شبیه‌سازی کامپیوتری

نیم‌سال دوم ۰۲-۰۱

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر
شماره دانشجویی: ۹۹۱۰۵۵۶۱
شایان صالحی

تمرین سری چهارم

پاسخ مسئله‌ی ۱.

برای توزیع داده شده ابتدا CDF آن را طبق رابطه زیر به دست می‌اوریم.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < -۲ \\ -\frac{x^۳}{۱۶} & -۲ \leqslant x < ۰ \\ ۱ - \frac{e^{-۲x}}{۲} & ۰ \leqslant x \end{cases}$$

حال طبق رابطه $x = F^{-۱}(R)$ خواهیم داشت:

$$x = \begin{cases} -\sqrt[۳]{۱۶}R & ۰ \leqslant R \leqslant ۰/۵ \\ -\frac{۱}{۲}\ln^{۲}(R) & ۰/۵ \leqslant R \leqslant ۱ \end{cases}$$

که با رابطه‌های به دست آمده می‌توان متغیر تصادفی مدنظر را ساخت.

پاسخ مسئله‌ی ۲.

الف

برای تابع توزیع احتمال خرید میوه‌ها با توجه به جدول داده شده خواهیم داشت:

$$P(x=i)=\begin{cases}\frac{5}{11} & i=1\\ \frac{3}{11} & i=2\\ \frac{2}{11} & i=3\\ \frac{1}{11} & i=4\end{cases}$$

ب

حال با توجه به روش Inverse-transform ابتدا به دست می‌آوریم که هر عدد بین کدام بازه‌ها مطلق به کدام x_i است.

$$x_i=\begin{cases}1 & 0\leqslant R_i\leqslant \frac{5}{11}\\ 2 & \frac{5}{11}\leqslant R_i\leqslant \frac{8}{11}\\ 3 & \frac{8}{11}\leqslant R_i\leqslant \frac{10}{11}\\ 4 & \frac{10}{11}\leqslant R_i\leqslant 1\end{cases}$$

حال برای واریته متناظر با اعداد داده شده خواهیم داشت.

$$R_1=0/3 \implies 0\leqslant R_1\leqslant \frac{5}{11} \implies x_1=1$$
$$R_2=0/45 \implies 0\leqslant R_2\leqslant \frac{5}{11} \implies x_2=1$$
$$R_3=0/6 \implies \frac{5}{11}\leqslant R_3\leqslant \frac{8}{11} \implies x_3=2$$
$$R_4=0/8 \implies \frac{8}{11}\leqslant R_4\leqslant \frac{10}{11} \implies x_4=3$$
$$R_5=0/95 \implies \frac{10}{11}\leqslant R_5\leqslant 1 \implies x_5=4$$

پاسخ مسئله‌ی ۳.

در اینجا برای آنکه بتوانیم استراتژی برای acceptance-rejection توزیع negetive binomial معرفی کنیم ابتدا باید توزیع مورد نظر را تحلیل کنیم. در اینجا به ازای هر عدد تصادفی تولید شده در بازه $[۰, ۱]$ اگر آن عدد بالاتر از مقدار p بود آن را رد می‌کنیم و اگر کوچکتر از این مقدار بود آن را قبول می‌کنیم. این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که به k عدد قبول شده برسیم، آنگاه تعداد اعداد بررسی شده تا کنون جواب اصلی ما خواهد بود.

دلیل صحت این استراتژی هم به این خاطر است که در توزیع negetive binomial هر رویداد به احتمال $۱ - p$ شکست می‌خورد و توزیع احتمال موفقیت k رویداد در تمامی رویدادها را بیان می‌کند.

حال با توجه به روش معرفی شده برای اعداد مدنظر خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{ll}
R_۱ = ۰/۸۱ \implies R_۱ > p \implies \text{Reject}, n = ۰ & R_۲ = ۰/۶۵ \implies R_۲ > p \implies \text{Reject}, n = ۰ \\
R_۳ = ۰/۷۲ \implies R_۳ > p \implies \text{Reject}, n = ۰ & R_۴ = ۰/۹۵ \implies R_۴ > p \implies \text{Reject}, n = ۰ \\
R_۵ = ۰/۲ \implies R_۵ < p \implies \text{Accept}, n = ۱ & R_۶ = ۰/۸۶ \implies R_۶ > p \implies \text{Reject}, n = ۱ \\
R_۷ = ۰/۴ \implies R_۷ < p \implies \text{Accept}, n = ۲ & R_۸ = ۰/۷۵ \implies R_۸ > p \implies \text{Reject}, n = ۲ \\
R_۹ = ۰/۳۵ \implies R_۹ < p \implies \text{Accept}, n = ۳ & R_{۱۰} = ۰/۷۹ \implies R_{۱۰} > p \implies \text{Reject}, n = ۳ \\
R_{۱۱} = ۰/۲ \implies R_{۱۱} < p \implies \text{Accept}, n = ۴ &
\end{array}
$$

در این صورت اولین عدد مورد پذیرش $R_۹ = ۰/۳۵$ خواهد بود که نشان‌دهنده این است که دنباله اعداد پس از ۹ ورودی به حالت مدنظر رسیده‌اند.

پاسخ مسئله‌ی ۴.

