شماره دانشجویی: ۹۹۱۰۵۵۶۱

شایان صالحی

تمرین سری اول

پاسخ مسئله‌ی ۱.

برای آنکه بتوانیم سوال داده شده را حل کنیم نیاز به استفاده به سه توزیع داریم که به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P \sim Poisson(۲), \quad P' \sim Poisson(۳)$$

$$G \sim Gamma(۲, ۵) = \frac{۱}{۲۵} e^{-\frac{x}{۵}} x$$

حال می‌خواهیم احتمال اینکه در یک بازه ۱۰ دقیقه ای دقیقًا ۵ رویداد رخ دهد را به دست آوریم. برای این کار خواهیم داشت:

$$P(x = ۵) = \int_{۰}^{۱۰} P''(x = ۵|T = t) G(T = t) dt$$

که در آن P'' به این صورت تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} P''(x = ۵|T = t) &= \sum_{i=۰}^{۵} \frac{(۲t)^i (۳۰ - ۳t)^{k-i} e^{-۳t} e^{-۳۰+۳t}}{i!(k-i)!} \\ &= e^{t-۳۰} \sum_{i=۰}^{۵} \frac{(۲t)^i (۳۰ - ۳t)^{۵-i}}{i!(۵-i)!} = \frac{(۳۰ - t)^۵ e^{t-۳۰}}{۵!} \end{aligned}$$

به این ترتیب برای حاصل انتگرال خواهیم داشت:

$$P(x = ۵) = \int_{۰}^{۱۰} P''(x = ۵|T = t) G(T = t) dt = \int_{۰}^{۱۰} \frac{(۳۰ - t)^۵ e^{t-۳۰}}{۵!} \frac{۱}{۲۵} e^{-\frac{t}{۵}} t dt$$

$$= \int_{۰}^{۱۰} \frac{(۳۰ - t)^۵ e^{t-۳۰}}{۵!} \frac{۱}{۲۵} e^{-\frac{t}{۵}} t \simeq ۴/۳ \times ۱۰^{-۶}$$

پاسخ مسئله‌ی ۲.

در این سوال با توجه به تابع I داده شده می‌دانیم احتمال خراب شدن دستگاه در ۵۰ ساعت اول در دو حالت می‌بایست بررسی شود.

$$I(t \bmod ۱۰۰ < ۵) \implies \lambda(t) = \begin{cases} \frac{۱}{۵۰} & ۰ \leqslant t < ۵ \\ \\ \frac{۱}{۵۰۰} & t > ۵ \end{cases}$$

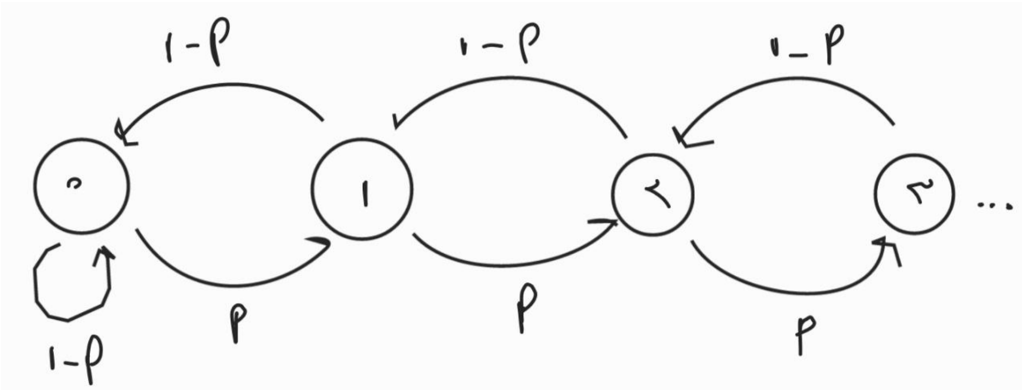
به این ترتیب برای احتمال این قسمت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(x < ۵۰) &= P(x < ۵) + P(۵ \leqslant x < ۵۰) \\ &= (۱ - \exp\left(\frac{-۱}{۵۰} \times ۵\right)) + \exp\left(\frac{-۱}{۱۰}\right)(۱ - \exp\left(\frac{-۴۵}{۵۰۰}\right)) \\ &\simeq ۱/۷ \times ۱۰^{-۱} \end{aligned}$$

پاسخ مسئله‌ی ۳.

