МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2

по дисциплине «Вычислительная математика»

Тема: Исследование обусловленности задачи нахождения корня уравнения на примере линейной функции.

Студент гр. 1304 ____________________ Шаврин А.П.

Преподаватель ____________________ Попова Е.В.

Санкт-Петербург
2022

Цель работы.

Исследование обусловленности задачи нахождения корня уравнения на примере линейной функции.

Задание.

Используя программы-функции BISECT и Round, исследовать обусловленность задачи нахождения корня уравнения $f(x) = 0$. Значения функции $f(x)$ следует вычислить приближенно с точностью Δ, варьируемой в пределах от 0.1 до 0.000001. Порядок выполнения работы следующий:

1) Отделение корня уравнения $f(x) = 0$.

2) Составление подпрограммы вычисления функции $f(x)$ для параметра с вводимая с клавиатуры.

3) Составление головной программы, вычисляющей корень уравнения с заданной точностью ε, и содержащую обращение к подпрограмме F, программам-функциям BISECT, Round и представление результатов.

4) Проведение вычислений по программе, варьируя значения параметров.

5) Анализ результатов.

1. Параметр с варьируется от а до в (допустимых). Параметры eps и delta постоянны и равны значению 0.01.

2. Параметр с постоянен и равен 5, eps постоянен и равен 0.01, delta варьируется от 0.00001 до 0.1.

3. Параметр с постоянен, delta постоянна и равна 0.01, eps варьируется от 0.000001 до 10.

4. Параметр с постоянен, delta и eps одновременно варьируются от 0.000001 до 1. Построить график зависимости eps от количества итераций.

5. Параметр eps постоянен и равен 0.01, с и delta варьируются независимым друг от друга образом.

Основные теоретические положения.

Под обусловленностью вычислительной задачи понимают чувствительность ее решения к малым погрешностям входных данных. Задачу называют хорошо обусловленной, если малым погрешностям входных данных отвечают малые погрешности решения, и плохо обусловленной, если возможны сильные изменения решения. Количественной мерой степени обусловленности вычислительной задачи является число обусловленности, которое можно интерпретировать как коэффициент возможного возрастания погрешностей в решении по отношению к вызвавшим их погрешностям входных данных. Пусть между абсолютными погрешностями входных данных x и решения y установлено неравенство:

$$\Delta(y^*) \leq \nu_\Delta . \Delta(x^*),$$

где x* и y* - приближённые входные данные и приближённое решение соответственно. Тогда величина ν_Δ. называется абсолютным числом обусловленности. Если же установлено неравенство

$$\delta(y^*) \leq \nu_\delta \cdot \delta(x^*)$$

между относительными ошибками данных и решения, то величину ν_δ называют относительным числом обусловленности. Для плохо обусловленной задачи $\nu \gg 1$. Грубо говоря, если $\nu_\delta = 10^N$, где $\nu -$ относительное число обусловленности, то порядок N показывает число верных цифр, которое может быть утеряно в результате по сравнению с числом верных цифр входных данных. Ответ на вопрос о том, при каком значении ν задачу следует признать плохо обусловленной, зависит, с одной стороны, от предъявляемых требований 3 к точности решения и, с другой, – от уровня обеспечиваемой точности исходных данных. Например, если требуется найти решение с точностью 0.1%, а входная информация задается с точностью 0.02%, то уже значение ν = 10 сигнализирует о плохой обусловленности. Однако, при тех же требованиях к точности результата, гарантия, что исходные данные задаются с точностью не ниже 0.0001%, означает, что при $\nu = 10^3$ задача хорошо обусловлена. Если рассматривать задачу вычисления корня уравнения $y = f(x)$, то роль числа обусловленности будет играть величина

