نظریه‌ی الگوریتمی بازی‌ها

نیم‌سال دوم ۰۳ -۰۲

مدرس: مسعود صدیقین

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین نهم

مهلت تحویل : -

سوالات تئوری

مسئله‌ی ۱.

اگر در یک بازی تنها یک تعادل نش داشته باشیم، در مورد تعادل کامل زیربازی مربوط به زمانی که این بازی R مرحله تکرار می‌شود چه می‌توان گفت؟

مسئله‌ی ۲.

در مساله جنگ فرسایشی دو مرحله ای ما حالتی را در کلاس بررسی کردیم که $v > c$ است. برای حالت دوم که $c > v$ می باشد، تمام تعادلهای کامل زیر بازی را پیدا کنید توجه کنید که ممکن است بازیکن ها در یک مرحله استراتژی میکس بازی کنند، اما در یک مرحله خالص بازی کنند.

مسئله‌ی ۳.

حسن و محمود بر روی یک پروژه مشترک کار میکنند هر کدام از این دو نفر باید تصمیم بگیرد که ۱۰ تومان در این پروژه سرمایه گذاری کند و یا سرمایه گذاری نکند هر دو نفر این تصمیم را به صورت همزمان می‌گیرند. بعد از تصمیم‌گیری، اگر هیچ کسی سرمایه گذاری نکند پروژه سود . تولید می‌کند. اگر یک نفر سرمایه گذاری کرده باشد پروژه سود ۱۵ تومان تولید خواهد کرد و اگر هر دو سرمایه گذاری کنند پروژه سود ۳۰ تومان تولید می کند. سپس حسن و محمود به این صورت سود پروژه را بین خود تقسیم میکنند هر کدام از دوم نفر به طور همزمان سهم درخواستی خود از سود را بر روی کاغذ مینویسند این سهم می تواند ۱/۲ ، ۱/۵ و یا ۴/۵ باشد. اگر مجموع سهم نوشته شده توسط دو نفر دقیقا برابر با یک شود سهمها به افراد داده میشود وگرنه کل پول دور ریخته می شود. فرض کنید قبل از نوشتن سهم‌ها بازیکن‌ها از میزان سرمایه گذاری مطلع هستند.

الف) درخت مربوط به این بازی را رسم کنید.

ب) زیر بازی مربوط به زمانی که حسن ۱۰ تومان سرمایه گذاری کرده و محمود . تومان را در نظر بگیرید و همه تعادل های نش خالص آن را پیدا کنید.

ج) آیا یک تعادل نش کامل زیر بازی خالص وجود دارد که در آن هیچ کدام از دو بازیکن در مرحله اول سرمایه‌گذاری نکنند؟

د) آیا یک تعادل نش کامل زیر بازی خالص وجود دارد که در آن هر دو بازیکن در مرحله اول سرمایه گذاری کنند؟

ه) حال فرض کنید دو بازیکن در هنگام نوشتن سهم درخواستی خود از میزان سرمایه گذاری اطلاع ندارند. حال آیا تعادل خالص کامل زیر بازی ای وجود دارد که در آن هر دو بازیکن سرمایه گذاری کنند؟

مسئله‌ی ۴.

کشورهای سازمان اوپک دوست دارند که بتوانند با همدیگر بر سر مقدار تولید نفت سازش کنند، قیمت و سود را زیاد کنند و اگر کشوری عدول کرد بتوانند دوباره به تعادل بازگردند.

الف) اگر $P = 300 - 5Q$ قیمت نفت برای تقاضای جهانی باشد که در آن Q مقدار کل تولید یا همان عرضه و q_i مقدار تولید کشور i است و هزینه حاشیه ای برای تولید همه کشورها باشد برای حالتی که $c = 20$ و چهار کشور داشته باشیم تعادل نش را بیابید.

ب) اگر بخواهیم استراتژی Grim Trigger را بازی کنیم به این صورت که $q_i = 7$ باشد و اگر کشوری عدول کند، به حالت $q_i = 11$ برویم آیا این استراتژی قابل اجرا است؟

مسئله‌ی ۵.

این بازی را در نظر بگیرید:

	a	b	c	d
A	$3,1$	$0,0$	$0,0$	$5,0$
B	$0,0$	$1,3$	$0,0$	$0,0$
C	$0,0$	$0,0$	$2,2$	$0,0$
D	$0,0$	$0,5$	$0,0$	$4,4$

الف) تمام تعادل‌های نش خالص این بازی را پیدا کنید.

ب) فرض کنید این بازی دو بار انجام می‌شود. یک تعادل کامل زیربازی از آن مشخص کنید که در ان (D, d) در بازی اول بازی می‌شود.

مسئله‌ی ۶.

این بازی همزمان را در نظر بگیرید:

	L	C	R
U	$5,6$	$8,1$	$10,4$
M	$2,11$	$6,9$	$4,2$
D	$3,8$	$7,7$	$6,0$

الف) تمام تعادلهای نش خالص این بازی را پیدا کنید.

