

تمرین‌های گراف سری دوم	درخت‌ها، مساله MST و فاصله‌ها	
تاریخ: ۴۰۳/۸/۱	زمان تحویل جواب: ۴۰۳/۸/۱۲	

۱. نشان دهید اگر T درختی با بیشترین درجه Δ باشد آنگاه T حداقل Δ برگ دارد.

۲. دو درخت غیر یکرخت با دنباله درجه‌های یکسان رسم کنید.

۳. نشان دهید اگر G گرافی وزن‌دار باشد که وزن یال‌های آن دوبه‌دو متمایز هستند آنگاه G حداکثر یک کوچکترین درخت فراگیر دارد.

۴. فرض کنید d_1, d_2, \dots, d_n یک دنباله از اعداد صحیح مثبت باشد. نشان دهید این دنباله درجات یک درخت است اگر و تنها اگر

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2(n-1)$$

۵. نشان دهید هر درخت با بیش از سه راس، حداقل دو راس غیربرشی دارد.

۶. نشان دهید اگر درختی دقیقاً دو برگ داشته باشد آنگاه درجه همه راس‌های غیر برگ آن ۲ است.

۷. اگر e یالی با کمترین وزن در گراف وزن‌دار G باشد، آیا این یال عضو هر کوچکترین درخت فراگیر G هست؟ چرا؟

۸. نشان دهید هر درخت m تایی با l برگ دارای ارتفاع بزرگتر یا مساوی با $\log_m l$ است.

۹. الگوریتمی شرح دهید که در حین اجرای DFS مقدار نقطه پایین راس‌ها را نیز محاسبه کند.

۱۰. اثبات یا رد کنید:

اگر B بلوکی در گراف G و u اولین راسی از B باشد که DFS ملاقات کرده است، آنگاه برای هر راس $v \in V(B)$ داریم،

$$l(v) = dfi(u)$$

۱۱. فرض کنید G یک گراف همبند وزن‌دار باشد و T را MST آن در نظر بگیرید. نشان دهید T یکتاست اگر و تنها اگر وزن هر یال

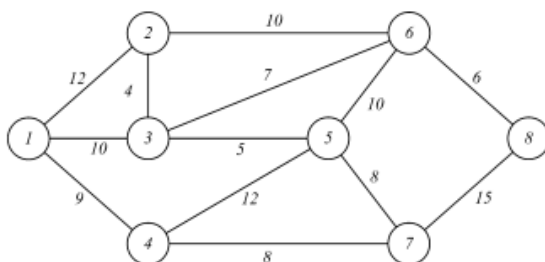
e که در T نیست از وزن همه یال‌های دور $T+e$ بیشتر باشد.

۱۲. نشان دهید اگر G یک گراف ساده با n راس و قطر ۲ و $\Delta = n-2$ باشد، آنگاه $|E| \geq 2n-4$.

۱۳. اثبات یا رد کنید: اگر G گرافی با قطر ۲ باشد آنگاه G^c یک راس تنها دارد.

۱۴. برای هر عدد صحیح $r \geq 1$ ، یک گراف r -منظم با قطر ۲ بیابید.

۱۵. کوچکترین درخت فراگیر گراف زیر را با استفاده از دو الگوریتم کروسکال و بروفکا پیدا کنید.



۱۶. جدول زیر فاصله بین هرزوج از ۶ روستا در جنوب هندوستان را نشان می دهد. با استفاده از الگوریتم پریم، کوچکترین درخت فراگیر این روستا ها را به دست آورید.

Table 5.23

	A	B	C	D	E	F
A	—	5	6	12	4	7
B	5	—	11	3	2	5
C	6	11	—	8	6	6
D	12	3	8	—	7	9
E	4	2	6	7	—	8
F	7	5	6	9	8	—

2.1.22. Let T be an n -vertex tree having one vertex of each degree i with $2 \leq i \leq k$; the remaining $n - k + 1$ vertices are leaves. Determine n in terms of k .

2.1.23. Let T be a tree in which every vertex has degree 1 or degree k . Determine the possible values of $n(T)$.

2.1.32. Prove that an edge e of a connected graph G is a cut-edge if and only if e belongs to every spanning tree. Prove that e is a loop if and only if e belongs to no spanning tree.

۱۷. تمرین با نمره اضافی: ساختمان داده ای برای اجرای الگوریتم کروسکال در $O(m \log n)$ پیشنهاد کنید. راهنمایی: این ساختمان داده باید بتواند وجود دور بین دو راس را در زمان کمتر از $O(n)$ تعیین کند.