الف

در اینجا برای کشیدن زنجیره مارکوف می‌دانیم هر حالت با احتمال p به حالت بعد رفته و با احتمال $1-p$ به حالت قبل باز می‌گردد و این تا بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کنید. به این ترتیب برای شکل این قسمت خواهیم داشت:



شکل ۱: شکل زنجیره مارکوف

ب

برای محاسبه حالت ماندگار خواهیم داشت:

$$P_0 = (1-p)P_0 + (1-p)P_1 \implies P_1 = \frac{p}{1-p}P_0$$

$$P_1 = pP_0 + (1-p)P_2 \implies P_2 = \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 P_0$$

$$P_2 = pP_1 + (1-p)P_3 \implies P_3 = \left(\frac{p}{1-p}\right)^3 P_0$$

$$\implies P_i = \left(\frac{p}{1-p}\right)^i P_0$$

حال باتوجه به جمع احتمالات P_i خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} P_i &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{p}{1-p}\right)^i P_0 \\ &= \frac{P_0}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)} = 1, \quad p < 0.5\end{aligned}$$

$$\implies P_0 = \frac{1-2p}{1-p} \implies P_i = \left(\frac{p}{1-p}\right)^i \left(\frac{1-2p}{1-p}\right)$$

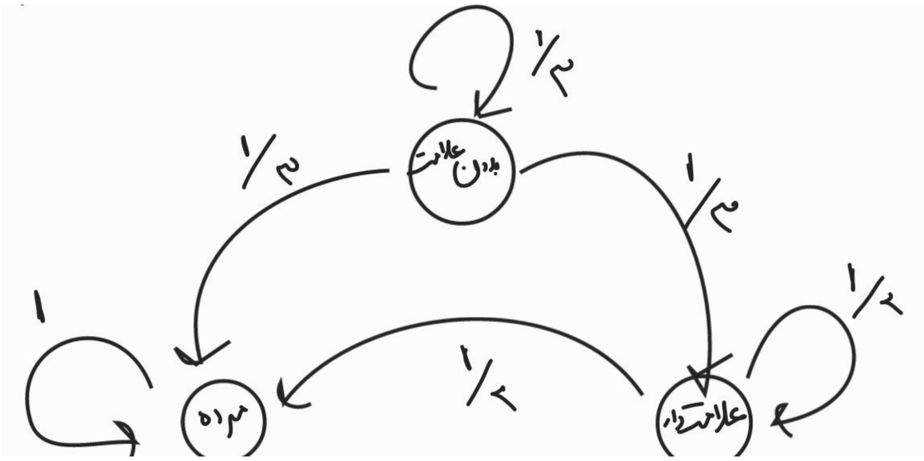
به این ترتیب احتمال وقوع هر حالت به این صورت خواهد بود.

ج

با توجه به عبارات به دست آمده بالا می‌دانیم اگر داشته باشیم $p > ۰/۵$ ضریب دنباله هندسی یعنی $\frac{p}{۱-p}$ بزرگتر از یک خواهد شد و این نشان می‌دهد که جمع این دنباله به هیچ عنوان نمی‌تواند همگرا شود و نخواهیم داشت $\sum_{i=۰}^{\infty} P_i = ۱$. به این ترتیب نمی‌توان برای احتمال وقوع حالت‌ها در این شرایط تعریفی بیان کرد.

پاسخ مسئله‌ی ۴.

