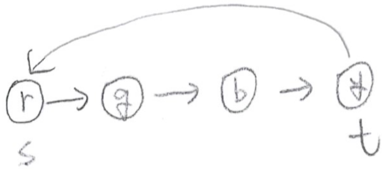
Final exam resubmission R10945004

孫欽鋐

Problem1.

1.



Not simple path, but good path : $\underset{s}{r} \to g \to b \to y \to r \to g \to b \to \underset{t}{y}$

2. 想法:使用DFS，在mark node的時候需加入判斷前兩個連續nodes是否都為不同的顏色

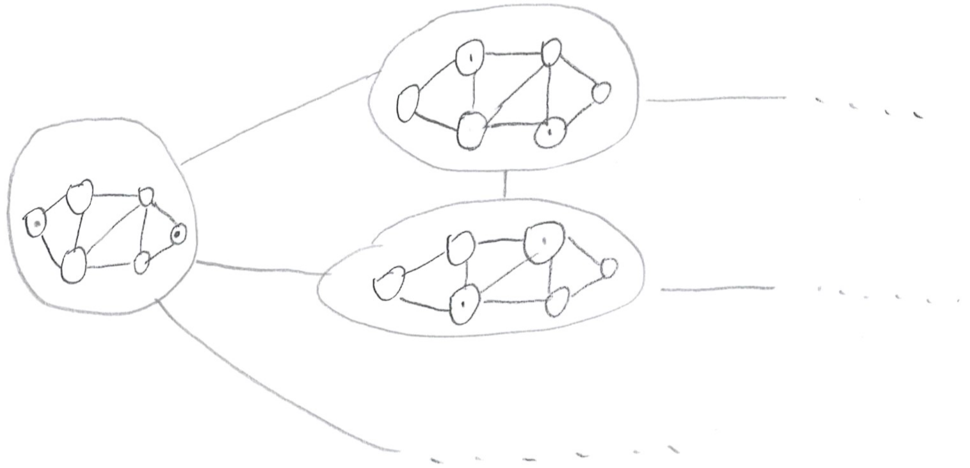
```
global checknode[s] = {s }
DFS(G,v):
    mark v as explored
    for each u in adj[v]
        if u is not marked and u is not in checknode[v]
            add checknode[v] to checknode[u]
            add u to checknode[u]
            if len(checknode[u]) > 3
                deque(checknod[u])
            DFS(G, u)
```

由於只是在原先的DFS下加入一些list queue來紀錄到達每個node的前三個node，故總花費時間依舊為$O(V+E)$

Problem2

想法：因每個 robot 同時移動一個 edge，畫出一個 new graph，代表每個 robot 移動的狀態。

ex:



此時 new graph 上每個 edge 的 cost 為移動 robot 所需耗費的成本。

所以目標為 run Dijistra's algo 且起始點 s 為初始狀態 node。

接著在 new graph 裡面 search 兩個 robot 在同一個 node 裡面的狀態，並 compare $s \to t_1$，$s \to t_2$，…… 最小的 cost。

時間分析：new graph 上由於每個 robot 有 n 個狀態，所以 new graph 有 n^2 個 node，而 edge 的數量最多為每個 node 能彼此相連，所以至多有 $n^2 \times n^2 = n^4$ 個 edge。

$\therefore$ Run Dijistra's need $O(n^2 \log n + n^4)$

and 找出答案(by sorting) need $O(n^2 \log n)$

$\therefore$ Total time complexity $O(n^2 \log n + n^4)$

Problem3.

1. 根據 Krustal's algo，每次加入最小邊且不形成cycle能找到MST，而給定一graph，edge cost 平方前和平方後之大小順序不變，所以 MST 不變。

ex: 1, 2, 3, 4

⇓ square

1, 4, 9, 16

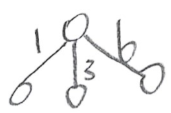
∴ Proved!

2. 因為都為同一個graph上的MST，故MST cost 相等，而graph上的最小的edge必定在MST裡面，若要找到不同最貴的邊之MST，則需找到另一條比較便宜or比較貴的邊，但都會違反上課教的lemma。

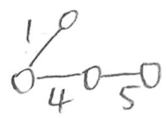
透過反證法來看：

ex: cost1: 1 → 3 → 6 $\Sigma C_i = 10$

cost2: 1 → 4 → 5 $\Sigma C_i = 10$

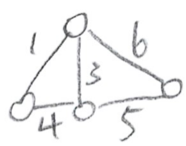


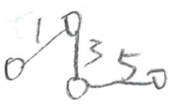
MST1



MST2

⇓

Get graph 

可知 G 之 MST 應為 

，MST1 MST2 情況不存在。

∴ Proved! the most expensive edge of T_1 must be same as T_2

Problem 4

想法：將問題整理如下，ex:

