شبیه‌سازی کامپیوتری

نیم‌سال دوم ۰۲-۰۱

شماره دانشجویی: ۹۹۱۰۵۵۶۱

شایان صالحی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری سوم

پاسخ مسئله‌ی ۱.

الف

در این قسمت برای آنکه احتمال این را به دست آوریم که یک تسک هنگام رسیدن به سیستم منتظر بماند کافی است احتمال پر بودن سرور را به دست آوریم. برای اینکار خواهیم داشت:

$$P(t = ۰) = (\frac{\lambda}{\mu})^m$$

که در آن t نشان‌دهنده تعداد سرورهای باقی‌مانده است.

ب

تفاوت این قسمت با قسمت قبل وجود تسک در قسمت بافر است. از آنجایی که در قسمت قبل این احتمال را به صورت $(\frac{\lambda}{\mu})^m$ به دست آوردیم. از آنجایی که ظرفیت بافر m بوده در این قسمت فرقی نخواهیم داشت وا احتمال پر بودن سرور به همان صورت خواهد بود.

ج

برای به دست آوردن زمان انتظار هر تسک باید زمان انتظار در صف و بافر را به صورت جداگانه به دست آورده و جمع کنیم.

زمان متوسط انتظار صف برابر خواهد بود با میانگین زمان برای تسک‌ها منهای میانگین زمان ورود، یعنی خواهیم داشت.

$$\text{متوسط زمان انتظار صف} = \frac{۱}{\mu - \lambda}$$

برای بافر نیز به این صورت خواهد بود با این تفاوت که باقر ظرفیتی معادل با m دارد.

$$\text{متوسط زمان انتظار بافر} = \frac{m}{\mu - \lambda}$$

به این ترتیب برای زمان متوسط انتظار کل خواهیم داشت:

$$\text{متوسط زمان انتظار کل} = \frac{m}{\mu - \lambda} + \frac{۱}{\mu - \lambda} = \frac{۱ + m}{\mu - \lambda}$$

د

برای به دست آوردن کمترین مقدار m خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
p(t=۰) = (\frac{\lambda}{\mu})^m = ۱ - \gamma & \\
& \implies m \log\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \log(۱-\gamma) \\
& \implies m = \frac{\log(۱-\gamma)}{\log\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}
\end{aligned}
$$

ه

برای به دست آوردن پارامترهای داده شده خواهیم داشت:

$$p = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{۵۰}{۶۰} = \frac{۵}{۶}$$

$$W = \frac{۱+m}{\mu-\lambda} = \frac{۱+m}{۶۰-۵۰} = \frac{۱+m}{۱۰}$$

$$
\begin{aligned}
L &= \lambda \times W \\
&= ۵۰ \times \frac{۱+m}{۱۰} = ۵(۱+m)
\end{aligned}
$$

پاسخ مسئله‌ی ۲.

الف

در ابتدا با توجه به اینکه سیستم ما به صورت $(M/M/۲)$ است و پردازش هر تسک از توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{۶}$ پیروی می‌کند نرخ پردازشی معادل با $M = ۶$ خواهیم داشت. به این ترتیب داریم:

$$p = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{۱۰}{۲ \times ۶} = \frac{۵}{۶}$$

ب

احتمال آنکه یک تسک منتظر بماند را به این صورت می‌توانیم به دست آوریم.

$$\begin{aligned} P_۰ &= \left((\sum_n \frac{(\frac{۵}{۳})^n}{n!}) + (\frac{۵}{۳})^۲ \times \frac{۱}{۲!} \times \frac{۱۲}{۲ \times ۶ - ۱۰} \right)^{-۱} \\ &= \left(۱ + \frac{۵}{۳} + \frac{۲۵}{۳} \right)^{-۱} \\ &= ۱۱^{-۱} = \frac{۱}{۱۱} \end{aligned}$$

