Exercise 1

a

$n^{\frac{5}{6}}$, $64^{\sqrt{n}}$, n, $\frac{\sqrt{n}}{\log^4 n}$, $n!$, $\log^{50} n$, $n^{\frac{6}{5}}$, $\log(n!)$, 4^n

- 純對數的乘方 $\log^{50} n$ 增長最慢。
- $\dfrac{\sqrt{n}}{\log^4 n}$ 增長最終會超過單純的對數，但慢於任意正指數次方的 $n^{\alpha}(\alpha > 0)$。
- 對於 $\log(n!)$，可寫為：

$$\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k \leq \sum_{k=1}^{n} \log n = n \log n \quad \Rightarrow \quad \log(n!) = O(n \log n).$$

- 幾種多項式以指數大小排列：$n^{\frac{5}{6}} < n < \log(n!) \approx n \log n < n^{\frac{6}{5}}$。
- $64^{\sqrt{n}} = 2^{6\sqrt{n}}$，其增長比多項式快，但比 C^n（純指數函數）慢，因此有

$$n^{\frac{6}{5}} < 64^{\sqrt{n}} < 4^n.$$

- 最後，$n!$ 增長最快。

綜合以上，整體由小到大的排序為：

$$\log^{50} n < \frac{\sqrt{n}}{\log^4 n} < n^{\frac{5}{6}} < n < \log(n!) < n^{\frac{6}{5}} < 64^{\sqrt{n}} < 4^n < n!.$$

b

1. Prove or disprove: $32^{\sqrt[3]{n}} = \Omega(4^n)$

假設 $32^{\sqrt[3]{n}} \in \Omega(4^n)$，則存在常數 $c > 0$ 與 $n_0 > 0$，使得 $\forall n \geq n_0, \quad 32^{\sqrt[3]{n}} \geq c \cdot 4^n$.
注意到 $32 = 2^5$ 以及 $4 = 2^2$，故不等式可改寫為 $2^{5\sqrt[3]{n}} \geq c \cdot 2^{2n}$.
取對數後得到 $5\sqrt[3]{n} \geq 2n + \log_2 c$.
由於當 $n \to \infty$ 時，$\sqrt[3]{n}$ 的增長遠慢於 n，因此，對足夠大的 n，不等式不成立，故 $32^{\sqrt[3]{n}} \neq \Omega(4^n)$.

2. Prove or disprove: $\sqrt{n} \log_2 n = o(n)$

假設 $\sqrt{n} \log_2 n = o(n)$ 意味著對任一常數 $c > 0$，存在 $n_0 > 0$ 使得 $\forall n \geq n_0, \quad \sqrt{n} \log_2 n \leq c \cdot n$.
由於 $\log_2 n = 2 \log_2 \sqrt{n}$，不等式可改寫為 $\frac{\log_2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \leq \frac{c}{2}$.
已知極限 $\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$，令 $x = \sqrt{n}$ 得 $\lim_{n \to \infty} \frac{\log_2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 0$.
因此，對足夠大的 n，不等式成立，證明了 $\sqrt{n} \log_2 n = o(n)$.

Exercise 2

a

程式碼對於每個 i（從 1 到 n），內層迴圈執行 i^2 次，總執行次數為

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i^2} 1 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = O(n^3).$$

b

程式碼對於每個 i（從 1 到 n），內層迴圈執行 $2i+1$ 次，將其加總

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+1) = 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = n^2 + 2n = O(n^2).$$

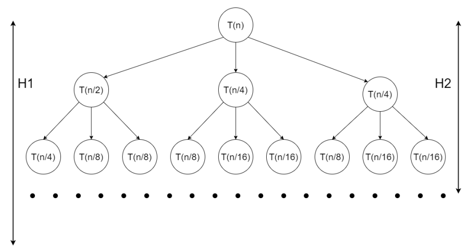
Exercise 3

a

使用 Recursive Tree method 來分析遞迴關係 $T(n) = 2 \cdot T(n/4) + T(n/2) + n$，可以觀察到：
第 0 層：只有一個節點為根 (root)，成本為 $O(n)$.
第 1 層：共三個節點，分為兩個大小為 $n/4$ 的子問題和一個大小為 $n/2$ 的子問題，因此這一層的總成本為：

$$2 \cdot T(n/4) + T(n/2) + n = O(n).$$

第 2 層：每個節點的大小進一步縮小，並且每層的額外工作（如 $O(n)$）也會被計算。
這樣，我們可以看到在每一層，成本保持為 $O(n)$.