$$\nu_\Delta = \frac{1}{|f'(x^0)|},$$

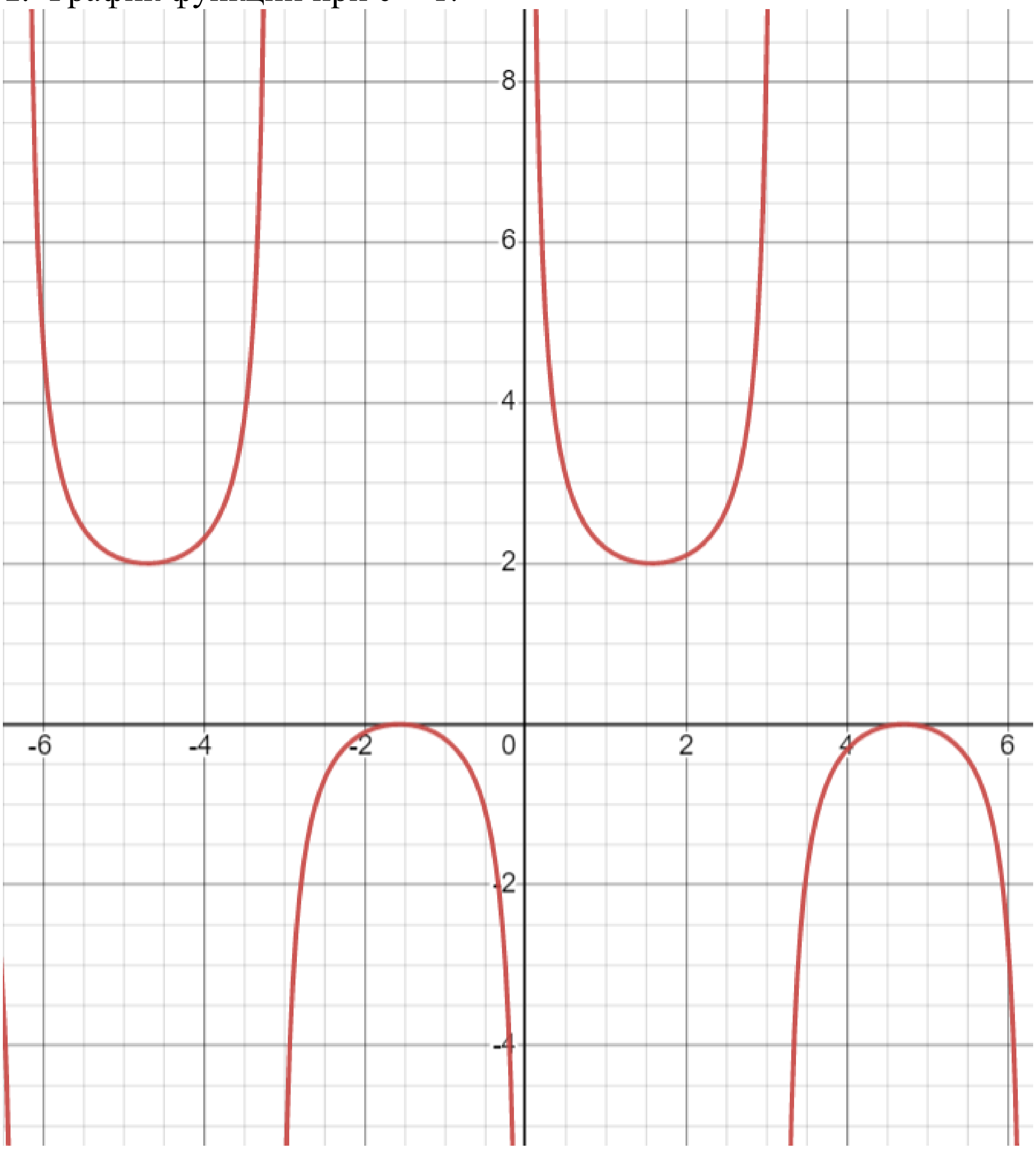
где x^0 – корень уравнения.

Выполнение работы.

Вариант 29.

Уравнение: f(x) = 1/(c*sin(x))+1;

1. График функции при c = 1:



Область определения функции от 0 до π.

2. Определено, что корень уравнения 1/(c*sin(x))+1 находится на отрезке [-π/2 + πk; 0 + πk], при c >= 1 (далее будем считать, что k = 0).
   Локализация корня = [-π; -π/2].

