



## سوالات تئوری

### مسئله‌ی ۱.

در یک رای‌گیری با ۵ کاندید و ۶۵ رای‌دهنده، توزیع ترجیحات شرکت‌کنندگان به صورت زیر است. نتیجه رای‌گیری را تحت هریک از قواعد زیر مشخص کنید.

	۱۱ نفر	۱۲ نفر	۱۳ نفر	۱۴ نفر	۱۵ نفر
انتخاب اول	v	w	x	y	z
انتخاب دوم	w	x	v	w	v
انتخاب سوم	X	y	w	v	x
انتخاب چهارم	y	z	y	z	w
انتخاب پنجم	z	v	z	x	y

الف) قاعده Plurality.

ب) قاعده Plurality with runoff.

ج) قاعده Borda count.

د) قاعده Copenland.

### مسئله‌ی ۲.

حد پایین و بالای مناسب برای اعوجاج روش Borda به دست آورید.

### مسئله‌ی ۳.

قضیه ناممکنی Arrow را ثابت کنید.

### مسئله‌ی ۴.

با استفاده از لم اسپرنر قضیه ناممکنی Arrow را ثابت کنید.

## مسئله‌ی ۵.

نشان دهید در مدل متریک کلی، اگر کاندید  $X$  کاندید  $Y$  و کاندید  $Y$  کاندید  $Z$  را در رقابت رودررو ببرند، آنگاه هزینه اجتماعی  $X$  حداکثر ۵ برابر کاندید  $Z$  است (در کلاس برای این حالت ضریب ۹ ثابت شد). بر همین اساس، نشان دهید اعوجاج روش کوپلند حداکثر برابر ۵ است.

## مسئله‌ی ۶.

مثالی ارائه دهید که در آن اعوجاج روش کوپلند بسیار نزدیک به ۵ باشد.

## مسئله‌ی ۷.

فرض کنید یک گراف کامل جهت دار داریم که بین هر دو راس یک یال رفت و یک یال برگشت قرار دارد که مجموع وزن آن‌ها برابر با یک است. نشان دهید به ازای هر  $\lambda \in [0.5, 1]$ ، در این گراف یک ابرشاه وجود دارد. یک راس  $x$  ابرشاه است، اگر به ازای هر راس دیگر  $y$ ، وزن یال  $x$  به  $y$  بیشتر از  $1 - \lambda$  باشد، یا راس سوم  $z$  وجود داشته باشد که وزن یال  $x$  به  $z$  حداقل  $1 - \lambda$  باشد و وزن یال  $z$  به  $y$  نیز حداقل  $\lambda$  باشد.

## مسئله‌ی ۸.

با استفاده از سوال ۸ نشان دهید میتوان تعمیمی از روش کوپلند ارائه داد که دارای اعوجاج  $(2 + \sqrt{5}) \simeq 4.236$  می باشد. برای این کار کافی است مقدار  $\lambda$  را برابر با نسبت طلایی  $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0.618$  در نظر بگیرید. این روش به Weighted uncovered set معروف است.

## مسئله‌ی ۹.

گراف غلبه‌ی یک کاندیدای  $X$  گرافی دو بخشی است که رئوس هر بخش آن، مجموعه‌ی کل رای‌دهندگان هستند و بین راس  $v$  از بخش سمت چپ و راس  $w$  از راس سمت راست یالی وجود دارد اگر و تنها اگر رای دهنده  $v$  کاندید  $X$  را بیشتر یا مساوی با کاندید مورد علاقه  $w$  (بهترین کاندید  $w$ ) دوست داشته باشد. ثابت کنید در یک ورودی متریک اگر گراف غلبه‌ی کاندیدای منتخب یک تطابق کامل داشته باشد، اعوجاج  $f$  برابر با ۳ است.

## مسئله‌ی ۱۰.

Plurality Veto یک روش رای‌گیری است که با انتخاب یک رای‌دهنده در هر دور و کاهش امتیاز کاندیدای منفور او، با حذف کاندیداهای نامطلوب برنده را انتخاب می‌کند. این روش با الگوریتم زیر عمل می‌کند:

- به ازای هر کاندید  $X$  مقدار امتیاز او را برابر با تعداد رای‌دهندگانی که انتخاب اولشان  $X$  است قرار بده.
- یک ترتیب دلخواه از رای‌دهنده‌ها را انتخاب کن و آن‌ها را یکی یکی بررسی کن.
- از هر رای دهنده درخواست کن از بین کاندیداهایی که باقی مانده است، بدترین کاندید را از دید خود انتخاب و امتیاز او را یک واحد کم کند. اگر این کاندید امتیازش صفر شد، از الگوریتم حذف می‌شود.

آخرین کاندیدی که باقی می ماند برنده الگوریتم است. ثابت کنید در یک ورودی متریک، گراف غلبه‌ی کاندید برنده با این روش، دارای تطابق کامل است و در نتیجه، اعوجاج این روش برابر با ۳ است.

مسئله‌ی ۱۱.

مسئله‌ی ۱۲.

مسئله‌ی ۱۳.

مسئله‌ی ۱۴.

مسئله‌ی ۱۵.