نظریه‌ی الگوریتمی بازی‌ها

نیم‌سال دوم ۰۳ -۰۲

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین هشتم — مهلت تحویل : -

سوالات تئوری

مسئله‌ی ۱.

قضیه minmax را با استفاده از duality در LP اثبات کنید.

مسئله‌ی ۲.

نشان دهید اگر در هر بازی zero-sum به ازای هر زیرماتریس ۲×۲ یک نقطه زینی[۱] داشته باشیم، آنگاه در خود بازی نیز نقطه زینی خواهیم داشت.

مسئله‌ی ۳.

بازی zero-sum دو نفره زیر را در نظر بگیرید. هر دو بازیکن به صورت همزمان یکی از اعداد $\{2, 3\}$ صدا می‌زنند. بازیکن اول در صورتی برنده خواهد شد که مجموع اعداد صدا زده شده فرد باشد. در صورتی که مجموع اعداد زوج بود بازیکن دوم برنده بازی خواهد بود.
پس از مشخص شدن برنده و بازنده، بازنده می‌بایست حاصل ضرب دو عدد گفته شده توسط دو بازیکن را به برنده بپردازد.
حال با توجه به شرایط گفته شده ماتریس پرداخت[۲]، ارزش بازی، و استراتژی بهینه برای هر بازیکن را بیابید.

مسئله‌ی ۴.

فرض کنید در یک بازی دو نفره zero-sum، ماتریس بازی به صورت یک مربع لاتین با مقادیر ۱ تا n باشد. در این صورت minimax value را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۵.

بازی Morra که به دوران روم باستان بازمی‌گردد، توسط دو بازیکن بازی شود. بازی به این صورت است هر بازیکن انتخاب می‌کند که یک انگشت یا دو انگشت خود را نشان می‌دهد و همزمان حدسی در مورد تعداد انگشت‌هایی که حریف نشان می‌دهد می‌زند و به حریف خود می‌گوید. اگر هر دو بازینکن حدس درست بزنند یا هر دو حدس‌شان غلط باشد، بازی مساوی اعلام می‌شود و طلایی بین دو بازیکن دست به دست نمی‌شود. اما اگر یک بازیکن حدس درست و دیگری حدس نادرست بزند،

[۱] saddle point
[۲] payoff matrix

بازیکنی که حدس درست زده برنده اعلام شده و در این صورت استراتژی بازیکن برنده یعنی تعداد انگشت نشان داده شده s و حدس تعداد انگشت t جایزه را تعیین می‌کند: بازنده به برنده $s+t$ قطعه طلا می‌پردازد.

الف) با استفاده از $[s,t]$ که در آن s نشان‌دهنده تعداد انگشت‌های گفته شده و t نشان‌دهنده تعداد انگشت‌های حدس زده شده است، می‌خواهیم استراتژی بازی را مشخص کنیم. برای اینکار ابتدا نیاز داریم که ماتریس پرداخت برای دو بازیکن را مشخص کنیم. بخش از این ماتریس با توجه به استراتژی دو بازیکن در زیر مشخص شده است. تمام نقاط خالی ماتریس را با توجه به تابع هزینه پرداخت شده بازیکن بازنده به برنده پر کنید.

$$
\begin{array}{cc|cccc|}
 & & \multicolumn{4}{c}{Player\, 2} \\
 & & [1,1] & [1,2] & [2,1] & [2,2] \\
\hline
Player\, 1 & [1,1] & 0 & -2 & 3 & 0 \\
 & [1,2] & & & & \\
 & [2,1] & & & & \\
 & [2,2] & & & &
\end{array}
$$

ب) بهترین استراتژی ترکیبی بازی را با راه‌اندازی و حل یک برنامه‌ریزی خطی (LP) مناسب پیدا کنید.

مسئله‌ی ۶.

یک گراف جهت‌دار به صورت $G=(V,E)$ در نظر بگیرید که روی هر یال (i,j) آن وزن w_{ij} با مقدار غیرمنفی قرار داد. فرض کنید $W_i=\sum_j w_{ij}$. در این بازی هر بازیکن یک راس از گراف را انتخاب کرده به طوری که راس انتخاب شده بازیکن اول را i و راس انتخابی بازیکن دوم را j در نظر می‌گیریم. بازیکن اول در صورتی که $i \neq j$ باشد برنده اعلام شده و مقدار w_{ij} را به عنوان پاداش دریافت می‌کند و در صورتی که $i=j$ بود بازنده اعلام شده و مقدار $W_i - w_{ii}$ را از دست می‌دهد. در این صورت، درایه‌های ماتریس پرداخت A به صورت $a_{ij}=w_{ij}-1_{\{i=j\}}W_i$ می‌توان در نظر گرفت. همچنین می‌دانیم اگر $n=2$ باشد، تمامی وزن‌های گراف یعنی w_{ij} مقدار یک خواهند داشت.

الف) نشان دهید بازی ارزشی معادل با صفر دارد.

ب) اثبات کنید که ازای مقادیر $x \in \Delta_n$ خواهیم داشت:

$$x^T A = 0$$

مسئله‌ی ۷.

قضیه The Semi-Finite Minimax را اثبات کنید.