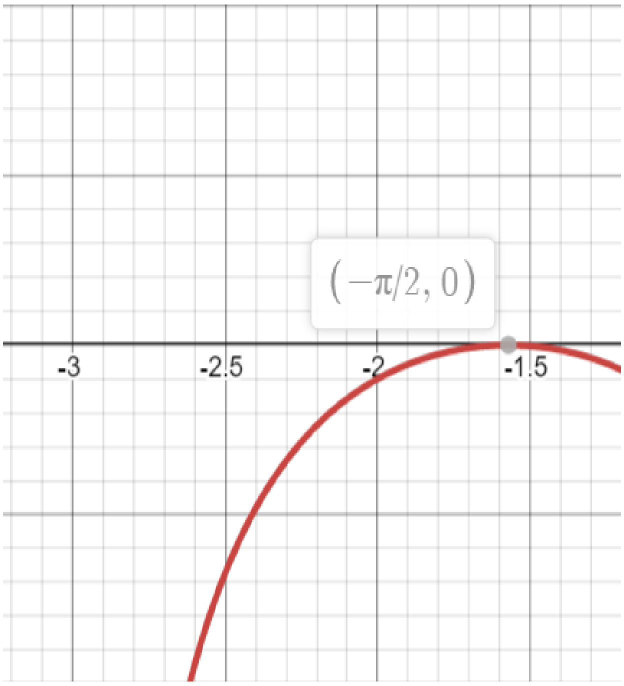


График функции при c = 1

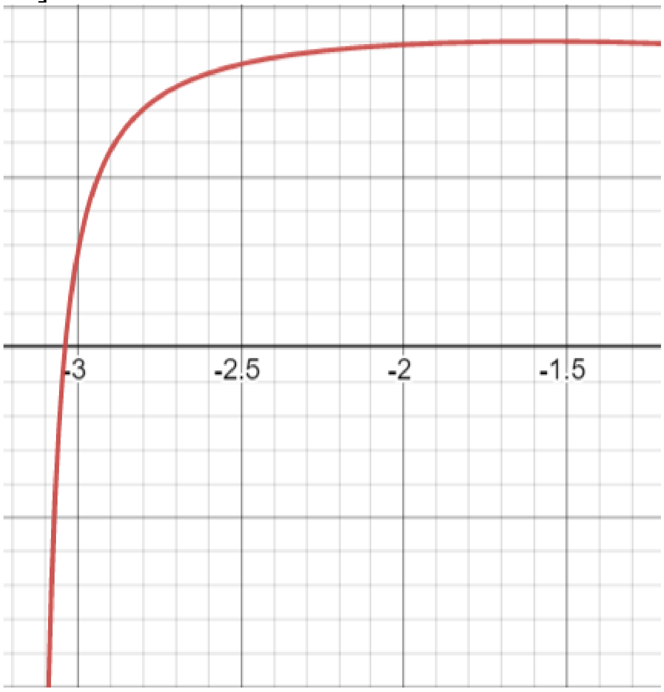


График функции при c = 10

3. Была написана функция F, которая принимает на вход вещественные аргументы x и c. Возвращается значение функции 1/(c*sin(x))+1.

4. Написана функция main, в которой происходит считывание с клавиатуры значений c, ε, Δ и вывод в консоль округленного значения корня, значение функции в точке, а также кол-во итераций, понадобившееся для нахождения корня.

5. Проведены вычисления и выполнен анализ результатов.

1) Параметр c варьируется от 1 до 5. Параметры eps и delta постоянны и равны значению 0.01.

   Результаты вычислений приведены в таблице 1.

   Таблица 1: Результаты вычислений 1.

C	Δ	ε	x	N	f(x)	ν_Δ	$\nu_\Delta \, max$	Оценка
1	0.01	0.01	-1.5708	1	0	272241,8	1	плохо

3	0.01	0.01	-2.81025	9	-0.02	0,335748	1	хорошо
5	0.01	0.01	-2.93297	9	0.03	0,219232	1	хорошо
7	0.01	0.01	-3.0066	9	-0.06	0,127952	1	хорошо
10	0.01	0.01	-3.03115	9	0.09	0,122225	1	хорошо
20	0.01	0.01	-3.08023	9	0.18	0,075355	1	хорошо
30	0.01	0.01	-3.12932	9	-0.63	0,004519	1	хорошо

Вывод: при заданных eps и delta (0.01) данная задача обусловлена хорошо при с больше 1.

2) Параметр с постоянен и равен 5, eps постоянен и равен 0.01, delta варьируется от 0.00001 до 0.1.

Результаты вычислений приведены в таблице 2.

Таблица 2: Результаты вычислений 2.

C	Δ	ε	x	N	f(x)	ν_Δ	$\nu_\Delta\ max$	Оценка
5	0.1	0.01	-2.93297	9	0	0,219232	0,1	плохо
5	0.01	0.01	-2.93297	9	0.03	0,219232	1	хорошо
5	0.001	0.01	-2.93297	9	0.034	0,219232	10	хорошо
5	0.0001	0.01	-2.93297	9	0.0343	0,219232	100	хорошо
5	0.00001	0.01	-2.93297	9	0.03434	0,219232	1000	хорошо

Вывод: при заданных eps (0.01) и с = 5 данная задача обусловлена, хорошо, при значениях delta меньше 0.1.

