1) T خطی باشد $\Rightarrow \begin{cases} ① & T(u+v) = T(u) + T(v) \\ ② & T(ku) = k\,T(u) \end{cases}$

$$\begin{cases} u = (u_x, u_y, u_z) \\ v\,(v_x, v_y, v_z) \end{cases} \overset{①}{\Rightarrow} T(u+v) = T(u_x+v_x,\ u_y,\ u_z+v_z) =$$

$$(u_x+v_x+u_y+v_y,\ u_x+v_x-3,\ u_z+v_z)$$

$$= (u_x+u_y,\ u_x-3,\ u_z) + (v_x+v_y,\ v_x,\ v_z)$$

$$= T(u) + (v_x+v_y,\ v_x,\ v_z) = T(u) + (v_x+v_y,\ v_x-3+3,\ v_z)$$

$$= T(u) + (v_x+v_y,\ v_x-3,\ v_z) + (0,3,0)$$

$$= T(u) + T(v) + (0,3,0) \Rightarrow T(u+v) \neq T(u) + T(v)$$

$\Rightarrow T$ is not a linear transformation

5) $(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$, $C = \cos\theta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt3}{2}$

$S = \sin\theta = \sin 30 = \frac12$

$$R_x \begin{bmatrix} C+(1-C)x^2 & (1-C)xy+Sz & (1-C)xz-Sy \\ (1-C)xy-Sz & C+(1-C)y^2 & (1-C)yz+Sx \\ (1-C)xz+Sy & (1-C)yz+Sx & C+(1-C)z^2 \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt3}{2}+\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13 & \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13+\frac12\frac{1}{\sqrt3} & \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13-\frac12\frac{1}{\sqrt3} \\ \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13-\frac12\frac{1}{\sqrt3} & \frac{\sqrt3}{2}+\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13 & \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13+\frac12\frac{1}{\sqrt3} \\ \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13+\frac12\frac{1}{\sqrt3} & \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13-\frac12\frac{1}{\sqrt3} & \frac{\sqrt3}{2}+\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt3+2}{6} & \frac13 & \frac{1-\sqrt3}{3} \\ \frac{1-\sqrt3}{3} & \frac{2\sqrt3+2}{6} & \frac13 \\ \frac13 & \frac{1-\sqrt3}{3} & \frac{2\sqrt3+2}{6} \end{bmatrix}$$

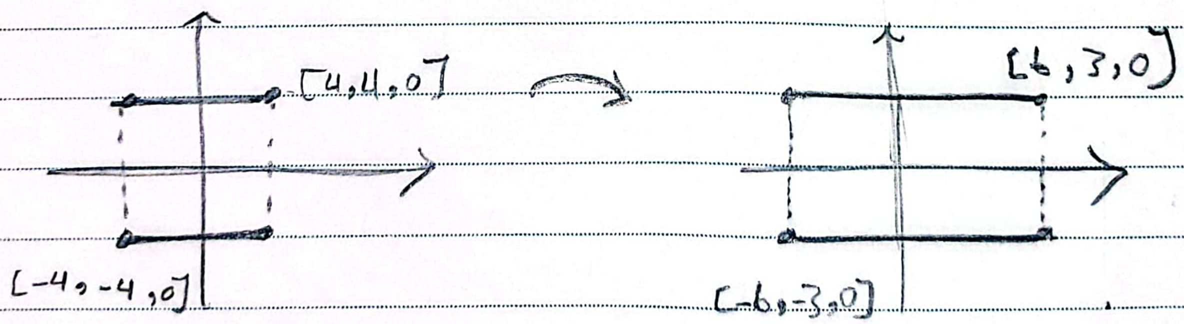
7) $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -9 & 1 \end{bmatrix}$

ماتریس مورد نظر ← $M = ST = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -9 & 1 \end{bmatrix}$

9) ماتریس مقیاس مورد نظر ← $S = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & {,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

minimum ضرب $\Rightarrow [-4, -4, 0] \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & {,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-6, -3, 0]$

$[4, 4, 0] \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & {,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [6, 3, 0]$



15)

$$[x, y, z, 1]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\b_x&b_y&b_z&1\end{bmatrix} = [x+b_x, y+b_y, z+b_z, 1]_{1\times4}$$

انتقال نقاط

$$[x, y, z, 0]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\b_x&b_y&b_z&1\end{bmatrix} = [x, y, z, 0]$$