第一個節點完成的深度為 $\log_4 n$ (H2)，所有節點都完成的深度為 $\log_2 n$ (H1).
因此時間複雜度的下界是 $n \cdot \log_4 n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \log_2 n$，上界是 $n \cdot \log_2 n$.
上下界僅相差一個常數，可推論 $T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$.

b

使用 Master Theorem 分析 $T(n) = 3 \cdot T(n/7) + \sqrt{n}$:
$a = 3$, $b = 7$, $\log_b a = \log_7 3 \approx 0.564$,
$f(n) = n^{1/2} \in O(n^{\log_7 3 - \varepsilon})$ where $\varepsilon = 0.01$,
$\Rightarrow$ Case 1,
$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_7 3})$.

c

先對 $T(n) = 4 \cdot T(n^{\frac{1}{4}}) + \log_2 n$ 做變數變換：
設 $n = 2^m$, $n^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{m}{4}}$,
設 $S(m) = T(2^m) = T(n) \Rightarrow S(\frac{m}{4}) = T(2^{\frac{m}{4}}) = T(n/4)$, $f(n) = \log_2 2^m = m$,
重寫 $T(n) = S(m) = 4 \cdot S(\frac{m}{4}) + m$.
使用 Master Theorem 分析 $S(m) = 4 \cdot S(\frac{m}{4}) + m$:

$a = 4$, $b = 4$, $\log_b a = \log_4 4 = 1$,
$f(m) = m \in \Theta(n^{\log_4 4} \cdot \log n^k)$ where $k = 0$,
$\Rightarrow$ Case 2,
$\Rightarrow S(m) = \Theta(m^{\log_b a} \cdot \log^{k+1} m) = \Theta(m \cdot \log m)$,
轉變回 n, $T(n) = \Theta(\log n \cdot \log^2 n)$.

Exercise 4

n 個數字下，每個數字被選為 pivot 的機率為 $\frac{1}{n}$，對應的遞迴深度的期望值為：自己 1 層，加上 Pivot 左側的深度與 Pivot 右側的深度取最大值 (深度看最深的)。

$$\Pr[x = i] = \frac{1}{n},\ \text{and if } x = i,\ D(n) = \max(D(i-1) + D(n-i)) + 1.$$

假設深度隨 n 增加而單調上升，且假設 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 為由小到大排好的序列，則：

$$\begin{aligned}
&x = 1: \quad D(n-1) + 1, \\
&x = 2: \quad D(n-2) + 1, \\
&\ldots \\
&x = \frac{n}{2}: \quad D(\frac{n}{2}) + 1, \\
&\ldots \\
&x = n-1: \quad D(n-2) + 1, \\
&x = n: \quad D(n-1) + 1.
\end{aligned}$$

$$D(n) = 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} D(i).$$

在 Randomized QuickSort 中，Pivot 是均勻隨機挑選。平均而言，每次都會將陣列分成兩個大小大致相同的子陣列。對極大的 n 而言，$D(i)$ 將以對數的形式成長，因此可以進一步將 $D(n) \approx 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} O(\log i)$.

$$\begin{aligned}
D(n) &\approx 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} \log i \\
&= 1 + \frac{2}{n} \cdot n \log n \\
&= 1 + 2 \log n = O(\log n).
\end{aligned}$$

對於 Randomized QuickSort 在 n 個不同整數上的期望遞迴深度，隨著 n 的增長呈對數增長。因此，期望的遞迴深度為：$D(n) = O(\log n)$.

