بسمه تعالی

تمرین‌های گراف سری اول	مفاهیم اولیه، همبندی- عملیات دوتایی روی گراف‌ها	
تاریخ: ۴۰۳/۷/۸	زمان تحویل جواب: ۴۰۳/۷/۱۵	

۱. نشان دهید هر گشت بین دو راس u و v شامل یک مسیر بین این دو راس است.

۲. فرض کنید G یک گراف و $\overline{G}$ متمم آن باشد. ثابت کنید حداقل یکی از این دو گراف همبند است.

۳. در گراف G با n راس، اگر $\delta+\Delta \geq n-1$ باشد، نشان دهید گراف همبند است. گرافی ناهمبند با $\delta+\Delta = n-2$ مثال بزنید.

۴. فرض کنید $V=\{1,2,\dots,n\}\times\{1,2,\dots,m\}$ باشد و دو راس (i,j) و (i',j') مجاورند، هرگاه

$$i=i' \text{ and } |j-j'|=1 \qquad \text{or} \qquad j=j' \text{ and } |i-i'|=1\,.$$

این گراف را به ازای $n=3, m=4$ رسم کنید. درباره تعداد یالهای این گراف در حالت کلی چه می توان گفت؟

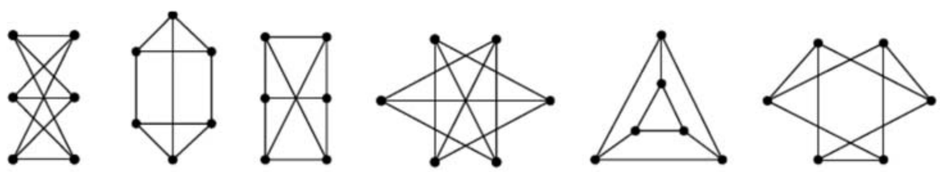
۵. فرض کنید P بلندترین مسیر در یک گراف و طول آن (تعداد یال‌های آن) برابر با λ باشد. نشان دهید

الف) دو راس انتهایی P درجه کمتر یا مساوی با λ دارند.

ب) $\lambda \geq \delta$ (راهنمایی: نشان دهید هر گراف دارای مسیری با طول بزرگتر یا مساوی با δ است.)

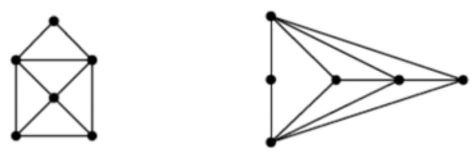
پ) اگر گراف تنها یک راس با درجه δ داشته باشد، چطور می‌توانید نتیجه قسمت قبل را بهبود دهید؟

۶. بررسی کنید کدامیک از گراف های زیر یکریخت هستند؟ (راهنمایی: از متمم استفاده کنید.)



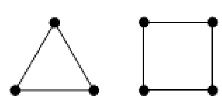
(1) (2) (3) (4) (5) (6)

۷. نشان دهید دو گراف زیر یکریخت نیستند.



۸. نشان دهید گراف Q_n برای هر $n>1$ ، دوبخشی است. برای تعداد یال‌های این گراف یک رابطه بازگشتی پیدا کنید و آن را حل کنید.

۹. برای دو گراف G_1 و G_2 شکل زیر، $G_1 \otimes G_2$ را پیدا کنید.



۱۰. نشان دهید در هرگراف G، $\delta \leq 2m/n \leq \Delta$.

۱۱. تعیین کنید تحت چه شرایطی گراف حاصل از جمع دو گراف، الف) دوبخشی است ب) گراف دور است پ) ناهمبند است.

E 1.15 Let X be the set $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ and V the set $X^{(2)}$ (therefore, V is the set of all subsets of X that have exactly 2 elements). Let us say that two elements v and w of V are adjacent if $v \cap w = \emptyset$. This adjacency relation on V defines the **Petersen** graph.[9] Draw a figure of the graph. Write the adjacency and incidence matrices of the graph. How many vertices and how many edges does the graph have?

E 1.9 The t-by-t **knight** graph is defined like this: the vertices of the graph are the squares of a chess board with t rows and t columns; two vertices are adjacent if a knight in the game of chess can jump from one of them to the other in a single move. (See figure 1.3.)

Draw a figure of the 3-by-3 knight. Write the adjacency and incidence matrices of the 3-by-3 knight graph. How many edges does the 8-by-8 knight graph have? How many edges does the t-by-t knight graph have?

E 1.16 Let V be the set of all subsets of $\{1, 2, \ldots, n\}$ that have exactly k elements, with $k \leq n/2$. Let us say that two elements v and w of V are adjacent if $v \cap w = \emptyset$. This adjacency relation on V defines the **Kneser** graph $K(n, k)$.[10]

In particular, $K(5, 2)$ is the Petersen graph. Draw figures for $K(n, 1)$, $K(n, n)$, $K(n, n-1)$, $K(4, 2)$, $K(5, 3)$, $K(6, 2)$ and $K(6, 3)$.

E 1.22 Consider k intervals of finite length, I_1, I_2, ..., I_k, on the real line. Let us say that two intervals I_i and I_j are adjacent if $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. This adjacency relation defines a graph with vertex set $\{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$. This is an **interval** graph.

Draw a figure of the graph defined by the intervals $[0, 2]$, $[1, 4]$, $[3, 6]$, $[5, 6]$ and $[1, 6]$. Write the adjacency and incidence matrices of the graph.

∘ **E 1.25** A small factory has five machines — 1, 2, 3, 4 and 5 — and six workers — A, B, C, D, E and F. The table specifies which machines each worker is allowed to operate:

A	$2, 3$	B	$1, 2, 3, 4, 5$
C	3	D	
E	$2, 4, 5$	F	$2, 5$

Draw a figure of the bipartite graph which represents the relationship between workers and machines.

E 1.31 The **bipartition matrix** of a $\{U, W\}$-bipartite graph is defined like this: each row of the matrix is an element of U, each column of the matrix is an element of W, and at the intersection of line u and column w we have a 1 if uw is an edge, and a 0 otherwise.

Write the bipartition matrix of the graph from exercise 1.25. Adopt the obvious bipartition: $U = \{A, \ldots, F\}$ and $W = \{1, \ldots, 5\}$.

▹ **E 1.40** Let G be a $\{U, W\}$-bipartite graph. Suppose G is r-regular, with $r > 0$. Show that $|U| = |W|$.

! E 1.56 Pick two natural numbers n and k and consider the following game for two players, A and B. Each iteration of the game begins with a graph G on n vertices. At the beginning of the first iteration, we have that E_G is empty. In every odd iteration (first, third, etc.), player A picks two non-adjacent vertices u and v and adds uv to the edge set of the graph. In every even iteration (second, fourth, etc.), player B does an analogous move: picks two non-adjacent vertices u and v and adds uv to the edge set of the graph. The first player to yield a graph G such that $\delta(G) \geq k$ loses the game. Problem: determine a winning strategy for A and a winning strategy for B.

E 1.76 A **wheel** is any graph in the form $G \cup H$, where G is a circuit and H is a star (see section 1.2) with center v such that $V_H \setminus \{v\} = V_G$. Draw figures of the wheels with 4, 5 and 6 vertices. What is the value of the parameters m, δ and Δ for a wheel with n vertices?

در این تمرین circuit یک دور هست و ستاره گراف $K_{1,n}$ هست. دقت کنید که در اینجا مجموعه راسهای دو گراف، اشتراک دارند.