بردار منتقل نمی‌کند

19)

a) $\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \frac{1}{3}(0,0,0) + \frac{1}{3}(0,1,0) + \frac{1}{3}(2,0,0) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

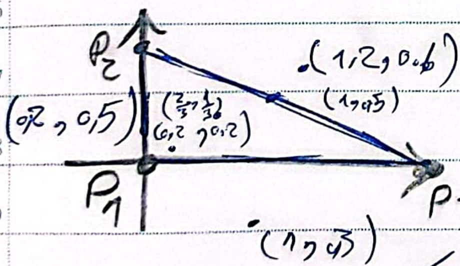
b) $0.7P_1 + 0.2P_2 + 0.1P_3 = 0.7(0,0,0) + 0.2(0,1,0) + 0.1(2,0,0) = (0.2, 0.2, 0)$

c) $0P_1 + 0.5P_2 + 0.5P_3 = 0.5(0,1,0) + 0.5(2,0,0) = (1, 2, 0.5, 0)$

d) $-0.2P_1 + 0.6P_2 + 0.6P_3 = -0.2(0,0,0) + 0.6(0,1,0) + 0.6(2,0,0) = (1.2, 0.6, 0)$

e) $0.6P_1 + 0.5P_2 - 0.1P_3 = 0.6(0,0,0) + 0.5(0,1,0) - 0.1(2,0,0) = (-0.2, 0.5, 0)$

f) $0.8P_1 + 0.3P_2 + 0.5P_3 = 0.8(0,0,0) - 0.3(0,1,0) + 0.5(2,0,0) = (1, -0.3, 0)$



(a) نقطه مرکز ← در مرکز است

$P_2 = 0P_1 + 1P_2 + 0P_3 \longrightarrow$ بارسنتریک برای P_2 $\Rightarrow (0, 1, 0)$

$\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3 = (1,0,0) \longrightarrow$ بارسنتریک $\Rightarrow (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

مختصات بارسنتریک منفی ← نقاط خارج از مثلث

27)

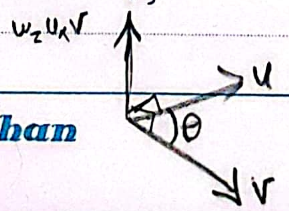
خط در امتداد z با طول ۱ فرض می‌کنیم. برای اینکه طول آن z شود، ابتدا آن را z واحد در محور z منتقل در نظر می‌گیریم.

به منظور چرخاندن این خط موازی با (1,1,1) باشد، باید با زاویه θ در صفحه‌ای که بردارهای $\{(0,0,1), (1,1,1)\}$ را در بر می‌گیرد، بچرخانیم.

محور چرخش ← $u\times v = (0,0,1)\times(1,1,1) = (-1,1,0)$. زاویه‌ای که باید بچرخانیم با زاویه بین بردارهای (0,0,1) و (1,1,1) برابر است. پس داریم

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{u\cdot v}{|u||v|} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 54.73^\circ$

انتقال $T(3,1,2)$



برای چرخش u که در جهت v باشد باید u را با زاویه θ حول $w = u\times v$ بچرخانیم.

شایان برومیان

1) $3\left(\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix} - 2x\right) = 2\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 3\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix} - 6x = 2\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow -6x = -\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

2) a $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 4 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 6\\ -2 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4+0+6 & 2+0-9\\ 8+0-2 & -4+6+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -7\\ 6 & 5\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2+2 & 0+2\\ -6+4 & 0+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+0+2\\ 0-2-3\\ 0+0-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ -5\\ 1\end{bmatrix}$

3) a) $[1, 2, 3]^T = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$ $\quad$ b) $\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}x & z\\ y & w\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix}V_x & V_y & V_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & U_z & -U_y\\ -U_z & 0 & U_x\\ U_y & -U_x & 0\end{bmatrix} = [U_yV_z - U_zV_y, U_zV_x - U_xV_z - U_xV_z, U_xV_y - U_yV_x$

$= U \times V$

10) a) $\begin{bmatrix}21 & -4\\ -10 & 7\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{deter}} (21\times 7) - (-4\times 10) = 147 + 4 = 187$

b) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{deter}} 2\times\det\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix} = 2(3\times 7) = 42$

11) a) for 2x2 matrix $\rightarrow A = \begin{bmatrix} 21 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -10 & 21 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{187} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{187} & \frac{4}{187} \\ \frac{-10}{187} & \frac{21}{187} \end{bmatrix}$$

b) for 3x3 matrix $\longrightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \times B'$

$$B' = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$