



مسئله‌ی ۱. چارلز پانزی

فرض کنید موسوی و کوروش دو فروشنده گوشی موبایل هستند. هر دو می‌خواهند با تعیین قیمت مناسب سود خود را از بازاری که برای فروش محصولشان وجود دارد بیشینه کنند.

فرض کنید کل هزینه‌ای که هر شرکت برای تهیه‌ی هر گوشی موبایل انجام می‌دهد ۸ دلار باشد. اگر قیمتی که موسوی تعیین می‌کند P_M و قیمتی که کوروش تعیین می‌کند P_K باشد، میزان فروش موسوی برابر با:

$$Q_M = 44 - 2P_M + P_K$$

و میزان فروش کوروش برابر با:

$$Q_K = 44 - 2P_K + P_M$$

خواهد بود.

به کمک تعیین best response ها تعادل نش را در میان مجموعه‌ی تصمیمات این دو محاسبه کنید. استفاده از نمودار و نشان دادن نتایجتان به شکل تصویری بسیار توصیه می‌شود.

مسئله‌ی ۲. تقسیم عادلانه

کاب و مال می‌خواهند کیک با اندازه صد را بین خود تقسیم کنند. هر کدام از آن‌ها همزمان یک عدد حقیقی، بین صفر تا صد، اعلام می‌کنند و تقسیم کیک به این شکل انجام می‌شود:

- اگر مجموع دو عدد اعلام‌شده کمتر از صد یا مساوی با آن باشد، هر کدام به اندازه عددی که اعلام کرده از کیک سهم می‌برد.
- اگر هم مجموعشان بزرگ‌تر از صد باشد، هر کس که عددی پایین‌تر (به عنوان مثال x) را پیشنهاد کرده است، به اندازه x سهم می‌برد و نفر دوم هم به میزان $100 - x$ سهم می‌برد.
- در صورتی که مجموع اعداد بیشتر از صد باشد و اعداد اعلام‌شده با یکدیگر برابر باشند، هر کدام به اندازه ۵۰ سهم می‌برند.

الف) این مساله را به عنوان یک بازی استراتژی مدل‌سازی کنید.

ب) نشان دهید که انتخاب عدد پنجاه توسط هر دو یک نقطه تعادل نش است.

ج) آیا نقطه تعادل نش خالص دیگری وجود دارد؟ پاسخ خود را ثابت کنید.

مسئله‌ی ۳. یکی برای همه

فرض کنید در یک بازی دو نفره استراتژی ترکیبی s بهترین پاسخ به استراتژی t است. نشان دهید تمام استراتژی‌هایی که با احتمال ناصفر در s انتخاب می‌شوند نیز بهترین پاسخ به t هستند. نشان دهید عکس این رابطه نیز صحیح است.

مسئله‌ی ۴. مسیر ناصر

استاننداری فارس قصد دارد بین شیراز و نورآباد یک جاده بسازد. هزینه ساخت جاده برابر با $c > 0$ فرض می‌شود. ارزش این جاده برای شهرداری شیراز برابر با $v_S \geq 0$ و برای شهرداری نورآباد برابر با $v_N \geq 0$ فرض می‌شود. هر کدام از شهرداری‌های شیراز و نورآباد به‌طور همزمان و به ترتیب مبالغ $b_S \geq 0$ و $b_N \geq 0$ را برای مشارکت در ساخت جاده پیشنهاد می‌کنند. اگر $c \leq b_S + b_N$ باشد، جاده ساخته می‌شود. اگر $b_N < c \leq b_N + b_S$ ، شهرداری شیراز مبلغ $c - b_N$ را به استانداری پرداخت می‌کند؛ در غیر این صورت هم مبلغی را پرداخت نمی‌کند. به طور مشابه اگر $b_S < c \leq b_N + b_S$ شهرداری نورآباد مبلغ $c - b_S$ را به استانداری پرداخت می‌کند. در غیر این صورت هم مبلغی را پرداخت نمی‌کند. اگر جاده ساخته شود، سود هر شهرداری برابر با ارزش جاده برای آن منهای میزان پرداختی به استانداری است. در غیر این صورت هم برابر با صفر است. با در نظر گرفتن فرض $v_S + v_N < c$ به سوالات زیر جواب دهید:

(الف) این بازی را به فرم نرمال بنویسید.

(ب) بررسی کنید که آیا تعادل استراتژی غالب وجود دارد؟ در صورت وجود آن را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۵. مهمانی روزانه

محسن، احسان، و رضا سه دوست قدیمی هستند که پس از مدت‌ها یکدیگر را در یک مهمانی دیده‌اند. پس از مهمانی هر کدام از آن‌ها می‌خواهد ارتباط خود را با دیگران از طریق شبکه‌های اجتماعی حفظ کند. برای این منظور هر کدام به طور مستقل به سراغ یکی از سه شبکه‌ی اجتماعی فیسبوک، اینستاگرام، و ایکس می‌روند. هر کدام بر اساس تعداد دوستانی (در این جمع) که در شبکه‌ی اجتماعی مورد نظرش پیدا می‌کند سود می‌کند. این بازی را به شکل نرمال فرم تعریف کنید و بازیکنان، استراتژی‌ها، و توابع سود را مشخص کنید.

مسئله‌ی ۶. پروژه پایگاه داده

قرار است بهزاد و مهدی انتخاب کنند که چقدر برای انجام پروژه مشترک درس پایگاه داده وقت بگذارند. اگر بهزاد به اندازه x و مهدی به اندازه y $0 \leq y$ وقت بگذارد، میزان بهره هر کدام از آن‌ها به این شکل خواهد بود:

$$u_B(x, y) = (x + y + xy) - 2x^2 \quad u_M(x, y) = v(x + y + xy) - 2y^2$$

که در آن‌ها v ثابت است و $0 \leq v \leq 2$.

(الف) برای این بازی مجموعه‌ی تعادل‌های نش را به شکل تابعی از v پیدا کنید.

(ب) یک مجموعه انتخاب پیدا کنید که مجموع سود بهزاد و مهدی را بیشینه کند.