حال به احتمال $P(L \geqslant ۲)$ یک تسک منتظر می‌ماند، بنابراین خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} P(L \geqslant ۲) &= \frac{P_۰ \times (\frac{\lambda}{\mu})^۲}{۲!(۱ - p)} \\ &= \frac{\frac{۱}{۱۱} \times \frac{۲۵}{۹}}{\frac{۱}{۳}} \\ &= \frac{۲۵}{۳۳} \end{aligned}$$

ج

برای آنکه تعداد میانگین تسک‌های حاضر در سیستم را محاسبه کنیم خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \text{میانگین تسک‌های حاضر} &= \frac{\lambda}{\mu} + \frac{p}{۱ - P} P(L \geqslant ۲) \\ &= \frac{۵}{۳} + ۵ \times \frac{۲۵}{۳۳} \\ &= \frac{۶۰}{۱۱} \end{aligned}$$

پاسخ مسئله‌ی ۳.

در ابتدا گزینه تقویت سرورها را بررسی می‌کنیم. به این ترتیب داریم.

$$\begin{aligned} p_۰ &= \left(\sum_{n=۰}^{۲} \frac{۱}{n!} ۲^n + \frac{۳}{۳!} ۲^۳\right)^{-۱} \\ &= \left(۱ + ۲ + ۲^۲ \times \frac{۱}{۲} + ۲^۲\right)^{-۱} \\ &= ۹^{-۱} = \frac{۱}{۹} \end{aligned}$$

$$p = \frac{۱۲}{۳ \times ۶} = \frac{۲}{۳}$$

$$L_q = \frac{\frac{۲}{۳} \times p_۰ \times ۲^۳}{۳!(۱ - \frac{۲}{۳})^۲} = \frac{\frac{۱۶}{۲۷}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۸}{۹}$$

$$\text{هزینه سالیانه} = ۵۰۰۰۰ + \frac{۸}{۹} \times ۰/۰۰۱ \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰ \simeq ۷۴۹۸۰$$

حال برای هزینه ادامه با سرورهای فعلی داریم.

$$\begin{aligned} p_۰ &= \left(\sum_{n=۰}^{۲} \frac{۱}{n!} (\frac{۱۲}{۵})^n + \frac{۵}{۳!} (\frac{۱۲}{۵})^۳\right)^{-۱} \\ &= \left(۱ + \frac{۱۲}{۵} + \frac{۷۲}{۲۵} + \frac{۲۸۸}{۲۵}\right)^{-۱} \\ &= (۱ + \frac{۸۴}{۵})^{-۱} \\ &= \frac{۵}{۸۹} \end{aligned}$$

$$p = \frac{۱۲}{۳ \times ۵} = \frac{۴}{۵}$$

$$l_q = \frac{\frac{۴}{۵} \times p_۰ \times (\frac{۱۲}{۵})^۳}{۳!(۱ - \frac{۴}{۵})^۲} \simeq ۲/۶$$

$$\text{هزینه سالیانه} = ۲/۶ \times ۰/۰۰۱ \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰ \simeq ۸۱۶۸۰$$

برای هزینه خرید سرور جدید نیز خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
p_۰ &= \left(\sum_{n=۰}^{۲} \frac{۱}{n!}(\frac{۱۲}{۵})^n + \frac{۱}{۳!}(\frac{۱۲}{۵})^۳ + \frac{۵}{۴۸}(\frac{۱۲}{۵})^۴\right)^{-۱} \\
&= \left(۱ + \frac{۱۲}{۵} + \frac{۷۲}{۲۵} + \frac{۲۸۸}{۱۲۵} + \frac{۴۳۲}{۱۲۵}\right)^{-۱} \\
&= (\frac{۳۰۱}{۲۵})^{-۱} \\
&= \frac{۲۵}{۳۰۱}
\end{aligned}$$

$$p = \frac{۱۲}{۴ \times ۵} = \frac{۳}{۵}$$

$$l_q = \frac{\frac{۴}{۵} \times p_۰ \times (\frac{۱۲}{۵})^۴}{۴!(۱ - \frac{۳}{۵})^۲} \simeq ۰/۴۳$$

$$\text{هزینه سالیانه} = ۷۰۰۰۰۰ + ۰/۴۳ \times ۰/۰۰۱ \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰ \simeq ۸۳۵۶۰$$

بنابراین تقویت سرورها کمترین هزینه را برای ما در بر خواهد داشت.

