



## مسئله‌ی ۱. چارلز پانزی

فرض کنید موسوی و کوروش دو فروشنده گوشی موبایل هستند. هر دو می‌خواهند با تعیین قیمت مناسب سود خود را از بازاری که برای فروش محصولشان وجود دارد بیشینه کنند.

فرض کنید کل هزینه‌ای که هر شرکت برای تهیه‌ی هر گوشی موبایل انجام می‌دهد ۸ دلار باشد. اگر قیمتی که موسوی تعیین می‌کند  $P_M$  و قیمتی که کوروش تعیین می‌کند  $P_K$  باشد، میزان فروش موسوی برابر با:

$$Q_M = 44 - 2P_M + P_K$$

و میزان فروش کوروش برابر با:

$$Q_K = 44 - 2P_K + P_M$$

خواهد بود.

به کمک تعیین best response ها تعادل نش را در میان مجموعه‌ی تصمیمات این دو محاسبه کنید. استفاده از نمودار و نشان دادن نتایجتان به شکل تصویری بسیار توصیه می‌شود.

## مسئله‌ی ۲. تقسیم عادلانه

کاب و مال می‌خواهند کیکی با اندازه صد را بین خود تقسیم کنند. هر کدام از آن‌ها همزمان یک عدد حقیقی، بین صفر تا صد، اعلام می‌کنند و تقسیم کیک به این شکل انجام می‌شود:

- اگر مجموع دو عدد اعلام‌شده کمتر از صد یا مساوی با آن باشد، هر کدام به اندازه عددی که اعلام کرده از کیک سهم می‌برد.

- اگر هم مجموعشان بزرگ‌تر از صد باشد، هر کس که عددی پایین‌تر (به عنوان مثال  $x$ ) را پیشنهاد کرده است، به اندازه  $x$  سهم می‌برد و نفر دوم هم به میزان  $100 - x$  سهم می‌برد.

- در صورتی که مجموع اعداد بیشتر از صد باشد و اعداد اعلام‌شده با یکدیگر برابر باشند، هر کدام به اندازه ۵۰ سهم می‌برند.

الف) این مساله را به عنوان یک بازی استراتژی مدل‌سازی کنید.

ب) نشان دهید که انتخاب عدد پنجاه توسط هر دو یک نقطه تعادل نش است.

ج) آیا نقطه تعادل نش خالص دیگری وجود دارد؟ پاسخ خود را ثابت کنید.

### مسئله ۳. یکی برای همه

فرض کنید در یک بازی دو نفره استراتژی ترکیبی  $s$  بهترین پاسخ به استراتژی  $t$  است. نشان دهید تمام استراتژی‌هایی که با احتمال ناصفر در  $s$  انتخاب می‌شوند نیز بهترین پاسخ به  $t$  هستند. نشان دهید عکس این رابطه نیز صحیح است.

### مسئله ۴. مسیر ناصر

استانداری فارس قصد دارد بین شیراز و نورآباد یک جاده بسازد. هزینه ساخت جاده برابر با  $c > 0$  فرض می‌شود. ارزش این جاده برای شهرداری شیراز برابر با  $0 \leq v_S$  و برای شهرداری نورآباد برابر با  $0 \leq v_N$  فرض می‌شود. هر کدام از شهرداری‌های شیراز و نورآباد به‌طور همزمان و به ترتیب مبالغ  $0 \leq b_N$  و  $0 \leq b_S$  را برای مشارکت در ساخت جاده پیشنهاد می‌کنند. اگر  $c \leq b_S + b_N$  باشد، جاده ساخته می‌شود. اگر  $b_N < c \leq b_N + b_S$ ، شهرداری شیراز مبلغ  $c - b_N$  را به استانداری پرداخت می‌کند؛ در غیر این صورت هم مبلغی را پرداخت نمی‌کند. به طور مشابه اگر  $b_S < c \leq b_N + b_S$  شهرداری نورآباد مبلغ  $c - b_S$  را به استانداری پرداخت می‌کند. در غیر این صورت هم مبلغی را پرداخت نمی‌کند. اگر جاده ساخته شود، سود هر شهرداری برابر با ارزش جاده برای آن منهای میزان پرداختی به استانداری است. در غیر این صورت هم برابر با صفر است. با در نظر گرفتن فرض  $v_S + v_N < c$  به سوالات زیر جواب دهید:

(الف) این بازی را به فرم نرمال بنویسید.

