

تاریخ: ۹۳ / ۱۰ / ۶

زمان: ۹۰ دقیقه

امتحان پایان ترم درس نظریه گراف + حل سوالات

گروه علوم کامپیوتر

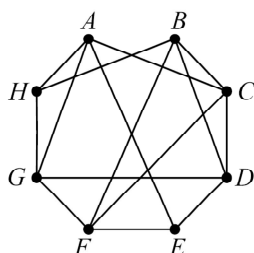
شماره دانشجویی

نام و نام خانوادگی

لطفاً جواب سوال ها را به ترتیب در برگه پاسخنامه بنویسید و برگه سوال را به همراه پاسخنامه تحویل دهید.

۱- نشان دهید اگر G گرافی n -همبند باشد آنگاه $G+K_1$ گرافی $(n+1)$ -همبند است. (۱۵ نمره) جواب در جواب تمرین

های سری ۳ و ۴



۲- فرض کنید G یک گراف دارای مسیر همیلتنی P بین دو راس u و v باشد به صورتی که

$\deg(u) + \deg(v) \geq n$. نشان دهید G همیلتنی است. با استفاده از این نکته نشان دهید

گراف مقابل همیلتنی است. (مسیر همیلتنی مسیری است که از همه راس های گراف عبور

می کند.) (۱۵ نمره) با استفاده از ایده اثبات قضیه ای از بخش گراف های همیلتنی، با توجه به این که

مجموع درجه راس های u و v از n کمتر نیست، دو راس متوالی v_i و v_{i+1} هستند که v_i به v و v_{i+1} به u متصل است. با استفاده از این

یال ها می توان مسیر را به دور تبدیل کرد. از طرفی، چون مسیر، همیلتنی است، بدیهی است که هیچ راسی خارج از این مسیر وجود

ندارد و اثبات تکمیل می شود.

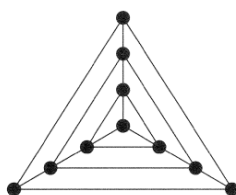
برای قسمت دوم، مسیر $B-C-D-E-F-G-H-A$ را در نظر بگیرید. مجموع درجه راس های B و A از ۸ بزرگتر است.

۳- نشان دهید هر گراف k -منظم دوبخشی دارای یک تطابق کامل است. (۱۰ نمره)

قضیه کتاب است و با استفاده از قضیه کونینگ هال اثبات می شود. اثبات هایی که بر اساس ۱-تجزیه پذیر بودن این گراف نوشته شده،

نادرست هستند، زیرا در اثبات ۱-تجزیه پذیری مستقیماً از این قضیه استفاده می شود.

۴- با ذکر دلیل های کافی، عدد رنگی گراف مقابل را به دست آورید. (۱۰ نمره)



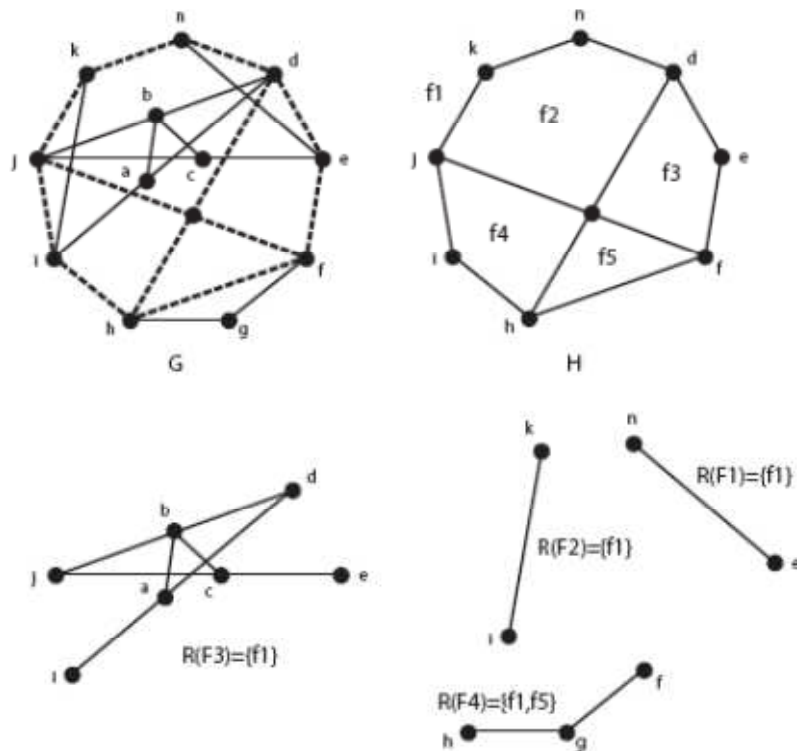
گراف دارای K_4 است، پس بنا بر قضیه، $\chi(G) \geq 4$ است. از طرفی به سادگی می توان راس های گراف

را با ۴ رنگ، رنگ کرد. پس عدد رنگی آن ۴ است.

۵- در شکل های زیر گراف G و زیرگراف H از آن داده شده اند. پاره های گراف G نسبت به H را به دست آورید. (ایده

الگوریتم را شرح دهید.) سپس برای هر پاره $R(F)$ را تعیین کنید و با استفاده مسطح بودن G را بررسی کنید. (۲۰

نمره)



گراف مسطح نیست، چون بعد از اضافه کردن یکی از پاره‌های $F1$ یا $F2$ یا $F3$ ، برای پاره دیگر نمی‌توان وجهی پیدا کرد. (هر پاره و R مربوط به آن ۲ نمره، پاره $F3$ و R مربوط به آن، ۴ نمره، الگوریتم پیدا کردن پاره، ۵ نمره و بررسی مسطح بودن، ۵ نمره دارد.)

۶- (سوال امتیازی) فرض کنید G یک گراف k -منظم با تعداد فرد راس باشد. در این صورت نشان دهید (۱۰ نمره)

$$\chi'(G) = k + 1$$

با توجه به قضیه، $k = \Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1 = k + 1$. پس کافی است نشان دهیم $\chi'(G) > k$. اگر چنین نباشد، گراف دارای یک رنگ آمیزی یالی است. مجموعه یال‌های از هر رنگ یک تطابق در گراف می‌سازند. پس تعداد آنها حداکثر $|V(G)|/2$ است. پس تعداد کل یال‌های گراف حداکثر $|E(G)| \leq k \lfloor |V(G)|/2 \rfloor < k |V(G)|/2 = |E(G)|$ است. پس اگر با k رنگ، رنگ آمیزی کنیم، همه یال‌ها رنگ نمی‌شوند. بنابراین، عدد رنگی یالی گراف $k+1$ است.

موفق باشید- مریم طهاسی