نظریه‌ی الگوریتمی بازی‌ها

نیم‌سال دوم ۰۳ -۰۲

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین ششم

مهلت تحویل : -

سوالات تئوری

مسئله‌ی ۱.

نقاط $P_1, P_2, \ldots, P_n$ در R^d قرار دارند. هر نقطه یا قرمز است یا آبی. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا یک ابرصفحه $a = \{ax = b\}$ وجود دارد که نقاط آبی را کاملا از نقاط قرمز جدا کند یا خیر. یعنی اگر P_1 آبی است، $aP_i > b$ و اگر قرمز است، $aP_i \leq b$. با استفاده از برنامه‌ریزی خطی اگر چنین ابرصفحه‌ای وجود داشت، آن را بیابید.

مسئله‌ی ۲.

برنامه‌ریزی خطی زیر را به فرم استاندارد بنویسید:

$$
\begin{array}{ll}
minimize & \max\{2.3x_1 + x_2, 4.3x_1 - 0.5x_2, 2.5x_1 + 3.5x_2\} \\
subject\, to & \frac{x_1}{x_1+x_2} \leq 0.5 \\
 & 10x_1 + 28x_2 = 3.4 \\
 & x_1 + x_2 \geq 0
\end{array}
$$

مسئله‌ی ۳.

برنامه‌ریزی خطی زیر را به فرم استاندارد بنویسید:

$$
\begin{array}{ll}
minimize & 2x + 3|y - 10| \\
subject\, to & |2 + x| + y \leq 0.5
\end{array}
$$

مسئله‌ی ۴.

فرض کنید $P = \{x : A_1x \leq b_1\}$ و $Q = \{x : A_2x > b_2\}$ دو چندوجهی باشند. چگونه می‌توانیم به کمک برنامه‌ریزی خطی ماکسیموم مقدار تابع c^Tx را برای نقاط $P \backslash Q$ (نقاطی از P که در Q نیستند) پیدا کنیم؟

امتیازی: اگر داشتیم $Q = \{x : A_2x \geq b_2\}$ آیا این کار قابل انجام است؟

مسئله‌ی ۵.

می‌خواهیم فضاپیمایی را از نقطه A به نقطه B بفرستیم. فرض کنید زمان t بر حسب ثانیه و همچنین a_t، v_t و x_t به ترتیب مکان، سرعت و شتاپ فضاپیما در لحظه t باشد. با در نظر گرفتن زمان به صورت گسسته و به صورت تقریبی، معادله‌های زیر برقرار است.

$$x_{t+1} = x_t + v_t$$

$$v_{t+1} = v_t + a_t$$

فرض کنید که مقدار شتاب a_t در هر لحظه توسط ما کنترل می‌شود و اندازه آن ($|a_t|$) ضریبی ثابت از مقدار سوخت استفاده شده در ثانیه t تا $t+1$ باشد.
می‌خواهیم فضاپیما از مکان $x_0 = 0$ و با سرعت $v_0 = 0$ از زمین بلند شده، و همچنین T ثانیه در ارتفاع $x_T = d$ به سرعت $v_T = 0$ برسد.

الف) می‌خواهیم کل سوخت مصرف‌شده در هنگام سفر یعنی $\sum_{t=0}^{T} |a_t|$ را مینیموم کنیم.

ب) می‌خواهیم بیشترین مقدار سوخت مورد نیاز در هر لحظه t یعنی $\max_{t=0}^{T}\{|a_t|\}$ را مینیموم کنیم.

در هر حالت مسئله را به صورت یک برنامه‌ریزی خطی مدل کنید.

مسئله‌ی ۶.

فرض کنید x یک متغیر تصادفی باشد که یکی از مقادیر $a_1, \ldots, a_n$ را اختیار می‌کند. می‌دانیم x از یکی از توزیع‌های p یا q آمده است. یک نمونه تصادفی از x مشاهده می‌کنیم. هدف تعیین این است که x از توزیع p آمده است یا q.
فرض کنید $0 \leq x_j \leq 1$. می‌خواهیم x_jها را طوری تعیین کنیم که:

۱. اگر نمونه مشاهده شده a_j باشد، ما به احتمال x_j توزیع p را انتخاب می‌کنیم.

