



نظریه‌ی الگوریتمی بازی‌ها

نیم‌سال دوم ۰۳-۰۲
مدرس: مسعود صدیقین

مهلت تحویل: -

تمرین سوم

مسئله‌ی ۱.

دو کارآفرین، آلفا و بتا، درگیر یک رقابت استراتژیک هستند. هر کدام از آنها باید یکی از k پروژه‌ی موجود را انتخاب کند. اگر هر دو یک پروژه را انتخاب کنند، بتا باید یک دلار به آلفا بپردازد. در غیر این صورت، هیچ پرداختی انجام نمی‌شود. هدف هر کارآفرین رسیدن به حداکثر سود است.

الف) نشان دهید در صورتی که هر دو کارآفرین به احتمال $\frac{1}{k}$ هر پروژه را انتخاب کند، یک تعادل نش ترکیبی خواهیم داشت.
ب) نشان دهید تعادل نش ترکیبی دیگری وجود ندارد.

مسئله‌ی ۲.

در یک شهر، انتخابات شهرداری در حال برگزاری است و دو کاندیدا به نام های آلیس و باب برای کسب آرای دو منطقه با جمعیت و الگوی رأی‌گیری متفاوت رقابت می‌کنند. آلیس سه گروه تبلیغاتی دارد، در حالی که باب دو گروه دارد. هر کاندیدا می‌تواند گروه‌های تبلیغاتی خود را بین دو منطقه تقسیم کند. آلیس در صورتی انتخابات هر منطقه را برنده می‌شود که گروه‌های تبلیغاتی بیشتری نسبت به باب به آن منطقه اختصاص دهد. تنها در صورتی آلیس برنده انتخابات کل شهر می‌شود که در هر دو منطقه برنده انتخابات شود.

الف) این موقعیت را به عنوان یک بازی استراتژیک مدل‌سازی کنید و تمامی تعادل‌های استراتژی ترکیبی را پیدا کنید.
ب) در یک تعادل، آیا کاندیداها تمام تلاش خود را روی یک منطقه متمرکز می‌کنند یا گروه‌های تبلیغاتی خود را تقسیم می‌کنند.

مسئله‌ی ۳.

تمامی تعادل‌های نش ترکیبی این بازی را بیابید.

	Left	Middle	Right
Up	3, 4	1, 2	4, 1
Middle	4, 2	2, 2	1, 4
Down	3, 1	4, 3	2, 4

مسئله ۴.

دو کشور A و B را در نظر بگیرید که بر سر یک منبع ذخایر نفتی ارزشمند به ارزش ۲۰ میلیارد دلار با هم اختلاف دارند. هر دو کشور به دنبال کنترل انحصاری این منبع هستند و برای حمایت از ادعای خود از کشور ثالثی به نام C کمک می گیرند. هر کدام از این کشورها می توانند برای تحت تاثیر قرار دادن تصمیم کشور C به آن رشوه دهند. مبلغ رشوه می تواند تنها ۹ میلیارد دلار یا ۲۰ میلیارد دلار باشد. هر مبلغ دیگری باعث رد صلاحیت می شود. کشوری که بالاترین رشوه را پیشنهاد دهد به عنوان مالک قانونی منبع شناخته خواهد شد. اگر هر دو کشور مبلغ یکسانی را رشوه دهند، احتمال دریافت منبع برای هر کدام مساوی است. همچنین اگر هیچ یک از کشورها رشوه ندهند، احتمال دریافت منبع برای هر کدام به طور مساوی می باشد.

الف) تعادل نش خالص این بازی را پیدا کنید.

ب) بخش قبل را برای حالتی که امکان رشوه ۱۵ میلیاردی وجود داشته باشد، حل کنید.

ج) تعادل نش ترکیبی را برای حالت جدید بدست آورید.

مسئله ۵.

شما و دوستان در حال انجام یک بازی ویدیویی هستید. هر دوی شما معتقدید که احتمال π وجود دارد که قلمرو مشخصی در حال حاضر توسط حریفان قدرتمند اشغال شده باشد. اگر این قلمرو واقعاً اشغال شده باشد، هر بازیکنی که سعی کند آن را فتح کند، مطمئناً با شکست مواجه خواهد شد. در صورتی که شکست بخورید امتیاز c و در صورت فتح آن امتیاز ۱ بدست خواهید آورد. در صورت تصمیم بر عدم حمله امتیازی کسب نخواهید کرد. دقت کنید که فقط دو بار برای حمله به قلمروی دشمن فرصت دارید. اگر یکی از شما در فرصت اول در فتح این قلمرو شکست بخورد، هر دوی شما نتیجه می گیرید که تلاش برای تصرف آن منجر به شکست خواهد شد و بنابراین از تلاش برای تصرف در فرصت بعد خودداری می کنید. اگر هیچ یک از شما در فرصت اول شکست نخورید، هر دو به این باور ادامه می دهید که احتمال شکست برابر با π است و بنابراین تنها در صورتی در فرصت دوم حمله می کنید که:

$$-\pi c + 1 - \pi \geq 0$$

الف) این وضعیت را به عنوان یک بازی استراتژیک مدل کنید که در آن هر کدام از شما تصمیم می گیرید که در فرصت اول بازی حمله کنید یا خیر.

