نظریه‌ی الگوریتمی بازی‌ها

نیم‌سال دوم ۰۳ -۰۲

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین ششم

مهلت تحویل : -

سوالات تئوری

مسئله‌ی ۱.

نقاط $P_1, P_2, \ldots, P_n$ در R^d قرار دارند. هر نقطه یا قرمز است یا آبی. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا یک ابرصفحه $a = \{ax = b\}$ وجود دارد که نقاط آبی را کاملا از نقاط قرمز جدا کند یا خیر. یعنی اگر P_1 آبی است، $aP_i > b$ و اگر قرمز است، $aP_i \le b$. با استفاده از برنامه‌ریزی خطی اگر چنین ابرصفحه‌ای وجود داشت، آن را بیابید.

مسئله‌ی ۲.

برنامه‌ریزی خطی زیر را به فرم استاندارد بنویسید:

$$\begin{aligned} &minimize && \max\{2.3x_1 + x_2, 4.3x_1 - 0.5x_2, 2.5x_1 + 3.5x_2\} \\ &subject\, to && \tfrac{x_1}{x_1+x_2} \le 0.5 \\ & && 10x_1 + 28x_2 = 3.4 \\ & && x_1 + x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

مسئله‌ی ۳.

برنامه‌ریزی خطی زیر را به فرم استاندارد بنویسید:

$$\begin{aligned} &minimize && 2x + 3|y - 10| \\ &subject\, to && |2 + x| + y \le 0.5 \end{aligned}$$

مسئله‌ی ۴.

فرض کنید $P = \{x : A_1x \le b_1\}$ و $Q = \{x : A_2x > b_2\}$ دو چندوجهی باشند. چگونه می‌توانیم به کمک برنامه‌ریزی خطی ماکسیموم مقدار تابع c^Tx را برای نقاط $P \backslash Q$ (نقاطی از P که در Q نیستند) پیدا کنیم؟

امتیازی: اگر داشتیم $Q = \{x : A_2x \ge b_2\}$ آیا این کار قابل انجام است؟

مسئله‌ی ۵.

می‌خواهیم فضاپیمایی را از نقطه A به نقطه B بفرستیم. فرض کنید زمان t بر حسب ثانیه و همچنین a_t، v_t و x_t به ترتیب مکان، سرعت و شتاپ فضاپیما در لحظه t باشد. با در نظر گرفتن زمان به صورت گسسته و به صورت تقریبی، معادله‌های زیر برقرار است.

$$x_{t+1} = x_t + v_t$$
$$v_{t+1} = v_t + a_t$$

فرض کنید که مقدار شتاب a_t در هر لحظه توسط ما کنترل می‌شود و اندازه آن ($|a_t|$) ضریبی ثابت از مقدار سوخت استفاده شده در ثانیه t تا $t+1$ باشد.
می‌خواهیم فضاپیما از مکان $x_0 = 0$ و با سرعت $v_0 = 0$ از زمین بلند شده، و همچنین T ثانیه در ارتفاع $x_T = d$ به سرعت $v_T = 0$ برسد.

الف) می‌خواهیم کل سوخت مصرف‌شده در هنگام سفر یعنی $\sum_{t=0}^{T} |a_t|$ را مینیموم کنیم.

ب) می‌خواهیم بیشترین مقدار سوخت مورد نیاز در هر لحظه t یعنی $\max_{t=0}^{T}\{|a_t|\}$ را مینیموم کنیم.

در هر حالت مسئله را به صورت یک برنامه‌ریزی خطی مدل کنید.

مسئله‌ی ۶.

فرض کنید x یک متغیر تصادفی باشد که یکی از مقادیر $a_1, \ldots, a_n$ را اختیار می‌کند. می‌دانیم x از یکی از توزیع‌های p یا q آمده است. یک نمونه تصادفی از x مشاهده می‌کنیم. هدف تعیین این است که x از توزیع p آمده است یا q.
فرض کنید $0 \le x_j \le 1$. می‌خواهیم x_jها را طوری تعیین کنیم که:

۱. اگر نمونه مشاهده شده a_j باشد، ما به احتمال x_j توزیع p را انتخاب می‌کنیم.

۲. اگر توزیع q باشد، احتمال انتخاب p حداکثر 0.01 باشد.