ب) فرض کنید این بازی ۱۷ بار تکرار میشود یک $SPNE$ برای این بازی پیدا کنید آیا این $SPNE$ یکتا است؟

ج) فرض کنید این بازی به تعداد نامتناهی بار تکرار میشود همچنین فرض کنید که بازیکن اول این استراتژی را انتخاب می کند: با M شروع کن و تا زمانی که بازیکن دوم C انتخاب میکند به انتخاب M ادامه بده. اگر بازیکن دوم در مرحله ای L یا R را انتخاب کرد برای همیشه U را انتخاب کن. همچنین فرض کنید بازیکن دوم این استراتژی را انتخاب میکند: با C شروع

کن و تا زمانی که بازیکن اول M را انتخاب میکند به انتخاب C ادامه بده. اگر بازیکن اول U یا D را انتخاب کرد برای همیشه L را انتخاب کن.
کمترین مقدار δ را محاسبه کنید که اگر بازی با احتمال δ در هر مرحله ادامه یابد استراتژی های دو نفر تشکیل $SPNE$ یکتا دهد.

مسئله‌ی ۷.

در نظر بگیرید یک بازی بی‌نهایت تکرارشونده با تعداد محدودی اقدام برای هر بازیکن و یک عامل تخفیف مشترک δ. ثابت کنید که اگر δ به اندازه کافی به صفر نزدیک باشد، هر تعادل کامل بازی فرعی باید شامل بازی یک تعادل استاتیک نش پس از هر تاریخچه t باشد. نشان دهید که این نتیجه ممکن است نادرست باشد اگر تعداد نامحدودی اقدام برای هر بازیکن در دسترس باشد.

مسئله‌ی ۸.

یک شیرفروش و یک مشتری را در نظر بگیرید. در هر روز، برای سفارش داده شده خواهیم داشت:

- شیر فروش $m \in [0,1]$ لیتر شیر و $1-m$ لیتر آب را در ظرفی ریخته و درب ظرف را می بندد و هزینه cm را برای $c > 0$ متحمل می شود
- مشتری بدون دانستن m، تصمیم می گیرد که مایع را به قیمتی p بخرد یا نه. اگر او بخرد، سود او $vm-p$ و سود شیرفروش $p-cm$ است. اگر او نخرید، سود او ۰ می شود و سود شیرفروش $-cm$ خواهد شد. در نهایت اگر او بخرد، متوجه مقدار m خواهد شد.

فرض کنید که این کار به مدت ۱۰۰ روز تکرار می شود و هر بازیکن سعی می کند مجموع سود مرحله خود را به حداکثر برساند. تمام تعادل های زیربازی کامل این بازی را پیدا کنید.

مسئله‌ی ۹.

بازی دو نفره زیر را در نظر بگیرید:

	L	R
U	$2,2$	$0,3$
D	$3,0$	$1,1$

این بازی N بار تکرار می شود، به طوری که پرداخت‌های کل برابر خواهد بود با مجموع پرداخت های دریافت شده از هر دور بازی انجام شده.

الف) مجموعه تمام تعادل های نش و تعادل کامل زیربازی استراتژی (خالص) این بازی را شرح دهید.

ب) حال تمامی کارهای بالا را نیز با جدول بازی زیر انجام دهید:

	L	R	X
U	$2,2$	$0,3$	$-1,-5$
D	$3,0$	$1,1$	$-1,-5$
Y	$-5,-1$	$-5,-1$	$-5,-5$

ج) حال برای جدول بازی زیر نیز قسمت‌های قبلی را به دست آورید:

	L	R	X
U	$2,2$	$0,3$	$-10,-5$
D	$3,0$	$1,1$	$-10,-5$
Y	$-5,-10$	$-5,-10$	$-5,-5$

مسئله‌ی ۱۰.

بازی nـ بار تکرار شده با بازی مرحله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

	a	b	c
a	$3,3$	$0,0$	$0,0$
b	$0,0$	$2,2$	$1,0$
c	$0,0$	$0,1$	$0,0$

الف) یک حد پایین π برای میانگین دستمزد هر بازیکن در تمام تعادل‌های استراتژی خالص نش پیدا کنید. در واقع ثابت کنید که دستمزد یک بازیکن حداقل πn در هر تعادل استراتژی خالص نش است. (نمره شما 10π خواهد بود.)

ب) یک تعادل استراتژی خالص کامل زیربازی بسازید که در آن دستمزد هر بازیکن حداکثر $n+1$ باشد. تأیید کنید که پروفایل استراتژی در واقع یک تعادل استراتژی کامل زیربازی است.

مسئله‌ی ۱۱.

بازی بی‌نهایت تکرارشونده زیر را را با ضریب کاهش $\delta = 0.999$ در نظر بگیرید. بازی مرحله‌ای به صورت زیر است:

	C	D
C	$5,5$	$0,6$
D	$6,0$	$1,1$

الف) یک تعادل نش کامل زیربازی در استراتژی های خالص پیدا کنید که در آن میانگین بازده هر بازیکن بین ۱.۱ و ۲.۱ باشد. تأیید کنید که پروفایل استراتژی شما در واقع یک تعادل نش کامل زیربازی است.