ب) تعادل های ترکیبی این بازی را بر اساس پارامترهای c و π شناسایی کنید. علاوه بر این، تحلیل کنید که آیا حضور یک دوست بر تصمیم شما برای تصرف سرزمین ها در روز اول تأثیر می گذارد یا خیر.

مسئله ۶.

مثالی از یک بازی 2×2 بنزید که تعادلی داشته باشد که در آن یک بازیکن به صورت خالص و بازیکن دیگر به صورت ترکیبی بازی می کند.

مسئله ۷.

با فرض این که می دانیم در بازی زیر تعادلی وجود دارد که در آن تمام استراتژی ها با احتمال ناصفر بازی می شوند، این تعادل نش ترکیبی را به دست آورید. همچنین با فرض این که در این بازی تعادل ترکیبی وجود دارد که در آن نفر سطری، به طور خالص استراتژی D را انجام می دهد، این تعادل را به دست آورید. این بازی چند تعادل نش دارد؟

	A	C	B
C	1, 1	4, 9	7, 2
D	4, 7	7, 7	1, 2
E	8, 6	5, 4	2, 10

مسئله‌ی ۸.

آرش و شایان باید هر یک به طور هم زمان عددی بین $[0, 1]$ انتخاب کنند. اگر آرش a و شایان s را انتخاب کند، شایان باید به اندازه $(a - s)^2$ به آرش بپردازد.

الف) فرض کنید شایان می‌داند آرش با توزیع احتمال $F_a(a)$ بازی خواهد کرد. شایان چگونه باید بازی کند؟

ب) فرض کنید آرش بداند که شایان با توزیع احتمال $F_s(s)$ بازی می‌کند. آرش باید چگونه بازی کند؟

ج) تعادل نش این بازی را بیابید.

مسئله‌ی ۹.

ارغوان و یاسمن دو شرکت واردات کفش دارند. هر دو شرکت از میان تمامی مدل‌های موجود در بازار جهانی فقط یک نوع یکسان از آن‌ها را وارد می‌کنند. ارغوان و یاسمن به عنوان دو مدیر آینده‌نگر باید تصمیم بگیرند شرکتشان چند جفت کفش وارد کند. اگر ارغوان a جفت و یاسمن y جفت کفش وارد کنند، می‌توانند هر جفت کفش را با قیمت $\max\{0, 10 - a - y\}$ دلار به فروش برسانند. همچنین هزینه‌ی وارد کردن n جفت کفش توسط یک شرکت برابر با n^2 دلار است. این موقعیت را به عنوان یک بازی به فرم نرمال مدل کنید و تعادل(های) نش را بیابید.

مسئله‌ی ۱۰.

فرض کنید یک بازی دو نفره به فرم نرمال داریم. اگر این بازی مجموع-صفر باشد و هر بازیکن دو استراتژی خالص داشته باشد، تمامی تعادل‌های نش این بازی را بیابید.

مسئله‌ی ۱۱.

تمامی تعادل‌های نش خالص و ترکیبی این بازی را بیابید و سود بازیکنان در هر تعادل را حساب کنید.

	l	m	r
U	3, 2	2, 1	1, 3
M	2, 1	1, 5	0, 3
D	1, 3	4, 2	2, 2

مسئله‌ی ۱۲.

تمامی تعادل‌های نش خالص و ترکیبی این بازی را بیابید و سود بازیکنان در هر تعادل را حساب کنید.

	A	B
C	5, 5	5, 4
D	1, 1	5, 8
E	3, 5	5, 6

مسئله‌ی ۱۳.

تمامی تعادل‌های نش خالص و ترکیبی این بازی را بیابید و سود بازیکنان در هر تعادل را حساب کنید.

	M	L
X	1, 2	3, 1
Y	9, 2	5, 3
Z	7, 3	7, 1

مسئله‌ی ۱۴.

در یک بازی دو نفره مجموع-صفر، ماتریس سود بازیکنان m سطر و n ستون دارد. فرض کنید در هر سطر مجموع مقادیر مربوط به سود بازیکن سطر برابر با r است. همچنین در هر ستون مجموع مقادیر مربوط به سود بازیکن سطر برابر با c است. یک تعادل نش برای این بازی بیابید.