۳. اگر توزیع p باشد، احتمال انتخاب p بیشینه باشد.

(به شرط این که اگر توزیع q بود احتمال انتخاب p حداکثر 0.01 باشد، کاری کنیم که اگر توزیع p باشد، احتمال انتخاب p بیشنیه شود.)
یک برنامه خطی برای پیدا کردن x_jها بنویسید.

مسئله‌ی ۷.

فرض کنید گراف بی‌جهت $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ و برای هر یال $e \in \mathcal{E}$، هزینه c_e داده شده است. هدف، پیدا کردن تور (دوری که از همه رئوس می‌گذرد) با مینیموم هزینه است. برای مدل‌سازی مسئله، برای هر یال $e \in \mathcal{E}$، متغیر x_e را تعریف می‌کنیم که مساوی یک است، اگر یال e عضو تور باشد، و در غیر این صورت مساوی صفر است. دو فرمول‌بندی زیر را برای این مسئله در نظر بگیرید:

۱. چون هر راس گراف باید روی دو یال تور باشند، پس داریم:

$$\sum_{e \in \delta(i)} x_e = 2, \quad i \in \mathcal{V}$$

همچنین اگر S زیر مجموعه اکید $\mathcal{V}$ باشد، باید حداقل دو یال، مجموعه S را به مجموعه $\mathcal{V}-S$ وصل کند، و داریم:

$$\sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 2, \quad S\subset\mathcal{V}, S\neq\mathcal{V}$$

۲. با ایده مشابه، می‌توانیم محدودیت‌های مسئله را به این صورت فرمول‌بندی کنیم:

$$\sum_{e\in\delta(i)} x_e = 2, \qquad i\in\mathcal{V}$$
$$\sum_{e\in E(S)} x_e \leq |S|-1, \quad S\subset\mathcal{V}, S\neq\mathcal{V}$$
$$x_e \in 0,1$$

اگر P_{tspcut} و P_{tspsub}، چندوجهی‌های متناظر با برنامه‌های خطی ریلکس شده این فرمول‌بندی‌ها باشند، ثابت کنید:

$$P_{tspcut} = P_{tspsub}$$

مسئله‌ی ۸.

می‌خواهیم برای مسئله پوشش رأسی کمینه گراف یک تقریب بهتر ارائه دهیم. **یادآوری:** برنامه‌ریزی خطی ریلکس‌شده این مسئله به صورت زیر بود:

$$\begin{array}{lll} minimize & \sum_{i\in V(G)} w_i x_i & \\ subject\,to & x_i + x_j \geq 1 & \forall (i,j)\in E(G) \\ & 10x_1 + 28x_2 = 3.4 & \forall i \in V(G) \end{array}$$

الف) ثابت کنید که در برنامه‌ریزی خطی ریلکس‌شده آن، جواب بهینه‌ای وجود دارد که $x_i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.
(راهنمایی: جواب بهینه‌ای را در نظر بگیرید که آن را نتوان به صورت ترکیب خطی دو جواب بهینه دیگر نوشت و فرض کنید می‌دانیم چنین جوابی وجود دارد. به چنین نقطه‌ای در فضای خطی متغیرها، نقطه گوشه‌ای گویند.)

ب) با فرض داشتن جواب ریلکس‌شده با فرمت قسمت قبلی یک $\frac{3}{2}$ــ تقریب برای پوشش رأسی کمینه گراف‌های مسطح ارائه دهید.
(راهنمایی: از این قضیه استفاده کنید که الگوریتمی وجود دارد که در زمان چند جمله‌ای رئوس گراف مسطح را با چهار رنگ، رنگ می‌کند به طوری که هیچ دو رأس مجاوری دارای یک رنگ یکسان نباشند.)

مسئله‌ی ۹.

برای $A\in R^{m\times n}$ تابع غیرخطی(!) زیر را در نظر بگیرید:

$$f: R^m \times R^n \to R$$
$$f(x,y) = x^T A y \quad x\in R^m, y\in R^n$$

می‌خواهیم $\max_{x\in P_m}\min_{y\in P_n} f(x,y)$ را محاسبه کنیم به طوری که:

$$P_n = \{y \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y \geq 0\}$$
$$P_m = \{x \in R^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x \geq 0\}$$

جواب مسئله را به صورت جواب یک برنامه‌ریزی خطی بدست آورید.
راهنمایی: برنامهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &minimize && x^T A y \\ &subject\,to && \textstyle\sum y_j = 1 \\ & && y \geq 0 \end{aligned}$$

مسئله‌ی ۱۰.

