



مسئله‌ی ۱.

نشان دهید در یک مزایده‌ی قیمت افزایشی^۱، استراتژی غالب هر بازیکن، بازی صادقانه است.

مسئله‌ی ۲.

ک مزایده‌ی تک-کالایی با حداقل ۳ شرکت‌کننده را در نظر بگیرید. نشان دهید مکانیزمی که کالا را با قیمت سومین بالاترین bid به دهنده بالاترین bid می‌دهد، DSIC نیست.

مسئله‌ی ۳.

در یک مزایده از نوع قیمت-اول^۲، اگر بدانیم که تمام شرکت‌کنندگان با استفاده از تابع زیر bid خود را ارائه می‌کنند، نشان دهید هیچ بازیکنی انگیزه‌ی اعلام کردن bid متفاوتی را نخواهد داشت.

$$b(v) = E(\max_{j \neq i} v_j \mid v \leq v_j \forall j)$$

مسئله‌ی ۴.

مزایده ALL pay را که در کلاس معرفی شد در نظر بگیرید. در یک مثال از این نوع مزایده‌ها، دو شرکت‌کننده با ارزش‌های پنهان^۳ داریم که به طور مستقل و یکنواخت از بازه‌ی $[0, 1]$ انتخاب شده‌اند.

الف) با استفاده از قضیه تساوی درآمد برگزارکننده^۴، یک تابع $b(v_i)$ برای هر شرکت‌کننده معرفی کنید که به یک تعادل نش-بیزی بینجامد.

ب) بر همین اساس، امید ریاضی درآمد برگزارکننده را برای هر مزایده دلخواه با دو شرکت‌کننده با ارزش‌های پنهان IID از بازه‌ی $[0, 1]$ به دست آورید.

^۱Ascending price auction

^۲First-price

^۳Private valuation

^۴Revenue equivalence

مسئله ۵.

امید ریاضی درآمد برگزارکننده را برای یک مزایده قیمت-دوم با قیمت رزرو شده $\frac{1}{2}$ با دو شرکت کننده که در آن، تابع ارزش شرکت کنندگان مستقل است و به طور یکنواخت در بازه $[0, 1]$ قرار دارد، محاسبه کنید.

مسئله ۶.

مسئله مزایده آنلاین تک کالا، به این صورت فرمول بندی می شود. شما می خواهید یک کالا را به فروش بگذارید و n خریدار در بازه های زمانی $t = 1, \dots, n$ به نوبت پیشنهاد خودشان را اعلام می کنند. شما به عنوان طراح این مزایده آنلاین، در هر بازه زمانی i باید تصمیم بگیرید که اولاً کالایان را به خریدار i ام بفروشید و یا دست نگه دارید تا پیشنهاد نفر بعدی را بدانید و طبیعتاً خریدار i ام را از دست می دهید. ثانیاً باید تعیین کنید که با چه قیمتی کالایان را می فروشید. مکانیزم زیر را در نظر بگیرید:

- در هر بازه زمانی i ، که تا آن زمان کالا به فروش نرفته است، یک قیمت p_i توسط شما و به گونه ای که خریداران نمی دانند تعیین می شود و سپس پیشنهاد خریدار i ام (b_i) را بشنوید. (یعنی قیمت گذاری شما تابع b_i نیست). اگر $b_i \geq p_i$ آنگاه کالا را به خریدار i ام می فروشید. و گرنه کالا برای بازه زمانی بعد فروخته نشده می ماند.

الف) ثابت کنید که این مکانیزم DSIC است.

ب) فرض کنید که خریداران صادقانه پیشنهاد می دهند. نشان دهید به ازای هر ثابت $c > 0$ ، و مستقل از n ، هیچ قیمت گذاری ناصدافی وجود ندارد که در آن competitive ratio مزایده حداقل c باشد.

مسئله ۷.

در این سوال با مفهوم externality آشنا می شوید، که در ادامه ی درس با حالت کلی آن مواجه می شوید.

الف) یک محیط تک متغیره دلخواه با فضای تخصیص های شدنی X را در نظر بگیرید. نشان دهید قاعده ی تخصیصی که رفاه جمعی را بیشینه می کند یعنی:

$$x(b) = \operatorname{argmax}_{(x_1, \dots, x_n) \in X} \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

صعودی یکنوا است. (فرض کنید حالت های تساوی را با یک قاعده ی Tie breaking رفع ابهام می کنیم).

ب) فضای حالت های شدنی در سوال قبل را به بردارهای $0-1$ تقلیل دهید. (فضای $n^{[0,1]}$) یعنی یک شرکت کننده یا می برد یا میبازد. قاعده ی پرداخت مایرسون برای قاعده ی تخصیص بخش قبل را بنویسید و نشان دهید اگر S^* مجموعه ی برندگان مزایده طبق قاعده ی تخصیص بخش قبل باشد آنگاه هر بازیکن برنده اختلاف بین بیشینه ی رفاه جمعی شرکت کنندگان در حالتی که i شرکت نکند و رفاه بازیکنان دیگر جز i در S^* را پرداخت می کند. به این معنا هر بازیکن برنده مقداری که با مشارکتش از رفاه سایر بازیکنان کم می کند را می پردازد.

Reserved-price vickrey auction^۵

مسئله ۸.

در مزایده sponsored search تعداد k جایگاه تبلیغات وجود دارد که در کنار نتایج جست‌وجو به نمایش گذاشته می‌شود. در مزایده فرض می‌کنیم که جایگاه j ام مستقل از تبلیغ درون آن به اندازه‌ی a_j احتمال کلیک دارد که این مقدار بر حسب j نزولی است. بنابراین به ازای هر بار جست‌وجو، مطلوبیت خریدار i که در جایگاه j ام قرار گرفته است، به اندازه‌ی $a_j(v_i - p_j)$ خواهد بود. یکی رایج‌ترین مزایده‌ها برای سرچ اسپانسر، مزایده‌ی GSP می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

• تمام خریداران را بر اساس مقداری که پیشنهاد داده‌اند مرتب می‌کنیم. (بدون کم شدن از کلیت فرض کنید $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$)

• جایگاه i ام را به i امین پیشنهاد دهنده اختصاص می‌دهیم.

• از هر پیشنهاد دهنده‌ی i به اندازه‌ی $b_i + 1$ هزینه می‌گیریم.

الف) نشان دهید GSP به ازای هر $k \geq 2$ و هر مقداری از نرخ کلیک‌ها DSIC نیست.

ب) ک پروفایل bid مانند به صورت $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ را envy-free در نظر می‌گیریم اگر برای هر خریدار i و هر جایگاه $j \neq i$ داشته باشیم:

$$a_i(v_i - b_i + 1) \geq a_j(v_i - b_j + 1)$$

نشان دهید هر پروفایل envy-free یک تعادل نش نیز هست.

ج) نشان دهید هر تعادل envy-free در مکانیزم GSP حداقل به اندازه‌ی مکانیزم DSIC تدریس شده در درس، revenue ایجاد می‌کند.

مسئله ۹.

با استفاده از قضیه revenue equivalence می‌توانیم تعادل BNE در مکانیزم‌هایی که مطالعه‌ی آن‌ها به نظر دشوار می‌رسد را پیدا کنیم. فرض کنید که خریداران یک کالا iid باشند. و توزیع ارزش‌گذاری خریداران از تابع یونیفورم $[0, 1]$ است. تعادل BNE برای مزایده‌های First Price و Second Price را پیدا کنید.

مسئله ۱۰.

مسئله ۱۱.

مسئله ۱۲.

مسئله ۱۳.

مسئله ۱۴.

مسئله ۱۵.