

(2) (a) 相較於 IIR filters 會有以下 2 個問題，

- ① 系統不穩定
- ② 脈衝響應的長度為無限長

為了解決問題，所以引進了 minimal phase filter 的概念，而其好處在於

- ① 保證系統穩定 (零點和極點皆位於單位圓內)
- ② 雖其脈衝響應仍為無限長，但其能量能集中在 $n=0$ 附近

(b) Wiener filter 相較於 LPF / HPF，其 stop band 和 pass band 並沒有明確的規範，而是透過一些亂數過程根據對訊號和雜訊的數值統計來設計的。

(c) 使用倒頻譜 (cepstrum)，可以解決 equalizer 在 multi path 會產生的兩個問題：

- ① $H(z)$ 可能 unstable
- ② $H(z)$ 是一個動態響應

$$(3) \quad H(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + z + 2}{z^2 + z + 1}$$

(a) find its cepstrum

$$\text{numerator: } z^3 + 4z^2 + z + 2 = 0$$

$$(z+2)(z^2+1) = 0$$

$$(z+2)(z-0.7071j)(z+0.7071j) = 0$$

$$zz^2(1-0.7071jz^{-1})(1-(-0.7071j)z^{-1})(1-(-0.5)z^{-1}) = 0$$

$$\text{denominator: } z^2 + z + 1 = 0$$

$$[z - (-0.25 + 0.66j)] [z - (-0.25 - 0.66j)] = 0$$

$$z^2 [1 - (-0.25 + 0.66j)z^{-1}] [1 - (-0.25 - 0.66j)z^{-1}] = 0$$

$$\therefore H(z) = \frac{z [1 - (0.7071j)z^{-1}] [1 - (-0.7071j)z^{-1}] [1 - (-0.5)z^{-1}]}{[1 - (-0.25 + 0.66j)z^{-1}] [1 - (-0.25 - 0.66j)z^{-1}]}$$

$$A = z, \quad a_1 = 0.7071j, \quad a_2 = -0.7071j, \quad b = -0.5$$

$$c_1 = -0.25 + 0.66j, \quad c_2 = -0.25 - 0.66j$$

$$\therefore h[n] = \begin{cases} \log z, & \text{for } n = 0 \\ -\frac{(0.7071j)^n}{n} - \frac{(-0.7071j)^n}{n} + \frac{(-0.25 + 0.66j)^n}{n} + \frac{(-0.25 - 0.66j)^n}{n}, & \text{for } n > 0 \\ \frac{(-0.5)^{-n}}{n}, & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad H(z) = \frac{(z+2)(z-0.7071j)(z+0.7071j)}{[z-(-0.25+0.66j)][z-(-0.25-0.66j)]}$$

$$\begin{aligned} H_{\min}(z) &= \frac{(z+2) \times (z) \times \frac{z+0.5}{z+2} \times (z-0.7071j)(z+0.7071j)}{[z-(-0.25+0.66j)][z-(-0.25-0.66j)]} \\ &= \frac{-2[z-(-0.5)][z-0.7071j][z-(-0.7071j)]}{[z-(-0.25+0.66j)][z-(-0.25-0.66j)]} \quad \# \end{aligned}$$

(4) (a) filters even symmetric : (i) Notch filters

(ii) smoothers

(iv) 3 times of integrals

(b) filters odd symmetric : (iii) edge detectors

(vi) 2 times of differentiations

$$(5) \quad y[n] = \alpha_1 x[n] + \alpha_2 x[n-30] + \alpha_3 x[n-40] + \alpha_4 x[n-50]$$

$$= x[n] * p[n] \quad (p[n] = \alpha_1 \delta[n] + \alpha_2 \delta[n-30] + \alpha_3 \delta[n-40] + \alpha_4 \delta[n-50])$$

$$P(z) = \alpha_1 \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z^{-30} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} z^{-40} + \frac{\alpha_4}{\alpha_1} z^{-50} \right)$$

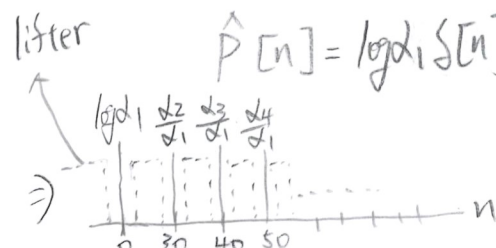
$$\therefore \text{Taylor series } \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

$$\therefore \hat{P}(z) = \log(P(z)) = \log \alpha_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} z^{-30} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} z^{-40} + \frac{\alpha_4}{\alpha_1} z^{-50} \right)^k$$

$\downarrow z^{-1}$

$$\hat{P}[n] = \log \alpha_1 \delta[n] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^k \delta[n-30k] + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right)^k \delta[n-40k] + \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1} \right)^k \delta[n-50k] \right]$$

在 $\hat{P}[n]$ 有值的地方使用 lifter 將這些區域響應設為 0，其餘設為 1。



(6)

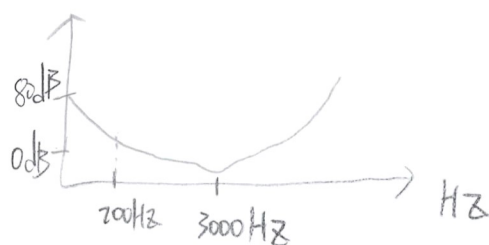
因為①使用 $\sum |x[k]|^2 B_m[k]$ 計算後才取均，讓 $\log 0$ 的發生機率大幅下降 ②因為 $\sum |x[k]|^2 B_m[k]$ 計算出來為實數，所以也可以避免相位模糊的問題 ③ $B_m[k]$ 這個 mask 的設計更加符合人耳的感覺 ④使用 discrete cosine transform，也大幅減少了計算量。

(7) from week 5-2 7mins

因為 $DFT \in \theta(N \log N)$ ， $IDFT \in \theta(N \log N)$ ，隨著 input 訊號增加，設計濾波器的計算量將會非常龐大，因此幾乎不使用此方法來設計。

(8) (a) which of the following vocal signal sounds louder?

(i) $\cos(1800\pi t)$ ， \Rightarrow



(b) which of the following vocal signal propagates longer?

(i) $\cos(200\pi t)$ ，因為波長最長。

Extra Question: Notch filter 為什麼比 pass-stop band 濾波器難設計。

Ans: 因為 notch filter 通常要濾除的頻段非常短，此時要設計的話如 $N = \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta f} \log_{10} \left(\frac{1}{1652} \right)$ ，此時 N 非常小，所以需要相比 pass stop band 的濾波器需要耗費額外的點數來設計出 notch filter。