دو برنامه خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &maximize && c^T x \\ &subject\,to && Ax \leq b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &minimize && b^T y \\ &subject\,to && y^T A \geq c^T \\ & && y \geq 0 \end{aligned}$$

با فرض اینکه دست کم یکی از این دو برنامه، پاسخ شدنی دارد، ثابت کنید مجموعه پاسخ‌های شدنی حداقل یکی از دو برنامه فوق کران ندارد.
راهنمایی: کراندار بودن یک مجموعه را به صورت متناهی بودن تابع هدف یک برنامه خطی خاص تفسیر کنید.

مسئله‌ی ۱۱.

برای گراف جهت‌دار $f : A \to R, D = (V, A)$ را یک جریان دوری می‌گوییم هرگاه:

$$\sum_{a\in\delta^{in}(v)} f(a) = \sum_{a\in\delta^{out}(v)} f(a) \qquad \forall v \in V$$

الف) گراف جهت‌دار $D = (V, A)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید ماتریس برخورد D تماما تک‌پیمانه‌ای است.

ب) هر بردار $x \in R^A$ را می‌توان تابعی روی یال‌های D در نظر گرفت. اگر M ماتریس برخورد گراف بالا باشد، نشان دهید $Mx = 0$ اگر و تنها اگر x یک جریان دوری روی یال‌های D باشد.

ج) فرض کنید $D = (V, A)$ گراف جهت‌دار به همان صورت بالا بوده و $c : A \to Z$ و $d : A \to Z$ دو بردار در Z^A باشند. نشان دهید اگر جریان دوری مانند x روی A وجود داشته باشد به طوری که $c \leq x \leq d$ آنگاه جریان دوری صحیحی مانند z

روی A وجود خواهد داشت به طوری که $c \leq z \leq d$.

ج) فرض کنید $D = (V, A)$ گراف جهت‌دار به همان صورت بالا بوده و $c, d : A \to Z$ به طوری که $d \leq c$. نشان دهید جریان دوری مانند f وجود دارد به طوری که $d \leq f \leq c$ اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه $U \in V$ داشته باشیم:

$$\sum_{a \in \delta^{in}(U)} d(a) \leq \sum_{a \in \delta^{out}(U)} c(a)$$

مسئله‌ی ۱۲.

مسئله ماکزیمم SAT به این صورت می‌باشد که n متغیر بولی $x_1, \ldots, x_n$ و m تا عبارت بولی $C_1, \ldots, C_m$ که هر کدام متشکل از OR تعدادی از متغیرها هستند داریم و می‌خواهیم طوری متغیرها را مقدار دهی کنیم که بیشترین تعداد از عبارات بودی مقدار $true$ بگیرند.

الف) برنامه‌ریزی صحیحی برای این مسئله ارائه کنید.

ب) در مرحله دوم حل یک برنامه‌ریزی صحیح یعنی تبدیل جواب به دست آمده از برنامه‌ریزی خطی ریلکس‌شده به جوابی صحیح برای مسئله؛ می‌توان تابعی از این جواب را به عنوان توزیعی احتمالاتی برای یک یا صفر نسبت دادن به هر متغیر استفاده کرد. ثابت کنید اگر تابع دلخواه f که در نامساوی زیر صدق می‌کند را در نظر بگیریم و به متغیر x_i با احتمال $f(x_I^*)$ مقدار یک نسبت دهیم (x^* جواب بهینه‌سازی خطی است) آنگاه یک $\frac{3}{4}$ـ تقریب برای این مسئله ارائه داده‌ایم.

$$1 - 4^{-x} \leq f(x) \leq 4^{x-1}$$

سوالات عملی

سوال ۱. تعادل نش

آبولف و بهزاد می‌خواهند با یکدیگر بازی کنند. در این بازی آبولف N و بهزاد M کنش متفاوت دارند. اگر آبولف کنش iام و بهزاد کنش jام را بازی کند، سود آبولف $u^{(1)}_{i,j}$ و سود بهزاد $u^{(2)}_{i,j}$ خواهد بود.
به شما n، m و دو ماتریس $u^{(1)}$ و $u^{(2)}$ داده می‌شود، یک تعادل نش ترکیبی برای این بازی پیدا کنید.

