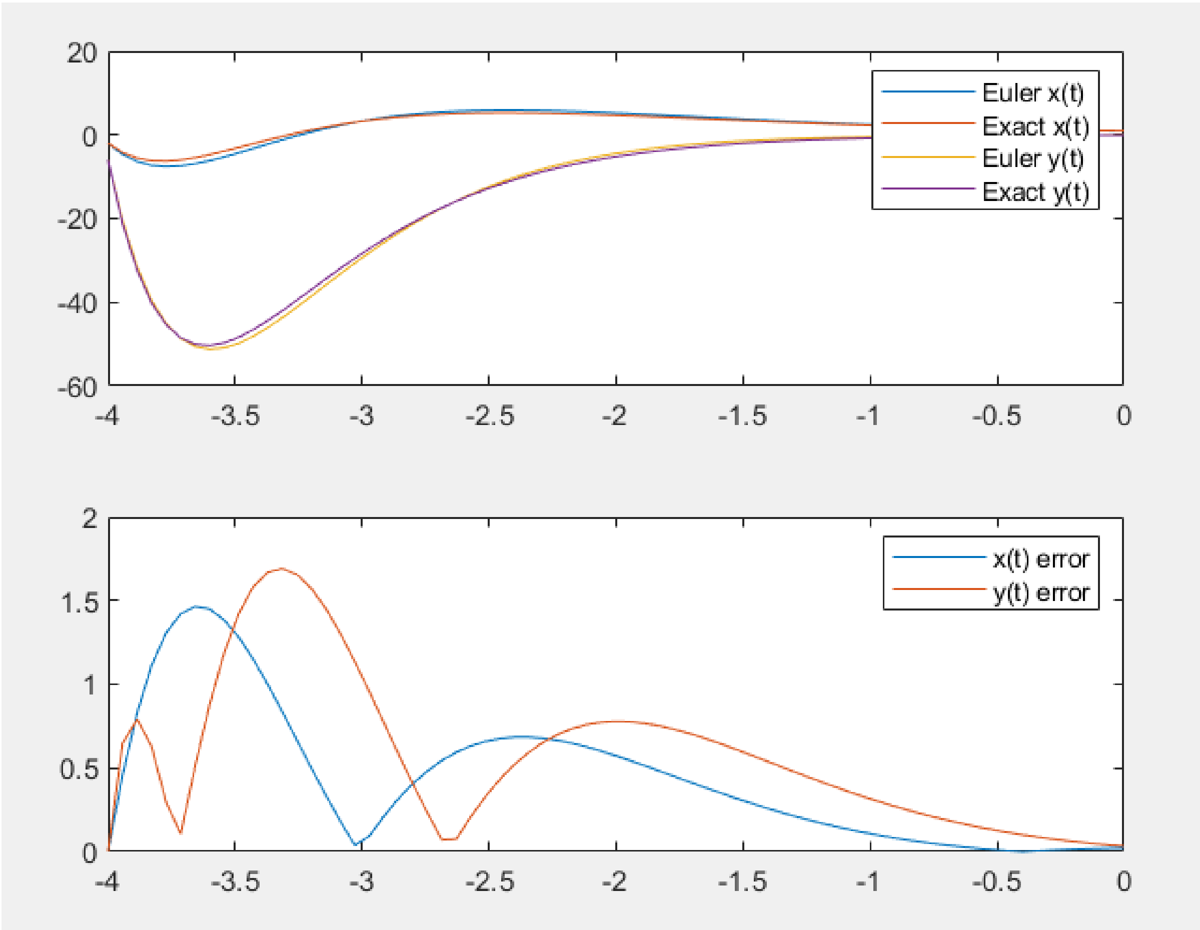
Kolejny przykład demonstruje wpływ wyboru zagadnienia początkowego na stabliność algorytmu:

2. $$\begin{cases} x' = -y - e^{-t} \\ y' = 6x - 5y - 6e^{-t} \end{cases}$$

Przybliżenie dla przedziału $[-4, 0]$, warunków początkowych: $x(-4) = -10$, $y(-4) = -12$ oraz dla 1000 kroków.



