



نظریه‌ی الگوریتمی بازی‌ها

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲
مدرس: مسعود صدیقین

مهلت تحویل: -

تمرین چهارم

مسئله‌ی ۱.

آرش و بابک دو برادر هستند که در یک مسابقه‌ی تلویزیونی شرکت کرده‌اند و صد دلار برنده شده‌اند. چون آرش پیشنهاد شرکت در مسابقه را مطرح کرده‌بود وظیفه‌ی تقسیم جایزه‌شان بر عهده‌ی اوست. عملیات تقسیم جایزه به این صورت انجام می‌شود که آرش تصمیم می‌گیرد به هر کدام چه مقدار پول برسد و سپس بابک تصمیم می‌گیرد این تقسیم‌بندی را بپذیرد یا خیر. اگر بابک تقسیم‌بندی را قبول کند، به هر کدام مطابق با تقسیم‌بندی پول می‌رسد؛ اگر بابک تقسیم‌بندی را قبول نکند، پدر و مادرشان تمام پول را خرج خرید یک جاروی رباتیک می‌کنند و به بچه‌ها پولی تعلق نمی‌گیرد.

(الف) فرض کنید اگر به بابک صفر دلار پیشنهاد شود، عصبانی شده و تقسیم‌بندی را نمی‌پذیرد. تعادل زیربازی کامل را بیابید.
(ب) فرض کنید بابک آن‌قدر از جاروی رباتیک بدش می‌آید که حتی پیشنهاد صفر دلار را هم بپذیرد. تعادل زیربازی کامل را بیابید.

(ج) فرض کنید تابع سود آرش به شکل $u_A(x_1, x_2) = x_1 - 2(x_2 - x_1)$ و تابع سود بابک به شکل $u_B(x_1, x_2) = x_2 - 2(x_1 - x_2)$ تعریف شود که در آن x_1 پول پیشنهادی برای آرش و x_2 پول پیشنهادی برای بابک است. یعنی برای هر کس علاوه بر آن که پول خودش، اختلاف پولش با برادرش هم مهم است. با این فرض که هر دو نفر همچنان سود صفر را به خریدن جاروی رباتیک ترجیح می‌دهند، تعادل زیربازی کامل را بیابید.

مسئله‌ی ۲.

بین دو کشور صلح‌آباد و آرامستان یک جزیره قرار دارد که به دلیل معادنش بسیار ارزشمند است. این جزیره تحت مالکیت آرامستان است اما به تازگی صلح‌آباد آن را اشغال کرده‌است. ارتش آرامستان باید تصمیم بگیرد به صلح‌آباد حمله کند یا نکند.

- اگر آرامستان حمله نکند، جزیره تحت اداره‌ی صلح‌آباد باقی می‌ماند.
 - اگر آرامستان حمله کند و صلح‌آباد عقب‌نشینی کند، جزیره به آرامستان برمی‌گردد.
 - اگر آرامستان حمله کند و صلح‌آباد عقب‌نشینی نکند، دو کشور وارد یک نبرد نظامی می‌شوند که مقامات هر دو کشور معتقدند حتی در صورت پیروزی هم هزینه‌هایش از ارزش جزیره بیش‌تر است.
- این بازی را به شکل یک بازی گسترده مدل کنید و نشان دهید اگر صلح‌آباد پیش از تصمیم آرامستان ناوگان دریایی خود را ویران کند تا نتواند عقب‌نشینی کند، سودش در تعادل زیربازی کامل افزایش می‌یابد.

مسئله‌ی ۳.

یک خودکار دو دلاری به حراج گذاشته شده است. آرش و بابک که هر کدام سه دلار پول دارند، به دنبال به دست آوردن این خودکار هستند. پیشنهاد دادن از آرش شروع می‌شود و دو نفر به نوبت پیشنهاد خود را ارائه می‌کنند. هر پیشنهاد می‌تواند یک

عدد صحیح مثبت باشد که از آخرین پیشنهاد بیش‌تر است. در هر نوبت هر کس می‌تواند یک پیشنهاد معتبر ارائه کند و یا از ادامه‌ی حراج انصراف بدهد. در صورت انصراف خودکار به شرکت‌کننده‌ی دیگر می‌رسد. هر دو نفر باید آخرین پیشنهادشان (اگر پیشنهادی داده باشند) را پرداخت کنند و هیچ‌کس نمی‌تواند پیشنهادی بیش‌تر از ثروتش (سه دلار) ارائه کند. حراج را به شکل یک بازی گسترده مدل کنید و تعادل زیربازی کامل آن را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۴.