پاسخ مسئله‌ی ۴.

الف

در روش LCG برای تولید اعداد تصادفی ابتدا به سه پارامتر نیاز داریم. این پارامترها شامل بذر یا seed می‌باشد که یک عدد اولیه به عنوان ورودی به الگوریتم می‌دهیم تا به عنوان نقطه شروع برای تولید اعداد تصادفی مورد استفاده قرار گیرد.

همچنین یک مقدار a برای ضریب تولید اعداد تصادفی و یک مقدار c که بیانگر مقدار جابه‌جایی است خواهیم داشت.

با استفاده از رابطه زیر اعداد تصادفی تولید می‌شوند.

$$x_{i+۱} = (ax_i + c) \bmod m$$

که در اینجا $x_{i+۱}$ نشان‌دهنده عدد تصادفی جدید تولید شده براساس عدد قبلی با استفاده از باقی‌مانده تقسیم عدد بر m است.

همچنین برای شروع مقدار اولیه $x.$ را انتخاب کرده و با قرار دادن در ربطه دنباله اعداد تصادفی را به دست می‌اوریم.

ب

مفهموم Random-number streams به مجموعه‌ای از اعداد گفته می‌شود که به صورت تصادفی با استفاده از یک مولد تولید شده‌اند. در واقع به این معناست که هر جریان از اعداد شامل یک توالی از اعداد تصادفی است که می‌توان از آنها به صورت‌های استفاده کرد.

کاربرد اصلی این جریان وجود یکسری اعداد تصادفی از پیش تعیین‌شده برای کارکردهای مختلف است.

ج

برای آنکه بتوان به ماکزیموم مقدار اعداد تصادفی تولید شده در الگوریتم LCG برسیم نیاز داریم که پارامترهای (m, c, a) را به این صورت مورد استفاده قرار دهیم.

- مقدار m می‌بایست یک عدد اول و بزرگتر از مقادیر a و c باشد. دلیل آن این است که هر چقدر این عدد بزرگتر باشد دامنه اعداد تولید شده بیشتر می‌شود و با اول بودن این عدد می‌توان مطمئن شد که تمامی اعداد در بازه باقی‌مانده تولید شوند.
- دو عدد m و c باید نسبت به هم اول باشند چراکه اگر نباشند شاهد تکرار یکسری اعداد در دنباله مدنظرمان خواهیم بود.
- همچنین اگر یک عامل اولیه بزرگتر از چهار برای عدد m داشتیم، یعنی عددی که m بر آن بخش‌پذیر باشد در این صورت $a - ۱$ می‌بایست بر این عامل نیز بخش‌پذیر باشد.

د

از مزایای روش LCG می‌توان به سادگی پیاده‌سازی، سرعت بالا و قابلیت تکرار پذیری اشاره کرد. این روش از این جهت ساده و سریع بوده که صرفا اعداد را براساس یک فرمول ساده می‌سازد و در هر مرحله اگر از یک بذر یکسان استفاده کنیم، دنباله مشابه خواهیم داشت.

از معایب این روش می‌توان به تکرار اعداد تصادفی در دوره‌های خاص، کمبود اعداد تصادفی ساخته‌شده و عدم انطباق با توزیع‌های مختلف اشاره نمود. از آنجایی که الگوریتم براساس باقی‌مانده بر عدد m بنا شده بدیهتا یک دوره

تکرار خواهیم داشت که باعث می‌شود محدوده اعداد تصادفی ما به اندازه کافی بزرگ نباشد. همچنین این دنباله معمولا در توزیع خطی قرار گرفته که ممکن است برای تمامی کارها مناسب نباشد.