Exercise 5

為了對 n 個數字進行排序，其中每個數字的位元長度為 $o(\log_2 n)^2 = b$，可以使用 Radix Sort 來完成。從小位數到大進行排序，每一位數下的值範圍固定，可使用 counting sort 在線性時間內排完一個位數。

Radix Sort 的時間複雜度為：

$$T(n) = \Theta\left(\frac{b}{r}(n + 2^r)\right),$$

其中 b 是每個數字的位元長度，r 是每次操作中所考慮的位數。我們希望在 $o(n \log n)$ 時間內排序，根據問題的條件，$b = o(\log_2 n)^2 > \lfloor \log_2 n \rfloor$，因此我們可以選擇 $r = \lfloor \log_2 n \rfloor$，這樣能有效降低排序所需的時間。

選擇 $r = \lfloor \log_2 n \rfloor$ 使得時間複雜度變為：

$$T(n) = \Theta\left(\frac{b}{r}(n + 2^r)\right) = \Theta\left(\frac{b}{\log_2 n}(n + n)\right) = \Theta\left(\frac{b \cdot n}{\log_2 n}\right).$$

由於 $b = o(\log_2 n)^2$，可以得出：

$$T(n) = o\left(\frac{n \cdot (\log_2 n)^2}{\log_2 n}\right) = o(n \log n).$$

因此，這種排序方法可以在 $o(n \log n)$ 時間內完成。

Exercise 6

$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$: 排序好的 n 個 distinct number,
k: 目標要找的數字排名,
定義 $X_{i,j} (1 \leq i < j \leq n)$:

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, & x_i \text{和 } x_j \text{ 在執行 QuickSelect 時比較過,} \\ 0, & \text{反之.} \end{cases}$$

$E[x] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=n+1}^{n} E[X_{i,j}]$.

假設 Pivot 是均勻隨機挑選。要使 i 和 j 被比較到，QuickSelect 在選擇 Pivot 時必須在特定範圍內先選到 i 或是 j 作為該範圍的第一個 Pivot。該範圍的值被選為 Pivot 的機率服從 $Unif(a, b)$，選到 i 或 j 的機率為 $\frac{2}{b-a+1}$。以下分三個情境討論：

Case 1: $1 \leq k \leq i < j \Rightarrow a = k, b = j$,
Case 2: $i < k < j \Rightarrow a = i, b = j$,
Case 3: $i < j \leq k \leq n \Rightarrow a = i, b = k$.

$$\begin{aligned} E[x] &= \sum_{j=k+1}^{n} \sum_{i=k}^{j-1} \frac{2}{j-k+1} \\ &= \sum_{j=k+1}^{n} (j-k) \frac{2}{j-k+1} \\ &\leq 2(n-k) \quad \forall j > k \left(\frac{j-k}{j-k+1} < 1\right) \\ &\leq 2n = O(n). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E[x] &= \sum_{j=k+1}^{n} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2}{j-i+1} \\
&= 2 \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j} + 2 \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1} + \cdots + 2 \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-k+2} \\
&= 2\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + 2\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) + \cdots + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-k+2}\right) \\
&= 2(\ln n - \ln k) + 2(\ln n - 1 - \ln k - 1) + \cdots + 2(\ln n - k + 2 - \ln 2) \\
&= 2\left(\ln \frac{n}{k} + \ln \frac{n-1}{k-1} + \cdots + \ln \frac{n-k+2}{2}\right) \\
&\leq 2\left(\ln \frac{n}{k} + \ln \frac{n-1}{k-1} + \cdots + \ln \frac{n-k+2}{2} + \ln \frac{n-k+1}{1}\right) \\
&= \ln \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
&= \ln \binom{n}{k} \\
&\leq \ln 2^n = n \ln 2 = O(n).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[x] &= \sum_{j=i+1}^{k} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{k-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} (k-i) \frac{2}{k-i+1} \\
&\leq 2(j-1) \quad \forall k > i \ \left(\frac{k-i}{k-i+1} < 1\right) \\
&\leq 2j \leq 2n = O(n).
\end{aligned}
$$

在所有情境下，QuickSelect 的期望時間複雜度皆為 $O(n)$.