3) Параметр с постоянен, delta постоянна и равна 0.01, eps варьируется от 0.000001 до 10.

Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3: Результаты вычислений 3.

C	Δ	ε	x	N	f(x)	ν_Δ	$\nu_\Delta\, max$	Оценка
5	0.01	0.000001	-2.94024	22	0	0,204113	0,0001	плохо
5	0.01	0.00001	-2.94025	19	0	0,204093	0,001	плохо
5	0.01	0.0001	-2.94007	15	0	0,204461	0,01	плохо
5	0.01	0.001	-2.94064	12	0	0,203298	0,1	плохо
5	0.01	0.01	-2.93297	9	0.03	0,219232	1	хорошо
5	0.01	0.1	-2.94524	5	-0.03	0,194036	10	хорошо
5	0.01	1	-1.5708	2	0.8	1361209	100	хорошо
5	0.01	10	0	0	-9.22337e+16	-	1000	-

Вывод: при заданных delta (0.01) и c = 5 данная задача обусловлена, хорошо, при значениях eps от 0.01 до 1.

4) Параметр c постоянен, delta и eps одновременно варьируются от 0.000001 до 1.

Результаты вычислений приведены в таблице 4.

График зависимости eps от количества итераций на рисунке.

Таблица 4: Результаты вычислений 4.

C	Δ	ε	x	N	f(x)	ν_Δ	$\nu_\Delta\, max$	Оценка
5	0.000001	0.000001	-2.94024	22	2e-06	0,204113	1	хорошо
5	0.00001	0.00001	-2.94025	19	-5e-05	0,204093	1	хорошо
5	0.0001	0.0001	-2.94007	15	0.0008	0,204461	1	хорошо
5	0.001	0.001	-2.94064	12	-0.002	0,203298	1	хорошо
5	0.01	0.01	-2.93297	9	0.03	0,219232	1	хорошо
5	0.1	0.1	-2.94524	5	0	0,194036	1	хорошо
5	1	1	-1.5708	2	1	1361209	1	плохо

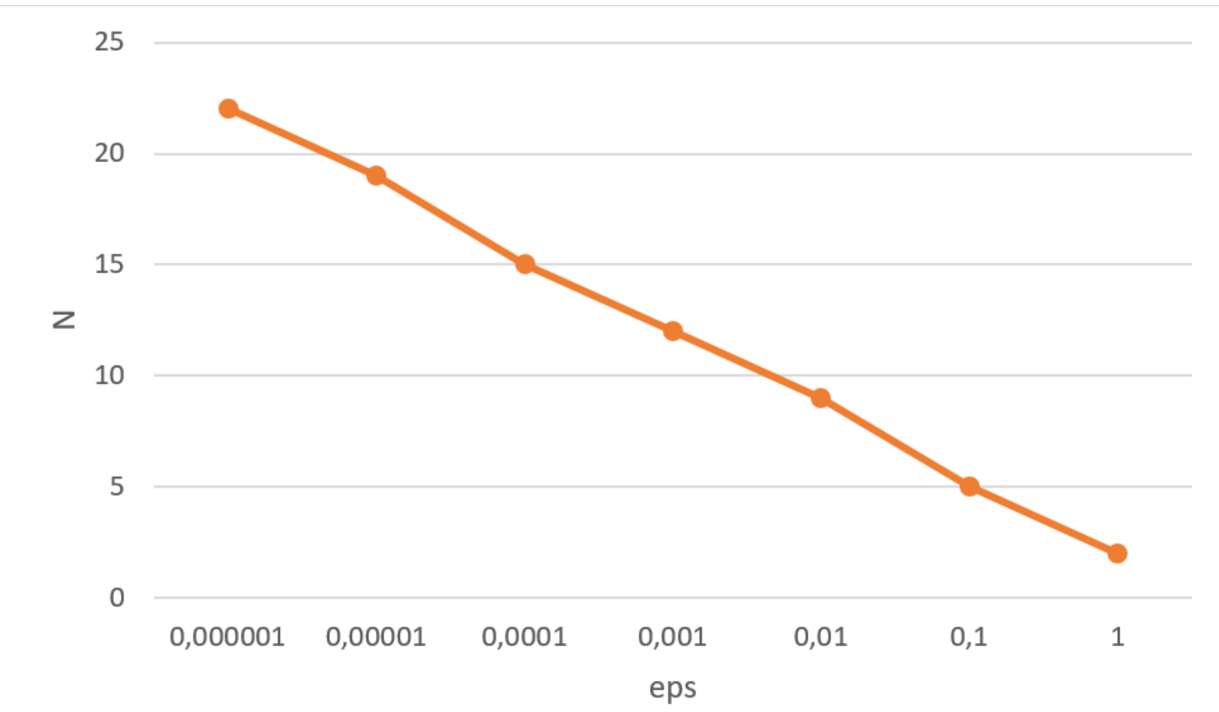


Рисунок: График зависимости eps от количества итераций (N)