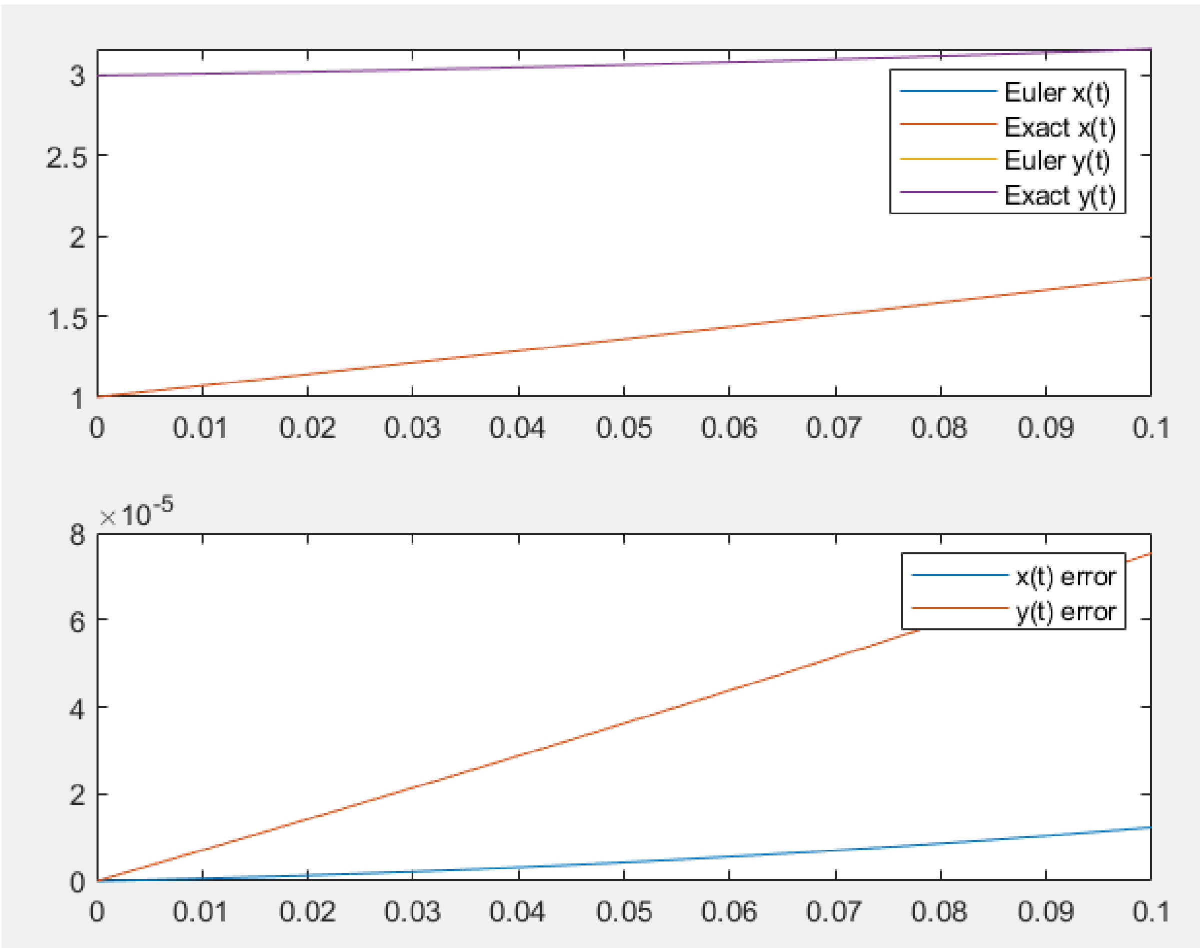
Przybliżenie dla przedziału $[-4, 0]$, warunków początkowych: $x(-4) = -2$, $y(-4) = -6$ oraz dla 1000 kroków.



Niewielka zmiana warunku początkowego wpłynęła na stabilność algorytmu.