۲. اگر توزیع q باشد، احتمال انتخاب p حداکثر 0.01 باشد.

۳. اگر توزیع p باشد، احتمال انتخاب p بیشینه باشد.

(به شرط این که اگر توزیع q بود احتمال انتخاب p حداکثر 0.01 باشد، کاری کنیم که اگر توزیع p باشد، احتمال انتخاب p بیشنیه شود.)
یک برنامه خطی برای پیدا کردن x_jها بنویسید.

مسئله‌ی ۷.

فرض کنید گراف بی‌جهت $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ و برای هر یال $e \in \mathcal{E}$، هزینه c_e داده شده است. هدف، پیدا کردن تور (دوری که از همه رئوس می‌گذرد) با مینیموم هزینه است. برای مدل‌سازی مسئله، برای هر یال $e \in \mathcal{E}$، متغیر x_e را تعریف می‌کنیم که مساوی یک است، اگر یال e عضو تور باشد، و در غیر این صورت مساوی صفر است. دو فرمول‌بندی زیر را برای این مسئله در نظر بگیرید:

۱. چون هر راس گراف باید روی دو یال تور باشند، پس داریم:

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2, \quad i \in \mathcal{V}$$

همچنین اگر S زیر مجموعه اکید $\mathcal{V}$ باشد، باید حداقل دو یال، مجموعه S را به مجموعه $\mathcal{V}-S$ وصل کند، و داریم:

$$\sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 2, \quad S\subset\mathcal{V}, S\neq\mathcal{V}$$

۲. با ایده مشابه، می‌توانیم محدودیت‌های مسئله را به این صورت فرمول‌بندی کنیم:

$$\begin{aligned} &\sum_{e\in\delta(i)} x_e = 2, && i\in\mathcal{V} \\ &\sum_{e\in E(S)} x_e \leq |S|-1, && S\subset\mathcal{V}, S\neq\mathcal{V} \\ &x_e\in 0,1 \end{aligned}$$

اگر P_{tspcut} و P_{tspsub}، چندوجهی‌های متناظر با برنامه‌های خطی ریلکس شده این فرمول‌بندی‌ها باشند، ثابت کنید:

$$P_{tspcut} = P_{tspsub}$$

مسئله‌ی ۸.

می‌خواهیم برای مسئله پوشش رأسی کمینه گراف یک تقریب بهتر ارائه دهیم. **یادآوری:** برنامه‌ریزی خطی ریلکس‌شده این مسئله به صورت زیر بود:

$$\begin{array}{lll} minimize & \sum_{i\in V(G)} w_i x_i & \\ subject\,to & x_i + x_j \geq 1 & \forall (i,j)\in E(G) \\ & 10x_1 + 28x_2 = 3.4 & \forall i\in V(G) \end{array}$$

الف) ثابت کنید که در برنامه‌ریزی خطی ریلکس‌شده آن، جواب بهینه‌ای وجود دارد که $x_i\in\{0,\frac{1}{2},1\}$.
(راهنمایی: جواب بهینه‌ای را در نظر بگیرید که آن را نتوان به صورت ترکیب خطی دو جواب بهینه دیگر نوشت و فرض کنید می‌دانیم چنین جوابی وجود دارد. به چنین نقطه‌ای در فضای خطی متغیرها، نقطه گوشه‌ای گویند.)

ب) با فرض داشتن جواب ریلکس‌شده با فرمت قسمت قبلی یک $\frac{3}{2}$ـ تقریب برای پوشش رأسی کمینه گراف‌های مسطح ارائه دهید.
(راهنمایی: از این قضیه استفاده کنید که الگوریتمی وجود دارد که در زمان چند جمله‌ای رئوس گراف مسطح را با چهار رنگ، رنگ می‌کند به طوری که هیچ دو رأس مجاوری دارای یک رنگ یکسان نباشند.)

مسئله‌ی ۹.