پنج راهزن در آخرین غارتشان صد سکه‌ی طلا به دست آورده‌اند و باید آن را بین خودشان تقسیم کنند. هر کدام از راهزنان می‌خواهند تعداد سکه‌هایشان بیش‌تر باشد. همیشه رئیس تقسیم‌بندی را پیشنهاد می‌کند. در یک فرآیند دموکراتیک همه‌ی راهزنان به تقسیم‌بندی پیشنهادی رأی می‌دهند و اگر حداقل نیمی از راهزنان موافق باشند، سکه‌ها طبق پیشنهاد تقسیم می‌شوند. اگر هم رئیس نتواند موافقت حداقل نیمی از افراد را (که شامل خودش نیز می‌شود) به دست آورد، راهزنان دیگر او را سرب‌ه نیست می‌کنند! سپس در میان راهزنان باقی‌مانده باسابقه‌ترین رئیس می‌شود و این فرآیند تکرار می‌شود. ترجیحات راهزنان به این صورت است:

- اول از همه، هر راهزن می‌خواهد زنده بماند.
- سپس در صورت بقا هر راهزن می‌خواهد تعداد سکه‌هایش بیش‌تر باشد.
- در نهایت، هر راهزن ترجیح می‌دهد در صورتی که در تعداد سکه‌هایش تاثیری ندارد، دیگر راهزنان را سرب‌ه نیست کند. حداکثر تعداد سکه‌هایی که رئیس اصلی می‌تواند در تمام تعادل‌های زیربازی کامل کسب کند، چقدر است؟

مسئله‌ی ۵.

آرش و بابک در حال توسعه‌ی یک محصول جدید هستند. آرش در فرآیند توسعه جلوتر است و بابک در حال بررسی این است که باید وارد رقابت شود یا خیر. اگر بابک وارد نشود سودش صفر می‌شود آرش با انحصار کل بازار یک میلیارد دلار سود می‌کند. اگر بابک تصمیم بگیرد که وارد بازار شود، آرش باید تصمیم بگیرد که با بابک به شکل مسالمت‌آمیز رقابت کند یا جنگ قیمتی به راه بیندازد. در صورت رقابت مسالمت‌آمیز، هر شرکت سیصد میلیون دلار سود می‌کند و در صورت وقوع جنگ قیمتی هر کدام صد میلیون دلار ضرر خواهند کرد.

الف) تعادل زیربازی کامل را بیابید.

ب) فرم نرمال بازی را بنویسد و تمامی تعادل‌های نش بازی را بیابید. تعادل‌های نش را با تعادل زیربازی کامل مقایسه کنید.

مسئله‌ی ۶.

آرش و بابک در حال مذاکره برای رسیدن به یک توافق هستند. اگر دو طرف فوراً به توافق برسند، هر کدام صد میلیون دلار سود می‌کنند. اگر دو طرف فوراً به توافق نرسند، یک ماه بعد شانس آخر را برای دستیابی به توافق خواهند داشت. اگر توافق در یک ماه حاصل شود، شرکت آرش ۴۰ میلیون دلار و بابک ۵۵ میلیون دلار سود می‌کنند. مذاکره به روش زیر عمل می‌کند: در دور اول آرش برای امضای قرارداد، مبلغی را از بابک می‌خواهد. اگر بابک بپذیرد، توافق حاصل می‌شود و سود آرش صد میلیون دلار به اضافه‌ی پرداختی بابک است. سود بابک هم صد میلیون دلار منهای مبلغی است که متعهد شده‌است پرداخت کند. اگر بابک پیشنهاد را رد کند، در دور دوم مذاکرات مبلغی را به آرش پیشنهاد می‌کند که آن را برای امضای قرارداد دریافت می‌کند. این بار هم سود هر دو نفر به‌طور مشابهی تحت تاثیر مبلغ پرداختی قرار می‌گیرد.

الف) در تعادل زیربازی کامل آرش چه مبلغی را از بابک درخواست می‌کند؟

ب) اکنون فرض کنید ابتدا بابک و سپس آرش پیشنهادشان را ارائه می‌کنند. در تعادل زیربازی کامل بابک چه مبلغی را از آرش درخواست می‌کند؟

مسئله ۷.