3. $$\begin{cases} x' = x + y + 3 \\ y' = -2x - 2t - 1 \end{cases}$$

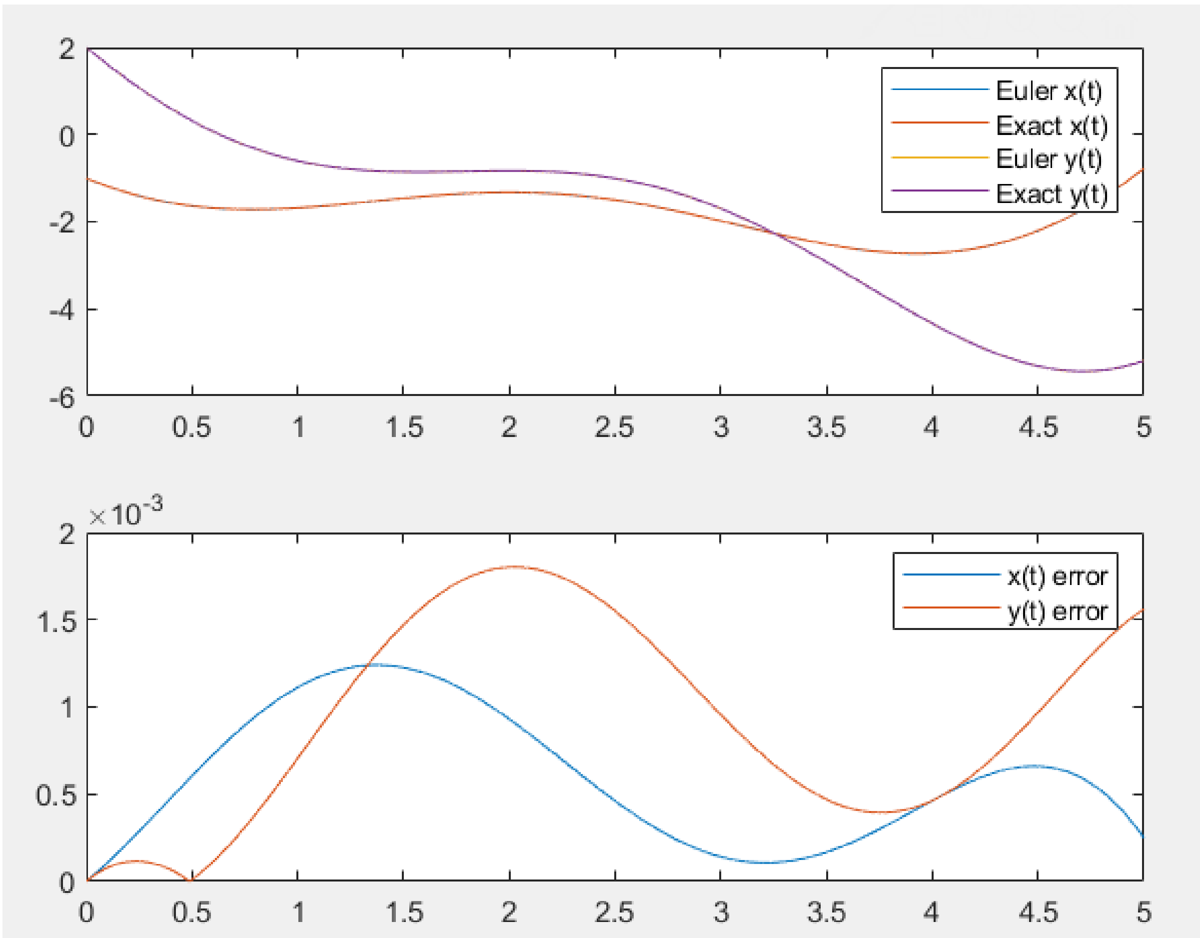
Przybliżenie dla przedziału $[0, 0.1]$, warunków początkowych: $x(0) = 1$, $y(0) = 3$ oraz dla 1000 kroków.



Długość przedziału także ma znaczenie, należy dobrać liczbę kroków odpowiednio do długości przedziału. Stosując tę samą co dotychczas wartość $n = 1000$ otrzymaliśmy o wiele lepsze przybliżenie po zmianie przedziału na krótszy - zagęszczenie punktów wzrosło.

4. $\begin{cases} x' = x - y + sin(t) + cos(t) \\ y' = 2x - y + 2sin(t) \end{cases}$

Przybliżenie dla przedziału $[0, 5]$, warunków początkowych: $x(0) = -1$, $y(0) = 2$ oraz dla 1000 kroków.



Przykład dobrego dobrania wszystkich parametrów. Uzyskaliśmy sensowne wartości błędów przy jednoczesnym zachowaniu stabilności algorytmu.

5 Wnioski i interpretacja

Zmodyfikowana metoda Eulera to przykład algorytmu rzędu 2. rozwiązującego układ równań różniczkowych. W większości przypadków przybliżanie rozwiązań daje zadawalające rezultaty, jednak metoda wymaga dobrego zrozumienia jej działania, gdyż zły dobór parametrów może prowadzić do znacznego pogorszenia się rzędu wielkości błędu, co przy często praktycznych zastosowań równań różniczkowych może implikować bezużyteczność wykonanych obliczeń.

Szukając rozwiązań powyższą metodą na uwadze należy mieć dobór odpowiednich warunków początkowych determinujących krzywą całkową, a także liczbę kroków w zależności od długości przedziału. Złożoność algorytmu jest liniowa co przy zbyt dużej liczbie iteracji może prowadzić do zbyt długiego czasu działania programu, dlatego w takich przypadkach należy rozważyć wybór metody wyższego rzędu.

6 Bibliografia

1. "Metody numeryczne" Z. Fortuna B. Macukow J.Wąsowski
2. "Metody numeryczne 2 - wykład" I. Wróbel