برای $A\in R^{m\times n}$ تابع غیرخطی(!) زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &f: R^m\times R^n\to R \\ &f(x,y) = x^T A y \quad x\in R^m, y\in R^n \end{aligned}$$

می‌خواهیم $\max_{x\in P_m} \min_{y\in P_n} f(x,y)$ را محاسبه کنیم به طوری که:

$$P_n = \{y \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y \geq 0\}$$
$$P_m = \{x \in R^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x \geq 0\}$$

جواب مسئله را به صورت جواب یک برنامه‌ریزی خطی بدست آورید.
راهنمایی: برنامهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} minimize & x^T A y \\ subject\,to & \sum y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

مسئله‌ی ۱۰.

دو برنامه خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} maximize & c^T x \\ subject\,to & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} minimize & b^T y \\ subject\,to & y^T A \geq c^T \\ & y \geq 0 \end{array}$$

با فرض اینکه دست کم یکی از این دو برنامه، پاسخ شدنی دارد، ثابت کنید مجموعه پاسخ‌های شدنی حداقل یکی از دو برنامه فوق کران ندارد.
راهنمایی: کراندار بودن یک مجموعه را به صورت متناهی بودن تابع هدف یک برنامه خطی خاص تفسیر کنید.

مسئله‌ی ۱۱.

برای گراف جهت‌دار $f : A \to R, D = (V, A)$ را یک جریان دوری می‌گوییم هرگاه:

$$\sum_{a\in\delta^{in}(v)} f(a) = \sum_{a\in\delta^{out}(v)} f(a) \qquad \forall v \in V$$

الف) گراف جهت‌دار $D = (V, A)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید ماتریس برخورد D تماما تک‌پیمانه‌ای است.

ب) هر بردار $x \in R^A$ را می‌توان تابعی روی یال‌های D در نظر گرفت. اگر M ماتریس برخورد گراف بالا باشد، نشان دهید $Mx = 0$ اگر و تنها اگر x یک جریان دوری روی یال‌های D باشد.

ج) فرض کنید $D = (V, A)$ گراف جهت‌دار به همان صورت بالا بوده و $c : A \to Z$ و $d : A \to Z$ دو بردار در Z^A باشند. نشان دهید اگر جریان دوری مانند x روی A وجود داشته باشد به طوری که $c \leq x \leq d$ آنگاه جریان دوری صحیحی مانند z

روی A وجود خواهد داشت به طوری که $c \leq z \leq d$.

ج) فرض کنید $D = (V, A)$ گراف جهت‌دار به همان صورت بالا بوده و $c, d : A \to Z$ به طوری که $d \leq c$. نشان دهید جریان دوری مانند f وجود دارد به طوری که $d \leq f \leq c$ اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه $U \in V$ داشته باشیم:

$$\sum_{a \in \delta^{in}(U)} d(a) \leq \sum_{a \in \delta^{out}(U)} c(a)$$

مسئله‌ی ۱۲.

مسئله ماکزیمم SAT به این صورت می‌باشد که n متغیر بولی $x_1, \ldots, x_n$ و m تا عبارت بولی $C_1, \ldots, C_m$ که هر کدام متشکل از OR تعدادی از متغیرها هستند داریم و می‌خواهیم طوری متغیرها را مقدار دهی کنیم که بیشترین تعداد از عبارات بودی مقدار $true$ بگیرند.

الف) برنامه‌ریزی صحیحی برای این مسئله ارائه کنید.

ب) در مرحله دوم حل یک برنامه‌ریزی صحیح یعنی تبدیل جواب به دست آمده از برنامه‌ریزی خطی ریلکس‌شده به جوابی صحیح برای مسئله؛ می‌توان تابعی از این جواب را به عنوان توزیعی احتمالاتی برای یک یا صفر نسبت دادن به هر متغیر استفاده کرد. ثابت کنید اگر تابع دلخواه f که در نامساوی زیر صدق می‌کند را در نظر بگیریم و به متغیر x_i با احتمال $f(x_I^*)$ مقدار یک نسبت دهیم (x^* جواب بهینه‌سازی خطی است) آنگاه یک $\frac{3}{4}$ـ تقریب برای این مسئله ارائه داده‌ایم.

$$1 - 4^{-x} \leq f(x) \leq 4^{x-1}$$

مسئله‌ی ۱۳.

مسئله‌ی ۱۴.