ب) یک تعادل نش کامل زیربازی در استراتژی های خالص پیدا کنید که در آن میانگین بازده بازیکن ۱ حداقل ۷.۵ باشد. تأیید کنید که پروفایل استراتژی شما در واقع یک تعادل نش کامل زیربازی است.

ج) آیا می توانید یک تعادل نش کامل زیربازی پیدا کنید که در آن میانگین بازده بازیکن ۱ بیش از ۸.۵ باشد؟

مسئله‌ی ۱۲.

بازی دو نفره با جدول زیر را در نظر بگیرید.

	C	D
C	$3,3$	$0,10$
D	$10,0$	$1,1$

بازی براساس قوانین زیر اجرا می‌شود:
در دوره‌های زوج (D,C) و در دوره‌های فرد (C,D) بازی می‌شود. اگر بازیکنی غیر از این را انجام دهد، برای همیشه (D,D) بازی خواهد شد.

حداقل مقدار عامل تخفیف β را محاسبه کنید که در آن بازیکنان از قوانین پیروی می‌کنند.

مسئله‌ی ۱۳.

بازی فرم نرمال مقابل را در نظر بگیرید.

		Player 2	
		C	D
Player 1	C	$6,6$	$0,8$
	D	$0,2$	$4,0$

الف) تمامی تعادل‌های نش این بازی را پیدا کنید.

ب) فرض کنید که بازی مرحله‌ای فوق ۲۷ بار انجام می‌شود. پس از هر دور، بازیکنان حرکات انجام شده توسط بازیکن دیگر را مشاهده می‌کنند. بازده کل بازی تکراری مجموع بازده‌های به دست آمده در هر دور است. تمام تعادل‌های نش کامل زیربازی بازی تکراری را پیدا کنید.

ج) فرض کنید که بازی مرحله‌ای فوق به طور بی‌نهایت بار تکرار می‌شود. پس از هر دور، بازیکنان حرکات انجام شده توسط بازیکن دیگر را مشاهده می‌کنند. بازده کل بازی تکراری، مجموع تنزیل‌شده (با ضریب تحفیف $\delta = 0.9$) بازده‌های به دست آمده در هر دور است. آیا یک تعادل نش متوالی کامل در استراتژی‌های خالص وجود دارد که در آن (CC) در هر دور بازی شود؟

مسئله‌ی ۱۴.

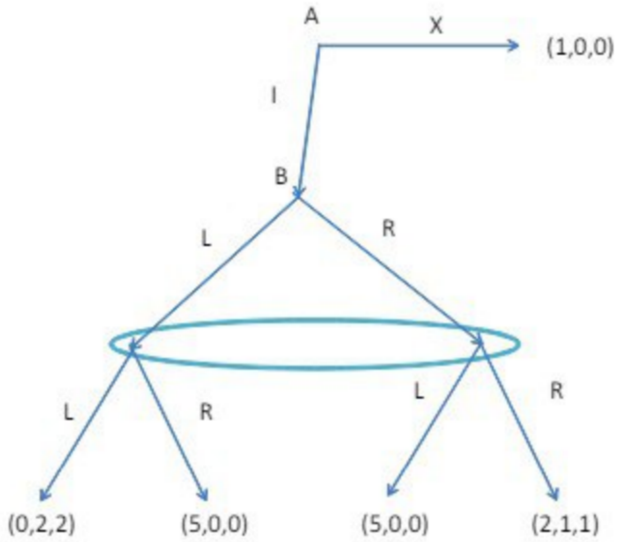
بازی مقابل را در نظر بگیرید:

		Player 2	
		A	B
Player 1	A	$0,5$	$1,1$
	B	$1,1$	$5,0$

فرض کنید این بازی به طور نامحدود بازی می شود. برای چه مقادیری از ضریب کاهش δ، یک تعادل نش کامل زیربازی وجود دارد که در مسیر تعادل، بازیکنان در دوره های فرد (A, A) و در دوره های زوج (B, B) بازی می کنند.

مسئله‌ی ۱۵.

بازی بی‌نهایت تکرارشونده زیر را درنظر بگیرید به طوری که در آن ضریب δ به صورت $\delta \in (0, 1)$ باشد.



برای هر کدام از پروفایل‌های استراتژی زیر، محدوده‌ای از δ را پیدا کنید که در آن پروفایل استراتژی یک تعادل نش متعالی زیربازی باشد.

الف) اگر (I, L, R) در تمام روزهای قبلی بازی شده باشد، بازی (I, L, R) انجام می‌شود و در غیر این صورت (X, L, L) بازی می‌شود.

ب) در "یکشنبه‌ها"، یعنی در $t \in \{0, 7, 14, \ldots\}$، (X, L, L) بازی می‌شود؛ در روزهای دیگر، اگر (I, L, R) در تمام روزهای قبلی بازی شده باشد، (I, L, R) بازی می‌شود و در غیر این صورت (X, L, L) بازی می‌شود.

ج) در "یکشنبه‌ها"، (X, L, L) بازی می‌شود؛ در روزهای دیگر، اگر (I, R, R) در تمام روزهای قبلی بازی شده باشد، (I, R, R) بازی می‌شود و در غیر این صورت (X, L, L) بازی می‌شود.