ورودی

در خط اول ورودی دو عدد صحیح N و M $(1 \leq N, M \leq 7)$ می‌آیند که به‌ترتیب تعداد کنش‌های آبولف و تعداد کنش‌های بهزاد هستند.
در خط iام از N خط بعدی، M عدد صحیح $u^{(1)}_{i,1}, u^{(1)}_{i,2}, \cdots, u^{(1)}_{i,m}$ $(-50 \leq u^{(1)}_{i,j} \leq 50)$ می‌آیند که ماتریس سود مربوط به آبولف را مشخص می‌کند.
در خط iام از N خط بعدی، M عدد صحیح $u^{(2)}_{i,1}, u^{(2)}_{i,2}, \cdots, u^{(2)}_{i,m}$ $(-50 \leq u^{(2)}_{i,j} \leq 50)$ می‌آیند که ماتریس سود مربوط به بهزاد را مشخص می‌کند.

خروجی

در خط اول N عدد اعشاری $p_1, p_2, \cdots, p_N$ را با دقت **۶ رقم** اعشار چاپ کنید که استراتژی آبولف را نشان می‌دهد.
در خط دوم M عدد اعشاری $q_1, q_2, \cdots, q_M$ را با دقت **۶ رقم** اعشار چاپ کنید که استراتژی بهزاد را نشان می‌دهد.
دقت کنید در صورتی که بازی چند تعادل نش داشته باشد، کافی است یکی را به دلخواه چاپ کنید.
پاسخ شما روی هر تست پذیرفته می‌شود اگر تمامی شروط پایین برقرار باشد.

- فرض کنید $P = \sum_{i=1}^{N} p_i$. باید $\mid P - 1 \mid \leq 10^{-3}$ برقرار باشد.
- فرض کنید $Q = \sum_{i=1}^{M} q_i$. باید $\mid Q - 1 \mid \leq 10^{-3}$ برقرار باشد.
- به ازای هر $1 \leq i \neq j \leq n$ که $p_i, p_j \geq 10^{-6}$ است، نامساوی زیر برقرار باشد.

$$\mid \sum_{k=1}^{M} q_k \cdot u^{(1)}_{i,k} - \sum_{k=1}^{M} q_k \cdot u^{(1)}_{j,k} \mid < 10^{-3}$$

- به ازای هر $1 \leq i \neq j \leq n$ که $p_i \geq 10^{-6}$ و $p_j < 10^{-6}$ است، نامساوی زیر برقرار باشد.

$$\mid \sum_{k=1}^{M} q_k \cdot u^{(1)}_{i,k} - \sum_{k=1}^{M} q_k \cdot u^{(1)}_{j,k} \mid > -10^{-3}$$

- دو شرط بالا برای استراتژی بهزاد نیز به طور مشابه بررسی می‌شود.

مثال

ورودی نمونه ۱

```
3 3
0 -1 1
1 0 -1
-1 1 0
0 1 -1
-1 0 1
1 -1 0
```

خروجی نمونه ۱

```
0.333333 0.333333 0.333333
0.333333 0.333333 0.333333
```

ورودی نمونه ۲

```
2 2
-2 0
-10 2
-8 -2
8 2
```

خروجی نمونه ۲

```
0.500000 0.500000
0.200000 0.800000
```

ورودی نمونه ۳

```
3 3
9 -9 1
7 5 1
9 -10 -7
7 6 -10
-1 3 -8
-8 3 6
```

خروجی نمونه ۳

```
1.000000 0.000000 0.000000
1.000000 0.000000 0.000000
```

توضیحات نمونه ۳: همه تعادل‌های نش این بازی شامل موارد زیر است که هر کدام را چاپ کنید قابل قبول است.

- آبولف با استراتژی $(1, 0, 0)$ و بهزاد با استراتژی $(1, 0, 0)$ بازی کند.
- آبولف با استراتژی $(0, 1, 0)$ و بهزاد با استراتژی $(0, 1, 0)$ بازی کند.
- آبولف با استراتژی $(0.8, 0.2, 0)$ و بهزاد با استراتژی $(0.875, 0.125, 0)$ بازی کند.