بازیکن ۱ و بازیکن ۲، بازی دو مرحله‌ای با یکدیگر به صورت زیر بازی می‌کنند. در مرحله اول آنها بازی سکه‌های مطابق را بازی می‌کنند که هم زمان بین H و T یکی را انتخاب می‌کنند. اگر تطابق وجود داشت (هر دو H یا T) بازیکن اول برنده محسوب می‌شود و هر دو بازی زیر را در مرحله دوم، بازی خواهند کرد:

		Player 2	
		L	R
Player 1	U	5, 1	0, 0
	D	0, 0	3, 1

چنانچه بین سکه‌های انتخابی تطابقی وجود نداشت، بازیکن دوم برنده بوده و در مرحله‌ی دوم بازی زیر را بازی خواهد کرد.

		Player 2	
		L	R
Player 1	U	1, 5	0, 0
	D	0, 0	1, 3

بازی موردنظر را به صورت یک بازی فرم گسترده بنویسید.

مسئله ۸.

دو خودروساز A و B را در نظر بگیرید که در حال تصمیم‌گیری در مورد افزایش ظرفیت تولید خودشان هستند. هر یک سه انتخاب پیش روی خود دارند:

- ظرفیت خود را ثابت نگه دارند. (ث)
- ظرفیت خود را کمی افزایش دهند (ک)
- ظرفیت خود را به مقدار زیاد افزایش دهند (ز)

با توجه به سود دریافتی هر یک که طبق جدول زیر است به سوالات زیر پاسخ دهید.

	ث	ک	ز
ث	36, 36	30, 40	18, 36
ک	40, 30	32, 32	16, 24
ز	36, 18	24, 16	0, 0

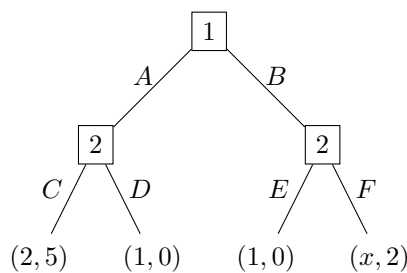
(الف) با فرض این که A و B همزمان تصمیم بگیرند، فرم درختی و فرم نرمال این بازی را بنویسید و تعادل آن را به دست آورید.

(ب) در صورتی که A اول بازی کند و سپس B با دانستن انتخاب A ، بازی کند، فرم درختی بازی را رسم کنید و تعادل زیربازی کامل آن را به دست آورید.

(ج) مشابه حالت ب این بار فرض کنید A انتخاب A را نمی‌داند، فرم درختی، فرم نرمال و تعادل زیربازی کامل را با این شرایط به دست آورید.

مسئله ۹.

بازی زیر را در نظر بگیرید که $x > 1$ ، $x \neq 2$.



(الف) به ازای مقادیر ممکن برای x ، با استفاده از استفرای بازگشتی، استراتژی‌های تعادل را بیابید.

(ب) فرم نرمال بازی را بکشید و برای $x = 3$ تعادل نش با استراتژی ترکیبی را بدست آورید.

مسئله ۱۰.

n شیر گرسنه با یک آهو مواجه می‌شوند. جوان‌ترین شیر می‌تواند تصمیم بگیرد به آهو حمله کند یا خیر. اگر او آهو را نخورد، آهو فرار می‌کند، شکار به پایان می‌رسد، و همه‌ی شیرها گرسنه می‌مانند. اگر هم آهو را بخورد، دیگر گرسنه نیست ولی چاق و کند می‌شود؛ پس جوان‌ترین شیری که گرسنه است، می‌تواند او را بخورد. اگر شیر دوم شیر اول را نخورد، شکار به پایان می‌رسد و به جز شیر اول همه‌ی شیرها گرسنه می‌مانند. اگر هم شیر اول را بخورد، ممکن است شیر بعدی خودش را بخورد و ... هر شیر سیر بودن را به گرسنگی و گرسنگی را به خورده شدن ترجیح می‌دهد. این شکار را به ازای $n = 3$ به شکل یک بازی گسترده مدل کنید. برای هر n دلخواه تعادل (های) زیربازی کامل این بازی را پیدا کنید.