$f_1 = \{c_1, c_2, d_1, d_2\}$

$f_2 = \{c_1, c_2, d_3\}$

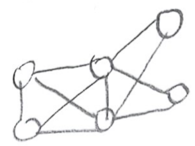
$f_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$

找出是否有 k 個課程每個老師都可以至少教 2 門

let $X \subseteq \{c \cup d\}$, find $|X \cap f| \geq 2$

做法：將每個 subset in f 的 element 彼此相連，

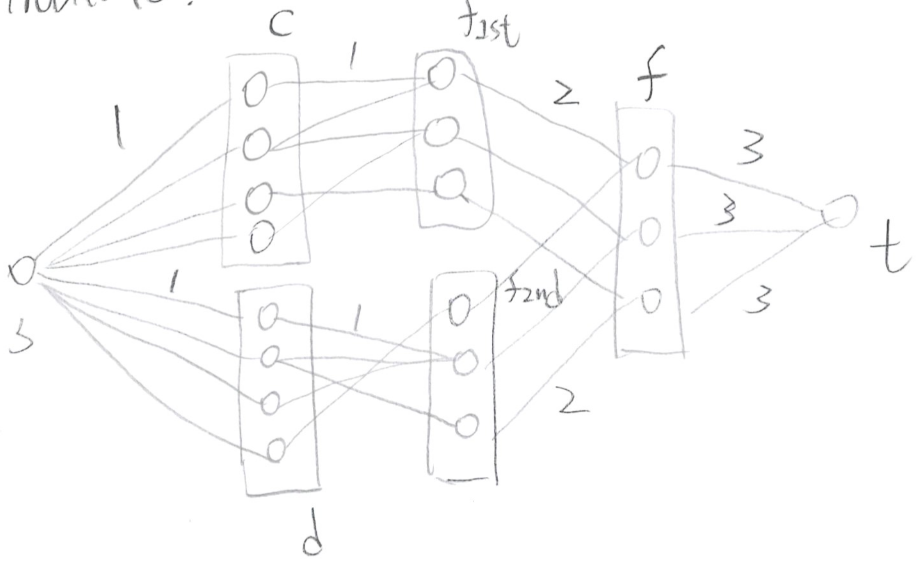
接著將相同課程之 node 合併在一起，



若有 1 個 node 可以相連到其餘每個 node 則表示此 node 每個老師都能教到。

所以只要找到 k 個 unique 1-SAT 的 node 則可以判斷。

Problem 5.



想法：如上圖先將 c 連至 f_{1st}，表示老師第1學期能上的課，d 連至 f_{2nd}，表示老師第2學期能上的課，f_{1st} 和 f_{2nd} 連至 f 時 cost 為 2（一學期不能上超過 2 門課），f 連回 t 時，cost 為 3（2 學期不能上超過 3 門課）

做法：使用 Ford-Fulkerson algo，找出 max-flow，若 max-flow equal to $|c|+|d|$，則表示每堂課都能被老師教，output true.

Problem 6.

1. ex:

$S_1 = \{x_1, x_3\}$

$S_2 = \{x_1, x_2\}$

$S_3 = \{x_2, x_3, x_4\}$

$S_4 = \{x_4, x_5\}$

$S_5 = \{x_5\}$

$\text{Min} \sum_i x_i$

Subject to $\sum x_i \geq 1, \ \forall x_i \in S_i$

$x_i \in \{0, 1\}$

$$\text{s.t} \begin{cases} x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_5 \geq 1 \end{cases}$$

$\text{Min}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3$

2.

$S_1 = \{x_1, x_3\}$

$S_2 = \{x_1, x_2\}$

$S_3 = \{x_2, x_3, x_4\}$

$S_4 = \{x_4, x_5\}$

$S_5 = \{x_5\}$

$\text{Min} \sum_i x_i$

Subject to $\sum x_i \geq 1, \ \forall x_i \in S_i$

$0 \leq x_i \leq 1$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_4 + x_5 \geq 1 \\ x_5 \geq 1 \end{cases} \rightarrow \text{Min}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$= 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0 + 1 = 2.5$

$\because$ each set at most 5 teachers

$\therefore$ ILP : $\text{Min}(\overset{1}{x_1} + \overset{1}{x_2} + \overset{1}{x_3} + \overset{1}{x_4} + \overset{1}{x_5})$

LP : $\text{Min}(\overset{0.2}{x_1} + \overset{0.2}{x_2} + \overset{0.2}{x_3} + \overset{0.2}{x_4} + \overset{0.2}{x_5})$

$\hookrightarrow$ find OPT by let $\text{Ans} = \{v \mid x_i \geq 0.2\}$

$\therefore 5\,\text{ILP} > \text{OPT}$ #