ورودی نمونه ۴

```
3 2
8 -5
-3 4
-5 -4
8 9
1 -2
8 5
```

خروجی نمونه ۴

```
0.750000 0.250000 0.000000
0.450000 0.550000
```

سوال ۲. تعادل همبسته

در این سوال با حالتی دیگر از تعادل به نام تعادل همبسته یا همان correlated equilibrium آشنا می‌شوید که مفهوم کلی‌تری نسبت به تعادل نش است. در ادامه در قالب یک مثال این تعادل توضیح داده می‌شود.
بازی نبرد جنسیت‌ها را به خاطر بیاورید. جدول سودمندی و احتمال انتخاب هر کنش در ادامه آمده است. عدد رو به روی هر کنش بیانگر احتمال آن کنش در استراتژی ترکیبی آن بازیکن است.

	تماشای فیلم (۲/۳)	خرید کردن (۱/۳)
تماشای فیلم (۱/۳)	$(1,2)$	$(0,0)$
خرید کردن (۲/۳)	$(1,2)$	$(0,0)$

حال فرض کنید پیش از بازی از یک کیف حاوی دو گوی با برچسب‌های «خرید» و «فیلم» یک گوی به تصادف انتخاب می‌شود و دو بازیکن توافق می‌کنند که استراتژی خود را بر اساس گوی بیرون آمده، انتخاب کنند. در این حالت می‌توان دید که هیچ یک از بازیکنان تمایلی به انتخاب استراتژی متفاوت نسبت به گوی بیرون آمده ندارند؛ زیرا متوسط سودمندی در این حالت برای هر یک از آنها افزایش پیدا کرده است.

به نفع همه

تعادل همبسته در یک بازی می‌تواند بر افزایش رفاه اجتماعی و حتی سودمندی متوسط هر یک از بازیکنان تاثیر مثبتی بگذارد. در حالت قبلی بازی نبرد جنسیت‌ها، سودمندی متوسط بازیکنان به شکل زیر محاسبه می‌شد.

$$E[pay\ off] = \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 0) + \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0) = \frac{6}{9}$$

حال اگر پیش از انجام بازی، از داخل کیف یک گوی به تصادف انتخاب شود؛ سودمندی مورد انتظار بازیکنان افزایش پیدا خواهد کرد. در واقع این قرعه‌کشی کاری می‌کند که حالت‌های بد هیچ‌گاه اتفاق نیفتد. در این حالت متوسط سود هر بازیکن به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$E[pay\ off] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

در حالت کلی می‌توان فرض کرد که یک فرد خارج از بازی به نام ناظر هر یک از استراتژی‌های ممکن را با احتمال مشخصی انتخاب کرده و به بازیکنان کنش مربوط به آنها را در قالب یک سیگنال اعلام می‌کند.

تعریف رسمی

یک بازی با بازیکنان $p = 1, 2, ..., n$ را در نظر بگیرید. مجموعه استراتژی هر بازیکن با S_p نمایش داده می‌شود. بر همین اساس استراتژی پروفایل S به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$S = \prod_{p=1}^{n} S_p$$

می‌دانیم که S_{-q} بیانگر استراتژی پروفایل همه بازیکنان به جز بازیکن q ام است. همچنین سود هر بازیکن به شکل تابع u^p بر روی استراتژی پروفایل S تعریف می‌شود.

حال توزیع احتمالاتی x بر روی S را در نظر بگیرید. به ازای هر $\overline{s} \in S_{-p}$ احتمال انتخاب شدن استراتژی i توسط بازیکن p در حالی که سایر بازیکنان با استراتژی پروفایل $\overline{s}$ بازی کنند؛ با $x_{i,\overline{s}}$ نمایش داده می‌شود. به شکل مشابه $u^p_{i,\overline{s}}$ سودمندی بازیکن p به ازای انتخاب استراتژی $i \in S_p$ را نشان می‌دهد؛ در حالی که سایر بازیکنان استراتژی پروفایل $\overline{s}$ را داشته باشند. توزیع x یک تعادل همبسته نامیده می‌شود اگر بازیکن p استراتژی پیشنهادی i را بپذیرد.

$$\sum_{\overline{s} \in S_{-p}} u^p_{i,\overline{s}} x_{i,\overline{s}} \geq \sum_{\overline{s} \in S_{-p}} u^p_{j,\overline{s}} x_{i,\overline{s}} \; \forall p \; and \; \forall i,j \in S_p$$

در واقع سودمندی مورد انتظار ناشی از انتخاب استراتژی پیشنهاد شده نباید کمتر از بازی با سایر استراتژی‌ها باشد.