در اینجا سه حالت داریم که از حالت بی‌علامت می‌توانیم با احتمال $\frac{۱}{۳}$ به تمام حالات برویم. از حالت علامت‌دار با احتمال $\frac{۱}{۲}$ به خود و حالت مرده می‌توان رفت و در نهایت برای حالت مرده فقط با احتمال یک می‌توان در خود ماند. به این ترتیب برای شکل زنجیره مارکوف آن خواهیم داشت:



شکل ۲: شکل زنجیره مارکوف برای حالت‌های توصیف شده

به همین طریق برای ماتریس آن هم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که در آن سطر و ستون اول مربوط به حالت بدون علامت بوده، سطر و ستون دوم مربوط به بیماران دارای علائم است. همانطور می‌دانیم حالتی جاذب است که در نمایش ماتریس آن دارای درایه $a_{i,j} = ۱$ باشد که در اینجا داریم $a_{۳,۳} = ۱$ که نشان دهنده جاذب بدن حالت مرده است. حال برای حساب کردن امید ریاضی نیز خواهیم داشت:

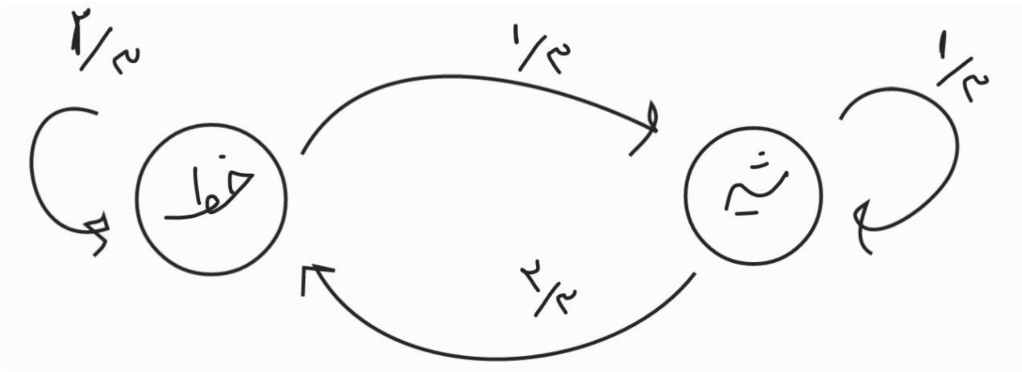
$$P_۰ = \frac{۱}{۳}((P_۰ + ۱) + (P_۱ + ۱) + ۱),\ P_۱ = \frac{۱}{۲}((P_۱ + ۱) + ۱)$$

$$\implies P_۱ = ۲ \implies ۲P_۰ = ۵ \implies P_۰ = ۲/۵$$

که نشان‌دهنده این است ۲/۵ روز امید ریاضی زمانی است که طول می‌کشد تا یک فرد سرطاندار بی‌عالمت بمیرد.

پاسخ مسئله‌ی ۵.

ابتدا برای شکل زنجیره مارکوف سکه توصیف شده خواهیم داشت: حال برای آنکه توالی خط - شیر - خط را به



شکل ۳: زنجیره مارکوف برای سکه مفروض

دست آوریم کافی است برای اساس زنجیره مارکوف این سکه را بررسی کنیم.

می‌دانیم برای شروع با احتمال $\frac{1}{3}$ در همان حالت می‌مانیم و با احتمال $\frac{2}{3}$ به حالت خط برویم پس از آن یا با احتمال $\frac{1}{3}$ در این استیت باقی می‌مانیم یا با احتمال $\frac{2}{3}$ به حالت خط - شیر می‌رویم در اینجا نیز با احتمال $\frac{2}{3}$ به حالت مطلوب رسیده و با احتمال $\frac{1}{3}$ به استیت شروع می‌رویم. به این ترتیب برای امید ریاضی آن خواهیم داشت:

$$P_0 = \frac{1}{3}(P_0 + 1) + \frac{2}{3}(P_1 + 1)$$

$$P_1 = \frac{2}{3}(P_1 + 1) + \frac{1}{3}(P_2 + 1)$$

$$P_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(P_0 + 1)$$

$$\implies P_0 = \frac{33}{4}, P_1 = \frac{27}{4}, P_2 = \frac{15}{4}$$

بنابراین امید ریاضی تعداد پرتاپ‌ها $\frac{33}{4}$ خواهد بود.