Вывод: при заданном значении c = 5 данная задача обусловлена, хорошо, при значениях eps и delta от 0.000001 до 0.1.

5) Параметр eps постоянен и равен 0.01, c и delta варьируются независимым друг от друга образом.

Результаты вычислений приведены в таблице 5.

Таблица 5: Результаты вычислений 5.

C	Δ	ε	x	N	f(x)	ν_Δ	$\nu_\Delta\ max$	Оценка
1	0.000001	0.01	-1.5708	1	0	272241,8	10000	хорошо
3	0.001	0.01	-2.81025	9	-0.025	0,335748	10	хорошо
5	0.1	0.01	-2.93297	9	0	0,219232	0.1	плохо
7	1	0.01	-3.0066	9	0	0,127952	0.01	плохо
10	0.0001	0.01	-3.03115	9	0.0927	0,122225	100	хорошо
20	0.00001	0.01	-3.08023	9	0.18462	0,075355	1000	хорошо
30	0.01	0.01	-3.10478	9	0.09	0,040664	1	плохо

Вывод: при заданном значении eps (0.01) данная задача обусловлена, хорошо, при значениях delta от 0.001 до 0.000001.

Выводы.

Была исследована обусловленность задачи нахождения корня уравнения функции $f(x) = 1/(c*\sin(x)) + 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

Название файла: lab2.cpp

```
#include <iostream>
#include <cmath>

double F(double x, double c){
    return 1/(c*sin(x))+1;
}

double BISECT(double Left, double Right, double Eps, double c, int &N){
    double E = fabs(Eps)*2.0;
    double FLeft = F(Left, c);
    double FRight = F(Right, c);
    double X = (Left + Right) / 2.0;
    double Y;

    if (FLeft*FRight>0.0){
        puts("РќРµРІРµСЂРЅРѕ Р·Р°РґР°РЅ РёРЅС‚РµСЂРІР°Р»\n");
        exit(1);
    }

    if (Eps <= 0.0){
        puts("РќРµРІРµСЂРЅРѕ Р·Р°РґР°РЅР° С‚РѕС‡РЅРѕСЃС‚СЊ\n");
        exit(1);
    }

    N = 0;
    if (FLeft == 0.0)
        return Left;

    if (FRight == 0.0)
        return Right;

    while ((Right - Left) >= E){
        X = 0.5*(Right + Left);
        Y = F(X, c);

        if (Y == 0.0)
            return (X);

        if (Y*FLeft < 0.0)
            Right = X;
        else{
            Left = X; FLeft = Y;
        }
        N++;
    };
    return(X);
}

double Round(double X, double Delta){
    if (Delta <= 1E-9){
        puts("РќРµРІРµСЂРЅРѕ Р·Р°РґР°РЅР° С‚РѕС‡РЅРѕСЃС‚СЊ
РѕРєСЂСѓРіР»РµРЅРёСЏ\n");
```

```
        exit(1);
    }

    if (X>0.0)
        return (Delta*(long((X / Delta) + 0.5)));
    else
        return (Delta*(long((X / Delta) - 0.5)));
}

int main(){
    int N = 0;
    double delta, eps, c;

    std::cout<<"c = ";
    std::cin>>c;
    std::cout<<"delta = ";
    std::cin>>delta;
    std::cout<<"eps = ";
    std::cin>>eps;

    double root = BISECT(-M_PI, -M_PI/2, eps, c, N);
    double value = Round(F(root, c), delta);

    double obusl = 1/fabs(-cos(root)/(c*pow(sin(root), 2)));
    double obusl_max = eps/delta;
    bool est = obusl < obusl_max;

    std::cout<<"\nroot = "<<root<<"\nvalue = "<<value<<"\nN =
"<<N<<"\n\nobusl = "<<obusl<<"\nobusl_max = "<<obusl_max<<"\nest =
"<<est<<'\n';
    return 0;
}
```