Exercise 7

Algorithm 1 FindMinEnergy (n, $Obstacles$)

```
for i = 1 to n do
    me[i] ← ∞                                    ▷ Initialize the me array
end for
me[0] ← 0                                        ▷ No energy is required to start at position 0
for i = 0 to n do
    if me[i] ≠ ∞ then                            ▷ Only consider reachable positions
        if (i + 1) ≤ n and (i + 1) ∉ Obstacles then   ▷ Try to walk to i + 1
            me[i + 1] ← min(me[i + 1], me[i] + 1) ▷ Updates the minimum energy required to reach position i + 1
        end if
        if (i + 4) ≤ n and (i + 4) ∉ Obstacles then   ▷ Try to jump to i + 4
            me[i + 4] ← min(me[i + 4], me[i] + 6) ▷ Updates the minimum energy required to reach position i + 4
        end if
    end if
end for
return me[n]
```

初始化位置所需能量陣列：從 1 迭代至 n，每次迭代使用常數時間 $O(1)$ 將位置 i 的值指定為無限大，時間複雜度 $O(n)$。指定位置 0 的所需能量為 0，時間複雜度為 $O(1)$。因此初始化的時間複雜度為 $O(n)+O(1)=O(n)$.

更新位置所需能量：從 0 迭代至 n，對於每個位置 i，都會檢查該位置是否可抵達。如果可以，則會考慮兩種可能的移動： 1. 走到 $i+1$（如果它不是障礙物並且不大於 n）； 2. 跳到 $i+4$（如果它不是障礙物並且不大於 n）。嘗試不同的移動方式都可能更新位置所需的最小能量。檢查和更新都是在常數時間 $O(1)$ 下完成。迭代 $n+1$ 次，每次迭代執行時間 $O(1)$，因此時間複雜度為 $O(n)$.

回傳 n 位置的能量值：在常數時間 $O(1)$ 完成操作。

演算法的總體時間複雜度為 $O(n)+O(n)+O(1)=O(n)$.

Exercise 8

Algorithm 2 FindLPS (seq)

$n \leftarrow$ **length(seq)** ▷ Get the length of the input sequence
for $i = 2$ **to** n **do**
    for $j = i - 1$ **to** 1 **do**
        $ps[i][j] \leftarrow 0$ ▷ Initialize the ps array
    end for
end for
for $i = 1$ **to** n **do**
    $ps[i][i] \leftarrow 1$ ▷ Set the diagonal of ps to 1 (single character palindromes)
end for
for $i = 2$ **to** n **do**
    for $j = i - 1$ **to** 1 **do**
        if $seq[i] = seq[j]$ **then**
            $ps[i][j] \leftarrow 2 + ps[i-1][j+1]$ ▷ If characters match, extend palindrome length
        else
            $ps[i][j] \leftarrow \max ps[i-1][j], ps[i][j+1]$ ▷ Otherwise, take the max length from neighbors
        end if
    end for
end for
return $ps[n][0]$ ▷ Return the length of the longest palindromic subsequence

取得序列長度：這個步驟只需進行一次，且為常數時間操作 $O(1)$.

初始化 ps 陣列：第一個迴圈，i 從 2 迭代到 n，對於每個 i，內部的迴圈從 $j = i - 1$ 迭代到 1，總共需要執行 $\sum_{i=2}^{n}(i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 次操作，因此，這部分的時間複雜度是 $O(n^2)$。第二個迴圈，將對角線 $ps[i][i]$ 設定為 1，這個步驟是從 $i = 1$ 迭代到 n，每次操作的時間是常數 $O(1)$，總計為 $O(n)$。因此，初始化 ps 陣列的總時間複雜度是：$O(n^2) + O(n) = O(n^2)$.

計算最長回文子序列長度：外層迴圈 i 從 2 到 n，內層迴圈 j 從 $i-1$ 到 1。對於每個 i，內部的迴圈從 $j = i-1$ 迭代到 1，總共需要執行 $\sum_{i=2}^{n}(i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 次。對於每一組 (i, j)，程式根據 $seq[i]$ 和 $seq[j]$ 的相等情況來決定 $ps[i][j]$ 的值。每次的操作為常數時間 $O(1)$，因此這部分的總時間複雜度為 $O(n^2)$.

返回結果：返回 $ps[n][0]$ 的操作是常數時間操作 $O(1)$.

因此，整個算法的總時間複雜度是由初始化 ps 陣列和計算最長回文子序列的部分主導，最終為：$O(1) + O(n^2) + O(n^2) + O(1) = O(n^2)$.