(ب) بررسی کنید که آیا تعادل استراتژی غالب وجود دارد؟ در صورت وجود آن را محاسبه کنید.

### مسئله ۵. مهمانی روزانه

محسن، احسان، و رضا سه دوست قدیمی هستند که پس از مدت‌ها یکدیگر را در یک مهمانی دیده‌اند. پس از مهمانی هر کدام از آن‌ها می‌خواهد ارتباط خود را با دیگران از طریق شبکه‌های اجتماعی حفظ کند. برای این منظور هر کدام به طور مستقل به سراغ یکی از سه شبکه‌ی اجتماعی فیسبوک، اینستاگرام، و ایکس می‌روند. هر کدام بر اساس تعداد دوستانی (در این جمع) که در شبکه‌ی اجتماعی مورد نظرش پیدا می‌کند سود می‌کند. این بازی را به شکل نرمال فرم تعریف کنید و بازیکنان، استراتژی‌ها، و توابع سود را مشخص کنید.

### مسئله ۶. پروژه پایگاه داده

قرار است بهزاد و مهدی انتخاب کنند که چقدر برای انجام پروژه مشترک درس پایگاه داده وقت بگذارند. اگر بهزاد به اندازه  $0 \leq x$  و مهدی به اندازه  $0 \leq y$  وقت بگذارد، میزان بهره هر کدام از آن‌ها به این شکل خواهد بود:

$$u_B(x, y) = (x + y + xy) - 2x^2 \quad u_M(x, y) = v(x + y + xy) - 2y^2$$

که در آن‌ها  $v$  ثابت است و  $0 \leq v \leq 2$ .

(الف) برای این بازی مجموعه‌ی تعادل‌های نش را به شکل تابعی از  $v$  پیدا کنید.

(ب) یک مجموعه انتخاب پیدا کنید که مجموع سود بهزاد و مهدی را بیشینه کند.

## مسئله ۷. کمک

کامبیز، مهدی، و مرتضی بازی ای انجام می دهند. در این بازی استراتژی کامبیز، مهدی، و مرتضی به ترتیب با  $s_1$ ،  $s_2$ ، و  $s_3$  نشان داده می شود و توابع امتیازشان با  $u_1$ ،  $u_2$ ، و  $u_3$ . با توجه به تعاریف زیر تعادل نش را پیدا کنید:

$$u_1(s_1, s_2, s_3) = s_1 + s_1 s_2 - s_1^2, \quad u_2(s_1, s_2, s_3) = s_2 + s_1 s_2 - s_2^2$$

$$u_3(s_1, s_2, s_3) = (10 - s_1 - s_2 - s_3)s_3$$

## مسئله ۸.

فرض کنید که یک شرکت شکلات سازی  $n$  نفر سهام دار داشته باشد. این شرکت در حال حاضر با بحران ورشکستگی مواجه شده است. برای رهایی از این بحران حداقل یک نفر از اعضای شرکت باید به اندازه پانصد هزار شکلات سرمایه گذاری کند. در این صورت شرکت از ورشکستگی خارج می شود و هر نفر به اندازه یک میلیون و پانصد هزار شکلات سود خواهد کرد. دقت کنید که افزایش سرمایه گذاران سود نهایی افراد را افزایش نمی دهد و مثلاً اگر ۲ نفر سرمایه گذاری انجام دهند شکلات های یکی از آن ها هدر می رود. با این حال سرمایه گذاران نباید دست روی دست بگذارند چون در این صورت شرکت ورشکسته می شود و به هیچ یک از سهام داران شکلات نمی رسد!