با توجه به تست Kolmogorov-Smirov خواهیم داشت:

$$D_{۰/۰۵} = \max|F(x) - S_N(x)|, \quad N = ۱۰$$

R_i	۰/۰۲	۰/۰۹	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۳۱	۰/۴۳	۰/۶	۰/۸	۰/۸۵	۰/۹۵
i/N	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
D^-	۰/۰۸	۰/۱۱	۰/۱۵	۰/۱۵	۰/۱۹	۰/۱۷	۰/۱	۰	۰/۰۵	۰/۰۵
D^+	۰/۰۲	–	–	–	–	–	۰	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۵

به این ترتیب داریم.

$$\max(D^-, D^+) = ۰/۱۹ \implies D_{۰/۰۵} = ۰/۴۱$$

با توجه به نتیجه به دست آمده نمی‌توان این ادعا را رد کرد که این دنباله اعداد داده شده از توزیع یکنواخت پیروی می‌کنند و با توجه به این تست این ادعا صحیح خواهد بود.

پاسخ مسئله‌ی ۵.

الف

با توجه به تست chi-square و فرضیه اینکه این داده‌ها از توزیع پواسون پیروی می‌کنند، ابتدا می‌بایست برای تخمین پارامتر λ میانگین ۱۰۰ داده داده شده را به دست آوریم. به این ترتیب داریم:

$$\text{میانگین داده‌ها} = \frac{۳۰ \times ۰ + ۴۵ \times ۱ + ۱۵ \times ۲ + ۷ \times ۳ + ۲ \times ۴ + ۱ \times ۵}{۱۰۰} = ۱/۰۹$$

حال در ادامه داریم:

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
O_i	۳۰	۴۵	۱۵	۷	۲	۱
E_i	۳۳/۶۲	۳۶/۶۵	۱۹/۹۷	۷/۲۵	۱/۹۷	۰/۴۳

که به این ترتیب برای واریانس داده‌ها خواهیم داشت:

$$X_۰^۲ = \sum_{i=۰}^{۵} \frac{(O_i - E_i)^۲}{E_i} = \frac{۳/۶۲^۲}{۳۳/۶۲} + \frac{۸/۳۵^۲}{۳۶/۶۵} + \frac{۴/۴۷^۲}{۱۹/۹۷} + \frac{۰/۲۵^۲}{۷/۲۵} + \frac{۰/۰۳^۲}{۱/۹۷} + \frac{۰/۵۷^۲}{۰/۴۳} \simeq ۴/۳$$

حال با توجه به درجه آزادی و Level of significance خواهیم داشت:

$$V = K - S - ۱ = ۴ \implies X^۲_{۰/۰۵} = ۹/۴۹$$
$$\implies ۴/۳ < ۹/۴۹ \implies X_۰^۲ < X^۲_{۰/۰۵}$$

بنابراین فرض در نظر گرفته شده را نمی‌توان رد کرد.

ب

همانند قسمت قبل عمل می‌کنیم با این تفاوت که این بار می‌بایست میانگین را ۱/۵ در نظر بگیریم. ابتدا برای جدول داریم:

i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
O_i	۳۰	۴۵	۱۵	۷	۲	۱
E_i	۲۲/۳۱	۳۳/۴۷	۲۵/۱۱	۱۲/۵۵	۴/۶۹	۱/۴۱

$$X_۰^۲ = \sum_{i=۰}^{۵} \frac{(O_i - E_i)^۲}{E_i} = \frac{۷/۶۹^۲}{۲۲/۳۱} + \frac{۹/۵۳^۲}{۳۳/۴۷} + \frac{۱۰/۱۱^۲}{۲۵/۱۱} + \frac{۵/۵۵^۲}{۱۲/۵۵} + \frac{۲/۶۹^۲}{۴/۶۹} + \frac{۰/۴۱^۲}{۱/۴۱} \simeq ۱۴/۸$$

حال داریم:

$$\implies ۱۴/۸ > ۹/۴۹ \implies X_۰^۲ > X^۲_{۰/۰۵}$$

بنابراین این فرض را می‌توان رد نمود.

پاسخ مسئله‌ی ۶.

دو مثالی که می‌توان از توزیع Weibull و کاربردهای آن در شبیه‌سازی زد به این صورت است:

- یکی از کاربردهای این توزیع استفاده آن در استحکام سنجی موزاییک‌های تولیدی است. برای اینکار پارامترهایی مختلف همانند سختی، دما را در نظر گرفته و یک حد پایینی برای مقاومت و استحکام موزاییک‌ها با استفاده از شبیه‌سازی می‌توان به دست آورد.
- کاربرد دیگر این توزیع، شبیه‌سازی حجم آب ورودی سدها و سرعت آنهاست. با توجه به عوامل مختلفی همانند ورودی‌های سد، فصل از سال می‌توان از این توزیع استفاده نمود و کمکی نیز برای پیش‌بینی حجم برق تولیدی آن سد خواهد بود.

از کاربردهای توزیع Lognormal می‌توان به این دو مورد نیز اشاره کرد.

- در سیستم مدیریت بانکی برای شبیه‌سازی ورودی حساب‌ها، در این حالت از آنجایی که بیشتر سرمایه در دسترس اندکی از آدم‌ها قرار دارد این توزیع مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- تبادلات فایل در یک شبکه نیز به همین صورت بوده، اکثر فایل‌های انتقالی در اندازه‌های کوچک بوده اما تعداد کمی فایل نیز وجود دارد که اندازه بسیار زیادی داشته باشند.