به نفع همه؛ برای بعضی‌ها بیشتر

چنانچه گفته شد به کمک ناظر می‌توان سود اجتماعی را افزایش داد. اما ممکن است از نظر ناظر، یک واحد سود یک بازیکن به اندازه چند واحد سود بازیکن دیگر برای جامعه مفید باشد. بنابراین متوسط سود او در محاسبه رفاه اجتماعی با یک ضریب همراه خواهد بود.
فرض کنید به بازیکن اول و دوم به ترتیب ضریب ۱ و ۲ اختصاص داده شده است. حال اگر متوسط سود این دو بازیکن به ترتیب ۱۰ و ۲۰ باشد؛ رفاه اجتماعی وزن دار برابر ۵۰ خواهد بود.

به یک ناظر نیازمندیم

در این سوال از شما به عنوان یک ناظر دعوت شده است که در یک بازی دو نفره شرکت کنید. شما باید بر اساس جدول سودمندی بازیکنان، احتمال انتخاب هر یک از خانه‌های جدول را مشخص کنید به شکلی که...

۱. بازی در حالت تعادل همبسته قرار داشته باشد تا بازیکنان تمایلی به سرکشی از سیگنال‌های شما نداشته باشند.

۲. سود اجتماعی بیشینه شود. از آنجا که شما ممکن است با یک بازیکن بیشتر حال کنید؛ می‌تواند سودمندی شخصی او را با اعمال یک ضریب در سودمندی اجتماعی تاثیر دهید.

ورودی

در اولین سطر به شما دو عدد گویای $0 \leq N, M \leq 20$ با یک فاصله داده می‌شود که به ترتیب میزان علاقمندی شما به هر یک از دو بازیکن است.
در سطر بعدی به شما دو عدد طبیعی $0 \leq X, Y \leq 20$ با یک فاصله داده می‌شود که به ترتیب تعداد کنش‌های هر یک از بازیکنان است.
در ادامه جدول سودمندی بازیکنان به شما داده می‌شود. از آنجا که این جدول X سطر و Y ستون دارد؛ مقادیر آن در X سطر ظاهر می‌شود. در هر سطر نیز $2Y$ عدد صحیح $-50 \leq a_i \leq 50$ می‌آید تا هر خانه از جدول به شکل دو عدد متوالی نمایش داده شود. به ورودی نمونه زیر توجه کنید.

```
2.3 1.1
2 2
1 2 3 4
5 6 7 8
```

در این ورودی جدول سودمندی به شکل زیر است.

	کنش اول	کنش دوم
کنش اول	$(1,2)$	$(3,4)$
کنش دوم	$(5,6)$	$(7,8)$

خروجی

در اولین خط خروجی متوسط رفاه اجتماعی وزن دار چاپ می‌گردد. سپس باید در X خط بعدی خروجی، احتمال انتخاب هر خانه از جدول توسط ناظر به شکل جدولی نشان داده شود. همه اعداد باید تا ۶ رقم اعشار دقت داشته باشند.

زبان برنامه‌نویسی

در این سوال زبان مورد استفاده python خواهد بود و همچنین ماژول simplex.py برای حل برنامه‌نویسی خطی در اختیار شما قرار می‌گیرد.

ورودی نمونه ۱

```
1 1
2 2
0 0 7 2
2 7 6 6
```

خروجی نمونه ۱

```
10.500000
0.000000 0.250000
0.250000 0.500000
```

ورودی نمونه ۲

```
1 1
2 2
0 0 4 1
1 4 3 3
```

خروجی نمونه ۲

```
5.333333
```

```
0.000000 0.333333
0.333333 0.333333
```

ورودی نمونه ۳

```
1 1
3 3
6 6 -2 0 0 7
2 2 2 2 0 0
0 0 0 0 3 3
```

خروجی نمونه ۳

```
8.000000
0.500000 0.000000 0.000000
0.250000 0.250000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000
```