نشان دهید که سهام داران یک استراتژی symmetric و احتمالاً به صورت ترکیبی یکتا برای رسیدن به تعادل نش دارند. فرض کنید  $P_i$  احتمال این باشد که سهام دار  $i$ ام روی شرکت سرمایه گذاری کند. نشان دهید  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \log(3)$  خواهد بود.

## مسئله ۹.

فرض کنید که ایدئولوژی رای دهندگان در یک انتخابات را بتوان با یک مقدار  $v_i \in [0, 1]$  مدل کرد. (مثلاً ۰ نمایش دهنده چپ افراطی و ۱ نمایش دهنده راست افراطی باشد). جامعه ای از رای دهندگان را در نظر بگیرید که به طور یکنواخت روی خط  $[0, 1]$  پخش شده اند. ۲ نامزد انتخابات را در نظر بگیرید، این نامزدها یک عدد  $x_i \in [0, 1]$  انتخاب کرده که نمایانگر یک ایدئولوژی است و کمپین انتخابات خود را در راستای تبلیغ آن ایدئولوژی برپا می کنند. در نهایت هر رای دهنده به فردی رای می دهد که به ایدئولوژی نزدیک تری به خود داشته باشد (مثلاً اگر  $x_1 = 0.3$  و  $x_2 = 0.6$  باشد هر رای دهنده ای که  $x_i < 0.45$  داشته باشد به نفر اول رای می دهد و هر رای دهنده ای که  $x_i > 0.45$  داشته باشد به نفر دوم رای می دهد).

رای های رای دهندگانی که در فاصله یکسان از دو نماینده قرار دارند به طور مساوی بین دو نماینده پخش می شوند. فرض کنید که نامزدها تنها به پیروزی در انتخابات اهمیت می دهند و توانایی تبلیغ هر ایدئولوژی را دارند.

(الف) در حالتی که ۲ نامزد در انتخابات باشند. تعادل نش خالص بازی را پیدا کنید. اثبات کنید که این تعادل یکتاست.

(ب) اگر ۳ نامزد در انتخابات شرکت کنند، یک تعادل نش خالص برای بازی پیدا کنید.

## مسئله ۱۰.

۳ شرکت که رقیب یکدیگر هستند تبلیغات خود را به صورت تلویزیونی در دو نوبت صبح و بعد از ظهر پخش می کنند. سود حاصل از تبلیغات در نوبت صبح ۲۰۰ دلار و سود حاصل از تبلیغات در نوبت عصر ۳۰۰ دلار است. با این حال اگر دو شرکت

همزمان تبلیغ کنند هیچ کدام سود نخواهند کرد. با توجه به این موضوع یک تعادل نش ترکیبی برای استراتژی تبلیغات شرکت‌ها پیدا کنید.

### مسئله‌ی ۱۱.

دو شرکت رقیب موقعیت شغلی باز دارند. دو نفر خواهان شغل‌ها وجود دارد. فرض کنید حقوق شرکت  $i$  ام  $w_i$  است و اگر  $\frac{1}{2}w_1 < w_2 < 2w_1$ . اگر دو نفر همزمان به یک شرکت درخواست بدهند تنها یک نفر برای شغل انتخاب می‌شود (به صورت تصادفی) و نفر دیگر بدون شغل خواهد ماند و حقوقی به آن اختصاص داده نمی‌شود. حال اگر آن دو نفر به شرکت‌های مختلف درخواست دهند حتما پذیرفته می‌شوند. با توجه به این توضیحات، تعادل نش استراتژی افراد را برحسب  $w_1$  و  $w_2$  مشخص کنید.

### مسئله‌ی ۱۲.

آرش و شایان باید هر یک به طور همزمان عددی بین  $[0, 1]$  را انتخاب کنند. اگر آرش  $a$  و شایان  $s$  را انتخاب کند، شایان باید به اندازه  $(a - s)^2$  به آرش بپردازد.

الف) فرض کنید شایان می‌داند آرش با توزیع احتمال  $F_a(a)$  بازی خواهد کرد. شایان چگونه باید بازی کند؟

ب) فرض کنید آرش بداند که شایان با توزیع احتمال  $F_s(s)$  بازی می‌کند. آرش باید چگونه بازی کند؟